BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CATEGORÍAS CON APLICACIONES EN TOPOLOGÍA

TESIS

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Jessica Torres Flores

Director de tesis:
Dr. Agustín Contreras Carreto

PUEBLA, PUE. Abril de 2023

Para aquel pequeño ser,
que creció conmigo durante 18 años
acompañándome en mi regazo
aún en sus últimos momentos.

Agradecimientos

A mi familia: por el apoyo incondicional de mi madre en cada idea que tengo; a mi padre por la tranquilidad y consejos que me transmite en cada platica; a mi hermana Nancy a quien, a pesar de lo opuestas que somos, le debo el haber llegado hasta aquí; a mi hermano quien, por el contrario, me acompañó en cada momento de ocio y a Quetzalli quien es una constante motivación.

A mis amigos, por quienes me siento la persona más afortunada, por cada tarde (noche) estudiando, jugando juegos de mesa o simplemente platicando. Las reuniones para desayunar, ponernos al tanto después de tiempo sin vernos y quejarnos de la vida, hicieron estos últimos años más llevaderos. Me encantaría mencionar aquí lo que agradezco de cada uno de ustedes, pero me acabaría esta página y no terminaría.

A mis profesoras de matemáticas, por encaminarme a tomar la decisión de estudiar esta carrera y, en especial, a mi profesora de Arte que durante muchos años me hizo dudar de qué elegir.

Al profesor Manuel Ibarra, por su paciencia para explicarnos y su dedicación para enseñarnos. Las platicas de los exámenes en grupo y los seminarios que hicimos, reafirmaron mi decisión de estudiar Matemáticas.

A aquellos compañeros que tuve al ser oyente en sus clases de maestría, por tener la amabilidad y paciencia de enseñarme lo que no entendía y resolver mis dudas sobre cómo es estudiarla.

A mi asesor de tesis, Agustín Contreras, a quién le tengo un sincero aprecio y a quien, sin saberlo, me ayudo a decidirme por la investigación.

Introducción

Las matemáticas avanzan a un ritmo impresionante y se diversifican cada vez más. Sin embargo, se presentan entre sus diferentes ramas definiciones, propiedades y construcciones en común. La Teoría de Categorías se encarga de descubir y estudiar estas estructuras en común. Una de las más estudiadas es la de espacios topológicos que nos brinda propiedades bien conocidas como lo son las topologías finales e iniciales. El propósito de esta tesis es presentar una introducción a la Topología Categórica desde los conceptos básicos en Teoría de Categorías hasta llegar al concepto de categorías topológicas y funtores topológicos con una noción similar a las últimas propiedades mencionadas; tomando como base el artículo *Categorical Topology* de Ryosuke Nakagawa (1989).

Comenzaremos dando los conceptos básicos de categorías y funtores [Capítulo 1], así como los ejemplos más utilizados; luego definimos diferentes tipos de monomorfismos y epimorfismos [Capítulo 2], también equivalencias de éstos en distintas categorías como **Grp**, **Top**, **Set** o algunas de sus subcategorías; luego introducimos conceptos importantes como factorización de morfismos, categorías bien potenciadas y el principio de dualidad; después definimos el límite de un diagrama en una categoría **A** sobre una pequeña **K** [Capítulo 3], describiendo los más comunes de ellos así como ejemplos en distintas categorías y mencionando los conceptos duales.

Continuamos generalizando los conceptos anteriores: como en [Capítulo 4], donde hablamos de categorías $\mathbf{K}-$completas, completas o finitamente completas y sus equivalencias; o en [Capítulo 5], donde pasamos de factorizaciones de morfismos a (Ex epi, Mono)-factorizaciones lo que introduce conceptos como categorías (Ex epi, Mono)-factorizables, o bien, la propiedad (Ex epi, Mono)-diagonalización y sus duales, presentando condiciones para que una categoría lo cumpla. En el Capítulo 6 definimos las subcategorías reflexivas, las cuales juegan un rol importante en las siguientes páginas, también introducimos el concepto de separador, presentando ejemplos y condiciones para que una categoría sea completa, así como la relación entre las subcategorías reflexivas y sus límites. Con la ayuda de los funtores inclusión E y reflector R, presentamos los Teoremas de Caracterización tanto para subcategorías reflexivas como coreflexivas [7], introduciendo la noción de categorías cerradas para generalizarla a fuertemente cerradas.

En el Capítulo 8, continuamos generalizando: de (Ex epi, Mono)-factorizaciones a (E, M)-factorizable, categorías co-bien potenciadas a E-co-bien potenciadas, el Teorema de Caracterización de Subcategorías Reflexivas a Subcategorías E-reflexivas. Concluimos con la investigación en funtores topológicos [Capítulo 9] y categorías topológicas [Capítulo 10], mostrando sus definiciones, en especial la definición de categorías topológicas que mostramos aquí es una equivalencia a la dada por Adamek, Herrlich, y Strecker, así como algunos de los resultados fundamentales que podemos estudiar.

Índice general

Capítulo 1

Categorías y funtores

A lo largo de este capítulo utilizaremos colecciones de conjuntos, en especial la colección de todos los espacios topológicos en donde, como es bien sabido, no es considerada un conjunto por lo que necesitamos la noción de *clase*. Así, tomaremos como clase a una colección de conjuntos con cierta propiedad P.
Los conjuntos pueden ser considerados clases y son llamados clases pequeñas, de esta manera las clases que no son conjuntos las llamaremos clases propias. Naturalmente podemos crear nuevas clases a través de uniones, intersecciones o productos de otras, así como definir funciones o relaciones entre ellas. Ahora sí, podemos comenzar con la definición de categoría:

Definición 1.1. Una categoría $\mathbf{A}$ consiste de dos clases O y M, dos funciones dom y cod de M a O y una función $\circ$ de $D = \{(f,g)|f,g \in M \text{ y } \mathrm{cod}f = \mathrm{dom}g\}$ a M que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Si $(f,g) \in D$, entonces $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}f$ y $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}g$, donde $g \circ f$ denota $\circ(f,g)$ y es llamada la composición de f con g.

(2) Si $(f,g),(g,h) \in D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(3) Para cada $X \in O$, existe un elemento $e \in M$ tal que $\mathrm{dom}e = X$, $f \circ e = f$ con $\mathrm{dom}f = X$ y $e \circ g = g$ con $\mathrm{cod}g = X$

(4) Para cada par (X,Y) donde X,Y están en O, la clase $[X,Y] = \{f|f \in M, \mathrm{dom}f = X\text{y } \mathrm{cod}f = Y\}$ es un conjunto.

Los elementos de O son llamados objetos de $\mathbf{A}$ y los de M morfismos de $\mathbf{A}$, o bien, $\mathbf{A}$-objetos y $\mathbf{A}-$morfismos. La clase O es denotada por Ob $\mathbf{A}$ y M por Mor$\mathbf{A}$, si es necesario, utilizaremos la notación $dom_{\mathbf{A}}$, $cod_{\mathbf{A}}$,$\circ_{\mathbf{A}}$, $D_{\mathbf{A}}$ y $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$. Además, para cada X objeto de $\mathbf{A}$ se puede demostrar que el morfismo e dado en (3) es único así que lo llamaremos $\mathbf{A}-$identidad de X y lo denotaremos por 1_X.
Notemos que, si $\mathbf{A}$ es una categoría, la clase Ob$\mathbf{A}$ puede ser considerada una subclase de Mor$\mathbf{A}$ mediante una identificación de cada A-objeto X con su identidad 1_X, y así las categorías pueden ser definidas como clases de morfismos que satisfacen ciertas condiciones; podemos definir ciertos tipos de categorías, en especial:

Definición 1.2. Existe una categoría $\mathbf{A}$ tal que Mor $\mathbf{A}$ es la clase vacía, la cual es llamada *categoría vacía*. Si una categoría $\mathbf{A}$ tiene un solo objeto X, Mor$\mathbf{A}$ es un conjunto el cual tiene una estructura de semigrupo con la unidad 1_X. De igual manera, un semigrupo con una unidad puede ser considerado como una categoría de un solo objeto.

Una categoría **A** es pequeña cuando Mor**A** es un conjunto (o equivalentemente, que Ob**A** sea un conjunto).

Una categoría **A** será discreta cuando cada morfismo en **A** es una identidad de algún objeto en A, en otras palabras, cuando exista una biyección de Ob**A** a Mor**A**.

Comencemos con ejemplos de las categorías más utilizadas:

Ejemplo 1. (1) **Set:** *la categoría de conjuntos.* Ob**Set** es la clase de todos los conjuntos, Mor**Set** es la clase de toda las funciones entre conjuntos y la composición usual entre ellas.

(2) **Grp:** *la categoría de grupos.* Ob**Grp** es la clase de todos los grupos, Mor**Grp** es la clase de todos los morfismos de grupos con la composición como en (1).

(3) **Top:** *la categoría de espacios topológicos.* Ob**Top** es la clase de todos los espacios topológicos, Mor**Top** es la clase de todas las funciones continuas entre espacios topológicos y la composición como en (1).

(4) **pTop:** *la categoría de los espacios topológicos con punto fijo.* Ob**pTop** es la clase de todas las parejas (X, x_0) donde X es un espacio topológico y x_0 es un elemento de X llamado punto base, Mor**pTop** es la clase de todas las funciones continuas que preservan el punto base, donde la composición es como en (1)

(5) *Productos de categorías*: Si **A** y **B** son categorías, entonces el producto de categorías $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ de **A** y **B** consiste de Ob$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ =Ob$\mathbf{A}\times$Ob$\mathbf{B}$, Mor$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ =Mor$\mathbf{A}\times$Mor$\mathbf{B}$, dom=dom$_{\mathbf{A}}\times$dom$_{\mathbf{B}}$, cod=cod$_{\mathbf{A}}\times$cod$_{\mathbf{B}}$ y $\circ$ está definida por $(h,k)\circ(f,g) = (h\circ_{\mathbf{A}} f, k\circ_{\mathbf{B}} g)$ donde $(f,g),(h,k)\in$Mor$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ con $(f,h)\in D_{\mathbf{A}}$ y $(g,k)\in D_{\mathbf{B}}$

Comenzaremos con una serie de definiciones necesarias para los resultados que presentaremos más adelante, así mismo las acompañaremos de ejemplos con el fin de hacerlos más digeribles.

Definición 1.3. Sean **A** y **B** categorías. **B** es una subcategoría de **A** si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Existe una inclusión i :Ob**B**→Ob**A**

(2) Existe una inclusión j :Mor**B**→Mor**A**

(3) $i\bullet \mathrm{dom}_{\mathbf{B}} = \mathrm{dom}_{\mathbf{A}}\bullet j$, $i\bullet \mathrm{cod}_{\mathbf{B}} = \mathrm{cod}_{\mathbf{A}}\bullet j$ y $j\bullet\circ_{\mathbf{B}} = \circ_{\mathbf{A}}\bullet k$, donde $\bullet$ significa la composición de funciones entre clases y k es una función de $D_{\mathbf{B}}$ a $D_{\mathbf{A}}$ definida por $k(f,g) = (j(f), j(g))$.

(4) Para cada $X\in$Ob**B**, $j(\mathbf{B} - \text{identidad de}X) = \mathbf{A}-$identidad de $i(X)$

Una subcategoría **B** de una categoría **A** es *plena* si, para todo $X, Y\in$Ob**B**, $j([X,Y]_{\mathbf{B}}) = [X,Y]_{\mathbf{A}}$.

Ejemplo 2. (1) La categoría de grupos abelianos, denotada por **Ab**, es una subcategoría plena de **Grp**.

(2) La categoría de T_i-espacios, denotada por $\mathbf{Top}_i$, es una subcategoría plena de **Top** cuya clase de objetos es la de todos los T_i-espacios para $i = 1, 2, 3$.

(3) Intersecciones de categorías: Sea **A** una categoría, Λ una clase y $\mathbf{A}_\lambda$ una subcategoría de **A** para cada $\lambda\in\Lambda$. Entonces podemos definir una intersección $\bigcap_{\lambda\in\lambda}\mathbf{A}_\lambda$ de la clase $(\mathbf{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subcategorías donde Ob$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{A}_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}Ob\mathbf{A}_\lambda$ y Mor$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{A}_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}Mor\mathbf{A}_\lambda$.

Definición 1.4. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ categorías. $\mathbf{D}$ es una categoría cociente de $\mathbf{C}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Ob$\mathbf{D}$=Ob$\mathbf{C}$

(2) Existe una sobreyección m : Mor$\mathbf{C} \to$ Mor$\mathbf{D}$.

(3) $\text{dom}_{\mathbf{D}} \bullet m = \text{dom}_{\mathbf{C}}$, $\text{cod}_{\mathbf{D}} \bullet m = \text{cod}_{\mathbf{C}}$ y $m \bullet \circ_{\mathbf{C}} = \circ_{\mathbf{D}} \bullet n$, donde n es una función de $D_{\mathbf{C}}$ a $D_{\mathbf{D}}$ definida por $n(f,g) = (m(f), m(g))$

La categoría de espacios topológicos homotópicos, **hTop** es una categoría cociente de **Top** por la relación de equivalencia *"homotópica"*. En este ejemplo, $m(f) = [f]$ y para $(f,g) \in D_{\mathbf{C}}$, $m \bullet \circ_{\mathbf{C}}(f,g) = \circ_{\mathbf{D}} \bullet n(f,g)$ nos dice que $[g \circ_{\mathbf{C}} f] = [g] \circ_{\mathbf{D}} [f]$.

Definición 1.5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías. $\mathbf{B}$ es una categoría dual (u opuesta) de $\mathbf{A}$ si se cumple que:

(1) Ob$\mathbf{B}$ =Ob$\mathbf{A}$

(2) Mor$\mathbf{B}$ =Mor$\mathbf{A}$

(3) Para la identidad i : Mor$\mathbf{B} \to$ Mor$\mathbf{A}$, $\text{dom}_{\mathbf{B}} = \text{cod}_{\mathbf{A}} \bullet i$ y $\text{cod}_{\mathbf{B}} = \text{dom}_{\mathbf{A}} \bullet i$

(4) Para la función $j : D_{\mathbf{B}} \to D_{\mathbf{A}}$ definida por $j(f,g) = (i(g), i(f))$, $i \bullet \circ_{\mathbf{B}} = \circ_{\mathbf{A}} \bullet j$

Para cualquier categoría $\mathbf{A}$, la categoría dual $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ puede ser construida de tal manera que cumpla las condiciones y será denotada por $\mathbf{A}^{OP}$. Naturalmente $(\mathbf{A}^{OP})^{OP} = \mathbf{A}$.

Definición 1.6. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías. Un funtor F de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ es una función de Mor$\mathbf{A}$ a Mor$\mathbf{B}$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) Si $\text{cod}_{\mathbf{A}} f = \text{dom}_{\mathbf{A}} g$, entonces $\text{cod}_{\mathbf{B}} F(f) = \text{dom}_{\mathbf{B}} F(g)$.

(2) $F \bullet \circ_{\mathbf{A}} = (F(f), F(g))$.

(3) Si e es una $\mathbf{A}-$identidad de $X \in$Ob$\mathbf{A}$, entonces $F(e)$ es una $\mathbf{B}-$identidad de $Y = \text{dom}_{\mathbf{B}} F(e)$

Un funtor de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ será denotado por $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ serán el dominio y codominio de F respectivamente. También para cualquier objeto X de $\mathbf{A}$, $\text{dom}_{\mathbf{B}} F(1_X)$ es denotado por $F(X)$. Por lo que podemos definir a un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ como un par de funciones que cumplen las siguientes condiciones:

(1) Para $f : X \to Y \in$Mor$\mathbf{A}$, entonces $F(f) : F(X) \to F(Y) \in$Mor$\mathbf{B}$.

(2) Para $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos de $\mathbf{A}$, entonces $F(g \circ_{\mathbf{A}} f) = F(g) \circ_{\mathrm{B}} F(f)$ en Mor$\mathbf{B}$

(3) $F(1_X) = 1_{F(X)}$

Para dos funtores, $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, podemos definir el funtor $G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ por la función $G \bullet F$:Mor$\mathbf{A} \to$Mor$\mathbf{C}$. El funtor $G \circ F$ se lee como la *composición de F y G*.

Si $\mathbf{B}$ es una subcategoría de $\mathbf{A}$ con las inclusiones i :Ob$\mathbf{B} \to$Ob$\mathbf{A}$ y j :Mor$\mathbf{B} \to$Mor$\mathbf{A}$, en donde j satisface las condiciones de la Definición 1.6, entonces tendríamos un funtor $j : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, al cual llamaremos *funtor inclusión*. Ahora, si además $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, diremos que el funtor inclusión $j : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ es un *funtor identidad* y será denotado por $1_{\mathbf{A}}$, un ejemplo de ésto sería el siguiente:

Ejemplo 3. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos X y Y, donde $|f| : |X| \to |Y|$ una función entre sus conjuntos adjuntos. Entonces F :Mor**Top**$\to$Mor**Set** definido por $F(f) = |f|$ define un funtor F :**Top**$\to$**Set**, el cual es llamado *funtor que olvida.*

Antes de ver el siguiente ejemplo necesitamos la definición de funtor contravariante.

Definición 1.7. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías. Un *funtor contravariante* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es una función F de Mor$\mathbf{A}$ a Mor$\mathbf{B}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $\mathrm{cod}_{\mathbf{A}} f = \mathrm{dom}_{\mathbf{A}} g$, entonces $\mathrm{dom}_{\mathbf{B}} F(f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{B}} F(g)$.

2. $F \bullet \circ_{\mathbf{A}} = \circ_{\mathbf{B}} \bullet F''$, donde F'' es una función de $D_{\mathbf{A}}$ a $D_{\mathbf{B}}$ tal que $F''(f, g) = (F(g), F(f))$.

3. Si e es una $\mathbf{A}-$identidad de X $\in$Ob$\mathbf{A}$, entonces $F(e)$ es una $\mathbf{B}-$identidad de $Y = dom_{\mathbf{B}} F(e)$

Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ son funtores contravariantes entonces la composición $G \bullet F$ de las funciones F :Mor$\mathbf{A}$ $\to$Mor$\mathbf{B}$ y G :Mor$\mathbf{B}$ $\to$Mor$\mathbf{C}$ induce un funtor $G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$. Cuando uno de los funtores, F o G, es un funtor contravariante entonces $G \circ F$ será un funtor contravariante.

Si $\mathbf{A}^{OP}$ es una categoría dual de $\mathbf{A}$, una función identidad i :Mor$\mathbf{A}$ $\to$Mor$\mathbf{A}^{OP}$. induce un funtor contravariante $i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{OP}$. De esta manera, para cualquier funtor contravariante $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, tenemos un funtor $F' : \mathbf{A}^{OP} \to \mathbf{B}$ tal que $F = F' \circ i$, es decir, para $f : X \to Y$ morfismo de $\mathbf{A}$, $f' = i(f) : Y \to X$ está en $\mathbf{A}^{OP}$ definiendo así $F'(f') = F(f)$. Ahora sí, podemos enunciar el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Sea $\mathbf{A}$ una categoría arbitraria, X $\in$Ob$\mathbf{A}$ y $g \in [Y, Z]_{\mathbf{A}}$. Para $f \in [X, Y]_{\mathbf{A}}$, sea $F_X(g)(f) = g \circ_{\mathbf{A}} f : X \to Y$. Entonces tenemos una función $F_X(g) : [X, Y]_{\mathbf{A}} \to [X, Z]_{\mathbf{A}}$, el cual es un morfismo de **Set**, así obtenemos un funtor $F_X : \mathbf{A} \to$**Set**. Ahora, si definimos una función $G^X(g) : [Z, X]_{\mathbf{A}} \to [Y, X]_{\mathbf{A}}$ por $G^X(g)(h) = h \circ g : Y \to X$ para $h \in [Z, X]_A$, obtenemos un funtor contravariante $G^X : A \to$**Set.**

Capítulo 2

Monomorfismos y epimorfismos

Hablaremos ahora de dos conceptos importantes *monomorfismos y epimorfismos.* así como resultados que se derivan de éstos.

Definición 2.1. Si $f : X \to Y$[1] es un morfismo de una categoría $\mathbf{A}$, entonces

- f es un *isomorfismo* en $\mathbf{A}$ (o un $\mathbf{A}-$isomorfismo) si existe un $\mathbf{A}-$morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.
- f es una *sección* en $\mathbf{A}$ si existe un $\mathbf{A}-$morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$.
- f es una *retracción* en $\mathbf{A}$ si existe un $\mathbf{A}-$morfismo $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.

Como es costumbre, g será llamado *morfismo inverso* (o simplemente inverso) de f, en el caso de los últimos dos incisos agregaremos *por la de izquierda* y *por la derecha*, respectivamente, al nombre de g.

Definición 2.2. Si $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathbf{A}$, entonces f es un

- *monomorfismo* en $\mathbf{A}$ si, para cada par de morfismos $u, v : Z \to X$ se tiene que $f \circ u = f \circ v$ implica que $u = v$
- *epimorfismo* en $\mathbf{A}$ si, para cada par de morfismos $u, v : Y \to Z$ se cumple que $u \circ f = v \circ f$ implica que $u = v$

De estas dos definiciones obtenemos tres observaciones:

Observación 2.1.

1. f tiene inversa única.
2. Si f es $\mathbf{A}$-sección entonces es $\mathbf{A}$-monomorfismo.
3. Si f es $\mathbf{A}$-retracción entonces es $\mathbf{A}$-epimorfismo.

En efecto, si $f : X \to Y$ es A-isomorfismo entonces al ser $\mathbf{A}$-sección y $\mathbf{A}$-retracción existen $g, h : Y \to X$ tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ h = 1_Y$ luego $g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_x \circ h = h$, por lo que $g = h$ y será denotada por f^{-1}.
Ahora, si f es $\mathbf{A}$-sección, existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$, tomando $u, v : Z \to X$ morfismos que cumplen: $f \circ u = f \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, luego $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$ así $1_X \circ u = 1_X \circ v$ por lo tanto $u = v$. De manera análoga podemos demostrar 3.

[1]Utilizaremos la notación $f : X \to Y$ para representar un morfismo f con $\mathrm{dom} f = X$ y $\mathrm{cod} f = Y$

Proposición 2.3. *Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : X \to Z$ son morfismos de una categoría $\boldsymbol{A}$ tales que $h = g \circ f$.*

(1) Si f y g son monomorfismos en A, entonces h es un monomorfismo en $\boldsymbol{A}$.

(2) Si f y g son epimorfismos en $\boldsymbol{A}$, entonces h es un epimorfismo en $\boldsymbol{A}$.

(3) Si h es un monomorfismo en $\boldsymbol{A}$, entonces f es un monomorfismo en $\boldsymbol{A}$.

(4) Si h es un epimorfismo en $\boldsymbol{A}$, entonces g es un epimorfismo en $\boldsymbol{A}$.

Demostración. (1) Supongamos que f y g son monomorfismos y sean $u, v : W \to X$ morfismos en $\mathbf{A}$ tales que $h \circ u = h \circ v$ luego $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$, como g es monomorfismo por hipótesis se tiene $f \circ u = f \circ v$ y también f lo es así que $u = v$.

(2) es similar a *(1)*.

(3) Supongamos que h es monomorfismo en $\mathbf{A}$ y veamos que f también lo es. Sean $u, v : W \to X$ tales que $f \circ u = f \circ v$ luego $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$ así $h \circ u = h \circ v$, como h es monomorfismo se tiene que $u = v$.

(4) análogo a *(3)*.

□

Definición 2.4. Un morfismo de $\mathbf{A}$ es un *bimorfismo* en $\mathbf{A}$ si es ambos: monomorfismo y epimorfismo en $\mathbf{A}$.

Una categoría es *balanceada* si todo $\mathbf{A}$-bimorfismo es $\mathbf{A}$-isomorfismo

Ejemplo 5. **Set**, **Grp**, **Ab** son balanceadas, ésto se sigue de la proposición que se expresa a continuación; mientras que **Top** y $\mathbf{Top}_i$ para $i = 1, 2, 3$ no lo son.

Proposición 2.5. *Para las categorías **Set**, **Grp** y **Ab**,*

(1) un morfismo $f : X \to Y$ es un monomorfismo si y sólo si es inyectiva.

(2) f es un epimorfismo si y sólo si es sobreyectiva.

Demostración. 1. Supongamos que $f : X \to Y$ es un monomorfismos y sean $x, x' \in X$ tales que $f(x) = f(x')$ luego $f \circ 1_X(x) = f \circ 1_X(x')$ por ser f monomorfismo $1_X(x) = 1_X(x')$ así $x = x'$. Ahora si f es inyectiva y $u, v : Z \to X$ son morfismos tales que $f \circ u = f \circ v$ entonces para cada $x \in X$, $f(u(x)) = f(v(x))$ por ser inyectiva $u(x) = v(x)$ por lo tanto $u = v$.

2. Veremos la demostración para **Grp**:
$\Rightarrow$]Probaremos que si f no es sobre entonces f no es epimorfismo.
Supongamos que f no es sobre; entonces $f(X) \subsetneq Y$. Sea $S = \{yf(X) : y \in Y\} \cup \{P\}$ donde $yf(X)$ es una clase lateral izquierda y P es un elemento que no es una clase lateral. Sea Z el conjunto de todas las funciones biyectivas que van de S a S. Para $\alpha, \beta \in Z$ definimos la multiplicación $\alpha\beta$ como la composición $\alpha \circ \beta$, así Z se convierte en un grupo con esta multiplicación. Definamos los elementos $\alpha_0, r(y), s(y) \in Z$ para cada $y \in Y$ como sigue:

$$\alpha_0(P) = f(X), \quad \alpha_0(f(X)) = P \quad \text{y} \quad \alpha_0(y'f(X)) = y'f(X) \quad \text{si } y' \notin f(X)$$

$$r(y)(P) = P, r(y)(y'f(X)) = yy'f(X) \quad \text{para } y' \in Y$$

$$\text{y} \quad s(y) = \alpha_0 r(y)\alpha_0^{-1}$$

Entonces $r, s : Y \to Z$ son homomorfismos tales que $r \circ f = s \circ f$ pues para cada $x \in X$

$$s \circ f(x) = s(f(x)) = \alpha_0 r(f(X))\alpha_0^{-1}, r \circ f(x) = r(f(x)) : S \to S$$

donde

$$s(f(x))(P) = \alpha_0 r(f(x))\alpha_0^{-1}(P) = \alpha_0 r(f(x))(f(X)) = \alpha_0(f(X)) = P = r(f(x))(P)$$

Si $y \in f(X)$

$$\begin{aligned} s(f(x))(yf(X)) &= s(f(x))(f(X)) = \alpha_0 r(f(x))\alpha_0^{-1}(f(X)) = \alpha_0 r(f(x))(P) = \alpha_0(P) \\ &= f(X) \\ \text{y } r(f(x))(yf(X)) &= r(f(x))(f(X)) = f(x)f(X) = f(X) \quad \text{así} \\ s(f(x))(yf(X)) &= r(f(x))(yf(X)) \end{aligned}$$

Ahora, si $y \notin f(X)$

$$\begin{aligned} s(f(x))(yf(X)) &= \alpha_0 r(f(x))\alpha_0^{-1}(yf(X)) = \alpha_0 r(f(x))(yf(X)) = \alpha_0(f(x)yf(X)) \\ &= f(x)yf(X) = r(f(x))(yf(X)) \end{aligned}$$

Además $r \neq s$ pues para $y \notin f(X)$ se tiene que $r(y)(P) = P$ mientras que $s(y)(P) = \alpha_0 r(y)\alpha_0^{-1}(P) = \alpha_0 r(y)(f(X)) = \alpha_0(yf(X)) = yf(X)$.
Por lo tanto f no es epimorfismo.

$\Leftarrow$]Supongamos que f es sobre y sean $u, v : Y \to Z$ morfismos tales que $u \circ f = v \circ f$ veamos que $u = v$.
Sea $y \in Y$, como f es sobre, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ así $u(y) = u(f(x)) = u \circ f(x) = v \circ f(x) = v(f(x)) = v(y)$. Por lo tanto f es epimorfismo.

□

Proposición 2.6. *En cualquier subcategoría plena de **Top**,*

(1) un morfismo es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo.

(2) un morfismo es un monomorfismo si y sólo si es inyectivo.

Demostración. 1. Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo en cualquier subcategoría plena de **Top**, entonces f es continua y existe $f^{-1} : Y \to X$ en la subcategoría tal que $f \circ f^{-1} = 1_Y$ y $f^{-1} \circ f = 1_X$; como f^{-1} es un morfismo de la subcategoría de **Top**, es continua por lo tanto f es homeomorfismo. Ahora, sí f es un homeomorfismo, entonces es continua y tiene inversa continua; por lo que f^{-1} está en **Top** y al ser una subcategoría plena se tiene que f^{-1} está en la subcategoría, por lo tanto f es isomorfismo.

2. La demostración es como en la Proposición 2.5.

□

Proposición 2.7. *(1) En **Top** y **Top**$_1$, un morfismo es epimorfismo si y sólo si es sobreyectiva.*

(2) En ***Top***$_2$ *y* ***Top***$_3$*, un morfismo* $f : X \to Y$ *es un epimorfismo si y sólo si es una función densa, es decir,* $f(X)$ *es un subconjunto denso de* Y*.*

(3) En ***Top***$_0$*, un morfismo* $f : X \to Y$ *es un epimorfismo si y sólo si para cada* $y \in Y$ *y* V *una vecindad de* y*, se tiene que la intersección* $V \cap f(X) \cap Cl\{y\}$ *es no vacía.*

Demostración. (1) (En **Top**) $\Rightarrow$]Probaremos la contrarrecíproca, supongamos que f no es sobre entonces existe $y_0 \in Y$tal que $y_0 \notin f(X)$. Sea Z el espacio indiscreto[2] con dos elementos $\{0, 1\}$. Definamos $h, k : Y \to Z$ como sigue: $h \equiv 0$ y k donde para cada $y \in Y$

$$k(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \in f(X) \\ \\ 1 & si \quad y \notin f(X) \end{cases}$$

Tenemos que h y k son continuas pues toda función cuyo codominio tiene la topología indiscreta es continua, y además $h \neq k$ pues para y_0, $h(y_0) = 0 \neq 1 = k(y_0)$. Pero para toda $x \in X$, $h \circ f(x) = h(f(x)) = 0$ y $k \circ f(x) = k(f(x)) = 0$.

Ahora, si $f : X \to Y$ es sobreyectiva y sean $u, v : Y \to Z$ tales que $u \circ f = v \circ f$. Entonces, para cada $y \in Y$, existe $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Luego $u(y) = u \circ f(x_y) = v \circ f(x_y) = v(y)$, por lo tanto $u = v$.

(3) Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{Top}_0$ y $b(f(X)) = \{y \in Y :$ para cada vecindad V de $y, V \cap f(X) \cap \mathrm{Cl}\{y\} \neq \emptyset\}$. Tenemos que, para $y \in f(X)$, si V es una vecindad de y, entonces $y \in V$ y $y \in \mathrm{Cl}\{y\}$, por lo que $y \in V \cap f(X) \cap \mathrm{Cl}\{y\}$. De esta manera, $f(X) \subseteq b(f(X))$.
$\Rightarrow$]Supongamos que $b(f(X)) \subsetneq Y$, entonces existen $y_0 \in Y$ que no pertenece a $b(f(X))$. Sea $\{P, Q\}$ el espacio discreto de dos puntos, $Z = Y \times \{P, Q\}$ el espacio producto con las funciones $j, k : Y \to Z$ donde $j(y) = (y, P)$ y $k(y) = (y, Q)$ podemos definir la relación de equivalencia:

$$\begin{array}{lll} (y, P) \sim (y', P) & \text{si y sólo si} & y = y' \\ (y, Q) \sim (y', Q) & \text{si y sólo si} & y = y' \\ (y, P) \sim (y', Q) & \text{si y sólo si} & y = y' \in b(f(X)) \end{array}$$

Sea $Z' = Z/\sim$ el cociente de Z con esta equivalencia así como $q : Z \to Z'$ la función que envía cada elemento de Z a su clase de equivalencia, se puede probar que Z' es un espacio T_0. Definamos ahora las funciones $r = q \circ j, s = q \circ k : Y \to Z'$ en $\mathbf{Top}_0$, las cuales cumplen: $r \circ f = s \circ f$. Pues si $x \in X$, entonces $f(x) \in b(f(X))$ por lo que

$$\begin{aligned} r \circ f(x) &= r(f(x)) = q \circ j(f(x)) = q(f(x), P) = q(f(x), Q) = q \circ k(f(x)) = s(f(X)) \\ &= s \circ f(x) \end{aligned}$$

Pero $r \neq s$ pues para $y_0 \in Y$, $r(y_0) = q \circ j(y_0) = q(y_0, P) \neq q(y_0, Q) = q \circ k(y_0) = s(y_0)$ ya que $y_0 \notin b(f(X))$. Por lo tanto f no es epimorfismo.
$\Leftarrow$] Supongamos que $b(f(X)) = Y$ y sean $u, v : Y \to Z$ T_0-morfismos tales que $u \circ f = v \circ f$. Si $u \neq v$, es decir, si existiera y_0 en Y tal que $u(y_0) \neq v(y_0)$ por ser Z un espacio T_0, sin pérdida de generalidad, existe abierto U en Z que contiene a $u(y_0)$ pero no a $v(y_0)$, como

[2] X es el espacio indiscreto si τ, su topología, es la indiscreta; es decir, $\tau = \{\emptyset, X\}$.

u es continua se tiene que $u^{-1}(U)$ es un abierto en Y y por tanto una vecindad de y_0, al ser éste un elemento de $b(f(X))$ por hipótesis, existe $y' \in u^{-1}(U) \cap f(X) \cap \mathrm{Cl}\{y_0\}$ de aquí que exista $x' \in X$ tal que $f(x') = y'$, $y' \in \mathrm{Cl}\{y_0\}$ y $u(y') \in U$, luego $u(y') = u(f(x')) = u \circ f(x') = v \circ f(x') = v(f(x')) = v(y')$, $v(y') \in v(\mathrm{Cl}\{y_0\}) \subset \mathrm{Cl}\{v(y_0)\}$ por ser f continua y U es vecindad de $v(y')$ por lo que $u(y') \in \mathrm{Cl}\{v(y_0)\}$ para U vecindad de $v(y')$ se tiene que $U \cap \{v(y_0)\} \neq \emptyset$ pero $v(y_0) \notin U$ lo cual es absurdo, por lo que $u = v$ y así f es epimorfismo en T_0.

(2) Supongamos que f es densa, pero no es epimorfismo entonces existen $u, v : Y \to Z$ tales que $u \circ f = v \circ f$ pero $u \neq v$ es decir, existe $y_0 \in Y$ tal que $u(y_0) \neq v(y_0)$, para $\{v(y_0)\}$ cerrado y $u(y_0) \in Z \setminus \{v(y_0)\}$ por ser Z regular existen U, V abiertos en Z tales que $U \cap V = \emptyset$, $u(y_0) \in U$, $v(y_0) \in V$ por ser u, v funciones continuas se tiene que $u^{-1}(U)$ y $v^{-1}(V)$ son vecindades de y_0 como f es densa, existe $y' \in u^{-1}(U) \cap v^{-1}(V) \cap f(X)$ así $v(y') = v \circ f(x') = u \circ f(x') = u(y') \in U \cap V$ lo cual es absurdo.
Notemos que, cuando f es un $\mathbf{Top}_3$-morfismo, $b(f(X)) = f(\bar{X})$ pues en $\mathbf{Top}_3$, para cada $y \in Y$, $\{\bar{y}\} = \{y\}$ por lo que $b(f(X)) = \{y \in Y : \text{para cada vecindad } V \text{ de } y, V \cap f(X) \cap \mathrm{Cl}\{y\} \neq \emptyset\} = \{y \in Y : \text{para cada vecindad } V \text{ de } y, V \cap f(X) \neq \emptyset\} = f(\bar{X})$. Ahora, supongamos que f no es una función densa, entonces $f(\bar{X}) = b(f(X)) \subsetneq Y$ podemos construir de manera similar al inciso anterior las funciones $r, s : Y \to Z'$ tales que $r \circ f = s \circ f$ pero $r \neq s$, por lo tanto f no es epimorfismo.

$\square$

A continuación daremos la definición de factorización de un morfismo, si bien en el Capítulo 5 profundizaremos más en el tema, presentarla ahora nos facilita la notación de los siguientes resultados.

Definición 2.8. Sea $\mathbf{A}$ una categoría y $f : X \to Y$ un $\mathbf{A}$-morfismo . Diremos que (Z, g, h) es una factorización de f en $\mathbf{A}$ si existen $\mathbf{A}$-morfismos $g : X \to Z$ y $h : Z \to Y$ que cumplen que $f = h \circ g$.

Observación 2.2. 1. Toda función $f : X \to Y$ en **Set** se puede factorizar así:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \\ f(X) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i : f(X) \hookrightarrow Y$ es la inclusión y h es la restricción de su imagen, con i inyectiva y h suprayectiva.
Notemos que si f fuese inyectiva entonces h también lo es, por lo que h sería un isomorfismo.

2. Ahora bien, en **Top** podemos hacerlo de manera similar en donde $f(X)$ será considerada con la topología subespacio de Y.

3. Dado un espacio topológico (Y, σ) y $f : X \to Y$ un **Set**-morfismo entonces la topología inicial o débil de X respecto a la pareja $(f, (Y, \sigma))$ es $\tau = \{f^{-1}(U) : U \in \sigma\}$. Es fácil ver que es topología para X y que es la mínima que hace continua a f.

4. Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es un **Top**-morfismo entonces son equivalentes:

   a) τ es la topología inicial de X respecto a $(f, (Y, \sigma))$.

   b) $\tau = \min \mathcal{A}$ con $\mathcal{A} = \{\tau' : \tau' \text{es una topología para } X \text{ y } f : (X, \tau') \to (Y, \sigma) \text{ continua}\}$

c) Si (Z, η) es un espacio topológico y $g : Z \to X$ un **Top**-morfismo son tales que: si $f \circ g : (Z, \eta) \to (Y, \sigma)$ es continua entonces g también lo es.

En efecto:

a) $\Rightarrow$ *b*) Si $\tau' \in \mathcal{A}$, entonces τ' es una topología para X y $f : (X, \tau') \to (Y, \sigma)$ es continua; así, para cada $W \in \tau$, existe $U \in \sigma$ tal que $W = f^{-1}(U)$ por definición de τ, pero $f : (X, \tau') \to (Y, \sigma)$ es continua por lo que $W = f^{-1}(U) \in \tau'$, entonces $\tau \subset \tau'$; es decir, τ es cota inferior de $\mathcal{A}$. Además, $\tau \in \mathcal{A}$ pues para cada $U \in \sigma$, $f^{-1}(U) \in \tau$, por lo que $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua. Por lo tanto $\tau = \text{mín}\mathcal{A}$.

b) $\Rightarrow$ *a*) Sea $\tau_0 = \{f^{-1}(U) : U \in \sigma\}$ veamos que $\tau_0 = \tau$, como τ_0 es topología de X y hace continua a f entonces $\tau \subset \tau_0$, también tenemos que $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua, así para toda $U \in \sigma$, $f^{-1}(U) \in \tau$ por lo que $\tau_0 \subset \tau$.

c) $\Rightarrow$ *b*) Sea $\tau' = \text{mín}\mathcal{A}$, como $\tau \in \mathcal{A}$ entonces $\tau' \subset \tau$. Ahora, como la composición $(x, \tau') \xrightarrow{1_X} (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ es continua ya que es igual a f, por *c*) tenemos que 1_X también es continua y así $\tau \subset \tau'$.

a) $\Rightarrow$ *c*) Si (Z, η) es un espacio topológico y $g : Z \to X$ un **Set**-morfismo tales que $f \circ g : (Z, \eta) \to (Y, \sigma)$ es continua, entonces para $g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U) \in \eta$, con $U \in \sigma$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau$ por lo tanto g es continua.

Definición 2.9. En **Top**, un encaje o inmersión es un **Top**-morfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ tal que

1. f es inyectiva

2. τ es la topología inicial de X respecto a $(f, (Y, \sigma))$.

De esta definición y de la última observación podemos obtener la siguiente proposición y corolario:

Proposición 2.10. *1. Todo homeomorfismo es inmersión.*

2. La composición de inmersiones es inmersión.

Demostración. 1. Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es un homeomorfismo, entonces es continua, inyectiva y abierta. Resta ver que $\tau = \tau'$ en donde $\tau' = \{f^{-1}(U) | U \in \sigma\}$. Se tiene que $\tau' \subset \tau$; además si $U \in \tau$, entonces $U = f^{-1}(f(U))$ por ser f inyectiva; además $f(U) \in \sigma$ pues f es abierta, por lo tanto $U \in \tau'$.

2. Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ inmersiones, al ser inyectivas entonces su composición $g \circ f$ es inyectiva. Para ver que ésta tiene la topología inicial utilizaremos la equivalencia 4.*c*) de la Observación 2.2. Sea $h : W \to X$ una función donde $(g \circ f) \circ h$ es continua, o bien $g \circ (f \circ h)$ lo es y g inmersión por hipótesis, así $f \circ h$ es continua y al ser f inmersión h también lo es.

□

Corolario 2.11. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un **Top**-morfismo.*
f es inmersión sí y sólo si para toda (Z, g, h) factorización de f con g epimorfismo se tiene que g es isomorfismo.

Demostración. ⇒]Sea
$$\begin{tikzcd}(X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & (y,\sigma) \\ (Z,\eta) \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$
una factorización de f, como es inyectiva, g también lo es. Así g es biyectiva, o bien, isomorfismo en **Set** por lo que existe $k : Z \to Y$ tal que $g \circ k = 1_X$ y $k \circ g = 1_Z$. Además, como $f = h \circ g$ entonces $f \circ k = h \circ g \circ k = g$, donde g es continua y f tiene la topología inicial pues por hipótesis es inmersión, por 4.*c*) de la observación anterior se tiene que k es continua, de esta manera g es un isomorfismo.
⇐] Por 2) de la Observación 2.2, sabemos que $(f(X), h := f|^{f(X)}, i)$ es una factorización de f donde h es sobreyectiva, por nuestra hipótesis h es isomorfismo y por tanto una inmersión. Por lo que f al ser una composición de inmersiones también lo es. □

Definición 2.12. Un monomorfismo $f : X \to Y$ de una categoría **A** es un *monomorfismo extremal* en **A** cuando f cumple que: si $f = h \circ g$ donde $g : X \to Z$ es un epimorfismo y $h : Z \to Y$ es un morfismo, entonces g debe ser un isomorfismo.

Un epimorfismo $f : X \to Y$ de una categoría **A** es un *epimorfismo extremal* en **A** cuando f cumple que: si $f = h \circ g$ con un morfismo $g : X \to Z$ y un monomorfismo $h : Z \to Y$, entonces h debe ser un isomorfismo.

Proposición 2.13. *(1) En* ***Top*** *y* ***Top***$_1$*, un morfismo es monomorfismo extremal si y sólo si es un encaje.*

(2) En ***Top***$_2$ *y* ***Top***$_3$*, un morfismo es un monomorfismo extremal si y sólo si es un encaje cerrado.*

(3) En ***Top***$_0$*, un morfismo $f : X \to Y$ es un monomorfismo extremal si y sólo si es un encaje cerrado frontal, es decir, un encaje que satisface la siguiente condición: si cualquier vecindad de y en Y interseca a $f(X) \cap cl\{y\}$, entonces $y \in f(X)$.*

(4) En ***Top*** *y* ***Top***$_i$ *para $i = 0, 1, 2, 3$, un morfismo es un epimorfismo extremal si y sólo si es un morfismo cociente*[3].

Demostración. (3) Sea f un **Top**$_0$-morfismo.
⇐] Utilizando la notación de la demostración en la Proposición 2.7, estamos suponiendo que $b(f(X)) = f(X)$ y que f es una inmersión. Consideremos el siguiente diagrama en **Top**$_0$
$$\begin{tikzcd}X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$
donde g es un **Top**$_0$-epimorfismo y f es monomorfismo por ser inyectiva ya que es inmersión. Afirmamos que para toda $z \in Z$, $h(z) \in f(X)$.
En efecto, por hipótesis $b(f(X)) = f(X)$ y si U es un abierto en Y que contiene a $h(z)$, entonces $h^{-1}(U)$ es un abierto en Z por ser h continua, es decir, una vecindad de z y como g es **Top**$_0$-epimorfismo por la Proposición 2.7, $b(g(X)) = Z$ entonces $h^{-1}(U) \cap g(X) \cap \mathrm{cl}\{z\} \neq \emptyset$. Sea $z' \in h^{-1}(U) \cap g(X) \cap \mathrm{cl}\{z\}$ entonces $h(z') \in U \cap f(X) \cap \mathrm{cl}\{h(z)\}$ luego $h(z) \in b(f(X)) = f(X)$, es decir, existe $x_z \in X$ tal que $h(z) = f(x_z)$.
Definamos $k : Z \to X$, con $k(z) = x_z$, notemos que está bien definida ya que f es inyectiva, además $f \circ k = h$ pues para cada $z \in Z$, $h(z)$ es el único elemento de Y tal que $f(k(z)) = h(z)$. Como f es inmersión y h es continua entonces k es continua y se cumple

[3]Dual de la Definición 2.9

que: $f \circ (k \circ g) = (f \circ k) \circ g = h \circ g = f = f \circ 1_X$ por ser f inmersión, $k \circ g = 1_X$, de igual manera $g \circ k = 1_Z$. Por lo tanto g es un $\mathbf{Top}_0$-isomorfismo.
$\Rightarrow$] Ahora supongamos que f es monomorfismo extremal. Consideremos la factorización de f en $\mathbf{Top}_0$, donde $Z = b(f(X))$ tiene la topología inicial respecto a (i, Y)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f|^{z}"'] & Y \\ & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

de esta manera Z es $\mathbf{T}_0$, además $b(f|^Z(X)) = b(f(X)) = Z$ por la Proposición 2.7 $f|^Z$ es epimorfismo, como f es monomorfismo extremal se tiene que $f|^Z$ es isomorfismo así $f|^Z(X) = f(X) = b(f(X))$, además es inyectiva e i también lo es, por lo cual f que es la composición de estas dos será inmersión.

(1) , (2) y (4) se hacen de manera similar.

□

Observación 2.3. (Principio de Dualidad) Sea $\mathbf{B}$ una categoría dual de una categoría $\mathbf{A}$ y denotemos las identidades por $i : \mathrm{Ob}\mathbf{B} \to \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ e $i : \mathrm{Mor}\mathbf{B} \to \mathrm{Mor}\mathbf{A}$. Es fácil verificar que $f : X \to Y$ es un epimorfismo en $\mathbf{B}$ si y sólo si $i(f) : Y \to X$ es un monomorfismo en $\mathbf{A}$; volteando las flechas en sus definiciones. En general, para cualquier afirmación S podemos construir S^{OP} volteando todas las fechas de los morfismos en S. Además, si S define una propiedad P de objetos y morfismos, entonces S^{OP} también lo hace y la denotaremos por P^{OP} y la llamaremos *"propiedad dual de P"* algunas veces preferimos *"co-P"* por ejemplo una sección es el dual de retracción así que podemos llamarle coretracción. Más aún, si S se cumple para todas las categorías, entonces S^{OP} también lo hará, ésto es lo que se conoce como *"Principio de dualidad para categorías"*. De aquí en adelante la noción dual será dada inmediatamente después de cada definición, proposición o teorema que vayamos a ocupar posteriormente.

Definición 2.14. Un igualador en una categoría $\mathbf{A}$ de morfismos $u, v : X \to Y$ es un par (Z, f) (o simplemente f) que consiste de un objeto Z y un morfismo $f : Z \to X$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $u \circ f = v \circ f$, o bien $Z \xrightarrow{f} X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y$ es un tenedor[4];

(2) Para cada par (Z', f') de un objeto Z' y un morfismo $f' : Z' \to X$ con $u \circ f' = v \circ f'$, existe un único morfismo $\varphi : Z' \to Z$ tal que $f' = f \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] & X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \\ Z' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f'"'] & & \end{tikzcd}$$

Dual. (Coigualador) Si $u, v : X \to Y$ son dos $\mathbf{A}$-morfismos, un coigualador para u y v es una pareja (Z, f) o un morfismo $f : Y \to Z$ tal que:

1. $f \circ u = f \circ v$ $X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{f} Z$

[4]Diremos que el diagrama es un tenedor si $u \circ f = v \circ f$

2. Para cada (f', Z') tal que $f' \circ u = f' \circ v$, entonces existe un único morfismo $\psi : X \to Z'$ tal que $\psi \circ f = f'$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ & & Z' \end{tikzcd}$$

Proposición 2.15. *Si (Z, f) es un igualador de u y v, entonces f es un monomorfismo.*

Demostración. Sean $g, h : W \to Z$ morfismos en $\mathbf{A}$ tales que $f \circ h = f \circ g$.
Si $f' = f \circ h = f \circ g : W \to X$, entonces (f', W) es un tenedor de u, v por lo tanto existe único $\varphi : W \to X$ tal que $\varphi \circ f = f'$ pero h y g cumplen que $h \circ f = f'$ y $g \circ f = f'$ así $g = \varphi = h$. $\square$

Definición 2.16. Un morfismo $f : X \to Y$ de una categoría $\mathbf{A}$ es un monomorfismo regular si existen morfismos u y v tales que (X, f) sea un igualador de u y v.

Dual. (Epimorfismo regular) Un $\mathbf{A}$-morfismo $f : Y \to Z$ es un epimorfismo regular en $\mathbf{A}$ si existen $u, v : X \to Y$ $\mathbf{A}$-morfismo tales que (f, Z) es un coigualador de u y v.

Proposición 2.17. *Para cada morfismo en cualquier categoría las siguientes implicaciones se cumplen: isomorfismo $\Rightarrow$ sección $\Rightarrow$monomorfismo regular $\Rightarrow$ monomorfismo extremal, isomorfismo $\Rightarrow$ retracción $\Rightarrow$ epimorfismo regular $\Rightarrow$ epimorfismo extremal.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$.

Si f es un isomorfismo entonces f es sección. Si f es sección: existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$, de esta manera f es igualador de 1_Y y $f \circ g$ pues:

- $1_Y \circ f = f$ y $(f \circ g) \circ f = f \circ 1_X = f$
- Si $X' \xrightarrow{f'} Y \overset{1_Y}{\underset{f \circ g}{\rightrightarrows}} Y$ es otro tenedor, definimos $\varphi = g \circ f' : X' \to X$ que cumple: $f' = f \circ \varphi$, además es única ya que de existir $\varphi' : X' \to X$ tal que $f' = f \circ \varphi'$ entonces $\varphi = g \circ f' = g \circ f \circ \varphi' = 1_X \circ \varphi$.

Por último , si f es igualador de $u, v : Y \to Z$ y tomamos una factorización (Z, h, g) con h epimorfismo, veamos que éste es un isomorfismo. Como $f = g \circ h$ y $u \circ f = v \circ f$ entonces $u \circ (g \circ h) = v \circ (g \circ h)$ como h es epimorfismo $v \circ g = u \circ g$ así existe $\varphi : X \to X$ tal que $f \circ \varphi = g$ luego $f \circ \varphi \circ g = g \circ h = f$ por ser f monomorfismo tenemos que $\varphi \circ h = 1_X$. Además $1_Z \circ h = h \circ 1_X = h \circ \varphi \circ h$ por ser h epimorfismo $1_Z = h \circ \varphi$. Por lo tanto h es isomorfismo. $\square$

Observación 2.4. Sobre la marcha hemos demostrado que si h es epimorfismo y sección entonces h es isomorfismo.

Podemos generalizar aún más, como se muestra en el siguiente corolario:

Corolario 2.18. *En cualquier categoría las siguientes afirmaciones en un morfismo f son equivalentes:*

(1) f es un isomorfismo

(2) f es tanto un epimorfismo como una coretracción.

(3) f es un epimorfismo y un monomorfismo extremal.

(4) f es un monomorfismo y una retracción.

(5) f es un monomorfismo y un epimorfismo extremal.

Demostración. Tenemos (1) $\Leftrightarrow$ (2) por la observación anterior, (2) $\Leftrightarrow$ (4) y (3) $\Leftrightarrow$ (6) por ser su dual, (2) $\Rightarrow$ (3) y (4) $\Rightarrow$ (5) por la proposición anterior, resta ver (3) $\Rightarrow$ (1). Sea $f : X \to Y$ un epimorfismo y monomorfismo extremal, podemos factorizarla como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ Y \arrow[ur, "1_Y"'] & \end{tikzcd}$$

entonces f es epimorfismo. $\square$

Proposición 2.19. *En* ***Top*** *y* ***Top***$_i$ *para* $i = 0, 1, 2, 3$, *cada monomorfismo extremal es un monomorfismo regular.*

Demostración. El regreso se demuestra construyendo los morfismos r, s de la prueba en la Proposición 2.7, es fácil ver que f es igualador de éstos. $\square$

A continuación introduciremos el concepto de categorías bien potenciadas el cual, naturalmente, tiene su dual y que ocuparemos con bastante frecuencia a partir del capítulo 5.

Definición 2.20. Sea **A** una categoría y X un objeto de **A**.

a) Un monomorfismo $f : Y \to X$ es, a veces, llamado un monomorfismo en X o también un subobjeto de X.

b) Sea $M(X)$ la clase de todos los monomorfismos en X, y $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ dos elementos de $M(X)$. Diremos que f es isomorfo a g si existe un isomorfismo en **A**, $\varphi : Y \to Z$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Es decir, $g \circ \varphi = f$, denotado por $f \sim g$. La relación $\sim$ es de equivalencia y cada $[f]_\sim$ es llamado subobjeto de X por algunos autores.

c) Una subclase R de $M(X)$ es un conjunto representativo de monomorfismos en X si es un conjunto y para toda $f \in M(X)$, existe $g \in R$ tal que $f \sim g$.

d) Una categoría **A** está *bien potenciada* si cada objeto X en **A** tiene un conjunto representativo de monomorfismos en X.

e) Una categoría **A** está *(ex-mono)-bien potenciada* si para cada X objeto de **A** existe un conjunto representativo de monomorfismos extremales en X.

Las categorías bien potenciadas son (ex-mono)-bien potenciadas.

Dual. Podemos definir el dual de los conjuntos representativos obteniendo para una categoría **A** y X un objeto de ella:

a) $E(X)$ la clase de epimorfismos desde X ya que cada elemento será de la forma $f : X \to Y$.

b) Conjunto representativo de epimorfismos desde X.

c) Categorías *co-bien potenciada*

d) Categorías (ex-epi)-co-bien potenciadas.

Observación 2.5. Las categorías pequeñas son bien potenciadas y co-bien potenciadas. **Set, Grp, Ab, Top** y **Top**$_i$, para $i = 0, 1, 2, 3$ no son pequeñas pero se puede demostrar que son bien potenciadas y co-bien potenciadas.

Capítulo 3

Diagramas y límites

Definición 3.1. Un funtor $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ de una categoría pequeña $\mathbf{K}$ a una categoría $\mathbf{A}$ es un diagrama.

Sea $\mathbf{K}_2$ una categoría donde $Ob\mathbf{K}_2 = \{1, 2\}$ y $Mor\mathbf{K}_2 = \{1_1, 1_2, a : 1 \to 2\}$. Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría $\mathbf{A}$, define un funtor $D : \mathbf{K}_2 \to \mathbf{A}$ donde $D(1) = X, D(2) = Y$ y $D(a) = f$. Entonces tenemos un diagrama $D : \mathbf{K}_2 \to \mathbf{A}$, el cual es expresado por $X \xrightarrow{f} Y$. A veces no necesitamos especificar contenidos de objetos y morfismos de la categoría pequeña $\mathbf{K}$. En este caso, $\mathbf{K}$ es un esquema del diagrama D. Expresamos una categoría pequeña con unos pocos morfismos mostrando todos los objetos y todos los morfismos excepto las identidades, es decir, la categoría $\mathbf{K}_2$ es expresada por $1 \xrightarrow{a} 2$, o simplemente como $\bullet \longrightarrow \bullet$.

Definición 3.2. Sea $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ un diagrama en $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{K}$. Un par $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ de un $\mathbf{A}$-objeto X y una familia de $\mathbf{A}$-morfismo $\alpha_i : X \to D(i)$ para $i \in$Ob$\mathbf{K}$ es una *fuente natural* para D si cualquier $\mathbf{K}-$morfismos $a : i \to j$ cumple que $D(a) \circ \alpha_i = \alpha_j$. En otras palabras, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(a)"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

Dual. Un par $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}K})$ de un $\mathbf{A}-$objeto X y una familia de $\mathbf{A}$-morfismos $\alpha_i : D(i) \to X$ para $i \in \mathrm{Ob}K$ es un *pozo natural* para D si cualquier $\mathbf{K}$-morfismo $a : j \to i$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] & X \\ D(j) \arrow[u, "D(a)"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 3.3. Para un diagrama D en $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{K}$, una fuente natural $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ para D es un límite para el diagrama si se cumple que:

Para cualquier fuente natural $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ en D, existe un único morfismo $\varphi : Y \to X$ en $\mathbf{A}$ tal que $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$ para cualquier $i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$.
φ será llamado el morfismo conector de la fuente natural $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ al límite $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] & D(i) \\ Y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\beta_i"'] & \end{tikzcd}$$

Dual. (Colímite de un diagrama D)
Un pozo natural $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ en D es un colímite para D si se cumple que:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Para cualquier pozo natural $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ en D, existe un único morfismo $\varphi : X \to Y$ en $\mathbf{A}$ tal que $\beta_i = \varphi \circ \alpha_i$ para cualquier $i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$.

Ejemplo 6. Para un conjunto dirigido $(\Lambda, \leq)$ podemos construir una categoría, pero antes recordemos que el conjunto Λ es dirigido si $\leq$ cumple con ser reflexiva, transitiva y que para cualesquiera $x, y \in \Lambda$, existe $z \in \Lambda$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$. Ahora, nuestra categoría a la cual denotaremos Λ tendrá por objetos a los elementos de este conjunto y para cada par de objetos $\lambda, \mu \in \Lambda$ tales que $\lambda \leq \mu$, se considera el morfismo $P_{\lambda\mu} : \mu \to \lambda$. Entonces las clases de estos objetos y morfismos forman una categoría pequeña. Sea $\mathbf{A}$ la categoría **Set**, **Grp** o **Top**. Un funtor $D : \Lambda \to \mathbf{A}$ define un sistema inverso $(X_\lambda, f_{\lambda\mu})$ en $\mathbf{A}$ por $X_\lambda = D(\lambda)$ y $f_{\lambda\mu} = D(P_{\lambda\mu})$. Entonces $(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Ob}\Lambda})$ es un límite para el diagrama D si y sólo si $(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ es un límite inverso de el sistema inverso $(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ en $\mathbf{A}$.

Proposición 3.4. *Para un diagrama D en una categoría $\boldsymbol{A}$ sobre una categoría pequeña $\boldsymbol{K}$, un límite $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob\boldsymbol{K}})$ es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ y $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ son límites para D, entonces existen morfismos conectores $\varphi : Y \to X$ y $\psi : X \to Y$ tales que $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$ y $\alpha_i = \beta_i \circ \psi$ para cada $i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$, luego $\beta_i \circ \psi = (\alpha_i \circ \varphi) \circ \psi$ y $\alpha_i \circ \varphi = (\beta_i \circ \psi) \circ \varphi$ así $\alpha_i = \alpha_i \circ (\varphi \circ \psi)$ y $\beta_i = \beta_i \circ (\psi \circ \varphi)$ para cada $i \in$Ob$\mathbf{K}$; es decir, $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son morfismos conectores de $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ y $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ consigo mismos respectivamente, pero 1_X y 1_Y también lo son. Por la unicidad, $\varphi \circ \psi = 1_X$ y $\psi \circ \varphi = 1_Y$; ésto quiere decir que $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ y $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}})$ son fuentes isomorfas.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & D(i) \\ Y \arrow[u, shift left, "\psi"] \arrow[ur, "\beta_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] & D(i) \\ X \arrow[u, shift left, "\varphi\circ\psi"] \arrow[u, shift right, "1_X"'] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta_i"] & D(i) \\ Y \arrow[u, shift left, "\psi\circ\varphi"] \arrow[u, shift right, "1_Y"'] \arrow[ur, "\beta_i"'] & \end{tikzcd}$$

□

Definición 3.5. Sea $\mathbf{A}$ una categoría.

1. Un objeto T en $\mathbf{A}$ es un *objeto terminal* si, para cada objeto X en $\mathbf{A}$, existe un único morfismo $X \to T$. En otras palabras, todos los objetos en la categoría terminan en T.

2. Sean X, Y objetos en $\mathbf{A}$. Un producto de dos objetos X y Y es un objeto P junto con dos morfismos (proyecciones) $p_X : P \to X$ y $p_Y : P \to Y$ tales que: para cualquier $\mathbf{A}$-objeto Z y $\mathbf{A}$-morfismos $f : Z \to X$ y $g : Z \to P$ tal que $p_X \circ t = f$ y $p_Y \circ t = g$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & P \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

3. Sean X, Y objetos en $\mathbf{A}$. Un coproducto de X y Y, denotado por $X \coprod Y$, junto con dos morfismos $i_X : X \to X \coprod Y$ e $i_Y : Y \to X \coprod Y$, tales que: para cualquier morfismo objeto Z y un par de morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$, existe un único morfismo $t : X \coprod Y \to Z$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \coprod Y \arrow[d, "t"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

conmuta.

4. Sean $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ $\mathbf{A}$-morfismos. Diremos que $(W, (\alpha_1 : W \to X, \alpha_2 : W \to Y))$ es un pullback de (f, g) si se cumple que:

   a) $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$

   b) Para cualesquiera par de morfismos $\beta_1 : V \to X, \beta_2 : V \to Y$ tales que $f \circ \beta_1 = f \circ \beta_2$, existe un único morfismo $\varphi : V \to W$ tal que $\beta_1 = \alpha_1 \circ \varphi$ y $\beta_2 = \alpha_2 \circ \varphi$.

Proposición 3.6. *Para una categoría $\boldsymbol{A}$ cada uno de los siguientes son límites de cierto diagrama D en $\boldsymbol{A}$ sobre un esquema de diagrama $\boldsymbol{K}$: objeto terminal, igualador, pullback, producto, intersección, pullback múltiple e igualador múltiple.*

Demostración. (1) **Objeto terminal** Sea $\mathbf{K}$ la categoría vacía. Entonces el límite para D consiste de un objeto T tal que: para cualquier Y $\mathbf{A}$-objeto, existe un único morfismo $\varphi : Y \to T$. T es llamado objeto terminal de $\mathbf{A}$.

(2) **Igualador** Sea $\mathbf{K}$ la categoría expresada por $1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2$. Para un par de morfismos $f, g : X \to Y$ en A, sea $D : K \to A$ un funtor tal que $D(a) = f$ y $D(b) = g$. Entonces el límite para D es un igualador de f y g.

(3) **Pullback** Sea $\mathbf{K}$ una categoría con $Ob\mathbf{K} = \{1, 2, 3\}$ y morfismos $Mor\mathbf{K} = \{1_1, 1_2, 1_3, a : 1 \to 3, b : 2 \to 3\}$, ésto es: $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$.
Para un par de morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ en $\mathbf{A}$, sea $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ un funtor tal que $D(a) = f$ y $D(b) = g$.
Entonces, el límite $(W, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$ para D es un pullback de el par (f, g); como $\alpha_3 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$ suele omitirse .

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\alpha_2"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & V \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\beta_1"'] \arrow[dl, "\beta_2"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

(4) **Producto** Sean I un conjunto y $\mathbf{K}$ la categoría discreta, $Ob\mathbf{K} = I$ y $Mor\mathbf{K} = \{1_i\}_{i \in I}$. Para una familia $(x_i)_{i \in I}$ de objetos en una categoría $\mathbf{A}$, se define un diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ por $D(i) = X_i$ para $i \in I$. Entonces el límite $(X, (p_i)_{i \in I})$ para D es el producto de la familia $(X_i)_{i \in I}$ y cada morfismo $p_i : X \to X_i$ es llamado una proyección. X será denotado por $\prod_{i \in I} X_i$.

(5) **Intersección** Sean I un conjunto, $0 \notin I$ y K una categoría con $Ob\mathbf{K} = I \cup \{0\}$ y $Mor\mathbf{K} = \{1_i\}_{i \in I} \cup \{1_0\} \cup \{a_i : i \to 0\}_{i \in I}$. Para una familia $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ de monomorfismos en $\mathbf{A}$, se define un diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ por $D(i) = X_i$, $D(0) = Y$ y $D(a_i) = f_i$.
Entonces el límite $(X, ((g_i X \to X_i)_{i \in I}, g_0 : X \to Y))$ o (g_0) para D es una intersección de $(f_i)_{i \in I}$. X es denotado por $\bigcap_{i \in I} X_i$.

(6) **Pullback múltiple** En el anterior inciso, si no suponemos que cada **A**-morfismo f_i es un monomorfismo, el límite $(X, (g_i)_{i\in I}, g_0)$ para D es llamado un pullback múltiple de $(f_i)_{i\in I}$. Notemos que si $I = \{1, 2\}$, el pullback múltiple del par (f_1, f_2) coincide con su pullback.

(7) **Igualador múltiple** Sea I un conjunto y $\mathbf{K}$ una categoría con objetos $Ob\mathbf{K} = \{1, 2\}$ y $Mor\mathbf{K} = \{1_1, 1_2\} \cup \{a_i : 1 \to 2\}_{i\in I}$. Para una familia $(f_i : X \to Y)$, definimos el diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ donde $D(a_i) = f_i$ para cada $i \in I$. Entonces el límite $(Z, (g : Z \to X, h : Z \to Y))$ para D (o simplemente (Z, g)) es un igualador múltiple de $(f_i)_{i\in I}$.

$\square$

Proposición 3.7. *Si $(X, ((g_iX \to X_i)_{i\in I}, g_0 : X \to Y))$ es la intersección de una familia $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$, entonces g_0 es un $\mathbf{A}-$monomorfismo.*

Demostración. Para un par de **A**-morfismos $u, v : Z \to X$ tales que $g_0 \circ u = g_0 \circ v$ se tiene que $(Z, (g_0 \circ u : Z \to X_i)_{i\in I}, g_0 \circ u : Z \to Y)$ es una fuente natural y al ser X el límite existe un único morfismo conector $Z \to Y$ pero u, v también son morfismos conectores por lo tanto $u = v$. $\square$

Definición 3.8. Si $(W, (\alpha_1, \alpha_2))$ es un pullback de $(f : X \to Z, g : Y \to Z)$ y f es un monomorfismo en **A**, entonces α_2 es llamado una imagen inversa de f por g.

Proposición 3.9. *Si α_2 es una imagen inversa de f por g, entonces α_2 es un monomorfismo en $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Veamos que α_2 es un monomorfismo en **A**.

Sean $u, v : Z \to W$ tales que $\alpha_2 \circ u = \alpha_2 \circ v$ como $g \circ \alpha_2 = f \circ \alpha_1$ entonces $g \circ \alpha_2 \circ u = f \circ \alpha_1 \circ u$, así para $(Z, (\alpha_2 \circ u, \alpha_1 \circ u))$ existe morfismo conector $\varphi : Z \to W$ pero u, v también son morfismos conectores por lo que $u = v$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & W \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\alpha_2"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& & Z \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_1 \circ u"'] \arrow[dl, "\alpha_2 \circ u"] & \\
& Y \arrow[rr, "g"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

$\square$

Dual. Coigualador, pushout, coproducto, objeto inicial, co-intersección, pushout múltiple, coigualador múltiple y co-(imagen inversa)

Proposición 3.10. *Supongamos que $D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{A}$ es un diagrama en una categoría $\boldsymbol{A}$ sobre una categoría pequeña $\boldsymbol{K}$ y definamos una categoría (D) como sigue: $Ob(D)$ es la clase de todas las fuentes naturales $(X, (\alpha_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}})$ para D, y para $(X, (\alpha_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}})$, $(Y, (\beta_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}})$ objetos de (D), el conjunto de $(D)-$morfismos $[(X, (\alpha_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}}), (Y, (\beta_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}})]_{(D)}$ consiste de todos los $A-$morfismos $f : X \to Y$ tal que $\alpha_i = \beta_i \circ f$. Entonces $(X, (\alpha_i)_{i\in Ob\boldsymbol{K}})$ es un límite para D si y sólo si es un objeto terminal en (D).*

Ejemplo 7. 1. **Objeto terminal**

a) En **Set** y **Top** el objeto terminal es el conjunto de un punto $\{\star\}$.

b) En **Grp** el objeto terminal es el grupo trivial $\{e\}$.

c) En **FVect** es el espacio vectorial $\{\hat{0}\}$.

d) En $(P, \leq)$ un COPO, el objeto terminal es el máximo, si es que existe. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con el orden usual tenemos un COPO, sin embargo, éste no tiene un máximo por lo tanto no tiene objeto terminal. Ésto nos dice que no toda categoría tiene objeto terminal.

2. **Igualador**

   a) En **Set** el igualador es el conjunto $E = \{x \in X | fx = gx\}$ junto con la inclusión $E \hookrightarrow X$, es el mayor conjunto del dominio para el cual las dos funciones coinciden. En **Top**, el igualador tiene a E como conjunto y como topología a la de subespacio de X.

$$\begin{tikzcd}
(E,\tau|_E) \arrow[r, hook, "i"] & (X,\tau) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (Y,\sigma) \\
(S,\xi) \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

   En efecto, en **Top** veamos que $(E, \tau|_E)$ junto con la inclusión es el igualador de f y g. Tenemos que $f \circ i = g \circ i$ por como definimos E. Ahora , supongamos que (S, ξ) y $h : S \to X$ en **Top** cumplen que $f \circ h = g \circ h$. Notemos que $h(X) \subset E$ pues si $s \in S$, $h(s) \in X$ y cumple que $f(h(s)) = g(h(s))$ así nuestro **Top**-morfismo conector $\varphi = h$ y además es único, ya que de existir otro $\psi : S \to E$, $h = i \circ \psi = \psi$

3. **Pullback**

   a) En **Set**, el pullback consiste del conjunto que contiene todos los pares (x, y) que satisfacen que $f(x) = g(y)$ a lo largo de las proyecciones hacia X y Y. El conjunto es denotado por (Bradley, Bryson, y Terilla, 2020) como $X \times_Z Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[rr, "\pi_X"] \arrow[dd, "\pi_Y"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& V \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\beta_1"'] \arrow[dl, "\beta_2"] & \\
Y \arrow[rr, "g"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

   Es claro que $f \circ \pi_X(x, y) = g \circ \pi_Y(x, y)$, además si $(V, (\beta_1, \beta_2))$ cumple que $f \circ \beta_1 = g \circ \beta_2$ podemos definir $\varphi : V \to X \times_Z Y$ como $\varphi(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v))$, φ está bien definida pues $f \circ \beta_1(v) = g \circ \beta_2(v)$ así $(\beta_1(v), \beta_2(v)) \in X \times_Z Y$. Luego $\beta_1(v) = \pi_X \circ \varphi(v)$ y $\beta_2(v) = \pi_Y \circ \varphi(v)$ y φ es único pues de existir otro $\psi : V \to X \times_Z Y$ entonces $\beta_1(v) = \pi_X \circ \psi(v)$ y $\beta_2(v) = \pi_Y \circ \psi(v)$ así $\psi = \varphi$.

   En concreto, si $X = \{*\}$ la función $f : \{*\} \to Z$ elige un $z \in Z$. Entonces el pullback consiste de los $y \in Y$ tales que $g(y) = z$, es decir, el pullback es la preimagen de z, $g^{-1}\{z\} \subset Y$.

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}\{z\} \times_Z \{*\} \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

   b) En **Top**, el pullback tiene a $X \times_Z Y$ como conjunto y su topología es la de subespacio del producto $X \times Y$.

4. **Producto**

   a) Cuando $\mathbf{A}$ =**Set** el límite es el producto usual en **Set**, mientras que, cuando $\mathbf{A}$ =**Top** el límite es el producto de espacios en el diagrama junto con las proyecciones que se puede definir de la siguiente manera:

Definición 3.11. Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Entonces $X/\sim$ denota el conjunto de las clases de equivalencia y la proyección natural $\pi : X \to X/\sim$ que envía x a su clase de equivalencia define una función sobreyectiva cuyas fibras son las clases de equivalencia. El espacio cociente de X bajo la relación $\sim$ es el conjunto $X/\sim$ con la topología $\tau/\sim = \{U \subset Z/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$.

Capítulo 4

Categorías completas

Definición 4.1. Sea $\mathbf{K}$ una categoría pequeña. Una categoría es $\mathbf{K}-$completa si para cualquier diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ en $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{K}$, existe un límite para D.
$\mathbf{A}$ es completa si, para cualquier categoría pequeña $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$ es $\mathbf{K}-$completa. $\mathbf{A}$ es finitamente completa si para cualquier categoría finita $\mathbf{K}$, (es decir, $Mor\mathbf{K}$ es un conjunto finito), $\mathbf{A}$ es completa.

Dual. $\mathbf{A}$ es $\mathbf{K}-$cocompleta, cocompleta, finitamente cocompleta.

Si $\mathbf{A}$ es $\mathbf{K}$-completa para un esquema de diagrama $\mathbf{K}$ expresado por $\bullet \rightrightarrows \bullet$ entonces $\mathbf{A}$ tiene igualadores y podemos hacer lo mismo con los demás límites que se vieron en el Capítulo 3.
Para el siguiente teorema necesitamos presentar primero los siguientes lemas.

Lema 4.2. *Sea T un objeto terminal en $\mathbf{A}$, I un conjunto no vacío y $(X_i)_{i\in I}$, una familia de $\mathbf{A}-$objetos. $(X, ((p_i : X \to X_i)_{i\in I}, t_X : X \to T))$ es un pullback múltiple de $(t_i : X_i \to T)_{i\in I}$ si y sólo si $(X, (p_i)_{i\in I})$ es un producto de $(X_i)_{i\in I}$, donde $t_i : X_i \to T$, $i \in I$ y $t_X : X \to T$ son morfismos determinados unicamente por la propiedad de el objeto terminal.*

Demostración. Sea T un objeto terminal en $\mathbf{A}$, $I \neq \emptyset$ con $0 \notin I$ y $(X_i)_{i\in I}$ una familia de $\mathbf{A}$-objetos. Sea $\mathbf{K}_0$ la categoría pequeña con $Ob\mathbf{K}_0 = I\cup\{0\}$ y $Mor\mathbf{K}_0 = \{1_i\}_{i\in I}\cup\{1_0\}\cup\{a_i : i \to 0\}$ mientras que $\mathbf{K}$ será la categoría discreta con $Ob\mathbf{K} = I$ y $Mor\mathbf{K} = \{1_i\}_{i\in I}$, así definimos dos diagramas $D_0 : \mathbf{K}_0 \to A$ y $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$, en donde para cada $i \in I$, $D_0(1_i) = 1_{X_i}$, $D_0(1_0) = 1_T$, $D(a_i) = t_i$ y $D(1_i) = 1_{X_i}$.
$\Rightarrow$] Supongamos que $(X, ((p_i)_{i\in I}, t_X))$ es límite para D_0 veamos que $(X, (p_i)_{i\in I})$ es el límite para D; es una fuente natural para el diagrama pues $1_{X_i} = 1_{X_i} \circ p_i$ para cada $i \in I$; ahora, sea $(Y, (\beta_i)_{i\in I})$ otra fuente natural para D como T es un objeto terminal en $\mathbf{A}$, existe $t_Y : Y \to T$ así $(Y, ((\beta_i)_{i\in I}, t_Y))$ es una fuente natural para D_0, por lo cual existe único morfismo conector $\varphi : Y \to X$ tal que $p_i \circ \varphi = \beta_i$.
$\Leftarrow$]Supongamos que $(X, (p_i)_{i\in I})$ es un límite para D veamos que $(X, ((p_i)_{i\in I}, t_X))$ es límite para D_0; como para cada $i \in I$, $t_i \circ p_i : X \to T$ y T es un objeto terminal, por unicidad $t_i \circ p_i = t_X$ con ésto $(X, ((p_i)_{i\in I}, t_X))$ es una fuente natural. Ahora, si $(Y, ((\beta_i)_{i\in I}, \beta_0))$ es otra fuente natural entonces $(Y, (\beta_i)_{i\in I})$ es fuente natural de D, por lo cual existe único morfismo conector $\psi : Y \to X$ tal que $\beta_i = p_i \circ \psi$ para cada $i \in I$, además por unicidad del objeto terminal $\beta_0 = t_X \circ \psi$. □

Lema 4.3. *Supongamos que $\mathbf{A}$ tiene productos finitos. Para un par (f, g) de morfismos $f, g : X \to Y$ existe un par (f', g') de morfismos $f', g' : X \to X \times Y$ tales que $p_X \circ f' = 1_X$, $p_Y \circ f' = f$, $p_X \circ g' = 1_X$ y $p_Y \circ g' = g$.*

1. *Si* $(Z, ((h, k : Z \to X), l : Z \to X \times X))$ *es una intersección de* (f', g') *, entonces* $h = k$ *y* (Z, h) *es un igualador de* (f, g).

2. *Si* (z, h) *es in igualador de* (f, g) *, entonces* $(Z, ((h, h), f' \circ h))$ *es una intersección de* (f, g)

Demostración. 1. Supongamos que $(Z, ((h, k : Z \to X), l : Z \to X \times X))$ es una intersección de (f', g'). Veamos que (Z, h) es un igualador de (f, g). Tenemos que

$$\begin{aligned} f \circ h &= (p_Y \circ f') \circ h = p_Y \circ (f' \circ h) = p_Y \circ l = p_Y \circ (g' \circ h) = (p_Y \circ g') \circ h \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "m"] & \\ Z \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] \arrow[dr, "l"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, shift right, "g'"'] \arrow[d, shift left, "f'"] & Y \\ & X \times Y \arrow[u, shift left=3, "p_X"'] \arrow[ur, "p_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si (W, m) es otro tenedor de f, g, es decir, $f \circ m = g \circ m$ entonces $p_Y \circ f' \circ m = p_Y \circ g' \circ m$ y $p_X \circ f' \circ m = p_X \circ g' \circ m$, luego $f' \circ m = g' \circ m$. Por lo qu e$(W, (m, m : W \to X), f' \circ m : W \to X \times Y)$ es fuente natural para la intersección por lo tanto existe un morfismo conector $\varphi : W \to Z$ tal que $h \circ \varphi = m$, $l \circ \varphi = f' \circ m$, $l \circ \varphi = f' \circ m = g' \circ m$. Por último, como $g' \circ k = l = g' \circ h$ por ser fuente y g' monomorfismo entonces $h = k$.

2. Veamos que $(Z, ((h, h), f' \circ h))$ es una fuente.

$(p_Y \circ g') \circ h = g \circ h = f \circ h = (p_Y \circ f') \circ h = p_Y \circ (f' \circ h)$
Así $p_Y \circ (g' \circ h) = p_Y \circ (f' \circ h)$
También $p_X \circ (g' \circ h) = (p_X \circ g') \circ h = 1_X \circ h = (p_X \circ f') \circ h = p_X \circ (f' \circ h)$.
Luego $g' \circ h = f' \circ k$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f'\circ h"] \arrow[ddr, "f\circ h"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "g'"] & Y \\ & X \times Y \arrow[d, "p_Y"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Ahora supongamos que $(Z'((h', k'), l'))$ es otra fuente natural, tenemos que $f \circ h' = (p_Y \circ f') \circ h' = l' \circ h' = (p_Y \circ g') \circ h' = g \circ h$.

Por lo que (Z', h') es un igualador de (f, g), por lo tanto existe único morfismo conector $\varphi : Z' \to Z$ tal que $h \circ \varphi = h'$, pero también lo es para la intersección pues $(f' \circ h) \circ \varphi = f' \circ h'$ así $(f' \circ h) \circ \varphi = l'$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, shift left, "f'"] \arrow[dr, shift right, "g'"'] & & Y \\ Z' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "h'"] \arrow[rr, "l'"'] & & X \times Y \arrow[ur, "p_Y"'] & \end{tikzcd}$$

□

Lema 4.4. *Si A tiene productos e igualadores, entonces tiene intersecciones de monomorfismos regulares.*

Demostración. Sea I un conjunto y $(h_i)_{i \in I}$ una familia de monomorfismos regulares, donde para cada $i \in I$ $h_i : Z_i \to X$ es igualador de $f_i, g_i : X \to Y_i$, como $\mathbf{A}$ tiene productos , sea $(Y, (p_i : Y \to Y_i)_{i \in I})$ el producto de la familia $(Y_i)_{i \in I}$. Notemos que tanto $(X, (f_i : X \to Y_i))$ como $(X, (g_i : X \to Y_i)_{i \in I})$ son fuentes naturales, por lo tanto existen únicos morfismos conectores

$f, g : X \to Y$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
Y \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.
Sea (W, h) el igualador de (f, g), tenemos que $g_i \circ h = (p_i \circ g) \circ h = p_i \circ (f \circ h) = f_i \circ h$. Así (W, h) es tenedor de (f_i, g_i) para cada $i \in I$, por lo tanto existen únicos morfismos conectores $\varphi_i : W \to Z_i$, consiguiendo el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[ur, "h"'] & Y \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Afirmamos que $(W, (\varphi_i)_{i \in I})$ es la intersección de los $(h_i)_{i \in I}$. Primero, como el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "h"'] & Z_i \arrow[d, "h_i"] \\
& X
\end{tikzcd}
$$

conmuta, entonces es fuente natural.
Luego, si $(W', ((\varphi'_i)_{i \in I}, h'))$ es otra fuente natural para la intersección entonces obtenemos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varphi_i"] & & X \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[rr, shift right, "f"'] \arrow[dr, shift left, "f_i"] \arrow[dr, shift right, "g_i"'] & & Y \arrow[dl, "p_i"] \\
& Z_i \arrow[ur, "h_i"] & & Y_i & \\
W' \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi'_i"] \arrow[uurr, "h'"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Ahora, $p_i \circ g \circ h' = g_i \circ h' = g_i \circ h_i \circ \varphi'_i = f_i \circ h_i \circ \varphi'_i = f_i \circ h' = p_i \circ f \circ h'$, para toda $i \in I$. Por lo que $g \circ h' = f \circ h'$, por la propiedad universal del producto.
Así (W', h') es tenedor de (f, g) por lo tanto existe único morfismo conector $\varphi : W' \to W$ tal que $h' = h \circ \varphi$ y también lo es para la intersección pues $h_i \circ \varphi_i \circ \varphi = h \circ \varphi = h' = h_i \circ \varphi'_i$ por ser h_i monomorfismo, $\varphi_i \circ \varphi = \varphi'_i$. $\square$

Teorema 4.5. *Para una categoría* $\boldsymbol{A}$*, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\boldsymbol{A}$ *es completa;*

2. $\boldsymbol{A}$ *tiene múltiples pullback y objetos terminales;*

3. $\boldsymbol{A}$ *tiene productos y pullbacks;*

4. $\boldsymbol{A}$ *tiene productos e imágenes inversa;*

5. $\boldsymbol{A}$ *tiene productos e intersecciones finitas;*

6. $\boldsymbol{A}$ *tiene productos e igualadores;*

7. ***A** tiene productos e intersecciones.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) se sigue de la proposición 3.10

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea T un objeto terminal de $\mathbf{A}$, $I \neq \emptyset$ y $(X_i)_i \in I$ una familia de $\mathbf{A}$-objetos. Como T es objeto terminal, para cada X_i existen únicos $t_i : X_i \to T$, por hipótesis $\mathbf{A}$ tiene pullbacks múltiples, sea $(X, ((p_i : X \to X_i)_{i \in I}, t_X))$ el pullback múltiple de $(t_i)_i \in I$. Por el Lema 4.2, $(X, (p_i)_{i \in I})$ es el producto de $(X_i)_{i \in I}$. Por lo tanto, A tiene productos.

(3) $\Rightarrow$(4) Como la imagen inversa es un pullback con f monomorfismo entonces si $\mathbf{A}$ tiene pullbacks, tendrá imagen inversa.

(4) $\Rightarrow$ (5) Sea $I = \{1, \ldots, n\}$, $(X_i)_{i \in I}$ una familia de $A-$objetos y $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ una familia de $\mathbf{A}-$monomorfismos, $\mathbf{K}$ la categoría pequeña con $Ob\mathbf{K} = I \cup \{0\}$ y $Mor\mathbf{K} = \{1_i\}_{i \in I} \cup \{1_0\} \cup \{a_i : i \to 0\}$ forma el diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$, veamos que existe el límite de este diagrama el cual sería una intersección finita.
Como estamos suponiendo que $\mathbf{A}$ tiene imágenes inversas entonces para (f_1, f_2) existe la imagen inversa que al ser un pullback y ser f_1, f_2 monomorfismos, la imagen inversa coincide con la intersección de X_1 y X_2, con el cual obtendríamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "g_0^2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ahora podemos obtener la imagen inversa de f_3 por g_0^2 el cual sería la intersección $X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \cap X_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_1^2"'] \arrow[dr, "g_0^3"'] & X_3 \arrow[d, "f_3"] \\ X_1 \cap X_2 \arrow[r, "g_0^2"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\alpha_2^3"'] \arrow[dr, "g_0^4"'] & X_4 \arrow[d, "f_4"] \\ X_1 \cap X_2 \cap X_3 \arrow[r, "g_0^3"'] & Y \end{tikzcd}$$

Como I es finita podemos continuar hasta obtener la intersección $\bigcap_{i \in I} X_i$.

$$\begin{tikzcd} \bigcap_{i \in I} X_i \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\alpha_{n-2}^{n-1}"'] \arrow[dr, "g_0^n"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ \bigcap_{i=1}^{n-1} X_i \arrow[r, "g_0^{n-1}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Así obtenemos el límite que será la intersección de $(X_i)_{i \in I}$.

(5) $\Rightarrow$ (6) Supongamos que $\mathbf{A}$ tiene productos e intersecciones finitas. Sean $f, g : X \to Y$ un par de $\mathbf{A}$-morfismos, por hipótesis existe $(X \times Y, (p_X, p_Y))$ producto de X y Y, entonces $(X, (1_X, f))$ y $(X, (1_X, g))$ son fuentes naturales, por lo tanto existen únicos morfismos conectores f', g' tales que: $p_X \circ f' = 1_X$, $p_Y \circ f' = f$, $p_X \circ g' = 1_X$ y $p_Y \circ g' = g$. Además, f' es monomorfismo pues si $u, v : W \to X$ son morfismos tales que $f' \circ u = f' \circ v$, entonces $u = 1_X \circ u = p_X \circ f' \circ u = p_X \circ f' \circ v = 1_X \circ v = v$; de manera similar g es monomorfismo. Por hipótesis, existe $(Z, ((h, k : Z \to X), l : Z \to X \times Y))$ intersección de (f', g'), por el Lema 4.3 (Z, h) es igualador de (f, g). Por lo tanto $\mathbf{A}$ tiene igualadores.

(6) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathbf{K}$ una categoría y $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ diagrama. Demostremos que D tiene límite.
Sea $(X, (p_i : X \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ producto de $(D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}}$, para cada $\mathbf{K}$-morfismo $i \xrightarrow{a} j$ tenemos el diagrama $X \underset{p_j}{\overset{D(a) \circ p_i}{\rightrightarrows}} D(j)$, como A tiene igualadores, sea (Z_a, h_a) el igualador de $(D(a) \circ p_i, p_j)$ para cada $a \in Mor\mathbf{K}$.
Por lo que $(h_a)_{a \in Mor\mathbf{K}}$ es una familia de mono-regulares, por el lema anterior existe $(Z, ((\varphi_a)_{a \in Mor\mathbf{k}}, h))$ intersección de $(h_a)_{a \in Mor\mathbf{k}}$. Afirmamos que $(Z, (p_i \circ h : Z \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$

es un límite para D.
En efecto, veamos que es una fuente, es decir, que el diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_i \circ h"] \arrow[dr, "p_j \circ h"'] & D(i) \arrow[d, "D(a)"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

Podemos extenderlo de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varphi(a)"] \arrow[dr, "h"'] & Z_a \arrow[d, "h_a"] & \\ & X \arrow[r, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(a)"] \\ & & D(j) \end{tikzcd}$$

Así tenemos que:

$$D(a) \circ p_i \circ h = D(a) \circ p_i \circ h_a \circ \varphi_a = p_j \circ h_a \circ \varphi_a = p_j \circ h$$

Ahora, sea $(Z', (\psi_i : Z' \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ otra fuente natural.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_i \circ h"] & D(i) \\ Z' \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Como $(X, (p_i)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es producto de $(D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}}$ y $(Z', (\psi_i)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es fuente natural entonces existe morfismo conector $\alpha : Z' \to X$ tal que $p_i \circ \alpha = \psi_i$, de nuevo podemos extender el diagrama al siguiente:

Tenemos que (Z', α) es tenedor de $(D(a) \circ p_i, p_j)$ para cada $a \in Mor\mathbf{K}$ pues
$D(a) \circ p_i \circ \alpha = D(a) \circ \psi_i = \psi_j = p_j \circ \alpha$,
entonces existen únicos $\beta_a : Z' \to Z_a$ tales que $h_a \circ \beta_a = \alpha$, por lo tanto $(Z', ((\beta_a)_{a \in MorK}, \alpha))$ es fuente natural de $(h_a)_{a \in MorK}$.

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[dr, "D(a)"] & \\ Z_a \arrow[r, "h_a"] & X \arrow[u, "p_i"] \arrow[r, shift left, "D(a) \circ p_i"] \arrow[r, shift right, "p_j"'] & D(j) \\ & Z' \arrow[ul, dashed, "\beta_a"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[uu, bend left, "\psi_i"] \arrow[ur, "\psi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Como $(Z, (\varphi_a)_{a \in Mor\mathbf{K}})$ es intersección de $(h_a)_{a \in Mor\mathbf{K}}$, existe morfismo conector $\varphi : Z' \to Z$ tal que los diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varphi_a"] & Z_a \\ Z' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\beta_a"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \\ Z' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos así el siguiente diagrama en donde

$$(p_i \circ h) \circ \varphi = p_i \circ \alpha = \psi_i$$

para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "p_i \circ h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X \arrow[r, "p_i"] & D(i) \\ & Z' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(Z, (p_i \circ h)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es límite para D.

Notemos que, al demostrar la equivalencia de los primeros 6 incisos del Teorema, inmediatamente obtenemos (7) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (7) concluyendo la demostración. □

Naturalmente podemos obtener el caso finito del teorema anterior consiguiendo el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *Para una categoría $\boldsymbol{A}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\boldsymbol{A}$ es finitamente completa;*
2. *$\boldsymbol{A}$ tiene pullbacks y objetos terminales;*
3. *$\boldsymbol{A}$ tiene productos finitos y pullbacks;*
4. *$\boldsymbol{A}$ tiene productos finitos e imágenes inversas;*
5. *$\boldsymbol{A}$ tiene productos finitos e intersecciones finitas;*
6. *$\boldsymbol{A}$ tiene productos finitos e igualadores.*

Ejemplo 8. Las categorías **Set, Grp** y **Top** son completas y cocompletas. La subcategoría plena de **Set** que consiste de todos los conjuntos finitos es finitamente completa y finitamente cocompleta pero no es completa ni cocompleta.

Capítulo 5

Factorización de morfismos

En el Capítulo 2 mencionamos que todo morfismo en **Top** se puede factorizar con una inmersión y una función sobreyectiva, o bien, por un monomorfismo extremal y un epimorfismo. Si $Z' = f(X)/\sim$ es el espacio cociente de X, se tiene una factorización (Z', g', h') donde g' es epimorfismo extremal y h' es un monomorfismo con $g'(x) = [x]$ y $h'([x]) = f(x)$. Desde el punto de vista categórico, éstas son propiedades importantes de **Top**, que en este capítulo generalizaremos para cualquier categoría.

Proposición 5.1. *Supongamos que la categoría $\mathbf{A}$ es bien potenciada y tiene intersecciones e igualadores. Entonces, para cualquier morfismo $f : X \to Y$, existe una terna (Z, g, h) que consiste de un objeto Z, un epimorfismo extremal $g : X \to Z$ y un monomorfismo $h : Z \to Y$ tal que $f = h \circ g$.*

Demostración. Sea J la clase de todas las ternas $j = (Z_j, g_j, h_j)$ que consisten de $Z_j \in Ob\mathbf{A}$, un morfismo $g_j : X \to Z_j$ y un monomorfismo $h_j : Z_j \to Y$ tales que $f = h_j \circ g_j \quad [\star_1]$.

Notemos que, si $h_j = h_{j'}$ para $j, j' \in J$, entonces $h_j \circ g_{j'} = h_{j'} \circ g_{j'} = f = h_j \circ g_j$ y h_j monomorfismo, por lo que $g_j = g_{j'}$ y así $j = j'$.

Por hipótesis, A es bien potenciada, por lo que $\{h_j : j \in J\}$ tiene un conjunto representativo $\{h_i : i \in I\}$ tal que $1_Y \in \{h_i | i \in I\}$. Sea $(Z, (k_i : Z \to Z_i)_{i\in I}, h : Z \to Y)$ la intersección de los $(h_i)_{i\in I}$, por la Proposición 3.6 h es monomorfismo, como $(X, ((g_i)_{i\in I}, f))$ es otra fuente natural por $[\star_1]$, entonces existe único morfismo conector $g : X \to Z$ tal que $f = h \circ g$. Resta ver que g es epimorfismo extremal, veamos primero que es epimorfismo:

Sean $r, s : Z \to W$ $\mathbf{A}-$morfismos tales que $r \circ g = s \circ g$, como $\mathbf{A}$ tiene igualadores, existe (V, l) igualador de (r, s) y (X, g) es fuente así que existe único morfismo conector $\varphi : X \to V$ tales que $g = l \circ \varphi$, luego $(V, \varphi, h \circ l) \in J$ pues $h \circ l$ es monomorfismo al ser composición de monomorfismos, por lo tanto existe (Z_i, g_i, h_i) con $i \in I$ y $m : Z_i \to V$ tal que $h_i = (h \circ l) \circ m$. Entonces $h \circ l \circ m \circ k_i = h_i \circ k_i = h = h \circ 1_Z$, luego $l \circ m \circ k_i = 1_Z$, así l es retracción por (4) del Corolario 2.18 se tiene que l es isomorfismo y $r \circ l = s \circ l$ por lo que $r = s$. Por lo tanto g es epimorfismo.
Ahora, sean $t : W' \to Z$ y $u : X \to W'$ tales que $g = t \circ u$ con t monomorfismo, entonces $(h \circ t) \circ u = h \circ g = f$ con $h \circ t$ monomorfismo, por lo que $(W', u(h \circ t)) \in J$, por lo tanto existen $i \in I$,, (Z_i, g_i, h_i) y $m' : Z_i \to W'$ isomorfismo tal que $(h \circ t) \circ m' = h_i$. Entonces $h \circ t \circ m' \circ k_i = h_i \circ k_i = h = h \circ 1_Z$, así $t \circ (m' \circ k_i) = 1_Z$, es decir, t es retracción y al ser

monomorfismo es isomorfismo. Por lo tanto g es epimorfismo extremal.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_i"] \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[ddr, "g"] & & Y \\
& Z_i \arrow[ur, "h_i"] \arrow[dl, "m"] & \\
V \arrow[r, "l"'] & Z \arrow[u, "k_i"'] \arrow[uur, "h"'] \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & W
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 5.2. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría que tiene pullbacks. Si un epimorfismo extremal $f : W \to X$, los morfismos $g : W \to Y$, $h : X \to Z$ y un monomorfismo $k : Y \to Z$ satisfacen que $h \circ f = k \circ g$, entonces existe un morfismo $d : X \to Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d"'] \\
Y \arrow[r, "k"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & X \arrow[dd, "h"] \\
& V \arrow[ur, "l"'] \arrow[dl, "m"'] & \\
Y \arrow[rr, "k"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $(V, (l : V \to X, m : V \to Y))$ un pullback de (h, k). Además, como k es monomorfismo por la Proposición 3.9 tenemos que l también lo es. Ahora, por hipótesis $h \circ f = k \circ g$, por lo que $(W, (f, g))$ es fuente del pullback por lo que existe único morfismo conector $\varphi : W \to V$ tal que $f = l \circ \varphi$ y $g = m \circ \varphi$ como f es epimorfismo extremal entonces l es isomorfismo. Por lo tanto existe $d : X \to Y$ definida por $d = m \circ l^{-1}$ donde $g = m \circ \varphi = m \circ l^{-1} \circ l \circ \varphi = d \circ l \circ \varphi = d \circ f$ y $h = h \circ 1_X = h \circ l \circ l^{-1} = k \circ m \circ l^{-1} = k \circ d$. □

Definición 5.3.

1. Una categoría $\mathbf{A}$ es (*Ex epi, Mono*)*-factorizable* si, para cualquier morfismo $f : X \to Y$ existe una terna (Z, g, h) que consiste de un objeto Z, un epimorfismo extremal $g : X \to Z$ y un monomorfismo $h : Z \to Y$ tal que $f = h \circ g$. (Z, g, h) es llamada una (Ex epi, Mono)-factorización de f.

2. $\mathbf{A}$ es (*Ex epi, Mono*)*-factorizable unívocamente* (o de manera única) si es (Ex epi, Mono)-factorizable y para dos (Ex epi, Mono)-factorizaciones (Z, g, h) y (Z', g', h') de cada morfismo f, existe un isomorfismo $\varphi : Z \to Z'$ tal que $h = h' \circ \varphi$ (o, equivalentemente, $g' = \varphi \circ g$).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g'"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & \\
& Z' \arrow[uur, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

3. Diremos que $\mathbf{A}$ tiene la propiedad *(Ex epi, Mono)-diagonalización* siempre que, para cualesquiera $f : W \to X$ epimorfismo extremal, morfismos $g : W \to Y$,$h : X \to Z$ y un monomorfismo $k : Y \to Z$, satisfacen que $h \circ f = k \circ g$. Entonces existe un morfismo

$d : X \to Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$. A d la llamaremos diagonal (o morfismo diagonal) del cuadrado (f, g, h, k).

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d"'] \\ Y \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

Dual (de la definición). 1. Una categoría $\mathbf{A}$ es *(Epi, Ex mono)-factorizable* si, para cualquier morfismo $f : X \to Y$ existe una terna (Z, g, h) que consiste de un objeto Z, un epimorfismo $g : X \to Z$ y un monomorfismo extremal $h : Z \to Y$ tal que $f = h \circ g$. A la terna (Z, g, h) la llamaremos $(Epi, Exmono)$-factorización de f.

2. $\mathbf{A}$ es $(Epi, Exmono)$*-factorizable unívocamente* si, es $(Epi, Exmono)$*-factorizable* y para dos $(Epi, Exmono)$-factorizaciones (Z, g, h) y (Z', g', h') de cada morfismo f, existe un isomorfismo $\varphi : Z \to Z'$ tal que $h = h' \circ \varphi$.

3. Diremos que $\mathbf{A}$ tiene la propiedad *(Epi, Ex mono)-diagonalización* siempre que cualesquiera $f : W \to X$ epimorfismo, morfismos $g : W \to Y$,$h : X \to Z$ y un monomorfismo extremal $k : Y \to Z$ satisfacen que $h \circ f = k \circ g$. Entonces existe un morfismo $d : X \to Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$. A d la llamaremos diagonal (o morfismo diagonal) de el cuadrado (f, g, h, k).

Proposición 5.4. *Si una categoría $\boldsymbol{A}$ es (Ex epi, Mono)-factorizable y tiene la propiedad (Ex epi, Mono)-diagonalización, entonces es (Ex epi, Mono)-factorizable unívocamente.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un $\mathbf{A}$-morfismo y dos $(Exmono, Epi)$-factorizaciones (Z, g, h) y (Z', g', h') de f. Tenemos que $f = h \circ g$ y $f = h' \circ g'$ que se puede expresar en los diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "\varphi"'] \\ Z' \arrow[r, "h'"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[d, "h'"] \arrow[dl, "\varphi'"'] \\ Z \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

notemos que cumplen (3) de la Definición 5.3.
Por lo cual, existen $\varphi : Z \to Z'$ y $\varphi' : Z' \to Z$ tales que $g' = \varphi \circ g$ y $h = h' \circ \varphi$; $g = \varphi' \circ g'$ y $h' = h \circ \varphi'$ en donde

$$\begin{aligned} h' \circ 1_{Z'} &= h \circ \varphi' = h' \circ \varphi \circ \varphi' \text{ por ser } h' \text{ monomorfismo } 1_{Z'} = \varphi \circ \varphi' \\ 1_Z \circ g &= \varphi' \circ g' = \varphi' \circ \varphi \circ g \text{ por ser } g \text{ epimorfismo } 1_Z = \varphi' \circ \varphi \end{aligned}$$

□

Teorema 5.5 (Teorema de factorización I)**.** *Si una categoría $\boldsymbol{A}$ está bien potenciada y tiene intersecciones y productos finitos. Entonces $\boldsymbol{A}$ es (Ex epi, Mono)-factorizable unívocamente.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una categoría que cumpla las hipótesis, por el Teorema 4.6 $\mathbf{A}$ tiene pullbacks e igualadores, así $\mathbf{A}$ tiene igualadores e intersecciones y como está bien potenciada por la

Proposición 5.1 **A** es (Ex epi, Mono)-factorizable, como **A** tiene pullbacks **A** tiene la propiedad (Ex epi, Mono)-diagonalización y por la Proposición 5.4 lo es unívocamente. □

Dual. (del Teorema) Si **A** es una categoría co-bien potenciada con co-intersecciones y co-productos finitos. Entonces **A** es (Ex mono, Epi)-factorizable unívocamente.

Anteriormente hemos visto que **Set** es bien potenciada, co-bien potenciada (Observación 2.5), completa y co-completa (Ejemplo 8), entonces es (Ex epi, Mono) y (Ex mono, Epi)- factorizable unívocamente. Ahora nos interesa ver otras condiciones para que una categoría, en general, también cumpla lo anterior.

Lema 5.6. *Supongamos que **A** es bien potenciada y tiene intersecciones e igualadores. Sean $f : X \to Y$ un morfismo y M una clase de monomorfismos que satisface las siguientes condiciones.*

1. *Cerrada bajo intersecciones, es decir, si $(U, ((u_i : U \to U_i)_{i \in I}), u_0 : U \to V)$ es una intersección de una familia $(v_i : U_i \to V)$ de monomorfismos a V y si cada $v_i \in M$ para cada $i \in I$, entonces $v_o \in M$.*
2. *Si un morfismo $q : X \to U$, un monomorfismo regular $r : U \to V$ y un morfismo $s : V \to Y$ satisfacen que $f = s \circ r \circ q$ y $s \in M$, entonces $s \circ r \in M$.*
3. *$1_Y \in M$*

Entonces existe una terna (Z, g, h) de un objeto Z, un epimorfismo $g : X \to Z$ y un monomorfismo $h : Z \to Y$ que pertenece a M tal que

(a) *$f = h \circ g$*

(b) *Si una terna $(Z', g' : X \to Z', h' : Z' \to Y)$ cumple que $f = h' \circ g'$ y $h' \in M$ entonces existe $k : Z \to Z'$ tal que $h = h' \circ k$*

(c) *Si una terna $(W, l : X \to W, m : W \to Z)$ satisface que $g = m \circ l$ y $h \circ m \in M$, entonces m es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, "l"'] \arrow[ddr, "g"'] & & Y \\
& Z' \arrow[ur, "h'"] & \\
W \arrow[r, "m"'] & Z \arrow[u, "k"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea J la clase de ternas (Z_j, g_j, h_j) donde $Z_j \in ObA$, $g_j : X \to Z_j$ un morfismo y $h_j : Z_j \to Y$ en M tales que $f = h \circ g$.

Por hipótesis A es bien potenciada, por lo que $\{h_j\}_{j \in J}$ tiene un conjunto de representantes $\{h_i\}_{i \in I}$. Sea $(Y, (k_i : Z \to Z_i)_{i \in I}, h : Z \to Y)$ la intersección de $(h_i)_{i \in I}$. Puesto que, para cada $i \in I$, $h_i \in M$, se tiene que $h \in M$ por 1.

(a) Como $(X, (g_i)_{i \in I})$ es otra fuente, entonces existe único morfismo conector $g : X \to Z$ tal que $f = h \circ g$, similar a la demostración en la Proposición 5.1 podemos ver que g es epimorfismo.

(b) Supongamos que (Z', g', h') es una terna tal que $f = h' \circ g'$ y $h' \in M$, como g es epimorfismo existe $g^{-1} : Z \to X$ tal que $g \circ g^{-1} = 1_Z$. Definamos $k := g' \circ g^{-1}$:, como $f = h \circ g$ entonces $h \circ g = h' \circ g'$ luego $h = h \circ g \circ g^{-1} = h' \circ g' \circ g^{-1} = h' \circ k$.

(c) Si $g = m \circ l$, entonces $1_Z = g \circ g^{-1} = m \circ l \circ g{-}1$, o bien, $1_Z = m \circ (l \circ g^{-1})$. Por lo cual m es retracción, además como $h \circ m$ es monomorfismo por la Proposición 2.3 m también lo es y por el Corolario 2.18 m es isomorfismo.

□

Este lema es una generalización de la Proposición 5.1.

Lema 5.7. *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una categoría bien potenciada y tiene intersecciones e igualadores, entonces* $\boldsymbol{A}$ *tiene la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización.*

Demostración. Sean $f : W \to X$ un epimorfismo, morfismos $g : W \to Y$,$h : X \to Z$ y un monomorfismo extremal $k : Y \to Z$ que satisfacen: $h \circ f = k \circ g$. Aplicaremos el Lema 5.6 para el morfismo $k : Y \to Z$ y la clase M de todos los monomorfismos $n : V \to Z$ tales que existen morfismos $l : X \to V$ y $m : Y \to V$ con $n \circ l = h$ y $n \circ m = k$ representado en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dl, "l"'] \arrow[dd, "h"] \\
& V \arrow[dr, "n"] & \\
Y \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "k"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Demostraremos que M satisface las condiciones del Lema 5.6

2. Sean $q : Y \to U$ un morfismo, $r : U \to V'$ un morfismo regular y $s : V' \to Z$ un morfismo tales que $k = s \circ r \circ q$ y $s \in M$, como r es regular, existen $u, v : V' \to V''$ tales que $u \circ r = v \circ r$.

   Como $s \in M$, existe $l' : X \to V'$ tal que $s \circ l' = h$ y $s \circ r \circ q = k$ luego

   $$\begin{aligned}
   s \circ l' \circ f &= h \circ f = k \circ g = s \circ r \circ q \circ g \text{ como } s \text{ es monomorfismo, } l' \circ f = r \circ q \circ g \\
   &\text{Luego} \\
   u \circ (l' \circ f) &= u \circ (r \circ q \circ g) = (u \circ r) \circ q \circ g = (v \circ r) \circ q \circ g = v \circ (r \circ q \circ g) = v \circ (l' \circ f)
   \end{aligned}$$

   Además f es epimorfismo extremal, entonces $u \circ l' = v \circ l'$ y r es igualador de u, v por lo que existe único morfismo conector $l'' : X \to U$ tal que $l' = r \circ l''$, luego $h \circ f = s \circ l' \circ f = s \circ r \circ l'' \circ f$, entonces $h = s \circ r \circ l''$. Es decir, tenemos que $s \circ r$ es monomorfismo al ser composición de monomorfismos y además $(s \circ r) \circ l'' = h$ y $(s \circ r) \circ q = k$. Por lo tanto $s \circ r \in M$.

   $$\begin{tikzcd}
   W \arrow[rrrr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & & & X \arrow[dlll, "l''"'] \arrow[dll, "l'"] \arrow[dd, "h"] \\
   & U \arrow[r, "r"] & V' \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[drr, "s"] & V'' & \\
   Y \arrow[ur, "q"'] \arrow[rrrr, "k"'] & & & & Z
   \end{tikzcd}$$

3. Puesto que 1_Z es un monomorfismo donde $h : X \to Z$ y $k : Y \to Z$ cumplen que $1_Z \circ h = h$ y $1_Z \circ k = k$, entonces $1_Z \in M$.

1. Sea $(T, ((t_i : T \to V_i)_{i\in I}), t_0 : T \to Z)$ intersección de la familia $(n_i : V_i \to Z)$ de monomorfismos $n_i \in M$ para cada $i \in I$, entonces existen $l_i : X \to V_i$ y $m_i : Y \to V_i$ tales que $n_i \circ l = h$ y $n_i \circ m_i = k$. Notemos que $(X, (l_i)_{i\in I})$y $(Y, (m_i)_{i\in I})$ son fuentes naturales por lo tanto existen únicos morfismos conectores $l^* : X \to T$ y $m^* : Y \to T$ tales que $t_0 \circ l^* = h$ y $t_0 \circ m^* = k$ además t_0 es monomorfismo, por lo tanto $t_0 \in M$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & & X \arrow[dll, "l^*"'] \arrow[dl, "l_i"] \arrow[dd, "h"] \\
& T \arrow[r, "t_i"] \arrow[drr, "t_0"] & V_i \arrow[dr, "n_i"] & \\
Y \arrow[ur, "m^*"] \arrow[urr, "m_i"] \arrow[rrr, "k"'] & & & Z
\end{tikzcd}$$

Entonces existe $(V_0, m_0 : Y \to V_0, n_0 : V_0 \to Z)$ tal que satisface $(a), (b)$, y (c) del Lema 5.6. Puesto que k es monomorfismo extremal, se tiene que m_0 es isomorfismo, además $n_0 \in M$ entonces existe $l_0 : X \to V_0$ tal que $n_0 \circ l_0 = h$. Finalmente definimos $d : X \to Y$ por $d = m_0^{-1} \circ l_0$, así $k \circ d = k \circ m_0^{-1} \circ l_0 = n_0 \circ l_0 = h$ luego $k \circ g = h \circ f = k \circ d \circ f$ entonces $d \circ f = g$. □

Definición 5.8. Sea **A** una categoría y $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ una familia de **A**-monomorfismos extremales donde $(X, (g_i : X \to X_i)_{i\in I})$ y $(Y, (q_i : Y \to Y_i)_{i\in I})$ son los productos de $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ familias de **A**-objetos, respectivamente, entonces $(X, (f_i \circ p_i)_{i\in I})$ es fuente natural del producto de la familia $(Y_i)_{i\in I}$ por lo cual existe único **A**-morfismo conector $f : X \to Y$ tal que $q_i \circ f = f_i \circ p_i$ para cada $i \in I$. Diremos que el producto de los **A**-monomorfismos extremales $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ es monomorfismo extremal, si $f : X \to Y$ es un **A**-monomorfismo extremal.

Lema 5.9. *Si una categoría* $\boldsymbol{A}$ *tiene la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización, entonces se cumple en* $\boldsymbol{A}$*:*

1. *La composición de monomorfismos extremales es un monomorfismo extremal.*

2. *La intersección de monomorfismos extremales es un monomorfismo extremal.*

3. *Imagen inversa de un* $\boldsymbol{A}$*-monomorfismo extremal es* $\boldsymbol{A}$ *monomorfismo extremal.*

4. *Producto de* $\boldsymbol{A}$ *monomorfismos extremales es* $\boldsymbol{A}$*-monomorfismo extremal.*

Demostración. 1. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ monomorfismos extremales y $h := g \circ f$, tenemos que h es monomorfismo al ser composición de monomorfismos. Ahora si $l : X \to V$ un epimorfismo y $m : V \to Z$ un morfismo cumplen que $h = m \circ l$, por la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización, existe $d : V \to Y$ tal que $f = d \circ l$.

Por la última igualdad, y por la misma propiedad, existe diagonal $d' : V \to X$ tal que $d' \circ l = 1_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "d"'] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "1_X"'] & V \arrow[d, "d"] \arrow[dl, "d'"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

De esta manera, l es sección y epimorfismo, por lo tanto es isomorfismo.

2. Sean $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ monomorfismos extremales y $(X, ((g_i : X \to X_i)_{i\in I}, g_0 : X \to Y))$ su intersección, donde g_0 es monomorfismo. Sean $l : X \to Z$ un epimorfismo y $m : Z \to Y$ un morfismo tales que $g_0 = m \circ l$.
Para cada $i \in I$, $m \circ l = g_0 = f_i \circ g_i$, donde l es epimorfismo y f_i monomorfismo extremal, por la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización existe $d_i : Z \to X_i$ tal que $m = f_i \circ d_i$ por lo que $(Z, ((d_i)_{i\in I}, m))$ es fuente natural de la intersección, por lo que existe morfismo conector $\varphi : Z \to X$ tal que $m = g_0 \circ \varphi$. Entonces $g_0 = m \circ l = g_0 \circ \varphi \circ l$ y g_0 es monomorfismo, por lo que $1_X = \varphi \circ l$, por el Corolario 2.18 l es isomorfismo. Por lo tanto g_0 es monomorfismo extremal.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "g_i"'] & Z \arrow[l, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "d_i"'] \\
X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y
\end{tikzcd}$$

3. Sea (W, f, g) un pullback de $(h : X \to Z, k : Y \to Z)$ y sea k un monomorfismo extremal, por la Proposición 3.9 tenemos que f es monomorfismo.

Sean $l : W \to V$ un epimorfismo y $m : V \to X$ un morfismo tales que $f = m \circ l$, entonces existe diagonal $n : V \to Y$ de $(l, g, h \circ m, k)$ tal que $g = n \circ l$ y $h \circ m = k \circ n$ como se ve en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dd, "h"] \\
& V \arrow[ur, "m"'] \arrow[dl, "n"'] & \\
Y \arrow[rr, "k"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Con la última igualdad, tenemos que $(V, (m, n))$ es fuente natural del pullback, por lo cual existe único morfismo conector $\varphi : V \to W$ tal que $f \circ \varphi = m$ y $g \circ \varphi = n$. Por la unicidad del morfismo conector $\varphi \circ l = 1_W$ y así l es sección, por el Corolario 2.18 l es isomorfismo. Por lo tanto f es monomorfismo extremal.

4. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia de monomorfismos extremales donde $(X, (g_i)_{i\in I})$ y $(Y, (q_i)_{i\in I})$ son los productos de $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ respectivamente, entonces $(X, (f_i \circ p_i)_{i\in I})$ es fuente natural del producto de la familia $(Y_i)_{i\in I}$ por lo cual existe único morfismo conector $f : X \to Y$ tal que $q_i \circ f = f_i \circ p_i$ para cada $i \in I$. Ahora, veamos que $f : X \to Y$ es monomorfismo extremal.

Sean $l : X \to Z$ un epimorfismo y $m : Z \to Y$ un morfismo tales que $f = m \circ l$, notemos que para cada $i \in I$ tenemos el siguiente diagrama; que cumple las condiciones de la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización, entonces existe $n_i : Z \to X_i$ tal que $p_i = n_i \circ l$

y $q_i \circ m = f_i \circ n_i$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, shift left, "l"] \arrow[dd, "p_i"'] & & Y \arrow[dd, "q_i"] \\
& Z \arrow[ul, shift left, "\varphi"] \arrow[ur, "m"'] \arrow[dl, "n_i"] & \\
X_i \arrow[rr, "f_i"'] & & Y_i
\end{tikzcd}$$

Luego $(Z, (n_i)_{i\in I})$ es fuente natural para el producto de los $(X_i)_i \in I$, por lo cual existe único morfismo conector $\varphi : Z \to X$ y por esta misma unicidad, tenemos que $\varphi \circ l = 1_X$. De esta manera, l es sección y epimorfismo, por lo tanto isomorfismo.

□

Ejemplo 9. Si una categoría **A** tiene dos monomorfismos extremales f y g cuya composición $h = g \circ f$ no es un monomorfismo extremal, entonces **A** tiene morfismos l y k tales que $h = l \circ k$ y k no es un isomorfismo pero sí es epimorfismo; como f y g no son epimorfismos ya que, de serlo, serían isomorfismos y h también ! , entonces **A** contiene r, s, u y v tales que $r \circ f = s \circ f$ y $r \neq s$; $u \circ g = v \circ g$ y $u \neq v$.

Así tenemos el siguiente ejemplo de categorías en el cual la composición de monomorfismos extremales no necesariamente es monomorfismo extremal, en donde todos los objetos son mostrados por puntos y todos los morfismos, excepto las identidades, son las flechas.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[drr] & \bullet \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "l"'] \arrow[rr, bend right] & \bullet \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Teorema 5.10. *(Teorema de factorización II) Si* **A** *está bien potenciada con intersecciones e igualadores, entonces es (Epi, Ex mono)-factorizable unívocamente.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un morfismo y sea M la clase de todos los monomorfismos extremales de A, por el Lema 5.6 obtenemos una factorización (Z, g, h) con g un epimorfismo y h un monomorfismo extremal pues $h \in M$, luego **A** es (Epi, Ex mono)-factorizable, por el Lema 5.7 **A** tiene la propiedad (Epi, Ex mono)-diagonalización donde por la Proposición5.4 se concluye que A es (Epi, Ex mono)-factorizable unívocamente. □

Teorema 5.11. *Si* **A** *está bien potenciada, (Ex epi)-co-bien potenciada y completa, entonces* **A** *tiene coigualadores.*

Demostración. Sean $f, g : X \to Y$ morfismos. Entonces M, la clase de todos los epimorfismos extremales h de Y con la propiedad de que $h \circ f = h \circ g$, tiene un conjunto de representantes $(h_i : Y \to Z_i)_{i\in I}$.

Sea $(Z, (p_i)_{i\in I})$ un producto de la familia $(Z_i)_{i\in I}$ entonces, al ser $(Y, (h_i)_{i\in I})$ otra fuente del producto, existe único morfismo conector $k : Y \to Z$ tal que, para toda $i \in I$, $p_i \circ k = h_i$.

Ahora M cumple las condiciones del Lema 5.6, entonces existe $(W, l : Y \to W, m : W \to Z)$ una (Ex epi, Mono)-factorización de k donde l es epimorfismo extremal y m es monomorfismo y $k = m \circ l$.

Afirmamos que l es el coigualador de f y g.
Tenemos que $k \circ f = k \circ g$, entonces $m \circ l \circ f = m \circ l \circ g$ por ser m monomorfismo $l \circ f = l \circ g$.

Sea $n : Y \to V$ tal que $n \circ f = n \circ g$ y $(U, r : Y \to V, s : U \to V)$ una (Ex epi, mono)-factorización de n, así $n = s \circ r$ y $n \circ f = n \circ g$, luego $s \circ r \circ f = s \circ r \circ g$ por lo que $r \circ f = r \circ g$ pues s es mono, de esta manera $r \in M$ por lo que existe $i \in I$ y un isomorfismo $t_i : Z_i \to U$ tal que $r = t_i \circ h_i$.

Definamos $\varphi : W \to V$ como $\varphi = s \circ t_i \circ p_i \circ m$, es morfismo conector pues

$$\varphi \circ l = s \circ t_i \circ p_i \circ m \circ l = s \circ t_i \circ p_i \circ k = s \circ t_i \circ h_i = s \circ r = n$$

y además es única ya que , si $\psi : W \to V$ es otro morfismo conector entonces $\varphi \circ l = n = \psi \circ l$ y l es epi, por lo tanto $\varphi = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dr, "m"] & \\
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "k"] \arrow[drr, "h_i"] \arrow[d, "r"] \arrow[dl, "n"'] & & Z \arrow[d, "p_i"] \\
V & U \arrow[l, "s"] & & Z_i \arrow[ll, "t_i"']
\end{tikzcd}$$

□

Capítulo 6

Subcategorías reflexivas

Definición 6.1. Una subcategoría $\mathbf{B}$ de una categoría $\mathbf{A}$ es reflexiva, si cualquier $\mathbf{A}$-objeto X tiene una $\mathbf{B}-$reflexión $r_X : X \to Y$, es decir, existe un objeto Y y un morfismo $r_X : X \to Y$ en $\mathbf{A}$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f^0"'] & \end{tikzcd}$$

1. $Y \in Ob\mathbf{B}$

2. Para cualquier $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Z$ con $Z \in Ob\mathbf{B}$, existe un único $\mathbf{B}-$morfismo $f^0 : Y \to Z$ tal que $f^0 \circ r_X = f$.

   A f^0 lo llamaremos extensión de f.

Dual. (de la Definición) $\mathbf{B}$ es una subcategoría coreflexiva de una categoría $\mathbf{A}$ si cualquier $\mathbf{A}$-objeto X tiene una $\mathbf{B}-$coreflexión $r_X : Y \to X$ tal que $Y \in Ob\mathbf{B}$, $r_X \in Mor\mathbf{A}$ y satisface que para cualquier $f : Z \to X$ con $Z \in Ob\mathbf{B}$, existe un único $\mathbf{B}-$morfismo $f^0 : Z \to Y$ tal que $r_X \circ f^0 = f$.

Proposición 6.2. *Sea $\boldsymbol{B}$ una subcategoría reflexiva de $\boldsymbol{A}$ y $r_X : X \to Y$ una $\boldsymbol{B}-$reflexión de un $\boldsymbol{A}-$objeto X. Entonces se cumple que:*

1. *Si $f, g : Y \to Z$ son $\boldsymbol{B}$-morfismos y $f \circ r_X = g \circ r_X$, entonces $f = g$.*

2. *r_X es esencialmente única; es decir, si (s_X) es otra $\boldsymbol{B}$-reflexión, entonces $(s_X)^0 \circ (r_X)^0 = 1_W$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0 = 1_Y$.*

Demostración. 1. Se sigue de la unicidad de la extensión.

2. Si $s_X : X \to W$ es otra $\mathbf{B}$-reflexión de X, entonces existe $\mathbf{B}$-morfismo $(s_X)^0 : Y \to W$ y $(r_X)^0 : W \to Y$ tales que $s_X = (s_X)^0 \circ r_X$ y $r_X = (r_X)^0 \circ s_X$. Luego $(s_X)^0 \circ (r_X)^0 \circ s_X = s_X$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0 \circ r_X = r_X$, es decir, $(s_X)^0 \circ (r_X)^0$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0$ son extensiones de s_X y r_X respectivamente, pero también lo son 1_W y 1_Y por la proposición anterior $(s_X)^0 \circ (r_X)^0 = 1_W$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0 = 1_Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "r_X"'] & W \\ Y \arrow[ur, "(s_X)^0"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "s_X"'] & Y \\ W \arrow[ur, "(r_X)^0"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "s_X"'] & W \\ W \arrow[ur, shift left, "1_W"] \arrow[ur, shift right, "(s_x)^0 \circ (r_X)^0"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \\ Y \arrow[ur, shift left, "1_Y"] \arrow[ur, shift right, "(r_x)^0 \circ (s_X)^0"'] & \end{tikzcd}$$

□

Definición 6.3. Sea $\mathbf{B}$ una subcategoría reflexiva de $\mathbf{A}$ y denotemos la $\mathbf{B}$-reflexión de cada $\mathbf{A}-$objeto X por $r_X : X \to RX$. Para un $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Y$, existe un único $\mathbf{B}-$morfismo $Rf : RX \to RY$ tal que $Rf = (r_Y \circ f)^0$, es decir, $Rf \circ r_X = r_Y \circ f$. Asignando Rf a f, obtenemos un funtor $R : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ el cual llamaremos un $\mathbf{B}$-reflector. En efecto,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \arrow[d, "r_Y"] \\ RX \arrow[r, "Rf"'] \arrow[ur, "f^0"] & RY \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] \arrow[rr, bend left, "r_Y \circ f"] & Y \arrow[r, "r_Y"] & RY \\ RX \arrow[ur, "f^0"] \arrow[urr, "(r_Y \circ f)^0 = Rf"'] & & \end{tikzcd}$$

2. Para $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ en $MorA$, $R(g \circ_{\mathbf{A}} f) = (r_Z \circ_{\mathbf{A}} g \circ_{\mathbf{A}} f)^0$, mientras que $R(g) \circ_{\mathbf{A}} R(f) = (r_Z \circ_{\mathbf{A}} g)^0 \circ_{\mathbf{B}} (r_Y \circ_{\mathbf{A}} f)^0$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "r_Z"] & RZ \\ RX \arrow[urrr, "R(g \circ_A f)"'] & & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r_Y"'] & Z \arrow[d, "r_Z"'] \\ RX \arrow[r, "Rf"'] & RY \arrow[r, "Rg"'] & RZ \end{tikzcd}$$

como $r_Y \circ f = Rf \circ r_X$ y $r_Z \circ g = Rg \circ r_Y$ entonces $r_Z \circ g \circ f = Rg \circ r_Y \circ f = Rg \circ Rf \circ r_X$ así $Rg \circ Rf$ es extensión de $r_Z \circ g \circ f$ por su unicidad $Rg \circ Rf = R(g \circ f)$.

3. $R(1_X) = (1_X \circ r_X)^0$ pero 1_{RX} también es extensión de $1_X \circ r_X$ por unicidad $R(1_X) = 1_{RX}$.

Dual. Naturalmente podemos definir un funtor similar pidiendo que $\mathbf{B}$ sea una subcategoría coreflexiva de una categoría $\mathbf{A}$ y llamándolo $\mathbf{B}$-coreflector.

Observación 6.1. Sea $\mathbf{B}$ una subcategoría de una categoría $\mathbf{A}$ con el funtor inclusión $E : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{B}$ es reflexiva en $\mathbf{A}$ con el $\mathbf{B}$-reflector R si y sólo si E tiene el funtor adjunto izquierdo (ver Definición A.1) $R : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Los reflectores son considerados como casos especiales de funtores adjuntos. La teoría de conjuntos es de los temas más importantes tratado en textos de teoría de categorías pero nos restringiremos a la teoría de subcategorías reflexivas.

Proposición 6.4. *Sea $\boldsymbol{B}$ una subcategoría reflexiva de $\boldsymbol{A}$. Entonces $\boldsymbol{B}$ es plena en $\boldsymbol{A}$ si y solo si para cada $\boldsymbol{B}-$objeto X la identidad $1_X : X \to X$ es una $\boldsymbol{B}$-reflexión.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{B}$ es plena en $\mathbf{A}$ y sea $X \in Ob\mathbf{B}$, $f : X \to Y$ un $\mathbf{A}$-morfismo con $Y \in Ob\mathbf{B}$, como $f \in [X, Y]_{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{B}$ es plena entonces $f \in Mor\mathbf{B}$ y es tal que $f \circ 1_X = f$ donde claramente es única.

Ahora, si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ con X, Y objetos de $\mathbf{B}$, entonces existen 1_X reflexión en $\mathbf{A}$ y $f^0 \in Mor\mathbf{B}$ extensión tales que $f = f^0 \circ 1_X = f^0 \in Mor\mathbf{B}$, así $f \in Morf\mathbf{B}$. $\square$

Proposición 6.5. *Sea $\boldsymbol{B}$ una subcategoría de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ una subcategoría plena de B que satisface la siguiente condición:*

Si para cualquier $X \in Ob\boldsymbol{B}$, existe $Y \in Ob\boldsymbol{C}$ y un $\boldsymbol{B}$-isomorfismo $\varphi : X \to Y$. Entonces $\boldsymbol{C}$ es reflexiva en $\boldsymbol{A}$ si y sólo si $\boldsymbol{B}$ es reflexiva en $\boldsymbol{A}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{C}$ es reflexiva en $\mathbf{A}$.

Sea $X \in Ob\mathbf{A}$, entonces existe $r_X : X \to RX$ $\mathbf{C}$-reflexión, que al ser subcategoría, $r_X \in Mor\mathbf{B}$ por lo que $RX \in Ob\mathbf{B}$. Afirmamos que r_X es una $\mathbf{B}$-reflexión. Sea $f : X \to Y$ con $Y \in Ob\mathbf{B}$, por la propiedad, existe $Y' \in Ob\mathbf{C}$ y $\varphi : Y \to Y'$ $\mathbf{B}$-isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_X"'] & Y \arrow[r, "\varphi"] & Y' \\ RX \arrow[ur, "\psi"] \arrow[urr, "(\varphi\circ f)^0"'] & & \end{tikzcd}$$

Para $\varphi \circ f : X \to Y'$ $\mathbf{A}$-morfismo y $Y' \in Ob\mathbf{C}$ existe $(\varphi \circ f)^0$ $\mathbf{C}$-extensión, proponemos $(f)^0 := \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)^0$ como la $\mathbf{B}-$extensión de f. Como $\varphi \circ f = (\varphi \circ f)^0 \circ r_X$ entonces $f = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)^0 \circ r_X = f^0 \circ r_X$, además es única pues si existiera $\psi : RX \to Y$ tal que $f = \psi \circ r_X$ entonces $\varphi \circ f = \varphi \circ \psi \circ r_X$ con $\varphi \circ \psi : RX \to Y' \in Mor\mathbf{C}$ por ser $\mathbf{C}$ plena; es decir, $\varphi \circ \psi$ es $\mathbf{C}-$extensión de $\varphi \circ f$, por su unicidad $\varphi \circ \psi = (\varphi \circ f)^0$ por lo tanto $\psi = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)^0$.

Ahora, supongamos que $\mathbf{B}$ es reflexiva en $\mathbf{A}$. Sea X en los objetos de $\mathbf{A}$ entonces existe $r'_X : X \to RX'$ $\mathbf{B}$-reflexión con $RX' \in Ob\mathbf{B}$ por la propiedad existe $RX \in Ob\mathbf{C}$ y $\varphi : RX' \to RX$ $\mathbf{B}$-isomorfismo. Proponemos $r_X := \varphi \circ r'_X : X \to RX$ como la $\mathbf{C}$-reflexión que buscamos. Sea $f : X \to Y$ un $\mathbf{A}-$morfismo con $Y \in Ob\mathbf{C}$ y por tanto en $\mathbf{B}$, así existe h $\mathbf{B}-$extensión de f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r'_X"'] & Y \\ RX' \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & \\ RX \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $f^0 := h \circ \varphi^{-1} : RX \to Y$ es la $\mathbf{C}-$extensión de r'_X. Tenemos que f^0 está en Mor$\mathbf{C}$ pues RX y $Y \in Ob\mathbf{C}$.
Además $f = h \circ r'_X = h \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ r'_X = (h \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \circ r'_X = (h \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ r'_X)) = f^0 \circ r_X$ así $f = f^0 \circ r_X$. Por último, es única pues si $\psi : RX \to Y$ fuese otra $\mathbf{C}$-extensión entonces $f = \psi \circ r_X = \psi \circ \varphi \circ r'_X$ luego $\psi \circ \varphi$ es $\mathbf{B}-$extensión de f, por unicidad $\psi \circ \varphi = h$, o bien, $\psi = h \circ \varphi^{-1}$. □

Muchas de las subcategorías que consideraremos serán plenas y *"cerradas bajo isomorfismos"*, ésto es:

Definición 6.6. Una subcategoría $\mathbf{B}$ de una categoría $\mathbf{A}$ es *cerrada bajo isomorfismos* ,cuando se cumple que, si $X \in Ob\mathbf{B}$ y $\varphi : X \to Y$ es un $A-$isomorfismo entonces $Y \in Ob\mathbf{B}$.

Por lo que haremos la siguiente convención: de ahora, en adelante, todas las categorías serán plenas y cerradas bajo isomorfismos.

Definición 6.7. Sea E una clase de morfismos de una categoría $\mathbf{A}$ la cuál es cerrada bajo composición con isomorfismos (si $f \in E$ y g es $\mathbf{A}-$isomorfismo, $f \circ g \in E$). Una subcategoría $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ es $E-$reflexiva en $\mathbf{A}$ si cada $\mathbf{B}-$reflexión r_X de cada $\mathbf{A}$-objeto X pertenece a E. Cuando $E = Epi\mathbf{A}$, la clase de todos los epimorfismos de $\mathbf{A}$, diremos que $\mathbf{B}$ es epireflexiva en $\mathbf{A}$ y similarmente utilizaremos notaciones como $Mono\mathbf{A}$, $Bi\mathbf{A}$, $Exepi\mathbf{A}$, para otras clases de E y términos como monoreflexiva, bireflexiva, (ex epi)-reflexiva, etc.

Dual. Una subcategoría coreflexiva $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{E}$-coreflexiva en $\mathbf{A}$ si cada $\mathbf{B}$-coreflexión r_X de cada $\mathbf{A}$-objeto X pertenece a E. También tendremos términos como: epicoreflexiva, monocoreflexiva, bicoreflexiva, ex-epicoreflexiva, etc.

Ejemplo 10. $\mathbf{Top}_0$ es epireflexiva en $\mathbf{Top}$. Sea (X, τ) en $\mathbf{Top}_0$, definamos la relación en X:

$$x \sim y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$$

No es difícil ver que es una relación de equivalencia, veamos ahora que $(X/\sim, \tau/\sim)$ es T_0(ver Definición 3.11).

Sean $[x],[y]\in X/\sim$, si $[x]\neq[y]$ entonces $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$, es decir existe $z\in\overline{\{x\}}$ tal que $z\notin\overline{\{y\}}$ o existe $w\in\overline{\{y\}}$ tal que $w\notin\overline{\{x\}}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que existe $z\in\overline{\{x\}}$ tal que $z\notin\overline{\{y\}}$, entonces existe $U\in\tau$ tal que $z\in U$, $x\in U$ y $y\notin U$. Entonces $\pi(x)\in\pi(U)$ pero $\pi(y)\notin\pi(U)$ ya que, de estarlo, existiría $u\in U$ tal que $\pi(u)=\pi(y)$, luego $\overline{\{y\}}=\overline{\{u\}}$, entonces $u\in\overline{\{y\}}$ para $U\in\tau$, $U\cap\{y\}$, o bien $y\in U$ lo cual es absurdo.
Además $\pi^{-1}(\pi(U))=U$, pues si $w\in\pi^{-1}(\pi(U))$, entonces existe $u\in U$ tal que $\pi(u)=\pi(w)$, o bien, $\overline{\{w\}}=\overline{\{u\}}$, luego $w\in U$. De esta manera, $p(U)$ es abierto y $\pi(x)\in\pi(U)$ pero $\pi(y)\notin\pi(U)$.
Si $f:(X,\tau)\to(Z,\eta)$ un morfismo en **Top** con (Z,η) un objeto en $\mathbf{Top}_0$, entonces para cada $\pi(x)\in X/\sim$ definimos $f^0(\pi(x))=f(x)$. Está bien definida, ya que si $\pi(x),\pi(y)\in X/\sim$ tales que $f(x)\neq f(y)$ sin perdida de generalidad existiría un abierto W en η tal que $f(x)\in W$ y $f(y)\notin W$, por continuidad existe $U\in\tau$ tal que $x\in U$ y $f(U)\subseteq W$, pero $y\notin U$ pues de estarlo, $f(y)\in f(U)\subseteq W$ así $x\in\overline{\{y\}}$. Por lo tanto f^0 y f es continua pues sale de una topología final.

Proposición 6.8. *Si $\boldsymbol{B}$ es monoreflexiva en $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{B}$ es epireflexiva en $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Sea $X\in Ob\mathbf{A}$ y $r_X:X\to RX$ una $\mathbf{B}-$reflexión de X. Si $u\circ r_X=v\circ r_X$ para $\mathbf{A}$-morfismos $u,v:RX\to Y$; para $Y\in Ob\mathbf{A}$ existe $r_Y:Y\to RY$ $\mathbf{B}-$reflexión con $RY\in Ob\mathbf{B}$, en donde $r_Y\circ u\circ r_X=r_Y\circ v\circ r_X:=h$.
Como $RX,RY\in Ob\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ es plena entonces $r_Y\circ u,r_Y\circ v:RX\to RY$ son $\mathbf{B}$-morfismos así que son $\mathbf{B}$-extensiones de h, por su unicidad $r_Y\circ v=r_Y\circ u$ y r_Y es mono por lo tanto $u=v$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X"] & RX \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \arrow[r, "r_Y"] & RY \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r_X"'] & RY \\ RX \arrow[ur, shift left, "r_Y\circ u"] \arrow[ur, shift right, "r_Y\circ v"'] & \end{tikzcd}$$

□

No es difícil pensar en el dual de esta proposición pero la mencionaremos ya que se ocupará más adelante:

Dual. (de la Proposición 6.8) Sea $\mathbf{B}$ epicoreflexiva entonces $\mathbf{B}$ es monocoreflexiva.

Definición 6.9. Un objeto S de una categoría $\mathbf{A}$ es un separador si siempre que tengamos $f,g:X\to Y$ diferentes $\mathbf{A}$-morfismos, exista un morfismo $x:S\to X$ tal que $f\circ x\neq g\circ x$.

Dual. S es un coseparador de una categoría $\mathbf{A}$ cuando se cumple que:
Si $f,g:Y\to X$ son $\mathbf{A}$ morfismos diferentes, entonces existe un morfismo $x:X\to S$ tal que $x\circ f\neq x\circ g$.

En donde podemos dar los siguientes ejemplos:

Ejemplo 11.

1. En **Set** o **Top**, todos los objetos no vacíos son separadores; ya que, si $S\neq\emptyset$ y $f,g:X\to Y$ son morfismos con $f\neq g$ entonces existe $x_0\in X$ tal que $f(x_0)\neq g(x_0)$ definiendo $x\equiv x_0$ tenemos que $x:S\to X$ es continua y $f\circ x\neq g\circ x$.

2. En **Grp** o **Ab**, el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ es un separador, pues si $f,g:X\to Y$ son morfismos en **Grp** o **Ab** distintos en $x_0\in X$, podemos definir $x:\mathbb{Z}\to X$ como $x(k)=kx_0$ y $x(0)=e$ el neutro en X, así x es morfismo de grupos y separa a f y g.

Proposición 6.10. *Supongamos que una categoría $\boldsymbol{A}$ tiene un separador S y $\boldsymbol{B}$ es una subcategoría de $\boldsymbol{A}$ la cual contiene a S. Entonces $\boldsymbol{B}$ es bicoreflexiva en $\boldsymbol{A}$ si y sólo si es coreflexiva en $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Supongamos que **B** es coreflexiva en **A**, por el dual de la proposición anterior es suficiente demostrar que **B** es epicoreflexiva.

Sea $r_X : RX \to X$ una **B**-coreflexión de un **A**-objeto X y sean $u, v : X \to Y$ **A**−morfismos tales que $u \circ r_X = v \circ r_X$. Supongamos que $u \neq v$, entonces existe $x : S \to X$ **A**-morfismos que los separa, es decir $u \circ x \neq v \circ x$. Como r_X es **B**−coreflexión, para $x : S \to X$ existe $x^0 : S \to RX$ su extensión tal que $r_X \circ x^0 = x$ de esta manera:

$$\begin{tikzcd} & RX \arrow[d, "r_X"] \\ S \arrow[ur, "x^0"] \arrow[r, "x"] & X \arrow[d, shift right, "v"'] \arrow[d, shift left, "u"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$u \circ x = u \circ (r_X \circ x^0) = v \circ r_X \circ x^0 = v \circ x$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto $u = v$. □

Observación 6.2. Un espacio topológico X es un coseparador en **Top** si y sólo si contiene un subespacio indiscreto no trivial.

En efecto , si (S, η) es un coseparador en **Top**, para $(\{0,1\}, \tau)$ con la topología indiscreta podemos definir $g : (\{0,1\}, \tau) \to (\{0,1\}, \tau)$ en donde $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ continua junto con $1_{\{0,1\}}$, como $1_{\{0,1\}} \neq g$, existe $x : (\{0,1\}, \tau) \to (S, \eta)$ tal que $x \circ g \neq x$ así $s_0 = x(0) \neq x(g(0)) = x(1) = s_1$. Definamos $S' = \{s_0, s_1\}$ con η' la topología de subespacio. Afirmamos que $\eta' = \{\emptyset, S'\}$ pues para cualquier $U \in \eta'$ con $U \neq \emptyset$, sin pérdida de generalidad $s_0 \in U$ por lo tanto existe $U' \in \eta$ tal que $U' \cap S = U$ como x es continua $x^{-1}(U') \in \tau$ pero τ es indiscreta y $x^{-1}(U') \neq \emptyset$ así que $x^{-1}(U') = \{0,1\}$ luego $s_1 = s(1) \in U' \cap S' = U$ por lo que $S' = U$.

Ahora, si (S, η) tiene un subespacio indiscreto no trivial, digamos (S', η') y sean $f, g : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ funciones distintas entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $x_1 = f(y_0) \neq g(y_0) = x_2$ y $s_1, s_2 \in S'$ distintos por ser no trivial; definamos $x' : (X, \tau) \to (S', \eta')$ con $x'(x_1) = s_1$ y $x'(X \setminus \{x_1\}) = \{s_0\}$ continua pues η' es indiscreta, luego definimos $x : (X, \tau) \to (S, \eta)$ como $x = i \circ x'$ donde i es la inclusión de S' a S continua por ser composición de continuas y cumple que $x \circ f \neq x \circ g$.

Ejemplo 12.

1. Sea X un espacio de Hausdorff completamente regular, la compactación de Stone-Cech $\beta_X : X \to \beta X$ de X es un encaje denso de X hacia un espacio Hausdorff compacto βX con la propiedad universal (Walker, 1974). Es decir, la categoría **CompT$_2$** (espacios Hausdorff compactos) es una subcategoría E-reflexiva de la categoría **Tyc** (subcategoría plena de **Top** que consiste de todos los espacios Hausdorff completamente regulares) y E es la clase de todos los encajes densos en **Tyc**

2. **Tyc** es epireflexiva en **Top**, ya que en el Capítulo 2 vimos que en un espacio T_3 todo encaje denso es epimorfismo. El reflector R : **Top** → **Tyc** es conocido como el funtor **Tychonoff**.

3. **Ab** es una subcategoría epireflexiva de **Grp**. La reflexión $r_X : X \to RX$ de un grupo X es la abelianización $a_X : X \to X/[X, X]$.
   Recordemos que $[X, X] := < A >$ donde $A = \{[x, y] : x, y \in G\}$ y $[x, y] := \{xyx^{-1}y^{-1}\}$ a $[X, X]$ se le conoce como subgrupo conmutador o subgrupo derivado, se puede demostrar que $[X, X] \trianglelefteq X$ por lo que podemos considerar $X/[X, X]$ el grupo cociente y a éste se le conoce como la abelianización de G y, como el nombre nos sugiere, es abeliano.
   (Propiedad Universal de la abelianización) Sea $f : X \to A$ un homomorfismo entre un grupo X y un grupo abeliano A. Entonces f se factoriza de manera única por el epimorfismo

canónico $a_X : X \to X/[X,X]$, es decir $f = \bar{f} \circ a_X$. De esta manera, a_X será la epireflexión de X y, para cada $f : X \to A$, $\bar{f}$ será su extensión.

4. Sea n un entero mayor a 1 y sea $\mathbf{Ab}^{(n)}$ la subcategoría plena de **Ab** que consiste de todos los objetos X tal que $nX = 0$. Entonces $\mathbf{Ab}^{(n)}$ es epireflexiva en **Ab** y la reflexión de X es el homomorfismo cociente $r_X : X \to X/nX$. En efecto, X/nX está en $\mathbf{Ab}^{(n)}$ pues para cualquier $\bar{x} \in X/nX$, $n\bar{x} = nx + nX = 0 + nX = nX$ el neutro en X/nX. Además para toda $f : X \to G$ con G en $\mathbf{Ab}^{(n)}$ podemos definir $f^0(\bar{x}) = f(x)$, es fácil ver que está bien definida y que es un homomorfismo de grupos. Por último es única pues r_X es un epimorfismo.

5. La subcategoría plena **Tor** de **Ab** la cual consiste de todos los grupos abelianos de torsión es monocoreflexiva en **Ab**, la coreflexión $r_X : RX \to X$ es el homomorfismo inclusión de el subgrupo de torsión de X,Tor$X$. Para cualquier $f : Y \to X$ con $Y \in$Ob**Tor**, $f(Y) \subset$Tor$X$ pues para cada $y \in Y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny = 0$, así $nf(y) = 0_X$, $f(y) \in$Tor$X$, de esta manera $f^0 = f$.

6. La subcategoría **TF** de **Ab** la cual consiste de todos los grupos abelianos libres de torsión, es epireflexiva en **Ab**. La reflexión de X es el homomorfismo cociente $r_X : X \to X/TorX$. Recordemos que un grupo es libre de torsión si todos sus elementos distintos al neutro tienen orden infinito. Notemos que $X/TorX$ es libre de torsión pues si, para cada $z \in X/TorX$ digamos $z = g + TorX$ con $g \in X$, existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $nz = TorX$ tendríamos que: $ng + TorX = TorX \Leftrightarrow ng \in TorX \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : mng = 0_X \Leftrightarrow g \in TorX \Leftrightarrow z = TorX$.
   De manera similar que en 6, para cada $\bar{x}$, $f^0(\bar{x}) = f(x)$ y r_X es epimorfismo por lo tanto es única.

7. La subcategoría plena **Ind** de **Top** que consiste de todos los espacios indiscretos es bireflexiva en **Top**. Para cada $(X,\tau) \in$ **Top** su reflexión es la identidad $1_X : (X,\tau) \to (X,\eta)$ donde η es la topología indiscreta y para cada $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ con σ indiscreta,tenemos que $f^0 : (X,\eta) \to (Y,\sigma)$ tal que $f^0(x) = f(x)$.

8. La subcategoría plena **Dis** de **Top** la cual consiste en todos los espacios discretos es bicoreflexiva en **Top**. Si (X,τ) es un espacio topológico su coreflexión es la identidad $1_X : (X,\eta) \to (X,\tau)$ con η la topología discreta. De esta manera, para $f : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ su extensión $f^0 : (Y,\sigma) \to (X,\eta)$ está inducida por f. Por la Proposición 6.10 cualquier subcategoría coreflexiva de **Top** es bireflexiva. En general, la coreflexión de X se obtiene al cambiar de la topología indiscreta a la discreta.

Concluiremos esta sección mostrando las relaciones entre subcategorías reflexivas y sus límites.

Proposición 6.11. *Supongamos que $\boldsymbol{B}$ es una subcategoría reflexiva de una categoría $\boldsymbol{A}$ con los funtores inclusión $E : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ y reflector $R : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, y supongamos que $D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{B}$ es un diagrama en $\boldsymbol{B}$ sobre $\boldsymbol{K}$. Si existe un colímite para $E \circ D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{A}$, entonces existe un colímite para D.*

Demostración. Supongamos que $(X, (\alpha_i : D(i) \to X)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es un colímite para $E \circ D$, es decir

1. Para cada $a : i \to j$, $\alpha_i = \alpha_j \circ D(a)$;

2. Para cualquier otro pozo natural $(Y, (\beta_i)_{i \in ObK})$ existe morfismo conector $\varphi : X \to Y$ tal que $\beta_i = \varphi \circ \alpha_i$. Los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \circ D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "E \circ D(a)"'] & X \\ E \circ D(j) \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $r_X : X \to RX$ la $\mathbf{B}-$reflexión de X. Afirmamos que $(RX, (r_X \circ \alpha_i : D(i) \to RX)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es colímite para D.

I) Veamos que es un pozo natural, para cada $a : i \to j$ se tiene que $r_X \circ \alpha_i = (r_X \circ \alpha_j) \circ D(a)$ por nuestra hipótesis 1.

II) Si $(W, (\gamma_i : D(i) \to W)_{i \in ObK})$ fuese otro pozo natural para D entonces $w_j \circ D(a) = w_i$ así también es pozo natural para $E \circ D$, como $(X, (\alpha_i)_{i \in ObK})$ es el colímite, existe $\varphi : X \to W$ tal que $w_i = \varphi \circ \alpha_i$. Como r_X es $\mathbf{B}-$reflexión y $W \in$Ob$\mathbf{B}$ existe $\varphi^0 : RX \to W$ extensión tal que $\varphi = \varphi^0 \circ r_X$. Veamos que φ^0 es el morfismo conector que buscamos: $w_i = \varphi \circ \alpha_i = \varphi^0 \circ (r_X \circ \alpha_i)$. Además es único por definición.

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "D(a)"'] & X \arrow[r, "r_X"] & RX \\ D(j) \arrow[ur, "\alpha_j"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "w_i"] \arrow[d, "D(a)"'] & W \arrow[r, "r_W"] & RW \\ D(j) \arrow[ur, "w_j"'] & X \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "r_X"'] & RX \arrow[ul, "\varphi^0"'] \end{tikzcd}$$

□

Corolario 6.12. *Si una categoría* $\boldsymbol{A}$ *es co-completa y* $\boldsymbol{B}$ *es una subcategoría reflexiva de* $\boldsymbol{A}$*, entonces* $\boldsymbol{B}$ *es co-completa.*

Proposición 6.13. *Supongamos que* $\boldsymbol{B}$ *es una subcategoría reflexiva de* $\boldsymbol{A}$ *con los funtores inclusión* $E : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ *y reflector* $R : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$*, y que* $D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{A}$ *es un diagrama en* $\boldsymbol{A}$ *sobre* $\boldsymbol{K}$ *una categoría pequeña. Si* $(X, (\alpha_i : D(i) \to X)_{i \in Ob\boldsymbol{K}})$ *es un colímite para* D*, entonces* $(RX, (R\alpha_i : RD(i) \to RX)_{i \in Ob\boldsymbol{K}})$ *es un colímite para* $R \circ D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{B}$.

Demostración. Supongamos que $(X, (\alpha_i : D(i) \to X)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es un colímite para D entonces

1. Es un pozo natural, es decir, para $a : i \to j$ se tiene que $\alpha_j \circ D(a) = \alpha_i$.

2. Para cualquier otro pozo $(Y, (\beta_i : D(i) \to Y)_i \in Ob\mathbf{K})$ existe morfismo conector $\varphi : X \to Y$ tal que $\beta_i = \varphi \circ \alpha_i$.

Veamos que $(RX, (R\alpha_i : RD(i) \to RX)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es un colímite para $R \circ D$.

1. Tenemos que

$$\begin{aligned} R\alpha_i \circ r_{D(i)} &= r_X \circ \alpha_i = r_X \circ \alpha_j \circ D(a) = R\alpha_j \circ r_{D(j)} \circ D(a) = R\alpha_j \circ RD(a) \circ r_{D(i)} \\ \text{Así} \quad R\alpha_i &= R\alpha_j \circ RD(a) \text{ por la Proposición 6.2} \end{aligned}$$

Por lo tanto es un pozo natural. En diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rrr, "r_{D(i)}"] \arrow[dd, "D(a)"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & & & RD(i) \arrow[dl, "R\alpha_i"'] \arrow[dd, "RD(a)"] \\
& X \arrow[r, "r_X"'] & RX & \\
D(j) \arrow[rrr, "r_{D(j)}"'] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & & & RD(j) \arrow[ul, "R\alpha_j"]
\end{tikzcd}
$$

2. Supongamos que $(W, (w_i : RD(i) \to W)_{i \in ObK})$ es otro pozo natural, entonces $(W, (w_i \circ r_{D(i)} : D(i) \to W)_{i \in ObK})$ es un pozo natural para D pues $w_i \circ r_{D(i)} = w_j \circ RD(a) \circ r_{D(i)} = (w_j \circ r_{D(j)}) \circ D(a)$.
Entonces existe morfismo conector $\varphi : X \to W$ tal que $w_i \circ r_{D(i)} = \varphi \circ \alpha_i$; como $W \in ObB$ para φ existe su B-extensión φ^0 tal que $\varphi = \varphi^0 \circ r_X$.
Afirmamos que φ^0 es el morfismo conector que buscamos pues $w_i \circ r_{D(i)} = \varphi \circ \alpha_i = \varphi^0 \circ r_X \circ \alpha_i = \varphi^0 \circ R\alpha_i \circ r_{D(i)}$. Por lo que $w_i = \varphi^0 \circ R\alpha_i$, además es única por ser extensión.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[r, "r_{D(i)}"] \arrow[dd, "D(a)"'] & RD(i) \arrow[dd, "RD(a)"'] \arrow[dr, "w_i"] & \\
& & W \\
D(j) \arrow[r, "r_{D(j)}"'] & RD(j) \arrow[ur, "w_j"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rrrr, "r_{D(i)}"] \arrow[dd, "D(a)"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & & & & RD(i) \arrow[dd, "RD(a)"] \arrow[dll, "R\alpha_i"'] \arrow[dl, "w_i"'] \\
& X \arrow[r, "r_X"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & RX \arrow[r, "\varphi^0"] & W & \\
D(j) \arrow[rrrr, "r_{D(j)}"'] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & & & & RD(j) \arrow[ull, "R\alpha_j"] \arrow[ul, "w_j"]
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Observación 6.3. Supongamos que **B** es una subcategoría coreflexiva de **Top** con coreflector R : **Top** $\to$ **B** y que $(X_i)_{i \in I}$ es un conjunto de espacios topológicos X_i. Entonces por el Dual de la proposición anterior tenemos que $R(\prod_{i \in I} X_i) = \prod'_{i \in I} RX_i$, donde $\prod$ y $\prod'_{i \in I}$ denotan los productos en **Top** y **B** respectivamente.

Si **B** es reflexiva en **Top** con reflector R : **Top** $\to$ **B**, la formula $R(\prod_{i \in I} X_i) = \prod'_{i \in I} RX_i$ no es siempre cierta (Glicksberg, 1993).

Capítulo 7

Teoremas de caracterización

En este capítulo asumiremos que $\mathbf{A}$ es una categoría y $\mathbf{B}$ es subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos (ver Definición 6.6) de $\mathbf{A}$ con el funtor inclusión $E : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Proposición 7.1. *Sea $D : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{B}$ un diagrama en $\boldsymbol{B}$ sobre una categoría pequeña $\boldsymbol{K}$. Entonces $E \circ D$ es un diagrama en $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{K}$.*

1. *Un límite $(X, (\alpha_i : X \to D(i))_{i \in Ob\boldsymbol{K}})$ para $E \circ D$ es un límite para D si y sólo si $X \in Ob\boldsymbol{B}$*

2. *Si $\boldsymbol{B}$ es reflexiva en $\boldsymbol{A}$, un límite $(X, (\alpha_i : X \to D(i))_{i \in Ob\boldsymbol{K}})$ para D es un límite para $E \circ D$.*

Demostración. 1. Como $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es límite para D, por definición de límite, se tiene que $X \in Ob\mathbf{K}$.

2. Supongamos que $\mathbf{B}$ es reflexiva en $\mathbf{A}$ y que $(X, (\alpha_i : X \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es límite para D veamos que es límite para $E \circ D$. Por ser fuente natural para D, lo es para $E \circ D$ y de existir $(Y, (\beta_i : Y \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ otra fuente natural para $E \circ D$ por ser reflexiva existe $r_Y : Y \to RY$ reflexión, donde para cada β_i existe extensión $(\beta_i)^0 : RY \to D(i)$ tal que $(\beta_i)^0 \circ r_Y = \beta_i$, luego $D(a) \circ (\beta_j)^0 \circ r_Y = D(a) \circ \beta_j = \beta_i = (\beta_i)^0 \circ r_Y$, así $(RY, ((\beta_i)^0)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es fuente natural para D por lo tanto existe morfismo conector $\varphi : RY \to X$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = (\beta_i)^0$.
   Entonces $\varphi \circ r_Y : Y \to X$ es el morfismo conector que buscamos ya que $\alpha_i \circ (\varphi \circ r_Y) = (\alpha_i \circ \varphi) \circ r_Y = (\beta_i)^0 \circ r_Y = \beta_i$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "r_Y"'] & D(i) \\
RY \arrow[ur, "(\beta_i)^0"] \arrow[d, "\varphi"'] & \\
X \arrow[uur, "\alpha_i"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Definición 7.2. Sea $\mathbf{K}$ una categoría pequeña. $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}$ bajo $\mathbf{K}$ límites, si para cualquier diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{B}$ en $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{K}$, un límite para $E \circ D$ también lo es para D.

Proposición 7.3. *Si $\boldsymbol{B}$ es reflexiva en $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{B}$ es cerrada en $\boldsymbol{A}$ bajo $\boldsymbol{K}$-límites para cualquier $\boldsymbol{K}$ categoría pequeña.*

Demostración. Sea $D : \mathbf{K} \to \mathbf{B}$ un diagrama y $(X, (\alpha_i : X \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ un límite para $E \circ D$, por la proposición anterior basta demostrar que $X \in Ob\mathbf{B}$. Sea $r_X : X \to RX$ la reflexión de X, para cada α_i tenemos $(\alpha_i)^0 : RX \to D(i)$ su extensión tal que $(\alpha_i)^0 \circ r_X = \alpha_i$, luego $(RX, ((\alpha_i)^0)_{i \in ObK})$ es fuente natural para $E \circ D$, por lo cual existe morfismo conector $\varphi : RX \to X$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = (\alpha_i)^0$. Entonces $\alpha_i \circ \varphi \circ r_X = \alpha_i$, por la unicidad del morfismo conector, $\varphi \circ r_X = 1_X$. Por la Proposición 6.2, como $(r_X \circ \varphi) \circ r_X = r_X \circ 1_X = 1_{RX} \circ r_X$, entonces $r_X \circ \varphi = 1_{RX}$, así φ es isomorfismo, $RX \in$Ob$\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ es cerrada bajo composición con isomorfismos, por lo tanto $X \in Ob\mathbf{B}$. □

Corolario 7.4. *Si $\mathbf{A}$ es una categoría completa y $\mathbf{B}$ es una subcategoría reflexiva, entonces $\mathbf{B}$ es completa.*

Definición 7.5. Sea $\mathbf{K}$ una categoría pequeña. Un diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ está *inicialmente (es inicial)* en $\mathbf{B}$ si para cualquier $\mathbf{K}$-objeto i existe un $\mathbf{K}$-objeto j y un $\mathbf{K}-$morfismo $a : j \to i$ tal que $D(j) \in Ob\mathbf{B}$.
$\mathbf{B}$ es cerrado fuertemente en $\mathbf{A}$ bajo $\mathbf{K}-$límites si para cualquier diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$, el cual está inicialmente en $\mathbf{B}$, cumple que un límite $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ para D satisface que $X \in Ob\mathbf{B}$.

Ejemplo 13. $\mathbf{B}$ es cerrado en $\mathbf{A}$ bajo igualadores si para cualesquiera $u, v : Y \to Z$ $\mathbf{A}$-morfismos con $Y, Z \in Ob\mathbf{B}$, el igualador de (u, v) en $\mathbf{A}$ pertenezca a $\mathbf{B}$. $\mathbf{B}$ es fuertemente cerrado en $\mathbf{A}$ bajo igualadores si para cualesquiera $u, v : Y \to Z$ $\mathbf{A}$-morfismos con $Y \in$Ob$\mathbf{B}$, el igualador de (u,v) en $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathbf{B}$.
Notemos que el ser fuertemente cerrado bajo productos coincide con ser simplemente cerrado bajo productos.

Proposición 7.6. *Si $\mathbf{B}$ es epireflexiva en $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathbf{A}$ bajo $\mathbf{K}$-límites de cualquier categoría pequeña.*

Demostración. Sea $\mathbf{B}$ epireflexiva en $\mathbf{A}$ y $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ un diagrama el cual está inicialmente en $\mathbf{B}$ y $(X, (\alpha_i : X \to D(i))_{i \in Ob\mathbf{K}})$ un límite para D. Demostraremos que $r_X : X \to RX$ es isomorfismo.

Sea $S = \{i \in Ob\mathbf{K} : D(i) \in Ob\mathbf{B}\}$, para cada $i \in S$ existe un $B-$morfismo $(\alpha_i)^0 : RX \to D(i)$ tal que $(\alpha_i)^0 \circ r_X = \alpha_i$. Para $i \notin ObS$, existe $j \in Ob\mathbf{K}$ y $a : j \to i$ tal que $D(j) \in Ob\mathbf{B}$ así definimos $(\alpha_i)^0 = D(a) \circ (\alpha_j)^0$, de existir $k \in Ob\mathbf{K}$ y $a' : k \to i$ entonces tenemos que $D(a) \circ (\alpha_j)^0 \circ r_X = D(a) \circ \alpha_j = \alpha_i = D(a') \circ \alpha_k = D(a) \circ (\alpha_k)^0 \circ r_X$, es decir, está bien definida. De esta manera $(RX, ((\alpha_i)^0)_{i \in Ob\mathbf{K}})$ es fuente natural para D, por lo tanto existe morfismo conector $\varphi : RX \to X$ y por unicidad $\varphi \circ r_X = 1_X$ así r_X es sección y epimorfismo, por el Corolario 2.18 es isomorfismo. Como $\mathbf{B}$ es cerrada bajo isomorfismos y RX está en $\mathbf{B}$ entonces $X \in$Ob$\mathbf{B}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "r_X"'] & D(i) \\ RX \arrow[ur, "(\alpha_i)^0"'] \arrow[r, "(\alpha_j)^0"'] & D(j) \arrow[u, "D(a)"'] \end{tikzcd}$$

□

Definición 7.7. $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}$ bajo monomorfismos extremales (respectivamente monomorfismos) siempre que $f : X \to Y$ sea un monomorfismo extremal (respectivamente monomorfismo) y $Y \in Ob\mathbf{B}$, entonces $X \in Ob\mathbf{B}$.

Es claro que si **B** es cerrada en **A** bajo monomorfismos extremales entonces **B** es fuertemente cerrada en **A** bajo igualadores .

Demostraremos que el inverso de la Proposición 7.6 se cumple bajo algunas condiciones en **A**. Este resultados es importante en las topologías categóricas.

Lema 7.8. *Supongamos que una categoría* $\boldsymbol{A}$ *es completa, bien potenciada, co-bien potenciadas y* $\boldsymbol{B}$ *es una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de* $\boldsymbol{A}$*. Si* $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo igualadores, entonces* $\boldsymbol{B}$ *es cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo intersecciones de monomorfismos regulares.*

Demostración. Sea I un conjunto y $h_i : Z_i \to X$ un igualador de $f_i, g_i : X \to Y_i$ para cada $i \in I$, por el Lema 4.4 una intersección $(W, ((\varphi)_{i\in I}, h))$ de $(h_i)_{i\in I}$ puede construirse a partir de un igualador (W, h) de morfismos $f, g : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ tal que $p_i \circ f = f_i$, $p_i \circ g = g_i$ para $i \in I$. Así, si $h_i \in Mor\mathbf{B}$ para cada $i \in I$, $X \in Ob\mathbf{B}$ y al ser **B** cerrada fuertemente en **A** bajo igualadores se tiene que $W \in Ob\mathbf{B}$. □

Teorema 7.9. *(Teorema de caracterización de Subcategorías Epireflexivas) Supongamos que una categoría* $\boldsymbol{A}$ *es completa, bien potenciada, co-bien potenciadas y* $\boldsymbol{B}$ *es una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de* $\boldsymbol{A}$*. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. $\boldsymbol{B}$ *es epireflexiva en* $\boldsymbol{A}$*;*
2. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo* $\boldsymbol{K}$*-límites para cualquier categoría pequeña* $\boldsymbol{K}$*;*
3. $\boldsymbol{B}$ *contiene un objeto terminal de* $\boldsymbol{A}$ *y es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo pullbacks múltiples;*
4. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos y pullbacks;*
5. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos e imágenes inversas.*
6. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos e intersecciones finitas;*
7. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos e igualadores;*
8. $\boldsymbol{B}$ *es fuertemente cerrada en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos e intersecciones;*
9. $\boldsymbol{B}$ *es cerrado en* $\boldsymbol{A}$ *bajo productos y monomorfismos extremales.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. es la Proposición 7.6.

2. $\Leftrightarrow$ 8. se demuestra de manera similar que las ideas de el Teorema 4.5, así sólo demostraremos la siguiente implicación:

7. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ es un diagrama que está inicialmente en **B**. Sea $S = \{i \in Ob\mathbf{K} : D(i) \in Ob\mathbf{B}\}$ y $(X, (p_i : X \to D(i))_{i\in S})$ el producto en **A** de la familia $(D(i))_{i\in S}$, por hipótesis $X \in Ob\mathbf{B}$. Sea Λ el conjunto de todos los pares (a, a') de $K-$morfismos $a : j \to i$ y $a' : j' \to i$ tales que $j, j' \in S$. Para cada $\lambda = (a : j \to i, a' : j' \to i) \in \Lambda$, sea $(Y_\lambda, f_\lambda : Y_\lambda \to X)$ un igualador en **A** de $D(a) \circ p_j$ y $D(a') \circ p_j$. Entonces $Y_\lambda \in Ob\mathbf{B}$. Sea $(Z, ((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, f))$ una intersección de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Por el Lema 7.8 tenemos que $Z \in Ob\mathbf{B}$. Para $i \in S$, definimos $\alpha_i = p_i \circ f : Z \to D(i)$ y si $i \notin S$, existe un $\mathbf{K}-$objeto

$j \in S$ y un $\mathbf{K}-$morfismo $b : j \to i$ en donde $\alpha_i = D(b) \circ p_j \circ f : Z \to D(i)$. Entonces α_i no depende en la elección de j y b, pero está determinado por i.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g_\lambda"'] & & D(j) \arrow[dr, "D(a)"] & \\
& X \arrow[ur, "p_j"] \arrow[dr, "p_{j'}"'] & & D(i) \\
Y_\lambda \arrow[ur, "f_\lambda"'] & & D(j') \arrow[ur, "D(a')"'] &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $(Z, (\alpha_i)_{i\in I})$ es un límite para D. Veamos que es fuente natural, para $a : j \to i$ $\mathbf{K}-$morfismo tenemos cuatro casos:

a) Si $i, j \in S$ entonces

$$\begin{aligned}
D(a) \circ \alpha_j &= D(a) \circ p_j \circ f = D(a) \circ p_j \circ (f_\lambda \circ g_\lambda) = (D(a) \circ p_j \circ f_\lambda) \circ g_\lambda \\
&= (1_{D(i)} \circ p_i \circ f_\lambda) \circ g_\lambda = p_i \circ (f_\lambda \circ g_\lambda) = p_i \circ f = \alpha_i
\end{aligned}$$

con $\lambda = (1_{D(i)}, 1_{D(i)})$

$$\begin{tikzcd}
& & & D(i) \arrow[dr, "1_{D(i)}"] & \\
Z \arrow[r, "g_\lambda"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Y_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & X \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & & D(i) \\
& & & D(j) \arrow[ur, "D(a)"'] &
\end{tikzcd}$$

b) Si $j \in S$ pero $i \notin S$ entonces $D(a) \circ \alpha_j = D(a) \circ p_j \circ f = \alpha_i$ por definición.

c) Si $i \in S$ pero $j \notin S$, entonces existe $k \in S$ y $b : k \to j$ tal que

$$\begin{aligned}
D(a) \circ \alpha_j &= D(a) \circ (D(b) \circ p_k \circ f) = (D(a) \circ D(b)) \circ p_k \circ f_\lambda \circ g_\lambda \\
&= (D(a) \circ D(b) \circ p_k \circ f_\lambda) \circ g_\lambda = (D(a \circ b) \circ p_k \circ f_\lambda) \circ g_\lambda \\
&= (1_{D(i)} \circ p_i \circ f_\lambda) \circ g_\lambda = p_i \circ (f_\lambda \circ g_\lambda) = p_i \circ f = \alpha_i.
\end{aligned}$$

con $\lambda = (1_{D(i)}, a \circ b) \in \Lambda$

$$\begin{tikzcd}
& & & D(i) \arrow[drr, "1_{D(i)}"] & & \\
Z \arrow[r, "g_\lambda"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Y_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & X \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_k"'] & & & D(i) \\
& & & D(k) \arrow[r, "D(b)"] & D(j) \arrow[ur, "D(a)"'] &
\end{tikzcd}$$

d) Si $j, s \notin S$, entonces existen $k \in S$ y $b : k \to j$, luego $a \circ b : k \to i$ así $D(a) \circ \alpha_j = D(a) \circ D(b) \circ p_k \circ f = D(a \circ b) \circ p_k \circ f = \alpha_i$

Por lo que $(Z, (\alpha_i)_{i\in Ob\mathbf{K}})$ es fuente natural. Sea $(W, (\beta_i)_{i\in Ob\mathbf{K}})$ otra fuente natural para el diagrama D, entonces $(W, (\beta_i)_{i\in Ob\mathbf{K}})$ es fuente natural para el producto $(D(i))_{i\in S}$ entonces existe un morfismo conector $\psi : W \to X$ tal que $p_i \circ \psi = \beta_i$.
Luego (W, ψ) es fuente natural del igualador de $(D(a) \circ p_j, D(a') \circ p_{j'})$ para cada $\lambda = (a : j \to i, a' : j' \to i) \in \Lambda$ ya que

$$\begin{aligned}(D(a) \circ p_j) \circ \psi &= D(a) \circ (p_j \circ \psi) = D(a) \circ \beta_j = \beta_i = D(a') \circ \beta_{j'} = D(a') \circ (p_{j'} \circ \psi) \\ &= (D(a') \circ p_{j'}) \circ \psi\end{aligned}$$

Entonces, existe morfismo conector $\gamma_\lambda : W \to Y_\lambda$ tal que $f_\lambda \circ \gamma = \psi$, para cada $\lambda \in \Lambda$.

De esta manera $(W, ((\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \psi))$ es fuente natural para la intersección de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ por lo tanto existe morfismo conector $\varphi : W \to Z$ tal que $g_\lambda \circ \varphi = \gamma_\lambda$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "g_\lambda"'] \arrow[dr, "f"] & & D(j') \arrow[dr, "D(a')"] & \\
Y_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & X \arrow[ur, "p_{j'}"] \arrow[dr, "p_j"'] & & D(i) \\
W \arrow[u, "\gamma_\lambda"] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[rr, "\beta_j"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi"] & & D(j) \arrow[ur, "D(a)"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, para cada $i \in Ob\mathbf{K}$ tenemos dos casos:

a) Si $i \in S$, $\alpha_i \circ \varphi = p_i \circ f \circ \varphi = p_i \circ f_\lambda \circ g_\lambda \circ \varphi = p_i \circ f_\lambda \circ \gamma_\lambda = p_i \circ \psi = \beta_i$ con $\lambda = (1_{D(i)}, 1_{D(i)}) \in \Lambda$.

b) Si $i \notin S$, existen $j \in S$ y $a : j \to i$ tal que $\alpha_i = D(a) \circ p_j \circ f$ así

$$\begin{aligned}\alpha_i \circ \varphi &= D(a) \circ p_j \circ f \circ \varphi = D(a) \circ p_j \circ f_\lambda \circ g_\lambda \circ \varphi = D(a) \circ p_j \circ f_\lambda \circ \gamma_\lambda \\ &= D(a) \circ p_j \circ \psi = D(a) \circ \beta_j = \beta_i\end{aligned}$$

Entonces φ es el morfismo conector que buscamos, por lo tanto $(Z, (\alpha_i)_{i\in Ob\mathbf{K}})$ es un límite para D y B es fuertemente cerrada en $\mathbf{A}$ bajo $\mathbf{K}-$límites.

2. $\Rightarrow$ 9. Supongamos que $f : X \to Y$ es un monomorfismo extremal en $\mathbf{A}$ y $Y \in Ob\mathbf{B}$. Sea M la clase de todos los $\mathbf{A}$-monomorfismos $h : Z \to Y$ con $Z \in Ob\mathbf{B}$ tales que existe $g : X \to Z$ monomorfismo en $\mathbf{A}$ tal que $f = h \circ g$. Veamos que $\mathbf{A}$, f y M satisfacen las condiciones del Lema 5.6

   a) Sea $(Z, ((h_i : Z \to Z_i)_{i\in I}, h_0 : Z \to Y))$ la intersección de $(v_i : Z_i \to Y)_{i\in I}$ una familia de monomorfismos de M, entonces existe $z_i : X \to Z_i$ monomorfismo tal que $f = v_i \circ z_i$ para cada $i \in I$ así $(X, ((z_i)_{i\in I}, f))$ es fuente natural, por lo tanto existe morfismo conector $g : X \to Z$ tal que $h_i \circ g = z_i$ para cada $i \in I$ y $h_0 \circ g = f$, sabemos que g es monomorfismo, por lo que $h_0 \in M$.

   b) Sea $q : X \to U$ un morfismo, $r : U \to V$ un monomorfismo regular y $s : V \to Y$ tal que $f = s \circ r \circ q$ y $s \in M$, luego $s \circ r$ es monomorfismo y como f también lo es, por la Proposición 2.3 q es monomorfismo y $f = (s \circ r) \circ q$ por lo que $s \circ r \in M$.

   c) $1_Y \in M$ pues $f = 1_Y \circ f$ y $f, 1_Y$ son monomorfismos.

Así, existe una terna $(W, k : X \to W, l : W \to Y)$ de un $\mathbf{B}$-objeto, un $\mathbf{A}-$epimorfismo k y $l \in M$, como f es monomorfismo extremal y k es epimorfismo, entonces k es isomorfismo, por lo tanto $X \in Ob\mathbf{B}$.

9. $\Rightarrow$ 1. Sea X un $\mathbf{A}-$objeto y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ un conjunto representativo de los epimorfismos desde X cuyos codominios pertenecen a los objetos de B. Sea $(Y, (p_i)_{i\in I})$ el producto de $(Y_i)_{i\in I}$ en A. Entonces, por hipótesis, $Y \in Ob\mathbf{B}$ y al ser $(X, (f_i)_{i\in I})$ fuente natural para el producto existe morfismo conector $f : X \to Y$ tal que $p_i \circ f = f_i$ por el Teorema de Factorización II (5.10), existe una factorización $(Z, g : X \to Z, h : Z \to Y)$ de f con $f = h \circ g$, g epimorfismo y h monomorfismo extremal en $\mathbf{A}$. Por hipótesis, $Z \in Ob\mathbf{B}$. Veamos que el epimorfismo g es la $\mathbf{B}-$reflexión que buscamos.

   Sea $k : X \to W$ un $\mathbf{A}-$morfismo, con $W \in Ob\mathbf{B}$ y $(V, l : X \to V, m : V \to W)$ una $(epi, exmono)$-factorización de k. Luego $V \in Ob\mathbf{B}$ y existe $i \in I$ y un isomorfismo $n : Y_i \to V$ tal que $n \circ f_i = l$. Así tenemos que $k^0 = m \circ n \circ p_i \circ h$ es la extensión de k pues $k^0 \circ g = m \circ n \circ p_i \circ h \circ g = m \circ n \circ p_i \circ f = m \circ n \circ f_i = m \circ l = k$. La unicidad se sigue de que g sea epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "h"'] & X \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "k"] \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "f_i"] \arrow[dr, "l"] & W \\
Y \arrow[r, "p_i"'] & Y_i \arrow[r, "n"'] & V \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 7.10. *Supongamos que $\mathbf{A}$ es completa, bien potenciada y co-bien potenciada. Entonces tenemos lo siguiente:*

1. *Si $\mathbf{B}_\lambda$ es una subcategoría epireflexiva de $\mathbf{A}$ para cada elemento λ de una clase Λ, entonces la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$ es epireflexiva en $\mathbf{A}$.*

2. *Para cualquier subcategoría $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$, existe una subcategoría epireflexiva $\mathbf{B}^*$ de $\mathbf{A}$ que satisface las siguientes condiciones:*

   a) $\mathbf{B}^* \supset \mathbf{B}$,

   b) *Si $\mathbf{B}'$ es una subcategoría epireflexiva de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}' \supset \mathbf{B}$,entonces $\mathbf{B}' \supset \mathbf{B}^*$.*

3. *La clase de todas las subcategorías epireflexivas de $\mathbf{A}$ es una retícula completa.*

Demostración. 1. Veamos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$ es cerrada en $\mathbf{A}$ bajo productos. Sea $(X, (p_i : X \to X_i)_{i\in I})$ el producto de $(X_i)_{i\in I}$ objetos de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$.
   Para cada $\lambda \in \Lambda$, $(X_i)_{i\in I}$ es un conjunto de objetos de $\mathbf{B}_\lambda$ y $\mathbf{B}_\lambda$ es cerrado bajo productos por ser epireflexiva, así $X \in \mathbf{B}_\lambda$. Por lo tanto, $X \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$. De manera similar $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$ es cerrada bajo monomorfismos extremales.
   Por el teorema anterior $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{B}_\lambda$ es epireflexiva en $\mathbf{A}$.

2. Sea M la clase de todas las subcategorías epireflexivas de $\mathbf{A}$ que contienen a $\mathbf{B}$, $M \neq \emptyset$ pues $\mathbf{A} \in M$. Luego $\bigcap M$ es subcategoría epireflexiva de $\mathbf{A}$ que cumplen los incisos $a), b)$.

3. Sea $S \subset M$, tenemos que $\bigvee S = \bigcup S$ y $\bigwedge S = \bigcap S$.

□

Definición 7.11. En el Corolario 7.10 2., a la categoría $\mathbf{B}^*$ le llamaremos cubierta epireflexiva de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Para un $\mathbf{A}$-objeto X o una clase $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}-$objetos, las cubiertas epireflexivas de X o $\mathbf{C}$ son también consideradas.

Proposición 7.12. *Supongamos que $\boldsymbol{A}$ es completa, bien potenciada y co-bien potenciada y $\boldsymbol{B}$ una subcategoría de $\boldsymbol{A}$. Entonces las siguientes condiciones para un $\boldsymbol{A}-$objeto X son equivalentes:*

1. *X pertenece a la cubierta epireflexiva $\boldsymbol{B}^*$ de $\boldsymbol{B}$ en $\boldsymbol{A}$;*

2. *Existe un conjunto $(X_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{B}$-objetos X_i y un monomorfismo extremal $f : X \to \prod_{i\in I} X_i$.*

Demostración. Usando el Lema5.9, podemos demostrar que la subcategoría plena de $\mathbf{A}$ la cual consiste de todos los objetos X que satisfacen la segunda condición de nuestra hipótesis, es cerrada bajo productos y monomorfismos extremales. Así, esta proposición se sigue del Teorema de Caracterización 7.9. □

Ejemplo 14.

1. $\mathbf{Top}_0$ es epireflexiva en **Top.** Para un espacio topológico X, definimos la relación $\sim$ en X como sigue: $x \sim y$ para $x, y \in X$ si y sólo si cualquier vecindad de x contiene a y y cualquier vecindad de y contiene a x. $X/\sim$ es T_0 ya que para $[x] \neq [y]$ existe U abierto en X tal que $x \in U$ y $y \notin U$, luego $[x] \in \eta(U)$ y $[y] \notin \eta(U)$, como $\eta^{-1}(\eta(U)) = U$ abierto en X, entonces $\eta(U)$ es un abierto en $X/\sim$. El morfismo cociente $\eta : X \to X/\sim$ es la $\mathbf{Top}_0$-reflexión de X, en donde, para cada $f : X \to Y$ **Top**-morfismo con Y un espacio T_0 su extensión $f^0 : X/\sim \to Y$ se define como $f^0([x]) = f(x)$, está bien definida pues para $[x] = [z]$ si $f(x) \neq f(z)$ existiría V abierto en Y tal que $f(x) \in V$ y $f(z) \notin V$, luego $x \in f^{-1}(V)$ y $z \notin f^{-1}(V)$ lo cuál es absurdo pues $f^{-1}(V)$ es abierto en X y $x \sim z$, por lo que $f(x) = f(z)$.

2. $\mathbf{Top}_i$ es epireflexiva en **Top** con $i = 1, 2, 3$. Para $i = 1$, sabemos que $\mathbf{Top}_i$ es cerrada bajo productos. Ahora, si $f : X \to Y$ es inmersión y Y es T_1, fX subespacio de Y es T_1, entonces X es T_1, por lo tanto $\mathbf{Top}_1$ es cerrado bajo monomorfismos extremales. Por el Teorema7.9, $\mathbf{Top}_1$ es epireflexiva en **Top**. De manera similar para $i = 2, 3$.

3. **Tyc** es epireflexiva en **Top** pues el producto de espacios Tychonoff es Tychonoff, también **Tyc** es cerrado bajo monomorfismos extremales.

   Sea $\mathbf{B}$ la subcategoría de **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos X tales que existe un **Top**-isomorfismo $f : X \to [0, 1]$. $\mathbf{B}$ es plena y cerrada bajo isomorfismos, por la proposición anterior, si $\mathbf{B}^*$ es la cubierta epireflexiva de $\mathbf{B}$. Así $X \in Ob\mathbf{B}^*$ si y sólo si existe un conjunto $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{B}-$objetos y un **Top**-monomorfismo extremal. Recordemos que, para cada X objeto en **Tyc**, existe un conjunto de intervalos cerrados $(I_j)_{j\in J}$ y una inmersión $f : X \to \prod_{j\in J} I_j$. Por lo tanto $\mathbf{B}^* = \mathbf{Tyc}$.

4. $\mathbf{Comp}T_2$ es la cubierta epireflexiva de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{Top}_2$ pues cada espacio compacto Hausdorff es homeomorfo a un subespacio cerrado de intervalos cerrados y acotados.

5. **Real-Comp** es la cubierta epireflexiva de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Top}_2$ donde $\mathbf{C}$ es similar a $\mathbf{B}$ cambiando $[0, 1]$ por $(0, 1)$. Así $\mathbf{C}$ es plena y cerrada bajo isomorfismos. Recordemos que, para cada $X \in Ob$**Real-Comp**, existe un conjunto J y una inmersión cerrada $f : X \to \prod_{i\in J} \mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathbf{C}^* =$ **Real-Comp**.

6. Si E es un espacio Hausdorff, un objeto de la cubierta epireflexiva de E en **Top** se denomina espacio $E-$regular, mientras que un objeto de la cubierta epireflexiva de E en $\mathbf{Top}_2$ se denomina espacio $E-$compacto.

Dual. **B** es cerrado en **A** bajo **K**$-$ colímites, $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ está finalmente (es final) en **B**, **B** es fuertemente cerrado en **A** bajo **K**$-$colímites, **B** es cerrado en **A** bajo epimorfismos extremales, Teorema de Caracterización de Subcategorías Monocoreflexivas, cubierta monocoreflexiva.

Teorema 7.13. *Supongamos que* ***A*** *es categoría cocompleta, bien potenciada y co-bien potenciada y* ***B*** *es una subcategoría plena y cerrada con isomorfismos de* ***A****. Si* ***A*** *tiene un separador y* ***B*** *contiene el separador en* ***A****, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. ***B*** *es coreflexiva en* ***A****;*
2. ***B*** *es bicoreflexiva en* ***A****;*
3. ***B*** *es fuertemente cerrada en* ***A*** *bajo* $K-$*colímites para cualquier categoría pequeña* ***K****;*
4. ***B*** *es fuertemente cerrada en* ***A*** *bajo coproductos y coigualadores;*
5. ***B*** *es cerrada en* ***A*** *bajo* ***K****$-$ límites para cualquier categoría pequeña* ***K****.*
6. ***B*** *es cerrada en* ***A*** *bajo coproductos y coigualadores.*
7. ***B*** *es cerrada en* ***A*** *bajo coproductos y epimorfismos extremales.*

Demostración. 1. $\Leftrightarrow$ 2. se sigue de la Proposición 6.10.

1. $\Leftrightarrow$ 4. y 1. $\Leftrightarrow$ 7. se siguen de la dualidad del Teorema 7.9.

1. $\Rightarrow$ 5. es el Dual de la Proposición 7.6.

5. $\Rightarrow$ 6. es un caso particular.

6. $\Rightarrow$ 4. Sabemos que es equivalente ser fuertemente cerrada en **A** bajo coproductos y cerrada bajo coproductos, es suficiente ver los coigualadores. Supongamos que **B** es cerrada en **A** bajo coigualadores.

   Sea $f : X \to Y$ un coigualador de $g, h : Z \to X$ tal que $X \in Ob\mathbf{B}$ por la finalidad del coigualador, veamos que $Y \in Ob\mathbf{B}$:

   Sea $S \in Ob\mathbf{B}$ separador en **A** y $\{k_i : S \to Z : i \in I\}$ el conjunto de todos los **A**$-$monomorfismos de S a Z y sea $(W, (q_i : S_i \to W)_{i \in I})$ coproducto de $(S_i)_{i \in I}$ donde cada $S_i = S$ para $i \in I$, por hipótesis $W \in Ob\mathbf{B}$. Como $(Z, (k_i)_{i \in I})$ es otro pozo natural, existe morfismo conector $k : W \to Z$ tal que $k_i = k \circ q_i$ para toda $i \in I$.

   Afirmamos que k es epimorfismo, de no serlo, existen $l, m : Z \to V$ tal que $l \circ k = m \circ k$ pero $l \neq m$. Como S es separador, existe $i_0 \in I$ tal que $l \circ k_{i_0} \neq m \circ k_{i_0}$, luego $l \circ k_{i_0} = l \circ k \circ q_{i_0} = m \circ k \circ q_{i_0} = m \circ k_{i_0}$. Por lo tanto k es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\
S_i \arrow[u, "k_i"] \arrow[r, "q_i"'] & W \arrow[ul, "k"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Veamos que (Y, f) es coigualador de $g \circ k$ y $h \circ k$. Primero $f \circ (g \circ k) = (f \circ g) \circ k = (f \circ h) \circ k = f \circ (h \circ k)$ y si existe $f' : X \to Y'$ tal que $f' \circ (g \circ k) = f' \circ (h \circ k)$, al ser k epimorfismo tenemos que $f' \circ g = f' \circ h$ y f es coigualador de g, h por lo que existe morfismo conector $\varphi : Y \to Y'$ tal que $f' = \varphi \circ f$. Por lo tanto f es coigualador de $g \circ k$ y $h \circ k$, por su cerradura bajo coigualadores $Y \in Ob\mathbf{B}$.

□

Ejemplo 15. $\mathbf{Comp_{gen}}$, la categoría de espacios compactamente generados[1], es bicoreflexiva en **Top**. Para un espacio topológico X, sea $RX = X$ donde su topología consiste de todos los abiertos U tales que $U \cap K$ es abierto en K, para cada subespacio compacto $\mathbf{C}$ de X. Entonces el morfismo identidad es una bicoreflexión. $\mathbf{Comp_{gen}}$ es una cubierta coreflexiva en **Top** de **Comp** la subcategoría plena de **Top** que consiste de todos los espacios compactos.

[1] X es compactamente generado si τ es la topología final de X respecto al pozo $\{i_k : K \to (X, \tau) | (K, \tau_K)$es un subespacio de $X\}$ e i_k es la inclusión

Capítulo 8

Categorías (E,M)

En este capítulo, sean E y M clases de morfismos en una categoría $\mathbf{A}$ las cuales serán cerradas bajo composición con isomorfismos. Generalizaremos las nociones de $(Exepi, Mono)$-factorizable tratadas en el Capítulo 5.

Definición 8.1. Una categoría $\mathbf{A}$ es (E,M)-factorizable si para cada $\mathbf{A}$ morfismo $f : X \to Y$ existe una terna (Z, g, h) que consiste de un $\mathbf{A}-$objeto Z y morfismos $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ con $g \in E$ y $h \in M$ tales que $f = h \circ g$. La terna (Z, g, h) es llamada una $(E,M)-$factorización de f.

Una categoría $\mathbf{A}$ (E,M)-factorizable es $(E,M)-$factorizable unívocamente (de manera única) si, para (Z, g, h) y (Z', g', h') dos (E,M)-factorizaciones de un morfismo $f : X \to Y$, existe un isomorfismo $\varphi : Z \to Z'$ tal que $g' = \varphi \circ g$ y $h = h' \circ \varphi$.

Una categoría $\mathbf{A}$ tiene la propiedad (E,M)-diagonalización si para cualquiera morfismos $f : W \to X$, $g : W \to Y$, $h : X \to Z$ y $k : Y \to Z$ satisfacen que $h \circ f = k \circ g$ con $f \in E$ y $k \in M$, entonces existe un morfismo $d : X \to Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$. El morfismo d es llamada la diagonal del cuadrado (f, g, h, k).

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d"'] \\ Y \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

Una categoría A es una (E,M) categoría si es $(E,M)-$ factorizable y tiene la propiedad (E,M)-diagonalización.

Proposición 8.2. *Si $E \subset Epi\boldsymbol{A}$ o $M \subset Mono\boldsymbol{A}$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\boldsymbol{A}$ es una (E,M)-categoría*
2. a) *E y M son cerrados bajo composiciones*
   b) *$\boldsymbol{A}$ es (E,M) factorizable unívocamente.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.$a)$ Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos $\mathbf{A}$-morfismos en E y sea (W, h, k) una (E,M)-factorización de $g \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "h"'] & & Z \\ & W \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, existe $d : Y \to W$ diagonal del cuadrado (f, h, g, k) tal que $h = d \circ f$ y $g = k \circ d$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "d"'] \\ W \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

Luego, existe $d' : Z \to W$ diagonal del cuadrado $(g, d, 1_Z, k)$ tal que $d = d' \circ g$ y $1_Z = k \circ d'$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"'] & Z \arrow[d, "1_Z"] \arrow[dl, "d'"'] \\ W \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

Así k es retracción y monomorfismo por el Corolario 2.18 es isomorfismo. Por ser E cerrada bajo isomorfismos y $h \in E$ se tiene que $g \circ f = k \circ h \in E$. De manera similar M es cerrado bajo composición.

1. $\Rightarrow$ 2.b) Supongamos que (Z, g, h) y (Z', g', h') son dos $(E, M)-$factorizaciones de $f : X \to Y$ como $g \in E$, $h' \in M$, $g' \in E$ y $h \in M$ existen diagonales $d : Z \to Z'$ y $d' : Z' \to Z$ de los cuadrados (g, g', h, h') y (g', g, h', h) tales que $g' = d \circ g$, $h = h' \circ d$, $g = d' \circ g'$ y $h' = h \circ d'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "h"] \arrow[dl, shift left, "d"] \\ Z' \arrow[r, "h'"'] \arrow[ur, shift left, "d'"] & Y \end{tikzcd}$$

Luego, $h \circ 1_Z = h = h' \circ d = h \circ d' \circ d$ y $h' \circ 1_{Z'} = h' = h \circ d' = h' \circ d \circ d'$ con h, h' monomorfismos $1_Z = d' \circ d$ y $1_{Z'} = d \circ d'$, es decir, d es isomorfismo y cumple que $g' = d \circ g$ y $h = h' \circ d$.

2. $\Rightarrow$ 1. Por ser $\mathbf{A}$ una categoría (E, M)-factorizable unívocamente entonces es (E, M) factorizable. Resta ver que tiene la propiedad (E, M)-diagonalización. Sean $f : W \to X$ en E, $h : X \to Z$, $g : W \to Y$, $k :\to Z$ $\mathbf{A}$-morfismos con $k \in M$ y $f \in E$ tales que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.

   Sean (F_1, g_1, h_1) y (F_2, g_2, h_2) (E, M)-factorizaciones de g y h.
   Por hipótesis E y M son cerradas bajo composición así se tiene que $(F_1, g_1, k \circ h_1)$ y $(F_2, g_2 \circ f, h_2)$ son (E, M)-factorizaciones de $k \circ g$ y $h \circ f$.
   Como $k \circ g = h \circ f$ por unicidad existe $\varphi : F_2 \to F_1$ tal que $g_1 = \varphi \circ g_1 \circ f$ y $h_2 = k \circ h_1 \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dd, "g"] & X \arrow[dr, "g_2"] \arrow[dd, "h"] & \\ F_1 \arrow[dr, "h_1"'] & & & F_2 \arrow[lll, bend right, "\varphi"'] \arrow[dl, "h_2"] \\ & Y \arrow[r, "k"] & Z & \end{tikzcd}$$

Definiendo $d = h_1 \circ \varphi \circ g_2 : X \to Y$ tenemos que $d \circ f = h_1 \circ \varphi \circ g_2 \circ f = h_1 \circ g_1 = g$ y $k \circ d = k \circ h_1 \circ \varphi \circ g_2 = h_2 \circ g_2 = k$.

□

Proposición 8.3. *Si $\boldsymbol{A}$ es una $(E, M)-$categoría con $E \subset Epi\boldsymbol{A}$, las siguientes condiciones para un morfismo $k : Y \to Z$ son equivalentes.*

1. *$k \in M$*

2. *Para cualesquier morfismos $f : W \to X$, $g : W \to Y$, $h : X \to Z$ tales que $h \circ f = k \circ g$ con $f \in E$, existe una diagonal $d : X \to Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.*

3. *Si $k = m \circ l$ con $l : Y \to W$ en E y $m : W \to Z$, entonces l es un isomorfismo.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como $\mathbf{A}$ es una (E, M) categoría entonces tiene la propiedad (E, M)-diagonalización por lo que se cumple 2.

2. $\Rightarrow$ 3. Si $k = m \circ l$, entonces $m \circ l = k \circ 1_Y$ y $l \in E$, por 2. existe $d : W \to Y$ tal que $1_Y = d \circ l$ y $m = k \circ d$, así l es sección y epimorfismo, por el Corolario 2.18 es isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "l"] \arrow[d, "1_Y"'] & W \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "d"'] \\ Y \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

3. $\Rightarrow$ 1. Como $\mathbf{A}$ es una (E, M) categoría es (E, M)-factorizable entonces existe (W, l, m) una (E, M)-factorización de k, es decir, $k = m \circ l$ con $l \in E$ y $m \in M$ por (3), l es isomorfismo y $m \in M$ al ser M cerrada bajo isomorfismos se tiene que $m \circ l = k \in M$.

□

Corolario 8.4. *Si $\boldsymbol{A}$ es una $(E, M)-$categoría con $E \subset Epi\boldsymbol{A}$, M satisface lo siguiente:*

1. *Si $(W, (\alpha_1 : W \to X, \alpha_2 : W \to Y))$ es pullback de $(f : X \to Z, g : Y \to Z)$ y si $g \in M$, entonces $\alpha_1 \in M$*

2. *M es cerrado bajo intersecciones y productos.*

Demostración. 1. Sean $l : W \to V$ y $m : V \to X$ tales que $\alpha_1 = m \circ l$ con $l \in E$. Como $(W, (\alpha_1, \alpha_2))$ es pullback de f, g, entonces $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$. Luego $(f \circ m) \circ l = g \circ \alpha_2$ con $l \in E$ y $g \in M$ por lo que existe $d : V \to Y$ diagonal del cuadrado $(l, \alpha_1, f \circ m, g)$ tal que $f \circ m = g \circ d$; así $(V, (m, d))$ es fuente natural para el pullback por lo que existe morfismo conector $\varphi : V \to Y$ tal que $\alpha_1 \circ \varphi = m$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "l"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & V \arrow[d, "f \circ m"] \arrow[dl, "d"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\alpha_2"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & V \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "m"'] \arrow[dl, "d"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

Luego $m \circ l \circ \varphi = m \circ 1_V$ como $m \in E$, $l \circ \varphi = 1_V$, así l es retracción y epimorfismo por lo tanto es isomorfismo, por la proposición anterior $\alpha_1 \in M$.

2. Sea $(X, ((g_i : X \to X_i)_{i\in I}, g_0 : X \to Y))$ la intersección de $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ familia de $A-$monomorfismos en M. Veamos que $g_0 \in M$.

   Sea $g_0 = m \circ l$ con $l : X \to W$, $m : W \to Y$ con $l \in E$, entonces para cada $i \in I$ existe diagonal $d_i : W \to X_i$ del cuadrado $(l, g_i.m, f_i)$ tal que $d_i \circ l = g_i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "g_i"'] & W \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "d_i"'] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y \end{tikzcd}$$

   $(W, ((d_i)_{i\in I}, m))$ es fuente natural para la intersección, por lo que existe morfismo conector $\varphi : W \to X$ tal que $m = g_0 \circ \varphi$, luego $g_0 = m \circ l = g_0 \circ (\varphi \circ l)$ y g_0 es monomorfismo entonces $1_X = \varphi \circ l$. Por lo tanto l es isomorfismo.

   De manera similar es cerrado bajo productos.

□

Ejemplo 16.

Por el Teorema 5.5, el Lema 5.7 y el Teorema 5.10 tenemos que si **A** una categoría bien potenciada tiene intersecciones y productos finitos, entonces es (Ex epi, Mono)-factorizable unívocamente y si **A** tiene intersecciones e igualadores, entonces es una (Epi, Ex mono)-categoría, donde *ex epi* denota la clase de todos los epimorfismos extremales en **A** y *Ex mono* la clase de monomorfismos extremales en **A**.

Sea E la clase de todos los morfismos densos **Top** y M la clase de todas las inmersiones cerradas en **Top**. Entonces $\mathbf{Top}_2$ y $\mathbf{Top}_3$ son (E, M) categorías.

Una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X y Y es *morfismo inicial* si cualquier subconjunto A de X es abierto si y sólo si existe un conjunto abierto B de Y tal que $A = f^{-1}(B)$. Se puede demostrar que $f : X \to Y$ es inicial sii $Cl_X(A) = f^{-1}(Cl_X(f(A)))$ para cualquier subconjunto A de X, donde Cl_X denota el operador cerradura en X. Denotemos la clase de todos los morfismos iniciales en **Top** por ***Top** Inicial* o simplemente *Inicial*. Entonces tenemos que **Top** es una (Bi, Inicial)-categoría . Naturalmente Epi **Top** $\supset$ Bi **Top** y Ex mono **Top**$\subset$ Inicial **Top**. Además, si f es un morfismo inicial y X es un espacio T_0, entonces f es una inmersión.

Definición 8.5. Una (E, M)-categoría **A** es E-co-bien potenciada si para cada objeto X de **A** la clase de todos los morfismos que pertenecen a E cuyo dominio es X tienen un conjunto de representantes[1].

Teorema 8.6. *(Teorema de Caracterización de Subcategorías E-reflexivas) Supongamos que **A** es una $(E, M)-$ categoría E-co-bien potenciada con $E \subset Epi\mathbf{A}$ y que **A** tiene productos. Entonces, para **B** una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de **A**, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ***B** es E-reflexiva en **A**.*

2. ***B** es cerrada bajo productos y satisface que, si $f : X \to Y$ pertenece a M y $Y \in Ob\mathbf{B}$, entonces $X \in Ob\mathbf{B}$.*

[1]Respecto a la siguiente relación de equivalencia: para $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ dos elementos de E. Diremos que f es isomorfo a g si existe un isomorfismo en **A**, $\varphi : Y \to Z$ tal que $f = g \circ \varphi$

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Por la Proposición 7.3 como $\mathbf{B}$ es $E-$reflexiva entonces es cerrada bajo productos. Ahora, sea $f : X \to Y$ en M con $Y \in Ob\mathbf{B}$ y $r_X : X \to RX$ la $\mathbf{B}$-reflexión de X, para f existe $f^0 : RX \to Y$ extensión donde $f = f^0 \circ r_X$. Para el cuadrado $(r_X, 1_X, f^0, f)$, existe $d : RX \to X$ diagonal tal que $d \circ r_X = 1_X$ y $f^0 = f \circ d$, como r_X es epimorfismo por consiguiente r_X es isomorfismo. Por lo tanto $X \in Ob\mathbf{B}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "1_X"'] & RX \arrow[d, "f^0"] \arrow[dl, "d"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $X \in Ob\mathbf{A}$.

Por hipótesis, $\mathbf{A}$ es E-co bien potenciada entonces existe $\{f_i : X \to Y_i\}$ conjunto de representantes de E con $Y_i \in Ob\mathbf{B}$ para $i \in I$. Sea $(Y, (p_i : Y \to Y_i)_{i\in I})$ el producto de $(Y_i)_{i\in I}$ en $\mathbf{A}$, como $\mathbf{B}$ es cerrada bajo productos $Y \in Ob\mathbf{B}$. Luego, existe un único $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $p_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & Y \arrow[d, "p_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

Sea $(Z, g : X \to Y, h : Z \to Y)$ una (E, M)-factorización de f donde $f = h \circ g$. Como $h \in M$ y $Y \in Ob\mathbf{B}$ por 2. $Z \in Ob\mathbf{B}$. Afirmamos que g es la $\mathbf{B}$-reflexión de X.

Sea $k : X \to W$ un $\mathbf{A}$-morfismo con $W \in Ob\mathbf{B}$ y $(V, l : X \to V, m : V \to W)$ una (E, M)-factorización de $k = m \circ l$. Por consiguiente, existe $j \in I$ y $n : Y_j \to V$ isomorfismo en $\mathbf{A}$ tal que $l = n \circ f_j$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "m"] & \\ Y_j \arrow[ur, "n"] & X \arrow[l, "f_j"'] \arrow[u, "l"'] \arrow[r, "k"] \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "g"] & W \\ Y \arrow[u, "p_j"] & Z \arrow[l, "h"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ahora, definiendo $k^0 : Z \to W$ como $k^0 = m \circ n \circ p_j \circ h$ se tiene que $k = m \circ l = m \circ n \circ f_j = m \circ n \circ p_j \circ f = m \circ n \circ p_j \circ h \circ g = k^0 \circ g$, la unicidad se sigue de que g sea epimorfismo. $\square$

Corolario 8.7. *Si $\boldsymbol{A}$ es una $(E, M)-$categoría $E-$co-bien potenciada con $E \subset Epi\boldsymbol{A}$ la cual tiene productos, entonces se cumple:*

1. *La intersección de cualquier clase de subcategorías $E - reflexiva$ de $\boldsymbol{A}$ es $E-$reflexiva en $\boldsymbol{A}$.*

2. *Para cualquier subcategoría B de $\boldsymbol{A}$, existe una subcategoría E-reflexiva $\boldsymbol{B}^*$ de $\boldsymbol{A}$ que satisface las siguientes condiciones:*

   a) $\boldsymbol{B}^* \supset \boldsymbol{B}$,

   b) *Si $\boldsymbol{B}'$ es una subcategoría E-reflexiva de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}' \supset \boldsymbol{B}$,entonces $\boldsymbol{B}' \supset \boldsymbol{B}^*$.*

3. *Un $\boldsymbol{A}-$objeto X pertenece a $\boldsymbol{B}^*$ si y sólo si existe un conjunto $(X_i)_{i\in I}$ de $\boldsymbol{B}$-objetos X_i y un morfismo $f : X \to \prod_{i\in I} X_i$ que pertenece a M.*

Demostración. Se demuestra de manera similar que el Corolario 7.10 y la Proposición 7.12. □

La categoría $\mathbf{B}^*$ será una cubierta $E-$reflexiva de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ y denotada por $A_E(B)$ (Omitiremos el subíndice E si no hay confusión). Para X un objeto de A , la cubierta $E-$reflexiva $A_E(X)$ de X en A es definida también. Un objeto $Y \in A_E(X)$ sii existe un conjunto I y morfismo $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ que pertenece a M con $X_i = X$ para cada $i \in I$.

Ejemplo 17.

Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo en **Top**, es decir, una función continua e inyectiva y sea Y un espacio T_0 (respectivamente, T_1 o T_2). Como ya sabemos **Top** es una (Ex epi, mono)-categoría, luego $\mathbf{Top}_0$, $\mathbf{Top}_1$ y $\mathbf{Top}_2$ son subcategorías (Ex epi)-reflexivas de **Top** respectivamente.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo inicial en **Top** y Y un espacio regular (completamente regular). Entonces X es regular (completamente regular). Así las categorías **Reg** y **Creg** son bireflexivas en **Top**, donde **Reg** y **Creg** son las subcategorías que consisten de todos los espacios regulares y completamente regulares respectivamente.

Capítulo 9

Funtores topológicos

Sea Λ una clase propia o el conjunto vacío, $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos, y $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ una familia de funciones, para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces podemos definir la topología más pequeña en Y que hace a cada f_λ continua. Si $g_\lambda : X_\lambda \to Z$ es una función entre los conjuntos X_λ y Z para cada $\lambda \in \Lambda$, podemos definir la topología más grande en Z para la cual cada g_λ es continua. Éstas son propiedades importantes en **Top** y en algunas otras categorías, las cuales tienen propiedades similares a **Top**. En otras palabras, a partir de estas propiedades se derivan otras de espacios topológicos, espacios uniformes, etc. De esta manera, nos interesará estudiar categorías en general que tengan una relación similar a la existencia de topologías iniciales y finales.

Definición 9.1. Para una categoría $\mathbf{A}$, un par $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de un $\mathbf{A}-$objeto X y una familia de $\mathbf{A}$-morfismos $f_\lambda : X \to X_\lambda$ con una clase indexada Λ es una $\mathbf{A}$-fuente. Una $\mathbf{A}$-fuente es natural en $\mathbf{A}$ para una categoría discreta Λ, y una fuente natural es simplemente una fuente si *olvidamos* la condición de naturalidad.

Para un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, una $\mathbf{B}$-fuente $(Y, (g_\lambda : Y \to F(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda})$ con $\mathbf{A}$-objetos X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ es llamado una $F-$fuente.

Una $\mathbf{A}-$fuente $(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ es una *monofuente* si para cada par de A-morfismos $u, v : Z \to X$ que satisfacen $f_\lambda \circ u = f_\lambda \circ v$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $u = v$.

Un $\mathbf{A}-$morfismo puede ser considerado una fuente, de igual manera un monomorfismo también puede considerarse una monofuente.

Sea E la clase de $\mathbf{A}-$morfismos y M una colección de $\mathbf{A}$-fuentes las cual es cerrada bajo composición con fuentes de isomorfismos. Una categoría $\mathbf{A}$ es $(E, M)-$factorizable si para cada $\mathbf{A}$-fuente $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ existe una terna $(Z, g, (Z, (h_\lambda : Z \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}))$ la cual consiste de Z un objeto, un morfismo $g : X \to Z$ en E y una $\mathbf{A}-$fuente $(Z, (h_\lambda : Z \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ en M tal que $f_\lambda = h_\lambda \circ g$ para cada $\lambda \in \Lambda$. De manera similar a la Definición 8.1, tenemos nociones como: $(E, M)-$factorizable de manera unívoca, propiedad de $(E.M)-$diagonalización y $(E, M)-$categoría.

Dual. $\mathbf{A}-$pozo $(X, (f_\lambda : X_\lambda \to X)_{\lambda \in \Lambda})$, F-pozo $(Y, (g_\lambda : F(X_\lambda) \to Y)_{\lambda \in \Lambda})$, epipozos, $(E, M)-$factorizable con E una colección de $\mathbf{A}-$pozos y M una clase de monomorfismos en $\mathbf{A}$, etc.

Observación 9.1. Si $(X, (p_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ es un producto de $\mathbf{A}-$objetos $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, entonces (p_λ) es una monofuente. En general, si $(X, (\alpha_i))$ es un límite para un diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$, entonces (α_i) es una monofuente.

Ejemplo 18. Sea $(X, (f_\lambda : X_\lambda \to X)_{\lambda \in \Lambda})$ una **Set**-fuente y $(Z_\lambda, g_\lambda, h_\lambda)$ la (Epi, Mono)-factorización de f_λ para cada $\lambda \in \Lambda$. Como **Set** es co-bien potenciada, existe un conjunto representativo

$\{g_\lambda | \lambda \in M\}$ de $\{g_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$.

Sea $(Y, (p_\lambda : Y \to Z_\lambda))$ producto de $(Z_\lambda)_{\lambda \in M}$ como $(X, (g_\lambda)_{\lambda \in M})$ es otra fuente natural, existe único morfismo conector $k : X \to Y$ tal que $p_\lambda \circ k = g_\lambda$ para cada $\lambda \in M$, podemos tomar ahora la (Epi, Mono)-factorización de k digamos (W, l, m).

Sea $\lambda \in \Lambda$, definimos $\eta_\lambda : W \to X_\lambda$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \eta_\lambda &= h_\lambda \circ p_\lambda \circ m \quad \text{si} \quad \lambda \in M \\ \eta_\lambda &= h_\lambda \circ \varphi_{\mu\lambda} \circ p_\mu \circ m \quad \text{si} \quad \Lambda \setminus M \quad \text{con} \quad \mu \in M \quad \text{y el isomorfismo} \quad \varphi_{\mu\lambda} : Z_\mu \to Z_\lambda \end{aligned}$$

Afirmamos que $(W, l, (W, (\eta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}))$ es la (Epi,Monofuente)-factorización de $(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. Primero, l es epimorfismo y $\{\eta_\lambda\}$ es monofuente pues es composición de monofuentes. Luego, para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que:

$$\begin{aligned} &Si \quad \lambda \in M, \\ &\qquad \eta_\lambda \circ l = h_\lambda \circ p_\lambda \circ m \circ l = h_\lambda \circ p_\lambda \circ k = h_\lambda \circ g_\lambda = f_\lambda. \\ &Si \quad \lambda \in \Lambda \setminus M, \\ &\qquad \eta_\lambda \circ l = h_\lambda \circ \varphi_{\mu\lambda} \circ p_\mu \circ m \circ l = h_\lambda \circ \varphi_{\mu\lambda} \circ p_\mu \circ k = h_\lambda \circ \varphi_{\mu\lambda} \circ g_\mu = h_\lambda \circ g_\lambda = f_\lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f_\lambda"] \arrow[d, "l"'] \arrow[drrr, "g_\lambda"] \arrow[ddr, "k"] \arrow[ddrr, "g_\mu"] & & & X_\lambda \\
W \arrow[dr, "m"'] & & & Z_\lambda \arrow[u, "h_\lambda"'] \\
& Y \arrow[r, "p_\mu"'] & Z_\mu \arrow[ur, "\varphi_{\mu\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto **Set** es una (Epi, Monofuente)-categoría. De manera similar, **Set** es una (Epipozo, Mono)-categoría.

Definición 9.2. Un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es *topológico* si, para cualquier $F-$fuente $(Y, (g_\lambda : Y \to F(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda})$, existe una única $\mathbf{A}-$fuente $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $F(X) = Y$ y $F(f_\lambda) = g_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda$, al cual llamaremos ($F -$ *levantamiento*).
2. Para una **A**-fuente $(Z, (h_\lambda : Z \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ y un **B**-morfismo $k : F(Z) \to F(X)$ tal que $F(f_\lambda) \circ k = F(h_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un único **A**-morfismo $h : Z \to X$ tal que $F(h) = k$ y $f_\lambda \circ h = h_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda$ ($F-$inicial).

La **A**-fuente $(X, (f_\lambda))$ es llamada un *levantamiento F-inicial* de $(Y, (g_\lambda))$.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathbf{B}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_\lambda"] & X_\lambda & & Y \arrow[r, "g_\lambda"] & F(X_\lambda) \\
Z \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h_\lambda"'] & & & F(Z) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "F(h_\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

Dual. Co-topológico, levantamiento F-final.

El funtor que olvida $|\cdot|$: **Top** $\to$ **Set** es topológico y co-topológico . $|\cdot|$:**Top**$_2\to$ **Set** no es topológico, pero podemos tratarlo de manera similar usando una noción de funtores (E,M)-topológicos (H. Herrlich, 1974)

Proposición 9.3. *Si un funtor $F:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ es topológico, entonces es fiel. Es decir, la función asociada $F:[U,V]_A\to[F(U),F(V)]_B$ es inyectiva para cualesquiera $U,V\in ObA$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que no es inyectiva, es decir, existen $r,s:U\to V$ $\mathbf{A}-$morfismos tal que $r\neq s$ y $F(r)=F(s)$. Sea Λ una clase que no es conjunto,para cada $\lambda\in\Lambda$ sea $X_\lambda=V$, y $g_\lambda:F(U)\to F(X_\lambda)$ tal que $g_\lambda=F(r)=F(s)$.

Para cada $\lambda\in\Lambda$, existe un levantamiento $F-$inicial $(X,(f_\lambda:X\to X_\lambda))$ de la $F-$fuente $(F(U),(g_\lambda))$. Para cada $\alpha\in\Lambda$, definimos una $\mathbf{A}-$fuente $(U,(h_\lambda:U\to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ donde $h_\alpha=r$ y $h_\lambda=s$ si $\lambda\neq\alpha$.

Sea $k:F(U)\to F(U)$ donde $k=1_{F(U)}$. Entonces para cada $\lambda\in\Lambda$ $F(f_\lambda)\circ k=g_\lambda\circ 1_{F(U)}=F(r)=F(h_\alpha)=F(s)=F(h_\lambda)$, por la F-inicialidad de $(X,(f_\lambda))$, existe un $\mathbf{A}-$morfismo $h:U\to X$ tal que $F(h)=k$ y $f_\lambda\circ h=h_\lambda$. Si $\lambda\neq\alpha$ entonces $h_\alpha\neq h_\lambda$ luego $f_\alpha\neq f_\lambda$, es decir, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tiene a todos sus elementos distintos entre sí, por lo tanto es una clase propia que está contenida en $[X,V]_A$ lo cuál es absurdo pues $[X,V]_A$ es un conjunto. □

Proposición 9.4. *Si $F:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ es un funtor topológico y si $D:\boldsymbol{K}\to\boldsymbol{A}$ es un diagrama en $\boldsymbol{A}$ sobre una categoría pequeña $\boldsymbol{K}$, las siguientes condiciones en una $\boldsymbol{A}-$fuente $(X,(\alpha_i:X\to D(i))_{i\in ObK})$ son equivalentes:*

1. *$(X,(\alpha_i))$ es un límite para D.*
2. *$(X,(\alpha_i))$ es F-inicial y $(F(X),(F(\alpha_i)))$ es un límite para $F\circ D$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Primero veamos que $(X,(\alpha_i))$ es F-inicial.

Para la $F-$fuente $(F(X),(F(\alpha_i)))$, existe único $F-$levantamiento inicial $(Z,(h_i:Z\to D(i))_{i\in ObK})$.

Para la fuente en $\mathbf{A}$ $(X,(\alpha_i))$ y $\mathbf{B}-$morfismo $1_{F(X)}$ se cumple que: $F(h_i)\circ 1_{F(X)}=F(\alpha_i)\circ 1_{F(X)}=F(\alpha_i)$, por la $F-$inicialidad existe único morfismo $h:X\to Z$ tal que $F(h)=1_{F(X)}$ y $h_i\circ h=\alpha_i$. Demostraremos que h es isomorfismo.

Notemos que para cada k-morfismos $a:i\to j$, $F(D(a)\circ h_i)=F(D(a))\circ F(h_i)=F(D(a))\circ F(\alpha_i)=F(D(a)\circ\alpha_i)=F(\alpha_j)=F(h_j)$, como F es fiel, $D(a)\circ h_i=h_j$. Por lo tanto, $(Z,(h_i)_{i\in ObK})$ es una fuente natural para D. Existe un único $\mathbf{A}$ morfismo conector $k:Z\to X$ tal que $\alpha_i\circ k=h_i$, entonces $\alpha_i\circ k\circ h=h_i\circ h=\alpha_i$, es decir, $k\circ h$ es morfismo conector y 1_X también lo es, por unicidad $k\circ h=1_X$. Ahora, para la $\mathbf{A}-$fuente $(Z,(h_i:Z\to D(i)))$ y $1_{F(Z)}$ se cumple que $F(h_i)\circ 1_{F(Z)}=F(h_i)$ por la $F-$inicialidad existe único morfismos en $\mathbf{A}$ $h_*:Z\to Z$ tal que $h_i\circ h_*=h_i$, pero tanto 1_Z como $h\circ k$ lo cumplen, por lo que $h\circ k=1_Z$.

Resta ver que $(F(X),(F(\alpha_i)))$ es límite para $F\circ D$.

Para cada $a:i\to j$ $\mathbf{K}$-morfismo, $F(D(a))\circ F(\alpha_i)=F(D(a)\circ\alpha_i)=F(\alpha_j)$.

Sea $(Y,(g_i:Y\to F(D(i)))_{i\in ObK})$ otra fuente natural para $F\circ D$, en especial es una $F-$fuente, entonces existe un único $F-$levantamiento inicial $(W,(f_i:W\to D(i))_{i\in ObK})$ que también es una fuente natural para D ya que, si $a:i\to j$ es un $\mathbf{K}-$morfismo, $F(D(a)\circ f_i)=F(D(a))\circ F(f_i)=F(D(a))\circ g_i=g_j=F(f_j)$. Entonces $D(a)\circ f_i=f_j$. Luego, existe un único $A-$morfismo conector $\varphi:W\to X$, tal que $\alpha_i\circ\varphi=f_i$. Proponemos $F(\varphi):F(W)\to F(X)$ como morfismo conector de Y a $F(X)$ ya que $F(\alpha_i)\circ F(\varphi)=$

$F(f_i) = g_i$. Además, éste es único ya que, si $\psi : Y \to F(X)$ es otro morfismo conector, $F(\alpha_i) \circ \psi = g_i$, como $(X, (\alpha_i))$ es $F-inicial$ existe único $l : W \to X$ tal que $F(l) = \psi$ y $\alpha_i \circ l = f_i$, pero φ también lo hace. Por lo tanto $\varphi = l$ por lo tanto $F(\varphi) = F(l) = \psi$.

2. $\Rightarrow$ 1. Veamos que $(X, (\alpha_i))$ es límite para D.
Sea $a : i \to j$ un $k-$morfismo.
$F(D(a) \circ \alpha_i) = F(D(a)) \circ F(\alpha_i) = F(\alpha_j)$, luego $D(a) \circ \alpha_i = \alpha_j$ por la fidelidad de F. Sea $(Z, (\beta_i : Z \to D(i))_{i \in ObK})$ fuente natural para D. Observemos que, $F(D(a)) \circ F(\beta_i) = F(\beta j)$.
De esta manera, $(F(Z), (F(\beta_i))_{i \in ObK})$ es fuente natural para $F \circ D$ por lo tanto existe morfismo conector $\varphi : F(Z) \to F(X)$ tal que $F(\alpha_i) \circ \varphi = F(\beta_i)$.
Para la $\mathbf{A}-$fuente $(Z, (\beta_i)_{i \in ObK})$ y el $\mathbf{B}$-morfismo $\varphi : F(Z) \to F(X)$ que satisface que $F(\alpha_i) \circ \varphi = F(\beta_i)$, por lo tanto existe único morfismo en $\mathbf{A}$ $\psi : Z \to X$ tal que $\alpha_i \circ \psi = \beta_i$ y $F(\psi) = \varphi$. ψ es el morfismo conector que buscamos, además es único, pues de existir otro, digamos $l : Z \to X$ tal que $\alpha_i \circ l = \beta_i$, luego $F(\alpha_i) \circ F(l) = F(\beta_i)$, es decir, $F(l)$ es morfismo conector de $F(Z)$ a $F(X)$ por unicidad $F(l) = \varphi = F(\psi)$, por lo tanto $\psi = l$.

□

Corolario 9.5. *Cualquier funtor topológico preserva límites y monofuentes.*

Demostración. De la Proposición 9.4 se sigue lo primero, veamos lo segundo.
Sea $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ una $\mathbf{A}-$monofuente y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor topológico. Veamos que $(F(X), (F(f_\lambda) : F(X) \to F(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda})$ es una monofuente.
Sean $u, v : Z \to F(X)$ $\mathbf{B}-$morfismos tales que $F(f_\lambda) \circ u = F(f_\lambda) \circ v$ para cada $\lambda \in \Lambda$.
Para la $F-$fuente $(Z, (u, v : Z \to F(X)))$ existe un único $F-$levantamiento inicial $(W, (u', v' : W \to X))$ donde $F(u') = u, F(v') = V'$ y $F(W) = Z$.
Para cada $\lambda \in \Lambda$, $F(f_\lambda \circ u') = F(f_\lambda) \circ u = F(f_\lambda) \circ v = F(f_\lambda \circ v')$, luego $f_\lambda \circ u' = f_\lambda \circ v'$ por ser F fiel. Por hipótesis $u' = v'$, por lo que $u = F(u') = F(v') = v$. □

Teorema 9.6. *Un funtor $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es topológico si y sólo si es co-topológico.*

Demostración. Sean $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor topológico y $(Y, (g_\lambda : F(X_\lambda) \to Y)_{\lambda \in \Lambda})$ un $F-$pozo. Consideremos la siguiente propiedad sobre $\mathbf{B}$-morfismos $h : Y \to F(Z)$ donde $Z \in ObA$:
$[\star] h \circ g_\lambda : F(X_\lambda) \to F(Z)$ tiene un F-levantamiento, es decir, existe un $\mathbf{A}-$morfismo $k_\lambda : X_\lambda \to Z$ tal que $F(k_\lambda) = h \circ g_\lambda$.

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[rr, "k_\lambda"] & {} \arrow[d, "F"'] & Z \\
F(X_\lambda) \arrow[r, "g_\lambda"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g_\lambda"'] & Y \arrow[r, "h"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Sea $(h_\mu : Y \to F(Z_\mu))_{\mu \in M}$ la clase de todos los $\mathbf{B}$-morfismos que satisfacen la propiedad $[\star]$. Denotemos por $k_{\mu\lambda} : X_\lambda \to Z_\mu$ a un $F-$levantamiento de $h_\mu \circ g_\lambda$.
Para la $F-$fuente $(Y, (h_\mu : Y \to F(Z_\mu))_{\mu \in M})$ existe un único $F-$levantamiento inicial $(X, (l_\mu : X \to Z_\mu)_{\mu \in M})$ tal que $F(X) = Y$, $F(l_\mu) = h_\mu$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos a la $\mathbf{A}-$fuente $(X_\lambda, (k_{\mu\lambda} : X_\lambda \to Z_\mu)_{\mu \in M})$ y al $\mathbf{B}$-morfismo $g_\lambda : F(l_\mu) \circ g_\lambda = h_\lambda \circ g_\lambda = F(k_\mu)$. Por la F-inicialidad

de $(X,(l_\mu))$, existe un único $\mathbf{A}$-morfismo $f_\lambda : X_\lambda \to X$ tal que $l_\mu \circ f_\lambda = k_{\mu\lambda}$ y $F(X_\lambda) = g_\lambda$.

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[rr, "k_{\mu\lambda}"] \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[ddr, "m_\lambda"'] & & Z_\mu \\
& X \arrow[ur, "l_\mu"'] & \\
& W &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X_\lambda) \arrow[rr, "h_\mu \circ g_\lambda"] \arrow[dr, "g_\lambda"] \arrow[ddr, "F(m_\lambda)"'] & & F(Z_\mu) \\
& Y \arrow[ur, "h_\mu"'] \arrow[d, "n"'] & \\
& F(W) &
\end{tikzcd}$$

Entonces $(X,(f_\lambda))$ es un $F-$levantamiento final de $(Y,(Y_\lambda))$ ya que $F(X) = Y$ y $F(f_\lambda) = g_\lambda$. Además, para $(W,(m_\lambda : X_\lambda \to W)_{\lambda\in\Lambda})$ un $\mathbf{A}-$pozo y $n : Y \to F(W)$ un $\mathbf{B}$-morfismo tal que $n \circ g_\lambda = F(m_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Se tiene que n satisface la propiedad $[\star]$ por lo tanto existe $\mu \in M$ tal que $h_\mu = n$, $W = Z_\mu$ y $m_\lambda = k_{\mu\lambda}$.
De esta manera, $l_\mu : X \to Z_\mu$ es un $\mathbf{A}-$morfismo que satisface: $F(l_\mu) = F(h_\mu) = n$ y $l_\mu \circ f_\lambda = m_\lambda$. Además la unicidad de l_μ se sigue de la fidelidad de F. Concluimos que $(X,(f_\lambda))$ es un $F-$levantamiento final del pozo $(Y,(g_\lambda))$. Por lo tanto F es co-topólogico. $\square$

Corolario 9.7. *Cualquier funtor topológico preserva colímites y epipozos.*

Corolario 9.8. *Supongamos que $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un funtor topológico. Entonces si $\boldsymbol{B}$ es completa, $\boldsymbol{A}$ es completa; y si $\boldsymbol{B}$ e cocompleta, $\boldsymbol{A}$ es cocompleta.*

Demostración. Sea $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ diagrama en $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{K}$ una categoría pequeña. Sea $(Y,(\beta_i : Y \to F(D(i)))_{i\in ObK})$ límite para $F \circ D$. Sea $(X,(\alpha_i : X \to D(i))_{i\in ObK})$ un $F-$levantamiento inicial de $(Y,(\beta_i))$. En particular $F(X) = Y$ y $F(\alpha_i) = \beta_i$, por lo que $(F(X), F(\alpha_i)_{i\in ObK})$ es un límite para $F \circ D$, por la Proposición 9.4 $(X,(\alpha_i))$ es límite para D. Por lo tanto $\mathbf{A}$ es completa. $\square$

Capítulo 10

Categorías Topológicas

Definición 10.1. Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor. Un par $(\mathbf{A}, F)$ es una categoría topológica si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{B} = \mathbf{Set}$
2. F es un funtor topológico
3. Para cualquier $Y \in ObB$, la clase $F^{-1}(Y) = \{X \in ObA | F(X) = Y\}$ es un conjunto.
4. Para un **B**-objeto $\{P\}$ que consiste sólo del punto P, $F^{-1}(\{P\})$ consiste de precisamente un sólo **A**-objeto.

Un par $(\mathbf{A}, F)$ de una categoría **A** y un funtor fiel $F : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ es una *categoría concreta*. En general, por la Proposición 9.3, las categorías topológicas son concretas. Algunos autores consideran las categorías topológicas sin la condición 1.

Proposición 10.2. *Si $(\boldsymbol{A}, F)$ es una categoría topológica, se cumple que:*

1. ***A** es completa, cocompleta, bien potenciada y co-bien potenciada.*
2. *Un **A**-morfismo f es un monomorfismo si y sólo si $F(f)$ es inyectiva y f es un epimorfismo si y sólo si $F(f)$ es sobreyectiva.*
3. *Para cualquier $\boldsymbol{A}-$morfismo f las siguientes proposiciones son equivalentes:*
   a) *f es una inmersión, es decir, un monomorfismo $F-$inicial en $\boldsymbol{A}$:*
   b) *f es un monomorfismo regular;*
   c) *f es un monomorfismo extremal.*
4. *Para cualquier $\boldsymbol{A}-$morfismo f las siguientes proposiciones son equivalentes:*
   a) *f es una identificación, es decir, un epimorfismo $F-$final en $\boldsymbol{A}$:*
   b) *f es un epimorfismo regular;*
   c) *f es un epimorfismo extremal.*
5. ***A** es una $(Idf, Monofuente)$-categoría y una $(Epipozo, Inm)$-categoría, donde Idf e Inm son las clases de todas las identificaciones y todas las inmersiones respectivamente.*

6. *Sea* $\boldsymbol{B}$ *una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de* $\boldsymbol{A}$ *y* $F' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Set}$ *un funtor obtenido de* F *restringiendo el dominio a* $\boldsymbol{B}$*. Si* $\boldsymbol{B}$ *es bicoreflexiva o bireflexiva en* $\boldsymbol{A}$*, entonces* $(\boldsymbol{B}, F')$ *es una categoría topológica.*

Demostración. 1. Por el Corolario 9.8 y dado que **Set** es una categoría completa y cocompleta se tiene que **A** también lo es. Ahora, veamos que es bien potenciada.
Sea X un objeto en **A** y $M_X = \{f : Y \to X : f \text{ es monomorfismo}\}$ la clase de todos los monomorfismos en X. Entonces $M_{F(X)} = \{F(f) : F(Y) \to F(X)\}$, por la Proposición 10.2, es una clase de monomorfismos en $F(X)$ como **Set** es bien potenciada, existe conjunto de representantes $R' = \{g_i : Z_i \to F(X)\}_{i\in I}$ de $F(M)$. Así, para cada f en M_X, $F(f)$ está en $M_{F(X)}$ entonces existe $\varphi : F(Y) \to Z_i$ isomorfismo tal que $F(f) = g_i \circ \varphi$. Por ser F topológico existe $F-$levantamiento final $(W_i, \psi : Y \to W_i)$ de (Z_i, φ). Para 1_Y y φ^{-1}, existe $\psi^{-1} : W_i \to Y$ tal que $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_Y$ por lo que ψ es isomorfismo.
Ahora, para $f : Y \to X$ y $g_i : Z_i \to F(X)$ existe $f_i : W_i \to X$ tal que $F(f_i)g_i$ y $f = f_i \circ \psi$. Por lo tanto $R = \{f_i : W_i \to X\}_{i\in I}$ es el conjunto de representantes que buscamos.

2. Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo, entonces (X, f) es una monofuente, luego $(F(X), F(f))$ es una monofuente, o bien $F(f)$ es monomorfismo por lo que es inyectiva.

   Supongamos ahora que $F(f)$ es inyectiva, sean $u, v : Z \to X$ tales que $f \circ u = f \circ v$ entonces $F(f) \circ F(u) = F(f) \circ F(v)$ como $F(f)$ es monomorfismo tenemos que $F(u) = F(v)$ y F es fiel, por lo tanto $u = v$.

3. Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo en **A**.

   a) $\Rightarrow$ *b*)Supongamos que f es un monomorfismo F-inicial, entonces $F(f) : F(X) \to F(Y)$ es un monomorfismo. Definimos en $F(Y)$ la siguiente relación de equivalencia:
   $z \sim z' \Leftrightarrow z, z' \in F(f)(F(X)) \quad \vee \quad z = z'$
   Sea $Q = FY/\sim$ y definimos $k : F(Y) \to Q$ como $k \equiv [z_0]$ con $z \in F(f)(F(X))$ y $q : F(Y) \to Q$ el morfismo cociente.
   Para $(\{[z_0]\}, k : F(Y) \to \{[z]\})$ y $(Q, q : F(Y) \to Q)$ $F-$pozos finales existen $k' : Y \to Q'$ y $q' : Y \to Q''$ tales que $F(k') = k$ y $F(q') = q$.
   Para $(\{[z_0]\}, k \circ F(f) : F(X) \to \{[z_0]\})$ $F-$pozo existe $g : X \to P$ $F-$final pero $F(P) = \{[z_0]\} = F(Q')$ por ser categoría topológica $P = Q'$ luego $F(g) = k \circ F(f) = F(k' \circ f)$ y F fiel así $g = k' \circ l$. Por lo que $k \circ f$ es final.
   Ahora, tenemos que $q \circ F(f) = k \circ F(f) = i \circ k \circ F(f)$ y $F(q' \circ f) = q \circ F(f)$. Entonces existe $i' : Q' \to Q''$ tal que $q' \circ f = (i' \circ k') \circ f$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Q'' \\
X \arrow[ur, "q'\circ f"] \arrow[r, "k'\circ f"'] & Q' \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Q \\
F(X) \arrow[ur, "q\circ F(f)"] \arrow[r, "k\circ F(f)"'] & \{[z_0]\} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

   Afirmamos que f es igualador de $i' \circ k'$ y q'. Pues si $f' : X' \to Y$ cumple que $i' \circ k' \circ f' = q' \circ f'$ entonces $F(i' \circ k' \circ f') = F(q' \circ f')$, o bien $k \circ F(f') = q \circ F(f')$. Para cada $y \in F(X')$, $k \circ F(f')(y) = q \circ F(f')(y)$, así $[z_0] = [F(f')(y)]$ luego $F(f')(y) \in F(f)(F(X))$, es decir, existe $x_y \in F(X)$ tal que $F(f)(x_y) = F(f')(y)$. Definiendo $r : F(X') \to F(X)$ donde $r(y) = x_y$, tenemos que $F(f') = F(f) \circ r$, como f es

$F-$inicial existe $\varphi : X' \to X$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \\ F(X') \arrow[u, "r"] \arrow[ur, "F(f')"'] & \end{tikzcd}$$

Además φ es única pues f es monomorfismo.

b) $\Rightarrow$ *c*) lo hemos demostrado ya en la Proposición 2.17.

c) $\Rightarrow$ *a*) Supongamos que f es monomorfismo extremal y sea $g : Z \to Y$ un morfismo en **A** con $k : FZ \to FY$ tales que $F(f) \circ k = F(g)$.
Para $(FX, F(f))$ una $F-$fuente existe $(X', f' : X' \to Y)$ un levantamiento $F-$inicial, para g y el **Set**-morfismo k existe $\alpha : Z \to X'$ tal que $F(\alpha) = k$ y $g = f' \circ \alpha$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] & Y \\ Z \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "F(f')"] & F(Y) \\ F(Z) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "F(g)"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, para el **A**-morfismo $f : X \to Y$ y el **Set**-morfismo $1_{F(X)}$ que cumplen: $F(f) = F(f') \circ 1_{F(X)}$, existe $\beta : X \to X'$ tal que $F(\beta) = 1_{F(X)}$ y $f = f' \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] & Y \\ X \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "F(f')"] & F(Y) \\ F(X) \arrow[u, "1_{F(X)}"] \arrow[ur, "F(f)"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, como $1_{F(X)}$ es epimorfismo, β también lo es y al ser f extremal se tiene que β es isomorfismo. Definiendo $h = \beta^{-1} \circ \alpha : Z \to X$ se tiene que $F(h) = F(\beta^{-1} \circ \alpha) = 1_{F(X)} \circ k = k$ y $f \circ h = f \circ \beta^{-1} \circ \alpha = f' \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha = f' \circ \alpha = g$.

4. Dual del inciso anterior.

5. Sea $\{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ una **A**-fuente, luego $\{F(f_i) : F(X) \to F(Y_i)\}_{i \in I}$ es una **Set**-fuente. Como ya hemos visto que cada morfismo en **Set** tiene un (Idf,Mono)-factorización entonces, de manera similar al Ejemplo 18, se puede demostrar que **Set** es una (Idt, Monofuente)-categoría. Así, para $\{F(f_i)\}_{i \in I}$ existe $(Z', g' : F(X) \to Z', \{h'_i : Z' \to F(Y_i)\}_{i \in I})$ una $(Ist, Monofuente)-$factorización, más aún, cada h_i es monomorfismo. Para (Z', g') F-pozo existe $g : X \to Z$ levantamiento $F-$final donde $F(g) = g'$.
Para cada $i \in I$, (X, f_i) es una **A**-fuente y el **Set**-morfismo $h' : Z' \to F(Y_i)$ tal que $F(f_i) = h'_i \circ g'$; por la $F-$inicialidad de g existe $h_i : Z \to Y_i$ tal que $f_i = h_i \circ g$ y $F(h_i) = h'_i$. Como cada h'_i es monomorfismo, entonces h_i también lo es, por lo que $\{h_i\}_{i \in I}$ es una monofuente. Por lo tanto $(Z, g, \{h_i\}_{i \in I})$ es una (Idt,Monofuente)-factorización.

6. Supongamos que **B** es bireflexiva en **A**. Notemos que, para que $(\mathbf{B}, F')$ sea una categoría topológica, sólo resta ver que F' es topológico.
Sea $(Y, (g_\lambda : Y \to F'(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda})$ una $F'-$fuente, como **B** es una subcategoría de **A** también es una $F-$fuente, por lo que existe $F-$levantamiento inicial $(X, f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, ahora

para X un $\mathbf{A}$ objeto y $f_\lambda : X \to X_\lambda$ con $X_\lambda \in ObB$ existen $r_X : X \to RX$ su $\mathbf{B}$-bireflexión y f_λ^0 extensión. Luego $F(r_X)$ es un bimorfismo en $\mathbf{Set}$, o bien, un isomorfismo por lo que existe $k : F(RX) \to Y$ tal que $F(r_X)^{-1} = k$. Así $g_\lambda \circ k = F(f_\lambda^0)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, por la $F-$inicialidad de $(X, (f_\lambda))$ existe $h : RX \to X$ tal que $F(h) = k$ y $f_\lambda \circ h = f_\lambda^0$. De esta manera, $F(h \circ r_X) = F(h) \circ F(r_X) = 1_Y = F(1_X)$, entonces $h \circ r_X = 1_X$ por lo que r_X es isomorfismo, como $\mathbf{B}$ es cerrado bajo isomorfismos se tiene que $X \in ObB$.

□

Por el último resultado, tenemos las siguientes equivalencias (H. Herrlich, 1976):

1. $(\mathbf{B}, F')$ es topológico;
2. $\mathbf{B}$ es una subcategoría bicoreflexiva de alguna subcategoría bireflexiva de $\mathbf{A}$;
3. $\mathbf{B}$ es una subcategoría bireflexiva de alguna subcategoría bicoreflexiva de $\mathbf{A}$.

En general, muchas de las propiedades en los espacios topológicos que son interesantes o importantes en la topología categórica son las de las categorías topológicas; es decir, hoy en día el estudio de la topología categórica se centra en la investigación de las categorías topológicas.

Ahora sea $(\mathbf{A}, F)$ una categoría topológica y X un $\mathbf{A}$-objeto. Para cualquier $\mathbf{A}$-objeto Y, sea $X \times (Y) = X \times Y$ y, para cualquier $\mathbf{A}-$morfismo $f : Y \to Z$, sea $X \times (f) = 1_X \times f = X \times Y \to X \times Z$. Entonces obtenemos un funtor $X \times - : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.
Recordemos que, para un diagrama $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$, donde $\mathbf{K}$ consiste de un sólo objeto i y morfismos de la forma $a : i \to i$, tales que $D(i) = X$ un $\mathbf{A}$-objeto y $D(a) : X \to X$, no necesariamente todos iguales a la identidad, tiene por colímite a $(Y, f : X \to Y)$ si para cada $D(a) : X \to X$, $f \circ D(a) = f$ y de existir otra fuente natural (Z, g) existe único morfismo conector $\varphi : Y \to Z$ tal que $\varphi \circ f = g$.

Lema 10.3. *(Y, f) es colímite para algún diagrama D si y sólo si f es identificación.*

Demostración. Sí (Y, f) es colímite para algún diagrama D por el dual de la Proposición 9.4 tenemos que (Y, f) es F-final y $(F(Y), F(f))$ es colímite para $F \circ D$. Veamos que f es epimorfismo. Sean $u, v : Y \to Z$ tal que $u \circ f = v \circ f$, para $a : i \to i \in \mathrm{Mor}\mathbf{K}$ se tiene que $f \circ D(a) = f$ por la naturalidad de (Y, f) luego $u \circ f \circ D(a) = u \circ f$, así $(Z, u \circ f)$ es pozo natural para D, por lo que existe único morfismo conector $Y \to Z$ pero u y v también lo son, por lo que $u = v$.

Ahora, si f es identificación es F final y epimorfismo, por lo que $F(f)$ es sobreyectiva. Entonces, existe $F(f)^{-1} : F(Y) \to F(X)$ tal que $F(f) \circ F(f)^{-1} = 1_{F(Y)}$.
Sea $F \circ D$ el diagrama de un objeto $F(X)$ y morfismo $F(f)^{-1} \circ F(f) : F(X) \to F(X)$ además de la identidad. Se tiene que $(F(Y), F(f))$ es pozo natural pues $F(f) \circ (F(f)^{-1} \circ F(f)) = F(f)$. Ahora, si (W, g) es otro pozo natural, es decir $g \circ (F(f)^{-1} \circ F(f)) = g$ entonces $g \circ F(f)^{-1}$ es morfismo conector y es único pues $F(f)$ es epimorfismo. Por el dual del Teorema 9.4, se tiene que (Y, f) es colímite. □

Proposición 10.4. *Para una categoría topológica $(\boldsymbol{A}, F)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Para cualquier $\boldsymbol{A}-$objeto X, el funtor $X \times -$ preserva colímites.*
2. *Para cualquier $\boldsymbol{A}-$objeto X, el funtor $X \times -$ preserva coproductos e identificaciones.*
3. *$\boldsymbol{A}$ satisface las siguientes condiciones:*

a) *Para cualquier* $\boldsymbol{A}$*-objeto* X *y una familia de* $\boldsymbol{A}$*-objetos* $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *con un conjunto indexado* Λ, $X\times(\coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda)$ *es isomorfo a* $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X\times Y_\lambda)$ *donde* $\coprod$ *denota el coproducto en* $\boldsymbol{A}$.

b) *Si* $f:X\to Y$ *es una identificación entonces* $1_Z\times f:Z\times X\to Z\times Y$ *también lo es.*

4. $\boldsymbol{A}$ *satisface la condición a) del inciso anterior y la siguiente condición* $b')$.

$b')$ *Si* $f:X\to Y$ *y* $g:Z\to W$ *son identificaciones, entonces* $f\times g:X\times Z\to Y\times W$ *también lo es.*

5. *Para cualquier* $\boldsymbol{A}-$*objeto* X*, el funtor* $X\times -$ *preserva epipozos* $F-$*finales.*

6. *Para cualesquiera* X,Y *objetos en* $\boldsymbol{A}$*, existe un* $\boldsymbol{A}-$*objeto* Y^X *que satisface las siguientes condiciones:*

a) $F(Y^X)=[X,Y]$.

b) *Para el* ***Set****-morfismo* $e_{X,Y}:F(X)\times[X,Y]\to F(Y)$ *definida por* $e_{X,Y}(x,f)=F(f)(x)$ *para* $x\in F(X)$*,* $f\in[X,Y]$*, existe un* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $d_{X,Y}:X\times Y^X\to Y$ *tal que* $F(d_{X,Y})=e_{X,Y}$.

c) *Para cualquiera* $\boldsymbol{A}-$*objetos* X,Y,Z*, el* ***Set****-morfismo* $c:[Z,Y^X]\to[X\times Z,Y]$ *definida por* $c(f)=d_{X,Y}\circ(1_X\times f)$ *para* $f\in[Z,Y^X]$ *es un epimorfismo.*

7. *Para cualquier* $\boldsymbol{A}-$*objeto* X*, el funtor* $H=X\times\cdot$ *tiene un adjunto derecho, es decir, para cualquier* $\boldsymbol{A}$*-objeto* Y *existe un* $\boldsymbol{A}$*-objeto* $G(Y)$ *y un* $\boldsymbol{A}-$*morfismo* $\eta_Y:H(G(Y))\to Y$ *que satisface la siguiente condición: Para cada* Z *objeto en* $\boldsymbol{A}$ *y cada* $f:H(Z)\to Y$ *morfismo en* $\boldsymbol{A}$*, existe un único morfismo en* $\boldsymbol{A}$ $f^0:Z\to G(Y)$ *tal que* $\eta_Y\circ(H(f^0))=f$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.

Sea $f:X\to Y$ una identificación, por el Lema 10.3 es colímite, por hipótesis $1_Z\times f$ también lo es, luego por el Lema 10.3 es identificación. Por lo tanto, el funtor producto manda identificaciones en identificaciones y coproductos en coproductos.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $\coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ el coproducto de $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $\mathbf{A}$-objetos, por hipótesis $X\times\coprod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ es coproducto de la familia de $\mathbf{A}-$objetos $(X\times Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pero $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X\times Y_\lambda)$ también lo es, por la Proposición 3.4 son isomorfos.

3. $\Rightarrow$ 4. Primero, notemos que si $\alpha:X\to Y$ y $\beta:Y\to Z$ son identificaciones entonces $\beta\circ\alpha$ también lo es. En efecto, sabemos que la composición de epimorfismos también es un epimorfismo. Además, la composición es $F-$final, pues para $\gamma:X\to W$ y $k:F(Z)\to F(W)$ tal que $F(\gamma)=k\circ F(\beta\circ\alpha)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & W \\
X \arrow[urr, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend right, "\beta\circ\alpha"'] & Y \arrow[r, "\beta"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & F(W) \\
F(X) \arrow[urr, "F(\gamma)"] \arrow[r, "F(\alpha)"'] \arrow[rr, bend right, "F(\beta\circ\alpha)"'] & F(Y) \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(Z) \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

Entonces por la F-finalidad de α y dado que $F(\gamma) = (k \circ F(\beta)) \circ F(\alpha)$ existe $h' : Y \to W$ tal que $F(h') = k$ y $\gamma = h' \circ \alpha$.

$$\begin{tikzcd} & W \\ X \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & Y \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(W) \\ & F(z) \arrow[u, "k"'] \\ F(X) \arrow[uur, "F(\gamma)"] \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(Y) \arrow[u, "F(\beta)"'] \end{tikzcd}$$

Luego, por la última igualdad y la $F-$finalidad de β, existe $h : Z \to W$ tal que $F(h) = k$ y $h' = h \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} & W \\ Y \arrow[ur, "h'"] \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(W) \\ F(Y) \arrow[ur, "F(h')"] \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(Z) \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $\gamma = h' \circ \alpha = h \circ \beta \circ \alpha$ y $F(h) = k$. Por lo tanto $\beta \circ \alpha$ es una identificación. Observemos que, ésto se cumple para epipozos $F-$finales con una demostración análoga.

Ahora, para $f : X \to Y$ y $g : Z \to W$, $f \times g = (1_Y \times g) \circ (f \times 1_Z)$, como f y g son identificaciones por hipótesis $1_Y \times g$ y $f \times 1_Z$ son identificaciones y por la observación anterior la composición también lo es; así $f \times g$ es una identificación.

4. $\Rightarrow$ 5. Sea $(Y, (f_i : Y_\lambda \to Y)_{\lambda \in M})$ un epipozo $F-$final y sea $(Z_\lambda, g_\lambda, h_\lambda)$ una $(Epiex, Mono)-$factorización de f_λ en $\mathbf{A}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Por ser $\mathbf{A}$ bien potenciado existe un conjunto de representantes $\{h_\lambda | \lambda \in M\}$ de $\{h_\lambda \in \Lambda\}$. Sea $(\coprod_{\lambda \in M} Z_\lambda, (q_\lambda)_{\lambda \in M})$ el coproducto, como $(Y, (h_\lambda)_{\lambda \in M})$ es pozo del coproducto, existe morfismo conector $k : \coprod_{\lambda \in M} Z_\lambda \to Y$ tal que $h_\lambda = k \circ q_\lambda$ para cada λ. De manera similar, sea $(\coprod_{\lambda \in M} Y_\lambda, (p_\lambda)_{\lambda \in M})$ el coproducto y para $(\coprod_{\lambda \in M} Z_\lambda, (q_\lambda \circ g_\lambda)_{\lambda \in M})$ existe morfismo conector $\coprod_{\lambda \in M} g_\lambda : \coprod_{\lambda \in M} Y_\lambda \to \coprod_{\lambda \in M} Z_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} Y_\lambda \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "g_\lambda"] \arrow[dd, "p_\lambda"'] & & Y \\ & Z_\lambda \arrow[ur, "h_\lambda"'] \arrow[d, "q_\lambda"'] & \\ \coprod_{\lambda \in M} Y_\lambda \arrow[r, "\coprod_{\lambda \in M} g_\lambda"] & \coprod_{\lambda \in M} Z_\lambda \arrow[uur, bend right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos definir:

$$l = k \circ (\coprod_{\lambda \in M} g_\lambda) : \coprod_{\lambda \in M} Y_\lambda \to Y$$

Afirmamos que l es una identificación. Por ser $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un epipozo con $f_\lambda = h_\lambda \circ g_\lambda$, $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ también lo es, además $h_\lambda = \varphi_m \circ h_m$ para algún $m \in M$ y φ_m isomorfismo, por lo que $(h_\lambda)_{\lambda \in M}$ es un epipozo, así k es epimorfismo. Luego, como cada g_λ es epimorfismo, $\coprod_{\lambda \in M} g_\lambda$ también lo es; por lo tanto l es epimorfismo. De manera similar, al ser $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $F-$final tenemos que l es $F-$final.
Por hipótesis, $1_X \times l : X \times (\coprod_{\lambda \in M} Y_\lambda) \to X \times Y$ es una identificación y $(X \times \coprod Y_\lambda, (1_X \times$

$p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ es coproducto. Además, por el dual de la Proposición 9.4 este último también es F-final. Esto implica que $(X \times \coprod Y_\lambda, (1_\times f_\lambda))$ es un epipozo F-final.

5. $\Rightarrow$ 6. Sean X, Y, Z objetos en $\mathbf{A}$ y sea $f : F(Z) \to [X, Y]$ un **Set**-morfismo. Definimos

$$c'(f) = e_{X,Y} \circ (1_{F(X)} \times f) : F(X) \times F(Z) \to F(Y)$$

Sea Λ la clase indexada de la clase:

$$\mathcal{R} = \{f_\lambda : F(Z_\lambda) \to [X, Y] | \exists g_\lambda : X \times Z_\lambda \to Y \in \mathrm{Mor}\mathbf{A} : c'(f_\lambda) = F(g_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$$

Para cada $h \in [X, Y]$, por ser $(\mathbf{A}, F)$ categoría topológica existe único $Z_0 \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ tal que $F^{-1}(\{h\})$. Podemos definir, $f_0 : F(Z_0) \to [X, Y]$ morfismo en **Set** como $f_0(h) = h$ y $g : X \times Z_0 \to Y$ morfismo en $\mathbf{A}$ donde $g = h \circ \pi_X$ que cumplen:

$$\begin{aligned} c'(f_0)(x, h) &= e_{X,Y} \circ (1_{F(X)} \times f_0)(x, h) = e_{X,Y}(x, h) = F(h)(x) = F(h) \circ \pi_{F(X)}(x, h) \\ &= F(h \circ \pi_X)(x, h) = F(g)(x, h) \end{aligned}$$

Por lo que $f_0 \in \mathcal{R}$. De esta manera, $([X, Y], (f_\lambda : F(Z_\lambda) \to [X, Y])_{\lambda\in\Lambda})$ es un $F-$epipozo en Set. Definimos Y^X como $(Y^X, (h_\lambda : Z_\lambda \to Y^X))$ el levantamiento $F-$final de $([X, Y], (f_\lambda))$.
Entonces $F(Y^X) = [X, Y]$ donde $(Y^X, (h_\lambda))$ es un epipozo $F-$final.
Por hipótesis, $(X \times Y^X, (1_X \times h_\lambda; X \times Z_\lambda \to X \times Y^X))$ es un epipozo F-final.
Para $(Y, (g_\lambda : X \times Z_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda})$ un $\mathbf{A}$-pozo y el **Set**-morfismo $e_{X,Y} : F(X) \times [X, Y] \to F(Y)$ tal que $F(g_\lambda) = c'(f_\lambda) = e_{X,Y} \circ (1_{F(X) \times f_\lambda}) = e_{X,Y} \circ F(1_X \times h_\lambda)$. Por lo tanto, existe $d_{X,Y} : X \times Y^X \to Y$ tal que $F(d_{X,Y}) = e_{X,Y}$ y $g_\lambda = d_{X,Y} \circ (1_X \times h_\lambda)$.

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X \times Z_\lambda \arrow[ur, "g_\lambda"] \arrow[r, "1_X \times h_\lambda"'] & X \times Y^X \arrow[u, "d_{X,Y}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & FY \\ F(X) \times F(Z_\lambda) \arrow[ur, "F(g_\lambda)"] \arrow[r, "1_{FX} \times f_\lambda"'] & F(X) \times [X, Y] \arrow[u, "e_{X,Y}"'] \end{tikzcd}$$

Por último veamos que $c : [Z, Y^X] \to [X \times Z, Y]$ es epimorfismo, o bien, sobreyectiva.
Sea $k : X \times Z \to Y$ un morfismo en $\mathbf{A}$. Para cada $z \in F(Z)$, existe único $P \in Ob\mathbf{A}$ tal que $F(P) = \{z\}$ podemos definir $\bar{z_0} : F(P) \to F(Z)$ donde $\bar{z_0}(F(P)) = \{z\}$ la función constante z.
Ahora, $(F(P), \bar{Z_0})$ es una $F-$fuente por lo que existe $(P, z_0 : P \to Z)$ una $\mathbf{A}$-fuente tal que $F(z_0) = \bar{z_0}$ así $F(Z_0)(F(P)) = \{z\}$.
De manera similar, para $\bar{\alpha} : F(X) \to \{z\}$ la función constante z, existe $\alpha : X \to P$ tal que $F(\alpha) = \bar{\alpha}$.
Así $(X, (\alpha, 1_X))$ es fuente del producto de (X, P) por lo que existe morfismo conector $i : X \to X \times P$ tal que $1_X = p_X \circ i$.

$$\begin{tikzcd} X \times P \arrow[d, shift left, "p_X"] \arrow[dr, "p_P"] & \\ X \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[r, "\alpha"'] & P \end{tikzcd}$$

Definamos $k_z = k \circ (1_X \times z_0) \circ i : X \to Y$ y $l : F(Z) \to [X, Y]$ por $l(z) = k_z$. Entonces

$$\begin{aligned} c'(l)(x,z) &= e_{X,Y} \circ (1_X \times l)(x,z) = e_{X,Y}(x, l(z)) = e_{X,Y}(x, k_z) = F(k_Z)(x) \\ &= F(k \circ (1_X \times z_0) \circ i)(x) = F(k) \circ (1_{F(X) \times \bar{z_0}})(x,z) = F(k)(x,z) \end{aligned}$$

Así, $c'(l) = F(k)$. Por definición de Y^X, existe morfismo en $\mathbf{A}$ $m : Z \to Y^X$ tal que $F(m) = l$ así $F(C(m)) = F(d_{X,Y} \circ (1_X \times m)) = e_{X,Y} \circ (1_{F(X)} \times l) = c'(l) = F(k)$. Por lo tanto $c(m) = k$.

6. $\Rightarrow$ 7. Para $Y \in ObA$, sea $Y^X = G(Y)$ un $\mathbf{A}$- objeto y $\eta_Y = d_{X,Y} : H(G(Y)) \to Y$ se cumple que:
   Para cada $\mathbf{A}$-objeto Z y $\mathbf{A}-$morfismo $f : H(Z) \to Y$, sea $z \in F(Z)$.
   Podemos definir, como en el inciso anterior, $i_z : X \to X \times P$ y $\alpha : P \to Z$. Entonces $(X \times P, (p_X, \alpha \circ p_P))$ es fuente del producto (X, Z) por lo que existe morfismo conector $i' : X \times P \to X \times Z$. Definiendo $g : F(Z) \to [X, Y]$ tal que $g(z) = f \circ i' \circ i_z$ se tiene que $c'(g) = F(f)$. Por definición de Y^X, existe $f^0 : Z \to Z \to X \times Y$ tal que $\eta_Y \circ (H(f^0)) = d_{X,Y} \circ (1_X \times f^0) = f$.

7. $\Rightarrow$ 1. Sea $D : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ un diagrama en $\mathbf{A}$ sobre una categoría pequeña $\mathbf{K}$ y $(Y, (\alpha_i : D(i) \to$)) un colímite para D. Entonces $(H(Y), H(\alpha_i))$ es un colímite para $H \circ D$. Ésto se puede demostrar de manera similar a la prueba de la Proposición 7.1

$\square$

Definición 10.5. Una categoría con productos de pares es *cartesianamente cerrada* si satisface la condición 7. de la Proposición 10.4.

Definición 10.6. Sea $(\mathbf{A}, F)$ una categoría cartesianamente cerrada. Para cada objeto Y

1. **"El" funtor exponencial covariante para** Y, denotado por $(\cdot)^Y : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, es "el" funtor adjunto para $(C \times \cdot)$ y es definido, para cada $\mathbf{A}$-morfismo $X \xrightarrow{f} Z$, por:

$$(\cdot)^Y(\ X \xrightarrow{f} Z\ ) = \ X^Y \xrightarrow{f^Y} Z^Y$$

   donde f^Y es el único $\mathbf{A}$-morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \times X^Y \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "1_Y \times f^Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z^Y \arrow[r, "\eta_Z"'] & Z \end{tikzcd}$$

2. **"El" funtor exponencial contravariante para** Y, denotado por $Y^{(\cdot)} : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{A}$, es definido, para cada $\mathbf{A}$-morfismo $X \xrightarrow{f} Z$, por:

$$Y^{(\cdot)}(\ X \xrightarrow{f} Z\ ) = \ Y^X \xrightarrow{Y^f} Y^Z$$

donde Y^f es el único **A**-morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \times Y^Z \arrow[r, "f \times 1_{Y^Z}"] \arrow[d, "1_X \times Y^f"'] & Z \times Y^Z \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \times Y^X \arrow[r, "\eta'_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proposición 10.7. *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una categoría topológica cartesiana-cerrada se cumple que:*

1. $X^{Y\times Z} \approx (X^Y)^Z$;
2. $(\prod X_\lambda)^Y \approx \prod (X_\lambda)^Y$;
3. $X^{\coprod Y_\lambda} \approx \prod (X)^{Y_\lambda}$;
4. $X \times (\coprod Y_\lambda) \approx \coprod (X \times Y_\lambda)$;

Demostración. 1. Como $(Y \times Z) \times (\cdot) \approx (Z \times (\cdot)) \circ (Y \times (\cdot))$, por la definición del funtor covariante $(\cdot)^{Y\times Z} \approx (\cdot)^Z \circ (\cdot)^Y$. Luego, para $X \in ObA$ se tiene que $(X)^{Y\times Z} \approx (X^Y)^Z$

2. Como $(\cdot)^Y$ es un funtor adjunto, preserva límites por lo tanto $(\prod X_\lambda)^Y \approx \prod (X_\lambda)^Y$

3. De manera similar al inciso anterior, el funtor exponencial contravariante que va de $\mathbf{A}^{op}$ a **A** preserva productos, por lo tanto $X^{\coprod Y_\lambda} \approx \prod (X)^{Y_\lambda}$

4. Se sigue de la equivalencia 7. $\Leftrightarrow$ 1. de la proposición anterior.

□

Observación 10.1. **Top** no es cartesianamente cerrada. Las subcategorías plenas de **Top**, que consisten de todos los espacios que satisfacen cada condición de abajo, son categorías topológicas cartesianamente cerradas:

1. espacios generados finitamente,
2. espacios secuenciales,
3. espacios (Hausdorff compactos)-generados

Las siguientes también son categorías topológicas cartesianamente cerradas:

4. La categoría **Simp** que consiste de todos los complejos simpliciales y morfismos simpliciales.

1. La categoría **Born** que consiste de todos los espacios bornológicos y morfismos acotados.

Las investigaciones de categorías cartesianamente cerradas comenzaron con la idea de obtener *"categorías convenientes"* para la topología algebraica, teoría de álgebra topológica, etc., y fueron continuadas por muchos autores (Nel, 1976). La categoría de todos los espacios (Hausdorff compactos)-generados es una categoría topológica cartesianamente cerrada pero no es cerrada bajo productos finitos en **Top**. Así que no podemos decir que este tipo de categorías sean convenientes. H. Herrlich (1983) demostró que no existen subcategorías *"suficientemente convenientes"* en **Top**. Sin embargo, existen muchos tipos de categorías convenientes contenidas en **Top** y de esta manera se obtienen muchos resultados interesantes (ver R. Herrlich y Strecker (1986)).

Appendices

Apéndice A

Funtores adjuntos

Definición A.1. Un funtor $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ es *adjunto* si se cumple que:
Para cada $\mathbf{A}$-objeto A, existe $f : A \to G(B)$ un $\mathbf{A}$-morfismo con B un $\mathbf{B}-$objeto tal que, si $f' : A \to G(B')$ es un $\mathbf{A}-$morfismo con B' un $\mathbf{B}$-objeto entonces existe un único $\mathbf{A}$-morfismo $\hat{f} : B \to B'$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G(B) \arrow[d, "G(\hat{f})"] \\
& G(B')
\end{tikzcd}$$

Dual. Funtor co-adjunto.

Ejemplo 19. Una subcategoría $\mathbf{B}$ de una categoría $\mathbf{A}$ es (co)reflexiva en $\mathbf{A}$ si y sólo si la inclusión $E : B \to A$ es un funtor (co-)adjunto.

Proposición A.2. *Si $G_1 : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ y $G_2 : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ son funtores adjuntos entonces $G_1 \circ G_2 : C \to A$ también lo es.*

Demostración. Sea A un $\mathbf{A}$-objeto; por ser G_1 adjunto, existe $f : A \to G_1(B)$ un $\mathbf{A}$-morfismo con B un $\mathbf{B}$-objeto que cumple la Definición A.1; luego para B, por ser G_2 adjunto, existe $g : B \to G_2(C)$ con C $\in$Ob$\mathbf{C}$ que cumple la Definición A.1. Definamos $h = G_1(g) \circ f : A \to G_1 \circ G_2(C)$ y veamos que cumple también con la definición. Sea $h' : A \to G_1 \circ G_2(C')$ un $\mathbf{A}$-morfismo con C' $\in$Ob$\mathbf{C}$, entonces $G_2(C')$ $\in$Ob$\mathbf{B}$ por lo que existe $\hat{f} : B \to G_2(C')$ tal que $h' = G_1(\hat{f}) \circ f$. Luego, para $\hat{f} : B \to G_2(C')$ existe $\hat{h} : C \to C'$ $\mathbf{C}$-morfismo tal que $\hat{f} = G_2(\hat{h}) \circ g$, entonces $G_1(\hat{f}) = G_1 \circ G_2(\hat{h}) \circ G_1(g)$. Por lo que $h' = G_1(\hat{f}) \circ f = G_1 \circ G_2(\hat{h}) \circ G_1(g) \circ f = G_1 \circ G_2(\hat{h}) \circ h$. En diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h'"'] & G_1(B) \arrow[d, "G_1(\hat{f})"] \\
& G_1 \circ G_2(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\hat{f}"'] & G_2(C) \arrow[d, "G_2(\hat{h})"] \\
& G_2(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "h'"'] & G_1(B) \arrow[r, "G_1(g)"] \arrow[dr, "G_1(\hat{f})"] & G_1 \circ G_2(C) \arrow[d, "G_1 \circ G_2(\hat{h})"] \\
& & G_1 \circ G_2(C')
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $G_1 \circ G_2$ es funtor adjunto. $\square$

Proposición A.3. *Los funtores adjuntos preservan límites.*

Demostración. Sea $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ un funtor adjunto, sea $D : \mathbf{I} \to \mathbf{D}$ un diagrama, y sea $(L, (l_i : L \to D_i)_{i \in I})$ un límite para D. Entonces, para cada $a : i \to j$ $\in$Mor$\mathbf{I}$, $D(a) \circ l_i = l_j$ luego

$(G(D(a))\circ(G(l_i)) = G(l_j)$ así $(G(L),(G(l_i))_{i\in I})$ es fuente natural para $G\circ D$. Sea $(S,)(f_i : S \to G(D_i))$ una fuente natural para $G \circ D$. Para S un **A**-objeto; existe $u : S \to G(B)$, con B un **B**-objeto, que cumple con la Definición A.1 por ser G adjunto; entonces, para cada $i \in I$, existe única $\hat{f}_i : B \to D_i$ tal que $f_i = G(\hat{f}_i) \circ u$; luego $f_j = G \circ D(a) \circ f_i = G \circ D(a) \circ G(\hat{f}_i) \circ u = G(D(a) \circ \hat{f}_i) \circ u$, por la unicidad de $\hat{f}_i$ se tiene que $\hat{f}_j = D(a) \circ \hat{f}_i$; por lo que $(B,(\hat{f}_i)_{i\in I})$ es fuente natural para D. Por lo tanto existe morfismo conector $\psi : B \to L$ tal que $\hat{f}_i = l_i \circ \psi$ para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & D_i \arrow[d, "D(a)"] \\ & D_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u"'] & G(D_i) \\ G(B) \arrow[ur, "G(\hat{f}_i)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "\hat{f}_i"] \arrow[dr, "\hat{f}_j"'] & D_i \arrow[d, "D(a)"] \\ & D_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\hat{f}_i"] \arrow[d, "\psi"'] & D_i \\ L \arrow[ur, "l_i"'] & \end{tikzcd}$$

Definiendo $\varphi = G(\psi) \circ u : S \to G(L)$ es el morfismo conector que buscamos, ya que $f_i = G(\hat{f}_i)\circ u = G(l_i)\circ G(\psi)\circ u = G(l_i)\circ\varphi$. Además, de existir $\gamma : S \to G(L)$ tal que $f_i = G(l_i)\circ\gamma$; por ser G adjunto, existe única $\hat{\gamma} : B \to L$ tal que $\gamma = G(\hat{\gamma})\circ u$, así $f_i = G(l_i)\circ G(\hat{\gamma})\circ u = G(l_i\circ\hat{\gamma})\circ u$, por la unicidad de $\hat{f}_i$ se tiene que $\hat{f}_i = l_i \circ \hat{\gamma}$ y por la unicidad de ψ se tiene que $\psi = \hat{\gamma}$, por lo tanto $\varphi = \gamma$.

□

Referencias

Adamek, J., Herrlich, H., y Strecker, G. E. (2009). *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Mineola, N.Y.

Bradley, T.-D., Bryson, T., y Terilla, J. (2020). *Topology: A Categorical Approach*. Cambridge, MA, USA: MIT Press.

Glicksberg, I. (1993). Stone-Čech Compactifications of Products. En M. Katětov y P. Simon (Eds.), *The Mathematical Legacy of Eduard Čech* (pp. 369–382). Basel: Birkhäuser. doi: 10.1007/978-3-0348-7524-0_6

Herrlich, H. (1974, junio). Topological functors. *General Topology and its Applications*, *4*(2), 125–142. Descargado 2023-03-13, de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016660X74900166 doi: 10.1016/0016-660X(74)90016-6

Herrlich, H. (1976). Initial Completions. *Mathematische Zeitschrift*, *150*, 101–110. Descargado 2023-03-09, de https://eudml.org/doc/172409

Herrlich, H. (1983, mayo). Are there convenient subcategories of Top? *Topology and its Applications*, *15*(3), 263–271. Descargado 2023-03-09, de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166864183900573 doi: 10.1016/0166-8641(83)90057-3

Herrlich, R., y Strecker, G. E. (1986, enero). Cartesian Closed Topological Hulls as Injective Hulls. *Quaestiones Mathematicae*, *9*(1-4), 263–280. Descargado 2023-03-09, de https://doi.org/10.1080/16073606.1986.9632116 (Publisher: Taylor & Francis _eprint: https://doi.org/10.1080/16073606.1986.9632116) doi: 10.1080/16073606.1986.9632116

Nakagawa, R. (1989). Categorical Topology. En *Topics in General Topology* (Vol. 41, pp. 563–622). Japón.

Nel, L. D. (1976). Cartesian closed topological categories. En E. Binz y H. Herrlich (Eds.), *Categorical Topology* (pp. 439–451). Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/BFb0080870

Salicrup, G. (1978). *Epireflexividad y conexidad en categorías concretas topológicas* (Tesis doctoral). Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.

Walker, R. C. (Ed.). (1974). *The Stone-Čech Compactification*. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-61935-9

Índice alfabético