



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ESTUDIO DE UNA INTERVENCIÓN EN LÍNEA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA DOCENTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. LUIS TUXTLA ANDRADE

DIRECTOR DE TESIS
DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA

PUEBLA, PUE. mayo de 2024



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LUIS TUXTLA ANDRADE

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 12 de diciembre de 2023, con la tesis titulada:

"ESTUDIO DE UNA INTERVENCIÓN EN LÍNEA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA
DOCENTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR "

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 20 de mayo de 2024

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.



DRA' LAHR/I' agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

ÍNDICE

RESUMEN.....	4
PALABRAS CLAVE	4
INTRODUCCIÓN.....	5
Capítulo 1.....	11
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	11
1.1 Objetivos.....	11
1.2 Preguntas de investigación.....	11
1.3 Justificación.....	11
Capítulo 2	14
2. MARCO TEÓRICO.....	14
2.1 La modelación matemática.....	14
2.1.1 El ciclo de modelación matemática.....	15
2.2 Revisión de literatura	17
2.3 Dificultades al implementar la modelación matemática.....	21
2.4 Recomendaciones para la planeación de una intervención educativa	21
Capítulo 3.....	23
3. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	23
3.1 Paradigma de investigación.....	23
3.2 La metodología de la ingeniería didáctica.....	24
3.2.1 Sobre los análisis preliminares	25
3.2.2 Diseño y análisis a priori	27
3.3 Descripción de los sujetos de estudio	36

3.4 Descripción de la intervención de modelación matemática y su implementación.....	36
3.4.1 Primera sesión.....	39
3.4.2 Segunda sesión.....	39
3.4.3 Tercera Sesión	45
Capítulo 4.....	50
4. RESULTADOS Y ANÁLISIS.....	50
4.1 Análisis de resultados de las actividades	50
4.1.1 Análisis de la primera actividad	50
4.1.2 Análisis de la segunda actividad.....	65
4.1.3 Análisis de la tercera actividad.....	80
4.1.4 Discusión de resultados	89
5. CONCLUSIONES.....	98
5.1 Dirección hacia el futuro	99
ANEXO.....	100
BIBLIOGRAFÍA.....	107

RESUMEN

Reportamos el análisis de una intervención educativa de modelación matemática en línea para docentes de matemáticas de nivel medio superior, buscando potenciar sus habilidades y competencias en este ámbito. El objetivo es analizar las producciones de dos docentes al resolver y proponer actividades de modelación matemática. En la planeación de la investigación se utilizó la Ingeniería Didáctica de Artigue (2020) y el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2006). Esta intervención fue realizada en 3 sesiones de 180 minutos cada una, aprovechando las herramientas tecnológicas que ofrece el ambiente en línea para enriquecer la experiencia educativa y contribuir a la formación continua de profesores de matemáticas. Se identificaron áreas específicas de mejora, en la instrucción de fases de modelación, particularmente en la transición entre el mundo real y matemático, así como dificultades para proponer ejemplos propios de modelación.

PALABRAS CLAVE

Modelación matemática, Ciclo de modelación, Docentes de matemáticas de nivel medio superior.

INTRODUCCIÓN

El estudio, descripción y predicción de fenómenos de la realidad es el punto fundamental de la ciencia, por lo cual muchos investigadores han centrado sus trabajos en esta actividad, construyendo teorías y modelos que describan, predigan y ayuden a solucionar problemas del mundo real (Villa-Ochoa et al. 2008). La modelación matemática es una actividad que permite la creación de modelos matemáticos para representar y predecir fenómenos o situaciones del mundo real. Algunos investigadores consideran que este campo de investigación, gracias a sus ventajas en el proceso de construcción de conceptos matemáticos, debe formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas (Doerr, 2007; Lesh & Doerr, 2003a, 2003b)

Autores como Correa et al. (2015), que trabajaron con formadores de profesores en universidades colombianas, sostienen que los docentes de matemáticas deben estar equipados con conocimientos teóricos que les permitan incorporar la modelación en su enseñanza. La modelación matemática permite que el estudiante integre los conocimientos aprendidos en el aula a situaciones que pueden presentarse en su vida diaria y en su práctica profesional, pasando del conocimiento matemático puramente teórico a la habilidad de aplicación de dicho conocimiento en la resolución de problemáticas reales.

Al examinar la revisión histórica realizada por Schukajlow et al. (2018)(Schukajlow et al., 2018) sobre la investigación relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, se observa que la mayoría de los estudios se centran en la evaluación de los resultados cognitivos y afectivos de la modelación. Si bien ha habido un crecimiento significativo en la investigación del dominio afectivo en la última década, es importante destacar que existe una escasez notable de investigaciones que aborden específicamente los enfoques de enseñanza en la modelación matemática. Esta brecha en el conocimiento subraya la necesidad de investigaciones adicionales en este ámbito.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004) señalan que la modelación matemática es una actividad que se puede trabajar en todos los niveles de enseñanza, desde primaria hasta licenciatura. En su estudio ellos trabajaron con docentes de secundaria y bachillerato mediante cursos de formación continua para saber las principales dificultades de los profesores con el método de modelación. Encontraron que la dificultad principal está centrada en la falta de formación de los profesores ya que rara vez

se da una orientación de modelación o cómo utilizarla en el aula de clases. También se menciona la falta de interpretación del contexto (ya en la enseñanza tradicional rara vez se le presenta a los alumnos situaciones-problema que requieran una interpretación), cursos de modelación insuficientes y breves, escasez de referencias bibliográficas y trabajos sobre modelación en la enseñanza, falta de orientación y confianza en los profesores para implementar la modelación, falta de disponibilidad de los profesores para estudiar y orientar a sus alumnos en proyectos de modelación, falta de tiempo para realizar una planificación adecuada, entre otros.

Lingefjård (2007), nos menciona que para el caso sueco, el modelado matemático no empezó a aparecer en el currículum sino hasta mediados de 1990 y para 2003 solo 4 de 26 universidades que investigó tenían cursos de modelación matemática en su currículum de formación de docentes aunque en dos de ellas eran cursos elegibles. En muchas ocasiones, la razón principal de ello fue que el personal docente no tenía conocimiento sobre cómo aplicar la modelación matemática y algunos creían que la modelación es por naturaleza una materia interdisciplinaria y no la consideraban como una parte genuina de las matemáticas tradicionales. Los docentes no contaban con los conocimientos necesarios para enseñar la modelación matemática y aparte mostraban una resistencia a ello.

Los trabajos de Biembengut & Hein y Lingefjård coinciden en el mismo factor, la enseñanza de la modelación matemática aún no es una práctica común en la formación de docentes de matemáticas, por lo que se necesita instruir a los maestros en ella para que la entiendan y sientan la confianza de aplicarla en su aula de clases. Dada esta problemática, surge el interés por enseñar a los docentes de matemáticas a enfrentar actividades de modelación para que la conozcan, aprendan lo que es un ciclo de modelación y sean capaces de llevar este conocimiento a sus aulas.

Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2016) realizaron un estudio significativo que se centra en la evolución de la comprensión de la modelización matemática entre los futuros profesores. Implementaron un módulo de modelización dentro de un curso de currículum en un programa de preparación de profesores de secundaria, utilizando lecturas, análisis de estándares, actividades de modelización y reflexiones. Aunque los participantes no tenían experiencia previa en modelización matemática, el módulo les permitió desarrollar una comprensión profunda del proceso iterativo de modelización, conectando suposiciones y validaciones a situaciones cotidianas. Los resultados del estudio destacaron la transformación en la percepción de los futuros docentes sobre la modelización

matemática, subrayando la importancia de la integración efectiva de la modelización en la educación matemática.

Sağiroğlu y Karataş (2018) exploraron las competencias de los profesores de matemáticas de secundaria en Turquía para crear y aplicar actividades de modelado en el aula. Utilizando un enfoque cualitativo y un estudio de caso, los profesores fueron capacitados y observados mientras aplicaban actividades de modelado diseñadas. Los resultados revelaron una baja competencia en la creación de eficiencia en el modelado y desafíos significativos en la implementación. Concluyeron planteando, la necesidad de una formación más profunda y estructurada para mejorar la eficacia de los profesores en la enseñanza de la modelación matemática.

Un estudio notable realizado por Parra-Zapata, M.M. et al. (2018) empleó una metodología cualitativa, donde 17 profesores en Colombia se involucraron en tareas de modelación de manera sincrónica y asincrónica utilizando herramientas como Google Drive y WizIQ. Las actividades se centraron en la exploración y análisis de expresiones algebraicas, interacción y debate, y la comunicación de desarrollos matemáticos. Sus hallazgos revelaron que la participación efectiva trasciende la visibilidad y se enfoca en acciones concretas, relaciones entre los participantes y la calidad del contenido compartido. Este estudio subraya la necesidad de estrategias innovadoras para fomentar una participación rica y significativa en la formación online de docentes en modelación matemática.

En su artículo, Zaldívar-Rojas et al. (2017), nos mencionan lo esencial que la tecnología se ha vuelto para las estrategias educativas, ya que vivimos en la sociedad de la información y la comunicación. Los beneficios tecnológicos han impactado también en la modelación matemática, algunos investigadores la han incorporado también como parte importante del proceso en las aulas de clase. Citando a Rodríguez Gallegos & Quiroz Rivera, (2016) nos mencionan los tres momentos importantes en los que la tecnología puede apoyar el proceso de modelación matemática: al plantear la situación real (pues ayuda a la comprensión del problema), en la formación del modelo matemático (ya que proporciona herramientas para aproximarse a la creación del modelo e incluso comprender la respuesta) y al momento de relacionar los resultados matemáticos con la situación real (permite analizar la respuesta e identificar errores).

Ledezma et al. (2023) presenta una experiencia educativa de gran relevancia, enfocada en docentes de matemáticas en servicio del sistema escolar panameño, dentro del marco del Curso de Diplomado en Educación Matemática Aplicada a la Educación Secundaria. Uno de los principales hallazgos de esta investigación fue la tendencia de los participantes a considerar un problema de modelado como resuelto una vez que obtienen resultados matemáticos del modelo, sin validar estos resultados en el contexto real. Además, Ledezma et al. sugieren que dos sesiones no son suficientes para que los docentes adquieran competencias de modelado por sí mismos y para reflexionar sobre cómo implementar este proceso en su práctica educativa. También, se propuso reformular los aspectos didácticos del submódulo, dividiendo el proceso de modelado en fases y proponiendo tareas que trabajen en sub-competencias específicas de modelado. Con estos resultados sabemos que debemos tener más de dos sesiones en nuestra intervención y que es necesario trabajar con un ciclo de modelación matemática que incluya sub-competencias específicas de modelado.

Con lo anterior resulta de nuestro interés incluir la tecnología en nuestro proyecto, ya que brinda un apoyo al modelado matemático para la comprensión y resolución de las actividades. Además, al hacer uso de la tecnología podemos incluir la opción de laborar en línea, lo que permitirá trabajar desde cualquier ubicación y adaptarse a los horarios individuales, lo que facilita la participación de personas con compromisos laborales, familiares o académicos.

Dado el interés en capacitar a los docentes de matemáticas en la resolución de actividades de modelación, centrándome en el contexto de la educación media superior, que es donde me desempeño profesionalmente, y considerando trabajar bajo la modalidad en línea, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo influye una intervención en línea en el desarrollo de las habilidades de modelación matemática de docentes del Nivel Medio Superior?

La intervención en línea es una forma de trabajo eficaz y accesible para abordar la falta de conocimiento en modelación matemática. Su facilidad de replicación permite llegar a un amplio público, brindando comodidad y flexibilidad a los participantes, quienes pueden aprender desde cualquier lugar y en sus propios horarios. Además, su simplicidad de uso y acceso a recursos educativos y herramientas digitales facilitan la participación y respaldan el proceso de modelación.

Nuestro estudio también servirá de referente en la investigación de la enseñanza de la modelación matemática y en la aplicación de intervenciones en línea.

El objetivo de nuestra investigación es analizar las producciones de dos docentes del nivel medio superior, al resolver y posteriormente proponer actividades de modelación matemática en una intervención en línea.

Esta investigación se realizará bajo el paradigma socio-crítico definido por Arnal et al. (1994), ya que buscamos un cambio social (implementación de la modelación matemática en las aulas de clase) a partir de la participación de los miembros de su comunidad (docentes trabajando para influenciar y transformar a sus colegas en el ámbito de la enseñanza matemática). Este cambio social se podrá observar cuando los docentes incluyan actividades de modelación en sus aulas tras aprender sobre ella en la intervención.

Para el desarrollo de esta investigación se siguieron los pasos de la ingeniería didáctica (ID) propuestos por Artigue (2020), ya que nos proporciona una metodología de investigación para el diseño y experimentación controlada de secuencias didácticas. Esta metodología nos ayudará en la planeación y análisis de las actividades que se propondrán en la intervención. Para la recolección de datos se desprende de las actividades que los docentes hagan como producto de la intervención. Como parte del análisis a posteriori, propio de la metodología de la ID, tendremos también nuestro análisis de datos.

La estructura de la intervención se divide en tres sesiones. Durante la primera sesión se realiza un análisis de los ciclos de modelación matemática presentes en la literatura. Se enfoca principalmente en el ciclo propuesto por Borromeo-Ferri, R. (2006), ya que proporciona información de la estructura cognitiva integral de los participantes que abordan tareas de modelación. Este ciclo considera varios pasos en el procesamiento de información y en la aplicación de conocimiento extra-matemático al resolver situaciones del mundo real. En las sesiones posteriores, los docentes participantes resolverán actividades de modelación y luego crearán sus propios problemas de modelado. Tras completar la intervención, se llevará a cabo un análisis detallado de las respuestas a estas actividades, utilizando los pasos del ciclo de Borromeo-Ferri.

La presente investigación consta de los siguientes apartados. En el capítulo 1, titulado “planteamiento del problema”, se retoman las preguntas de investigación, los objetivos y se da la

justificación. En el capítulo 2, “marco teórico”, se presenta la modelación matemática y se describe el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri, también se da un pequeño análisis a las dificultades y obstáculos reportados en la literatura sobre la implementación de la modelación matemática, se hace un repaso a lo que se ha trabajado en la literatura en tema de formación docente en modelación matemática y para finalizar se mencionan los consejos de Jordán Padrón et al. (2011) para la realización de una intervención educativa.

En el capítulo 3, llamado “diseño de investigación”, se describe el paradigma empleado, los sujetos de estudio, la metodología de la ingeniería didáctica, se realiza el análisis a priori y se da una descripción general de la intervención. Aquí se presenta la planeación de las sesiones y se muestran las actividades a realizar.

En el capítulo 4 de “resultados y análisis” se proporcionan los datos recopilados durante la intervención para realizar su análisis a posteriori, esto se realizará al compararlos con los datos del análisis a priori llevado a cabo en el capítulo anterior. También se discuten, las fases del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri, donde los docentes tuvieron mayor dificultad.

Para finalizar, en el capítulo 5, titulado “Conclusiones” damos una evaluación general de este estudio para poder responder la pregunta de investigación y evaluar si se cumplió nuestro objetivo.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Objetivo

- Analizar las producciones de dos docentes del nivel medio superior, al resolver y posteriormente proponer actividades de modelación matemática en una intervención en línea.

1.2 Pregunta de investigación

- ¿Cómo influye una intervención en línea en el desarrollo de las habilidades de modelación matemática de dos docentes del Nivel Medio Superior?

1.3 Justificación

Actualmente se tiene la idea que los profesores de matemáticas deben tener las herramientas teóricas para aplicar la modelación dentro del aula de clases con el fin de dar a las matemáticas un rol para describir/solucionar/prescribir/controlar aspectos del contexto real de los estudiantes (Correa et al. (2015)). El docente debe ser capaz de guiar a los estudiantes en la elección de problemas, en cómo abordar la situación de modelación, en cómo evaluar sus resultados y en seguir los pasos de un ciclo de modelación teniendo siempre bien en claro qué es lo que se busca con ello y la importancia de aplicar esta actividad en la vida diaria.

La modelación matemática es una práctica importante dentro del currículum en cualquier nivel ya que es una actividad en la que podemos notar el transfer cognitivo que tienen los estudiantes desde los conceptos teóricos vistos en clase hacia su implementación en situaciones reales, sin embargo, esta actividad es muchas veces ignorada debido a la falta de formación y conocimiento de los profesores en este tema, por lo que se hacen necesarios los trabajos dedicados a su difusión, primero para el conocimiento y desarrollo de habilidades en los docentes y posteriormente para que ellos lo transmitan a sus alumnos.

Son varios los factores que dificultan la integración de la modelación matemática en la práctica escolar, entre ellos están los horarios de clase, los currículos, el alto número de alumnos que cada profesor debe atender, falta de recursos y material, pero sobre todo la falta de formación de profesores en el tema, lo que hace que los docentes no conozcan qué es la modelación matemática

y por consiguiente no empleen esta actividad en la enseñanza formal (M. S. Biembengut & Hein, 2004).

Es por la falta de conocimiento que tienen los docentes sobre la modelación que en este trabajo se propone una intervención en la cual se pueda dar una formación a los profesores para conocer, transitar y aplicar la modelación matemática. Se dará principal atención al ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri, ya que se toma con una perspectiva cognitiva más completa, añadiendo los conocimientos extramatemáticos que se ponen en juego al analizar la situación real. Además, cumple con la característica de incluir sub-competencias específicas de modelado que sugirió Ledezma et al. (2023), las cuales son la capacidad para comprender y analizar situaciones del mundo real y traducirlas a lenguaje matemático, además de habilidades para verificar los datos obtenidos a través del modelado matemático. Estas sub-competencias se podrán analizar gracias a las actividades de “Entendiendo la tarea”, “Simplificar/estructurar la tarea”, “Matematizando” y “Validando”, que forman parte del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri, específicamente entre los nodos del ciclo.

Se trabajará con proyectos abiertos para que los profesores sean libres de elegir la problemática de su interés y se les incitará a que ocupen ese mismo método para con sus estudiantes ya que esta libertad de elección hace que se tenga un mayor interés en la práctica de modelación y por consiguiente una mayor motivación e inmersión en la tarea.

Con el fin de dar una mejor accesibilidad a los docentes para cursar la intervención se ha optado por llevarlo a cabo mediante reuniones en línea en lugar de hacerlo de forma presencial ya que esta opción nos brinda ventajas en términos de:

- Accesibilidad
- Flexibilidad de horarios
- Mayor interacción y participación
- Grabación y disponibilidad de material
- Sostenibilidad ambiental y ahorro de costos

Realizar nuestro proyecto en línea ofrece numerosas ventajas en comparación con llevarlo a cabo de forma presencial. Al tener acceso a equipos con conexión a Internet y software especializado, el flujo de trabajo en la intervención se verá significativamente mejorado. Por el

contrario, en un entorno presencial, podríamos encontrarnos con dificultades para acceder a los equipos de cómputo, lo que complicaría el desarrollo del proyecto. Gracias a esta elección contamos con ventajas como:

- Acceso a datos reales en tiempo real. Debido a que la modelación matemática parte de la realidad y toma datos de ella, los docentes podrán acceder a datos verídicos en internet de forma inmediata, así como buscar ideas o ejemplos para guiarse en la creación o resolución de las actividades.
- Acceso a recursos y herramientas digitales. Gracias al trabajo desde el equipo de cómputo propio de cada docente podemos trabajar con el Software GeoGebra y otras aplicaciones, lo que nos permitirá resolver problemas de forma más rápida y eficiente.
- Resolución de problemas más complejos. El uso de softwares y aplicaciones matemáticas permiten el trabajo de actividades más complejas realizando cálculos más rápidos y precisos.
- Retroalimentación inmediata. El software GeoGebra y demás aplicaciones proporcionan retroalimentación inmediata para corregir errores y comprender los conceptos de forma más rápida y eficiente.

En Schönbrodt et al. (2022) podemos encontrar una investigación en la cual se llevaron a cabo actividades de modelación matemática con herramientas digitales y plataformas de comunicación, encontrando que la integración de estas herramientas en actividades de modelización matemática en entornos virtuales mejora la flexibilidad, accesibilidad y eficacia de la instrucción. Estas herramientas permiten una interacción en tiempo real, facilitan la colaboración entre los participantes y ofrecen recursos interactivos que enriquecen la experiencia de aprendizaje. Por lo tanto, la elección de realizar una intervención en línea se ve potenciada por la capacidad demostrada de las herramientas digitales para optimizar la enseñanza y el aprendizaje en entornos educativos contemporáneos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Modelación matemática

La modelación matemática permite describir fenómenos del mundo extramatemático por medio de la matemática. Cuando se matematiza una situación del mundo real o la vida cotidiana, se dice que se ha creado un modelo matemático. La modelación matemática, mediante la creación de modelos, permite describir y predecir fenómenos reales. “Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías” (Biembengut & Hein, 2004, p. 106)

En términos generales, el fin de la modelación matemática según Blum y Borromeo (2009) (p. 47) es:

- Ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo
- apoyar el aprendizaje de las matemáticas (motivación, formación de conceptos, comprensión, retención)
- contribuir a desarrollar diversas competencias matemáticas y actitudes adecuadas
- contribuir a una imagen adecuada de las matemáticas.

La modelación matemática está siendo defendida en varios países como método de enseñanza de las matemáticas ya que permite al estudiante aprender la matemática aplicada a otras áreas del conocimiento y desarrolla su capacidad para interpretar, formular y solucionar situaciones problema (M. Biembengut & Hein, 1997).

Un aspecto crucial en la formación de docentes en modelación matemática es el desarrollo de la competencia en modelado matemático. Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003) definen esta competencia como la capacidad de un individuo para navegar de manera independiente y decidida a través de todas las etapas de un proceso de modelado matemático. Esto implica no solo la comprensión teórica de los conceptos matemáticos, sino también la habilidad para aplicarlos en la resolución de problemas complejos del mundo real. La incorporación de esta competencia en la

formación docente es esencial para habilitarlos con las herramientas necesarias que fomenten en sus estudiantes un aprendizaje matemático profundo y aplicado.

2.2.1 El ciclo de modelación matemática

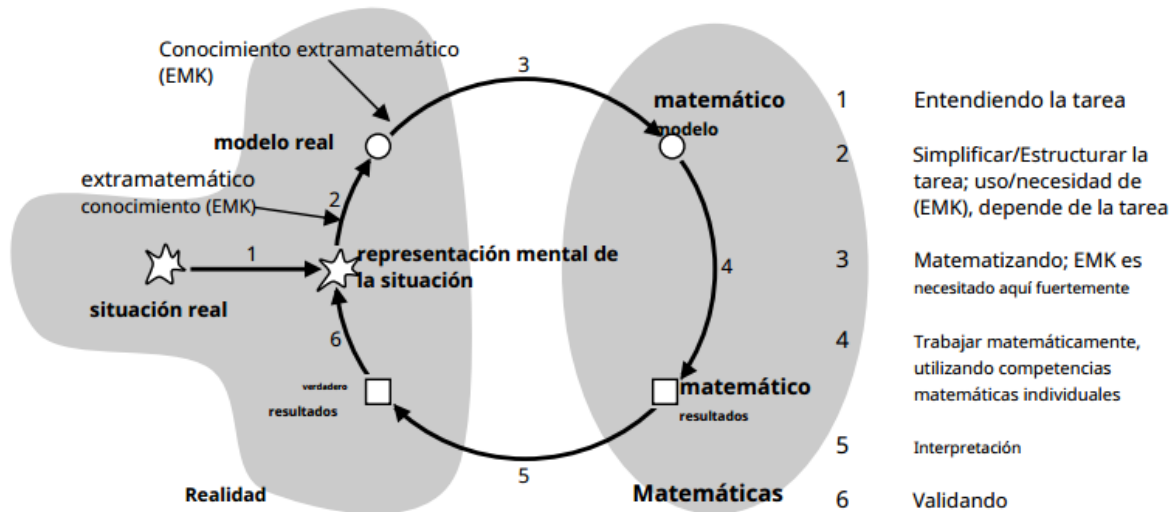
La modelación matemática establece un puente que relaciona fenómenos del mundo real y la vida cotidiana (mundo extramatemático) con la matemática. La situación real se simplifica hacia un modelo real que, luego se matematiza dando lugar al modelo matemático. Esto permite realizar el trabajo matemático que, no solo describe la situación estudiada, sino que también da lugar a formular predicciones.

El proceso de modelación matemática inicia en el mundo real, toma como punto intermedio a la matemática y regresa al punto de partida. Esto es conocido como ciclo de modelación matemática. Existen diferentes ciclos de modelación matemática en la literatura, que dependen de las direcciones y enfoques que le da cada autor. Para nuestro estudio se ocupará el ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri en 2006. En comparación con otros autores, en este ciclo de modelación se incluye la fase de la Representación Mental de la Situación (MRS por sus siglas en inglés) pues se desarrolla bajo una perspectiva cognitiva más completa, tomando en cuenta un análisis de los microprocesos a nivel individual (nos referimos a un microproceso como la acción y pensamiento específico que un individuo realiza durante el proceso de modelado). Esta diferencia en el ciclo de Borromeo-Ferri toma en cuenta la idea de que la comprensión de la situación es un paso crucial en el proceso de modelado matemático y puede influir en la construcción y resolución del modelo matemático. Es por esto que en este trabajo se ha decidido tomar como base este ciclo de modelación en lugar de los otros propuestos en la literatura.

El ciclo de modelación de Borromeo-Ferri se muestra en la figura 1:

Figura 1

Ciclo de modelación bajo una perspectiva cognitiva



Fuente: Ferri, R. B. (2006)

En esta figura se muestra la realidad (mundo extramatemático) y la matemática vinculados a través de seis nodos y seis actividades conectivas que permiten el tránsito de uno a otro.

1. Dentro del contexto extramatemático se debe entender la tarea, por lo que partimos ubicando y delimitando un fragmento de la realidad o la situación problema que se quiera representar, a partir de ello el individuo comprende el problema y forma una representación mental de la situación, la cual se entiende y finalmente se simplifica para alcanzar el modelo real de la situación. En el paso de la representación mental al modelo real involucra conocimientos extramatemáticos.
2. Una vez entendida la tarea se simplifica y estructura la tarea. Se identifican las variables que se relacionan con el problema y se definen sus unidades y dimensiones. El modelo real se construye mayormente a nivel interno del individuo, las declaraciones verbales de este nos dan idea de las representaciones externas que representan el modelo real tales como bocetos o fórmulas.
3. Para crear el modelo matemático el sujeto matematiza la situación, muchas veces haciendo uso del conocimiento extramatemático, es en esta transición que pasamos del mundo

extramatemático a la matemática como tal. Se selecciona el tipo de modelo matemático que mejor se ajusta a las variables identificadas y al problema en general.

4. En la obtención del modelo y en la transición a los resultados matemáticos el individuo hace uso de sus habilidades y competencias matemáticas. El modelo matemático debe constar de relaciones matemáticas (inecuaciones, ecuaciones, funciones, etc.) que relacionan a las variables que describen la situación real. A partir del modelo creado el sujeto obtiene resultados provenientes de la matemática que tienen que ser interpretados a resultados reales, regresando así al mundo extramatemático del cual partimos.
5. Los resultados son discutidos de forma que tengan coherencia con la realidad, dando lugar a resultados reales. Para interpretar estos resultados el individuo puede hacerlo de forma intuitiva (más inconsciente) al intentar encajarlos con el propio marco de experiencias personales o puede basarse en el conocimiento (más consciente) de acuerdo con sus conocimientos extramatemáticos (Ferri, 2006).
6. En este último paso, se analizan los resultados y se interpretan en relación con el problema original.

Estos seis pasos son un marco general que puede ser modificado en función de las necesidades y requisitos específicos de cada problema y modelo matemático. Sin embargo, esta metodología proporciona una guía estructurada y una estrategia para abordar problemas complejos de manera sistemática y rigurosa.

Para nuestra investigación consideramos que, un individuo ha realizado exitosamente un ciclo de modelación matemática, si ha construido su modelo real, partiendo de la realidad, lo ha matematizado para crear su modelo matemático, recordando que en el mundo de las matemáticas solo existen entes de esta naturaleza, y finalmente ha retornado al contexto real para interpretar los resultados obtenidos desde la perspectiva matemática.

2.2 Revisión de literatura

Este trabajo se propone encontrar un método para la formación de docentes en modelación matemática, por lo que es esencial revisar los trabajos previos que han explorado este campo desde diferentes perspectivas. Un estudio particularmente relevante es el realizado por Parra-Zapata,

M.M. et al. (2018) que se centra en la participación de los profesores en un ambiente de formación online. Esta investigación adopta un enfoque cualitativo, proporcionando una visión detallada de las dinámicas de enseñanza y aprendizaje en un entorno virtual. El análisis meticuloso de la participación, las interacciones y las contribuciones de los docentes en dicho estudio establece un punto de partida sólido para nuestra revisión de la literatura en este marco teórico.

En el estudio realizado por Parra-Zapata, M. M. et al. (2018), se empleó una metodología cualitativa detallada para analizar la participación de los profesores en un ambiente de formación online. Los docentes se dividieron en cinco grupos de trabajo y se embarcaron en tareas de modelación matemática, utilizando herramientas como Google Drive, Skype y Google Hangout para facilitar una interacción colaborativa. Los datos se recolectaron a través de videgrabaciones, anotaciones de estudiantes, chats y documentos compartidos, lo que permitió un análisis exhaustivo de la experiencia de aprendizaje. Las conclusiones del estudio revelaron que una participación rica en contenido es crucial en entornos de aprendizaje en línea y que los docentes deben ser provistos de experiencias diversas relacionadas con el conocimiento para revitalizar su formación. Estas conclusiones resaltan la importancia de una interacción significativa y el papel activo de los docentes en la modelación matemática.

En la investigación realizada por Chesler, J. (2019), se implementó un curso de modelado matemático estructurado como un experimento de diseño, donde la instrucción se adaptaba en tiempo real basada en las respuestas y dificultades de los estudiantes. Los participantes se involucraron en actividades en equipo en clase, preguntas de tarea/examen y un proyecto final en equipo, permitiendo una exploración profunda y práctica del modelado matemático. Se proporcionó instrucción en programación lineal, simulaciones estadísticas y matemáticas, y herramientas específicas de Microsoft Excel, ajustándose a las necesidades emergentes de los estudiantes.

Los resultados de la investigación de Chesler indicaron un aumento en el conocimiento y las habilidades de modelado matemático de los estudiantes, así como un creciente entusiasmo por enseñar esta disciplina. Sin embargo, se identificaron desafíos relacionados con el conocimiento matemático y pedagógico necesario para enseñar modelado matemático de manera efectiva. Se concluyó que un enfoque pedagógico adaptativo es esencial y se sugirió que retrasar la discusión

formal del ciclo de modelado podría ayudar a los estudiantes a apreciar la naturaleza intrincada y a menudo desordenada del modelado auténtico.

Sağiroğlu y Karataş (2018) realizaron un estudio cualitativo y de caso para evaluar las habilidades de los profesores de matemáticas de secundaria en la creación y aplicación de actividades de modelado matemático. Después de un entrenamiento intensivo de cuatro semanas, los docentes fueron equipados con habilidades y conocimientos esenciales, y se observó su implementación en el aula. Los resultados mostraron una baja competencia en la creación y eficiencia del modelado, con los profesores enfrentando desafíos significativos durante la implementación. Las conclusiones de este estudio son vitales para entender las brechas existentes en la formación docente en modelación matemática. Se observó que la mayoría de los profesores no seguían adecuadamente los pasos del modelado matemático y eran excesivamente directivos, o no proporcionaban la ayuda necesaria para asegurar que los estudiantes trabajaran de manera independiente. Estos hallazgos subrayan la necesidad de estrategias de formación más efectivas y estructuradas para mejorar la enseñanza del modelado matemático. También, sus datos son cruciales para la investigación actual, proporcionando un punto de referencia para evaluar y mejorar las prácticas de enseñanza existentes. La identificación de desafíos específicos y oportunidades de mejora puede informar el desarrollo de intervenciones educativas más efectivas, asegurando que los docentes estén equipados con las habilidades y conocimientos necesarios para facilitar eficazmente el aprendizaje basado en la modelación matemática.

Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2016) desarrollaron una investigación detallada para entender cómo los futuros docentes adquieren y desarrollan habilidades en modelización matemática. Implementaron un módulo educativo en un curso de currículo, compuesto por lecturas, análisis de estándares y actividades prácticas que fomentaban la reflexión y la colaboración entre los participantes. Este enfoque integral permitió a los futuros docentes sumergirse en el proceso de modelización, conectando teoría y práctica.

Los resultados de Anhalt y Cortez mostraron una transformación notable en la comprensión de los participantes sobre la modelización matemática. Los futuros docentes comenzaron a ver la modelización como un proceso iterativo, estrechamente vinculado a situaciones del mundo real. Este hallazgo enfatiza la necesidad de métodos de enseñanza efectivos en este campo,

contribuyendo significativamente a la literatura existente sobre la formación docente en modelización matemática.

En el contexto de la presente investigación, los hallazgos de Anhalt y Cortez ofrecen una base para explorar estrategias que puedan mejorar la capacidad de los docentes en formación en modelización matemática. Su trabajo resalta la importancia de un enfoque educativo bien estructurado y sugiere que una mezcla de lecturas, análisis y actividades prácticas puede ser clave para fomentar una comprensión profunda de la modelización matemática.

Una investigación que nos resulta de sumo interés es la de Ledezma et al. (2023), en la cual se llevó a cabo una experiencia educativa con docentes de matemáticas en servicio del sistema escolar panameño, específicamente en el Curso de Diplomado en Educación Matemática Aplicada a la Educación Secundaria. La investigación se centró en un submódulo sobre modelado matemático, donde se analizaron los procedimientos de resolución de problemas planteados a los docentes. Se observó que los participantes tendían a considerar un problema de modelado matemático como resuelto una vez que obtienen resultados matemáticos del modelo, sin validar estos resultados en el contexto real.

Ledezma et al. sugieren que dos sesiones no son suficientes para que los docentes adquieran competencias de modelado por sí mismos y para reflexionar sobre cómo implementar este proceso en su práctica educativa. También, se propuso reformular los aspectos didácticos del submódulo, dividiendo el proceso de modelado en fases y proponiendo tareas que trabajen en sub-competencias específicas de modelado.

Hidayat et al. (2022) señalan que en los últimos años, la investigación sobre el modelado matemático en educación ha puesto un fuerte énfasis en el componente cognitivo, utilizando métodos como exámenes escritos, proyectos y cuestionarios. Solo el 18% de los artículos de modelación matemática revisados en esta investigación provenían de América Latina, en específico 6% de Brasil, 6% de Argentina y 6% de Chile. De este artículo y de mi propia revisión de literatura pude encontrar que hay escasez de trabajos sobre modelación matemática dirigidos a docentes de preparatoria en México.

2.3 Dificultades al implementar la modelación matemática

Alunos autores alrededor del mundo han reportado las dificultades y obstáculos con los que se encuentran los docentes al implementar la modelación matemática en el aula de clase. Uno de estos trabajos los encontramos en Lingefjård (2007), quien reporta que para docentes universitarios en Suiza, el mayor obstáculo fue la resistencia de los profesores y las concepciones que éstos tenían sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza. Lo que nos hace reflexionar que para comenzar a divulgar la modelación matemática debemos primero tratar de hacer ver a los docentes con perspectivas más tradicionales y menos flexibles los beneficios de la modelación matemática y la importancia de involucrar al alumno en problemáticas de la vida cotidiana, cuya solución les permita poner en práctica sus conocimientos matemáticos.

Zaldívar-Rojas et al. (2017) nos dice que “una correcta aplicación de la modelación matemática en el aula demanda un docente preparado y convencido para tal acción (...) sin la debida formación y desarrollo continuo, el docente sería incapaz de desarrollar planeaciones didácticas basadas en la modelación matemática”. La principal dificultad que se encontró fue la falta de instrucción de los docentes en modelación matemática ya que nos menciona que esta sigue ausente en la mayoría de los currículos de la formación inicial de docentes.

Por su parte, M. S. Biembengut & Hein, (2004) nos enlistan algunos factores que dificultan la aplicación de la modelación matemática en clase, como lo son el currículo, el horario de clases, el número de alumnos por curso, la disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos entre otros. Con todo esto sigue recalando la falta de formación docente, que muy rara vez se da una orientación sobre cómo utilizar la modelación matemática en la enseñanza formal.

Ruiz-Higueras & García García, (2011) nos mencionan que “existe una escasez de investigaciones centradas en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en los procesos de modelación por parte de los docentes”. Con lo que se hace más visible la importancia de llevar a cabo proyectos de este tipo para formar profesores en las metodologías de los procesos de modelación.

2.4 Recomendaciones para la planeación de una intervención educativa

Para la planeación de la intervención se siguió a Jordán Padrón et al. (2011), en su artículo titulado “Elementos a tener en cuenta para realizar un diseño de intervención educativa”. En este artículo nos señalan 8 principios a tener en cuenta en la planeación de una intervención. Estos son: la necesidad de tener un conocimiento sólido y científico del entorno y las personas involucradas (principio de racionalidad), la aplicación continua y sistemática de todos los elementos del programa (principio de continuidad), la redacción clara y comprensible del plan (principio de univocidad y comprensibilidad semántica), la flexibilidad para realizar ajustes según sea necesario (principio de flexibilidad), la creatividad en la elaboración del programa (principio de variedad), la fundamentación realista en la realidad del entorno (principio de realismo) y la apertura a la participación de otras personas o entidades en el proceso de planificación (principio de participación).

Este artículo nos dice que la eficaz planificación de una intervención educativa requiere considerar distintos niveles y enfoques. Estos niveles incluyen la reflexión sobre la filosofía del programa, la obtención de datos relevantes sobre el entorno de intervención, la fijación de objetivos realistas y ajustados a las necesidades del grupo objetivo, la planificación de los recursos humanos, materiales y financieros disponibles, y la evaluación de los criterios de evaluación del programa.

También se nos habla sobre las fases en las que se divide el proceso de planificación de una intervención educativa. En la fase inicial, se realiza un análisis exhaustivo y sistemático del entorno social o ámbito de intervención para comprenderlo en su totalidad. Esta etapa se enfoca en el diagnóstico y la identificación de necesidades, la selección de datos relevantes y la fijación de objetivos claros. Durante la fase de ejecución, se establece un punto de partida, se diseña el programa con objetivos, contenidos, medios y métodos específicos, y se pone en práctica. Finalmente, en la fase de valoración, se evalúa el programa y su implementación, se analizan los resultados y se elabora un informe con conclusiones finales.

Capítulo 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección se describirá el paradigma de investigación, el método de la ingeniería didáctica, los sujetos de estudio, el diseño de la intervención, el método de análisis de datos y la entrevista semiestructurada.

3.1 Paradigma de investigación

Un paradigma de investigación es un sistema axiológico y funcional compartido por una comunidad científica. Los paradigmas son importantes ya que nos brindan un conjunto de valores, postulados, normas, creencias, formas de percibir y comprender la realidad y una metodología que nos sirve como punto de partida para guiar nuestra investigación. Cada paradigma se caracteriza por la forma que responde a cuatro aspectos fundamentales:

- ¿Cuál es la naturaleza de la realidad? (aspecto ontológico)
- ¿Cómo es la relación sujeto-objeto? (aspecto epistemológico)
- ¿Cómo se obtiene conocimiento? (aspecto metodológico)
- ¿Cómo intervienen los valores? (aspecto axiológico)

Para el desarrollo de esta investigación trabajaremos bajo el paradigma socio-crítico. De acuerdo con (Arnal et al. (1994)) el paradigma socio-crítico no es puramente empírico ni interpretativo, sino que sus contribuciones se originan “de los estudios comunitarios y de la investigación participante” (p.98). Este paradigma tiene como objetivo promover las transformaciones sociales mediante la participación de los miembros de su sociedad.

Popkewitz, 1988 (citado en Alvarado & García, 2008) nos señala algunos principios del paradigma socio-crítico: a) conocer y comprender la realidad como praxis; b) unir teoría y práctica, integrando conocimiento, acción y valores; c) orientar el conocimiento hacia la emancipación y liberación del ser humano; y (d) proponer la integración de todos los participantes, incluyendo al investigador, en procesos de autorreflexión y de toma de decisiones consensuadas, las cuales se asumen de manera corresponsable.

En respuesta a los aspectos fundamentales de un paradigma, el paradigma socio-crítico nos ofrece las siguientes respuestas:

- En su aspecto ontológico, el paradigma socio-crítico toma la realidad como dinámica y evolutiva, siendo los propios sujetos los agentes destinados a configurar y construir la realidad. Tenemos una realidad no objetiva y compartida.
- En el plano epistemológico, se considera una relación sujeto-objeto influida por el compromiso. En este paradigma el investigador se convierte en un sujeto más.
- En el aspecto metodológico, tenemos que el conocimiento se obtiene a través del diálogo y la participación, que siempre debe estar orientada a la acción y a la transformación.
- Por último, en el plano axiológico, el paradigma socio-crítico sostiene que la investigación no es objetiva, sino que se encuentra influida por los valores del investigador y de los sujetos de estudio.

Ya que se espera que los docentes entiendan, identifiquen y apliquen la modelación matemática a través de la aplicación de una intervención, estamos buscando un cambio social a partir de la participación de los maestros (miembros de la sociedad), mediante actividades en las que se construya el conocimiento con el intercambio de ideas y socialización del tema.

A partir de las discusiones grupales sobre modelación matemática y las formas de llevarla a la práctica (que se llevarán a cabo en la intervención), el siguiente objetivo es examinar las actividades de modelación matemática propuestas por los docentes, estas actividades se obtendrán gracias al trabajo conjunto de los participantes y las ideas que cada uno de ellos aporten para encontrar la mejor forma de implementarlas en clase.

Como podemos observar, los objetivos y métodos utilizados en esta investigación calzan bien con las características del paradigma socio-crítico, por lo que hemos elegido esta cosmovisión para guiar esta investigación.

3.2 La metodología de la ingeniería didáctica

Siguiendo la metodología propuesta por Artigue (2020), la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

- **Análisis preliminares.** Estos suelen incluir tres dimensiones principales: análisis epistemológico del contenido matemático en juego, análisis de las condiciones y restricciones institucionales y un análisis de lo que la investigación educativa tiene para ofrecer.
- **Diseño y análisis a priori.** En esta etapa es donde las hipótesis de investigación guían el proceso. Durante esta etapa se realizan suposiciones sobre la dinámica potencial de la situación, la interacción de los estudiantes con su entorno, las estrategias que se pueden utilizar, su progreso y resultados esperados, así como el papel y contribución del docente. En esta etapa se establece solo un marco de referencia y no se pretende anticipar todos los comportamientos individuales de los participantes.
- **Realización.** Aquí se recolectan datos para observarlos y analizarlos a posteriori. Estos datos varían según los objetivos, las hipótesis y conjeturas hechas en el análisis a priori. También puede haber adaptaciones en el diseño que se registran según las oportunidades de aprendizaje que tienen los estudiantes.
- **Análisis a posteriori.** Aquí se hace un contraste con el análisis a priori. Se analiza si los datos recopilados durante la implementación convergen o divergen con el análisis a priori. La validación de las hipótesis de investigación puede requerir la recopilación de datos complementarios a los obtenidos durante las sesiones. La validación es esencialmente interna más que externa.

3.2.1 Sobre los análisis preliminares

La primera fase de la metodología consta de tres análisis.

1. El primer análisis es el de los contenidos matemáticos en juego. Se refieren a la evaluación de los aspectos y conceptos matemáticos que serán objeto de enseñanza y aprendizaje en el contexto de una situación didáctica específica. Este primer análisis se desarrolla en el apartado 2.1.2. En este caso, el contenido matemático en juego es el del ciclo de modelación matemática, ya que este es el contenido principal a desarrollar en nuestra intervención y en nuestro proyecto. En la sección antes mencionada se realiza un análisis detallado de la modelación desglosando los conceptos en elementos más pequeños e identificando las relaciones entre ellos.

2. Análisis de las condiciones y restricciones institucionales:

Las condiciones institucionales: implica evaluar las características y recursos disponibles en la institución educativa donde se llevará a cabo la enseñanza.

- Como recursos materiales los docentes necesitarán contar con equipos de cómputo conectados a internet capaces de ejecutar el software de geometría dinámica GeoGebra.
- Al realizar la intervención en línea no se necesitarán espacios físicos para llevar a cabo las sesiones por lo cual no será necesario contactar con ninguna institución para pedir prestadas sus instalaciones. Esto nos libra de restricciones, reglas o políticas que puedan influir con la planificación de las actividades.

Las restricciones institucionales: se refieren a los límites o limitaciones que pueden dificultar la implementación de ciertas estrategias o actividades de enseñanza.

- Cada profesor cuenta ya con su equipo de cómputo con las capacidades requeridas, el software GeoGebra es de descarga gratuita y debido a que la intervención será en línea se han ahorrado los gastos de transporte por lo que el presupuesto no supone una limitante para el proyecto.
- El número de estudiantes es de dos por lo que se podrá trabajar tranquilamente prestando atención a cada uno de ellos y sus procesos de resolución de las actividades.
- Gracias al trabajo en línea los docentes han elegido el horario que mejor les convenía por lo que no existen limitantes en cuanto a tiempos.
- El personal que imparte la intervención se ha preparado debidamente para impartirlo por lo que no debería considerarse una limitante para el desarrollo del proyecto.

3. El análisis de lo que la investigación educativa tiene para ofrecer al proyecto se comienza a desarrollar en el apartado 2.4 “Recomendaciones para la planeación de una intervención educativa”, en él abordamos las recomendaciones que encontramos en un artículo especializado para la correcta realización de la intervención.

3.2.2 Diseño y análisis a priori

En esta fase de la metodología se realizan suposiciones sobre los resultados al aplicar nuestra propuesta de trabajo, por lo que presentamos los ejercicios que se resolverán en la intervención acompañados de tablas que los docentes tendrán que llenar con los pasos del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri. Se presentan los resultados esperados para hacer la comparación en el análisis a posteriori y distinguir si los profesores aprendieron a enfrentarse a actividades de modelación.

A continuación, se presenta la primera actividad que se les propone a los docentes luego de haberles hablado de lo que es la modelación matemática y lo que es un ciclo de modelación, en especial explicando el ciclo de Borromeo-Ferri. Dado que los docentes trabajan en línea y tienen acceso a recursos digitales se les permite trabajar con el software GeoGebra para encontrar el modelo matemático, fácil y rápidamente ahorrando tiempo y agilizando el trabajo en la intervención.

Problema: Crecimiento poblacional en México. Según datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), la población en México ha crecido más de cuatro veces en los últimos 70 años. Los datos de crecimiento poblacional se muestran en la siguiente tabla:

Año	Población total en México (Millones de habitantes)
1950	25.8
1960	34.9
1970	48.2
1980	66.8
1990	81.2
2000	97.5
2010	112.3
2020	126.0

Fuente: INEGI. Indicadores Sociodemográficos de México (1930-2000).

INEGI. Censos de Población y Vivienda 2010 y 2020.

Con motivos de planificación urbana y desarrollo económico se requiere hacer una estimación del crecimiento poblacional a futuro. Encuentre una estimación de cuál será la población de México para el año 2030 y 2040.

Actividad 1. Datos obtenidos del portal INEGI (Número de habitantes. Cuéntame de México, s.f.)

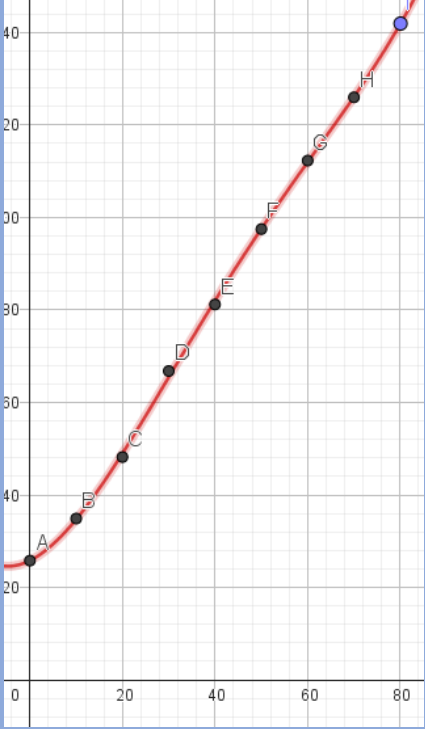
En la Tabla 1 se muestra una guía de cómo se espera que los docentes transiten por el ciclo de modelación. En esta tabla señalamos con color azul los nodos del ciclo y con verde los procesos

mentales que los conectan. Estas fases fueron extraídas del ciclo de modelación matemática propuesto por Borromeo-Ferri.

Tabla 1.

Situación real	Es el problema como tal. La situación es que la población en México ha crecido más de cuatro veces en los últimos 70 años (de 1950 al 2020). Los datos del crecimiento poblacional según el INEGI se muestran en la tabla de la actividad 1. Nuestro propósito es encontrar un modelo matemático para el fenómeno y estimar la población para 2030 y 2040.
Entendiendo la tarea	Con motivos de planificación urbana y desarrollo económico se busca estimar el crecimiento poblacional a futuro, por lo que para resolver este problema hay que crear un modelo matemático que nos ayude con tal estimación
Representación mental	Son las representaciones mentales que aparecen al entender el problema. Podemos imaginar un mapa de la república mexicana y como año con año conforma pasa el tiempo se va llenando cada vez más de habitantes. También pueden aparecer representaciones como la de una gráfica de tiempo vs número de habitantes en la que mientras más pase el tiempo más crece el número de habitantes
Simplificar/estructurar la tarea	En este paso estructuramos y simplificamos viendo lo que nos va a ser útil en la resolución de nuestro problema. Seleccionamos todo lo que nos va a servir. Por ejemplo, el tiempo medido en años y el número de habitantes medido en millones de personas. Buscaremos una relación entre estas variables encontrando una estructura matemática que nos indique cómo es que la población va creciendo (variable dependiente) conforme pase el tiempo (variable independiente).
Modelo real	La tabla de la actividad 1 presenta datos sobre la población total en México, abarcando el período desde 1950 hasta 2020 , representando la población en millones de habitantes. Al realizar un análisis preliminar, se observa que los años se presentan en intervalos de diez años; sin embargo, el número de habitantes no sigue un patrón ordenado que pueda ser comprendido de manera intuitiva, ya que no muestra un avance constante a lo largo del

	tiempo. Necesitamos encontrar una función que modele cómo se comportan estos datos.
Matematizando	Para este caso en específico vamos a matematizar haciendo uso del programa GeoGebra. Con esta herramienta digital pararemos de los datos obtenidos del mundo real al mundo matemático, pues con él obtendremos un modelo matemático aproximado. Para pasar del mundo real al mundo matemático necesitamos quitar las unidades y ajustar los datos para trabajar cómodamente. Trabajando con los datos de los habitantes necesitamos reescribirlos de la siguiente forma: $y = \frac{Y}{* 10^6 \text{ habitantes}}$ Donde Y son los datos de la tabla. De esta forma iremos obteniendo datos más pequeños para trabajar cómodamente y sin unidades, ya que estamos ingresando al mundo matemático. En cuanto a los datos correspondientes a los años los reescribimos de la siguiente forma: $x = \frac{X}{\text{año}} - 1950$ Donde X son los datos de la tabla. De esta forma iremos quitando las unidades a cada uno de los datos para ingresar al mundo matemático, además, asignamos el año 1950 como 0 para ir trabajando con números pequeños de 10 en 10. Abrimos la hoja de cálculo de GeoGebra e introducimos los datos que nos da nuestra tabla para crear puntos. Una vez hecho esto ajustamos los datos a una función y jugamos con el programa para ver cuál es la función que mejor se ajusta a nuestros datos. En este caso vemos que la función $f(x)$ que mejor se adapta a nuestros datos es una función polinómica de grado 4
Modelo matemático	$f(x) = 4.15 \times 10^{-6} x^4 + 7.68 \times 10^{-4} x^3 + 0.046 x^2 + 0.498 x + 25.795$

	
Trabajo matemático	Utilizando el Software ubicamos dos puntos en las siguientes dos intervalos de x. La coordenada en y nos dará el resultado que buscamos.
Resultados matemáticos	$y_1=141.95$ $y_2=162.24$
Interpretación	Para regresar al mundo real necesitamos regresar las unidades y las correcciones que les hicimos a nuestros datos, por lo que para los datos del número de habitantes tendríamos que reescribirlos como: $Y = y * 10^6 \text{ habitantes}$ En donde y es el resultado que obtuvimos en el mundo matemático y Y es el dato que tendremos en el mundo real. Para obtener los datos de los años necesitamos reescribir los datos como: $X = (x + 1950) \text{ año}$

	Donde x son los números del eje x del mundo matemático y X son los datos de los años en el mundo real. Así, podemos interpretar que: Para el año 2030 habrá 141.95 millones de habitantes Para el año 2040 habrá 162.24 millones de habitantes
Resultados reales	Según nuestro modelo matemático se estima que la población en México siga creciendo de forma polinómica grado 4. Para el 2030 se espera que la población sea de unos 141.95 millones de habitantes aproximadamente, mientras que para el 2040 se espera que haya 162.24 millones de habitantes aproximadamente.
Validación	Para lograr validar nuestro modelo se tendrá que esperar a esos años y ver que los resultados de nuestras aproximaciones coincidan con los datos reales. En dado caso nuestro modelo sería exitoso y habría modelado la realidad por lo que ahora formaría parte de la representación mental de la persona, pues se quedaría grabado en su mente que esta información fue cierta.

A continuación, se muestra la segunda actividad que se les propone a los docentes luego de realizar la primera actividad, comentar sus resultados en grupo, expresar sus dudas y dar sus opiniones.

Problema: Propagación del COVID-19 en México. Desde la aparición del COVID-19, este virus ha impactado drásticamente a la sociedad, afectando la vida de millones de personas y desafiando los sistemas de salud en todo el mundo. México no ha sido una excepción, y desde la detección de los primeros casos en el país, las autoridades y la comunidad científica han estado trabajando arduamente para entender y mitigar el impacto de la pandemia. A continuación, se presenta la tabla con los datos del número de en casos acumulados por COVID-19 en México (número total de personas que en algún momento han tenido COVID):

Mes y año	Número de casos acumulados (millones de personas)
Enero 2020	0
Mayo 2020	0.037
Septiembre 2020	0.681
Enero 2021	1.533
Mayo 2021	2.38
Septiembre 2021	3.509
Enero 2022	4.092
Mayo 2022	5.77
Septiembre 2022	7.085
Enero 2023	7.278
Mayo 2023	7.594

Fuente: Gobierno de México (2023)

Encuentre un modelo que describa el comportamiento infeccioso del COVID-19 en México. ¿Cuál será el número de casos acumulados esperados para enero de 2024?

Actividad 2. Datos obtenidos del portal del Gobierno de México (COVID-19 Tablero México, s.f.)

En la Tabla 2 se muestra una guía de cómo se espera que los docentes transiten por el ciclo de modelación.

Tabla 2.

Situación real	Es el problema como tal, Debido a la aparición del COVID-19 en México, El número de casos acumulados (personas que en algún momento han tenido la enfermedad) ha aumentado conforme pasa el tiempo según nos muestra la tabla con datos proporcionados por el Gobierno de México. Nuestro deber es encontrar un modelo matemático que describa la situación y estimar el número de casos en un futuro.
Entendiendo la tarea	Con el fin de estudiar el fenómeno se nos pide que encontremos un modelo que describa el comportamiento infeccioso del

	COVID-19 en México y estimemos el número de casos para enero de 2024
Representación mental	Aquí van las imágenes o demás representaciones que aparecen en nuestra mente al entender el problema. Puedo imaginar un virus que se va transmitiendo de una persona a otra y cada vez va infectando a más y más exponencialmente. También puedo imaginar una gráfica que crece cada vez más acercándose a ser exponencial ya que los contagios empiezan de a poco pero crecer mucho conforme más gente se va infectando.
Simplificar/estructurar la tarea	Aquí nos quedamos con los datos que nos van a ser útiles para resolver nuestro problema, es decir, escogemos las variables. Para este problema vamos a trabajar con el tiempo medido en meses y con el número de infectados medido en millones de personas, ya que la cantidad de mexicanos es enorme. Podemos ver que el número de personas crece considerablemente en cierto periodo al principio, pero al final crece muy poco. Necesitaremos de una función que nos relacione cómo crece el número de personas que han padecido COVID (variable dependiente) con el paso del tiempo por cuatrimestre (variable independiente).
Modelo real	Desde su llegada a México, el COVID-19 ha infectado a millones de personas como nos lo muestra la tabla con información extraída del Gobierno de México. Esta tabla nos da la información de cada cuatro meses partiendo de enero de 2020, ya que la enfermedad llegó a México por esas fechas, y termina en mayo de 2023, el cuatrimestre más próximo al presente. También nos da información del número acumulado de personas que han presentado la enfermedad, medido en millones de personas. Vemos rápidamente que hubo fechas en las que aumentó rápidamente y otras (principalmente al final) en las que fue más lento.
Matematizando	Para este caso haremos uso de la herramienta digital GeoGebra. Ya que estaremos trabajando en línea y todos los participantes contarán con el software podremos encontrar un modelo con mayor facilidad, en menor tiempo y con mayor precisión. Para pasar del mundo real al mundo matemático tenemos que deshacernos de las unidades, además, para trabajar más cómodamente haremos algunos ajustes a nuestros datos. Para los

datos sobre los casos acumulados reescribiremos los números de la siguiente forma:

$$y = \frac{Y}{* 10^6 \text{ personas}}$$

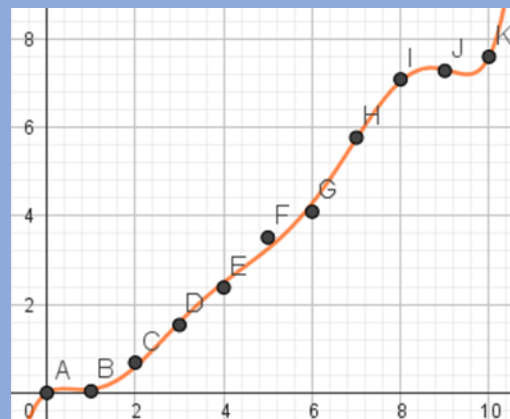
Donde Y son los datos de la tabla. De esta forma iremos obteniendo datos más pequeños para trabajar cómodamente y sin unidades, ya que estamos ingresando al mundo matemático. Para el caso del tiempo dependerá del mes y año del que se esté hablando, en cada caso tendremos que dividir entre el mismo mes y el mismo año y darle un número entero partiendo desde el cero según su posición en la lista. Esto con el propósito de que no contengan unidades y que podamos tener números pequeños para trabajar cómodamente.

Abrimos la hoja de cálculo de GeoGebra e introducimos los datos extraídos del mundo real que nos proporciona nuestra tabla. Gracias a GeoGebra pasaremos del mundo real al mundo matemático. Creamos una lista de puntos y ajustamos a una gráfica que concuerde mejor con nuestros datos. Jugamos con las opciones hasta encontrar la que mejor se ajuste.

Encontramos que la gráfica $g(x)$ que mejor se ajusta a nuestros datos es una gráfica polinomial grado 7

Modelo matemático

$$g(x) = 1.53x^{10^{-4}} - 0.005x^6 + 0.065x^5 - 0.404x^4 + 1.218x^3 - 1.444x^2 + 0.657x - 0.007$$



Trabajo matemático	Ponemos los siguientes dos puntos en los siguientes intervalos del eje x que corresponderían a $x=11$ y $x=12$. El número que nos salga en el eje y($x=12$) será el número que buscamos
Resultados matemáticos	$y(x=12)=50$
Interpretación	Para regresar al mundo real tenemos que recuperar las unidades y reescribir con los cambios que hicimos. Para recuperar los datos con el número de casos acumulados tendríamos que realizar la operación $Y = y * 10^6 \text{ personas}$ Donde y es el número que obtuvimos del mundo matemático y, Y es el dato de casos acumulados del mundo real. Para el dato del tiempo tendríamos que observar el número que tienen y relacionarlo con la posición en la lista para asignar un mes y un año. En el caso del número 11 correspondería a septiembre de 2023 y el número 12 a enero de 2024. Con esta información tendríamos que: 50 millones de casos acumulados por COVID-19 habrá en enero de 2024.
Resultados reales	El modelo matemático que mejor se ajusta a los datos obtenidos hasta el momento de casos acumulados por COVID-19 en México es un modelo polinomial de grado 7. Siguiendo este comportamiento, para enero de 2024 habrá 50 millones de casos acumulados de COVID-19 en México. Sin embargo, podemos ver en la representación gráfica de nuestro modelo matemático que, Este describe muy bien el periodo enero 2020 – mayo 2023, Pero para años posteriores se dispara abruptamente, lo que puede no coincidir con la realidad ya que gracias a la vacunación vemos que los casos cada vez van siendo menores. Todo indica a que nuestro modelo no servirá para fechas posteriores a este lapso por lo que nuestra aproximación de que para enero de 2024 habrá 50 millones de casos acumulados no será efectiva.
Validación	Se necesita esperar a enero de 2024 para ver si nuestro modelo predice la realidad pero haciendo el análisis de que gracias a la vacunación los casos van disminuyendo (como también podemos notar en los últimos meses de la tabla) y viendo que en nuestro

	modelo después del periodo mayo 2023 los números se disparan podemos pronosticar que no se cumplirá con lo predicho por el modelo.
--	--

Con los resultados obtenidos en la intervención y estas suposiciones se hará la comparación en el análisis a posteriori para saber si los docentes transitaron correctamente por el ciclo de modelación y aprendieron a enfrentarse a una actividad de modelación matemática.

3.3 Descripción de los sujetos de estudio

Para esta investigación se trabajará con 2 docentes de matemáticas de nivel medio superior pertenecientes a instituciones del sector privado del estado de Veracruz y Puebla. Los maestros imparten los cursos de matemáticas en todos los niveles de bachillerato, estos cursos incluyen álgebra, geometría, precálculo, cálculo y pensamiento matemático. Gracias a la modalidad en línea se trabajará con docentes del estado de Veracruz y de Puebla en forma simultánea.

3.4 Descripción de la intervención de modelación matemática y su implementación

La intervención de modelación matemática que se propone tiene como objetivo que los docentes sepan cómo usar la modelación matemática en la resolución de problemas que la involucren, que desarrollen sus propios ejemplos de esta actividad y que se discutan ideas de implementación en el aula de clases.

La intervención está planeada para tres sesiones. El número de sesiones se acordó proponiendo que fueran más de dos, según lo sugerido por Ledezma et al. (2023), pero adaptándose a los tiempos disponibles de los participantes. Las sesiones se llevaron a cabo en la plataforma Google Meet. La planeación se realizó siguiendo a Jordán Padrón et al., (2011), se inició con la presentación de los participantes y el facilitador. También se procuró tomar descansos cada 90 minutos para que los participantes no se sintieran agobiados con el contenido.

La intervención se estructuró en tres sesiones en línea de 180 minutos cada una. La duración real varió según el progreso y la dinámica de trabajo de los docentes, lo cual fue discutido y acordado en nuestras reuniones previas. En algunas ocasiones, como en la primera sesión, concluimos 15 min antes de lo previsto y en otras, como en la tercera, excedimos el límite de tiempo por 20 min,

La sesión inicial comenzó con una bienvenida para presentar a los participantes, al facilitador y familiarizarse con la plataforma Google Meet, utilizada para la intervención. Además, se introdujo el objetivo de la intervención y se enseñó el uso del software GeoGebra para el ajuste de datos. En la segunda sesión, se abordaron los fundamentos de la modelación matemática y los distintos ciclos de modelación, enfocándose en los pasos del ciclo de Borromeo Ferri (2006). Se presentó un ejemplo práctico de cómo abordar un problema de modelación utilizando este ciclo, y los docentes enfrentaron su primera actividad de modelación matemática de manera independiente. Finalmente, en la tercera sesión, los docentes llevaron a cabo una segunda actividad de modelación y desarrollaron su propio ejemplo de actividad para implementarla con sus alumnos, basándose en la proyección de sus cursos. La intervención concluyó con una discusión reflexiva sobre los aprendizajes adquiridos.

A continuación, se presenta una tabla que condensa las actividades que se presentan en la intervención:

Tabla 3. Programa de la intervención:

Número de sesión	Tiempo	Actividad	Objetivo
1	30 min	Bienvenida y familiarización con la plataforma Google Meet	Conocer a los participantes de la intervención, al facilitador y la plataforma en la que se trabajará
1	30 min	Introducción a la intervención de modelación matemática	Dar un repaso general de las actividades a realizar en la intervención, los tiempos, propósitos y objetivos
DESCANSO			
1	90 min	Uso de GeoGebra para el ajuste de datos	Aprender el uso del software GeoGebra para encontrar una función que se adapte a los datos de un experimento

2	45 min	Introducción a la modelación matemática	Conocer qué es la modelación matemática y qué es un ciclo de modelación matemática
2	45 min	Ejemplo de actividad de modelación	Dar un ejemplo de una actividad de modelación matemática y cómo enfrentarse a ella a través de un ciclo de modelación
DESCANSO			
2	60 min	Primer actividad de modelación	Enfrentar una actividad de modelación matemática
2	30 min	Discusión de resultados	Aclarar dudas y dialogar sobre la implementación de actividades de modelación en el aula de clase
3	60 min	Segunda actividad de modelación	Enfrentar individualmente una actividad de modelación matemática
DESCANSO			
3	90 min	Tercer actividad: creación de una actividad de modelación para proponer en su aula de clase	Proponer una actividad de modelación que se implementará posteriormente con sus alumnos en clase
DESCANSO			
3	30 min	Discusión final y cierre	Recapitular puntos importantes, dar recomendaciones finales y escuchar comentarios de cierre

3.4.1 Primera sesión

Las sesiones tomarán 3 horas, en la primera sesión se dará de bienvenida y será de familiarización. En ella conoceremos a los participantes, la plataforma, se presentarán los contenidos y propósitos de la intervención y se dará una introducción al uso de GeoGebra para encontrar funciones que se ajusten a datos experimentales. Debido a que la modelación matemática trabaja con datos extraídos de la realidad y haciendo uso de herramientas digitales con el trabajo en línea se ha aprovechado la oportunidad para trabajar con el software GeoGebra que nos permitirá agilizar y trabajar con mayor eficiencia en nuestra intervención.

3.4.2 Segunda sesión

Para la segunda sesión se dió una introducción a lo que es la modelación matemática, platicando con los maestros sobre sus conocimientos y experiencias en el tema, además se introducirá el ciclo de modelación como marco de referencia para desarrollar una actividad de modelación. Después de esta plática se presentará una actividad de modelación como ejemplo y se mostrará cómo enfrentarse a ella a través de un ciclo de modelación. Dicha actividad y su resolución se presenta a continuación:

Actividad de ejemplo. Recuperado de Khan Academy.

Liam abre una cuenta de ahorros en donde deposita \$6250.
Cada año, su cuenta crece en un 20%.

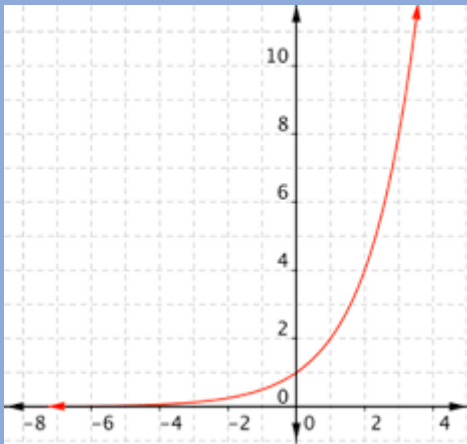
¿Cuántos años se necesitarán para obtener una cuenta con \$12,960?

Escribe una ecuación que modele la situación. Usa t para representar el número de años desde que Liam abre la cuenta.

Resolución de la actividad de ejemplo:

Tabla 4

Situación real	Liam abrió una cuenta de ahorros que hace que su dinero aumente conforme pasa el tiempo. Él conoce el porcentaje de crecimiento por año y se pregunta cuánto tardará en conseguir determinada
----------------	---

	cantidad. Nuestro trabajo es encontrar una expresión que responda a esto.
Entendiendo la tarea	Sabemos que los ahorros de Liam crecen 20% anual. Tomando en cuenta su depósito al principio necesitamos crear una expresión matemática que nos relacione el dinero que tiene Liam cada año con su crecimiento para el siguiente, de esta forma podremos encontrar el tiempo necesario para que llegue a la cantidad de dinero deseada.
Representación mental	Aquí podemos crear una representación aproximada de cómo será el crecimiento monetario de la cuenta de Liam. Para ello tomamos en cuenta que cada año crece un 20% en comparación al año anterior, por lo que podemos aproximar una gráfica que crezca más y más conforme pasan los años y que no empiece en 0, ya que el monto inicial de la cuenta no es nulo. No podremos tener una gráfica lineal ya que el crecimiento no es siempre el mismo, sino que depende de la cantidad de dinero acumulada. Nos damos la idea que la gráfica (y la expresión buscada) debe ser una curva cóncava hacia arriba. Esto nos ayudará a encontrar la expresión matemática buscada. 
Simplificar/estructurar la tarea	Sabemos que Liam abrió su cuenta con \$6250 y que cada año debe crecer 20% en comparación con el año anterior. Con esta información podemos encontrar una función que nos relacione el tiempo t (en años) con monto en la cuenta de ahorros de Liam. Una vez teniendo la expresión la podemos igualar a \$12960 que es la cantidad de dinero deseada por Liam para despejar el tiempo y saber cuánto tardará en ahorrar esa cantidad.

Modelo real	Liam abrió una cuenta de ahorros con \$6250 que va a crecer anualmente un 20% con respecto al año anterior. Él quiere saber cuánto tiempo le tomará a su cuenta crecer hasta los \$12960 por lo que podemos crear una función que nos relacione el dinero que va acumulando su cuenta con el tiempo que debe transcurrir para ello y así podremos encontrar la solución a esta situación.
Matematizando	Vamos cómo crece el dinero de Liam (d) conforme pasa el tiempo (t). Analizamos: Para el inicio (año 0), Liam tiene en su cuenta $t_0 = 6250$ Para el año 1, tendría $d(t_1) = 6250 + 0.2(6250) = 6250(1 + 0.2) = 6250(1.2) = 7500$ Para el año 2, tendría $d(t_2) = d(t_1) + 0.2d(t_1) = d(t_1)(1 + 0.2) = d(t_1)(1.2) = 6250(1.2)(1.2) = 6250(1.2)^2 = 9000$ Para el año 3 tendría $d(t_3) = d(t_2) + 0.2d(t_2) = d(t_2)(1 + 0.2) = d(t_2)(1.2) = 6250(1.2)(1.2)(1.2) = 6250(1.2)^3 = 10800$ Con este análisis nos damos cuenta que la expresión buscada debe ser exponencial, lo que concuerda con nuestra idea previa que la gráfica debe ser una curva.
Modelo matemático	$d(t) = 6250(1.2)^t$
Trabajo matemático	Con nuestro modelo matemático ahora podemos igualar la función a 12960 para despejar t $d(t) = 6250(1.2)^t = 12960$ Dividiendo ambos lados entre 6250 tenemos: $(1.2)^t = \frac{12960}{6250}$ Simplificando: $(1.2)^t = 2.0736$

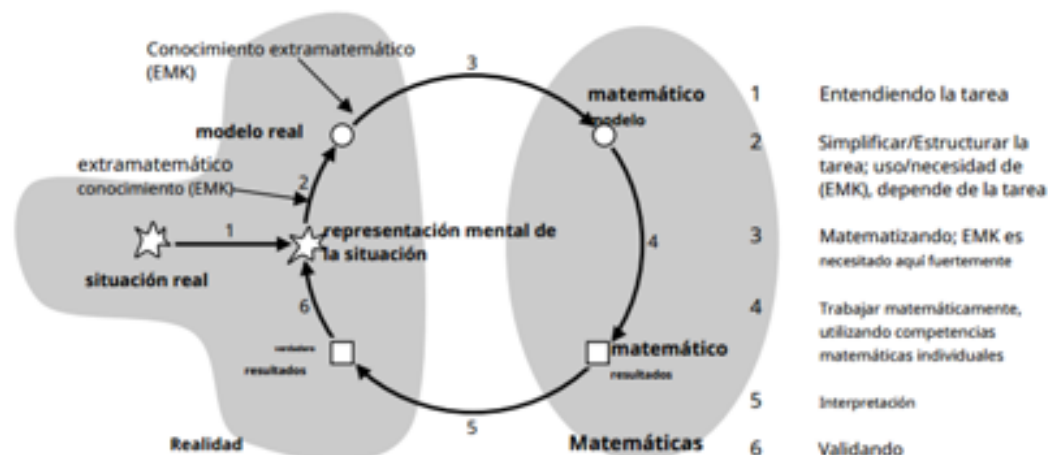
Resultados matemáticos	Para resolver la ecuación anterior podemos reescribir los decimales en forma de fracción: $\left(\frac{6}{5}\right)^t = \left(\frac{6}{5}\right)^4$ Con lo que podemos ver que $t=4$
Interpretación	La función $d(t) = 6250(1.2)^t$ nos relaciona el dinero almacenado en la cuenta de ahorros con el tiempo transcurrido desde el primer depósito. Con ella podemos ver que en 4 años Liam acumulará los \$12960 que planea conseguir.
Resultados reales	Liam logrará acumular \$12960 en su cuenta de ahorro a los 4 años si su primer ingreso es de \$6250 y se tiene una tasa de crecimiento anual del 20%
Validación	Recordando el análisis matemático hecho previamente teníamos que: Para el inicio (año 0), Liam tiene en su cuenta $t_0 = \\$6250$ Para el año 1, tendría $d(t_1) = \\$6250(1.2) = \\7500 Para el año 2, tendría $d(t_2) = 6250(1.2)^2 = \\9000 Para el año 3 tendría $d(t_3) = \\$6250(1.2)^3 = \\10800 Por lo que para el año 4 tendríamos: $d(t_4) = d(t_3) + 0.2d(t_3) = d(t_3)(1.2) = (\$10800)(1.2) = \$12960$ Que es justo lo que Liam quería juntar.

Para continuar se enfrentarán con la primera actividad de modelación que resolverán individualmente. Dicha actividad se muestra a continuación:

ACTIVIDADES DEL TALLER EN LÍNEA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA DOCENTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Marco teórico. Para la resolución de esta actividad utilizaremos como guía el ciclo de modelación matemática de Borromeo Ferri. Dicho ciclo de modelación lo podemos observar en la siguiente figura:

Ciclo de modelación bajo una perspectiva cognitiva



Fuente: (Ferri, 2006)

Actividad 1.

Instrucciones: Lea atentamente el problema y rellene los espacios correspondientes a la columna “desarrollo” con los pasos que se deberían seguir en cada nodo del ciclo de modelación matemática según su descripción o actividad cognitiva. Pueden hacer uso de GeoGebra para encontrar el modelo matemático con mayor facilidad. También pueden disponer de cualquier otra herramienta digital que deseen (en dado caso comunicarlo).

Problema: Crecimiento poblacional en México. Según datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), la población en México ha crecido más de cuatro veces en los últimos 70 años. Los datos de crecimiento poblacional se muestran en la siguiente tabla:

Año	Población total en México (Millones de habitantes)
1950	25.8
1960	34.9
1970	48.2
1980	66.8
1990	81.2

2000	97.5
2010	112.3
2020	126.0

Fuente: INEGI. Indicadores Sociodemográficos de México (1930-2000).

INEGI. Censos de Población y Vivienda 2010 y 2020.

Con motivos de planificación urbana y desarrollo económico se requiere hacer una estimación del crecimiento poblacional a futuro. Encuentre una estimación de cuál será la población de México para el año 2030 y 2040.

Desarrollo de la actividad:

Situación real	
Entendiendo la tarea	
Representación mental	
Simplificar/estructurar la tarea	
Modelo real	
Matematizando	
Modelo matemático	
Trabajo matemático	
Resultados matemáticos	
Interpretación	
Resultados reales	
Validación	

Comentarios adicionales:

Actividad 1.

Posterior a la realización de la actividad se realizará una discusión de los resultados obtenidos para comparar entre los participantes sus conclusiones, resolver sus dudas y platicar sobre la posible implementación de actividades similares en el aula con sus alumnos.

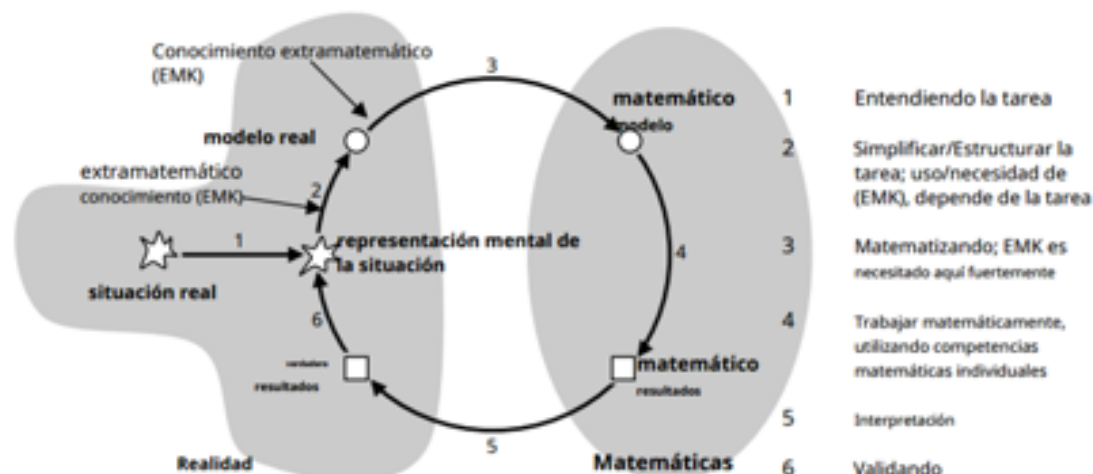
3.4.3 Tercera sesión

En la tercera y última sesión resolverán la segunda actividad de modelación que se presenta a continuación:

ACTIVIDADES DEL TALLER EN LÍNEA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA DOCENTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Marco teórico. Para la resolución de esta actividad utilizaremos como guía el ciclo de modelación matemática de Borromeo Ferri. Dicho ciclo de modelación lo podemos observar en la siguiente figura:

Ciclo de modelación bajo una perspectiva cognitiva



Fuente: (Ferri, 2006)

Actividad 2.

Instrucciones: Lea atentamente el problema y rellene los espacios correspondientes a la columna “desarrollo” con los pasos que se deberían seguir en cada nodo del ciclo de modelación matemática según su descripción o actividad cognitiva. Pueden hacer uso de GeoGebra para encontrar el modelo matemático con mayor facilidad. También pueden disponer de cualquier otra herramienta digital que deseen (en dado caso comunicarlo).

Problema: Propagación del COVID-19 en México. Desde la aparición del COVID-19, este virus ha impactado drásticamente a la sociedad, afectando la vida de millones de personas y desafiando los sistemas de salud en todo el mundo. México no ha sido una excepción, y desde la detección de los primeros casos en el país, las autoridades y la comunidad científica han estado trabajando arduamente para entender y mitigar el impacto de la pandemia. A continuación, se presenta la tabla con los datos del número de en casos acumulados por COVID-19 en México (número total de personas que en algún momento han tenido COVID):

Mes y año	Número de casos acumulados (millones de personas)
Enero 2020	0
Mayo 2020	0.037
Septiembre 2020	0.681
Enero 2021	1.533
Mayo 2021	2.38
Septiembre 2021	3.509
Enero 2022	4.092
Mayo 2022	5.77
Septiembre 2022	7.085
Enero 2023	7.278
Mayo 2023	7.594

Fuente: Gobierno de México (2023)

Encuentre un modelo que describa el comportamiento infeccioso del COVID-19 en México. ¿Cuál será el número de casos acumulados esperados para enero de 2024?

Desarrollo de la actividad:

Situación real	
Entendiendo la tarea	
Representación mental	
Simplificar/estructurar la tarea	
Modelo real	
Matematizando	
Modelo matemático	
Trabajo matemático	
Resultados matemáticos	
Interpretación	
Resultados reales	
Validación	

Comentarios adicionales:

Actividad 2.

Se espera que los resultados sean mejores luego de haber aclarado dudas y de haber comentado grupalmente sus resultados anteriores. Para continuar como tercera actividad ellos mismos crearán su propia actividad de modelación.

ACTIVIDADES DEL TALLER EN LÍNEA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA DOCENTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Actividad 3.

Instrucciones: Basándose en los temas que impartirán al inicio del siguiente ciclo escolar en sus respectivos cursos, proponer un ejercicio de modelación matemática que le puedan proponer a sus alumnos en clase.

Curso en el cual se impartirá:

Problema:

Desarrollo de la actividad:

Situación real	
Entendiendo la tarea	
Representación mental	
Simplificar/estructurar la tarea	
Modelo real	
Matematizando	
Modelo matemático	
Trabajo matemático	
Resultados matemáticos	
Interpretación	
Resultados reales	
Validación	

Comentarios adicionales:

Actividad 3

Para esta actividad se les pide que revisen previamente los currículums de los siguientes ciclos escolares que impartirán en sus escuelas. Basándose en los primeros temas que verán deberán crear

actividades de modelación matemática para proponer en el aula de clases con sus alumnos. Se les avisa que posteriormente se les realizará una entrevista para que nos compartan sus resultados y experiencias. Para finalizar, se hace una revisión general de lo visto en la intervención recapitulando metas y conclusiones, además, se invita a los participantes a opinar sobre lo aprendido, sus reflexiones, opiniones y demás comentarios de cierre.

Capítulo 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Análisis de resultados de las actividades

Este análisis lo llevaremos a cabo como el último paso de la metodología de la ingeniería didáctica (ID), el análisis a posteriori, por lo cual realizaremos una comparación de los resultados obtenidos en la intervención con los resultados de nuestro análisis a priori. Para esto compararemos fase a fase cómo los docentes fueron desarrollando la resolución de las actividades y veremos de qué forma utilizaron el ciclo de modelación de Borromeo-Ferri.

4.1.1 Análisis de la primera actividad

La actividad 1, que se expone en el apartado 3.2.2, nos habla del crecimiento poblacional en México durante los últimos 70 años; allí se muestra una tabla con datos extraídos del INEGI sobre el número de habitantes de México en cada década a partir de 1950 hasta 2020. Sobre esta base se pide estimar la población para las siguientes dos décadas, correspondientes a los años 2023 y 2040. A continuación, compararemos cada fase del ciclo según el análisis a priori y las respuestas de los dos docentes participantes de la intervención. Empecemos por la situación real:

Tabla 5. Comparativa fase “Situación Real” de la actividad 1

Análisis a priori	Es el problema como tal. La situación es que la población en México ha crecido más de cuatro veces en los últimos 70 años (de 1950 al 2020). Los datos del crecimiento poblacional según el INEGI se muestran en la tabla de la actividad 1. Nuestro propósito es encontrar un modelo matemático para el fenómeno y estimar la población para 2030 y 2040.
Docente 1	Aumento de la población mexicana
Docente 2	Según datos estadísticos del INEGI la población en México ha crecido más de cuatro veces en los últimos setenta años y nos preguntamos cual será la población en los años 2030 y 2040 si conocemos la población desde el año 1950 hasta el 2020 por décadas.

En la fase “situación real” extraemos el fenómeno a ser estudiado de la realidad, por lo que debemos tener en cuenta todos los aspectos importantes de la situación.

- El docente 1 hace una declaración bastante general y no profundiza en la situación. No hace referencia a los datos que nos proporciona la tabla, la fuente de datos ni al propósito de la estimación futura para los años 2030 y 2040 por lo que su respuesta es insuficiente.
- El docente 2 da una propuesta más detallada y precisa. Comprende que se trata de un problema real basado en datos estadísticos del INEGI y menciona el objetivo de estimar la población futura para los años 2030 y 2040.

Con estas respuestas vemos que el docente 2 muestra una mejor comprensión sobre lo que es la situación real al extraer más datos de la realidad para ser estudiados, en cambio el docente 1 proporciona una respuesta muy general sin abordar aspectos específicos de la situación. Cabe señalar que ninguno de los dos docentes señaló que los datos del problema se encontraban en la tabla proporcionada por el problema.

Tabla 6. Comparativa fase “entendiendo la tarea” de la actividad 1

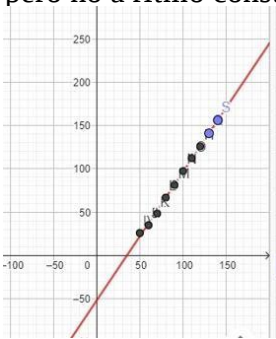
Análisis a priori	Con motivos de planificación urbana y desarrollo económico se busca estimar el crecimiento poblacional a futuro, por lo que para resolver este problema hay que crear un modelo matemático que nos ayude con tal estimación
Docente 1	Obtener la cantidad aproximada del aumento de la población mexicana para el año 2030 y 2040.
Docente 2	Tenemos que encontrar una expresión mediante la cual se calcule la población en México en el futuro. (2030 y 2040).

En esta fase se espera que los docentes comprendan el propósito del problema abordando el objetivo principal.

- El docente 1 da una respuesta adecuada, ya que identifica el propósito de obtener la cantidad aproximada del aumento en la población mexicana para los años 2030 y 2040, lo que demuestra que comprendió la tarea.
- El docente 2 también comprendió el propósito que es encontrar una expresión para calcular la población futura en México para los años 2030 y 2040.

Ambos docentes muestran una comprensión razonable del propósito de la tarea, sin embargo, el docente 2 proporciona una respuesta más detallada y precisa ya que reconoce que se necesita encontrar una expresión mediante la cual modelar el fenómeno.

Tabla 7. Comparativa fase “representación mental” de la actividad 1

Análisis a priori	Son las representaciones mentales que aparecen al entender el problema. Podemos imaginar un mapa de la república mexicana y como año con año conforma pasa el tiempo se va llenando cada vez más de habitantes. También pueden aparecer representaciones como la de una gráfica de tiempo vs número de habitantes en la que mientras más pase el tiempo más crece el número de habitantes
Docente 1	Mapa de la república con dibujos humanos que luego, se van agregando más y más. Una gráfica lineal.
Docente 2	Según los datos proporcionados en cada década la población aumenta, pero no a ritmo constante por lo que se puede imaginar una gráfica: 

En esta fase los docentes desarrollan representaciones mentales que les ayudan a comprender y a abordar el problema, como pueden ser imágenes, gráficos, diagramas u otras herramientas que faciliten la comprensión de la situación.

- El docente 1 menciona "mapa de la república con dibujos humanos que luego, se van agregando más y más", lo que es una representación visual de cómo la población va creciendo a conforme pasa el tiempo. También menciona una gráfica lineal, lo que indica el uso de conocimientos previos para generar una idea de cómo será la relación entre el tiempo y la población.
- El docente 2 comprende que el crecimiento poblacional no es constante, pero sugiere y muestra una gráfica que sí lo es por lo que hay una discrepancia en su razonamiento. Esto nos habla de una diferencia en su razonamiento verbal y su elección de representación gráfica.

Ambas respuestas de esta fase tienen limitaciones. El docente 1 ofrece una buena representación, pero no tomó en cuenta que los datos de la tabla no parecían crecer constantemente. El docente 2 nos da una representación visual que puede ser contradictoria con su representación verbal y, además, nos muestra una gráfica realizada en GeoGebra lo que muestra que ya ha ingresado datos y evaluado qué función se adecuaba mejor a ellos, pero no lo hizo de la mejor forma. En su representación gráfica olvida mencionar qué significan los ejes coordenados.

Tabla 8. Comparativa fase “simplificar/estructurar la tarea” de la actividad 1

Análisis a priori	En este paso estructuramos y simplificamos viendo lo que nos va a ser útil en la resolución de nuestro problema. Seleccionamos todo lo que nos va a servir. Por ejemplo, el tiempo medido en años y el número de habitantes medido en millones de personas. Buscaremos una relación entre estas variables encontrando una estructura matemática que nos indique cómo es que la población va creciendo (variable dependiente) conforme pase el tiempo (variable independiente).
-------------------	--

Docente 1	Se tendría que obtener las diferencias del crecimiento de la población para saber si es un aumento constante o no.
Docente 2	Encontrando la función que relacione la población (y) y el tiempo (x) podré determinar diferentes valores de y con el año que sea. Entonces: X1= año 2030 X2= año 2040 Y1= población en el año 2030 Y2= población en el año 2040

En esta fase se espera que los docentes identifiquen los elementos clave que serán útiles para la resolución de la actividad, lo que puede incluir seleccionar variables, unidades de medida y crear una estructura clara para el modelado.

- El docente 1 sugiere determinar si el crecimiento de la población es constante o no lo que indica un intento de simplificar el problema al examinar las diferencias en lugar de los valores absolutos, sin embargo, no menciona explícitamente las variables, unidades ni se establece una estructura.
- El docente 2 propone una estructura más organizada al identificar las variables clave: población y tiempo. Menciona la unidad para el tiempo que, con los años, pero no menciona la unidad para la población que serían los millones de personas. Va un paso más allá e incluso asigna nombre a los datos que queremos encontrar para su trabajo matemático.

El docente 2 muestra una comprensión más completa y organizada al identificar variables y empezar a estructurar su problema para su posterior trabajo matemático. El docente 1 sugiere una simplificación al considerar las diferencias en el crecimiento poblacional pero no establece explícitamente las variables, las unidades ni una estructuración.

Tabla 9. Comparativa fase “modelo real” de la actividad 1

Análisis a priori	La tabla de la actividad 1 presenta datos sobre la población total en México, abarcando el período desde 1950 hasta 2020 representando la población en
-------------------	--

millones de habitantes. Al realizar un análisis preliminar, se observa que los años se presentan en intervalos de diez años; sin embargo, el número de habitantes no sigue un patrón ordenado que pueda ser comprendido de manera intuitiva, ya que no muestra un avance constante a lo largo del tiempo. Necesitamos encontrar una función que modele cómo se comportan estos datos.	
Docente 1	Se relaciona que la población en cualquier año (ósea el tiempo), será igual a la cantidad de población del año anterior más el aumento producido durante el año.
Docente 2	Si necesitamos conocer o estimar la población en las siguientes dos décadas necesitamos asignar una función que representa el incremento poblacional (y) respecto al paso del tiempo. (x)

En la fase “modelo real” se establecen las bases para la resolución del problema. Se profundiza en la comprensión de la situación entendiendo completamente su naturaleza, identificando patrones, relaciones y posibles variables clave.

- El docente 1 establece relaciones entre las variables haciendo una descripción de cómo calcular la población en función del tiempo, lo que da una idea superficial de cómo empezar con el modelado matemático.
- El docente 2 menciona la necesidad de "asignar una función que representa el incremento poblacional (y) respecto al paso del tiempo (x)". No proporciona una idea específica, pero muestra una comprensión orientada hacia el modelado matemático de la situación.

Ambos docentes requieren de una comprensión más profunda de la situación antes de pasar al trabajo matemático en fases posteriores. El docente 1 no aborda la necesidad de una función para modelar el crecimiento poblacional, mientras que el docente 2 debe evaluar qué tipo de expresión matemática podría funcionarle para esta actividad. Ambos necesitan poner más énfasis en los datos.

Tabla 10. Comparativa fase “matematizando” de la actividad 1

Análisis a priori Para este caso en específico vamos a matematizar haciendo uso del programa GeoGebra. Con esta herramienta digital pararemos de los datos obtenidos del mundo real al mundo matemático, pues con él obtendremos un modelo matemático aproximado.

Para pasar del mundo real al mundo matemático necesitamos quitar las unidades y ajustar los datos para trabajar cómodamente. Trabajando con los datos de los habitantes necesitamos reescribirlos de la siguiente forma:

$$y = \frac{Y}{* 10^6 \text{ habitantes}}$$

Donde Y son los datos de la tabla. De esta forma iremos obteniendo datos más pequeños para trabajar cómodamente y sin unidades, ya que estamos ingresando al mundo matemático. En cuanto a los datos correspondientes a los años los reescribimos de la siguiente forma:

$$x = \frac{X}{\text{años}} - 1950$$

Donde X son los datos de la tabla. De esta forma iremos quitando las unidades a cada uno de los datos para ingresar al mundo matemático, además, asignamos el año 1950 como 0 para ir trabajando con números pequeños de 10 en 10.

Abrimos la hoja de cálculo de GeoGebra e introducimos los datos que nos da nuestra tabla para crear puntos. Una vez hecho esto ajustamos los datos a una función y jugamos con el programa para ver cuál es la función que mejor se ajusta a nuestros datos.

En este caso vemos que la función $f(x)$ que mejor se adapta a nuestros datos es una función polinómica de grado 4

Docente 1 A la población le asignare la literal Y, encontrar cuanto crece la población (1.5 millones) por determinado tiempo/ años (x) más la constante.

Docente 2 Si analizamos los datos se analiza la cantidad de población que incrementa cada década:

x	y	Crecimiento por década

1950	25.8	
1960	34.9	9.1
1970	48.2	13.3
1980	48.2	13.3
1990	81.2	14.4
2000	97.5	16.3
2010	112.3	14.8
2020	126	13.7
2030	141.12	15.12
2040	155.41	14.29

Realizamos una gráfica y se analiza que la función puede ser del tipo $y=mx+b$

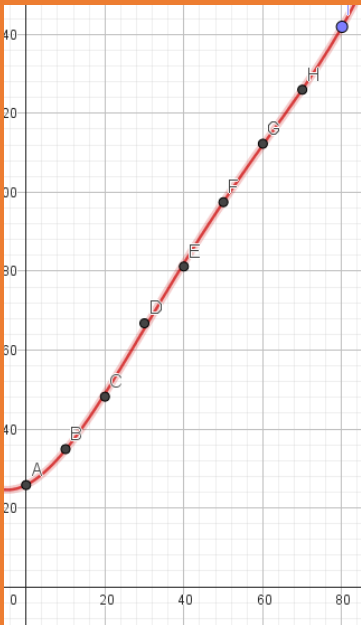
En esta fase buscamos traducir los datos del mundo real al mundo matemático, preparándonos para trabajar con números y realizar cálculos y análisis matemáticos. Se busca simplificar los datos y encontrar la forma de hallar la función o relación matemática que describa la situación.

- El docente 1 menciona que asignará la literal Y a la población y describe cómo será su función lineal. Esta respuesta sugiere una comprensión básica de cómo matematizar la situación, pero no proporciona un tratamiento de los datos ni menciona un método para encontrar el modelo.
- El docente 2 realiza un análisis de cómo incrementa la población por década, luego menciona que la función podría ser del tipo $y=mx+b$ (a pesar de no tener un crecimiento constante), lo que implica una comprensión más matemática. Presenta sus datos

adimensionales pero no menciona el método que utilizó para ello ni el que utilizará para encontrar el modelo matemático.

Ambas respuestas presentan limitaciones. El docente 1 ofrece una fórmula, pero no explica el proceso de cómo llegó a ella ni cómo tratar los datos para trabajarlos matemáticamente. El docente 2 nos da una función potencial y nos muestra los datos ya sin unidades, pero no proporciona detalles sobre el proceso de matematización. Ambos docentes deben aprender sobre el proceso de transformar datos del mundo real al mundo matemático y cómo llegar a sus respectivos modelos matemáticos.

Tabla 11. Comparativa fase “modelo matemático” de la actividad 1

Diseño a priori	$f(x)=4.15 \times 10^{-6}x^4 + 7.68 \times 10^{-4}x^3 + 0.046x^2 + 0.498x + 25.795$ 
Docente 1	$Y= 1.49x + 21.98$
Docente 2	Se observa que se trata de una relación de incremento lineal, que puede ser representada como $y=1.49x-52.47$

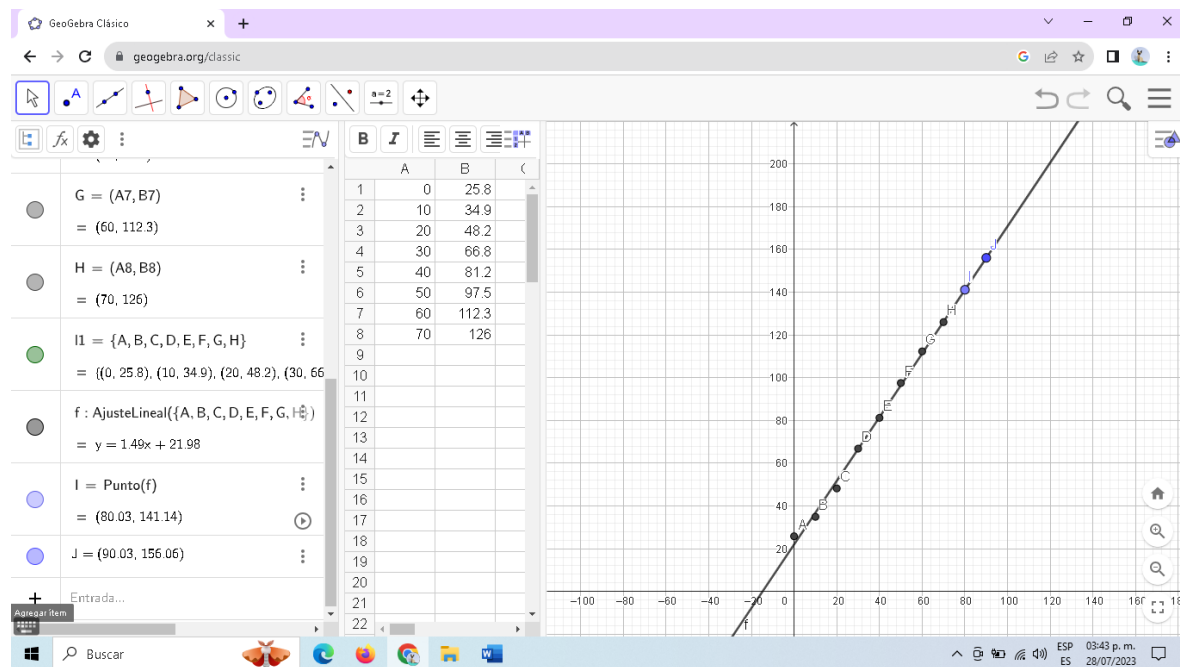
En esta fase se desarrolla y muestra el modelo matemático específico que representa la situación real. El objetivo es encontrar aquel que más se ajuste a los datos y describa la situación de manera más efectiva.

- El docente 1 propone un modelo lineal de la forma $Y=1.49x+21.98$ para representar la relación entre variables. Este modelo difiere de la función polinómica de grado 4 presentada en el análisis a priori y no se ajusta bien a los datos.
- El docente 2 propone un modelo lineal de la forma $y=1.49x-52.47$ para representar la relación entre variables. Este modelo también difiere con el análisis a priori y no parece ajustarse con precisión a los datos.

Ambos docentes proponen funciones lineales como modelo de la situación, esto a pesar de haberse dado cuenta que el crecimiento de la población no era constante. La función polinómica de grado 4 propuesta en el análisis a priori es el modelo matemático que mejor se adecúa a los datos y parece reflejar mejor la relación entre las variables en comparación a los propuestos por los docentes.

En la sección de comentarios adicionales el docente 1 también nos proporciona la gráfica que encontró en este paso:

Gráfica de la actividad 1 propuesta por el docente 1



En ella podemos ver que el docente no delimitó la gráfica de la función a los puntos en donde tuviera sentido tener información, con lo que podemos ver información en el eje x negativo y más allá de nuestros datos de interés.

Tabla 12. Comparativa fase “trabajo matemático” de la actividad 1

Análisis a priori	Utilizando el Software ubicamos dos puntos en los siguientes dos intervalos de x. La coordenada en y nos dará el resultado que buscamos.
Docente 1	$1.49(80) + 21.98 = 119.2 + 21.98 = 141.18$ $Y = 1.49(90) + 21.98 = 134.1 + 21.98 = 156.08$
Docente 2	Para el año 2030 se tendría: $1.49(30) - 52.47 = 141.23$ Para el año 2040: $1.49(40) - 52.47 = 156.13$

En esta fase se trabaja con el modelo matemático que encontramos previamente para extraer los datos numéricos que nos servirán para resolver la actividad planteada. No se entra en detalles sobre lo que estos datos representan en el mundo real, ya que continuamos en el mundo matemático.

- El docente 1 realiza su trabajo matemático utilizando la función $Y = 1.49x + 21.98$, para ello sustituye un primer valor de $X = 80$ y obtiene un resultado $Y_1 = 141.18$, seguido de ello utiliza un segundo valor de $X = 90$ y obtiene un resultado $Y_2 = 156.08$
- El docente 2 hace uso también de la función que encontró como modelo de la situación, en este caso $Y = 1.49x - 52.47$, para ello sustituye un primer valor de $X = 30$ para obtener un resultado de 141.23 seguido de utilizar un segundo valor de $X = 40$ para obtener su segundo resultado de 156.13. Vemos que el docente 2 ya intenta dar una interpretación a estos valores, pues nos dice que para el año 2030 se tendría el primer resultado y para el año 2040 tendríamos el segundo.

Ambos docentes aplican el modelo matemático que obtuvieron anteriormente y trabajan sobre él para obtener resultados. Ambos realizan operaciones sustituyendo sus variables con los datos necesarios según su análisis para obtener las respuestas que nos pide el problema. Podemos observar que el docente 1 se encuentra en el mundo de las matemáticas completamente, ya que en

todo momento se limita a realizar sustituciones y operaciones matemáticas sin intentar contextualizar sus datos o resultados en el mundo real, sin embargo, el docente 2 no siguió adecuadamente el enfoque ya que se apresuró al contextualizar los datos y darle el significado en el mundo real, olvidando así que la fase de “trabajo matemático” se encuentra todavía en el mundo de las matemáticas. En esta fase se esperaba que los docentes realizaran sus cálculos sin hacer referencia a unidades o interpretaciones del mundo real.

Tabla 13. Comparativa fase “resultados matemáticos” de la actividad 1

Análisis a priori $y_1=141.95$ $y_2=162.24$	
Docente 1	141.18 millones de personas para el año 2030 en México 156.08 millones de personas para el año 2040 en México.
Docente 2	$y_1= 141.23$ $y_2= 156.13$

En esta fase se encuentran resultados numéricos concretos extraídos del modelo matemático. Al encontrarnos dentro del mundo matemático estos resultados carecen de unidades y de interpretaciones del mundo real.

- El docente 1 presenta sus resultados diciendo que habrá 141.18 millones de personas para el 2030 en México y 156.08 millones de personas para el 2040. Observamos que sus respuestas se encuentran contextualizadas dentro de la situación real.
- El docente dos muestra sus resultados diciendo que $Y_1=141.23$, mientras que $Y_2=156.13$. En este caso el docente no menciona unidades y se limita a mostrar los resultados que el modelo arrojó para sus literales.

Tanto el docente 1 como el docente 2 muestran los resultados obtenidos del modelo que encontraron previamente. Mientras que el docente 2 hizo un buen trabajo mostrando únicamente

sus resultados matemáticos, el docente 1 menciona unidades y le da un contexto a sus resultados, lo que no es consistente con el enfoque de esta fase que se encuentra aún en el mundo matemático.

Tabla 14. Comparativa fase “interpretación” de la actividad 1

Análisis a priori	Para regresar al mundo real necesitamos regresar las unidades y las correcciones que les hicimos a nuestros datos, por lo que para los datos del número de habitantes tendríamos que reescribirlos como: $Y = y * 10^6 \text{habitantes}$ En donde y es el resultado que obtuvimos en el mundo matemático y Y es el dato que tendremos en el mundo real. Para obtener los datos de los años necesitamos reescribir los datos como: $X = (x + 1950) \text{años}$ Donde x son los números del eje x del mundo matemático y X son los datos de los años en el mundo real. Así, podemos interpretar que: Para el año 2030 habrá 141.95 millones de habitantes Para el año 2040 habrá 162.24 millones de habitantes
Docente 1	La función $Y = 1.49x + 21.98$ nos relaciona el aumento de la población mexicana desde el año 1950 al 2020, y nos proporciona que en México existirán para el año 2030, 141.18 millones de personas, y para el año 2040 156.08 millones de personas.
Docente 2	Se prevé que la población en México seguirá incrementando las siguientes décadas.

En la fase “interpretación” pasamos del mundo matemático al mundo real. Se reintroducen unidades y demás correcciones realizadas a los datos para que tengan un significado en el contexto del problema real, Esto permite dar sentido en el mundo real a los resultados numéricos obtenidos anteriormente en el mundo matemático.

- El docente 1 nos menciona la funcionalidad de su modelo y, le da una interpretación a sus datos diciéndonos que en México habrá 141.18 millones de personas para el año 2030 y 156.08 millones de personas para el año 2040. No menciona el método para regresar las unidades a su información, aunque ya las tenía desde la fase anterior.
- El docente 2 menciona que se prevé un aumento de la población en México para las siguientes décadas pero no proporciona las correcciones para reintroducir los datos ni le da alguna otra interpretación a los resultados obtenidos matemáticamente.

El docente 1 reintroduce los datos con unidades y proporciona una interpretación concreta para que sus resultados tengan sentido en el mundo real pero no menciona el método por el cual ha añadido las unidades o ha tratado sus resultados. El docente 2 menciona de manera general un aumento poblacional en México para los siguientes años sin proporcionar valores numéricos específicos, correcciones a los datos ni interpretaciones a sus resultados lo que limita su comprensión en el contexto real.

Tabla 15. Comparativa fase “resultados reales” de la actividad 1

Análisis a priori	Según nuestro modelo matemático se estima que la población en México siga creciendo de forma polinómica grado 4. Para el 2030 se espera que la población sea de unos 141.95 millones de habitantes aproximadamente, mientras que para el 2040 se espera que haya 162.24 millones de habitantes aproximadamente.
Docente 1	México tendrá una población de 141.18 millones para 2030 y ,156.08 millones de personas para 2040, si el aumento de la población sigue comportándose de la misma manera que en el lapso de 1950 a los 2020.
Docente 2	Para el 2030 la población será de 141.23 millones de habitantes y para el 2040 de 156.13 millones de habitantes.se incrementa casi el doble en los últimos 50 años.

En esta fase se presentan los resultados obtenidos del modelo completamente contextualizados para ser entendidos en el mundo real y dentro del contexto del problema estudiado. Se analiza que los datos obtenidos tengan sentido con lo planteado en el problema y se ajusten a la realidad.

- El docente 1 nos dice que en México habrá 141.18 millones de personas para 2030 y 156.08 millones de personas para 2040 siempre y cuando la población siga comportándose como lo ha hecho en el lapso 1950-2020.
- El docente 2 presenta sus datos diciéndonos que para el 2030 la población será de 141.23 millones de habitantes y para el 2040 será de 156.13 millones de habitantes. Destaca que estas estimaciones implican un crecimiento significativo en la población. No se menciona que esta población se refiere a la población mexicana.

Ambos docentes presentan su información contextualizada de la población estimada en México para los años 2030 y 2040 basadas en el modelo matemático desarrollado. El docente 1 sugiere que estas estimaciones serán válidas si la población se sigue comportando de manera consistente al periodo 1950-2020 pero que cualquier cambio de comportamiento podría afectar la precisión del modelo. El docente 2 destaca el aumento significativo de la población, pero olvidó contextualizar completamente su respuesta al mencionar que se trataba de la población en México.

Tabla 16. Comparativa fase “validación” de la actividad 1

Análisis a priori	Para lograr validar nuestro modelo se tendrá que esperar a esos años y ver que los resultados de nuestras aproximaciones coincidan con los datos reales. En dado caso nuestro modelo sería exitoso y habría modelado la realidad por lo que ahora formaría parte de la representación mental de la persona, pues se quedaría grabado en su mente que esta información fue cierta.
Docente 1	Tendremos que esperar 7 y luego, 10 años más para corroborar que nuestros cálculos se cumplan y se vuelvan correctos.
Docente 2	

Esta fase implica verificar si las estimaciones del modelo coinciden con los datos reales, lo que demostraría que el modelo es efectivo en la predicción de la situación real.

- El docente 1 reconoce que para validar los datos obtenidos debemos esperar el tiempo suficiente para recolectar los datos reales y verificar que coincidan con los obtenidos a través del modelo matemático creado.
- El docente 2 no proporciona una respuesta a esta fase, por lo que no ofrece comentarios sobre el proceso de validación

El docente 1 reconoce la importancia confirmar la precisión del modelo a partir de comparar los resultados obtenidos con los datos reales que se recolectarán en años venideros. El docente 2 no proporcionó respuesta por lo que no podemos hablar de la comprensión que tuvo sobre esta fase del ciclo de modelado.

4.1.2 Análisis de la segunda actividad

Tabla 17. Comparativa fase “situación real” de la actividad 2

Análisis a priori	Es el problema como tal. Debido a la aparición del COVID-19 en México el número de casos acumulados (personas que en algún momento han tenido la enfermedad) ha aumentado conforme pasa el tiempo según nos muestra la tabla con datos proporcionados por el Gobierno de México. Nuestro deber es encontrar un modelo matemático que describa la situación y estimar el número de casos en un futuro.
Docente 1	La cantidad de casos de COVID en México del año 2020 al 2023
Docente 2	Incremento de personas contagiadas por COVID 19 en México. Se pretende calcular el número de casos esperados para enero de 2024 teniendo información cuatrimestral desde enero 2020 hasta mayo de 2023.

En la fase “situación real” extraemos el fenómeno a ser estudiado de la realidad, por lo que debemos tener en cuenta todos los aspectos importantes de la situación.

- El docente 1 presenta una comprensión básica sobre tratar con la cantidad de casos de COVID en México del año 2020 al 2023 pero no profundiza en la interpretación de los datos proporcionados. No menciona la necesidad de desarrollar un modelo matemático.
- El docente 2 ofrece una respuesta más detallada y menciona el interés por calcular el número de casos esperados para enero de 2024 utilizando la información cuatrimestral de la tabla proporcionada.

El docente 1 si bien reconoció que el problema abordaba la cantidad de casos registrados de COVID en México durante el periodo 2020-2023, ofreció una respuesta bastante general sin profundizar en la interpretación de los datos, mencionar de dónde se sacarían o recalcar la necesidad de desarrollar un modelo matemático. El docente 2 mostró una comprensión más clara mencionando explícitamente el propósito de calcular el número de casos esperados para enero de 2024, lo que muestra un enfoque más adecuado para la modelación, sin embargo, olvidó mencionar de dónde sacaría los datos.

Tabla 18. Comparativa fase “entendiéndola tarea” de la actividad 2

Análisis a priori	Con el fin de estudiar el fenómeno se nos pide que encontremos un modelo que describa el comportamiento infeccioso del COVID-19 en México y estimemos el número de casos para enero de 2024
Docente 1	Se requiere estimar el número de casos acumulados para enero de 2024.
Docente 2	Tratar de encontrar un modelo matemático mediante el cual se describa el comportamiento infeccioso de COVID 19 en México y estimar el número de casos que se esperan para enero de 2024.

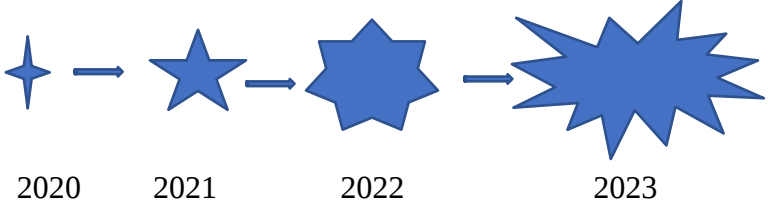
En esta fase se espera que los docentes comprendan el propósito del problema abordando el objetivo principal.

- El docente 1 enfoca su respuesta a estimar el número de casos acumulados para enero de 2024, lo cual es importante, pero podría haberse beneficiado de mencionar la necesidad de desarrollar un modelo matemático para lograr esta estimación.

- El docente 2 proporciona una respuesta más completa. Menciona la necesidad de encontrar un modelo matemático que describa el comportamiento infeccioso del COVID-19 en México y plantea la tarea de estimar el número de casos esperados para enero de 2024.

El docente 1 se enfoca en el objetivo de estimar el número de casos para enero de 2024 sin mostrar una clara necesidad de desarrollar un modelo como parte del proceso mientras que el docente 2 presenta una respuesta más completa al reconocer la tarea de encontrar un modelo de la situación para después estimar con él el número de casos esperado para enero de 2024.

Tabla 19. Comparativa fase “representación mental” de la actividad 2

Análisis a priori	Aquí van las imágenes o demás representaciones que aparecen en nuestra mente al entender el problema. Puedo imaginar un virus que se va transmitiendo de una persona a otra y cada vez va infectando a más y más exponencialmente. También puedo imaginar una gráfica que crece cada vez más acercándose a ser exponencial ya que los contagios empiezan de a poco pero crecer mucho conforme más gente se va infectando.
Docente 1	Me imagine a personas con cubrebocas, todas las personas en la calle con cubrebocas y conforme pasaban los meses disminuían las personas con cubrebocas, también imagine graficas con hipérboles.
Docente 2	Contagio acelerado y cada cuatrimestre mayor. Relación entre el número de personas contagiadas y el paso del tiempo. 

En esta fase los docentes desarrollan representaciones mentales que les ayudan a comprender y a abordar el problema, como pueden ser imágenes, gráficos, diagramas u otras herramientas que faciliten la comprensión de la situación.

- El docente 1 menciona una representación visual relacionada con el uso del cubrebocas y la disminución gradual de personas usándolo a lo largo del tiempo. También menciona la imaginación de gráficas con hipérbolas, lo que sugiere una tentativa de comprender el comportamiento de la pandemia.
- El docente 2 menciona un contagio acelerado que es mayor cada cuatrimestre junto con un esquema visual que representa el incremento del problema.

Ambos docentes reconocen las representaciones mentales que surgen en esta fase. El docente 1 imaginó una representación visual considerando que la enfermedad iba disminuyendo, sin tomar en cuenta que los datos mostraban un aumento en el número acumulado de casos, sin embargo, hizo un buen trabajo al tratar de visualizar una posible relación entre sus datos. El docente 2 proporciona una representación gráfica que ilustra un aumento de casos a lo largo del tiempo y se dio cuenta de su crecimiento acelerado, lo que toma en cuenta la información de la tabla.

Tabla 20. Comparativa fase “simplificar/estructurar la tarea” de la actividad 2

Análisis a priori	Aquí nos quedamos con los datos que nos van a ser útiles para resolver nuestro problema, es decir, escogemos las variables. Para este problema vamos a trabajar con el tiempo medido en meses y con el número de infectados medido en millones de personas, ya que la cantidad de mexicanos es enorme. Podemos ver que el número de personas crece considerablemente en cierto periodo al principio, pero al final crece muy poco. Necesitaremos de una función que nos relacione cómo crece el número de personas que han padecido COVID (variable dependiente) con el paso del tiempo por cuatrimestre (variable independiente).
Docente 1	Los meses (x) a estudiar son enero, mayo y septiembre de los años 2020, 2021, 2022, y 2023 hasta el mes de mayo con su respectiva cifra en millones (y) de casos COVID. Además, Por cada 4 meses se da el número de casos acumulados, los datos están truncados en mayo del 2023 de manera que, no se tiene septiembre y se necesita calcular enero 2024.

Docente 2	Se pretende encontrar la relación entre las variables tiempo que llamaremos con la variable “x” y la cantidad de personas contagiadas que nombraremos con la variable “y”.
-----------	--

En esta fase se espera que los docentes identifiquen los elementos clave que serán útiles para la resolución de la actividad, lo que puede incluir seleccionar variables, unidades de medida y crear una estructura clara para el modelado.

- El docente 1 proporciona una respuesta que se enfoca en la elección de variables del tiempo (le asigna una “x”) medido en meses y el número de casos medido en millones de casos (le asigna una “y”). Aunque selecciona las variables no profundiza en cómo estas se relacionan.
- El docente 2 menciona la intención de encontrar una relación entre la variable “tiempo” (que denomina “x”) y la variable “cantidad de personas contagiadas” (que denomina “y”). Muestra una comprensión adecuada de la necesidad de encontrar variables y una relación entre ellas, pero no profundiza en su análisis.

Ambos docentes reconocen las variables adecuadas y le asignan una literal siendo “x” para el caso del tiempo y “y” para el número de personas. El docente 1 selecciona las variables y menciona las unidades que utilizará para ellas, pero no profundiza en un análisis de la posible relación que exista entre estas. El docente 2 reconoce las variables y reconoce la necesidad de encontrar una relación, pero no profundiza en su análisis. Ambos docentes presentan limitaciones en su respuesta ya que les falta crear una estructura clara para el modelado.

Tabla 21. Comparativa fase “modelo real” de la actividad 2

Análisis a priori	Desde su llegada a México, el COVID-19 ha infectado a millones de personas como nos lo muestra la tabla con información extraída del Gobierno de México. Esta tabla nos da la información de cada cuatro meses partiendo de enero de 2020, ya que la enfermedad llegó a México por esas fechas, y termina en mayo de 2023, el cuatrimestre más próximo al presente. También nos da información del número acumulado de personas que han presentado la enfermedad, medido en
-------------------	---

millones de personas. Vemos rápidamente que hubo fechas en las que aumentó rápidamente y otras (principalmente al final) en las que fue más lento.	
Docente 1	Se relaciona que, existen aumentos el conteo de casos acumulados de COVID cada 4 meses sin embargo, también existen meses donde existe una ligera disminución,
Docente 2	Analizando las variables, la variable tiempo aumenta y también aumenta la variable población contagiada a ritmo no constante y teniendo en algunos cuatrimestres ritmo menos acelerado que en otros.

En la fase “modelo real” se establecen las bases para la resolución del problema. Se profundiza en la comprensión de la situación entendiendo completamente su naturaleza, identificando patrones, relaciones y posibles variables clave.

- El docente 1 reconoce el aumento en el conteo de casos acumulados de COVID cada 4 meses y menciona que hubo lapsos con una ligera disminución lo que demuestra el reconocimiento de patrones entre las variables.
- El docente 2 analiza las variables “tiempo” y “población contagiada” reconociendo que los contagios aumentan a un ritmo no constante, con algunos cuatrimestres experimentando un ritmo menos acelerado que otros. Esta respuesta muestra una comprensión adecuada de la variabilidad de los datos y como las variables se relacionan, lo que ayudará mucho en la construcción del modelo.

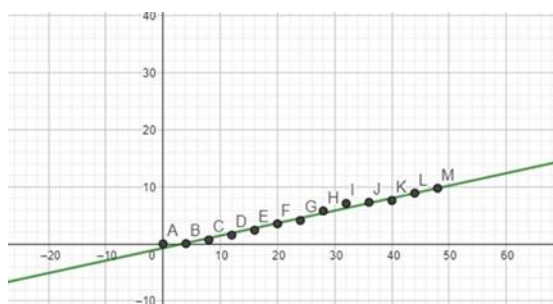
Ambos docentes muestran la necesidad de analizar los datos es esta fase. El docente 1 observa patrones entre las variables, pero pudo beneficiarse de una explicación y análisis más detallado. El docente 2 reconoció una relación no constante entre las variables “tiempo” y “población contagiada”, lo que es una observación importante en el desarrollo del modelo matemático. A ambos docentes les falta mencionar de dónde sacarán los datos.

Tabla 22. Comparativa fase “matematizando” de la actividad 2

Análisis a priori	Para este caso haremos uso de la herramienta digital GeoGebra. Ya que estaremos trabajando en línea y todos los participantes contarán con el software podremos encontrar un modelo con mayor facilidad, en menor tiempo y con mayor precisión. Para pasar del mundo real al mundo matemático tenemos que deshacernos de las unidades, además, para trabajar más cómodamente haremos algunos ajustes a nuestros datos. Para los datos sobre los casos acumulados reescribiremos los números de la siguiente forma: $y = \frac{Y}{* 10^6 personas}$ Donde Y son los datos de la tabla. De esta forma iremos obteniendo datos más pequeños para trabajar cómodamente y sin unidades, ya que estamos ingresando al mundo matemático. Para el caso del tiempo dependerá del mes y año del que se esté hablando, en cada caso tendremos que dividir entre el mismo mes y el mismo año y darle un número entero partiendo desde el cero según su posición en la lista. Esto con el propósito de que no contengan unidades y que podamos tener números pequeños para trabajar cómodamente. Abrimos la hoja de cálculo de GeoGebra e introducimos los datos extraídos del mundo real que nos proporciona nuestra tabla. Gracias a GeoGebra pasaremos del mundo real al mundo matemático. Creamos una lista de puntos y ajustamos a una gráfica que concuerde mejor con nuestros datos. Jugamos con las opciones hasta encontrar la que mejor se ajuste. Encontramos que la gráfica $g(x)$ que mejor se ajusta a nuestros datos es una gráfica polinomial grado 7
Docente 1	de manera que una función polinomial sería el modelo adecuado para la representación real ya que los datos generarían en una gráfica varios picos y valles.

Docente 2

MES/AÑO	MESES TRANSCURRIDOS	MILLONES DE PERSONAS CONTAGIADAS	INCREMENTO EN MILLONES DE PERSONAS CONTAGIADAS
ene-20	0		
may-20	4	0.037	0.037
sep-20	8	0.681	0.644
ene-21	12	1.533	0.852
may-21	16	2.38	0.847
sep-21	20	3.509	1.129
ene-22	24	4.092	0.583
may-22	28	5.77	1.678
sep-22	32	7.085	1.315
ene-23	36	7.278	0.193
may-23	40	7.594	0.316



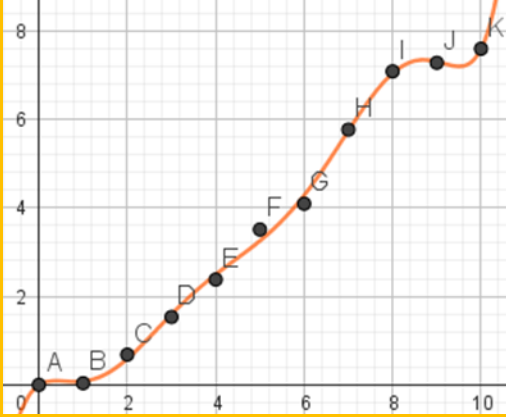
En esta fase buscamos traducir los datos del mundo real al mundo matemático, preparándonos para trabajar con números y realizar cálculos y análisis matemáticos. Se busca simplificar los datos y encontrar la forma de hallar la función o relación matemática que describa la situación.

- El docente 1 menciona una función polinomial como el modelo más adecuado para representar los datos debido a que encuentra picos y valles, sin embargo, no proporciona detalles específicos de cómo llegó a esta conclusión ni muestra evidencia de la preparación de los datos para pasar del mundo real al matemático.
- El docente 2 muestra una tabla en la que agrega información como los meses transcurridos y el incremento en millones de personas. A pesar de observar que el incremento en el número de personas contagiadas no es constante el docente presenta una gráfica lineal lo que no concuerda con su análisis. Aunque muestra un intento de matematización al representar los datos en una tabla y una gráfica, la respuesta no refleja una comprensión sólida de cómo matematizar los datos de manera efectiva.

Las respuestas de ambos docentes presentan limitaciones. El docente 1 menciona una función polinomial como el modelo más adecuado pero no ofrece detalles sobre cómo llegó a tal conclusión ni muestras un manejo de los datos para pasar del mundo real al matemático. El docente 2 muestra

una tabla y una gráfica pero no muestra una comprensión sólida de cómo matematizar datos de una forma efectiva ya que la gráfica no concuerda con el análisis de los datos presentado.

Tabla 23. Comparativa fase “modelo matemático” de la actividad 2

Análisis a priori	$g(x) = 1.53x^{10} - 0.005x^6 + 0.065x^5 - 0.404x^4 + 1.218x^3 - 1.444x^2 + 0.657x - 0.007$ 
Docente 1	$= 0x^{10} + 0x^9 - 0.03x^8 + 0.4x^7 - 2.93x^6 + 13.42x^5 - 38.42x^4 + 65.57x^3 - 59.41x^2 + 21.44x$
Docente 2	$Y = 0.22x - 0.74$

En esta fase se encuentran resultados numéricos concretos extraídos del modelo matemático. Al encontrarnos dentro del mundo matemático estos resultados carecen de unidades y de interpretaciones del mundo real.

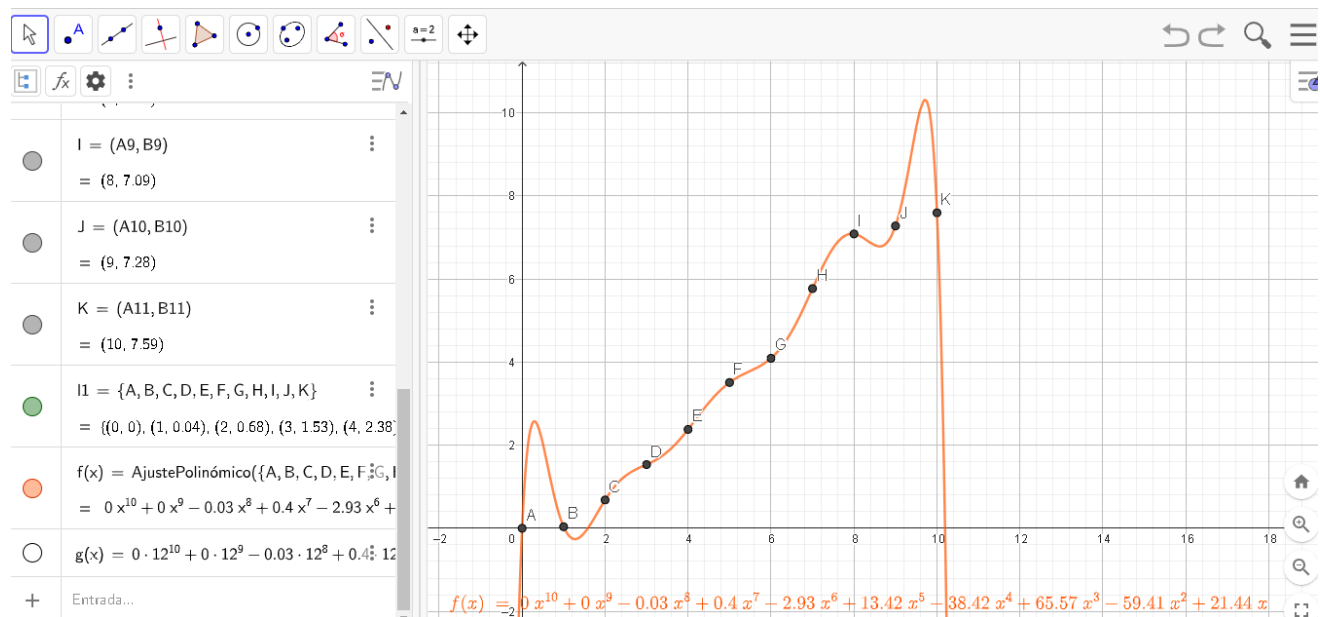
- El docente 1 presenta una función polinomial de grado 10 como modelo matemático propuesto, aunque por el ajuste de redondeo manejado en su aplicación GeoGebra los coeficientes de las literales con grado 10 y 9 se muestran como 0. Esta respuesta indica un esfuerzo por proponer una función matemática; pero, la falta de precisión en el resultado, dificultan la evaluación de su modelo.
- El docente 2 presenta una ecuación lineal como modelo propuesto. Esta respuesta representa una simplificación significativa en comparación con la complejidad de los datos

reales y podría no capturar adecuadamente la dinámica de la pandemia tal como se presenta en la tabla de datos.

Mientras el docente 1 propone un modelo más preciso y que se adecúa mejor a los datos, su falta de precisión al calibrar los decimales mostrados en su aplicación resultó en una representación incompleta de la función, lo que dificulta la evaluación del modelo. El docente 2 realizó una simplificación significativa de los datos reales, lo que resultó en un modelo de ecuación lineal que no se adecúa bien con los datos presentados sobre la dinámica de la pandemia.

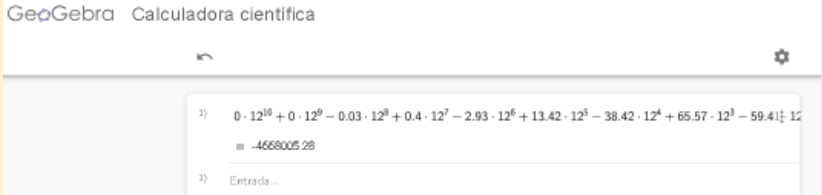
En los comentarios adicionales el docente 1 muestra una gráfica de la función que obtuvo como modelo. Dicha gráfica se muestra a continuación:

Gráfica de la actividad 2 propuesta por el docente



Podemos observar que de igual manera el docente no delimitó la gráfica de la función a los puntos en donde tuviera sentido tener información, mostrando puntos por debajo del eje de las Y lo que significaría personas no contagiadas en tiempos antes y después de los mostrados en la tabla.

Tabla 24. Comparativa fase “trabajo matemático” de la actividad 2

Análisis a priori	Ponemos los siguientes dos puntos en los siguientes intervalos del eje x que corresponderían a $x=11$ y $x=12$. El número que nos salga en el eje $y(x=12)$ será el número que buscamos
Docente 1	Resolver la función: en este caso utilizando la calculadora de GeoGebra 
Docente 2	$Y1 = 0.22(44) - 0.74$ $Y1 = 8.94$ $Y2 = 0.22(48) - 0.76$ $Y2 = 9.82$

En esta fase se trabaja con el modelo matemático que encontramos previamente para extraer los datos numéricos que nos servirán para resolver la actividad planteada. No se entra en detalles sobre lo que estos datos representan en el mundo real, ya que continuamos en el mundo matemático.

- El docente 1 menciona su método de trabajo a partir de la utilización de la calculadora gráfica de GeoGebra. En la imagen que presenta muestra cómo sustituye la variable “x” por un 12 para que la calculadora le arroje el resultado -4668005.28. No se proporciona más detalles o resultados.
- El docente 2 realiza cálculos específicos utilizando la ecuación del modelo matemático propuesto. Calcula los valores para Y1 y Y2 sustituyendo con $X1=44$ y $X2=48$ respectivamente.

Ambos docentes realizan cálculos matemáticos en esta fase, pero haciendo uso de distintas herramientas. El docente 1 hace uso de la tecnología y nos menciona que utilizará la calculadora

del programa GeoGebra para realizar sus cálculos. El docente 2 por su parte realiza sustituciones directamente sobre su modelo y proporciona resultados numéricos concretos.

Tabla 25. Comparativa fase “resultados matemáticos” de la actividad 2

Análisis a priori	$y(x=12)=50$
Docente 1	-4,668,005.28
Docente 2	Y1= 8.94 Y2= 9.82

En esta fase se encuentran resultados numéricos concretos extraídos del modelo matemático. Al encontrarnos dentro del mundo matemático estos resultados carecen de unidades y de interpretaciones del mundo real.

- El docente 1 presenta un resultado negativo con un valor muy alto
- El docente 2 proporciona dos resultados: Y1= 8.94 y Y2=9.82, que representan valores calculados para puntos específicos en el modelo.

Ambos docentes presentan valores que difieren significativamente del valor presentado en el análisis a priori. Esto indica una discrepancia importante en el modelo matemático propuesto y en los resultados obtenidos. Ninguna respuesta contiene unidades ni está contextualizada lo que indica que ha entendido que aún se encuentran dentro del mundo de las matemáticas.

Tabla 26. Comparativa fase “interpretación” de la actividad 2

Análisis a priori	Para regresar al mundo real tenemos que recuperar las unidades y reescribir con los cambios que hicimos. Para recuperar los datos con el número de casos acumulados tendríamos que realizar la operación $Y = y * 10^6 \text{ personas}$
-------------------	---

Donde y es el número que obtuvimos del mundo matemático y Y es el dato de casos acumulados del mundo real. Para el dato del tiempo tendríamos que observar el número que tienen y relacionarlo con la posición en la lista para asignar un mes y un año. En el caso del número 11 correspondería a septiembre de 2023 y el número 12 a enero de 2024. Con esta información tendríamos que: 50 millones de casos acumulados por COVID-19 habrá en enero de 2024.	
Docente 1	-4,668,005.28 millones de casos (personas) acumulados en enero de 2024
Docente 2	El valor de Y_1 representa la población contagiada en México en septiembre de 2023 que según nuestro modelo matemático será de 8.94 millones de personas. Y en enero de 2024 (Y_2) será de 9.82 millones de personas.

En la fase “interpretación” pasamos del mundo matemático al mundo real. Se reintroducen unidades y demás correcciones realizadas a los datos para que tengan un significado en el contexto del problema real, Esto permite dar sentido en el mundo real a los resultados numéricos obtenidos anteriormente en el mundo matemático.

- El docente 1 agrega las unidades a sus datos. Ahora menciona que habrá -4,668,005.28 millones de casos acumulados para enero de 2024 según las estimaciones de su modelo. No se da la interpretación al signo negativo.
- El docente 2 introduce las unidades a los resultados y proporciona una interpretación a sus dos resultados. Nos menciona que el primer resultado corresponde al cuatrimestre septiembre de 2023 en donde habrá 8.94 millones de personas contagiadas, mientras que el segundo dato representa el cuatrimestre de enero de 2024 en el que habrá 9.82 millones de personas según sus estimaciones.

El docente 1 proporciona un resultado al que no le da una interpretación en el contexto del problema y pareciera no tener sentido en el mundo real ya que se habla de un número negativo de casos

acumulados. El docente 2 presenta datos numéricos que se interpretan como la población contagiada para los siguientes cuatrimestres (septiembre de 2023 y enero de 2024) según el modelo matemático propuesto. Ambos valores difieren del valor propuesto en el análisis a priori de 50 millones de casos acumulados para enero de 2024, lo que indica una discrepancia importante entre los modelos propuestos.

Tabla 27. Comparativa fase “resultados reales” de la actividad 2

Análisis a priori	El modelo matemático que mejor se ajusta a los datos obtenidos hasta el momento de casos acumulados por COVID-19 en México es un modelo polinomial de grado 7. Siguiendo este comportamiento, para enero de 2024 habrá 50 millones de casos acumulados de COVID-19 en México. Sin embargo, podemos ver en la representación gráfica de nuestro modelo matemático que para el periodo enero 2020 – mayo 2023 cuadra muy bien; pero, para años posteriores se dispara abruptamente, lo que puede no coincidir con la realidad ya que gracias a la vacunación vemos que los casos cada vez van siendo menores. Todo indica a que nuestro modelo no servirá para fechas posteriores a este lapso por lo que nuestra aproximación de que para enero de 2024 habrá 50 millones de casos acumulados no será efectiva.
Docente 1	De acuerdo a la función polinómica de grado 10, se obtiene que para enero de 2024 los casos acumulados de COVID 19 disminuirán. Entonces a medida que pasan los años los casos acumulados descenderán.
Docente 2	Respecto al análisis de datos que teníamos y los obtenidos, en septiembre 2023 en México habrá un incremento considerable de personas contagiadas respecto a mayo 2023, casi de cuatro veces más; en enero 2024 el incremento será mucho menor.

En esta fase se presentan los resultados obtenidos del modelo completamente contextualizados para ser entendidos en el mundo real y dentro del contexto del problema estudiado. Se analiza que los datos obtenidos tengan sentido con lo planteado en el problema y se ajusten a la realidad.

- El docente 1 no presenta sus resultados contextualizados. Menciona que de acuerdo a la función polinómica de grado 10, los casos acumulados de COVID-19 disminuirán para enero de 2024. Señala que a medida que pasen los años los casos acumulados irán descendiendo, lo que puede ser su interpretación al signo negativo que aparece en su resultado.
- El docente 2 tampoco presenta sus resultados contextualizados. Realiza una comparación entre los datos de septiembre de 2023 y mayo de 2023 indicando un aumento considerable en septiembre y un incremento mucho menor en enero de 2024.

Ninguno de los docentes presenta sus resultados ya contextualizados. El docente 1 realiza una mala interpretación al signo negativo de su resultado diciendo que significa una disminución en el número de casos acumulados de personas contagiadas por COVID-19, sin embargo, el número de casos acumulados no puede decrecer ya que es el número total de personas que en algún momento tuvieron la enfermedad, es decir, solo puede incrementar. El docente 2 por su parte menciona incrementos considerables para septiembre de 2023 y un incremento menor para enero de 2024. Ambas respuestas carecen de una evaluación crítica del modelo y su capacidad para predecir resultados del mundo real.

Tabla 28. Comparativa fase “validando” de la actividad 2

Análisis a priori	Se necesita esperar a enero de 2024 para ver si nuestro modelo predice la realidad pero haciendo el análisis de que gracias a la vacunación los casos van disminuyendo (como también podemos notar en los últimos meses de la tabla) y viendo que en nuestro modelo después del periodo mayo 2023 los números se disparan podemos pronosticar que no se cumplirá con lo predicho por el modelo.
Docente 1	Esperar a enero de 2024 para volverá a hacer conteos.

Docente 2	Se deberá corroborar la información obtenida con el sistema en los meses respectivos septiembre 2023 y enero 2024.
-----------	--

Esta fase implica verificar si las estimaciones del modelo coinciden con los datos reales, lo que demostraría que el modelo es efectivo en la predicción de la situación real.

- El docente 1 menciona que se necesita esperar hasta enero de 2024 para volver a hacer conteos. Esta respuesta indica una comprensión de la fase de validación y la necesidad de comparar resultados obtenidos del modelo con los resultados reales en el futuro.
- El docente 2 sugiere que se debe corroborar la información obtenida con el sistema en los meses de septiembre de 2023 y enero de 2024. Esta respuesta también refleja una comprensión de la fase de validación y la necesidad de comparar los resultados del modelo con los de la realidad.

Ambos docentes reconocen la importancia de comparar los resultados de sus modelos con los obtenidos de la realidad, por lo que habría que esperar hasta enero de 2024 para recolectar datos reales y validar si nuestros modelos fueron precisos al predecir los resultados.

4.1.3 Análisis de la tercera actividad

Para la tercera actividad los docentes propusieron sus propios ejercicios de modelación basados en los temas que abordarían con sus alumnos al principio del próximo ciclo escolar. El docente 1 propuso el siguiente problema:

Problema de la actividad 3 propuesta por el docente 1

Omar realiza su corrida semanal de 20 kilómetros en 2 horas. Si su velocidad es de 1 kilómetro cada 6 min, ¿en cuántos minutos recorrió 5280 m?

Este problema no representa un problema de modelación matemática tradicional ya que para su resolución no es necesario la creación de un modelo y puede resolverse por algoritmos matemáticos

más simples. Para que sea un problema de modelación se necesita de un contexto más complejo y la necesidad de crear un modelo matemático para comprender o resolver el problema.

Analizaremos los pasos propuestos para la resolución de este problema para evaluar cómo abordó cada fase el docente 1.

Fase “situación real” actividad 3 docente 1

Recorrer una distancia (Km) en determinado tiempo(h)

El docente realiza una descripción bastante general del problema. No proporciona detalles específicos sobre la situación o el contexto en el que se encuentra el problema. No menciona datos ni propósitos.

Fase: “entendiendo la tarea” actividad 3 docente 1

Obtener el tiempo (min) que se tarda la persona en recorrer 5280 m

El docente reconoce la tarea principal de la actividad, en este caso, obtener el tiempo (en minutos) que una persona tarda en recorrer una distancia de 5280 m.

Fase: “representación mental” actividad 3 docente 1

Un niño corriendo por un camino sombreado y lindo paisaje, sudado, con un Smart watch donde se ven los 20 km en 2 h.

El docente crea una imagen mental del problema con una conexión poco sólida con la tarea matemática. La representación mental debe ayudar a la comprensión de la situación y cómo esta se relaciona con las matemáticas, pero esta representación no ayuda mucho con esta tarea.

Fase: “simplificar/estructurar la tarea” actividad 3 docente 1

Solo nos interesa: la distancia que está representada inicialmente en Km y el tiempo que se maneja primero en horas. Y se establece que, 1 km tiene 1000 m y que 1 h se compone de 60 min. Y debemos saber realizar conversión de unidades por regla de 3 o factor de conversión.

El docente identifica las variables “tiempo” y “distancia” además de sus unidades “horas” y “kilómetros” respectivamente, aunque también menciona la conversión de kilómetros a metros y de horas a minutos. En un problema de modelación matemática habría que encontrar una relación entre estas variables para ir creando una estructura además de explicar por qué se están utilizando las conversiones y cómo se relacionan con la situación del mundo real que se está modelando.

Fase: “modelo real” actividad 3 docente 1

Entonces Omar recorre 20 000 metros en 120 min o lo que es lo mismo, 1000 m cada 6 min.

El docente establece una relación entre la distancia recorrida y el tiempo que lleva. Muestra una comprensión sólida de cómo se relacionan las variables. En un problema de modelación esta fase sería esencial para encontrar un modelo matemático que represente la situación del mundo real al mencionar las variables, sus relaciones y la estructura general del problema.

Fase: “matematizando” actividad 3 docente 1

Se utiliza regla de tres para encontrar los minutos que tarda en recorrer 5280 m

El docente utiliza regla de tres simple, para encontrar su respuesta. Es una estrategia matemática adecuada si la velocidad a la que corría Omar es constante, cosa que no se especifica en el problema. En un problema de modelación matemática esta fase serviría para traducir la situación del mundo real en una expresión del mundo matemático que pueda ser utilizada para resolver el problema de manera cuantitativa.

Fase: “modelo matemático” actividad 3 docente 1

1 km-> 1000 m

20 km->

1 h -> 60 min

2 h ->

1000 m -> 6 min

5280 m ->

El docente establece las relaciones para realizar sus reglas de tres, primero para hacer conversiones y luego para encontrar su respuesta al problema. Esto no representa un modelo matemático ya que no es una representación de un sistema fenómeno o situación sino solo un algoritmo. Se presentan unidades cuando se encuentra dentro del mundo matemático.

Fase: “trabajo matemático” actividad 3 docente 1

$(20\text{Km})(1000\text{m})/1\text{Km} =$

$2\text{h}(60\text{ min}) / 1\text{ h} =$

$(5280\text{m})(6\text{min})/1000\text{ m}$

El docente realiza los cálculos matemáticos para obtener su respuesta a partir de realizar el algoritmo. No se manipula ningún modelo matemático porque no lo hay. Se presentan unidades cuando se encuentra en el mundo matemático.

Fase: “resultados matemáticos” actividad 3 docente 1

20 000 m

120 min

31.68 min

El docente presenta sus resultados con unidades olvidándose que se encuentra dentro del mundo de las matemáticas.

Fase: “interpretación” actividad 3 docente 1

De acuerdo al método de “regla de tres” para convertir unidades; podemos obtener que Omar tardaría 31.68 min en recorrer los 5280 metros más.

El docente proporciona una explicación al resultado obtenido. No muestra cómo manejó los datos para regresar del mundo matemático al mundo real.

Fase: “resultados reales” actividad 3 docente 1

Omar tardó 31.68 min en recorrer 5280 m del total de distancia que tuvo que correr en 2 m

Presenta sus resultados con unidades y contexto. No hay información adicional relevante que se deba interpretar o dado que sus resultados no proceden de un modelo matemático.

Fase: “validación” actividad 3 docente 1

Podría observar el smartwatch y fijarse en la distancia el tiempo que se llevó. o realizar otra regla de tres, pero, ahora relacionando:

31.68min -> 5280 m

120 min ->

El docente propone dos formas de validación. La primera es efectiva dado que contrasta los datos obtenidos matemáticamente con datos extraídos de la realidad, lo cual es la forma indicada de validar el modelo (en caso de que lo hubiera), sin embargo, propone también otra forma de validar haciendo uso de otra regla de tres (ahora con unidades convertidas) lo que no implica una validación en el mundo real por lo cual es una forma incorrecta de hacerlo.

Para la resolución de esta actividad el docente 2 propuso el siguiente problema:

Problema de la actividad 3 propuesta por el docente 2

Problema: Derivado de la inscripción de alumnos en el ciclo que comienza, la cantidad de mujeres inscritas representa el 40% del total de inscritos. Si se inscribieron 24 mujeres, determina cuántos alumnos se inscribieron en total para el ciclo 2023-2024.

Este problema no se trata de un problema de modelación matemática sino de un problema de aplicación de conceptos matemáticos, específicamente relacionados con el cálculo de porcentajes que también puede resolverse mediante regla de tres. El problema no involucra la creación de un modelo matemático que describa una situación del mundo real, ni requiere el uso de datos reales para hacer predicciones o tomar decisiones. De igual forma analizaremos los pasos que siguió el docente 2 para resolver el problema.

Fase “situación real” actividad 3 docente 2

Encontrar la cantidad de alumnos inscritos en el presente cicloescolar.

El docente no extrae el fenómeno ni los datos o información más importante de la realidad, solo reconoce el propósito de la tarea a realizar. No se presenta una situación del mundo real, solo se describe una actividad.

Fase: “entendiendo la tarea” actividad 3 docente 2

Se debe encontrar la cantidad total de alumnos entre mujeres y hombres inscritos. Se sabe que del total la cantidad de mujeres representa el 40%

El docente reconoce la tarea principal de la actividad, en este caso, encontrar la cantidad total de alumnos hombres y mujeres inscritos en el ciclo escolar.

Fase: “representación mental” actividad 3 docente 2

Entonces tenemos que la cantidad de alumnos hombres es mayor que la cantidad de alumnas inscritas:



El docente crea un elemento visual relacionando el contenido del problema con una gráfica de pastel lo que es una buena representación mental que relaciona la descripción de la situación con el contenido matemático del mismo.

Fase: “simplificar/estructurar la tarea” actividad 3 docente 2

Debo encontrar la cantidad de alumnos hombres que se inscribieron y que representa el 60% para finalmente conocer el total de alumnos (mujeres+hombres) inscritos.

El docente reconoce que las variables en juego podrían ser la cantidad de hombres y mujeres que se inscribieron en el curso sin embargo no les asigna literales a fin de crear una estructura para el modelado, sino que hace un análisis de cómo encontrar la solución. Aunque el docente ha creado una estructura para resolver el problema, aún no se trata de una actividad de modelación.

Fase: “modelo real” actividad 3 docente 2

Si el 40% (mujeres) son 24 alumnas. Que cantidad de alumnos es el 60% restante.

El docente utiliza la información proporcionada para reconocer que la cantidad de alumnos restante para completar el 100% es 60%, sin embargo, aunque realiza cálculos matemáticos y establece una

estructura no establece relaciones entre variables ni proporciona información para comprender la naturaleza de la situación. No se prepara el camino para crear un modelo matemático ya que el problema no amerita la creación de uno.

Fase: “matematizando” actividad 3 docente 2

Analizando:

40% es a 24 como

60% es a x

X representará la cantidad de alumnos hombres

El docente utiliza regla de tres simple, para encontrar su respuesta. Aparece la literal x que representa la cantidad de alumnos hombres. En su análisis compara el 40% con 24 sin darle una unidad o significado al número 24. No existe un tratamiento de los datos para pasar al mundo matemático.

Fase: “modelo matemático” actividad 3 docente 2

El problema se puede resolver mediante la Teoría de las proporciones quedando el planteamiento de la siguiente manera:

Porcentajes		Alumnos
40	↔	24
60	↔	x

El docente establece las relaciones para realizar su regla de tres. El docente plantea una estrategia válida para la resolución del problema, pero no propone un modelo matemático ya que no es una representación de un sistema fenómeno o situación sino solo un algoritmo.

Fase: “trabajo matemático” actividad 3 docente 2

Resolvemos la regla de tres:

$$x = (60)(24)/40x = 36$$

**Si x es la cantidad de alumnos y y la cantidad de alumnas entonces:
 $x+y=z$ $24+36=60$**

Donde z representa la cantidad total de alumnos inscritos.

El docente realiza los cálculos matemáticos para obtener su respuesta a partir de realizar el algoritmo. No se manipula ningún modelo matemático porque no lo hay. Realiza sus operaciones para encontrar el valor de x . En esta fase el docente incluye la variable “ y ” como la cantidad de alumnas mujeres y la variable “ z ” como la cantidad total de alumnos inscritos. Aparecen interpretaciones a sus resultados cuando aún se encuentra en el mundo de las matemáticas.

Fase: “resultados matemáticos” actividad 3 docente 2

El resultado de x representa la cantidad de alumnos, es decir el 60% de alumnos inscritos. Así que hay 36 alumnos inscritos.

El docente da sentido al valor que encontró para la variable x y presenta sus resultados con unidades e interpretación olvidando que estos resultados pertenecen al mundo matemático y son valores puramente numéricos.

Fase: “interpretación” actividad 3 docente 2

En el colegio se inscribieron 24 alumnas y 36 alumnos.

El docente presenta sus resultados con unidades y contextualizados sin dar explicaciones ni análisis.

Fase: “resultados reales” actividad 3 docente 2

El total de alumnos inscritos es de 60 alumnos.

El docente presenta la segunda parte de sus resultados en donde muestra la respuesta requerida a su problema con unidades. Falta contextualización del mismo pues no menciona la escuela ni el ciclo escolar.

Fase: “validación” actividad 3 docente 2

Si el 100% de alumnos inscritos es 60 entonces el 40% de ellos son 24 mujeres y 60% son 36 hombres.

Validamos con un cálculo de porcentajes:

$$(60)(0.40) = 24$$

$$(60)(0.60) = 36$$

El docente propone una validación mediante las matemáticas. No reconoce que la validación se da en el mundo real mediante la confrontación de los datos obtenidos del modelo y los datos extraídos de la realidad.

4.1.4 Discusión de resultados

El resumen de lo que se encontró se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 29. Resumen del análisis de actividades

Fase	Actividad 1		Actividad 2	
	Docente 1	Docente 2	Docente 1	Docente 2
Situación real	Respuesta muy general sin abordar aspectos específicos de la situación.	Comprensión profunda. Extrajo datos específicos de la realidad para su análisis.	Respuesta general sin profundizar en datos o la necesidad de desarrollar un modelo.	Comprensión clara. Menciona explícitamente el propósito. No menciona de dónde obtiene datos.
Entendiendo la tarea	Comprensión razonable del propósito de la tarea. No menciona la	Comprensión razonable del propósito de la tarea. Reconoce la	Se enfoca en el objetivo de estimar datos. No menciona la	Reconoce la tarea de encontrar un modelo de la situación para

	necesidad de desarrollar un modelo.	tarea de encontrar un modelo de la situación.	necesidad de desarrollar un modelo.	después estimar datos con él
Representación mental	Presenta limitaciones. No tomó en cuenta datos proporcionados.	Presenta limitaciones. Representación visual y verbal contradictoria.	Representación visual que no considera los datos. Imagen gráfica de una hipérbola.	Representación gráfica que ilustra el aumento de casos.
Simplificar/estructurar la tarea	No establece variables, unidades ni estructuración.	Reconoce variables, les asigna literales y estructura el problema.	Selecciona las variables, les asigna literales y menciona sus unidades. No profundiza en la relación entre ellas.	Reconoce las variables, les asigna literales y menciona sus unidades. Hace mención de la necesidad de encontrar una relación entre ellas pero no profundiza.
Modelo real	Necesita una comprensión más profunda de la situación. No establece la necesidad de un modelo matemático.	Necesita una comprensión más profunda de la situación. No analiza sus datos para encontrar una relación entre ellos.	Observa patrones entre las variables. Análisis poco detallado.	Reconoce una relación no constante entre las variables.
Matematizando	Presenta limitaciones. Ofrece una fórmula, no explica cómo tratar los datos para manejarlos matemáticamente.	Presenta limitaciones. Ofrece una potencial función, muestra datos sin unidades, pero no proporciona detalles sobre el	Menciona una función polinomial como el modelo más adecuado, pero no ofrece detalles sobre cómo llegó a esa conclusión. No	Muestra una tabla y una gráfica. No modifica los datos para pasar al mundo matemático.

		proceso de transformación de datos.	modifica los datos para pasar al mundo matemático.	
Modelo matemático	Propone una función lineal a pesar de darse cuenta de que el crecimiento de la población no era constante. Proporciona una gráfica no delimitada en los datos de interés.	Propone una función lineal a pesar de darse cuenta de que el crecimiento de la población no era constante.	Propone una función polinomial de grado 10. Los coeficientes de las literales con grado 9 y 10 aparecen con 0 debido a errores con el programa.	Simplifica significativamente los datos y propone una función lineal a pesar de encontrar que el aumento en el número de casos no es constante.
Trabajo matemático	Aplica el modelo previamente obtenido. Realiza operaciones sustituyendo variables. No contextualiza datos.	Aplica el modelo previamente obtenido. Realiza operaciones sustituyendo variables. Contextualiza los datos olvidando que se encuentra en el mundo matemático.	Aplica el modelo previamente obtenido. Realiza operaciones con ayuda de la tecnología. No contextualiza datos. Obtiene un valor negativo muy grande.	Aplica el modelo previamente obtenido. Realiza operaciones sustituyendo variables. No contextualiza los datos.
Resultados matemáticos	Muestran resultados obtenidos del modelo. Menciona unidades y le da un contexto olvidando que se encuentra en el mundo matemático.	Muestran resultados obtenidos del modelo. No utiliza unidades ni contextualiza sus datos.	Muestran resultados obtenidos del modelo. No utiliza unidades ni contextualiza sus datos.	Muestran resultados obtenidos del modelo. No utiliza unidades ni contextualiza sus datos.
Interpretación	Proporciona una interpretación	Menciona un aumento en la	No le da una interpretación a su	Proporciona una interpretación

	concreta para que sus resultados tengan sentido en el mundo real. No menciona el método mediante el cual ha tratado sus resultados.	población. No proporciona interpretaciones ni modifica sus datos para que tengan sentido en el contexto real.	resultado en el contexto del problema. Su resultado pareciera no tener sentido con la realidad.	concreta para que sus resultados tengan sentido en el mundo real. No menciona el método mediante el cual ha tratado sus resultados.
Resultados reales	Presenta sus resultados contextualizados de la población estimada. Sugiere que su modelo puede ser cierto si los datos siguen el mismo patrón de comportamiento.	Presenta los datos de la población estimada para las siguientes décadas, pero olvida contextualizar que se trata de población para México.	No presenta sus datos contextualizados. Realiza un análisis de la situación. Hace una mala interpretación de su resultado.	No presenta sus datos contextualizados. Realiza un análisis de la situación.
Validación	Reconoce que para confirmar la precisión del modelo habría que esperar a comparar con los datos reales que se recolectarán en años venideros.	Sin respuesta.	Reconoce que para confirmar la precisión del modelo habría que esperar a comparar con los datos reales.	Reconoce que para confirmar la precisión del modelo habría que esperar a comparar con los datos reales.

Con estos resultados podemos evaluar el desempeño y evolución de los docentes al enfrentar actividades de modelación. Recordemos que la actividad 1 se realizó al concluir la plática de “¿Qué es la modelación?” y presentar un ejemplo, mientras que la actividad 2 se realizó tras evaluar la actividad 1 y resolver dudas y compartir comentarios.

Podemos observar que en la fase “situación real”, el docente 2 extrajo datos importantes de la realidad para su análisis, aunque no mencionó de dónde sacaría sus datos, por lo que podría mejorar

en ese aspecto. Por su parte el docente 1 ofreció respuestas generales en ambas actividades sin abordar aspectos específicos de la situación, lo que podría indicar una falta de comprensión sobre el propósito de esta fase.

En la fase “entendiendo la tarea” ambos docentes comprendieron el propósito de estimar valores como objetivo de la actividad, sin embargo, solo el docente 2 menciona en ambas actividades la necesidad de crear un modelo de la situación.

Para la fase “representación mental” ambos docentes presentaron limitaciones. El docente 1 tuvo representaciones mentales que no tomaron en consideración los datos y resultaron contradictorias con el problema que se estaba planteando. El docente 2 mejoró de una actividad a la otra ya que en la primera ofreció una representación visual contradictoria con su representación verbal, pero para la actividad dos presentó una representación visual que ilustraba correctamente el crecimiento presentado en el problema. El docente 1 muestra una dificultad para hacer representaciones mentales acordes con lo que se le está presentando.

En la fase “simplificar/estructurar la tarea” el docente 1 muestra una mejoría ya que en la actividad 1 no estableció variables, unidades ni estructuración lo que ya apareció para la actividad 2, sin embargo, en ninguna de sus dos actividades muestra una estructuración de ellas. El docente dos por su parte muestra una buena comprensión de la fase al encontrar las variables, sus unidades y asignarles literales en ambas actividades, sin embargo, en la actividad 1 intentó darles una estructura y en la actividad 2 solo mencionó la necesidad de encontrarla. Podemos decir que esta fase tuvo una buena comprensión, pero puede mejorarse.

En la fase “modelo real” podemos observar una mejora en ambos casos. Para el primer problema ningún docente tuvo una comprensión profunda de la situación, no se analizaron los datos ni se recalcó la necesidad de crear un modelo matemático. Para la segunda actividad se mostró mejoría ya que ambos docentes reconocieron patrones o relaciones entre las variables, sin embargo, podrían beneficiarse de un análisis más detallado y de recalcar la información más importante del problema que ayude en su resolución. Hace falta trabajar más en la comprensión de esta fase.

La fase “matematizando” es una de las que presenta más problemas. En la primera actividad vemos que ambos docentes presentaron una idea de cómo podría ser su modelo, pero no dieron explicaciones de cómo llegaron a esa conclusión, además no hicieron un análisis de cómo preparar

los datos para pasar del mundo real al mundo matemático. En la segunda actividad no hubo mejoría, ambos dieron una idea de un posible modelo sin mayor explicación y no se mostró un tratamiento de datos. Esta fase no quedó comprendida por los docentes, habría que trabajar con especial atención en ella.

Para la fase “modelo matemático” podemos ver que los docentes presentaron sus funciones obtenidas a través del software GeoGebra con relaciones algebraicas sin unidades ni contextualizaciones para ambas actividades. Podemos decir que esta fase quedó clara.

Para “trabajo matemático” vemos que el docente 1 manejó su modelo para extraer información, sustituyendo variables directamente en la primera actividad y haciendo uso de la tecnología mediante la calculadora de GeoGebra en la segunda actividad. Por su parte el docente 2 presentó un problema en la primera actividad al contextualizar sus datos olvidando que se encontraba en el mundo de las matemáticas, cosa que rectificó para la segunda actividad en la que esta contextualización ya no apareció. Esta fase tuvo una buena comprensión.

En “resultados matemáticos” el docente 1 tuvo un problema en su primera actividad ya que mostró sus resultados con unidades y contexto olvidando que todavía no salía del mundo matemático, afortunadamente esto se corrigió para la actividad 2 en donde sus resultados fueron puramente numéricos. El docente 2 mostró sus resultados sin unidades ni contexto en ambas actividades. Esta fase también tuvo una buena comprensión.

En la fase “interpretación” ninguno de los docentes en ambas actividades muestra un tratamiento de los resultados para pasar del mundo matemático al mundo real, solo muestran sus datos ya con unidades y contextualizados. El docente 1 tuvo problemas con la segunda actividad ya que su modelo dio un número negativo que no supo interpretar y solo colocó sin dar contexto. Esta fase al igual que “matematizando” merece principal atención ya es el puente entre ambos mundos y pareciera que no ha quedado clara.

Para la fase “resultados reales” ambos docentes presentan problemas. El docente 1 presenta sus datos bien contextualizados y con análisis en su primera actividad, pero no muestra lo que obtuvo y hace un análisis erróneo para la segunda. El docente 2 olvida completar correctamente el contexto de su primera respuesta y no nos muestra lo que obtuvo en la segunda actividad. Pudo deberse a un descuido por parte de los docentes, pero habría que trabajar de igual forma en esta fase.

Y para la última fase, la de “validación”, observamos que en la actividad 1 el docente 2 no tenía bien en claro lo que debía hacer, por lo que no obtuvimos respuesta de su parte. Esto mejoró para la actividad dos en donde entendió el propósito de esta fase y respondió adecuadamente a lo requerido. El docente 1 por su parte no tuvo problemas en la comprensión y reconoció que para confirmar la precisión del modelo hace falta comparar sus resultados con los resultados extraídos de la realidad. Podemos decir que, aunque hubo problemas al principio, esta fase tuvo una buena comprensión.

Con este análisis podemos ver que los docentes tuvieron problemas principalmente al transitar por las fases de situación real, modelo real, matematizando e interpretación por lo que habría que dedicar mayor énfasis en la explicación y trabajo de ellas, sobre todo al pasar del mundo real al matemático y viceversa. En fases como entendiendo la tarea, representación mental, simplificar/estructurar la tarea y resultados reales mostraron una comprensión buena pero que podría mejorarse por lo que son temas a tomar en cuenta. Por otra parte, fases como modelo matemático, trabajo matemático, resultados matemáticos y validación quedaron claras para los docentes.

Aunque ambos docentes mostraron cierto entendimiento de las fases del ciclo de modelación, hubo limitaciones en sus respuestas en términos de profundidad, precisión y capacidad para desarrollar modelos matemáticos efectivos.

Los docentes también crearon sus propios ejemplos que aplicarán en sus aulas de clase. Se dio libertad a cada docente de trabajar con los temas que impartirán en los próximos ciclos escolares. Con el análisis de sus actividades nos dimos cuenta que el docente 1 no propuso un problema de modelación matemática, ya que a pesar de que su propuesta involucraba cálculos matemáticos y conversiones de unidades para su resolución no abordaba una situación del mundo real que requiera la construcción de un modelo matemático para comprenderla, interpretarla o predecirla. En su lugar, es un problema de matemáticas aplicadas que se resuelve mediante una regla de tres simple y conversión de unidades.

La resolución de la actividad 3 propuesta por el docente 1 también tuvo fallos. La “situación real” era bastante general sin proporcionar datos, contexto ni propósitos, la “representación mental” tenía poca conexión con la tarea matemática, las fases “modelo matemático”, “trabajo matemático” y

“resultados matemáticos” presentaban unidades olvidando que se encontraban dentro del mundo matemático, en “interpretación” no se muestra un tratamiento de los datos para pasar al mundo real, en “validación” se propone una forma de validar mediante un proceso matemático olvidando que la validación se da en el mundo real a partir de comparar los resultados provenientes del modelo con los resultados reales y en general todas las fase se vieron afectadas por el hecho de no tratarse de un problema de modelación matemática.

El problema presentado por el docente 2 tampoco representa una actividad de modelación matemática ya que no aborda una situación del mundo real que requiera la construcción de un modelo matemático para ser comprendida, interpretada o predicha. Su problema se centra en la aplicación directa de conceptos matemáticos básicos, como el cálculo de porcentajes y la resolución de proporciones. Su proceso de resolución también presentó fallos ya que en la fase “situación real” no extrajo información importante de la realidad ni presenta la situación, solo reconoce el propósito de la tarea, en la fase “matematizando” no hace un tratamiento de los datos para pasar al mundo matemático, en las fases “modelo matemático”, “trabajo matemático” y “resultados matemáticos” proporciona unidades y contexto olvidando que se encuentra en el mundo de las matemáticas, en “interpretación” y “resultados reales” muestra sus respuestas sin mucha contextualización y en “validación” propone una validación matemática olvidando que esta fase se da en el mundo real al comparar los resultados del modelo con los resultados reales. Cabe recalcar que, todas las fases se vieron afectadas por el hecho que el problema no representaba una actividad de modelación matemática verdadera.

Con los resultados de la actividad 3 vemos un retroceso en la comprensión de los docentes sobre cómo abordar una actividad de modelado. Esto pudo deberse a que sus problemas propuestos no representaban fielmente una actividad de modelación matemática como tal o a que la actividad fue la última de la intervención y los docentes presentaban signos de agotamiento. Es un resultado a tener en cuenta ya que con la actividad 2 se había visto una mejoría en su trabajo.

Analizando las entrevistas previas a la intervención y los comentarios que se recibieron en la misma pudimos notar que previo a la aplicación de la intervención los docentes no conocían lo que era la modelación matemática. No habían escuchado hablar de ella y no sabían cómo enfrentarse a actividades que la involucrara.

Se puede observar un cambio en la forma de resolver actividades de modelación, anterior a la aplicación de la intervención los docentes no se detenían a entender el problema y apresuraban el paso a la matematización y trabajo matemático. Después de la aplicación de la intervención los docentes se detuvieron a pensar más en el problema y a analizar la situación

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se llevó a cabo una intervención encaminada a mejorar las competencias de docentes de matemáticas de nivel medio superior para enfrentar actividades de modelación matemática siguiendo como guía los pasos del ciclo de modelación propuesto por Borromeo-Ferri (2006). Durante la investigación, se colaboró con dos docentes de matemáticas de nivel medio superior de instituciones privadas del estado de Veracruz y Puebla. Antes de la realización de la intervención, se efectuaron entrevistas clínicas, cuyos detalles se encuentran en el anexo. De acuerdo con las entrevistas realizadas, los docentes se enfocaban principalmente en los aspectos matemáticos al abordar las actividades de modelación matemática, particularmente en lo que corresponde a los pasos de Matematizando y Trabajo matemático del ciclo de modelación de Borromeo-Ferri. Ocasionalmente, se ocupaban de la Simplificación/estructuración de la tarea.

Esta investigación se diferencia de las demás porque la realizamos en México con profesores de nivel medio superior; hasta donde conocemos no hay resultados en este sentido. Identificamos dificultades significativas en las fases de Situación Real, Modelo Real, Matematización e Interpretación. También, los docentes enfrentaron dificultades al intentar diseñar ejemplos propios para implementar en sus aulas, ya que las actividades que propusieron no requerían la creación de un modelo matemático para su solución.

De la tabla 29 se observa que los docentes están en la fase de desarrollo de sus competencias de modelado según la definición de Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003).

Nuestro estudio tiene similitudes con el de Ledezma et. al. (2023), solo que ellos trabajan la modelación con maestros de nivel secundaria en Panamá. Coincidimos en la necesidad de profundizar en la comprensión y análisis de datos del mundo real, así como en las habilidades para interpretar los resultados matemáticos. En nuestra investigación, además, encontramos dificultad por parte de los docentes al matematizar el modelo real.

Otro estudio parecido lo realizó Schönbrodt et al. (2022). Ellos trabajaron con herramientas digitales y plataformas de comunicación, pero con estudiantes alemanes del nivel secundario. Encontraron que es importante utilizar herramientas digitales para facilitar la colaboración y el

aprendizaje en línea, además, destacaron la positiva recepción de los estudiantes hacia estas herramientas y la efectividad de su implementación en entornos educativos. Nosotros observamos una convergencia con lo encontrado con Schönbrodt y colaboradores.

Nosotros usamos el software GeoGebra, lo que nos permitió resolver problemas más complejos en comparación a los que habríamos podido trabajar sin el uso de esta herramienta, dando una retroalimentación y una visualización gráfica inmediata.

5.1 Sugerencias de trabajo

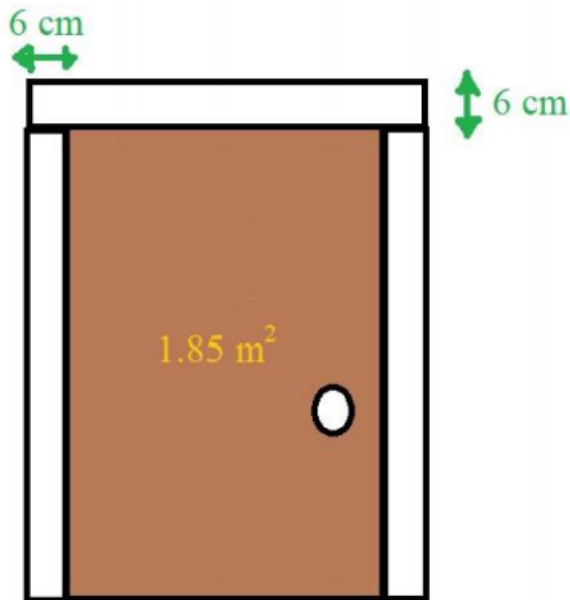
Basándonos en los hallazgos de la presente intervención educativa, se recomienda la extensión de la estructura existente, hacia un taller de mayor alcance y envergadura. Esta extensión conlleva la necesidad de incorporar sesiones adicionales, que permitirían una mayor inmersión en el proceso de modelización. Además, se sugiere trabajar con un cuerpo docente más amplio, con el objetivo de fomentar una diversidad de perspectivas y enfoques. Tal enfoque multidisciplinario no solo enriquecerá la calidad y pertinencia de un taller, sino que también fomentará un ambiente de aprendizaje colaborativo y enriquecedor. En resumen, la extensión y colaboración son pilares fundamentales para el desarrollo y éxito del proyecto, y constituyen áreas prioritarias para futuras investigaciones y mejoras en la enseñanza de la modelización matemática en el bachillerato.

ANEXO

Entrevista previa a la intervención

Con el propósito de hacer un comparativo extra al de la metodología de la ingeniería didáctica y para poder observar cómo cambia la forma en la que los docentes se enfrentan a actividades de modelación se realizó una entrevista clínica previa a la realización de la intervención. En esta entrevista se presentó a los docentes una actividad de modelación que es la siguiente:

Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones laterales para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de \$180 por metro cuadrado y el de los listones es de \$87 por metro lineal (con un ancho de 6cm). Calcula las dimensiones de una puerta de 1.85m^2 de superficie para que el costo sea mínimo



Durante la entrevista los docentes resolvieron el problema y posteriormente se identificó el paso del ciclo de modelación por el cual estaban transitando. Dicho análisis lo podemos ver a continuación:

Tabla 30. Proceso del docente 1

Paso	Fragmento de la entrevista	Paso del ciclo de modelación
1	“Entiendo que hay que sacar el área de la puerta y nos menciona el precio por metro cuadrado. Nos está dando el área que nos muestra aquí, bueno calcular las dimensiones y nos estás dando el área y también la superficie de los listones que por ahí están alrededor.”	Entendiendo la tarea
2	“Veo que hay que saber geometría básica, saber cómo sacar áreas, perímetros, saber cómo qué tipo de figuras, saber identificar las figuras geométricas y pues a lo mejor un poquito de álgebra también para poder al momento de hacer la fórmula pues una fórmula es eso ¿no? es una aplicación estandarizada de una situación algebraica que sería en este caso con áreas y perímetros de ciertas figuras conocidas”	Matematizando
3	“Primero hay que identificar la información que me da, leyendo por supuesto en primer lugar el ejercicio y bueno, ver qué información nos pide y qué información nos da, las dos cosas.”	Representación mental
4	“En este caso nos está manejando que pues es un tablón rectangular, la imagen es muy clara, la forma que tiene o la figura geométrica a identificar, pues la puerta es un rectángulo tal cual nos lo muestra así y bueno, nos dice lo que compone, toda el área que estamos observando nos dice que es la hoja y los tres listones laterales. Y nos menciona claramente que son los que están de lado izquierdo y arriba ¿no? son los tres. Nos menciona que el precio del tablón es 180 por metro cuadrado, entonces podemos calcular más o menos en cuánto saldría si quisiéramos o si tuviéramos la necesidad de saberlo porque nos está dando también el área aquí en la imagen. Entonces, pudiéramos calcularlo si nos lo pidieran.	Simplificar/estructurar la tarea

	También nos dan los precios de los listones que son de 87 por metro lineal y bueno, nos menciona que el ancho del listón es de 6 centímetros. Y finalmente nos pide que calculemos las dimensiones de una puerta de 1.85 metros cuadrados de superficie para que el costo sea mínimo, tratando de ocupar la menor cantidad de dinero en base a la forma que va a tener...”	
5	“Entonces pues sería ver en cuánto exactamente sale la puerta calculando primero el precio dado por metro del área de la puerta. Si la puerta tiene 1.85 metros cuadrados y el precio por metro cuadrado es de 180 pues hay que dividir los 180 entre 1.85 para saber cuanto da por metro ¿no? el precio por metro de la puerta o cuántos metros necesito aquí.”	Matematizando
6	“Entonces serían 180 entre 1.85 nos da a 97.29 ¿no?”	Trabajo matemático
7	“Pudiéramos ocupar una regla de tres, podríamos sacar una proporción”	Matematizando
8	“Si 180 es a un metro, 0.85 ¿a cuánto es? Entonces, el 0.85 por 180 serían 153, es lo que da por los 0.85 metros cuadrados que faltan más los 180 del otro metro se supone que saldría en 233 únicamente la puerta, falta sacar lo de los listones.”	Trabajo matemático
9	“Entonces hay que averiguar cuántos metros de listón estamos ocupando.”	Simplificar/Estructurar la tarea
10	“Para ello necesitamos las dimensiones de la figura, entonces se supone que es base por altura la fórmula para sacar las dimensiones de la puerta, ya tenemos el área, tendríamos que ver cuánto le corresponde tanto a lo alto como a lo ancho para sacar entonces cuántos de listón se	Representación mental

	está necesitando. Sin lo excedente de los 6 centímetros que se está teniendo a los lados ¿no?... eh, de lado y lado porque es lo que está enseñando de lado y lado los listones.”	
11	“Si le damos... a ver... entre... más o menos que le pusiéramos un metro de alto, digo suponiendo que lo más alto debe ser lo más grande. Un metro para que me de 1.85 al momento del resultado de mi multiplicación, tendríamos que dividirlo para sacar la base suponiendo que la altura fuera un metro más o menos para sacar el resto de la cantidad y que me diera 1.85. Vamos a ver... o que fuera dos tercios también puede ser.”	Conocimiento extramatemático
12	“Que fuera el doble lo alto que lo ancho, a lo mejor, podría ser que lo alto fuera $2x$ y que x fuera mi ancho y pusiéramos así, quedaría la base por la altura sería x por $2x$ sería $2x^2$ igual a 1.85 quedaría 1.85 entre 2 por la raíz cuadrada de 1.85 entre 2... entonces quedaría... 0.96 metros de x que sería lo ancho, digo redondeando, y el doble que sería 1.92 de lo alto”	Trabajo matemático
13	“Eso está en metros, centímetros serían 192 centímetros de alto y 96 aproximadamente de ancho, le quitamos los primeros 6 para sacar lo del listón serían 186 del listón de los dos altos, de los dos hacia arriba, multiplicando por dos serían 372 de los que están verticales y del horizontal... si lo ancho quedamos que eran 96 hay que sumarle los otros 12 centímetros de lado y lado, serían los 96 más 12... 108, bueno, sale lo mismo... y sumamos los 108 que nos da ahí más los 372 serían 480 metros de listón para conservar aproximadamente el área de la puerta que ya habíamos quedado que daba a 180, 333 que era de la puerta y los 480	Trabajo matemático

	por ¿cuánto cuesta cada metro? 87. Suponiendo... bueno no, 87 cuesta el metro pero son 480 centímetros serían 4.80 por 87... 417.6 de los listones y me había quedado con 333 de la puerta, en total...”	
14	“según yo saldría todo esto en 750”	Resultado matemático
15	“Un aproximado pero en mi opinión no es exacto, tendría que tener más información para más o menos saber qué proporción tendría de alto y ancho la puerta”	Conocimiento extramatemático
16	“Podríamos construir una puerta con esas dimensiones si redondeamos las cantidades. En centímetros es más sencillo de visualizar.”	Interpretación
17	“... pues es bastante alta, a lo mejor no tan alta, bueno sí. 1.92 no es tal alto y 96 pues por lo regular las puertas promedio son de un metro o 1.10 de ancho que es lo estándar. Pero no es imposible tener una puerta de 96 centímetros de ancho. Sí tiene cierta proporción obviamente dependiendo del espacio que esté disponible para hacer la puerta de este tamaño. No es una puerta estándar pero tampoco quedaría mal, bueno, sí sería utilizable.”	Validación

Tabla 31. Proceso del docente 2

Paso	Fragmento de la entrevista	Tipología
1	“He pasado por algo similar con un tipo de mosquitero porque a veces no tengo a la mano para medir... pues de un mosquitero que vaya a una ventana ya sea chica o grande a veces no tengo con qué medir y utilizo unas... pues no listones, utilizo algunos mecates o bien utilizo unas tiras de trapo. Corto, mido y entonces ya lo llevo así	Conocimiento extramatemático

	a la carpintería para que ya le tomen la medida para que ya quede justo a lo que es”	
2	“tendríamos que tener conocimientos en este caso son de área y perímetro, debe ser de polígonos precisamente porque pues estamos hablando de una puerta que es rectangular, pertenece a los polígonos, entonces saber el área y perímetro de este tipo de figura.”	Matematizando
3	“se tiene que escribir fórmula entonces se sustituyen los datos que se obtengan y ahí se puede ver... bueno, se puede observar el tipo de variable que haga falta o de dónde lo podemos obtener”	Simplificar/estructurar la tarea
4	“lo que se me ocurre primero es escribir la fórmula que sería igual a base por altura, se sustituye el valor en área que son 185, base y altura serían nuestras incógnitas, en este caso tenemos dos incógnitas.”	Matematizando
5	“Lo que se puede hacer es un despeje, poner una variable en función de la otra y hacer un tanteo. De manera que se haga el tanteo, pues ya después se le da otro valor a la otra variable para que al final nos dé similar al área, en este caso que son 185 metros cuadrados, pero si tenemos los listones, en este caso nos están especificando seis centímetros de ancho de cada listón, que son 3... sí bueno, esa sería la forma en la cual se trabajaría prácticamente”	Simplificar/estructurar la tarea
6	“Bueno el 185 lo haría como una descomposición, en este caso busco un número, bueno hago el despeje de base es igual a 185 sobre la altura, ya la altura la hago por tanteo en este caso yo le calculo 92.”	Conocimiento extramatemático
7	“185 entre... bueno, hago la mitad porque parece ser que en este caso tanto las medidas laterales como la parte superior parecen ser la misma medida, parece ser, lo que	Representación mental

	hace como diferencia es como un centímetro tal vez o dos centímetros.”	
8	“Entonces lo que hago lo divido entre dos, para mí la base serían 92 con una altura, bueno aproximada de 93 o 94 para que a la vez así multiplicado nos dé el área que se completa con 185 metros cuadrados aproximado...”	Matematizando
9	“Es 0.93, 09.4 algo así”	Resultados matemáticos
11	“a veces porque hay puertas chicas y puertas grandes. Depende realmente”	Validación

BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado, L., & García, M. (2008). Características más relevantes del paradigma socio-crítico: su aplicación en investigaciones de educación ambiental y de enseñanza de las ciencias realizadas en el Doctorado de Educación del Instituto Pedagógico de Caracas. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 2(2), 187–202.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3070760>
- Arnal, J., Rincón, D. del, & Latorre, A. (1994). *Investigación Educativa. Fundamentos y metodologías*.
- Artigue, M. (2020). *Didactic Engineering in Mathematics Education BT - Encyclopedia of Mathematics Education* (S. Lerman (ed.); pp. 202–206). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_44
- Biembengut, M., & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. *Epsilon: Revista de La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales,"* 38, 209–222.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105–125.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22(3), 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Chesler, J. (2019). *IUMPST: The Journal. Vol 4 (Curriculum), December 2019* [www.k-12prep.math.ttu.edu] ISSN 2165-7874. 4(December).
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1237518.pdf>
- Correa, M. A., Marín, A., Gómez, P. A., Mesa, Y., & Villa-Ochoa, J. (2015). *Concepciones de formadores de profesores sobre la modelación matemática y la relación con sus prácticas de enseñanza*.
- Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In *Modelling and applications in mathematics education* (pp.

69–78). Springer.

Jordán Padrón, M., Pachón González, L., Blanco Pereira, M. E., & Achiong Alemañy, M. (2011). Elementos a tener en cuenta para realizar un diseño de intervención educativa. Universidad de Ciencias Médicas Matanzas. *Revista Médica Electrónica*, 33(4), 541–542.

[http://www.revmatanzas.sld.cu/revista medica/ano 2011/vol4 2011/tema17.htm](http://www.revmatanzas.sld.cu/revista%20medica/ano%202011/vol4%202011/tema17.htm)

Ledezma, C., Ferri, R. B., & Morales-maure, L. (2023). *An educational experience on modelling for in-service mathematics teachers from the Panamanian school system. December.*

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003a). A modeling perspective on teacher development. In *Beyond constructivism* (pp. 137–152). Routledge.

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003b). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education—Necessity or unnecessarily. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 Th ICMI Study*, 333–340.

Parra-Zapata, M. M., Rendón-Mesa, P. A., Ocampo-Arenas, M. C., Sánchez-Cardona, J., Molina-Toro, J. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2018). Teacher’s participation in online education environments. A research in mathematical modelling. *Educacion Matematica*, 30(1), 185–212. <https://doi.org/10.24844/EM3001.07>

Popkewitz, T. (1988). Los paradigmas en la ciencia de la educación: sus significados y la finalidad de la teoría. *Cap. I de Paradigma e Ideología En Investigación Educativa, Ed Mondadori.*

Rodríguez Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. (2016). The role of technology in the process of mathematical modeling for teaching differential equations. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 19(1), 99–124.

<https://doi.org/10.12802/RELIME.13.1914>

Ruiz-Higueras, L., & García García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 14(1), 41–70.

- Schönbrodt, S., Wohak, K., & Frank, M. (2022). Digital Tools to Enable Collaborative Mathematical Modeling Online. *Modelling in Science Education and Learning*, 15(1), 151–174. <https://doi.org/10.4995/msel.2022.16269>
- Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 5–18. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>
- Villa-Ochoa, J.-A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática. una mirada a la práctica del docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 22*, 1443–1451.
- Zaldívar-Rojas, J., Rivera, S., & Ramírez, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, 8, 87–110. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.63