

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Efectos de neutrinos pesados en decaimientos
trileptónicos raros del muón y del tau**

Tesis presentada al

Posgrado en Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Física

por

Lic. Mónica Salinas Ibañez

asesorada por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.

Diciembre 2017

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Efectos de neutrinos pesados en decaimientos
trileptónicos raros del muón y del tau**

Tesis presentada al

Posgrado en Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Física

por

Lic. Mónica Salinas Ibañez

asesorada por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.

Diciembre 2017

**Título: Efectos de neutrinos pesados en decaimientos
trileptónicos raros del muón y del tau**

Estudiante: Lic. Mónica Salinas Ibañez

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Presidente

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Secretario

Dr. Justiano Lorenzo Díaz Cruz
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Asesor

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. La teoría electrodébil	1
1.1. Electrodinámica	1
1.1.1. Acoplamiento mínimo	1
1.1.2. Densidad de probabilidad y densidad de corriente	4
1.2. Transformaciones de norma	6
1.3. Transformación de conjugación de carga	7
1.4. Electrodinámica escalar	11
1.5. Rompimiento espontaneo de la simetría	13
2. Teoría de Yang-Mills	23
3. Modelo Estándar	31
3.1. Leptones	50
3.2. Sector de Yukawa	57
3.3. Sector de Corrientes	59
4. Física de los neutrinos más allá del Modelo Estándar	63
4.1. Matriz PMNS	63
4.2. Términos de masa: Dirac vs Majorana	65
4.3. Evidencias de masas de neutrinos	68
4.3.1. Derivación estándar de la probabilidad de la oscilación del neutrino	69
4.4. Mecanismo del sube y baja (seesaw)	72
5. Contribución de neutrinos masivos en decaimientos trileptónicos de los leptones mu y tau	75
5.1. Propiedades electromagnéticas de los fermiones	81
5.2. Propiedades de los factores de forma	85

6. Análisis de resultados	89
6.1. Amplitud al cuadrado	89
6.2. Tasa de decaimiento	93
6.3. Branching Ratio	97
6.4. Resultados y discusión	98
7. Conclusiones	103
A. Álgebra de las matrices de Dirac	105
B. Ecuaciones de movimiento de la teoría de Yang-Mills	107
C. Propiedades de las matrices de Dirac y Proyectores	111
D. Cálculo del vértice electromagnético en la norma no lineal de Feynman-t'Hooft	115
E. Identidades de Gordon	119
F. Amplitud invariante de norma	121
G. Soluciones de las funciones de Passarino-Veltman	123
H. Matriz PMNS	127
I. Factor global de las funciones de PaVe	129

Resumen

Se investiga el impacto de las corrientes cargadas que acoplan bosones de norma pesados, neutrinos pesados y los leptones del Modelo Estándar, en decaimientos de un leptón cargado a tres cuerpos, donde hay violación de sabor leptónico. Se consideran las contribuciones más significativas a $BR(l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma)$, las cuales son válidas para neutrinos de Dirac y de Majorana. Primero se analiza el decaimiento del leptón μ en tres leptones y de ahí se determina un conjunto de masas del bosón de norma W y de los neutrinos pesados que hacen consistentes las cotas superiores reportadas por la colaboración SINDRUM, se puede apreciar que estas masas no son muy grandes, oscilan entre GeV y pocos TeV . Luego utilizamos esos parámetros para calcular $BR(\tau \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma)$, los cuales se encuentran entre $\sim 10^{-14} - 10^{-13}$.

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis fueron la principal motivación para publicar el artículo [1].

Introducción

La física de neutrinos es una rama de la física de las partículas elementales que ha generado gran interés en la comunidad científica debido a que ha proporcionado pruebas experimentales de fenómenos físicos que no pueden ser explicados por el Modelo Estándar de las interacciones fundamentales.

El concepto de neutrino fue propuesto por Wolfgang Pauli en 1930 [4] bajo el supuesto de que estas partículas podían poseer masa, pero, debido a la falta de pruebas experimentales asociadas a dichas masas, se generó la idea de que éstas podían ser exactamente cero, por lo que el Modelo Estándar fue formulado bajo esta hipótesis. Poco después de la confirmación de la existencia de los neutrinos, en los famosos experimentos de Hanford en junio 1956 [5, 6], Bruno Pontecorvo sugirió que los neutrinos podían oscilar [7, 8]. El hecho de que los neutrinos se mezclan y son masivos fue la principal motivación para proponer estas oscilaciones [9]. En 1998 aparecieron las primeras señales de las oscilaciones de los neutrinos, en los experimentos llevados a cabo en las instalaciones del Super-Kamiokande [10]. Pocos años después el Sudbury Neutrino Observatory confirmó [11] la hipótesis de que las oscilaciones de los neutrinos eran capaces de explicar el déficit de neutrinos-electrón solares medidos por el equipo de Raymond Davis Jr. [12], con respecto a las predicciones teóricas proporcionadas por John Bahcall y colaboradores [13]. El ciclo finalmente se cerró en 2012, cuando las colaboraciones Daya Bay y RENO midieron el último ángulo de mezcla de los neutrinos [14, 15].

La confirmación de que los neutrinos tienen masa conlleva a la posibilidad de que éstos sean fermiones de Dirac o de Majorana, lo cual fue estudiado en un inicio por Ettore Majorana [16]. Las propiedades electromagnéticas de los neutrinos son cantidades físicas que también distinguen entre partículas de Dirac y Majorana [17, 18]. El único momento electromagnético diagonal de neutrinos de Majorana que puede ser diferente de cero es el momento anapolar, en contraste con los neutrinos de Dirac, donde no hay restricciones generales sobre las propiedades electromagnéticas diagonales.

En esta tesis nos interesan los decaimientos leptónicos de los leptones μ y τ . El leptón τ fue descubierto en 1975 en el anillo de almacenamiento de pares electrón-positrón SPEAR [20]. El estudio de este leptón es interesante porque, debido a su enorme masa con respecto del resto de los leptones, su espacio fase permite una gran variedad de modos de decaimiento [21], que incluyen aún estados finales hadrónicos.

Los decaimientos leptónicos del leptón τ en tres cuerpos comúnmente estudiados [21, 22] son $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$, $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$. Éstos ocurren en el Modelo Estándar, a nivel de árbol mediante interacciones electrodébiles que producen bosones W virtuales los cuales, a su vez, generan pares leptón-antineutrino [22]. Por otra parte aquellos procesos físicos que se encuentran muy suprimidos o, incluso, prohibidos por el Modelo Estándar son muy relevantes, ya que son lugares en los que efectos de la nueva física podrían manifestarse. Es en este contexto, que se tiene como objetivo el estudio de decaimientos trileptónicos de los leptones μ y τ , producidos por alguna descripción de alta energía que involucra neutrinos masivos que se mezclan.

Un fermión que se encuentra en una situación parecida a la del leptón τ , en el Modelo Estándar, es el quark t , ya que es el quark más pesado y en general el que tiene la masa más grande en dicho modelo. Esta partícula tiene una gran cantidad de decaimientos. Entre los decaimientos suprimidos de quark t , se encuentra el proceso a tres cuerpos $t \rightarrow u_1 u_2 \bar{u}_2$, donde u_1 y u_2 pueden ser los quarks u, c [23]. En este proceso los *Branching Ratios* pueden ser tan importantes como los de los procesos a dos cuerpos $t \rightarrow u_1 g$, siendo g un gluón. Éste valor, tan alto, proviene de un diagrama que incluye a un vértice fuerte $tu_1 g^*$, donde hay un propagador gluónico cuyo polo realza la contribución, haciéndola competitiva con procesos que intuitivamente se esperan que fueran más importantes. En un análisis semejante para las contribuciones fuertes del proceso $t \rightarrow c g g$ [24] se halló que el Branching Ratio correspondiente es mayor que el de $t \rightarrow c g$ por dos órdenes de magnitud. Este tipo de decaimientos raros del quark t no tienen procesos análogos del leptón Tau en el sector leptónico del Modelo Estándar. Sin embargo, la presencia de mezclas de neutrinos, confirmada experimentalmente, abre la puerta a nuevos decaimientos leptónicos no permitidos en esta teoría. Por último, el efecto de los polos en los propagadores de bosones sin masa fue estudiado en [25], donde se exploró el decaimiento $h \rightarrow f \bar{f} \gamma$, del bosón de Higgs h .

La lagrangiana de corrientes cargadas que se está utilizando tiene la forma,

$$\mathcal{L}_{CC} = \sum_j \sum_\alpha [W_\rho^+ \bar{\nu}_j \gamma^\rho (v_{j\alpha} - a_{j\alpha} \gamma^5) l_\alpha + W_\rho^- \bar{l}_\alpha \gamma^\rho (v_{j\alpha}^* - a_{j\alpha}^* \gamma^5) \nu_j], \quad (1)$$

$v_{j\alpha}$ y $a_{j\alpha}$ son parámetros que adquieren diferentes expresiones en distintos modelos y forman parte de una matriz unitaria, $l_\alpha = e^-, \mu^-, \tau^-$ etiqueta los leptones cargados y ν_j denota los eigenestados de masa de los neutrinos y los bosones cargados asociados a nueva física se denotan como $W_\rho^\pm$. De acuerdo a lo anterior, los índices empleados corren sobre $j = 1, 2, 3$, mientras que $\alpha = e, \mu, \tau$ y el índice griego ρ etiqueta a las componentes de espacio-tiempo.

Estamos interesados en el efecto de la mezcla de neutrinos masivos, en las corrientes cargadas antes mencionadas, sobre los decaimientos leptónicos a tres cuerpos $\tau^- \rightarrow l_\alpha^+ l_\beta^-$, donde α y β denotan a sabores de leptones cargados e, μ . Estos decaimientos que no ocurren a nivel de árbol reciben contribuciones de dos tipos de diagramas: diagramas de caja y diagramas con vértice electromagnético $l_\alpha \gamma l_\beta$ con cambio de sabor, estos últimos, con base en los resultados hallados en [23], se tiene la hipótesis

de que el polo en el propagador de fotón puede producir una contribución importante, esto nos lleva a pensar que los diagramas dominantes son aquellos que se muestran en la Fig. 1,

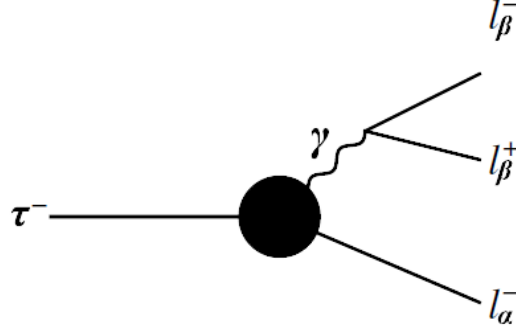


Figura 1: Contribuciones presuntamente dominantes al decaimiento $\tau \rightarrow l_\alpha^+ l_\alpha^- l_\beta^-$.

Se espera que las contribuciones a este proceso dependan de que si los neutrinos involucrados son fermiones de Dirac o de Majorana, debido a que las fases de Majorana podrían tener algún impacto, así como ocurre en los momentos magnéticos de neutrinos de Majorana que se calcularon en [26], en el contexto del modelo *left-right*[27].

El contenido de la tesis tiene la siguiente estructura: en el capítulo 1 se dará una breve introducción de la Teoría Electrodébil, en el capítulo 2 se hablará de la Teoría de Yang-Mills. En el capítulo 3 se hace una descripción general del Modelo Estándar, enfocándonos en particular en el sector de corrientes y en el de Yukawa. En el capítulo 4 entraremos al marco teórico de este trabajo hablando de la física más allá del Modelo Estándar de los neutrinos masivos y las oscilaciones de neutrinos. En el capítulo 5 se estudian las propiedades electromagnéticas de los fermiones calculando los factores de forma “off-shell”, además se estudian las contribuciones independientes de modelos de neutrinos masivos al decaimiento en general $l_\alpha \rightarrow l_\beta^- l_\sigma^+ l_\sigma^-$. Luego, en el capítulo 6 se muestran los resultados de dos procesos en particular $\mu \rightarrow l_\beta^- l_\sigma^+ l_\sigma^-$ y $\tau \rightarrow l_\beta^- l_\sigma^+ l_\sigma^-$, con el primer proceso se obtienen cotas para la masa del bosón W y estos valores se utilizan para calcular el Branching Ratio del segundo decaimiento. Finalmente se muestran las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

La teoría electrodébil

De forma general se busca acoplar los campos leptónicos con todos los campos de bosones de norma, es decir, el campo electromagnético, los campos W^+ , W^- y Z . Para lograr una mejor descripción de lo antes mencionado, se estudiarán los conceptos preliminares a la teoría electrodébil, comenzando con electrodinámica.

Se comenzará proponiendo una lagrangiana para una teoría de campo, en la cual interactúan partículas y antipartículas de Dirac eléctricamente cargadas con y a través del campo electromagnético. Además se mostrará cómo el mecanismo de Higgs les da masa a dichos bosones. Por otra parte, para darle masa a los leptones cargados: electrón, muón y tau, estos se deben acoplar al campo de Higgs. Por lo que finalmente se llegará a la teoría de unificación de Weinberg-Salam de la interacción electrodébil ¹.

1.1. Electrodinámica

1.1.1. Acoplamiento mínimo

El hamiltoniano de una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t))^2 - q\phi(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ es el potencial vectorial y $\phi(\vec{x}, t)$ es el potencial escalar. Cuando el campo magnético está presente, el momento cinético de la partícula $m\vec{v}$ no es el momento conjugado de la posición. La variable conjugada a la posición es $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$.

Notemos que el hamiltoniano mostrado en (1.1) se puede obtener a partir del hamiltoniano de una partícula libre $H_0 = \frac{1}{2}\vec{p}^2$, haciendo el cambio en el momento $\vec{p}$ y la energía E

¹Las ideas que se exponen en este capítulo fueron obtenidas de las referencias [2, 3]

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A}, \quad (1.2)$$

$$E \longrightarrow E - q\phi. \quad (1.3)$$

Ya que el cuadrimomento de una partícula relativista se define

$$p = (p^0, \vec{p}) = (E, \vec{p}) = p^\mu, \quad (1.4)$$

y el cuadripotencial

$$A = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}) = A^\mu. \quad (1.5)$$

Por lo que el cuadrimomento se transforma de acuerdo a (1.2) y (1.3):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow (E - q\phi, \vec{p} - q\vec{A}) = (E, \vec{p}) - q(\phi, \vec{A}) = p^\mu - qA^\mu. \quad (1.6)$$

Ahora nos interesa ver cómo cambia el cuadvectores de derivada ∂^μ , debido a que tenemos la presencia del cuadrimomento $p_\mu = i\hbar \vec{\nabla}'$, por lo que es necesario ver cómo cambia la parte temporal y espacial de este cuadvectores. Para esto podríamos fijarnos en cómo actúa el operador de momento $\vec{p}$ en un eigenket de posición $|\vec{x}'\rangle$

$$\vec{p}|\vec{x}'\rangle = i\hbar \vec{\nabla}'|\vec{x}'\rangle \longrightarrow (\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}))|\vec{x}'\rangle = (i\hbar \vec{\nabla}' - q\vec{A}(\vec{x}'))|\vec{x}'\rangle \quad (1.7)$$

$$= i\hbar \left(\vec{\nabla}' - \frac{q}{i\hbar} \vec{A}(\vec{x}') \right) |\vec{x}'\rangle, \quad (1.8)$$

ésto nos sugiere que de partícula libre a electrodinámica es necesario agregar

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla} - \frac{q}{i\hbar} \vec{A} \longrightarrow \vec{\nabla} + iq\vec{A}, \quad (\hbar = 1). \quad (1.9)$$

También se define un operador diferencial de energía

$$E = \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.10)$$

que al sustituir en la transformación (1.3) se cumple

$$\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi = i(\partial_0 + iq\phi), \quad (\hbar = 1, c = 1). \quad (1.11)$$

De esta forma se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_0 \longrightarrow \partial_0 + iq\phi = \partial_0 + iqA^0. \quad (1.12)$$

Si utilizamos las trasformaciones de la parte temporal (1.12) y la parte espacial (1.9), el cuadvectores de derivada se transforma:

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\partial}) \longrightarrow (\partial_0 + iq\phi, \vec{\nabla} + iq\vec{A}) = (\partial_0, \vec{\nabla}) + iq(A_0, \vec{A}) = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (1.13)$$

De (1.6) y (1.13) podemos resumir

Acoplamiento mínimo

$$\begin{aligned} p^\mu &\longrightarrow p^\mu - qA^\mu, \\ \partial^\mu &\longrightarrow \partial^\mu + iqA^\mu. \end{aligned}$$

Apliquemos los resultados obtenidos a la ecuación de Dirac

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi = 0. \quad (1.14)$$

Para que haya interacción con el campo electromagnético introducimos el acoplamiento mínimo por medio del cuadvivector de derivada

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0. \quad (1.15)$$

Lo mismo sucede con la lagrangiana del campo de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi, \quad (1.16)$$

al agregar el acoplamiento mínimo

$$\mathcal{L}_D \longrightarrow \bar{\psi}[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi. \quad (1.17)$$

Veamos qué pasa con la lagrangiana de la teoría de Maxwell

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (1.18)$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es el tensor electromagnético y $J^\mu A_\mu$ es el término que describe fuentes externas. Las ecuaciones de Maxwell en unidades naturales

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

por lo que se puede definir la cuadricorriente $J^\mu = (\rho, \vec{J})$.

Juntando la parte del campo de Dirac con la teoría de Maxwell se puede definir la siguiente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi}_{\substack{\text{partícula cargada} \\ \text{interactuando con} \\ \text{campo electromagnético}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\substack{\text{campo} \\ \text{electromagnético}}}, \quad (1.19)$$

de la expresión anterior obtenemos la *lagrangiana de Electrodinámica*, la cual nos permite describir a los electrones, fotones y la interacción entre ellos:

$$\mathcal{L}_{ED} = \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \quad (1.20)$$

Si nombramos $\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \equiv j^\mu$, entonces

$$\mathcal{L}_{ED} = \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu, \quad (1.21)$$

ésto significa que la interacción entre el campo electromagnético y los espinores puede ser visto como una corriente.

1.1.2. Densidad de probabilidad y densidad de corriente

Consideremos la siguiente transformación

$$\psi \longrightarrow \psi' = \underbrace{e^{-i\alpha}}_{\in U(1)} \psi, \quad (1.22)$$

el parámetro α es una fase constante independiente del tiempo y el espacio. La lagrangiana (1.20) bajo esta transformación

$$\begin{aligned} \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi &\longrightarrow \bar{\psi}'[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi' - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qA_\mu \bar{\psi}'\gamma^\mu \psi' \\ &= \bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi, \end{aligned}$$

es invariante bajo la transformación global del grupo $U(1)$ mostrada en (1.22) y por el teorema de Noether hay una cantidad que se conserva.

Teorema de Noether

Pensemos en una lagrangiana que depende de un campo escalar ϕ el cual se transforma de la siguiente manera

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x), \quad (1.23)$$

siendo α un parámetro infinitesimal.

Entonces

$$\mathcal{L}(\phi) \longrightarrow \mathcal{L}'(\phi') = \mathcal{L}(\phi) + \alpha \partial_\mu \Lambda^\mu(x), \quad (1.24)$$

es evidente el término $\alpha \partial_\mu \Lambda^\mu(x)$ se puede eliminar al momento de introducirlo en la acción. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es invariante ante (1.23).

La corriente conservada se calcula mediante la siguiente expresión

$$j^\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \Lambda^\mu. \quad (1.25)$$

La ecuación de continuidad se obtiene al expandir $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_k j^k = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.26)$$

que al integrar sobre todo el espacio

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\vec{x} \rho + \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t} + \int ds \vec{J} \cdot \hat{n} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

se obtiene la carga conservada $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$.

Se ha mostrado que bajo la transformación $\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi$ la lagrangiana mostrada en (1.20) es invariante, por lo que de (1.24) se debe cumplir que

$$\partial_\mu \Lambda^\mu(x) = 0. \quad (1.28)$$

Notemos que para un α infinitesimal $e^{-i\alpha} \cong 1 - i\alpha$, entonces

$$\psi \longrightarrow \psi' \cong (1 - i\alpha)\psi = \psi - i\alpha\psi, \quad (1.29)$$

al comparar con (1.23) se tiene $\Delta\psi = -i\psi$, pero, debido a que se están transformando cuatro campos es conveniente escribir

$$\psi_a \longrightarrow \psi'_a = e^{-i\alpha}\psi_a, \quad (1.30)$$

al sumar sobre los cuatro campos en la expresión (1.25) se obtiene la cuadricorriente

$$j^\mu = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \Delta\psi_a. \quad (1.31)$$

Utilizando la lagrangiana de electrodinámica (1.20) en términos de sus componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_a)} \Delta\psi_a &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \psi_a)} (\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi) &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \psi_a)} \sum_b \sum_c \bar{\psi}_b i \gamma_{bc}^\mu \partial_\mu \psi_c \\ &= \sum_b \sum_c \bar{\psi}_b i \gamma_{bc}^\mu \delta_\mu^\alpha \delta_{ac} \\ &= i \sum_b \bar{\psi}_b \gamma_{ba}^\alpha, \end{aligned}$$

usando (1.31) se calcula la cuadricorriente j^μ

$$j^\mu = \sum_a i \sum_b \bar{\psi}_b \gamma_{ba}^\mu (-i) \psi_a = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.32)$$

Del desarrollo anterior podemos obtener la siguientes conclusiones:

- Si la lagrangiana $\mathcal{L}$ es invariante bajo una fase significa que hay una carga conservada.
- Todas las partículas que son invariantes bajo el grupo $U(1)$:
 - Conservan carga eléctrica si son cargadas.
 - Conservan número fermiónico si no son cargadas.

1.2. Transformaciones de norma

Nos fijaremos en la lagrangiana del campo electromagnético en el vacío

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

Si definimos una transformación para el cuadripotencial, conocida como *transformación de norma*

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x), \quad (1.34)$$

notemos que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \longrightarrow \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu\alpha(x)) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu\alpha(x)) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Bajo la transformación (1.34) el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ es invariante.

¿El caso del campo electromagnético con una partícula cargada es invariante de norma?

Para eso nos fijamos en la expresión (1.20), en la transformación de norma (1.34) y también proponemos una transformación de norma para los campos

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\psi(x), \quad (1.36)$$

$\alpha(x)$ ahora depende del espacio-tiempo, es decir, pertenece al grupo local $U(1)$.

Anteriormente probamos que el tensor electromagnético es invariante ante la transformación de norma, por lo que falta ver qué sucede con los otros términos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi - qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\longrightarrow \bar{\psi}'[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi' - qA'_\mu\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' \\ &= e^{iq\alpha(x)}\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]e^{-iq\alpha(x)}\psi - q(A_\mu + \partial_\mu\alpha(x))e^{iq\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{-iq\alpha(x)}\psi \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi - qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Notemos que en la expresión anterior se tiene un término de la forma $\partial_\mu e^{-iq\alpha(x)}$, que no es cero, pero, al final, después de sumarse con los términos restantes, se logra obtener la misma lagrangiana de la que se partió. Por lo que podemos concluir que $\mathcal{L}_{ED}$ es invariante ante las siguientes transformaciones

Transformaciones de norma

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x), \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\psi(x). \end{aligned}$$

1.3. Transformación de conjugación de carga

Recordemos la ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0},\end{aligned}$$

¿Qué pasaría si cambiamos e^- por e^+ ?

materia		antimateria	
ρ	$\longrightarrow$	$\rho^c = -\rho,$	
$\vec{J}$	$\longrightarrow$	$\vec{J}^c = -\vec{J}.$	(1.38)

Entonces, la cuadricorriente se transforma:

$$j^\mu = (j^0, \vec{J}) = (\rho, \vec{J}) \longrightarrow (\rho^c, \vec{J}^c) = -(\rho, \vec{J}) = -j^\mu. \quad (1.39)$$

Vamos a pedirle a las ecuaciones de Maxwell que sean invariantes ante el cambio de signo que aparece en (1.38), para ésto necesitamos que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se transformen:

$$\begin{aligned}\vec{E} &\longrightarrow \vec{E}^c = -\vec{E}, \\ \vec{B} &\longrightarrow \vec{B}^c = -\vec{B}.\end{aligned} \quad (1.40)$$

Los campos que nos interesan se obtienen a partir de los potenciales

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

ésto motiva a proponer las siguientes transformaciones, para que los campos eléctrico y magnético se transforman de acuerdo a (1.40).

$$\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A}^c = -\vec{A}, \\ \phi &\longrightarrow \phi^c = -\phi,\end{aligned} \quad (1.41)$$

De esta forma se obtienen las transformaciones de conjugación de carga para el campo electromagnético

Transformaciones de conjugación de carga

$$\begin{aligned}j^\mu &\longrightarrow j^{c\mu} = -j^\mu, \\ A^\mu &\longrightarrow A^{c\mu} = -A^\mu.\end{aligned}$$

Analicemos qué sucede con la ecuación de Dirac ante la transformación de conjugación de carga

$$(i\gamma^{*\mu}\partial_\mu - m)\psi^* = 0, \quad (1.42)$$

si agregamos la interacción con el campo electromagnético

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0, \quad (1.43)$$

conjugando ambos lados de la ecuación

$$(-i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m)\psi = 0, \quad (1.44)$$

haciendo el producto por la izquierda con γ^2

$$\gamma^2(-i\gamma^{*\mu}(\partial_\mu - iqA_\mu) - m)\psi^* = 0, \quad (1.45)$$

usando las relaciones mostradas en el Apéndice [A]

$$\begin{aligned} \gamma^2\gamma^{*\mu}\partial_\mu &= \gamma^2\gamma^{*0}\partial_0 + \gamma^2\gamma^{*1}\partial_1 + \gamma^2\gamma^{*2}\partial_2 + \gamma^2\gamma^{*3}\partial_3 \\ &= \gamma^2\gamma^0\partial_0 + \gamma^2\gamma^1\partial_1 - \gamma^2\gamma^2\partial_2 + \gamma^2\gamma^3\partial_3 \\ &= -(\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)\gamma^2 \\ &= -\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Por lo que de (1.45)

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^2 - i^2qA_\mu\gamma^\mu\gamma^2 - m\gamma^2)\psi^* &= 0, \\ [i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\gamma^2\psi^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Definiendo $A_\mu^c = -A_\mu$

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu^c) - m]\gamma^2\psi^* = 0, \quad (1.48)$$

se puede hacer conexión con (1.43) mediante la siguiente relación

$$\psi^c \propto \gamma^2\psi^*. \quad (1.49)$$

Es conveniente definir el *campo de carga conjugado* como sigue:

$$\psi \longrightarrow \psi^c = -i\gamma^2\psi^*. \quad (1.50)$$

Notemos que

$$\psi^* = \psi^{\dagger T} = (\psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_1)^T = (\bar{\psi}\gamma^0)^T = \gamma^0\bar{\psi}^T, \quad (1.51)$$

entonces

$$\psi^c = -i\gamma^2\psi^* = -i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T = \mathcal{C}\bar{\psi}^T, \quad (1.52)$$

donde $\mathcal{C} = -i\gamma^2\gamma^0$ es la *matriz de conjugación de carga*.

De los cálculos anteriores podemos hacer énfasis en las transformaciones de conjugación de carga para el campo de Dirac y el campo electromagnético:

Transformaciones de conjugación de carga

$$\begin{aligned}\psi &\longrightarrow \psi^c = -i\gamma^2\psi^*, \\ A^\mu &\longrightarrow A^{c\mu} = -A^\mu.\end{aligned}$$

Veamos qué sucede con $\mathcal{L}_{ED}$ ante las transformaciones de conjugación de carga

$$\mathcal{L}_{ED} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (1.53)$$

es conveniente fijarnos en los siguientes términos y utilizar el álgebra de Clifford mostrada en el Apéndice [A]

$$\bullet \quad i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \longrightarrow i\bar{\psi}^c\gamma^\mu\partial_\mu\psi^c = -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = -i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (1.54)$$

Utilizando el teorema de Gauss se tiene que ante la transformación de conjugación de carga:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \longrightarrow i\bar{\psi}^c\gamma^\mu\partial_\mu\psi^c = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (1.55)$$

También

$$\begin{aligned}\bullet \quad \bar{\psi}\psi &\longrightarrow \bar{\psi}^c\psi^c = \psi^{c\dagger}\gamma^0\psi^c = (-i\gamma^2\psi^*)^\dagger\gamma^0(-i\gamma^2\psi^*) \\ &= \psi^T\gamma^{2\dagger}\gamma^0\gamma^2\psi^* = \psi^T\gamma^0\gamma^0\gamma^{2\dagger}\gamma^0\gamma^2\psi^* \\ &= \psi^T\gamma^0\underbrace{\gamma^2\gamma^2}_{-1}\psi^* = -\psi^T\gamma^0\psi^*,\end{aligned}$$

si nos fijamos en las componentes de la expresión anterior, teniendo en cuenta que las componentes de un vector y su transpuesto son los mismos y que los campos de Dirac son variables de Grassman

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &\longrightarrow \bar{\psi}^c\psi^c = -\sum_a \sum_b \psi_a^T \gamma_{ab}^0 \psi_b^* \\
&= -\sum_a \sum_b \psi_a \gamma_{ab}^0 \psi_b^*, \\
&= \sum_a \sum_b \psi_b^* \gamma_{ab}^0 \psi_a \\
&= \sum_a \sum_b \psi_b^* \gamma_{ba}^{T0} \psi_a \\
&= \sum_a \sum_b \psi_b^{*T} \gamma_{ba}^{T0} \psi_a \\
&= \sum_a \sum_b \psi_b^\dagger \gamma_{ba}^{T0} \psi_a \\
&= \psi^\dagger \psi^{T0} \psi \\
&= \bar{\psi}\psi.
\end{aligned}$$

De esta manera se puede concluir que el término de masa es invariante ante la transformación de conjugación de carga

$$\bar{\psi}\psi \longrightarrow \bar{\psi}^c\psi^c = \bar{\psi}\psi. \quad (1.56)$$

Ahora nos fijamos en el siguiente término

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\longrightarrow \bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c = (-i\gamma^2\psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (-i\gamma^2\psi^*) \\
&= \psi^T \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\dagger 2} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^2 \psi^* \\
&= \psi^T \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 \psi^* \\
&= \sum_a \sum_b \psi_a (\gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)_{ab} \psi_b^* \\
&= -\sum_a \sum_b \psi_b^* (\gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)_{ba}^T \psi_a \\
&= -\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)^T \psi \\
&= -\bar{\psi}\gamma^0 (\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)^T \gamma^0 \psi. \quad (1.57)
\end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de las matrices de Dirac, incluidas en Apéndice [A], se puede probar que para $\mu = 0, 1, 2, 3$ se cumple

$$\gamma^0 (\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2)^T = \gamma^\mu. \quad (1.58)$$

Encontrando,

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow \bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (1.59)$$

Veamos qué sucede con el tensor electromagnético, para ésto utilicemos la transformación de conjugación de carga para A^μ

$$\bullet \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \longrightarrow F^{c\mu\nu} \partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu}. \quad (1.60)$$

Aplicando los resultados (1.55), (1.56), (1.59) y (1.60) en la transformación de carga para $\mathcal{L}_{ED}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &\longrightarrow \mathcal{L}_{QED}^c = \bar{\psi}^c [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi^c - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} - q A_\mu^c \bar{\psi}^c \gamma^\mu \psi^c \\ &= i\bar{\psi}^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c - m\bar{\psi}^c \psi^c - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} - q A_\mu^c \bar{\psi}^c \gamma^\mu \psi^c \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \\ &= \bar{\psi} [\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ &= \mathcal{L}_{QED}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

se muestra que el lagrangiano $\mathcal{L}_{ED}$ es invariante ante la transformación de conjugación de carga

$$\mathcal{L}_{QED} \longrightarrow \mathcal{L}_{QED}^c = \mathcal{L}_{QED}. \quad (1.62)$$

1.4. Electrodinámica escalar

Observemos la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0, \quad (1.63)$$

para el campo escalar ϕ real. Ahora, si introducimos el acoplamiento mínimo

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu \longrightarrow (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu), \quad (1.64)$$

la ecuación de Klein-Gordon se escribe de la siguiente manera

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu) + m^2]\phi = 0, \quad (1.65)$$

logrando que el campo escalar ϕ , en general, sea una solución compleja. Es decir, si queremos que el campo escalar interaccione con el campo electromagnético entonces dicho campo debe ser complejo.

De manera general se puede definir al campo complejo ϕ

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \longrightarrow \phi, \phi^*. \quad (1.66)$$

Cuya lagrangiana es

$$\mathcal{L} = [(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^*][(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi] - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.67)$$

Definiendo la derivada covariante electromagnética

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu, \quad (1.68)$$

se tiene que (1.67)

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^* (\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.69)$$

Como un dato extra calculemos las ecuaciones de movimiento, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1.70)$$

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0. \quad (1.71)$$

Calculemos primero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^*)} = (\partial^\alpha + iqA^\alpha) \phi, \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 - iqA_\mu [(\partial^\mu + iqA^\mu) \phi]. \quad (1.73)$$

Utilizando (1.71), (1.72) y (1.73)

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (\partial^\alpha + iqA^\alpha) \phi + m^2 \phi + iqA_\mu [(\partial^\mu + iqA^\mu) \phi] &= 0 \\ (\partial_\mu + iqA_\mu) (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + m^2 \phi &= 0 \\ [(\partial_\mu + iqA_\mu) (\partial^\mu + iqA^\mu) + m^2] \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

de manera sorprendente (1.74) coincide con (1.65). En la sección anterior vimos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma. ¿También será invariante de norma la parte de Electrodinámica escalar?

Tenemos las siguientes transformaciones

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha(x), \quad (1.75)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\alpha(x)} \phi, \quad (1.76)$$

$$\phi^* \longrightarrow \phi'^* = e^{iq\alpha(x)} \phi^*. \quad (1.77)$$

Vamos a aplicar estas transformaciones a la lagrangiana de Electrodinámica escalar

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* (\mathcal{D}_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.78)$$

Veamos que la parte de la derivada covariante se transforma de manera similar a (1.76) y (1.77):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \phi &\longrightarrow \mathcal{D}'_\mu \phi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu)\phi' \\
&= [\partial_\mu + iq(A_\mu + \partial_\mu \alpha(x))]e^{-iq\alpha(x)}\phi \\
&= e^{-iq\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu \phi.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Lo cual nos permite decir que (1.78) es invariante bajo las transformaciones de norma:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}. \tag{1.80}$$

Ahora conjugemos (1.74)

$$[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial^\mu - iqA^\mu) + m^2]\phi^* = 0, \tag{1.81}$$

bajo la condición de conjugación de carga se tienen las siguientes transformaciones

$$A^\mu \longrightarrow A^{c\mu} = -A^\mu, \tag{1.82}$$

$$\phi \longrightarrow \phi^c = \phi^*. \tag{1.83}$$

¿Entonces como se transforma $\mathcal{L}$ (1.78) bajo conjugación de carga?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}^c = (\mathcal{D}_\mu^c \phi^c)^* (\mathcal{D}^{c\mu} \phi^c) - m^2 \phi^{c*} \phi^c - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} \\
&= [(\partial_\mu + iqA_\mu^c) \phi^c]^* [(\partial^\mu + iqA^{c\mu}) \phi^c] - m^2 \phi^{c*} \phi^c - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^c F^{c\mu\nu} \\
&= [(\partial_\mu + iqA_\mu) \phi]^* [(\partial^\mu + iqA^\mu) \phi]^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= (\mathcal{D}_\mu \phi) (\mathcal{D}^\mu \phi)^* - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L},
\end{aligned} \tag{1.84}$$

esto nos dice que $\mathcal{L}$ es invariante ante dichas transformaciones.

1.5. Rompimiento espontaneo de la simetría

Consideremos una lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - V(\phi, \phi^*), \tag{1.85}$$

$V(\phi, \phi^*)$ es el potencial escalar. Calculando las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0, \\
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= 0,
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}(\partial^2 + m^2)\phi &= 0, \longrightarrow \text{ecuación de Klein-Gordon} \\ (\partial^2 + m^2)\phi^* &= 0.\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{L}$, mostrada en (1.85), tiene simetría bajo transformaciones globales del grupo $U(1)$,

$$\begin{aligned}\phi &\longrightarrow \phi' = e^{-i\alpha}\phi, \\ \phi^* &\longrightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha}\phi^*.\end{aligned}\tag{1.86}$$

Características del potencial:

Si lo proponemos como $V(\phi, \phi^*) = m^2\phi^*\phi$, notamos que ϕ tiene unidades de masa, además podemos definir

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \\ \phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2),\end{aligned}\tag{1.87}$$

ϕ_1 y ϕ_2 son campos reales. Por lo que el potencial en términos de los campos reales es

$$V(\phi, \phi^*) = \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \longrightarrow \text{paraboloide},\tag{1.88}$$

se cumple $V(\phi_1, \phi_2) \geq 0$ y el punto crítico se alcanza cuando $(\phi_1, \phi_2) = (0, 0)$ ó $\phi = 0$, esto significa que no hay interacción en esa configuración.

Una vez que analizamos el caso más sencillo del potencial, ahora vamos a fijarnos en

$$m^2\phi^*\phi \longrightarrow \lambda m^2(\phi^*\phi - \Phi^2)^2,\tag{1.89}$$

λ es una constante que tiene unidades de masa^{-2} . Haciendo el mismo procedimiento que (1.88) se tiene

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda m^2 \left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2} - \Phi^2 \right)^2.\tag{1.90}$$

Calculando los puntos críticos se obtienen las constricciones

$$\begin{aligned}\phi_1 \left(\frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2} - \Phi^2 \right) &= 0, \\ \phi_2 \left(\frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2} - \Phi^2 \right) &= 0,\end{aligned}$$

permitiendo obtener las siguientes condiciones para el mínimo local

$$1) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 = (\sqrt{2}\Phi)^2 \quad \Rightarrow \quad V = 0, \quad (1.91)$$

esta ecuación representa una circunferencia en el plano $\phi_1 - \phi_2$ de radio $\sqrt{2}\Phi$. También se tiene un máximo local que cumple las siguientes condiciones

$$2) \quad \phi_1 = 0 \quad y \quad \phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V > 0. \quad (1.92)$$

Regresando al cambio de variables $\phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$, la condición 1) se reduce a $|\phi|^2 = \Phi^2$ y $V(\phi, \phi^*) = m^2 \lambda (\phi^* \phi - \Phi^2)$. De esta forma el potencial es degenerado y además es invariante bajo $U(1)$ global, al igual que $|\phi|^2 = \Phi^2$.

Veamos qué sucede con los campos ϕ y ϕ^* bajo $U(1)$ global

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi = (\cos\alpha - i \sin\alpha) \phi, \\ \phi^* &\longrightarrow \phi'^* = e^{i\alpha} \phi^* = (\cos\alpha + i \sin\alpha) \phi^*, \end{aligned} \quad (1.93)$$

sumando y restando ambas expresiones

$$\begin{aligned} \phi' + \phi'^* &= \cos\alpha (\phi + \phi^*) + i \sin\alpha (-\phi + \phi^*), \\ \phi' - \phi'^* &= \cos\alpha (\phi - \phi^*) + i \sin\alpha (-\phi - \phi^*). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Pero

$$\begin{aligned} \phi + \phi^* &= \sqrt{2}\phi_1, \\ \phi - \phi^* &= i\sqrt{2}\phi_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \cos\alpha \phi_1 + \sin\alpha \phi_2, \\ \phi'_2 &= \cos\alpha \phi_2 - \sin\alpha \phi_1. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Expresando en forma matricial las ecuaciones obtenidas se obtiene una rotación en el plano complejo

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

también que $|\phi|^2 = \Phi^2$ es invariante ante las transformaciones globales (1.93). Por lo tanto tenemos un conjunto de puntos que representa un estado de mínima energía debido a que hay degeneración (circunferencia) y estos puntos son invariantes ante $U(1)$. Esto significa que podemos escoger un punto en particular del vacío:

$$\phi|_{vacio} \equiv \phi_0 = \Phi, \quad (1.97)$$

ϕ_0 son los puntos en el estado de vacío, esto nos lleva a que ϕ_0 debe ser real ya que $\Phi \in \mathbb{R}$, también notemos que se satisface $|\phi_0|^2 = \Phi^2$.

Definiendo $\phi - \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2)$, entonces podemos poner al campo ϕ en términos del vacío Φ :

$$\phi = \Phi + (\phi - \Phi) = \Phi + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2). \quad (1.98)$$

El potencial escalar (1.90) en términos de (1.98) es:

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^*) &= \lambda m^2 \left[\left(\Phi + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) \right) \left(\Phi + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) \right) - \Phi^2 \right]^2 \\ &= \lambda m^2 \left[\sqrt{2}\Phi\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{4\lambda m^2 \Phi^2})^2 \xi_1^2 + \mathcal{O}(\xi_j^3) \\ &= \frac{1}{2}m_\xi^2 \xi_1^2 + \mathcal{O}(\xi_j^3), \end{aligned} \quad (1.99)$$

para $m_\xi = \sqrt{4\lambda m^2 \Phi^2}$.

Recordemos que en el lagrangiano (1.85) tenemos expresiones de la forma

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2. \quad (1.100)$$

Uniendo (1.99) y (1.100), encontramos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} m_\xi^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 - \mathcal{O}(\xi_j^3). \quad (1.101)$$

m_ξ es la masa del campo ξ_1 debido al signo menos que presenta, de forma contraria el campo ξ_2 es un bosón del Goldstone, el cual es una partícula física sin masa.

A este hecho de elegir uno de los estados de vacío en particular se le llama *rompimiento espontáneo de la simetría global*.

Ahora, ¿Qué pasa si rompemos una simetría local?

Tomemos como ejemplo el lagrangiano de electrodinámica donde se rompe simetría de norma.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^* (\mathcal{D}^\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi, \phi^*) \\ &= |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi^*, \phi),\end{aligned}\tag{1.102}$$

donde $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ es la derivada covariante.

Proponiendo el siguiente potencial

$$V(\phi, \phi^*) = -\mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2,\tag{1.103}$$

la lagrangiana (1.102) se convierte en

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi + \dots\tag{1.104}$$

Buscamos que $\mu^2 \phi^* \phi$ sea un término de masa, entonces necesitamos que haya un signo menos en dicha expresión, esto depende del valor μ^2 . Escogiendo $\mu^2 > 0$ se tiene un campo con interacciones pero sin masa.

Recordemos que $(\mathcal{D}_\mu \phi)^* (\mathcal{D}^\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ es invariante de norma, también lo es el potencial (1.103), $V(\phi, \phi^*)$, por lo tanto toda la lagrangiana (1.102) es invariante de norma

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}.\tag{1.105}$$

Ahora regresemos al potencial (1.103) en términos de ϕ_1 y ϕ_2

$$V(\phi, \phi^*) \quad \Rightarrow \quad V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{8} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.\tag{1.106}$$

Calculando los puntos críticos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= \phi_1 (-\mu^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= \phi_2 (-\mu^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)) = 0.\end{aligned}\tag{1.107}$$

Obtenemos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}1) \quad & -\mu^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0, \\ 2) \quad & \phi_1 = 0 \quad y \quad \phi_2 = 0.\end{aligned}\tag{1.108}$$

La primera condición nos muestra un mínimo degenerado

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}} \right)^2.\tag{1.109}$$

En términos de ϕ y ϕ^* se tiene que (1.109) se simplifica:

$$\phi^* \phi = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad |\phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (1.110)$$

la expresión que se obtuvo es invariante ante la transformación de norma local, donde ahora el ángulo que rota depende del espacio-tiempo. Debido a que estamos considerando que, en general, el campo ϕ es complejo, lo podemos representar mediante su magnitud y una fase compleja

$$\phi = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} e^{i\alpha}, \quad (1.111)$$

eligiendo $\alpha = 0$

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.112)$$

Al realizar el mismo procedimiento que en las transformaciones globales, reescribamos ϕ como:

$$\phi = \phi - \phi_0 + \phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2),$$

Ahora el potencial (1.103) es

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^*) &= -\mu^2 \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) \right) \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) \right) + \frac{\lambda}{2} \left[\left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) \right) \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) \right) \right]^2 \\ &= \phi_0^2 \left(\frac{\lambda}{2} \phi_0^2 - \mu^2 \right) + (\sqrt{2}\xi_1 \phi_0 + \frac{\xi_2^2}{2})(\phi_0^2 \lambda - \mu^2) + \xi_1^2 \left(\frac{3}{2} \phi_0^2 \lambda - \frac{\mu^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{2}\phi_0 \xi_1^3 + \sqrt{2}\phi_0 \xi_1 \xi_2^2 + \frac{\xi_1^4}{4} + \frac{1}{2}\xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{\xi_2^4}{4} \right) \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Utilizando (1.112), calculemos:

$$\phi_0^2 \lambda - \mu^2 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \lambda - \mu^2 = 0, \quad (1.114)$$

esto nos lleva a pensar que no hay término de masa de ξ_2 . Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 - \mu^2 &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) - \mu^2 = -\frac{\mu^2}{2}, \\ \frac{3}{2} \phi_0^2 \lambda - \frac{\mu^2}{2} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \lambda - \frac{\mu^2}{2} = \mu^2. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Por lo que el potencial (1.113) se reduce:

$$V(\phi, \phi^*) = \left(-\frac{\mu^2}{2} \right) \frac{\mu^2}{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{2\mu^2})^2 \xi_1^2 + \mathcal{O}(\xi_j^3). \quad (1.116)$$

El término $\left(-\frac{\mu^2}{2} \right) \frac{\mu^2}{2}$ se puede despreciar debido a que solo se miden diferencias de energía. Definiendo $m_{\xi_1} \equiv \sqrt{2\mu^2}$

$$V(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \mathcal{O}(\xi_j^3). \quad (1.117)$$

Ahora calculamos la parte $|\mathcal{D}_\mu \phi|^2$ de (1.102)

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 &= (\partial_\mu \phi^* - iqA_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi + iqA^\mu \phi) \\ &= \left[\partial_\mu \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) \right) - iqA_\mu \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2) \right) \right] \\ &\quad \left[\partial^\mu \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) \right) + iqA^\mu \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 + q^2 \phi_0^2 A_\mu^2 + \sqrt{2} q \phi_0 A_\mu \partial^\mu \xi_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.118)$$

los términos que no se escribieron constan de productos impares de los campos A, ξ_1, ξ_2 .

Por lo que el lagrangiano de ED toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ED} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - V(\phi, \phi^*) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} q \phi_0)^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 + \sqrt{2} q \phi_0 A_\mu \partial^\mu \xi_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.119)$$

¿Qué significa el término $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} q \phi_0)^2 A_\mu^2$?

Basándose en el lagrangiano de Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^2, \quad (1.120)$$

el cual describe una especie de fotón que tiene masa, debe suceder que el segundo término de la expresión sea positivo. También notemos que este lagrangiano no es invariante de norma.

Con el argumento anterior podemos decir que $m_A = \sqrt{2} q \phi_0$ y así

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 + \sqrt{2} q \phi_0 A_\mu \partial^\mu \xi_2. \quad (1.121)$$

Regresemos a la lagrangiana (1.102) en términos de ϕ y ϕ^* , utilizando la transformación

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\alpha(x)} \phi, \quad (1.122)$$

los cuales, a su vez, se pueden escribir en términos de los campos ϕ_1 y ϕ_2 , representando una rotación:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1.123)$$

También vamos a escoger un vacío utilizando (1.110)

$$|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = |\phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad \phi \in \mathbb{C}, \quad (1.124)$$

así

$$\Phi = \phi_0 \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right). \quad (1.125)$$

Definiendo $\phi(x) - \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x) \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \Phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x) \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right) \\ &= \phi_0 \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x) \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right) \\ &= \underbrace{\left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x) \right)}_{\text{campo escalar real}} \exp \left(-i \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right). \end{aligned} \quad (1.126)$$

Utilizando las transformaciones de norma (1.75), (1.76) y (1.77) se tiene

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-iq\alpha(x)} \phi = \left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x) \right) \exp \left\{ -i \left(q\alpha(x) + \frac{\chi(x)}{\phi_0} \right) \right\}. \quad (1.127)$$

Podemos elegir la norma mediante la siguiente condición

$$\begin{aligned} q\alpha(x) + \frac{\chi(x)}{\phi_0} &= 0, \\ \Rightarrow \quad \alpha(x) &= -\frac{\chi(x)}{q\phi_0}, \end{aligned} \quad (1.128)$$

Obteniendo, así, una nueva configuración para el campo $\phi(x)$

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta(x), \quad (1.129)$$

automáticamente de (1.126) se obtiene un estado de vacío real ϕ_0 . Notemos que ésto sucedió al fijar la norma. Comparemos el resultado obtenido con la expresión que se tenía en un principio

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 + i\xi_2), \quad (1.130)$$

notemos que (1.129) y (1.130) tienen el mismo vacío ϕ_0 . Por lo que es lo mismo eliminar un campo o hacer $\xi_2 = 0$. A esta norma se le llama *Norma unitaria*.

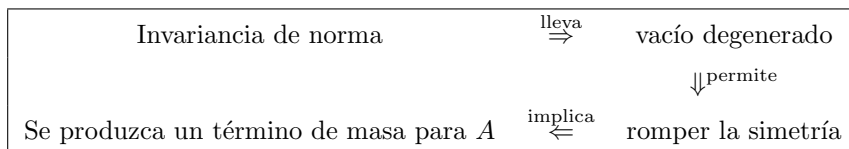
¿Qué sucede con la lagrangiana (1.121) al fijar la norma unitaria?

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_2 \partial^\mu \xi_2 + \sqrt{2} q \phi_0 A_\mu \partial^\mu \xi_2 \Big|_{\xi_2=0} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_1 \partial^\mu \xi_1 - \frac{1}{2} m_{\xi_1}^2 \xi_1^2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Antes de fijar la norma, $\mathcal{L}$ tiene cuatro grados de libertad, después resulta que al romper la simetría solo se tienen tres grados de libertad. Se dice que ξ_2 no es un campo físico y se le conoce como *Pseudo*

escalar de Goldstone.

En resumen, el hecho de que haya un rompimiento de la simetría hace que se cree un término de masa para el campo electromagnético, debido a que hay interacción entre los campos. De forma esquemática:



Al generar masas a través del rompimiento de la simetría se le conoce como *Mecanismo de Higgs*.

Capítulo 2

Teoría de Yang-Mills

Si la construcción geométrica simple en la sección anterior nos condujo a la teoría de Maxwell de electrodinámica, entonces, seguramente, debe ser posible construir otras teorías interesantes comenzando con principios geométricos más generales. Yang y Mills propusieron una teoría que generaliza la invariancia bajo cualquier grupo de simetría continuo ¹.

Considerando el campo de Dirac $\psi(x)$ y le vamos a pedir que se transforme a través de una fase

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (2.1)$$

el cual va a formar parte de una lagrangiana la cual cumpla

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

esta lagrangiana es una cantidad escalar en el sentido de que es invariante ante las transformaciones de Lorentz, lo cual significa que es la misma descripción en cualquier sistema de referencia.

Algunos términos que son escalares

$$(\bar{\psi}\psi)^n, \quad (2.3)$$

son invariantes ante la transformación de norma

$$(\bar{\psi}\psi)^n \longrightarrow (\bar{\psi}'\psi')^n = (\bar{\psi}\psi)^n. \quad (2.4)$$

Por ejemplo el término de masa de Dirac cumple ser invariante de norma y además hermitiano:

$$m\bar{\psi}\psi \longrightarrow (m\bar{\psi}\psi)' = m\bar{\psi}\psi. \quad (2.5)$$

Si ahora nos fijamos, por ejemplo, en el siguiente término hermitiano

¹Las ideas que se exponen en este capítulo fueron obtenidas de las referencias [2, 3]

$$\begin{aligned}\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi &\longrightarrow \bar{\psi}' i \gamma^\mu \partial_\mu \psi' = e^{-i\alpha(x)} \psi(x) i \gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) \\ &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha(x),\end{aligned}\tag{2.6}$$

es evidente que no es invariante ante (2.1) por lo que va a ser necesario utilizar derivada covariante que se definió anteriormente

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu.\tag{2.7}$$

De modo que $\mathcal{D}_\mu \psi$ se transforma como sigue

$$\mathcal{D}_\mu \psi \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi,\tag{2.8}$$

debido a que la conexión se transforma de la siguiente manera

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{q} \partial^\mu \alpha(x),\tag{2.9}$$

se puede demostrar que el producto de derivadas covariantes se transforma como sigue

$$\mathcal{D}_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_n} \psi \longrightarrow (\mathcal{D}_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_n} \psi)' = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_{\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_2} \dots \mathcal{D}_{\mu_n} \psi,\tag{2.10}$$

en particular nos podemos fijar en el producto de dos de ellas

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi)' = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi.\tag{2.11}$$

De esta manera, el conmutador de derivadas covariantes se transforma como sigue:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi \longrightarrow ([\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi)' = e^{i\alpha(x)} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi.\tag{2.12}$$

Ahora analicemos el conmutador anterior utilizando la definición de la derivada covariante

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \psi \\ &= (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu \psi + iqA_\nu \psi) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi) \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi \\ &= iqF_{\mu\nu} \psi.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Usando la expresión (2.12) podemos concluir que el tensor electromagnético es invariante ante las transformaciones de norma

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.\tag{2.14}$$

Con los argumentos anteriores se puede modificar la estructura de la expresión (2.6) de tal forma que se obtenga un término cinético

$$\begin{aligned}\bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi &\longrightarrow \bar{\psi}' \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi' = e^{-i\alpha(x)} \psi(x) i \gamma^\mu \left(e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x) \right) \\ &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi.\end{aligned}\tag{2.15}$$

En resumen, tenemos las siguientes transformaciones, de los campos y conexiones, con el objetivo de construir una lagrangiana invariante de norma

ψ	$\longrightarrow$	ψ'	$= e^{i\alpha(x)} \psi,$
$\mathcal{D}_\mu \psi$	$\longrightarrow$	$(\mathcal{D}_\mu \psi)'$	$= e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi,$
A_μ	$\longrightarrow$	A'_μ	$= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x),$
$F_{\mu\nu}$	$\longrightarrow$	$F'_{\mu\nu}$	$= F_{\mu\nu}.$

Con base en los resultados anteriores podemos proponer un lagrangiano

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - C \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},\tag{2.16}$$

C es una constante adimensional.

Al inicio del capítulo vimos que bajo $U(1)$ el campo espinorial se transforma como (2.1) y pedimos que la lagrangiana (2.16) fuera invariante ante esta transformación.

Pero de forma más general podemos construir un elemento se transforme de la siguiente manera

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = V(x) \Psi(x),\tag{2.17}$$

donde $V(x)$ es un elemento del grupo $SU(2)$. Por otra parte el doblete $\Psi(x)$ tiene la forma

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix},\tag{2.18}$$

podemos mencionar que $\Psi(x)$ no es un espinor, es un elemento que tiene ocho componentes. De acuerdo a su regla de transformación (2.17)

$$\begin{pmatrix} \psi'_1(x) \\ \psi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & V_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(x)\psi_1(x) + V_{12}(x)\psi_2(x) \\ V_{21}(x)\psi_1(x) + V_{22}(x)\psi_2(x) \end{pmatrix},\tag{2.19}$$

es equivalente a tener dos reglas de transformación

$$\begin{aligned}\psi'_1(x) &= V_{11}(x)\psi_1(x) + V_{12}(x)\psi_2(x), \\ \psi'_2(x) &= V_{21}(x)\psi_1(x) + V_{22}(x)\psi_2(x), \\ &\Downarrow \\ \psi'_j(x) &= V_{jk}(x)\psi_k(x).\end{aligned}\tag{2.20}$$

En adelante, para referirnos a un doblete Ψ utilizaremos la notación ψ y lo distinguiremos de los espinores debido a que estos tendrán un subíndice j , es decir ψ_j .

En general si $V(x) \in SU(2)$, podemos escribirlo como

$$V(x) = \exp \left(i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} \right), \quad j=1,2,3. \quad (2.21)$$

Recordemos que para buscar una teoría invariante bajo $U(1)$ se definió una derivada covariante (2.7), ahora haremos algo similar para el caso $SU(2)$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^j(x) \frac{\sigma^j}{2}, \quad (2.22)$$

g es la constante de acoplamiento del grupo $SU(2)$. Notemos que la expresión que se acaba de definir es una matriz de 2×2 . Veamos cómo son las entradas de $\mathcal{D}_\mu$

$$\mathcal{D}_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - igA_\mu^j \left(\frac{\sigma^j}{2} \right)^{ab}. \quad (2.23)$$

Además se cumple, que bajo $SU(2)$:

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi(x))' = V(x) \mathcal{D}_\mu \psi(x). \quad (2.24)$$

Por otra parte se puede demostrar que

$$A_\mu'^j \frac{\sigma^j}{2} = V(x) \left[A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] V^\dagger(x), \quad (2.25)$$

nos conviene definir

$$A_\mu \equiv A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \quad (2.26)$$

para que el campo A_μ se transforme bajo $SU(2)$ de la siguiente manera

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu' = V(x) \left(A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x). \quad (2.27)$$

Ahora nos vamos a fijar en la transformación infinitesimal de A_μ , para esto es necesario expandir a primer orden a $V(x)$ mostrado en (2.21)

$$V(x) \approx \mathbb{1} + i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2}. \quad (2.28)$$

Utilizando (2.25)

$$\begin{aligned} A_\mu' &\approx \left(\mathbb{1} + i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} \right) \left(A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) \left(\mathbb{1} - i\alpha^m(x) \frac{\sigma^m}{2} \right) \\ &= \left(A_\mu^j + \frac{i}{g} \partial_\mu \alpha^j(x) \right) \frac{\sigma^j}{2} + i\alpha^j(x) A_\mu^k \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

debido a que las matrices $\frac{\sigma^j}{2}$ satisfacen las propiedades el álgebra de Lie, entonces se debe cumplir

$$\left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] = i\epsilon^{jkm} \frac{\sigma^m}{2}, \quad j, k, m = 1, 2, 3. \quad (2.30)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} A'_\mu \frac{\sigma^j}{2} &= \left(A_\mu^j + \frac{i}{g} \partial_\mu \alpha^j(x) \right) \frac{\sigma^j}{2} + i\alpha^j(x) A_\mu^k i\epsilon^{jkm} \frac{\sigma^m}{2} \\ &= \left[A_\mu^j + \frac{1}{g} (\delta^{jm} \partial_\mu - g\epsilon^{jmk} A_\mu^k) \alpha^m(x) \right] \frac{\sigma^j}{2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Es decir, a nivel infinitesimal A_μ tiene la siguiente transformación

$$A'_\mu{}^j = A_\mu^j + \frac{1}{g} (\delta^{jm} \partial_\mu - g\epsilon^{jmk} A_\mu^k) \alpha^m(x), \quad (2.32)$$

¿Tiene algún significado el segundo término en la expresión anterior?

$$\begin{aligned} (\delta^{jm} \partial_\mu - g\epsilon^{jmk} A_\mu^k) \alpha^m(x) &= (\delta^{jm} \partial_\mu - g(-i^2)\epsilon^{jmk} A_\mu^k) \alpha^m(x) \\ &= (\delta^{jm} \partial_\mu - ig \underbrace{(i\epsilon^{jkm})}_{(tk)^{jm}} A_\mu^k) \alpha^m(x) \\ &= (\delta^{jm} \partial_\mu - ig \underbrace{(t^k)^{jm}}_{\mathcal{M}_{3 \times 3}} A_\mu^k) \alpha^m(x). \end{aligned} \quad (2.33)$$

De aquí que podemos definir la derivada covariante, en la representación adjunta de las matrices 3×3 , actuando sobre $\vec{\alpha}$, un vector de tres componentes.

$$\mathcal{D}_\mu \vec{\alpha} = (\mathbb{1}_{3 \times 3} \partial_\mu - ig t^k A_\mu^k) \vec{\alpha}, \quad (2.34)$$

De esta forma la transformación infinitesimal del campo $A'_\mu{}^j$ que se obtiene de (2.32) en términos de la derivada covariante es

$$A'_\mu{}^j = A_\mu^j + \frac{1}{g} D_\mu^{jk} \alpha^k. \quad (2.35)$$

Regresando a las transformaciones locales e infinitesimales de $SU(2)$ se puede demostrar que

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi(x))' = \left(\mathbb{1} + i \frac{\sigma^j}{2} \alpha^j \right) \mathcal{D}_\mu \psi(x) = V(x) \mathcal{D}_\mu \psi(x). \quad (2.36)$$

Al igual que en el caso de $U(1)$ también se cumple que

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi(x) \longrightarrow ([\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi(x))' = V(x) [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi(x), \quad (2.37)$$

al desarrollar el conmutador de las derivadas covariantes

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \psi(x) &= \left(\partial_\mu - ig A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \right) \left(\partial_\nu - ig A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \right) - \left(\partial_\nu - ig A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \right) \left(\partial_\mu - ig A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \right) \psi(x) \\ &= -ig [\partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + g\epsilon^{jmn} A_\mu^m A_\nu^n] \frac{\sigma^j}{2} \psi(x), \end{aligned} \quad (2.38)$$

encontramos que el término $g\epsilon^{jmn}A_\mu^mA_\nu^n$ representa las interacciones del campo consigo mismo.

Definamos la *curvatura de Yang-Mills*

$$F_{\mu\nu}^j \equiv \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + g\epsilon^{jmn}A_\mu^mA_\nu^n, \quad (2.39)$$

esto nos lleva a la siguiente igualdad

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -igF_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}. \quad (2.40)$$

Es conveniente definir

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} = \partial_\mu A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} - \partial_\nu A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - igA_\mu^j A_\nu^n \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^n}{2} \right]. \quad (2.41)$$

Utilizando la ley de transformación de norma (2.37) y la definición (2.40) podemos deducir la ley de transformación para la curvatura

$$F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} = V(x) F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x), \quad (2.42)$$

por lo que estamos probando que la curvatura $F_{\mu\nu}$ se transforma así:

$$F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \longrightarrow \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' = V(x) F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x). \quad (2.43)$$

Para encontrar la ley de transformación de la conexión a nivel infinitesimal podemos utilizar (2.31)

$$A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \longrightarrow \left(A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' = A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} + \frac{i}{g} \partial_\mu \alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} + i\alpha^j(x) A_\mu^k \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right]. \quad (2.44)$$

Con lo anterior la ley de transformación de la curvatura a nivel infinitesimal (despreciando términos de orden cuadrático) obtenemos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} &\longrightarrow \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' = \partial_\mu \left(A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' - \partial_\nu \left(A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' - ig \left[\left(A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \right)', \left(A_\nu^m \frac{\sigma^m}{2} \right)' \right] \\ &= F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} + \left[i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}, F_{\mu\nu}^k \frac{\sigma^k}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Recordemos que en el caso de electrodinámica, la curvatura se transforma bajo el grupo $U(1)$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

por lo que propusimos la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Pero en el caso de Yang-Mills tenemos problemas ya que:

- $F_{\mu\nu}^j$ no es invariante ante las transformaciones de norma, realmente, lo que se transforma es $F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}$ como se puede ver en (2.45)
- Podríamos pensar en proponer algo de la forma

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2},$$

pero este término es una matriz, no un escalar, por lo que no es elemento útil para proponerlo en la lagrangiana. Además de que se puede notar, usando (2.43), que no es invariante de norma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} &\longrightarrow -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' \left(F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right)' = -\frac{1}{4} V(x) F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x) F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} V^\dagger(x) \\ &= -\frac{1}{4} V(x) \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right) V^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para resolver el problema anterior nos conviene utilizar la traza de las matrices $\left\{ \mathbb{1}, \frac{\sigma^1}{2}, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{2} \right\}$ garantizando, así, tener cantidades escalares.

Notemos algo interesante, si calculamos la traza de la expresión (2.47)

$$tr \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right\} \longrightarrow tr \left\{ -\frac{1}{4} V(x) \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right) V^\dagger(x) \right\}, \quad (2.48)$$

por la propiedad de ciclicidad de la traza y la unitariedad de la matriz $V(x)$ se reduce la expresión a simplemente:

$$tr \left\{ F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right\} \longrightarrow tr \left\{ \left(F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)' \left(F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right)' \right\} = tr \left\{ F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right\}, \quad (2.49)$$

lo que probamos es que la traza de (2.47) sí es invariante de norma. Con base en lo que acabamos de probar, nos podemos fijar en el término

$$-\frac{1}{2} tr \left\{ F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right\} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^j F^{k\mu\nu} tr \left\{ \frac{\sigma^j}{2} \frac{\sigma^k}{2} \right\}. \quad (2.50)$$

Es conveniente utilizar la siguiente propiedad

$$\sigma^j \sigma^k = \delta^{jk} \mathbb{1} + i\epsilon^{jkl} \sigma^l, \quad (2.51)$$

y obteniendo la traza de ambos lados

$$tr \{ \sigma^j \sigma^k \} = tr \{ \delta^{jk} \mathbb{1} + i\epsilon^{jkl} \sigma^l \} = 2\delta^{jk}. \quad (2.52)$$

De donde se obtiene

$$-\frac{1}{2}tr \left\{ F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} F^{k\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2} \right\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F^{k\mu\nu} \delta^{jk} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Finalmente podemos proponer el lagrangiano de Yang-Mills sin interacciones

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}. \quad (2.54)$$

¿Qué pasa con las leyes de transformación que tenemos para construir una lagrangiana?

$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = V(x)\psi(x), \\ \mathcal{D}_\mu \psi(x) &\longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi(x))' = V(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x). \end{aligned}$
--

Recordando que

$$\bar{\psi}'(x) = \psi'^{\dagger}(x)\gamma^0 = (V(x)\psi(x))^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)V^{\dagger}(x)\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 V^{\dagger}(x) = \bar{\psi}(x)V^{\dagger}(x), \quad (2.55)$$

nos podemos fijar en el siguiente término

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi(x) &\longrightarrow (i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi(x))' = i\bar{\psi}'(x)\gamma^{\mu}(\mathcal{D}_{\mu}\psi(x))' \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi(x), \end{aligned} \quad (2.56)$$

el cual es invariante ante las transformaciones de norma.

También

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \longrightarrow (\bar{\psi}(x)\psi(x))' = \bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (2.57)$$

por lo que el término de masa es invariante de norma

$$-m\bar{\psi}(x)\psi(x) = -m \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1(x) & \bar{\psi}_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = -m\bar{\psi}_1(x)\psi_1(x) - m\bar{\psi}_2(x)\psi_2(x), \quad (2.58)$$

notemos que ambos términos tienen la misma masa pero en general podrían ser diferentes utilizando una matriz diagonal.

Con lo anterior podemos proponer el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi}i\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^j)^2. \quad (2.59)$$

cuyas ecuaciones de movimiento se calculan en el Apéndice [B].

Capítulo 3

Modelo Estándar

Incluye a los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ ya que este modelo se crea bajo simetrías¹.

Propongamos el lagrangiano invariante de norma

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}tr \left\{ \left(W_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)^2 \right\} - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2, \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu && \text{Curvatura de } U(1), \\ W_{\mu\nu}^j &= \partial_\mu W_\nu^j - \partial_\nu W_\mu^j + g_2 \epsilon^{jkm} W_\mu^k W_\nu^m && j = 1, 2, 3 \quad \text{Curvatura } SU(2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

También recordemos que

$$-\frac{1}{2}tr \left\{ \left(W_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} \right)^2 \right\} = -\frac{1}{4}(W_{\mu\nu}^j)^2. \quad (3.3)$$

Para $SU(2)$:

Si buscamos introducir interacciones hay que introducir la derivada covariante de 2×2 y para actuar sobre campos escalares se debe introducir un doblete de campos ϕ que se define de la siguiente manera

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \phi_j \in \mathbb{C}, \quad (3.4)$$

y se transforma mediante

$$\phi \longrightarrow \phi' = V(x)\phi \quad V(x) \in SU(2). \quad (3.5)$$

La derivada covariante se define

¹Las ideas que se exponen en este capítulo fueron obtenidas de las referencias [2, 3]

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}. \quad (3.6)$$

La cual cumple que bajo $SU(2)_L$

$$\mathcal{D}_\mu \phi \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi)' = V(x) \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.7)$$

Para $U(1)$:

Nos fijamos en ϕ_1 y ϕ_2 por separado. Definiendo la derivada covariante de este grupo

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - icg_1 B_\mu, \quad (3.8)$$

en el caso de electrodinámica se cumple $cg_1 = -e$. Para los campos ϕ_1 y ϕ_2 pedimos que se transformen como

$$\phi_j \longrightarrow \phi_j' = e^{ic\beta(x)} \phi_j. \quad (3.9)$$

Notemos que ϕ_1 y ϕ_2 tienen la misma fase, lo cual significa que tienen la misma carga, por lo tanto la derivada covariante sería la misma. Es decir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu \phi_1 \\ \mathcal{D}_\mu \phi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\partial_\mu - icg_1 B_\mu) \phi_1 \\ (\partial_\mu - icg_1 B_\mu) \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu - icg_1 B_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu - icg_1 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\partial_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{ig_1 B_\mu c}_{\equiv Y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= (\partial_\mu \mathbb{1} - ig_1 B_\mu Y) \phi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

al escalar c se le conoce como *hipercarga* y la matriz $Y \equiv c\mathbb{1}$ como *Operador de hipercarga* y determina cómo interacciona el campo con el grupo $U(1)_Y$. Con la relación que se acaba de obtener podemos definir la derivada covariante en $U(1)_Y$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} - ig_1 B_\mu Y, \quad (3.11)$$

al introducirlo al doblete obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu \phi_1 \\ \mathcal{D}_\mu \phi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.12)$$

Fijándonos en la ley de transformación bajo $U(1)_Y$

$$\mathcal{D}_\mu \phi \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi)' = \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_\mu \phi_1)' \\ (\mathcal{D}_\mu \phi_2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ic\beta(x)} \mathcal{D}_\mu \phi_1 \\ e^{ic\beta(x)} \mathcal{D}_\mu \phi_2 \end{pmatrix} = e^{ic\beta(x)} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu \phi_1 \\ \mathcal{D}_\mu \phi_2 \end{pmatrix} = e^{ic\beta(x)} \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.13)$$

Utilizando las expresiones (3.6) y (3.11) proponemos la siguiente derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 Y B_\mu, \quad (3.14)$$

la cual es una matriz 2×2 , pero ¿Esta derivada funciona para ser invariante bajo $SU(2)$ y $U(1)$?

Analicemos el siguiente término

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &\xrightarrow{SU(2)_L} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = \left(\partial_\mu \phi - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \phi - ig_1 Y B_\mu \phi \right)' \\ &= \left(\partial_\mu \phi - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \phi \right)' - ig_1 Y (B_\mu)' \phi' \\ &= V(x) \mathcal{D}_\mu \phi - ig_1 Y B_\mu V(x) \phi \\ &= V(x) \mathcal{D}_\mu \phi, \end{aligned} \quad (3.15)$$

B_μ es un singlete de $SU(2)_L$, es decir, es invariante bajo la acción de este grupo, por esa razón se le quita la prima. Por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu \phi \xrightarrow{SU(2)_L} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = V(x) \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.16)$$

Ahora, bajo el grupo $U(1)_Y$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &\xrightarrow{U(1)_Y} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = \left(\partial_\mu \phi - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \phi - ig_1 Y B_\mu \phi \right)' \\ &= (\partial_\mu \phi - ig_1 Y B_\mu \phi)' - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} \phi' \\ &= e^{ic\beta(x)} (\partial_\mu \phi - ig_1 Y B_\mu \phi) - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} e^{ic\beta(x)} \phi \\ &= e^{ic\beta(x)} \mathcal{D}_\mu \phi, \end{aligned} \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu \phi \xrightarrow{U(1)_Y} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = e^{ic\beta(x)} \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.18)$$

¿Qué pasa si se quieren aplicar las dos transformaciones simultáneamente?

Utilizando (3.16) y (3.18) podemos concluir que

$$\mathcal{D}_\mu \phi \xrightarrow{SU(2)_L \times U(1)_Y} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = e^{ic\beta(x)} V(x) \mathcal{D}_\mu \phi, \quad (3.19)$$

el campo ϕ se transforma así:

$$\phi \xrightarrow{SU(2)_L \times U(1)_Y} \phi' = e^{ic\beta(x)} V(x) \phi. \quad (3.20)$$

El término $e^{ic\beta(x)} V(x)$ lo podemos escribir de otra manera

$$\begin{aligned} e^{ic\beta(x)} V(x) &= e^{ic\beta(x)} \mathbb{1} V(x) \\ &= \exp\{ic\beta(x)\mathbb{1}\} \exp\left\{i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{i\left(\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} + c\beta(x)\mathbb{1}\right)\right\} \equiv U(x), \end{aligned} \quad (3.21)$$

debido a que $\frac{\sigma^j}{2}$ son matrices hermitianas y $c\beta(x)$ es una cantidad real, entonces $U(x)$ es una matriz unitaria. Es decir

$$U(x)U^\dagger(x) = U^\dagger(x)U(x) = \mathbb{1}. \quad (3.22)$$

Obteniendo

$$\mathcal{D}_\mu \phi \xrightarrow{SU(2)_L \times U(1)_Y} (\mathcal{D}_\mu \phi)' = U(x) \mathcal{D}_\mu \phi. \quad (3.23)$$

Analicemos el siguiente producto

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) &\longrightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi)'^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)' = (U(x) \mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger U(x) \mathcal{D}^\mu \phi \\ &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger U^\dagger(x) U(x) \mathcal{D}^\mu \phi = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Notemos que esta expresión es invariante bajo todo el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ por lo tanto califica para ser un término de la lagrangiana. Ahora nos interesa fijarnos en un potencial para dotar de masa a las partículas, definiendo el potencial escalar de Higgs

$$V(\phi, \phi^\dagger) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi \phi^\dagger)^2, \quad \mu^2 > 0, \lambda > 0. \quad (3.25)$$

Propongamos una lagrangiana escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi, \phi^\dagger) \\ &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi \phi^\dagger)^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

el término $+\mu^2 \phi^\dagger \phi$ debe ser un término negativo para que sea un término de masa de acuerdo a la ecuación de Klein-Gordon.

Vamos a calcular los puntos de inflexión del potencial, para esto pasemos a las componentes ϕ_1 y ϕ_2

$$\phi^\dagger \phi = \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger & \phi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^\dagger \phi_1 + \phi_2^\dagger \phi_2 = \phi_j^\dagger \phi_j, \quad (3.27)$$

ϕ_j son campos complejos, por lo que los podemos escribir como sigue:

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{j,1} + i\phi_{j,2}), \quad (3.28)$$

siendo estos campos hermitianos

$$\phi_{j,\alpha}^\dagger = \phi_{j,\alpha} \quad j, \alpha = 1, 2. \quad (3.29)$$

La condición anterior nos restringe a que $\phi_{j,\alpha}$ sea real. Sustituyendo (3.28) en (3.27) se obtiene

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} \phi_{j,\alpha} \phi_{j,\alpha}. \quad (3.30)$$

Finalmente la expresión del potencial (3.25) es

$$V(\phi, \phi^\dagger) = -\mu^2 \frac{1}{2} \phi_{j,\alpha} \phi_{j,\alpha} + \lambda \frac{1}{4} (\phi_{j,\alpha} \phi_{j,\alpha})^2, \quad (3.31)$$

notemos que ahora tenemos cuatro campos reales ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{21} y ϕ_{22} . Calculando las derivadas con respecto a los campos e igualando a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_{k\beta}} &= \phi_{k\beta} (-\mu^2 + \lambda \phi_{j\alpha} \phi_{j\alpha}) \\ &= \phi_{k\beta} (-\mu^2 + \lambda \phi^\dagger \phi) = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

se tienen dos posibilidades:

$$1) \quad \phi_{k\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0, \quad (3.33)$$

y

$$2) \quad -\mu^2 + 2\lambda |\phi|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}. \quad (3.34)$$

Regresando a la notación de campos reales, la segunda condición nos lleva a

$$\phi_{jk} \phi_{jk} = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi_{11}^2 + \phi_{12}^2 + \phi_{21}^2 + \phi_{22}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (3.35)$$

la cual representa una hipersfera, es decir hay degeneración como en el caso de $U(1)$.

Para romper la simetría elegimos un doblete específico el cual será el estado de vacío ϕ_0

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{11} + i\phi_{12}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{21} + i\phi_{22}) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

por conveniencia elegimos $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{22} = 0$ y $\phi_{21} = v > 0$, lo cual debe satisfacer

$$|\phi_0| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (3.37)$$

esto nos lleva a que $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

Siguiendo un procedimiento similar a los ejemplos estudiados, nos conviene realizar el cambio de base

$$\phi = \phi_0 + \xi(x), \quad (3.38)$$

donde

$$\xi(x) \equiv \phi - \phi_0 = \begin{pmatrix} G_w^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h + iG_z) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

G_w^+ es un campo complejo y h y G_z son campos reales. Pedimos que $G_w^- = (G_w^+)^\dagger$.

Debido a que en el potencial de Higgs aparecen productos de $\phi^\dagger \phi$, nos conviene analizar el siguiente término

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= (\phi_0 + \xi)^\dagger (\phi_0 + \xi) \\ &= \frac{v^2}{2} + \phi_0^\dagger \xi + \xi^\dagger \phi_0 + \xi^\dagger \xi, \end{aligned} \quad (3.40)$$

obteniendo que el potencial $V(\phi, \phi^\dagger)$ dado en (3.25) tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^\dagger) &= \frac{v^2}{2} \left(-\mu^2 + \lambda \frac{v^2}{2} \right) + \phi_0^\dagger \xi (-\mu^2 + \lambda v^2) + \xi^\dagger \phi_0 (-\mu^2 + \lambda v^2) + \xi^\dagger \xi (-\mu^2 + \lambda v^2) \\ &\quad + (\phi_0^\dagger \xi \phi_0^\dagger \xi + \phi_0^\dagger \xi \xi^\dagger \phi_0 + \xi^\dagger \phi_0 \phi_0^\dagger \xi + \xi^\dagger \phi_0 \xi^\dagger \phi_0) \lambda + \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

los demás términos, combinaciones impares de los campos, no son de suma importancia debido a que solo nos interesan términos cuadráticos para definir masas. Notemos que (3.39)

$$\xi^\dagger \xi = G_w^- G_w^+ + \frac{1}{2}(h^2 + G_z^2), \quad (3.42)$$

$$\phi_0^\dagger \xi = \frac{v}{2}(h + iG_z), \quad (3.43)$$

también

$$-\mu^2 + \lambda v^2 = -\mu^2 + \lambda \frac{\mu^2}{\lambda} = 0, \quad (3.44)$$

$$-\mu^2 + \lambda \frac{v^2}{2} = -\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{\mu^2}{\lambda} = -\frac{\mu^2}{2}. \quad (3.45)$$

Relaciones que nos llevan a una notoria reducción del potencial $V(\phi, \phi^\dagger)$:

$$\begin{aligned}
 V(\phi, \phi^\dagger) &= -\frac{\mu^4}{4\lambda} + (\phi_0^\dagger \xi \phi_0^\dagger \xi + \phi_0^\dagger \xi \xi^\dagger \phi_0 + \xi^\dagger \phi_0 \phi_0^\dagger \xi + \xi^\dagger \phi_0 \xi^\dagger \phi_0) \lambda \\
 &= -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2 h^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Claramente $\mu^2 h^2$ es un término de masa para el campo h , ya que al introducirlo a la lagrangiana el potencial escalar $V(\phi^\dagger, \phi)$ va acompañado de un signo menos, el cual cambia el signo del término en interés. Por otra parte notemos que G_w^+ , G_w^- y G_z no adquirieron masa debido a que estos términos se cancelan directamente en los cálculos. Antes de romper la simetría, la teoría tenía cuatro campos uno relacionado con $U(1)$ y tres con $SU(2)$, pero al final solo se tiene la presencia de un campo con masa.

Regresando a la expresión de la derivada covariante (3.14), analicemos con detalle qué sucede con la parte relacionada a $SU(2)$ cuando $j = 1, 2$ (recordar que $j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} &= W_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} = \frac{W_\mu^1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{W_\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

definiendo los campos

$$\begin{aligned}
 W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \Rightarrow W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-), \\
 W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \Rightarrow W_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-).
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$(W_\mu^+)^\dagger = W_\mu^-$ y W_μ^1 y W_μ^2 son campos reales. Entonces

$$W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv \sigma^+} + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv \sigma^-} = \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sigma^-. \tag{3.49}$$

Notemos que lo único que se hizo fue un cambio de base, a una base compleja. En electrodinámica significaría cambiar de una polarización lineal a una polarización circular.

Al sustituir el cambio de base para W_μ^1 y W_μ^2 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 W_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} &= \frac{\sigma^1}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-) + \frac{i\sigma^2}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \frac{1}{2}(\sigma^1 - i\sigma^2),
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

comparando (3.49) y (3.50) se definen las siguientes relaciones

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2), \quad \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma^1 - i\sigma^2). \quad (3.51)$$

Por lo tanto, la expresión de la derivada covariante (3.14) es ahora

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) - ig_2 W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} - ig_1 B_\mu Y. \quad (3.52)$$

¿Qué pasa con la derivada covariante al hacer el cambio mostrado en (3.38)

Analicemos el término

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) &= \left[\partial_\mu \xi - ig_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-)(\phi_0 + \xi) - ig_2 W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2}(\phi_0 + \xi) - ig_1 B_\mu Y(\phi_0 + \xi) \right]^\dagger \\ &\quad \left[\partial_\mu \xi - ig_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-)(\phi_0 + \xi) - ig_2 W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2}(\phi_0 + \xi) - ig_1 B_\mu Y(\phi_0 + \xi) \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

solo interesan las partes cuadráticas en los campos, así

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2}{4} v^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g_2^2}{8} v^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{cg_1 g_2}{2} v^2 W_\mu^3 B^\mu + \frac{c^2 g_1^2}{2} v^2 B_\mu B^\mu + \dots \quad (3.54)$$

La lagrangiana escalar se obtiene de juntar (3.46) y (3.54)

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2}{4} v^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g_2^2}{8} v^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{cg_1 g_2}{2} v^2 W_\mu^3 B^\mu + \frac{c^2 g_1^2}{2} v^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{2} (2\mu^2) h^2 + \dots \quad (3.55)$$

Ahora, regresemos a la lagrangiana de Yang-Mills mostrada en la expresión (3.1)

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (3.56)$$

nos vamos a fijar en el término a orden cuadrático en los campos

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} &= W_{\mu\nu}^1 W^{1\mu\nu} + W_{\mu\nu}^2 W^{2\mu\nu} + W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} \\ &= (\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 + \dots)(\partial^\mu W^{1\nu} - \partial^\nu W^{1\mu} + \dots) + (1 \rightarrow 2) + (1 \rightarrow 3 + \dots), \end{aligned} \quad (3.57)$$

Definamos $\hat{W}_{\mu\nu}^3$ de la siguiente manera

$$\hat{W}_{\mu\nu}^3 \equiv \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3. \quad (3.58)$$

Pasando a la base W_μ^+ y W_μ^- , resulta que la expresión (3.48) toma la forma

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ + \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^+ - \partial_\nu W_\mu^-) (\partial^\mu W^{+\nu} + \partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{+\mu} - \partial^\nu W^{-\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^+ + \partial_\nu W_\mu^-) (\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{+\mu} + \partial^\nu W^{-\mu}) \\ &\quad + \hat{W}_{\mu\nu}^3 \hat{W}^{3\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

Definamos los campos $W_{\mu\nu}^+$ y $W_{\mu\nu}^-$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ &\equiv \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+, \\ W_{\mu\nu}^- &\equiv \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-, \end{aligned} \quad (3.60)$$

para que de esta manera $W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu}$ se reduzca a:

$$W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} = 2W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + (\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 + \dots \quad (3.61)$$

Con todas estas definiciones resulta que (3.56) tiene la siguiente estructura

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \dots \quad (3.62)$$

Juntando las lagrangianas obtenidas en (3.55) y (3.62)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2 - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \frac{g_2^2}{4}v^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 + \frac{g_2^2}{8}v^2 W_\mu^3 W^{3\mu} \\ &\quad - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{c^2 g_1^2}{2}v^2 B_\mu B^\mu - \frac{cg_1 g_2}{2}v^2 W_\mu^3 B^\mu + \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

Los primeros dos términos, $\frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2$, de la expresión anterior, tienen la misma estructura que la lagrangiana de Klein-Gordon, por lo que el término de masa para el campo h es $m_h = \sqrt{2\mu^2}$.

Por otra parte, para analizar el término $-\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \frac{g_2^2}{4}v^2 W_\mu^+ W_\mu^-$ notemos lo siguiente:

De (3.48) y (3.60)

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(W_\nu^1 - iW_\nu^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\nu(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{W}_{\mu\nu}^1 - i\hat{W}_{\mu\nu}^2), \end{aligned} \quad (3.64)$$

que en analogía con (3.58) nos conviene definir

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\mu\nu}^1 &\equiv \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1, \\ \hat{W}_{\mu\nu}^2 &\equiv \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

También se cumple

$$W_{\mu\nu}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^+)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{W}_{\mu\nu}^1 + i\hat{W}_{\mu\nu}^2), \quad (3.66)$$

así

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu} + \frac{g_2^2v^2}{4}W_\mu^-W_\mu^+ &= -\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^1 - i\hat{W}_{\mu\nu}^2)(\hat{W}^{1\mu\nu} + i\hat{W}^{2\mu\nu}) + \frac{g_2^2}{4}v^2\frac{1}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(W^{1\mu} - iW^{2\mu}) \\
 &= -\frac{1}{4}\hat{W}_{\mu\nu}^1\hat{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2W_\mu^1W^{1\mu} - \frac{1}{4}\hat{W}_{\mu\nu}^2\hat{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2W_\mu^2W^{2\mu}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Juntando todos los resultados anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4}\hat{W}_{\mu\nu}^1\hat{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2W_\mu^1W^{1\mu} \\
 &\quad - \frac{1}{4}\hat{W}_{\mu\nu}^2\hat{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2W_\mu^2W^{2\mu} \\
 &\quad - \frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2W_\mu^3W^{3\mu} \\
 &\quad - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(cg_1v)^2B_\mu B^\mu \\
 &\quad - \frac{cg_1g_2}{2}v^2W_\mu^3B^\mu + \dots
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Para que podamos entender el significado de cada uno de los términos de la lagrangiana $W_{\mu\nu}^jW^{j\mu\nu}$, es necesario recordar el lagrangiano de Proca.

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu^2. \tag{3.69}$$

Al regresar a la expresión (3.68) y compararla con (3.69) podemos notar que se tiene dos lagrangianas de Proca para los campos W^1 y W^2 con la misma masa, que en este caso es $m_W = \frac{g_2}{2}v$, otras dos lagrangianas de Proca, una del campo real W^3 con masa $m_{W^3} = \frac{g_2}{2}v$ y la otra del campo B con masa $m_B = cg_1v$. También de tiene el término de interacción $MW_\mu^3B^\mu$, donde definimos $M \equiv \frac{cg_1g_2}{2}$.

Analicemos únicamente los siguientes términos

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 + \frac{1}{2}m_{W^3}^2W_\mu^3W^{3\mu} - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m_B^2B_\mu B^\mu - MW_\mu^3B^\mu \\
 &= -\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}W_\mu^3(m_{W^3}^2W^{3\mu} - MB^\mu) + \frac{1}{2}B_\mu(-MW^{3\mu} - m_B^2B^\mu) \\
 &= -\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{W^3}^2W^{3\mu} - MB^\mu \\ -MW^{3\mu} - m_B^2B^\mu \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{M}} \\
 &= -\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{W^3}^2 & -M \\ -M & m_B^2 \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{M}}.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

La matriz $\mathcal{M}$ es real y simétrica por lo que se puede diagonalizar. Es decir, existe una matriz $\mathcal{R}$ tal que

$$\mathcal{R}^T \mathcal{M} \mathcal{R} = \mathcal{D}, \tag{3.71}$$

a $\mathcal{M}$ se le conoce como *matriz de eigenestados de masa*.

Notemos que

$$M = \frac{cg_1g_2}{2}v^2 = \frac{g_2v}{2}cg_1v = m_{W^3}m_B, \quad (3.72)$$

así que

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{W^3}^2 & -M \\ -M & m_B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{W^3}^2 & -m_{W^3}m_B \\ -m_{W^3}m_B & m_B^2 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

al diagonalizar la matriz $\mathcal{M}$ utilizando el polinomio característico $\det[\mathcal{M}\vec{y} - \lambda\vec{y}] = 0$, obtenemos que los eigenvalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = m_{W^3}^2 + m_B^2$, esto quiere decir que un campo no tiene masa.

Para construir la matriz $\mathcal{R}$ es necesario calcular

$$\mathcal{M}\vec{y}_1 = \lambda_1\vec{y}_1, \quad \mathcal{M}\vec{y}_2 = \lambda_2\vec{y}_2, \quad (3.74)$$

de donde se obtiene:

$$\vec{y}_1 = \kappa_1 \begin{pmatrix} \frac{m_B}{m_{W^3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \kappa_2 \begin{pmatrix} -\frac{m_{W^3}}{m_B} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Por lo que la matriz de diagonalización resulta ser

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \vec{y}_2 & \vec{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_2 \frac{m_{W^3}}{m_B} & \kappa_1 \frac{m_B}{m_{W^3}} \\ \kappa_2 & \kappa_1 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

la matriz diagonal se obtiene del producto

$$\mathcal{R}^T \mathcal{M} \mathcal{R} = \begin{pmatrix} m_B^2 + m_{W^3}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Como caso particular buscamos una matriz ortogonal (a partir de $\mathcal{R}$) que diagonalice a $\mathcal{M}$ y que sea un elemento típico de $SO(2)$, es decir:

$$\mathcal{R}(\theta_w) = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Para que podamos obtener una matriz de la forma $\mathcal{R}(\theta_w)$ se debe cumplir que las entradas de (3.76) cumplan las siguientes condiciones:

entradas que tienen que ver con $\cos \theta_w$

$$\kappa_1 = -\kappa_2 \frac{m_{W^3}}{m_B}, \quad (3.79)$$

y entradas de $\sin \theta_w$

$$\kappa_2 = -\kappa_1 \frac{m_B}{m_{W^3}}, \quad (3.80)$$

notemos que (3.79) y (3.80) son las mismas ecuaciones, por lo tanto

$$\mathcal{R}(\kappa_2) = \begin{pmatrix} -\kappa_2 \frac{m_{W^3}}{m_B} & -\kappa_2 \\ \kappa_2 & -\kappa_2 \frac{m_{W^3}}{m_B} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

El siguiente paso es obtener la condición que se debe cumplir para que esta matriz sea ortogonal. Para esto vamos a fijarnos en

$$\mathbb{1} = \mathcal{R}^T(\kappa_2) \mathcal{R}(\kappa_2). \quad (3.82)$$

sustituyendo (3.81) en la expresión anterior vemos que se debe cumplir

$$\kappa_2^2 \left(1 + \frac{m_{W^3}^2}{m_B^2} \right) = 1, \quad (3.83)$$

por lo tanto

$$\kappa_2^2 = \frac{m_B^2}{m_B^2 + m_{W^3}^2} \quad \Rightarrow \quad \kappa_2 = \pm \frac{m_B}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}}, \quad (3.84)$$

por conveniencia y simplificación de los cálculos escogeremos el signo negativo. Así (3.81) queda de la forma

$$\mathcal{R}(\kappa_2) = \frac{1}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}} \begin{pmatrix} m_{W^3} & m_B \\ -m_B & m_{W^3} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{comparar}} \quad \mathcal{R}(\theta_w) = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

esto nos conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\cos \theta_w = \frac{m_{W^3}}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{m_B}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}}. \quad (3.86)$$

Sustituyendo los valores de m_{W^3} y m_B en términos de g_1 y g_2

$$\frac{m_{W^3}}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \frac{m_B}{\sqrt{m_B^2 + m_{W^3}^2}} = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.87)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 & -g_1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Comparando (3.86) y (3.87) podemos escribir $\cos \theta_w$ y $\sin \theta_w$ en términos de g_1 y g_2

$$\cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.89)$$

De (3.77) se tiene

$$\mathcal{R}^T \mathcal{M} \mathcal{R} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

Regresando al término de masa mostrado en (3.70) y utilizando la expresión (3.90)

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} (\mathcal{R} \mathcal{R}^T) \mathcal{M} (\mathcal{R} \mathcal{R}^T) \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \frac{v^2}{4} \left(\mathcal{R}^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^T \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Definiendo el cambio de base

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \mathcal{R}^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

el término de masa (3.91) ahora queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \frac{v^2}{4} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (3.93)$$

Notemos que el único campo con masa que se tiene es el del bosón Z , de lo contrario A_μ es un campo sin masa el cual corresponde al fotón.

Al sustituir la matriz $\mathcal{R}$, mostrada en (3.88), en la expresión (3.92) obtenemos,

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu) \\ \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Para encontrar la relación inversa hay que multiplicar, por la izquierda, por la matriz $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{R} \mathcal{R}^T}_1 \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 Z_\mu + g_1 A_\mu) \\ \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (-g_1 Z_\mu + g_2 A_\mu) \end{pmatrix}.$$

Analicemos los otros términos de la expresión (3.70) para probar que, en efecto, (3.93) es un término de masa para el bosón Z . Para ésto es necesario regresar a las definiciones (3.2) y (3.58) y realizar el cambio de base (3.95). Además es necesario definir

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \\ F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (3.96)$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\mu\nu}^3 &= \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_{\mu\nu} + \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} F_{\mu\nu}, \\ B_{\mu\nu} &= -\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_{\mu\nu} + \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Por lo tanto:

$$-\frac{1}{4}(\hat{W}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.98)$$

Notemos que no hay mezclas de la forma $Z_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ debido a que se cancelan exactamente estas contribuciones. Este resultado era de esperarse ya que la teoría es invariante de norma.

Finalmente podemos mencionar que (3.68) está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{YM} = & -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu} + m_W^2W_\mu^+W^{-\mu} - \frac{1}{4}(Z_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m_Z^2(Z_\mu)^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2h^2 + \text{tér. de Goldstone} + \text{tér. de dos o más campos}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

las masas que encontramos corresponden a las del bosón W , bosón Z y bosón de Higgs:

$$\begin{aligned} m_w &= \frac{g_2}{2}v, \\ m_z &= \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2}v, \\ m_h &= \sqrt{2}\mu^2. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Centremos nuestra atención en la masa de los campos cargados m_w y m_z

$$m_w = \frac{g_2}{2}v \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = m_z \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \cos \theta_w m_z, \quad (3.101)$$

de forma interesante podemos notar que las masas de los bosones Z y W están relacionadas por el coseno del ángulo θ_w .

Después de que hicimos un cambio de base en $\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{YM}$ en términos de A^μ y Z^μ , ahora nos interesa ver lo que sucede con la expresión de la derivada covariante (3.52) que aparece en el lagrangiano del campo escalar. Al sustituir el cambio de base (3.95) en $\mathcal{D}_\mu$ y reacomodando algunos términos se tiene

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i \frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) - \frac{i}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(g_2^2 \frac{\sigma^3}{2} - g_1^2 Y \right) Z_\mu - \frac{ig_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(\frac{\sigma^3}{2} + Y \right) A_\mu, \quad (3.102)$$

si comparamos este resultado con la derivada covariante de electrodinámica (1.68), el término de interacción, que en QED es e , sería $\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(\frac{\sigma^3}{2} + Y \right)$ y la conexión es A_μ , es decir, es la carga bajo el grupo $SU(2)$. En analogía con la carga eléctrica, podemos definir el *Operador de carga eléctrica*:

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + Y \in M_{2 \times 2}, \quad (3.103)$$

desglosemos a detalle Q

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_\psi & 0 \\ 0 & c_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + c_\psi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + c_\psi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

También se puede hacer la identificación

$$0 < e \equiv \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (3.105)$$

por convención pedimos que la carga sea positiva.

Sustituyendo las definiciones anteriores en la derivada covariante (3.102), se obtiene una expresión un poco más compacta:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{ig_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) - \frac{i}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(g_2^2 \frac{\sigma^3}{2} - g_1^2 Y \right) Z_\mu - ieQ A_\mu. \quad (3.106)$$

Centremos nuestra atención en los sumandos de la parte electromagnética de la derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieQ A_\mu, \quad (3.107)$$

al actuar sobre un doblete

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - ieQ A_\mu \Psi = \begin{pmatrix} \partial_\mu \psi_1 \\ \partial_\mu \psi_2 \end{pmatrix} - ieA_\mu \begin{pmatrix} n_1 \psi_1 \\ n_1 \psi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_\mu \psi_1 - ieA_\mu n_1 \psi_1 \\ \partial_\mu \psi_2 - ieA_\mu n_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\text{Derivada covariante electromagnética}}. \quad (3.108)$$

se obtiene la expresión de la derivada covariante actuando sobre cada espinor ψ_1 y ψ_2 . Notemos que para $n_j = -1$ se tiene

$$(\partial_\mu - ieA_\mu n_j) \psi_j = (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi_j \quad \Rightarrow \quad \text{electrón} \quad (3.109)$$

si recordamos $\partial_\mu + ieA_\mu$ es la derivada covariante del grupo $U_e(1)$, y para $n_j = +1$

$$(\partial_\mu - ieA_\mu n_j) \psi_j = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi_j \quad \Rightarrow \quad \text{positrón}, \quad (3.110)$$

por convención se ha tomado la carga elemental como positiva. Las dos relaciones que se obtuvieron al darle valores a $n_j = \pm 1$ nos permite ver que Q , mostrada en (3.103), se relaciona con la carga de las partículas.

Ahora manipulemos otro elemento de la derivada covariante

$$g_2^2 \frac{\sigma^3}{2} - g_1^2 Y = (g_1^2 + g_2^2) \frac{\sigma^3}{2} - g_1^2 Q = \frac{g_2}{\cos \theta_w} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \left(\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2 \theta_w Q \right), \quad (3.111)$$

al sustituir en (3.106) se tiene

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{ig_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) - \frac{ig_2}{\cos \theta_w} \left(\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2 \theta_w Q \right) Z_\mu - iQ g_2 \sin \theta_w A_\mu, \quad (3.112)$$

notemos que las constantes de acoplamiento ahora están en términos de g_2 y θ_w .

Una vez que hemos analizado $\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{YM}$ regresaremos a la lagrangiana de Dirac, pero realizando el cambio de base del campo espinorial: $\psi \longrightarrow \psi_L, \psi_R$.

$$\mathcal{L} = (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(\psi_R + \psi_L). \quad (3.113)$$

Utilizando la propiedades de las matrices de Dirac y los proyectores P_L y P_R que se mencionan en el Apéndice [C] podemos obtener las siguientes relaciones

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma_0 = (P_R \psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger P_R \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\psi} P_L, \quad (3.114)$$

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = (P_L \psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger P_L \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R, \quad (3.115)$$

es por ello, que los términos de la lagrangiana $\mathcal{L}$ se reducen a:

$$-m(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(\psi_R + \psi_L) = -m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R), \quad (3.116)$$

$$(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(i\gamma^\mu \partial_\mu)(\psi_R + \psi_L) = \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L. \quad (3.117)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \quad (3.118)$$

Calculemos las ecuaciones de Lagrange

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_R^j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_R^j} = 0. \quad (3.119)$$

Consideremos que ψ_j y $\bar{\psi}_j$ son variables de Grassman (anticomutan)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_R^j)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \psi_R^j)} (\bar{\psi}_R^k i\gamma_{kl}^\mu \partial_\mu \psi_R^l) \\ &= -i\gamma_{kl}^\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \psi_R^j)} [(\partial_\mu \psi_R^l) \bar{\psi}_R^k] \\ &= -i\gamma_{kl}^\mu \delta^{lj} \delta_\mu^\alpha \bar{\psi}_R^k = -i\bar{\psi}_R^k \gamma_{kj}^\alpha = -i(\bar{\psi}_R \gamma^\alpha)_j, \end{aligned} \quad (3.120)$$

entonces

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_R^j)} \right) = -i\partial_\alpha (\bar{\psi}_R \gamma^\alpha)_j = -i(\partial_\alpha \bar{\psi}_R \gamma^\alpha)_j. \quad (3.121)$$

Ahora

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_R^j} = \frac{\partial}{\partial \psi_R^j} (-m \bar{\psi}_L \psi_R) = -m \frac{\partial}{\partial \psi_R^j} (\bar{\psi}_L^k \psi_R^k) = m \delta_{jk} \bar{\psi}_L^k = m \bar{\psi}_L^j. \quad (3.122)$$

Uniendo los resultados obtenidos, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} -i(\partial_\alpha \bar{\psi}_R \gamma^\alpha)_j - m \bar{\psi}_L^j &= 0 \\ \Rightarrow (-i\partial_\alpha \bar{\psi}_R \gamma^\alpha - m \bar{\psi}_L)_j &= 0 \\ i\partial_\alpha \bar{\psi}_R \gamma^\alpha + m \bar{\psi}_L &= 0. \end{aligned} \quad (3.123)$$

El hermítico conjugado tiene la forma

$$-i\gamma^{\alpha\dagger}(\partial_\alpha \bar{\psi}_R)^\dagger + m \bar{\psi}_L^\dagger = 0, \quad (3.124)$$

pero notemos que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R^\dagger &= (\psi_R^\dagger \gamma_0)^\dagger = \gamma_0^\dagger \psi_R = \gamma^0 \psi_R \\ \bar{\psi}_L^\dagger &= (\psi_L^\dagger \gamma_0)^\dagger = \gamma_0^\dagger \psi_L = \gamma^0 \psi_L. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Entonces la ecuación (3.124) se convierte en

$$-i\gamma^{\alpha\dagger} \gamma_0 \partial_\alpha \psi_R + m \gamma_0 \psi_L = 0 \quad \Rightarrow \quad -i \underbrace{\gamma^0 \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^0}_{\gamma^\alpha} \partial_\alpha \psi_R + m \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 \psi_L = -i\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi_R + m \psi_L = 0, \quad (3.126)$$

es decir,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m \psi_L, \quad (3.127)$$

realizando el mismo procedimiento se tiene que,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m \psi_R, \quad (3.128)$$

las cuales son dos ecuaciones diferenciales acopladas a través de la masa.

Para $m = 0$ se obtienen las conocidas *Ecuaciones de Weyl*.

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= 0, \end{aligned} \quad (3.129)$$

Quiralidad y helicidad

Recordemos la definición del operador de momento angular

$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k} = \vec{x} \times \vec{p}, \quad (3.130)$$

cuyas componentes satisfacen la relación de conmutación

$$[L_j, L_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} L_l. \quad (3.131)$$

De forma más general podemos proponer el momento angular

$$\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}, \quad (3.132)$$

imponiendo que se cumpla la siguiente relación de conmutación

$$[J_j, J_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} J_l. \quad (3.133)$$

Notemos que $\vec{L}$ es un caso particular del operador vectorial $\vec{J}$. Vamos a pedir que $\vec{J}$ sea un operador hermitiano, por lo que cada componente J_1, J_2, J_3 también son hermitianas. Nuestro objetivo es buscar un conjunto completo de observables, para esto usamos alguna componente J_k y $\vec{J}^2$ las cuales satisfacen

$$[\vec{J}^2, J_k] = 0. \quad (3.134)$$

Lo anterior nos dice que ambos operadores comparten eigenkets. Por convención tomamos la componente $J_k = J_z$, es decir, utilizaremos en el conjunto $\{J_z, \vec{J}^2\}$. En este caso los eigenkets van a tener dos etiquetas $|j, m\rangle$, donde

$$\vec{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad (3.135)$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle. \quad (3.136)$$

Se prueba que j puede tomar valores enteros o semienteros no negativos

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots,$$

en tanto que los valores de m no son independientes de j

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (3.137)$$

En analogía con el desarrollo anterior podemos hablar del *momento angular de spin* el cual no depende del espacio

$$\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}, \quad (3.138)$$

el cual satisface

$$[S_j, S_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}S_l. \quad (3.139)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento que con el operador $\vec{J}$, nos vamos a fijar en las observables compatibles para el operador $\vec{S}$

$$\vec{S}^2|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m_s\rangle, \quad (3.140)$$

$$S_z|s, m_s\rangle = \hbar m_s|s, m_s\rangle, \quad (3.141)$$

si s es un semientero estamos hablando de fermiones y si es un entero nos referimos a bosones. Dado s tenemos

$$m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s. \quad (3.142)$$

Podemos definir otro operador que califica como observable, el cual es conocido como *Operador de Helicidad*.

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{S|\vec{p}|} = \frac{\vec{s} \cdot \hat{p}}{s}. \quad (3.143)$$

De la definición matemática, podemos decir que el operador de helicidad es la proyección del spin $\vec{S}$ con respecto a la dirección del momento $\vec{p}$, es decir, es una generalización de S_z , donde podríamos ver a $S_z = \vec{S} \cdot \hat{p}$ con eigenvalor $\hbar m_s$. Por lo que ahora resulta conveniente fijarnos en los estados

$$|\vec{p}', h'\rangle, \quad (3.144)$$

al aplicarle el operador de helicidad h , se tiene que $h|\vec{p}', h'\rangle = h'|\vec{p}', h'\rangle$, pero aplicando la definición (3.143) también tenemos la siguiente relación $h|\vec{p}', h'\rangle = \frac{1}{s}\vec{S} \cdot \hat{p}|\vec{p}', h'\rangle = \frac{1}{s}\hbar m_s|\vec{p}', h'\rangle$. Por transitividad se cumple que el eigenvalor h' tiene la siguiente estructura: $h' = \frac{1}{s}\hbar m_s$. Si suponemos que $s = \frac{1}{2} \rightarrow m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, entonces

$$h|\vec{p}', h'\rangle = \pm\hbar|\vec{p}', h'\rangle. \quad (3.145)$$

Es decir para partículas de spin $s = \frac{1}{2}$ los eigenvalores de helicidad son $+\hbar$ (el spin está en dirección de movimiento) y $-\hbar$ (el spin está en dirección contraria al movimiento). En teoría de campos el operador de helicidad es una matriz 4×4 para el caso de partículas de Dirac (spin $\frac{1}{2}$)

$$h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \quad \text{donde} \quad \vec{\Sigma} = 2\vec{S} = 2\gamma^0\vec{\partial}\gamma_5, \quad (3.146)$$

$\vec{\Sigma}$ es un operador vectorial que actúa sobre los campos de Dirac. Para el eigenvector ψ se tiene

$$h\psi = \pm\psi. \quad (3.147)$$

¿Hay alguna relación entre h y el operador de quiralidad γ^5

Al hablar de partículas fermiónicas sin masa, debemos recordar las ecuaciones de movimiento para los campos quirales mostradas en (3.129):

$$\begin{aligned} h\psi_R &= +\psi_R & \gamma_5\psi_R &= +\psi_R \\ h\psi_L &= +\psi_L & \gamma_5\psi_L &= +\psi_L. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Tanto el operador de helicidad como la matriz de quiralidad satisfacen exactamente las mismas relaciones en el caso de partículas fermiónicas sin masa. En pocas palabras, la quiralidad coincide con la helicidad en el caso de fermiones no masivos.

Un ejemplo en particular del Modelo Estándar son los neutrinos con helicidad izquierda, los cuales, en este modelo, se supuso tenían masa cero, por lo que en esta teoría (SM) solo aparecen campos de la forma ψ_L , además de que obedecen las ecuaciones de Weyl y coincide con su quiralidad.

Pero en algunas teorías más allá del Modelo Estándar los neutrinos son dotados con masa y debido a que un término de masa, en una lagrangiana, tiene combinaciones de ψ_L y ψ_R entonces también deben tener estados quirales derechos ψ_R .

3.1. Leptones

Un *Leptón* es una partícula que no interacciona con la fuerza fuerte. Hay tres generaciones de leptones

Generación 1	$\nu_e,$	$e^-,$
Generación 2	$\nu_\mu,$	$\mu^-,$
Generación 3	$\nu_\tau,$	$\tau^-,$

los neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ no interaccionan electromagnéticamente. Al fijarnos en un neutrino en general ν_j podemos descomponerlo en dos partes

$$\nu_j = \nu_{j,R} + \nu_{j,L}, \quad (3.149)$$

respecto a lo que se comentó con anterioridad sobre la quiralidad derecha de los neutrinos, existe una justificación: no se ha medido experimentalmente la helicidad derecha de estas partículas, por lo que no se tomará en cuenta la parte $\nu_{j,R}$. También podemos comentar que es un hecho experimental que los fermiones que interaccionan con el bosón W son izquierdos, por lo que este bosón distingue estados de quiralidad, es decir, solo interacciona con los estados quirales izquierdos $SU_L(2)$.

Definamos un doblete de Dirac, que solamente contiene campos izquierdos

$$E_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (3.150)$$

el cual se transforma bajo $SU(2)_L$

$$E_L \longrightarrow E'_L = V(x)E_L. \quad (3.151)$$

Bajo $U(1)_Y$ se tienen las siguientes transformaciones:

$$\nu_{e,L} \longrightarrow \nu'_{e,L} = e^{iC_L\beta(x)}\nu_{e,L}, \quad (3.152)$$

$$e_L \longrightarrow e_L = e^{iC_L\beta(x)}e_L, \quad (3.153)$$

$$\Rightarrow E_L \longrightarrow E_L = e^{iC_L\beta(x)}\nu_{e,L}. \quad (3.154)$$

Esto es, bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$E_L \longrightarrow E'_L = U(x)E_L, \quad (3.155)$$

donde

$$U(x) = \exp \left\{ i \left(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} + Y_L \beta \right) \right\}. \quad (3.156)$$

Definiendo la derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \mathbb{1}_{2 \times 2} - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu Y_L, \quad (3.157)$$

$Y_L = C_L \mathbb{1}_{2 \times 2}$ nos dice cómo interaccionan los espinores con el campo B_μ .

¿Pueden dobletes diferentes tener diferente hipercarga?

De forma más general pensemos en un doblete

$$F_L = \begin{pmatrix} f_{1,L} \\ f_{2,L} \end{pmatrix}, \quad (3.158)$$

el cual se transforma bajo $U(1)$

$$\begin{aligned} f_{1,L} &\longrightarrow f'_{1,L} = e^{i\bar{C}_L\beta} f_{1,L}, \\ f_{2,L} &\longrightarrow f'_{2,L} = e^{i\bar{C}_L\beta} f_{2,L}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Si nos fijamos en la transformación del campo B_μ

$$B_\mu \longrightarrow B'_\mu = B_\mu + \kappa \partial_\mu \beta, \quad (3.160)$$

entonces bajo el grupo $U(1)_Y$ la derivada covariante se transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_\mu F_L) \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu F_L)' &= \partial_\mu F_L' - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu' Y_L = \\
 &= e^{i\bar{C}_L \beta} (\mathcal{D}_\mu F_L + i(\partial_\mu \beta) \bar{C}_L (1 - g_1 \kappa) F_L),
 \end{aligned} \tag{3.161}$$

proponiendo $\kappa = \frac{1}{g_1}$, podemos eliminar el segundo término de la expresión anterior y lograr que $\mathcal{D}_\mu F_L$ se transforme de la siguiente manera:

$$(\mathcal{D}_\mu F_L) \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu F_L)' = e^{i\bar{C}_L \beta} (\mathcal{D}_\mu F_L). \tag{3.162}$$

Hemos logrado obtener las siguientes leyes de transformación bajo el grupo de hipercarga $U(1)_Y$

B_μ	$\longrightarrow$	B_μ'	$= B_\mu + \frac{1}{g_1} \partial_\mu \beta,$
F_L	$\longrightarrow$	F_L'	$= e^{i\bar{C}_L \beta} F_L,$
$(\mathcal{D}_\mu F_L)$	$\longrightarrow$	$(\mathcal{D}_\mu F_L)'$	$= e^{i\bar{C}_L \beta} (\mathcal{D}_\mu F_L).$

Al aplicar la ley de transformación $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se cumple

$$\mathcal{D}_\mu E_L \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu E_L)' = U(x) \mathcal{D}_\mu E_L. \tag{3.163}$$

En esta parte nos interesa introducir la partes derechas e_R . Tomando en cuenta que el bosón W solo interacciona con partes izquierdas, hay que eliminar las interacciones con $SU(2)_L$, es decir, se tendría que excluir el término de la derivada covariante relacionado con W_μ^j y definir $\hat{Y}_L$ y $\hat{C}_R$ para hacer énfasis de que la parte derecha tiene diferente hipercarga:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \cdot \mathbb{1} \quad \cancel{- ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}} \quad - ig_1 B_\mu Y \quad \quad SU(2)_L \times U(1)_Y,$$

$\Downarrow$ interacción con parte derecha

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu \cdot \mathbb{1} - ig_1 B_\mu \hat{Y}_L. \tag{3.164}$$

Bajo $SU(2)_L$ el campo derecho va a ser invariante (conocido como *singlete de $SU(2)_L$*)

$$e_R \longrightarrow e_R' = e_R. \tag{3.165}$$

Bajo $U(1)_Y$

$$e_R \longrightarrow e_R' = e^{i\hat{C}_R} e_R. \tag{3.166}$$

Por lo que bajo la transformación del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, el campo quiral derecho e_R se transforma:

$$\mathcal{D}_\mu e_R \longrightarrow (\mathcal{D}_\mu e_R)' = e^{i\tilde{C}_R} \mathcal{D}_\mu e_R. \quad (3.167)$$

Utilizando las leyes de transformación que están encerradas justo en el recuadro anterior, se puede probar que la lagrangiana de Dirac no es invariante bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ debido al término de masa. Por lo que vamos a aprovechar el mecanismo de Higgs para definir términos de masa apropiados. Nos podemos fijar en

$$\bar{e}_R E_L = \bar{e}_R \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_R \nu_{e,L} \\ \bar{e}_R e_L \end{pmatrix}, \quad (3.168)$$

$$\bar{E}_L e_R = (\bar{\nu}_{e,L}, \bar{e}_L) e_R = (\bar{\nu}_{e,L} e_R, \bar{e}_L e_R), \quad (3.169)$$

estos campos no conmutan debido a que son de Dirac, pero están relacionados mediante $(\bar{e}_R E_L)^\dagger = (\bar{E}_L e_R)$. La primera pregunta que nos viene a la mente es ¿Cómo se transforman bajo $SU(2)_L$?

$$\bar{e}_R E_L \longrightarrow (\bar{e}_R E_L)' = \bar{e}_R V(x) E_L = V(x) \bar{e}_R E_L, \quad (3.170)$$

$$\bar{E}_L e_R \longrightarrow (\bar{E}_L e_R)' = (\bar{e}_R E_L)^\dagger = (\bar{e}_R E_L)^\dagger V(x)^\dagger V(x)^\dagger = \bar{E}_L e_R V(x)^\dagger. \quad (3.171)$$

¿Cómo se transforman bajo $U(1)_Y$?

Los campos e_R y E_L se transforman mediante

$$e_R \longrightarrow e'_R = e^{iC_R \beta} e_R, \quad (3.172)$$

$$E_L \longrightarrow E'_L = e^{iC_L \beta} E_L, \quad (3.173)$$

entonces, el producto de un campo derecho con uno izquierdo se transforman, bajo $U(1)_Y$ como:

$$\bar{e}_R E_L \longrightarrow (\bar{e}_R E_L)' = \bar{e}'_R E'_L = e^{i(C_R - C_L)\beta} \bar{e}_R E_L, \quad (3.174)$$

$$\bar{E}_L e_R \longrightarrow (\bar{E}_L e_R)' = (\bar{e}_R E_L)' = \bar{E}'_L e'_R = e^{-i(C_L - C_R)\beta} \bar{E}_L e_R, \quad (3.175)$$

esto quiere decir que $\bar{e}_R E_L$ y $\bar{E}_L e_R$ son dobletes de $SU(2)_L$ con hipercarga $C_L - C_R$ y $-(C_L - C_R)$ respectivamente.

Al unir las transformaciones bajo los grupos $U(1)_Y$ y $SU(2)_L$, la transformación completa bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es:

$$\begin{aligned} \bar{e}_R E_L \longrightarrow (\bar{e}_R E_L)' &= V(x) e^{i(C_L - C_R)\beta} \bar{e}_R E_L \\ &= \exp \left\{ i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} \right\} \{i(C_L - C_R)\beta \mathbb{1}\} \bar{e}_R E_L. \end{aligned} \quad (3.176)$$

Definiendo un operador de hipercarga para este grupo,

$$Y_{LR} = (C_L - C_R) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.177)$$

se tiene

$$\bar{e}_R E_L \longrightarrow (\bar{e}_R E_L)' = \exp \left\{ i \left(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} + Y_{LR} \beta \right) \right\} \bar{e}_R E_L, \quad (3.178)$$

$$\bar{E}_L e_R \longrightarrow (\bar{E}_L e_R)' = \bar{E}_L e_R \exp \left\{ -i \left(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} + Y_{LR} \beta \right) \right\}. \quad (3.179)$$

Para construir un término de masa con los campos e_R y E_L necesitamos introducir un doblete escalar

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

que bajo $SU(2)_L$ se transforma

$$\phi \longrightarrow \phi' = V(x)\phi. \quad (3.180)$$

Parece razonable proponer el siguiente término que puede calificar, bajo modificaciones mínimas, a un término de masa

$$\bar{E}_L e_R \phi = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{pmatrix} e_R \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \bar{\nu}_{eL} e_R \phi_1 + \bar{e}_L e_R \phi_2, \quad (3.181)$$

al aplicarle una transformación de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$\begin{aligned} \bar{E}_L e_R \phi \longrightarrow (\bar{E}_L e_R \phi)' &= (\bar{E}_L e_R)' \phi' = \bar{E}_L e_R \exp \left\{ -i \left(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} + Y_{LR} \beta \right) \right\} \exp \left\{ i \left(\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} + Y_\phi \beta \right) \right\} \\ &= \bar{E}_L e_R \exp \{ i(Y_\phi - Y_{LR}) \} \phi, \end{aligned} \quad (3.182)$$

si pedimos que se satisfaga la siguiente relación

$$Y_\phi - Y_{LR} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_\phi = C_L - C_R,$$

Entonces va a desaparecer la exponencial $\exp \{ i(Y_\phi - Y_{LR}) \}$, llevándonos a:

$$\bar{E}_L e_R \phi \longrightarrow (\bar{E}_L e_R \phi)' = \bar{E}_L e_R \phi, \quad (3.183)$$

$$\bar{e}_R E_L \phi \longrightarrow (\bar{e}_R E_L \phi)' = \bar{e}_R E_L \phi. \quad (3.184)$$

Pero tenemos un ligero problema: $\bar{E}_L e_R \phi$ y $\bar{e}_R E_L \phi$ no son hermitianos por sí mismos, debido a que no lo es el campo ϕ , pero sí lo es la suma de ellos,

$$\omega \bar{E}_L e_R \phi + \omega^* \phi^\dagger \bar{e}_R E_L, \quad \text{término de masa} \quad (3.185)$$

ω es un número complejo. Rompiendo la simetría del término de masa

$$\phi = \phi_0 + \xi, \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.186)$$

Sustituyendo (3.186) en el término de masa (3.185)

$$\begin{aligned} & \omega \bar{E}_L e_R (\phi_0 + \xi) + \omega^* (\phi_0^\dagger + \xi^\dagger) \bar{e}_R E_L \\ &= \omega \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + \omega^* \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + \dots \\ &= \frac{\omega v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R + \frac{\omega^* v}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L + \dots \end{aligned} \quad (3.187)$$

supongamos que $\omega < 0$, $\omega = -|\omega|$, así

$$= -\underbrace{\frac{|\omega|v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)}_{\equiv m_e} + \dots = -m_e \bar{e} e + \dots \quad \text{donde } e \equiv e_R + e_L. \quad (3.188)$$

La expresión que acabamos de obtener es invariante de norma, hemos logrado que tenga la forma: $-m\bar{\phi}\phi = -m(\bar{\phi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$. Con base en lo anterior podemos proponer los términos para la lagrangiana

$$\bar{E}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu E_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R - |\omega| \bar{E}_L \phi e_R - |\omega| \bar{e}_R \phi^\dagger E_L. \quad (3.189)$$

Debido a que las derivadas covariantes del primer y segundo sumando son diferentes, es importante fijarnos en los siguientes factores

$$\bullet \mathcal{D}_\mu E_L = \left(\partial_\mu - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu Y_L \right) E_L$$

Usando (3.112)

$$= \left(\partial_\mu - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) - \frac{ig_2}{\cos \theta_w} \left(\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2 \theta_w Q_L \right) Z_\mu - iQ_L g_2 \sin \theta_w A_\mu \right) E_L, \quad (3.190)$$

$$\bullet \mathcal{D}_\mu e_R = (\partial_\mu - ig_1 C_R B_\mu) e_R. \quad (3.191)$$

$Q_L = \frac{\sigma^3}{2} + Y_L$ es el operador de carga y Y_L es la hipercarga.

Por lo que sustituyendo (3.190) y (3.191) en la expresión (3.189)

$$= \bar{E}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu \mathbb{1} - ieQ_L A_\mu) E_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu \mathbb{1} - ig_1 C_R B_\mu) e_R - |w| \bar{E}_L \phi e_R - |w| \bar{e}_R \phi^\dagger E_L + \dots, \quad (3.192)$$

pero

$$Q_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + C_L & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + C_L \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (Q_L)_{11} & 0 \\ 0 & (Q_L)_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.193)$$

Regresando a la expresión (3.192), desarrollemos el primer término tomando en cuenta la definición de la matriz Q_L .

$$\bar{E}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu \mathbb{1} - ieQ_L A_\mu) E_L = i\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie \left(\frac{1}{2} + C_L \right) A_\mu \right) \nu_{eL} + i\bar{e}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie \left(-\frac{1}{2} + C_L \right) A_\mu \right) e_L, \quad (3.194)$$

para que no haya interacción con el grupo $U(1)_Y$ por parte de los neutrinos, entonces

$$(Q_L)_{11} = \frac{1}{2} + C_L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_L = -\frac{1}{2}, \quad (3.195)$$

$$(Q_L)_{22} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1. \quad (3.196)$$

La matriz Q_L resulta ser:

$$Q_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.197)$$

Para cada α (sabor de los leptones) deberíamos tener una hipercarga diferente, pero debido a que los neutrinos no tienen carga eléctrica entonces Q_L es la misma en todos los casos.

Regresando a (3.196)

$$\bar{E}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu \mathbb{1} - ieQ_L A_\mu) E_L = i\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} + i\bar{e}_L \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) e_L, \quad (3.198)$$

al fijarnos en la parte derecha de (3.192) utilizando

$$B_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (-g_1 Z_\mu + g_2 A_\mu)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 C_R B_\mu) e_R &= \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie \underbrace{C_R}_{=-1} A_\mu) e_R + \dots \\ &= \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) e_R + \dots \end{aligned} \quad \text{donde } \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = e, \quad (3.199)$$

en este caso la hipercarga coincide con la carga eléctrica. Por otra parte C_L , C_R y C_ϕ son

$$C_L = -\frac{1}{2}, \quad C_R = -1, \quad C_\phi = C_L - C_R = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \quad (3.200)$$

Finalmente de (3.192), obtenemos

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}_{eL} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} + \bar{e}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_L + \bar{e}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R - \frac{|\omega|v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + \dots \quad (3.201)$$

El siguiente paso consta en introducir los sabores de los leptones a la lagrangiana. En el Modelo Estándar se propone la siguiente lagrangiana, la cual incluye la suma sobre las familias de leptones

$$\mathcal{L}_L = \underbrace{\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} [\bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,R} i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{\alpha,R}]}_{\equiv \mathcal{L}_c} - \underbrace{\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{\beta=e,\mu,\tau} [y_{\alpha\beta}^l \bar{L}_{\alpha,L} \phi l_{\beta,R} + y_{\alpha\beta}^{l*} \bar{l}_{\beta,R} \phi^\dagger L_{\alpha,L}]}_{\equiv \mathcal{L}_y}, \quad (3.202)$$

$\mathcal{L}_c$ se nombra *Sector de corrientes* y $\mathcal{L}_y$ *Sector de Yukawa*. A los escalares $y_{\alpha\beta}^l$ se les conoce como *Constantes de Yukawa* y podemos definirlos: $y_{\alpha\beta}^l = \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta$, entonces

$$\mathcal{L}_L = [\dots] + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} [\omega_\alpha \bar{L}_{\alpha,L} \phi l_{\alpha,R} + \omega_\alpha^* \bar{l}_{\alpha,R} \phi^\dagger L_{\alpha,L}]. \quad (3.203)$$

Si comparamos $\mathcal{L}_L$ con (3.201) vemos que tienen gran parecido. Además se cumple que es invariante de norma debido a que los campos tienen la misma hipercarga y también es hermitiana.

3.2. Sector de Yukawa

Analicemos primero el sector de Yukawa introduciendo el rompimiento espontáneo de la simetría, $\phi = \phi_0 + \xi$

$$\mathcal{L}_y = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [\bar{l}_{\alpha,L} y_{\alpha\beta}^l l_{\beta,R} + \bar{l}_{\beta,R} y_{\beta\alpha}^{l\dagger} l_{\alpha,L} + \dots]. \quad (3.204)$$

Es importante hacer énfasis de que estamos en el espacio de familias. Ahora definamos

$$\vec{l}_L = \begin{pmatrix} l_{e,L} \\ l_{\mu,L} \\ l_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_R = \begin{pmatrix} l_{e,R} \\ l_{\mu,R} \\ l_{\tau,R} \end{pmatrix}, \quad \vec{\nu}_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad y^l = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{ee} & y_{e\mu} & y_{e\tau} \\ y_{\mu e} & y_{\mu\mu} & y_{\mu\tau} \\ y_{\tau e} & y_{\tau\mu} & y_{\tau\tau} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Yukawa}}. \quad (3.205)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_y = -\frac{v}{\sqrt{2}} [\vec{l}_L y^l \vec{l}_R + \vec{l}_R y^{l\dagger} \vec{l}_L] + \dots \quad (3.206)$$

¿Cómo se le puede hacer para definir términos de masa?

Necesitamos diagonalizar la matriz de Yukawa de forma que se obtenga una matriz diagonal $\mathcal{M}$ con términos reales. Se pueden encontrar matrices V_L y V_R hermitianas tal que

$$\mathcal{M} = V_L^\dagger y^l V_R, \quad (3.207)$$

así

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left[\bar{l}_L V_L (V_L^\dagger y^l V_R) V_R^\dagger \vec{l}_R + \bar{l}_R V_R (V_R^\dagger y^{l\dagger} V_L) V_L^\dagger \vec{l}_L \right] + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left[\bar{l}_L V_L \mathcal{M} V_R^\dagger \vec{l}_R + \bar{l}_R V_R \mathcal{M} V_L^\dagger \vec{l}_L \right] + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left[(V_L^\dagger \vec{l}_L)^\dagger \gamma^0 \mathcal{M} (V_R^\dagger \vec{l}_R) + (V_R^\dagger \vec{l}_R)^\dagger \gamma^0 \mathcal{M} (V_L^\dagger \vec{l}_L) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.208)$$

Si nos fijamos en el cambio de base

$$V_L^\dagger \vec{l}_L = \begin{pmatrix} (V_L^\dagger)_{ee} & (V_L^\dagger)_{e\mu} & (V_L^\dagger)_{e\tau} \\ (V_L^\dagger)_{\mu e} & (V_L^\dagger)_{\mu\mu} & (V_L^\dagger)_{\mu\tau} \\ (V_L^\dagger)_{\nu e} & (V_L^\dagger)_{\nu\mu} & (V_L^\dagger)_{\nu\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{e,L} \\ l_{\mu,L} \\ l_{\nu,L} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} l'_{e,L} \\ l'_{\mu,L} \\ l'_{\nu,L} \end{pmatrix} \equiv \vec{l}'_L. \quad (3.209)$$

Así

$$\vec{l}'_L = V_L^\dagger \vec{l}_L \quad \text{y} \quad \vec{l}'_R = V_R^\dagger \vec{l}_R. \quad (3.210)$$

Regresando a $\mathcal{L}_y$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\bar{l}'_L \mathcal{M} \vec{l}'_R + \bar{l}'_R \mathcal{M} \vec{l}'_L \right) + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha \sum_\beta \left[(\bar{l}'_L)_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta} (\vec{l}'_R)_\beta + (\bar{l}'_R)_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta} (\vec{l}'_L)_\beta \right] + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \underbrace{y_\beta^l}_{\sqrt{m_\beta^2}} \left(\bar{l}'_{\alpha,L} l'_{\beta,R} + \bar{l}'_{\alpha,R} l'_{\beta,L} \right) + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha y_\alpha^l \left(\bar{l}'_{\alpha,L} l'_{\alpha,R} + \bar{l}'_{\alpha,R} l'_{\alpha,L} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (3.211)$$

cambiamos la notación para quitar las primas

$$l'_{\alpha,L,R} \longrightarrow l_{\alpha,L,R}.$$

$$\mathcal{L}_y = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha y_\alpha^l (\bar{l}_{\alpha,L} l_{\alpha,R} + \bar{l}_{\alpha,R} l_{\alpha,L}) + \dots, \quad (3.212)$$

en términos de $l_\alpha \equiv l_{\alpha,L} + l_{\alpha,R} = P_L l_\alpha + P_R l_\alpha$,

$$\mathcal{L}_y = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_\alpha y_\alpha^l \bar{l}_\alpha l_\alpha + \dots = -\frac{v}{\sqrt{2}} y_e^l \bar{l}_e l_e - \frac{v}{\sqrt{2}} y_\mu^l \bar{l}_\mu l_\mu - \frac{v}{\sqrt{2}} y_\tau^l \bar{l}_\tau l_\tau + \dots \quad (3.213)$$

Para que podamos tener términos de masa, definamos $\frac{v}{\sqrt{2}}y_\alpha^l \equiv m_\alpha$, por lo tanto

$$\mathcal{L}_y = -m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau + \dots \quad (3.214)$$

3.3. Sector de Corrientes

Recordemos la lagrangiana del sector de corrientes

$$\mathcal{L}_c = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} [\bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,R} i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{\alpha,R}]. \quad (3.215)$$

En este caso las derivadas covariantes son diferentes (como se ve en (3.190) y (3.191)) y $l_{\alpha,R}$ es un singlete de $SU(2)$. Utilizando la definición de las derivadas covariantes antes mencionadas, analicemos algunos términos de la lagrangiana (3.215)

- Términos de $\mathcal{D}_\mu L_{\alpha,L}$

$$\star \quad \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \partial_\mu L_{\alpha,L} = \bar{\nu}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \partial_\mu l_{\alpha,L}, \quad (3.216)$$

sumando sobre todas las familias y utilizando la notación mostrada en (3.205)

$$\sum_\alpha \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu \partial_\mu L_{\alpha,L} = \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \bar{l}_L i\gamma^\mu \partial_\mu l_L \quad (3.217)$$

El siguiente término

$$\star \quad \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^\dagger \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) L_{\alpha,L} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^\mu l_{\alpha,L} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^\mu \nu_{\alpha,L}, \quad (3.218)$$

agregando la suma sobre los estados

$$\sum_\alpha \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^\dagger \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-) L_{\alpha,L} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L. \quad (3.219)$$

Calculando

$$\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2(\theta_w) Q_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta_w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_w) \end{pmatrix}. \quad (3.220)$$

Luego

$$\begin{aligned} \star \quad \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \left(\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2(\theta_w) Q_L \right) Z_\mu L_{\alpha,L} &= \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_\mu \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} \\ &+ \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_\mu \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_w) \right) l_{\alpha,L}, \end{aligned} \quad (3.221)$$

sumando sobre todos los sabores

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \left(\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2(\theta_w) Q_L \right) Z_\mu L_{\alpha,L} &= \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_\mu \frac{1}{2} \bar{\vec{\nu}}_L \gamma^\mu \vec{\nu}_L \\ &+ \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_\mu \bar{\vec{l}}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_w) \right) \vec{l}_L. \end{aligned} \quad (3.222)$$

Calculando el último término

$$\star \quad \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) e Q_L A_\mu L_{\alpha,L} = -e A_\mu \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^\mu l_{\alpha,L}, \quad (3.223)$$

en esta parte podemos ver claramente cómo se elimina la interacción electromagnética con los neutrinos. Ahora sumemos sobre todos los sabores

$$\sum_\alpha \bar{L}_{\alpha,L} i\gamma^\mu (-i) e Q_L A_\mu L_{\alpha,L} = -e A_\mu \bar{\vec{l}}_L \gamma^\mu \vec{l}_L. \quad (3.224)$$

■ Términos de $\mathcal{D}_\mu l_{\alpha,R}$ ($C_L = -1$)

$$\mathcal{D}_\mu l_{\alpha,R} = \left(\partial_\mu - i \frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_\mu + i \underbrace{\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}}_{=e} A_\mu \right) l_{\alpha,R}, \quad (3.225)$$

notemos que si consideramos un triángulo rectángulo con catetos opuesto y adyacente de medidas g_1 y g_2 respectivamente y ángulo θ_w

$$\frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \sin^2(\theta_w),$$

obteniendo

$$\star \quad \mathcal{D}_\mu l_{\alpha,R} = \partial_\mu l_{\alpha,R} - i \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \sin^2(\theta_w) Z_\mu l_{\alpha,R} + i e A_\mu l_{\alpha,R}, \quad (3.226)$$

al sumar sobre todos los estados de sabor

$$\sum_{\alpha} \bar{l}_{\alpha,R} i\gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} l_{\alpha,R} = \bar{l}_R i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \vec{l}_R + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \text{sen}^2(\theta_w) Z_{\mu} \bar{l}_R \gamma^{\mu} \vec{l}_R - e A_{\mu} \bar{l}_R \gamma^{\mu} \vec{l}_R. \quad (3.227)$$

Es importante recordar que todos los cálculos que se obtuvieron anteriormente están en el espacio de familias.

Finalmente vamos a sumar (3.217), (3.219), (3.222), (3.224) y (3.227)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = & \bar{\nu}_L i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \vec{\nu}_L + \bar{l}_L i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \vec{l}_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} \vec{l}_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{l}_L \gamma^{\mu} \vec{\nu}_L + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} \vec{\nu}_L \\ & + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \bar{l}_L \gamma^{\mu} \left(-\frac{1}{2} + \text{sen}^2(\theta_w) \right) \vec{l}_L - e A_{\mu} \bar{l}_L \gamma^{\mu} \vec{l}_L + \bar{l}_R i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \vec{l}_R \\ & + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \text{sen}^2(\theta_w) Z_{\mu} \bar{l}_R \gamma^{\mu} \vec{l}_R - e A_{\mu} \bar{l}_R \gamma^{\mu} \vec{l}_R, \end{aligned} \quad (3.228)$$

necesitamos hacer un cambio de base para llevar los términos a los eigenestados de masa, definiendo

$$\vec{l}'_L = V_L^{\dagger} \vec{l}_L, \quad \vec{l}'_R = V_R^{\dagger} \vec{l}_R,$$

quitando la primas para hacer más fácil la notación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = & \sum_{\alpha} \left[\bar{\nu}_{\alpha,L} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \nu_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,L} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} l_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,R} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} l_{\alpha,R} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} l_{\alpha,L} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \nu_{\alpha,L} \right. \\ & + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \nu_{\alpha,L} + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \left(-\frac{1}{2} + \text{sen}^2(\theta_w) \right) l_{\alpha,L} \\ & \left. + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \text{sen}^2(\theta_w) Z_{\mu} \bar{l}_{\alpha,R} \gamma^{\mu} l_{\alpha,R} - \underline{e A_{\mu} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} l_{\alpha,L}} - \underline{e A_{\mu} \bar{l}_{\alpha,R} \gamma^{\mu} l_{\alpha,R}} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.229)$$

recordando que podemos expresar los campos $l_{\alpha} = l_{\alpha,L} + l_{\alpha,R}$, por lo que los términos que están subrayados en (3.229) se pueden agrupar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = & \sum_{\alpha} \left[\bar{\nu}_{\alpha,L} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \nu_{\alpha,L} + \underbrace{\bar{l}_{\alpha,L} i\gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ie A_{\mu}) l_{\alpha}}_{\text{acoplamiento mínimo}} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} l_{\alpha,L} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \nu_{\alpha,L} \right. \\ & + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \nu_{\alpha,L} + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} Z_{\mu} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^{\mu} \left(-\frac{1}{2} + \text{sen}^2(\theta_w) \right) l_{\alpha,L} \\ & \left. + \frac{g_2}{\cos(\theta_w)} \text{sen}^2(\theta_w) Z_{\mu} \bar{l}_{\alpha,R} \gamma^{\mu} l_{\alpha,R} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.230)$$

Logramos pasar de $SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_e$.

Hagamos las siguientes definiciones

■ *Corrientes cargadas*

$$j_{W\alpha}^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^\mu l_{\alpha,L}, \quad (3.231)$$

$$j_{W\alpha}^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^\mu \nu_{\alpha,L}. \quad (3.232)$$

■ *Corrientes neutras*

$$\begin{aligned} j_{Z\alpha}^\mu &= \frac{1}{\cos(\theta_w)} \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} + \frac{1}{\cos(\theta_w)} \left(-\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_w) \right) \bar{l}_{\alpha,L} \gamma^\mu l_{\alpha,L} \\ &\quad + \frac{1}{\cos(\theta_w)} \sin^2(\theta_w) \bar{l}_{\alpha,R} \gamma^\mu l_{\alpha,R} \end{aligned} \quad (3.233)$$

■ *Corriente electromagnética*

$$j_{\gamma\alpha}^\mu = -\bar{l}_\alpha \gamma^\mu l_\alpha. \quad (3.234)$$

Así:

$$\mathcal{L}_c = \sum_\alpha \left[\bar{l}_\alpha i \gamma^\mu \partial_\mu l_\alpha + \nu_{\alpha,L} i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{\alpha,L} + e A_\mu j_{\gamma\alpha}^\mu + g_2 W_\mu^- j_{W\alpha}^{-\mu} + g_2 W_\mu^+ j_{W\alpha}^{+\mu} + g_2 Z_\mu j_{Z\alpha}^\mu \right]. \quad (3.235)$$

Capítulo 4

Física de los neutrinos más allá del Modelo Estándar

La masa de los neutrinos se ha convertido en uno de los temas más interesantes en el estudio de la Física y han sido un tema de intensa investigación experimental y teórica. Inicialmente propuesto por Wolfgang Pauli [28], el concepto de los neutrinos nació bajo el supuesto de que estas partículas podrían ser masivas, se supuso que eran del orden de la masa del electrón, aunque la ausencia de indicios de efectos asociados a dichas masas sostuvo la idea de que éstas podrían ser exactamente iguales a cero. Ahora sabemos que los neutrinos tienen masa, aunque se conocen sólo dos pequeños valores de las diferencias de masas cuadráticas.

El origen de la masa tan pequeña de los neutrinos es aún un misterio. Se piensa que sus masas son una manifestación de baja energía de la física mas allá del Modelo Estándar, y su pequeñez se debe a la supresión generada por una nueva escala de alta energía, tal vez relacionada a la unificación de fuerzas.

4.1. Matriz PMNS

En el lenguaje de teoría cuántica de campos, las mediciones experimentales de las propiedades de los neutrinos se puede codificar en un *término de masa de neutrino*, $L_{y\nu}$, en la lagrangiana. El Modelo Estándar establece que este término es idénticamente cero, simplemente porque no se tenían pruebas experimentales, en contraste con la condición de que el fotón no tiene masa que es generada por la invariancia de norma. Siguiendo un procedimiento muy similar al capítulo anterior podemos definir un término de masa para los neutrinos:

$$\mathcal{L}_{y\nu} \approx \bar{\vec{\nu}}_L y^\nu \vec{\nu}_R + h.c., \quad (4.1)$$

el neutrino izquierdo viene de (3.205) y el nuevo neutrino derecho es

$$\vec{\nu}_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

la matriz y^ν da los acoplamientos de Yukawa de los neutrinos y puede ser diagonalizada de una forma similar que y^l (3.207)

$$\mathcal{M}^\nu = V_L^{\nu\dagger} y^\nu V_R^\nu, \quad \text{con } \mathcal{M}^\nu = y_k^\nu \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3), \quad (4.3)$$

con valores reales y positivos y_k^ν . De igual forma V_L^ν y V_R^ν son dos matrices unitarias 3×3 .

En la base de masas tenemos

$$\mathcal{L}_{y^\nu} \approx \bar{\vec{\nu}}_L' \mathcal{M}^\nu \vec{\nu}_L' + h.c., \quad (4.4)$$

donde $\vec{\nu}_L' = V_L^{\nu\dagger} \vec{\nu}_L$, en adelante omitiremos las primas.

Usando el campo de Dirac para los neutrinos $\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR}$, al sumar sobre todos los estados de masa

$$\mathcal{L}_{y^\nu} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{k_1}^3 y_k^\nu \bar{\nu}_k \nu_k + \dots \quad (4.5)$$

Por lo tanto, la masa de los neutrinos está dada por

$$m_k = \frac{v}{\sqrt{2}} y_k^\nu. \quad (4.6)$$

Notemos que la masa de los neutrinos que hemos obtenido mediante el mecanismo de Higgs es proporcional a v , como la masa de los leptones cargados (Capítulo 3) y los quarks. Sin embargo, es conocido que la masa de los neutrinos es mucho mas pequeña que esos leptones cargados y quarks. En el mecanismo que se describió, no se encuentra una explicación los valores tan pequeños de los eigenvalores y_k^ν . Este uno más de los misterios del Modelos Estándar que nos lleva a pensar que este modelo es considerado como una teoría efectiva obtenida en el límite de bajas energías.

La mezcla de los tres neutrinos de Dirac es similar a la mezcla de los quarks en el Modelo Estándar [9], la corriente leptónica electrodébil puede ser escrita

$$j_{WL}^\mu = 2\bar{\vec{\nu}}_L \gamma^\mu \vec{l}_L = 2\bar{\vec{\nu}}_L' V_L^{\nu\dagger} V_L^l \gamma^\mu \vec{l}_L'. \quad (4.7)$$

Esta corriente depende del producto

$$U = V_L^{\nu\dagger} V_L^l, \quad (4.8)$$

que es la matriz de mezcla en el sector leptónico, llamada *Matriz PMNS*, en honor a Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata. En términos de la matriz de mezcla y omitiendo las primas, la corriente cargada electrodébil se lee

$$j_{WL}^\mu = 2\bar{\vec{\nu}}_L U^\dagger \gamma^\mu \vec{l}_L. \quad (4.9)$$

Es costumbre definir un vector con los campos de sabor de los neutrinos izquierdos:

$$\vec{\nu}_L = U \vec{\nu}'_L = V_L^{\prime\dagger} \vec{\nu}_L \quad \text{con} \quad \vec{n}_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

lo cual nos permite escribir la corriente electrodébil

$$j_{WL}^\mu = 2\bar{\vec{n}}_L \gamma^\mu \vec{l}_L = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{n}_{\alpha,L} \gamma^\mu l_{\alpha,L}. \quad (4.11)$$

4.2. Términos de masa: Dirac vs Majorana

Siendo electricamente neutros, los neutrinos pueden ser partículas de *Dirac* o *Majorana*, identificados por si los neutrinos y antineutrinos son diferentes o los mismos, respectivamente. La diferencia esencial de estos dos tipos de neutrinos radica en el número de grados de libertad que caracteriza a cada uno: el neutrino de Dirac masivo requiere de cuatro grados de libertad, mientras que el neutrino de Majorana requiere sólo de dos. Una implicación importante de esto es que en el caso de los neutrinos de Majorana la partícula coincide con la antipartícula, lo que se expresa, matemáticamente, a través de la *condición de Majorana*, $\nu^c = \nu$, donde ν^c es el campo de carga conjugada que le corresponde al campo fermiónico ν . La parametrización de la matriz PMNS es diferente, dependiendo de si los neutrinos son partículas de Majorana o de Dirac.

- Para neutrinos de Dirac, una parametrización conveniente de esta matriz es [30]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$c_{ab} = \cos\theta_{ab}$ y $s_{ab} = \sin\theta_{ab}$. Como se puede apreciar en la expresión anterior, la matriz PMNS para neutrinos de Dirac se parametriza mediante los tres ángulos de mezcla θ_{12}, θ_{13} y θ_{23} , y una fase compleja, δ , conocida como la fase de Dirac. Los valores de los ángulos de mezcla y la fase de Dirac se encuentran en los rangos $0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \delta \leq 2\pi$.

- Para los neutrinos de Majorana la situación diferente, ya que la parametrización de U requiere de dos fases complejas adicionales, las cuales reciben el nombre de fases de Majorana. En este contexto, las fases de Majorana se pueden factorizar, de manera que la matriz PMNS se expresa como

$$U = U^D D^M, \quad (4.13)$$

donde D^M es una matriz diagonal de la forma

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}), \quad (4.14)$$

con $\lambda_1 = 0$. Por otra parte, la matriz U^D se parametriza como la matriz mostrada en la ecuación (4.12). Una implicación de la factorización mostrada en la ecuación (4.14) es que los experimentos que involucran oscilaciones de neutrinos no son sensibles a las masas de Majorana. Las fases complejas son fuente de violación de la simetría discreta CP , pero es necesaria para explicar la asimetría bariónica en el universo [30].

Considerando por simplicidad solo una generación, los campos quirales ν_L y ν_R son los bloques principales en la lagrangiana del neutrino. Sabemos que los campos quirales ν_L existen, porque están presentes en el Modelo Estándar y entran en la lagrangiana de interacciones débiles de corriente cargada. No sabemos si el campo quiral ν_R exista, aunque, está permitido por la simetría del ME. Si solo existe ν_L , la lagrangiana del neutrino puede contener solo el término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + h.c., \quad (4.15)$$

donde $\mathcal{C}$ es la matriz de conjugación de carga y el neutrino es una partícula de Majorana. Si ν_R también existe, la lagrangiana del neutrino puede contener el término de masa de Dirac

$$\mathcal{L}_{mass}^D = -m_D \bar{\nu}_R \nu_L + h.c., \quad (4.16)$$

la cual implicaría que el neutrino es una partícula de Dirac. Sin embargo, además del término de masa de Dirac en la ecuación (4.16), la lagrangiana del neutrino puede también contener el término de masa de Majorana en la ecuación (4.15) para ν_L y el término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + h.c., \quad (4.17)$$

para ν_R . En general es posible tener el término de masa del neutrino Dirac-Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^R. \quad (4.18)$$

Esto es una sorpresa, porque de todas las partículas elementales conocidas que tienen ambas componente quirales (derecho e izquierdo), solo los neutrinos pueden tener los términos de masa de Majorana $\mathcal{L}_{mass}^L$ y $\mathcal{L}_{mass}^R$. Ésta implica que los neutrinos son partículas muy especiales que pueden generar nueva física a través de la violación del número leptónico de los términos de Majorana. El

término de masa de Majorana en la ecuación (4.15) para ν_L no está permitido por las simetrías del ME porque no es invariante bajo las transformaciones $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (sin embargo, puede ser generado por nueva física más allá del ME). Por otra parte, el término de masa de Majorana en la ecuación (4.17) para ν_R es permitido por las simetrías del ME, porque ν_R es singlete de $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

La masa de Majorana m_R en la ecuación (4.17) puede ser escogido real y positiva por una fase apropiada de campo quiral ν_R . Una vez que la fase de ν_R es fija, la masa de Dirac m_D en la ecuación (4.16) puede ser escogida real y positiva por una fase apropiada del campo quiral ν_L . Sin embargo, una vez que las fases de ν_L y ν_R son fijadas, no hay libertad adicional para cancelar una posible fase compleja de la masa de Majorana en la ecuación (4.15). Por consiguiente, en lo que sigue se considerará real y positivo m_R y m_D y complejo m_L . Para entender las implicaciones del término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (4.18), es útil definir la matriz columna de campos quirales izquierdos.

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \mathcal{C}\bar{\nu}_R^T \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Usando

$$\bar{\nu}_L^C = (\mathcal{C}\bar{\nu}_L^T)^\dagger \gamma^0 = \nu_L^T (\gamma^0)^T \mathcal{C}^\dagger \gamma^0 = -\nu_L^T \mathcal{C}^T, \quad (4.20)$$

se puede escribir el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (4.18) como

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^T \mathcal{C}^\dagger M N_L + \text{h.c.} \quad (4.21)$$

con la matriz de masa simétrica

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

De la expresión en la ecuación (4.21) es claro que los campos quirales ν_L y ν_R no tienen masa definida, por la existencia de los términos de Dirac fuera de la diagonal. Con el objetivo de encontrar los campos de neutrinos masivos es necesario diagonalizar la matriz de masa en la ecuación (4.22). Esto puede ser hecho con una transformación unitaria de campos quirales,

$$N_L = U n_L, \quad (4.23)$$

donde

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

es la matriz columna del campo quiral izquierdo de neutrinos masivos y U es la matriz de $U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu$ formada por el producto de matrices unitarias 3×3 que diagonalizan a la matriz de acoplamiento de Yukawa de leptones cargados. La matriz unitaria U debe ser tal que

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

con $m_k \geq 0$, $k = 1, 2$. Con la transformación de la ecuación (4.23), el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (4.21) puede ser escrito como

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^T \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k, \quad (4.26)$$

donde se ha definido el campo de Majorana del neutrino masivo como:

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_{kL} + \mathcal{C} \bar{\nu}_{kL}^T. \quad (4.27)$$

Por lo tanto, se ha obtenido un importante resultado: un término de masa de Dirac-Majorana implica que los neutrinos masivos son partículas de Majorana. Esto no parece ser una sorpresa ya que el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (4.21) tiene la estructura de un término de masa de Majorana para los dos campos quirales ν_L y ν_R^C .

4.3. Evidencias de masas de neutrinos

El fenómeno de las *oscilaciones de neutrinos*, es un fenómeno mecánico-cuántico propuesto a finales de 1950 por Pontecorvo [31, 32] en analogía con las oscilaciones $K^0 - \bar{K}^0$ de Gell-Mann y Pais [33]. Esto significa que un rayo de neutrinos (producidos a través de decaimientos de interacciones débiles, correspondientes a algún sabor definido) puede espontáneamente cambiar, u oscilar, en neutrinos de diferentes sabores, por ejemplo $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$, mientras viajan en el vacío. La inmediata consecuencia de estas oscilaciones es que los neutrinos tienen masa diferente de cero, lo cual es uno de los resultados de física de partículas no predichos en el Modelo Estándar. Las oscilaciones son generadas por la interferencia de diferentes neutrinos masivos, los cuales son producidos y detectados coherentemente por sus muy pequeñas diferencias de masas [34].

A finales de 1950 solo un *neutrino activo* era conocido, el neutrino del electrón. Años despues Pontecorvo introdujo el concepto de *neutrino estéril* [35], el cual es un fermión neutro que no toma parte en las interacciones débiles. El neutrino del muon fue descubierto en 1962 en el experimento Brookhaven de Lederman, Schwartz, Sreinberger, et al. [36], los cuales dieron seguimiento a una propuesta hecha por Pontecorvo en 1959 [37]. Desde entonces, llegó a ser claro que las oscilaciones entre diferentes sabores de neutrinos activos son posibles si los neutrinos son masivos y se mezclan, es decir, para que las oscilaciones de neutrinos ocurra es necesario que la matriz PMNS no sea diagonal. Las amplitudes de probabilidad de transición asociada a las oscilaciones de neutrinos dependen de diferencias entre las masas de estas partículas, lo que significa que para que este fenómeno físico ocurra, es necesario que las masas de al menos dos de los tres neutrinos *activos* sean diferentes de cero.

En 1962 Maki, Nakagawa y Sakata [38] consideraron por primera vez un modelo con la mezcla de diferentes sabores de neutrinos. En 1967 Pontecorvo [35] predijo el Problema del neutrino Solar como consecuencia de transiciones $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ (o $\nu_e \rightarrow \nu_{esteril}$) incluso antes de la primera medición del flujo del neutrino solar del electrón en el experimento de Homestake [39], y en 1969 Gribov y Pontecorvo discutieron las oscilaciones del neutrino solar debido a la mezcla de neutrinos [40].

4.3.1. Derivación estándar de la probabilidad de la oscilación del neutrino

En la teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos [41, 42, 43, 44, 45] un neutrino con sabor α y momento $\vec{p}$ creado en una corriente cargada de interacción débil procede de un leptón cargado l_α^- o junto con un antileptón cargado l_α^+ , es descrito por el estado de sabor

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (4.28)$$

La presencia del peso $U_{\alpha k}^*$ del ket $|\nu_k\rangle$ en el estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ se debe a la descomposición de la corriente leptónica cargada $j_{W,L}^\rho$:

$$j_{W,L}^\rho = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\rho l_{\alpha L} = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k} \bar{\nu}_{kL} \gamma^\rho l_{\alpha L}, \quad (4.29)$$

en términos de las contribuciones de neutrinos masivos, los cuales contienen operadores de creación de masas de neutrinos. Por simplicidad, consideremos una normalización finita en un volumen V , de manera de tener estados de neutrinos masivos ortonormales:

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}. \quad (4.30)$$

La unitariedad de la matriz U implica que también los estados de sabor son ortonormales:

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.31)$$

En la ecuación (4.29) no se limita el número de neutrinos masivos. Es sabido que el número de neutrinos de sabor activo es tres, correspondiendo a ν_e, ν_μ, ν_τ , el número de neutrinos masivos debe ser igual o mayor a tres: si el número de neutrinos masivos es mayor a tres, los neutrinos adicionales en la base de sabores son estériles, es decir, no participan en las interacciones débiles (ya que los neutrinos son electricamente neutros, los neutrinos estériles interactúan solo con la materia ordinaria a través de interacciones gravitacionales o interacciones exóticas mas allá de aquellas del ME). La transición de los neutrinos activos de sabor en estériles se puede observar solo a través de la desaparición de neutrinos activos. Los estados de neutrinos masivos $|\nu_k\rangle$ son eigenestados de la hamiltoniana,

$$\mathcal{H} |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle, \quad (4.32)$$

con eigenvalores de energía

$$E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2}. \quad (4.33)$$

La ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_k(t)\rangle, \quad (4.34)$$

implica que los estados de neutrinos masivos evolucionan en el tiempo como ondas planas:

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (4.35)$$

Considerando ahora un estado de sabor $|\nu_\alpha(t)\rangle$ el cual describe un neutrino creado con un sabor definido α al tiempo $t = 0$. De las ecuaciones (4.28) y (4.35) la evolución del tiempo del estado del eigenket de sabor está dada por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle, \quad (4.36)$$

el cual $|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$.

Utilizando la relación de unitariedad de la matriz U , los estados masivos pueden ser expresados en términos de los estados de sabor invirtiendo la ecuación (4.28):

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (4.37)$$

Sustituyendo (4.37) en la ecuación (4.36) se obtiene

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle. \quad (4.38)$$

Por lo tanto, la superposición de estados de neutrinos masivos $|\nu_\alpha(t)\rangle$, el cual es el estado puro de sabor dado en la ecuación (4.28) en $t = 0$, llega a ser una superposición de diferentes estados de sabor a $t > 0$ (si la matriz de mezcla U no es diagonal, i.e. neutrinos son mezclados). El coeficiente de $|\nu_\beta\rangle$,

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}, \quad (4.39)$$

es la amplitud de la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ como función del tiempo. La transición de probabilidad es, entonces, dada por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (4.40)$$

Para neutrinos ultrarelativistas, la relación de dispersión en la ecuación (4.33) puede ser aproximada

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}. \quad (4.41)$$

En este caso

$$E_k - E_j \simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \quad (4.42)$$

Δm_{kj}^2 es la diferencia de las masas cuadráticas

$$\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2, \quad (4.43)$$

utilizando (4.42) en la transición de probabilidad de la ecuación (4.40) se puede aproximar

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t}. \quad (4.44)$$

El paso final en la derivación estándar de la probabilidad de oscilación del neutrino se basa en el hecho de que, en los experimentos de oscilaciones de neutrinos, el tiempo de propagación t no es medible. lo que es sabido es la distancia L entre la fuente y el detector. Debido a que los neutrinos ultrarelativistas se propagan casi a la velocidad de la luz, es posible aproximar $t = L$ llevando a

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L}. \quad (4.45)$$

Esta expresión muestra que la distancia fuente-detector L y la energía del neutrino E con cantidades dependientes en el experimento los cuales determinan las fases de las oscilaciones de los neutrinos

$$\Phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L. \quad (4.46)$$

Por supuesto, las fases son determinadas también por las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 , las cuales son físicamente constantes. La amplitud de oscilación es especificada solo por los elementos de la matriz de mezcla U , los cuales son constantes por naturaleza. Por consiguiente las mediciones de las oscilaciones de los neutrinos permite estimar valores de las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 y los elementos de la matriz de mezcla U .

Es claro que para que las oscilaciones de neutrinos ocurra (es decir que la probabilidad de oscilación sea diferente de cero), Δm_{kj}^2 tiene que ser diferente de cero, para cualquier valor de L y E , lo que implica que al menos uno de los neutrinos debe tener masa cuadrática diferente de cero, o que las masas cuadráticas de los neutrinos deben ser diferentes, de lo contrario si $\Delta m_{kj}^2 = 0$ esto implica que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*. \quad (4.47)$$

Por otra parte de la unitariedad de la matriz de mezcla U se tiene

$$UU^\dagger = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k U_{\alpha k} U_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.48)$$

Usando (4.47) y (4.48) se tendría

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.49)$$

lo cual, si hay oscilaciones de neutrinos ($\alpha \neq \beta$), automáticamente la probabilidad de transición sería cero, debido a la ecuación anterior, y esto no puede suceder. De ahí que el término Δm_{kj}^2 debe ser diferente de cero. Aunque las mediciones positivas de las oscilaciones de neutrinos implican neutrinos masivos, éstos producen información precisa solo en los valores de las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 , pero no en los valores absolutos de las masas de los neutrinos, excepto que obviamente m_k^2 o m_j^2 sean valores mucho más grandes que $|\Delta m_{kj}^2|$.

La posibilidad de un neutrino de sabor ν_α espontáneamente cambiando en otro sabor, refleja la relación de incertidumbre de energía-momento en las mediciones del proceso. Por ejemplo, si se puede precisar cuál eigenestado de masa ν_i es producido en la fuente, el patrón de oscilación es destruido. El punto principal que podemos tener en mente, es que en forma de obtener oscilaciones de neutrinos [46] se debe tener masa no-cero (y no degenerada) de los neutrinos y ángulos de mezcla.

4.4. Mecanismo del sube y baja (seesaw)

Es útil considerar el caso más simple de una matriz de masa real, la cual implica invariancia de CP, como se verá a continuación. Esto significa que, además de real y positiva, m_R y m_D , consideramos un real m_L , la cual puede ser positiva o negativa. En este caso la matriz de la ecuación (4.22) es real y simétrica, esta puede ser diagonalizada a través de la transformación (4.25) por medio de la matriz unitaria

$$U = \mathcal{O}\rho, \quad (4.50)$$

$\mathcal{O}$ es una matriz ortogonal de rotación 2×2 la cual puede ser escrita como

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

ρ es una matriz diagonal de fases

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

$\rho_k^2 = \pm 1$. La matriz ortogonal $\mathcal{O}$ debe ser escogida de manera que diagonalice la matriz de masa (4.22)

$$\mathcal{O}^T M \mathcal{O} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

m'_1 y m'_2 son eigenvalores de la matriz de masa

$$m'_{2,1} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right]. \quad (4.54)$$

Esto implica que

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}. \quad (4.55)$$

Se debe notar que m'_1 es negativa si $m_L m_R < m_D^2$. La función de la matriz ρ es cambiar el signo del primer eigenvalor de masa si $m'_1 < 0$ a través

$$U^T M U = \rho^T \mathcal{O}^T M \mathcal{O} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Por lo tanto, los dos valores reales y positivos de las masas de los neutrinos están dados por

$$m_k = \rho_k^2 m'_k, \quad (4.57)$$

con $\rho_2^2 = 1$ mientras $\rho_1^2 = 1$ si $m'_1 > 0$ y $\rho_1^2 = -1$ si $m'_1 < 0$.

Un caso muy interesante es cuando

$$m_D \ll m_R, \quad m_L = 0. \quad (4.58)$$

De la ecuación (4.54) se obtiene

$$m'_1 \simeq -\frac{m_D^2}{m_R}, \quad m'_2 \simeq m_R. \quad (4.59)$$

Si m'_1 es negativa, se tiene $\rho_1^2 = -1$ y

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2 \simeq m_R, \quad (4.60)$$

$$m_2 \simeq m_R. \quad (4.61)$$

Por consiguiente, ν_2 es tan pesado como m_R y ν_1 es muy ligero, porque su masa es suprimida con respecto a m_D por la pequeña relación m_D/m_R . A esto se le conoce como **mecanismo de sube y baja** (See-saw mechanism) [47, 48, 49, 50], es decir la masa pesada $m_2 \simeq m_R$ de ν_2 es responsable de la ligereza de ν_1 .

El ángulo de mezcla es muy pequeño

$$\tan 2\theta = 2 \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \quad (4.62)$$

lo cual implica que ν_1 está compuesto principalmente del neutrino activo ν_L y ν_2 está compuesto principalmente del neutrino estéril ν_R ,

$$\nu_{1L} \simeq -i\nu_L, \quad \nu_{2L} \simeq \nu_R^C. \quad (4.63)$$

El mecanismo de sube y baja es muy importante porque éste provee una muy importante explicación de la pequeñez de la masa de los neutrinos con respecto a la masa de otros fermiones del ME, es decir, leptones cargados y quarks. El suponer que $m_L = 0$ es natural, debido a que el término de masa de Majorana para el campo quiral izquierdo ν_L está prohibido por las simetrías y renormalizabilidad del ME. La masa de Dirac m_D , la cual puede ser generada a través del mecanismo de Higgs del ME, se espera que sea del orden de la masa de un leptón cargado de la misma generación o del orden de la masa del quark de la misma generación. En el caso del orden de magnitud de m_D no puede ser más grande que la escala electrodébil, la cual es del orden de 10^2 GeV. La razón es que el término de masa de Dirac está prohibido por el rompimiento espontáneo de la simetría del ME. Por lo tanto, m_D es proporcional a la escala del rompimiento de la simetría, este hecho es justificado diciendo que m_D está protegido por las simetrías del ME. Por otra parte, desde que el término de masa de Majorana es un singlete de las simetrías del ME, la masa de Majorana m_R del campo de neutrinos quiral derecho ν_R no es protegido por las simetrías del ME. Es cierto que el término de masa de Majorana m_R es generado por la nueva física mas allá del ME y el campo del neutrino quiral derecho ν_R pertenece a un multiplete no trivial de las simetrías de la teoría de altas energías. En este caso, la masa m_R es protegida por las simetrías de la teoría de altas energías y

su orden de magnitud corresponde a la escala del rompimiento de estas teorías, el cual puede ser a una gran escala de unificación del orden de $10^{14} - 10^{16}$ GeV [51, 52, 53].

Capítulo 5

Contribución de neutrinos masivos en decaimientos trileptónicos de los leptones mu y tau

En este capítulo se muestran las diferentes contribuciones que se tienen al decaimiento $\tau \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$ a nivel de un lazo. De los cálculos realizados se comprueba que, en efecto, los diagramas de caja no tienen una contribución relevante a este decaimiento. Se considera que los neutrinos tienen masa diferente de cero y que dos neutrinos tienen masas parecidas a una masa fija m_N tal que $m_2 \approx m_3 \approx m_N$ y el tercero tiene masa diferente a los anteriores m_1 . Además se obtienen los factores de forma del vértice $l_\alpha \gamma l_\beta$ y se describen algunas características importantes de éstos. Se aprovecha la estructura que tienen los factores de forma para hacer evidente el desacoplo de cada uno a altas energías.

Para este trabajo de tesis consideramos el conjunto de corrientes cargadas que fue mencionado en la expresión (1)

$$\mathcal{L}_{CC} = \sum_j \sum_\alpha [W_\rho^+ \bar{\nu}_j \gamma^\rho (v_{j\alpha} - a_{j\alpha} \gamma^5) l_\alpha + W_\rho^- \bar{l}_\alpha \gamma^\rho (v_{j\alpha}^* - a_{j\alpha}^* \gamma^5) \nu_j]. \quad (5.1)$$

Como se mencionó anteriormente, estos decaimientos no ocurren a nivel de árbol, por lo que se debe comprobar que no haya divergencias ultravioleta. Se tienen dos tipos de contribuciones a los diagramas: diagramas de caja y diagramas con vértice electromagnético (éstos últimos tienen la contribución más grande).

Reglas de Feynman

A continuación se muestran las reglas de Feynman, en la norma unitaria, para la teoría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [56] que fueron utilizadas para todos los decaimientos posibles:

- *Vértices*

En todas las expresiones, el momento de los bosones $W^\pm$, Z , H y A^μ se considera que están entrando al vértice.

Los diagramas en donde está el bosón Z y el fotón los podemos compactar en una misma expresión debido a que son similares como se muestra en la Figura 5.1.

$$= \xi^{(\gamma, Z)} [(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\lambda\mu}]$$

Figura 5.1: Reglas de Feynman para el fotón y el bosón Z .

Tomando $q_e = 1, q_\nu = 0$ se tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 \xi^\gamma &= -1, & \xi^Z &= -\frac{1}{\tan(\theta_w)}, & \eta^\gamma &= 1, & \eta^Z &= -\frac{1}{\sin(2\theta_w)}, \\
 g_V^{\gamma f} &\equiv t_f^\gamma, & g_V^{Zf} &\equiv t_f^Z - 2\sin^2(\theta_w)q_f, & g_A^{\gamma f} &= 0, & g_A^{Zf} &= t_f^Z. \\
 t_e^\gamma &= 1, & t_\nu^\gamma &= 0, & t_e^Z &= -\frac{1}{2}, & t_\nu^Z &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para el Higgs se tienen los vértices mostrados en la Figura 5.2,

donde $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \frac{2m_w}{2} = 246 \text{ GeV}$.

■ Propagadores

En la Figura (5.3) se muestra los propagadores del fermión, del bosón $W^\pm$ y del bosón de Higgs.

Los posibles diagramas que podemos encontrar para el decaimiento $\tau^- \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$ son:

• Diagramas de caja

En este caso tenemos únicamente dos diagramas, debido a que $l_\beta, l_\sigma, \bar{l}_\sigma$ deben ser partículas salientes como se puede apreciar en la Figura 5.4:

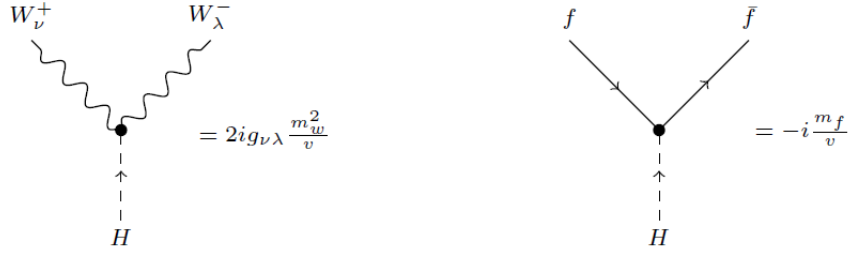


Figura 5.2: Reglas de Feynman para el bosón de Higgs.

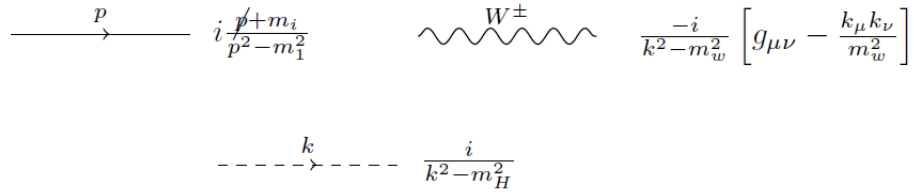


Figura 5.3: Propagadores.

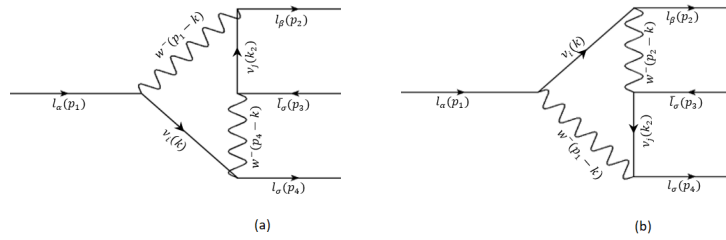


Figura 5.4: Diagramas de caja $l_{\alpha} \rightarrow l_{\beta} l_{\sigma} \bar{l}_{\sigma}$.

cuyas reglas son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{box}^{(a)} = & [\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma_\omega(v_{i\sigma}^* - a_{i\sigma}^*\gamma_5)\frac{(k + m_j)}{k^2 - m_j^2}(v_{j\alpha} + a_{j\alpha}\gamma_5)\gamma_\epsilon U_\alpha(p_1)] \\
& [\bar{U}_\beta(p_2)\gamma_\lambda(v_{j\beta}^* - a_{j\beta}^*\gamma_5)\frac{(k_2 + m_j)}{k_2^2 - m_j^2}(v_{j\sigma} + a_{j\sigma}\gamma_5)\gamma_\rho V_\sigma(p_3)] \\
& \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\epsilon\lambda} - \frac{(p_1 - k)_\epsilon(p_1 - k)_\lambda}{m_w^2} \right) \\
& \frac{1}{(p_4 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\omega} - \frac{(p_4 - k)_\rho(p_4 - k)_\omega}{m_w^2} \right), \tag{5.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{box}^{(b)} = & [\bar{U}_\beta(p_2)\gamma_\omega(v_{j\beta}^* - a_{j\beta}^*\gamma_5)\frac{(k + m_j)}{k^2 - m_j^2}(v_{j\alpha} + a_{j\alpha}\gamma_5)\gamma_\epsilon U_\alpha(p_1)] \\
& [\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma_\lambda(v_{j\sigma}^* - a_{j\sigma}^*\gamma_5)\frac{(k_2 + m_j)}{k_2^2 - m_j^2}(v_{j\sigma} + a_{j\sigma}\gamma_5)\gamma_\rho V_\sigma(p_3)] \\
& \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\epsilon\lambda} - \frac{(p_1 - k)_\epsilon(p_1 - k)_\lambda}{m_w^2} \right) \\
& \frac{1}{(p_2 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\omega} - \frac{(p_2 - k)_\rho(p_1 - k)_\omega}{m_w^2} \right). \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Notemos que los cuadrimomentos k y k_2 no son independientes, de hecho se satisfacen más de una relación entre estos, utilizaremos las siguientes expresiones para cada diagrama respectivamente

$$k_2 = k - p_3 - p_4, \quad k_2 = k - p_2 - p_3. \tag{5.5}$$

Recordemos que para calcular la amplitud de cada diagrama hay que integrar sobre el cuadrimomento k . En un principio se utilizó la parametrización de Feynman para poder realizar dicha integral, pero se encontró que las divergencias no se cancelaban fácilmente. Por lo tanto se utilizó en método de Passarino-Veltman [57] para calcular estas contribuciones y se encontró lo siguiente:

La expresión de la amplitud para cada diagrama está dada por la combinación lineal de productos de matrices de Dirac conocidos como *Standard Matrix Elements (SME)*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{box}^{(a)} = & a_1[\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^6 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\beta(p_2)\gamma^6 V_\sigma(p_3)] + a_2[\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^7 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\beta(p_2)\gamma^6 V_\sigma(p_3)] \\
& + a_3[\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^6 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\beta(p_2)\not{p}_1\gamma^7 V_\sigma(p_3)] + \dots \tag{5.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{box}^{(b)} = & b_1[\bar{U}_\beta(p_2)\gamma^6 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^6 V_\sigma(p_3)] + b_2[\bar{U}_\beta(p_2)\gamma^7 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^6 V_\sigma(p_3)] \\
& + b_3[\bar{U}_\beta(p_2)\not{p}_3\gamma^6 U_\alpha(p_1)][\bar{U}_\sigma(p_4)\gamma^6 V_\sigma(p_3)] + \dots \tag{5.7}
\end{aligned}$$

donde $\gamma^6 = \frac{1-\gamma^5}{2}$ y $\gamma^7 = \frac{1+\gamma^5}{2}$.

Una forma de comparar la contribución que tienen los diagramas de caja con aquellos que contienen el vértice electromagnético, mostrados en la Figura 5.5, fue calculando el orden de magnitud de los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots$ obtenidos de las ecuaciones (5.6) y (5.7) que corresponden a los diagramas de caja y compararlos con coeficientes de los *SME* de los otros diagramas. Se encontró que los diagramas de caja tienen una contribución a la amplitud de más de cinco órdenes de magnitud más pequeña con respecto a los diagramas que contienen al vértice electromagnético. Este hecho nos permite despreciar los diagramas de la Figura 5.4 debido a que su presencia se ve suprimida por el resto de los diagramas. Esta acción se ve reforzada debido a que más adelante se muestra que los diagramas que contienen al vértice electromagnético son finitos, por lo que no esperamos contribución alguna de los diagramas de caja para eliminar divergencias.

- **Diagrama con vértice electromagnético**

En este caso tenemos los diagramas mostrados en la Figura 5.5:

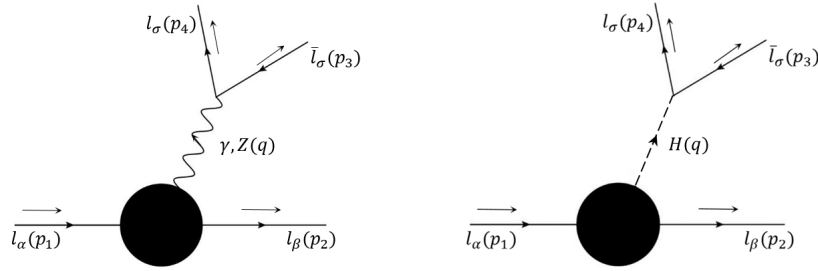


Figura 5.5: Diagramas del proceso $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$.

Pero notemos que los propagadores del fotón, del bosón Z y del bosón de Higgs tienen un denominador de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{fotón} & \text{bosón } Z & \text{bosón de Higgs} \\ \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q^2 - m_z^2} & \frac{1}{q^2 - m_H^2} \end{array},$$

q^2 es una cantidad muy pequeña debido al espacio fase del decaimiento, es decir, a los límites de integración en la expresión para la tasa de decaimiento: $4m_\sigma < q^2 < (m_\alpha - m_\beta)^2$. Ésto ocasiona que la contribución del fotón sea dominante sobre aquellos diagramas que tienen al bosón Z y al bosón de Higgs como propagadores, debido al efecto de sus respectivas masas. De ahí que estos diagramas tendrán una contribución muy pequeña a tal grado que no serán considerados. Reduciendo el número de diagramas solamente a los que tienen vértice electromagnético. Como se muestra en la Figura 5.6.

Para calcular la amplitud de estos diagramas primero nos fijaremos en el vértice $l_\alpha \gamma l_\beta$, con el fotón off-shell. Esto con la finalidad de analizar algunas propiedades electromagnéticas de este vértice.

- **Vértice $l_\alpha \gamma l_\beta$**

Los tres diagramas resultantes se muestran en la Figura 5.7, cuyas reglas de Feynman están dadas

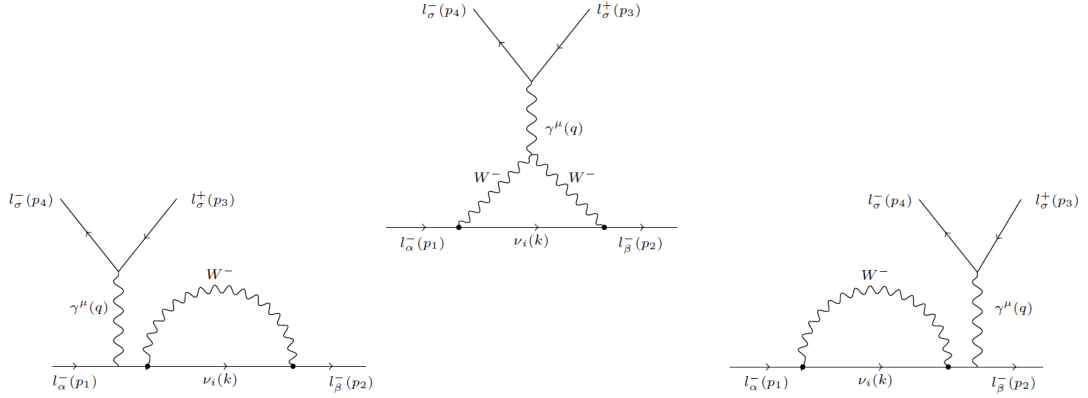


Figura 5.6: Diagramas con vértice electromagnético del proceso $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$.

por

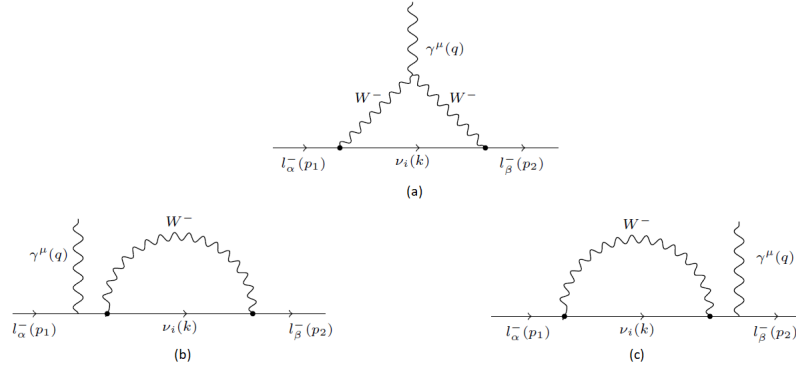


Figura 5.7: Decaimiento $l_\alpha \rightarrow \gamma l_\beta$.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu^{(a)} &= - \sum_i \frac{e}{(2\sqrt{2})^2} \bar{U}_\beta(p_2) \gamma_\omega (v_{j\beta}^* - a_{j\beta} \gamma_5) \frac{(\not{k} + m_j)}{k^2 - m_j^2} (v_{j\alpha} + a_{j\alpha} \gamma_5) \gamma_\sigma U_\alpha(p_1) \\
 &\quad \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\lambda} - \frac{(p_1 - k)_\rho (p_1 - k)_\lambda}{m_w^2} \right) \frac{1}{(p_2 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\omega} - \frac{(p_2 - k)_\rho (p_2 - k)_\omega}{m_w^2} \right) \\
 &\quad C_{\rho\mu\lambda}(k - p_2, p_2 - p_1, p_1 - k), \\
 \Gamma_\mu^{(b)} &= \sum_i \frac{e}{(2\sqrt{2})^2} \bar{U}_\beta(p_2) \gamma_\rho (v_{j\beta}^* - a_{j\beta} \gamma_5) \frac{(\not{k} + m_j)}{k^2 - m_j^2} (v_{j\alpha} + a_{j\alpha} \gamma_5) \gamma_\lambda \frac{\not{p}_2 + m_\alpha}{m_\beta^2 - m_\alpha^2} \gamma_\mu U_\alpha(p_1) \\
 &\quad \frac{1}{(p_2 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\lambda} - \frac{(p_2 - k)_\rho (p_2 - k)_\lambda}{m_w^2} \right), \\
 \Gamma_\mu^{(c)} &= \sum_i \frac{e}{(2\sqrt{2})^2} \bar{U}_\beta(p_2) \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m_\beta}{m_\alpha^2 - m_\beta^2} \gamma_\rho (v_{j\beta}^* - a_{j\beta} \gamma_5) \frac{(\not{k} + m_j)}{k^2 - m_j^2} (v_{j\alpha} + a_{j\alpha} \gamma_5) \gamma_\lambda U_\alpha(p_1) \\
 &\quad \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2} \left(g_{\rho\lambda} - \frac{(p_1 - k)_\rho (p_1 - k)_\lambda}{m_w^2} \right), \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

$C_{\rho\mu\lambda}(k - p_2, p_2 - p_1, p_1 - k) = g_{\rho\mu}(2p_2 - p_1 - k)_\lambda + g_{\rho\lambda}(2k - p_1 - p_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(2p_1 - p_2 - k)_\rho$ y $\sum_i$ representa la suma sobre los tres eigenestados de masa de los neutrinos.

La contribución total tiene la forma:

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} = \Gamma_{\mu}^{(a)} + \Gamma_{\mu}^{(b)} + \Gamma_{\mu}^{(c)}. \quad (5.9)$$

Antes de hablar de las propiedades electromagnéticas de este vértice es importante mencionar que al momento de realizar los cálculos en *FeynCalc* se tuvieron problemas con la amplitud al momento de verificar que ésta fuera finita e invariante de norma debido que se estaba trabajando en la norma unitaria y el fotón se encontraba off-shell. Para solucionar estos problemas, los diagramas se calcularon en la norma no lineal de Feynman-t' Hooft ($\xi = 1$), que es discutida en [54], y así se logró obtener finitud y unitariedad. El hecho de cambiar de norma no modifica los resultados debido a que la amplitud debe ser la misma en cualquier norma. El cálculo en esta norma se muestra en el Apéndice D. Si denotamos Γ_{μ}^{NL} como la contribución de todos los diagramas resultantes en la norma no lineal, ver ecuación (D.2), y lo comparamos con la expresión (5.9) cuando el fotón está on-shell, se cumple que: $\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} = \Gamma_{\mu}^{NL}$.

5.1. Propiedades electromagnéticas de los fermiones

La contribución de las propiedades electromagnéticas de los fermiones se pueden parametrizar de manera general a través de la siguiente expresión del vértice electromagnético [58]

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} = \sum_j iev_{j\beta}^* v_{j\alpha} \left[\left(\gamma_{\mu} - \frac{q_{\mu} \not{q}}{q^2} \right) \left(f_Q^j + f_A^j q^2 \gamma_5 \right) - i\sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \left(f_M^j + if_E^j \gamma_5 \right) \right], \quad (5.10)$$

$V_Q^j(q^2)$, $f_A^j(q^2)$, $f_M^j(q^2)$ y $f_E^j(q^2)$ son respectivamente, los factores de forma de carga (o vectorial), axial, dipolar magnético y dipolar eléctrico, e es la carga elemental, el superíndice $j = 1, 2, 3$ etiqueta a cada neutrino ν_j , q^2 es el cuadrimomento del fotón el cual $q^2 \neq 0$. Además los superíndices $\alpha\beta$ etiquetan a los fermiones externos de decaimiento $l_{\alpha} \rightarrow \gamma l_{\beta}$. $v_{j\beta}$ y $v_{j\alpha}$ son los elementos de matriz que provienen de la lagrangiana (5.1) donde se ha impuesto que $a_{j\alpha} = v_{j\alpha}$.

De acuerdo a los resultados obtenidos en *FeynCalc* la amplitud tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} &= \sum_j iev_{j\beta}^* v_{j\alpha} [d_{1\mu} \gamma_6 + d_{2\mu} \gamma_7 + d_3 \gamma_{\mu} \gamma_6 + d_4 \gamma_{\mu} \gamma_7] \\ &= \sum_j iev_{j\beta}^* v_{j\alpha} \left[\underbrace{\frac{1}{2}(d_{1\mu} + d_{2\mu}) \mathbb{1} + \frac{1}{2}(d_{1\mu} + d_{2\mu}) \gamma_5 + \frac{1}{2}(d_3 + d_4) \gamma_{\mu} + \frac{1}{2}(d_3 - d_4) \gamma_{\mu} \gamma_5}_{\equiv \kappa_{\mu}^j} \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

hemos puesto el superíndice κ_{μ}^j porque esto nos recuerda que aún nos falta hacer la suma sobre los diferentes eigenestados de masa de los neutrinos. Para analizar los términos que contienen sumas y diferencias de $d_{1\mu}$ y $d_{2\mu}$ es necesario utilizar los cambios de variable

$$s_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}, \quad (5.12)$$

$$q_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}, \quad (5.13)$$

y utilizar las identidades de Gordon desarrolladas en el Apéndice E

$$s_\mu = i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + (m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu, \quad (5.14)$$

$$s_\mu\gamma_5 = i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 + (m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu\gamma_5. \quad (5.15)$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d_{1\mu} + d_{2\mu}) &= a_1s_\mu + a_2q_\mu \\ &= a_1(i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + (m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu) + a_2q_\mu \\ &= ia_1\sigma_{\mu\nu}q^\nu + a_1(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu + a_2q_\mu. \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d_{1\mu} - d_{2\mu})\gamma_5 &= a_3s_\mu\gamma_5 + a_4q_\mu\gamma_5 \\ &= a_3(i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + (m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu)\gamma_5 + a_4q_\mu\gamma_5 \\ &= ia_3\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 + a_3(m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu\gamma_5 + a_4q_\mu\gamma_5. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sustituyendo (5.16) y (5.17) en la expresión (5.11)

$$\begin{aligned} \kappa_\mu^j &= a_2q_\mu + a_4q_\mu\gamma_5 + \left[a_1(m_\alpha + m_\beta) + \frac{1}{2}(d_3 + d_4) \right] \gamma_\mu + \left[a_3(m_\beta - m_\alpha) + \frac{1}{2}(d_3 + d_4) \right] \gamma_\mu\gamma_5 \\ &\quad + ia_1\sigma_{\mu\nu}q^\nu + ia_3\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5. \end{aligned} \quad (5.18)$$

De forma genérica k_μ está dada por

$$\kappa_\mu = f_1^j q_\mu + f_2^j q_\mu \gamma_5 + f_3^j \gamma_\mu + f_4^j \gamma_\mu \gamma_5 + f_5^j \sigma_{\mu\nu} q^\nu + f_6^j \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5, \quad (5.19)$$

por lo que se debe cumplir lo siguiente

$$f_1^j = a_2, \quad (5.20)$$

$$f_2^j = a_4, \quad (5.21)$$

$$f_3^j = a_1(m_\alpha + m_\beta) + \frac{1}{2}(d_3 + d_4), \quad (5.22)$$

$$f_4^j = a_3(m_\beta - m_\alpha) + \frac{1}{2}(d_3 - d_4), \quad (5.23)$$

$$f_5^j = ia_1, \quad (5.24)$$

$$f_6^j = ia_3. \quad (5.25)$$

Uno puede encontrar que se satisfacen las constricciones que implican la conservación de la carga, Apéndice F, usando la unitariedad de la matriz $v_{j\alpha}$:

$$\sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} [f_1^j q^2 + f_3^j (m_\alpha - m_\beta)] = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} 2(m_\alpha - m_\beta) = 2(m_\alpha - m_\beta) \delta_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.26)$$

$$\sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} [f_2^j q^2 - f_4^j (m_\alpha + m_\beta)] = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} 2(m_\alpha + m_\beta) = 2(m_\alpha + m_\beta) \delta_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.27)$$

Las relaciones anteriores implican que la amplitud es invariante de norma. Ahora deseamos saber cuáles son los factores de forma f_Q^j , f_A^j , f_M^j y f_E^j , para esto es necesario tomar en cuenta la siguiente consideración:

- La amplitud del proceso $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$, denotada por $\mathcal{M}$, está dada por

$$\mathcal{M} = \bar{U}_\beta(p_2) \Gamma_\mu^{\alpha\beta} U_\alpha(p_1) \left[\frac{-i}{q^2} \left(g^{\mu\nu} - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \right] \bar{U}_\sigma(p_4) (-ie\gamma_\nu) V_\sigma(p_3), \quad (5.28)$$

$q = p_3 + p_4$. Debido a que $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ es invariante de norma, el propagador del fotón se puede elegir en cualquier norma en este caso escogemos la norma R_ξ de la cual se hablará más adelante. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} q^\nu \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma_\nu V_\sigma(p_3) &= \bar{U}_\sigma(p_4) (p_3^\nu + p_4^\nu) \gamma_\nu V_\sigma(p_3) \\ &= \bar{U}_\sigma(p_4) (\not{p}_3 + \not{p}_4) V_\sigma(p_3) \\ &= \bar{U}_\sigma(p_4) (-m_\sigma + m_\sigma) V_\sigma(p_3) = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

por lo que el término que contiene al factor $\frac{q_\mu q^\mu}{q^2}$ en (5.10) queda eliminado.

Así

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\alpha\beta} &= \sum_j iev_{j\beta}^* v_{j\alpha} \left[\gamma_\mu (f_Q^j + f_A^j q^2 \gamma_5) - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu (f_M^j + if_E^j \gamma_5) \right] \\ &= \sum_j iev_{j\beta}^* v_{j\alpha} \left[f_Q^j \gamma_\mu + f_A^j q^2 \gamma_\mu \gamma_5 - if_M^j \sigma_{\mu\nu} q^\nu + if_E^j \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Si comparamos los términos que están dentro de los corchetes de la expresión (5.30) con la forma en que está dada κ_μ en (5.19) podemos obtener los factores de forma

$$f_Q^j = f_3^j, \quad (5.31)$$

$$f_A^j = \frac{1}{q^2} f_4^j, \quad (5.32)$$

$$f_M^j = if_5^j, \quad (5.33)$$

$$f_E^j = f_6^j. \quad (5.34)$$

$$(5.35)$$

Definiendo

$$F_Q = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} f_Q^j, \quad (5.36)$$

$$F_A = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} f_A^j, \quad (5.37)$$

$$F_M = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} f_M^j, \quad (5.38)$$

$$F_E = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} f_E^j. \quad (5.39)$$

Con lo cual $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ luce de una forma más sencilla

$$\Gamma_\mu^{\alpha\beta} = ie \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right]. \quad (5.40)$$

Los coeficientes, F_Q, F_A, F_M y F_E dependen de las funciones de Passarino-Veltman B_0 y C_0 . Las funciones C_0 son finitas pero las B_0 contienen divergencias [55],

$$B_0(p_1, m_0, m_1) = \Delta_\alpha + h(p_1, m_0, m_1), \quad (5.41)$$

$\Delta_\alpha = \frac{1}{\alpha} = \gamma_\epsilon + \log(4\pi)$ es la parte divergente, siendo γ_ϵ la constante de Euler-Mascheroni, y $h(p_1, m_0, m_1)$ es una función finita. Notemos que la parte divergente es la misma para todas las funciones B_0 por lo que nos conviene fijarnos en diferencias de éstas para que se cancele la divergencia. Es decir, sea F_Ω , con $\Omega = Q, A, M, E$, cualquier factor de forma, sumando y restando términos de manera adecuada, se tiene

$$\begin{aligned} F_\Omega = & b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + b_4 B_4 = b_1 (B_1 - B_2) + (b_1 + b_2) (B_2 - B_3) + (b_1 + b_2 + b_3) (B_3 - B_4) \\ & + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) B_4. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Debido a que $B_1 - B_2, B_2 - B_3$ y $B_3 - B_4$ son finitos pero B_4 no lo es entonces se debe cumplir que $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ para que desaparezca la divergencia. Es importante mencionar que la suma de las b_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, es idénticamente cero y no requiere usar la unitariedad de la matriz $v_{j\alpha}$. Esto nos permite corroborar que todos los factores de forma son finitos.

Ya que se calcularon los diagramas de la Figura 5.7 ahora es necesario agregar la línea fermiónica que hace falta, la cual contiene a $l_\sigma \bar{l}_\sigma$, obteniéndose así (5.28). Pero en cálculos anteriores se encontró que la amplitud $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ es invariante de norma por lo que satisface la identidad de Ward $q_\mu \Gamma_\mu^{\alpha\beta} = 0$, entonces al hacer la contracción en (5.28) se tiene que aquél término que contiene q^μ desaparece

$$\Gamma_\mu^{\alpha\beta} \left(g^{\mu\nu} - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) = \Gamma_\mu^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - \underbrace{\xi \Gamma_\mu^{\alpha\beta} q^\mu}_{=0} \frac{q^\nu}{q^2} = \Gamma_\mu^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}, \quad (5.43)$$

podemos pensar que el propagador del fotón únicamente es proporcional a $\frac{-i}{q^2} g^{\mu\nu}$. Entonces la expresión para $\mathcal{M}$ se simplifica aún mas

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{-e}{q^2} \bar{U}_\beta(p_2) \Gamma_\nu^{\alpha\beta} U_\alpha(p_1) \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\nu V_\sigma(p_3) \\ &= \frac{-ie^2}{q^2} \bar{U}_\beta(p_2) \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + iF_E \gamma_5) \right] U_\alpha(p_1) \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\mu V_\sigma(p_3),\end{aligned}\quad (5.44)$$

donde hemos sustituido $\Gamma_\mu^{\alpha\beta}$ por la expresión obtenida en (5.40).

5.2. Propiedades de los factores de forma

Supondremos que alguna escala de alta energía Λ está asociada con la generación de la masa de los neutrinos m_j y la de los bosones m_w por medio del rompimiento espontáneo de la simetría. Entonces m_j y m_w crecen con la misma escala Λ . Dados estos argumentos suena razonable suponer que para valores grandes de Λ se cumple la relación

$$m_w \approx \kappa_j m_j \quad \Rightarrow \quad m_j = \frac{1}{\kappa} m_w, \quad (5.45)$$

siendo κ_j independiente de Λ .

Respecto a la masa de los neutrinos pesados, pensemos en un escenario en el cual el neutrino N_1 tiene una masa m_1 que es diferente de las masas m_2 y m_3 de los neutrinos N_2 y N_3 respectivamente, pero que se cumple $m_2 \approx m_3$. Por lo tanto, consideremos una masa m_N tal que $m_N \approx m_2$ y $m_N \approx m_3$.

También nos conviene realizar los siguientes cambios de variable

$$x_\alpha = \frac{m_\alpha^2}{m_w^2}, \quad x_\beta = \frac{m_\beta^2}{m_w^2}, \quad x_\sigma = \frac{m_\sigma^2}{m_w^2}, \quad x = \frac{q^2}{m_w^2}, \quad \frac{1}{\kappa_j^2} = \frac{m_j^2}{m_w^2}. \quad (5.46)$$

Tomando en cuenta los puntos anteriores, los factores de forma ahora son funciones con dependencia $F_\Omega(x_\alpha, x_\beta, x_\sigma, m_w, \kappa_j)$.

Recordemos que F_Ω con $\Omega = Q, A, M, E$, también depende de las funciones escalares de Passarino-Veltman B_0 y C_0

$$F_\Omega(x_\alpha, x_\beta, x_\sigma, m_w, \kappa_j) = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} [b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + b_4 B_4 + c_1 C_1 + \eta], \quad (5.47)$$

b_1, b_2, b_3, b_4, c_1 y η son funciones escalares y B_1, B_2, B_3, B_4, C_1 son las funciones de Passarino-Veltman:

$$B_1 = B_0(0, m_j^2, m_w^2), \quad (5.48)$$

$$B_2 = B_0(q^2, m_w^2, m_w^2), \quad (5.49)$$

$$B_3 = B_0(m_\alpha^2, m_j^2, m_w^2), \quad (5.50)$$

$$B_4 = B_0(m_\beta^2, m_j^2, m_w^2), \quad (5.51)$$

$$C_1 = C_0(m_\alpha^2, m_\beta^2, q^2, m_w^2, m_j^2, m_w^2). \quad (5.52)$$

Haciendo los cambios de variable (5.46) en las funciones escalares B_0 y C_0 y desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto $x = 0$ y $x_i = 0$ siendo $i = \alpha, \beta, \sigma$, a primer orden (ver Apéndice G)

$$B_1 = 1 - \frac{2 \log(\kappa_j)}{\kappa_j^2 - 1}, \quad (5.53)$$

$$B_2 = \frac{x}{6}, \quad (5.54)$$

$$B_3 = 1 + \frac{\kappa_j^2(\kappa_j^4 - 1)x_\alpha - 4 \log(\kappa_j)(\kappa_j^4 x_\alpha + (\kappa_j^2 - 1)^2)}{2(\kappa_j^2 - 1)^3}, \quad (5.55)$$

$$B_4 = 1 + \frac{\kappa_j^2(\kappa_j^4 - 1)x_\beta - 4 \log(\kappa_j)(\kappa_j^4 x_\beta + (\kappa_j^2 - 1)^2)}{2(\kappa_j^2 - 1)^3}, \quad (5.56)$$

$$C_1 = -\frac{1}{12(\kappa_j^2 - 1)^4 m_w^2} \left[\kappa_j^2((\kappa_j^2 - 1)(-2(x - 6) + \kappa_j^2(-24 - 5x + 15x_\alpha + 15x_\beta) + \kappa_j^4(x + 3(4 + x_\alpha + x_\beta))) \right. \\ \left. - 12(2 + 2\kappa_j^4(1 + x_\alpha + x_\beta) + \kappa_j^2(-4 - x + x_\alpha + x_\beta)) \log(\kappa_j) \right]. \quad (5.57)$$

Los coeficientes que acompañan a cada factor de forma b_k , $k = 1, \dots, 4$ y c_1 y η no se desarrollaron en serie de Taylor debido a que estos son resultados generales que se valen para cualquier espectro de masas de m_j y m_w , en particular para el caso que estamos trabajando, caso contrario de las funciones B_0 y C_0 en las cuales se tomó en cuenta restricciones sobre la masa de los leptones para poder desarrollarlas en serie de Taylor.

Volviendo a las expresiones (5.36), (5.37), (5.38) y (5.36) vemos que cada factor de forma está expresado en términos de una sumatoria, que al desarrollarla se tiene que $F_\Omega = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} f_\Omega^1 + v_{2\beta}^* v_{2\alpha} f_\Omega^2 + v_{3\beta}^* v_{3\alpha} f_\Omega^3$, pero utilizando la condición de unitariedad

$$\sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} = 0, \quad \text{para } \alpha \neq \beta \\ \Rightarrow v_{1\beta}^* v_{1\alpha} + v_{2\beta}^* v_{2\alpha} + v_{3\beta}^* v_{3\alpha} = 0, \\ \Rightarrow v_{2\beta}^* v_{2\alpha} + v_{3\beta}^* v_{3\alpha} = -v_{1\beta}^* v_{1\alpha}, \quad (5.58)$$

considerando $m_2 \approx m_3$, lo que se mencionó anteriormente, entonces $f_\Omega^2 \approx f_\Omega^3$ que nos lleva a que $f_\Omega^2 \approx f_\Omega^N$ y $f_\Omega^3 \approx f_\Omega^N$, así:

$$F_\Omega \approx v_{1\beta}^* v_{1\alpha} f_\Omega^1 + \underbrace{(v_{2\beta}^* v_{2\alpha} + v_{3\beta}^* v_{3\alpha})}_{=-v_{1\beta}^* v_{1\alpha}} f_\Omega^N = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} (f_\Omega^1 - f_\Omega^N) = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} \tilde{F}_\Omega, \quad (5.59)$$

$$\tilde{F}_\Omega = f_\Omega^1 - f_\Omega^N.$$

Debido a que cada F_Ω está en términos de f_Ω^j como se muestra en las expresiones (5.36)-(5.39) y también se pueden expresar en términos de las funciones de Passarino-Veltman como es señalado en (5.47), uniendo estos resultados tenemos lo siguiente:

$$F_\Omega = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} \left[\sum_{k=1}^4 (b_k^1 B_k^1 - b_k^N B_k^N) + (c_1^1 C_1^1 - c_1^N C_1^N) + (\eta^1 - \eta^N) \right], \quad (5.60)$$

cada superíndice nos dice la dependencia de cada función respecto de la masa de los neutrinos, $1 \rightarrow \kappa_1$ y $N \rightarrow \kappa_N$. La estructura, en forma de diferencias, que se logró obtener para F_Ω , aparte de que es más sencilla, nos permite cancelar de manera inmediata aquellas contribuciones que son independientes de la masa de los neutrinos, ya que cada producto $b_1^1 B_1^1$, $b_1^N B_1^N$, $b_2^1 B_2^1$, $b_2^N B_2^N$, $b_3^1 B_3^1$, $b_3^N B_3^N$, $b_4^1 B_4^1$, $b_4^N B_4^N$, $c_1^1 C_1^1$ y $c_1^N C_1^N$ además η^1, η^N están formados de una parte que depende explícitamente de κ_1 o κ_N , dependiendo el caso, y una parte que no depende de ésta. Por ejemplo, para cualquier $k = 1, 2, 3, 4$ fija

$$b_k^1 B_k^1 - b_k^N B_k^N = [h(\kappa_1) + \Theta] - [h(\kappa_N) + \Theta] = h(\kappa_1) - h(\kappa_N).$$

Θ es una función escalar que no depende en absoluto de la masa de los neutrinos, por lo que tiene el mismo valor para aquellos términos que se están restando y de esta forma se cancela en los cálculos. Es así que F_Ω va a depender de κ_j en todos su términos.

Al analizar detalladamente cada diferencia de la expresión (5.60), obtenemos que cualquier contribución F_Ω se puede escribir como una combinación lineal de potencias negativas de m_w

$$F_\Omega = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} \frac{1}{m_w^2} \left[\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 m_w^{-2} + \tilde{F}_3 m_w^{-4} \right]. \quad (5.61)$$

$\tilde{F}_k$, $k = 1, 2, 3$ son funciones que únicamente dependen de la masa de los leptones externos, q^2 y κ_j . Este resultado es de gran importancia porque de esta forma es más claro que las contribuciones a los factores de forma se desacoplan, ya que $F_\Omega \rightarrow 0$ cuando $m_w \rightarrow \infty$. Es necesario recordar que los factores κ_j son números fijos que no dependen de la escala de energía.

Capítulo 6

Análisis de resultados

En este apartado se resume el tratamiento que se le dio al estudio del decaimiento a tres cuerpos a nivel de un lazo $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$. Se calcula la tasa de decaimiento (Decay-rate) y de ahí se obtiene la expresión para el Branching Ratio (BR). Además se verifica que los resultados mencionados anteriormente también se desacoplan a altas energías.

6.1. Amplitud al cuadrado

Lo que sigue es cuadrar la amplitud, para esto es necesario sumar sobre los estados de spin de las partículas finales y promediar sobre el estado de spin de la partícula inicial. Por lo que la *Amplitud cuadrática media* $|\bar{\mathcal{M}}|^2$ está dada como

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_1=\pm} \sum_{s_2=\pm} \sum_{s_3=\pm} \sum_{s_4=\pm} \mathcal{M} \mathcal{M}^*. \quad (6.1)$$

Calculando el complejo conjugado de $\mathcal{M}$ (5.44)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \frac{ie^2}{q^2} (\bar{U}_\beta(p_2) [\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + iF_E \gamma_5)] U_\alpha(p_1))^* (\bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\mu V_\sigma(p_3))^* \\ &= \frac{ie^2}{q^2} U_\alpha^\dagger(p_1) [\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + iF_E \gamma_5)]^\dagger \bar{U}_\beta^\dagger(p_2) V_\sigma^\dagger(p_3) \gamma^{\mu\dagger} \bar{U}_\sigma^\dagger(p_4) \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) \gamma^0 \left[F_Q^* \gamma_\mu^\dagger + F_A^* q^2 \gamma_5^\dagger \gamma_\mu^\dagger + i\sigma_{\mu\nu}^\dagger q^\nu F_M^* + F_E^* \gamma_5^\dagger \sigma_{\mu\nu}^\dagger q^\nu \right] \gamma^{0\dagger} U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} U_\sigma(p_4) \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) [F_Q^* \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 + F_A^* q^2 \gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 + iF_M^* q^\nu \gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 + F_E^* q^\nu \gamma^0 \gamma_5^\dagger \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 U_\sigma(p_4), \end{aligned} \quad (6.2)$$

de los resultados mostrados en (A.2), (A.4) y (C.6)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^* &= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) \left[F_Q^* \gamma_\mu - F_A^* q^2 \gamma_5^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 + i F_M^* q^\nu \sigma_{\mu\nu} - F_E^* q^\nu \gamma_5^\dagger \gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 \right] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^\mu U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) \left[F_Q^* \gamma_\mu - F_A^* q^2 \gamma_5 \gamma_\mu + i F_M^* q^\nu \sigma_{\mu\nu} - F_E^* q^\nu \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \right] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^\mu U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) \left[F_Q^* \gamma_\mu + F_A^* q^2 \gamma_\mu \gamma_5 + i F_M^* q^\nu \sigma_{\mu\nu} - F_E^* q^\nu \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \right] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^\mu U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{ie^2}{q^2} \bar{U}_\alpha(p_1) \left[\gamma_\mu (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) + i q^\nu \sigma_{\mu\nu} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^\mu U_\sigma(p_4). \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Utilizando

$$\sum_s U(k, s) \bar{U}(k, s) = \not{k} + m, \tag{6.4}$$

$$\sum_s V(k, s) \bar{V}(k, s) = \not{k} - m, \tag{6.5}$$

calculemos la amplitud cuadrática media

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \left(\frac{-ie^2}{q^2} \right) \left(\frac{ie^2}{q^2} \right) \bar{U}_\beta(p_2) \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] U_\alpha(p_1) \\
&\quad \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\mu V_\sigma(p_3) \bar{U}_\alpha(p_1) \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] U_\beta(p_2) \bar{V}_\sigma(p_3) \gamma^\lambda U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 \sum_{s_2} \sum_{s_4} \bar{U}_\beta(p_2) \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] \left(\sum_{s_1} U_\alpha(p_1) \bar{U}_\alpha(p_1) \right) \\
&\quad \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] U_\beta(p_2) \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\mu \left(\sum_{s_3} V_\sigma(p_3) \bar{V}_\sigma(p_3) \right) \gamma^\lambda U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \sum_{s_2} \sum_{s_4} \bar{U}_\beta(p_2) \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] (\not{p}_1 + m_\alpha) \\
&\quad \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] U_\beta(p_2) \bar{U}_\sigma(p_4) \gamma^\mu (\not{p}_3 - m_\sigma) \gamma^\lambda U_\sigma(p_4) \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \sum_{s_2} (\bar{U}_\beta(p_2))_a \left(\left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] (\not{p}_1 + m_\alpha) \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] \right)_{ab} (U_\beta(p_2))_b \sum_{s_4} (\bar{U}_\sigma(p_4))_c \left(\gamma^\mu (\not{p}_3 - m_\sigma) \gamma^\lambda \right)_{cd} (U_\sigma(p_4))_d \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \left(\left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] (\not{p}_1 + m_\alpha) \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] \right)_{ab} \left(\sum_{s_2} U_\beta(p_2) \bar{U}_\beta(p_2) \right)_{ba} \left(\gamma^\mu (\not{p}_3 - m_\sigma) \gamma^\lambda \right)_{cd} \left(\sum_{s_4} U_\sigma(p_4) \bar{U}_\sigma(p_4) \right)_{dc} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \left(\left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] (\not{p}_1 + m_\alpha) \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] \right)_{ab} (\not{p}_2 + m_\beta)_{ba} \left(\gamma^\mu (\not{p}_3 - m_\sigma) \gamma^\lambda \right)_{cd} (\not{p}_4 + m_\sigma)_{dc} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \text{tr} \left\{ \left[\gamma_\mu (F_Q + F_A q^2 \gamma_5) - i \sigma_{\mu\nu} q^\nu (F_M + i F_E \gamma_5) \right] (\not{p}_1 + m_\alpha) \left[\gamma_\lambda (F_Q^* + F_A^* q^2 \gamma_5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i q^\rho \sigma_{\lambda\rho} (F_M^* + i F_E^* \gamma_5) \right] (\not{p}_2 + m_\beta) \right\} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 - m_\sigma) \gamma^\lambda (\not{p}_4 + m_\sigma) \right\}. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Al realizar el producto de dichas trazas se obtendrá una función que depende de las masas al cuadrado de todos los leptones y de los diferentes productos punto de los cuadrimentos

$$p_1 \cdot p_2, \quad p_1 \cdot p_3, \quad p_1 \cdot p_4, \quad p_2 \cdot p_3, \quad p_2 \cdot p_4, \quad p_3 \cdot p_4.$$

Pero todos estos productos no son independientes entre sí, para reducir el número de términos es necesario tomar en cuenta las condiciones de cinemática

$$p_1^2 = m_\alpha^2, \quad p_2^2 = m_\beta^2, \quad p_3^2 = m_\sigma^2, \quad p_4^2 = m_\sigma^2, \quad (6.7)$$

$$p_1 = p_2 + p_3 + p_4, \quad (6.8)$$

$$q = p_1 - p_2, \quad q = p_3 + p_4. \quad (6.9)$$

Podemos reescribir algunos productos punto, por ejemplo

- De la conservación del cuadrimomento total (6.8) del decaimiento $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$ podemos despejar $p_4^2 = m_\sigma^2$ y sustituir en los productos $p_1 \cdot p_4$, $p_2 \cdot p_4$ y $p_3 \cdot p_4$

$$p_1 \cdot p_4 = p_1 \cdot (p_1 - p_2 - p_3) = m_\alpha^2 - p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3, \quad (6.10)$$

$$p_2 \cdot p_4 = p_2 \cdot (p_1 - p_2 - p_3) = p_1 \cdot p_2 - m_\beta^2 - p_2 \cdot p_3, \quad (6.11)$$

$$p_3 \cdot p_4 = p_3 \cdot (p_1 - p_2 - p_3) = p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3 - m_\sigma^2. \quad (6.12)$$

- Elevando al cuadrado cada igualdad de (6.9) obtenemos

$$\begin{aligned} q^2 &= m_\alpha^2 - 2p_1 \cdot p_2 + m_\beta^2, \\ \Rightarrow p_1 \cdot p_2 &= \frac{m_\alpha + m_\beta - q^2}{2}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} q^2 &= m_\sigma^2 + 2p_3 \cdot p_4 + m_\sigma^2 = 2m_\sigma^2 + (p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3 - m_\sigma^2) = 2p_1 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_3, \\ \Rightarrow p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_3 + \frac{q^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

De los desarrollos anteriores podemos observar que los productos punto (6.10), (6.11) y (6.12) quedan escritos en términos de solo dos productos escalares $q^2, p_2 \cdot p_3$.

Reescribiendo de nuevo esos resultados ahora en términos de los dos productos punto

$$p_1 \cdot p_4 = m_\alpha^2 - \frac{m_\alpha + m_\beta - q^2}{2} - \left(p_2 \cdot p_3 + \frac{q^2}{2} \right) = \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2} - p_2 \cdot p_3, \quad (6.15)$$

$$p_2 \cdot p_4 = \frac{m_\alpha + m_\beta - q^2}{2} - m_\beta^2 - p_2 \cdot p_3 = \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2 - q^2}{2} - p_2 \cdot p_3, \quad (6.16)$$

$$p_3 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 + \frac{q^2}{2} - p_2 \cdot p_3 - m_\sigma^2 = \frac{q^2}{2} - m_\sigma^2. \quad (6.17)$$

Resumiendo todos los resultados anteriores se tiene:

Condiciones de cinemática

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p_2 &= \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2 - q^2}{2}, \\
 p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_3 + \frac{q^2}{2}, \\
 p_1 \cdot p_4 &= \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2} - p_2 \cdot p_3, \\
 p_2 \cdot p_4 &= \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2 - q^2}{2} - p_2 \cdot p_3, \\
 p_3 \cdot p_4 &= \frac{q^2}{2} - m_\sigma^2, \\
 p_1^2 &= m_\alpha^2, \quad p_2^2 = m_\beta^2, \quad p_3^2 = m_\sigma^2, \quad p_4^2 = m_\sigma^2.
 \end{aligned}$$

Cuando calculamos las trazas mostradas en (6.6) y usamos las condiciones de cinemática que se mencionan arriba obtenemos una estructura general para la amplitud cuadrática media

$$\begin{aligned}
 |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \left(c_1 |F_Q|^2 + c_2 |F_A|^2 + c_3 |F_M|^2 + c_4 |F_E|^2 + c_5 F_Q F_A^* + c_6 F_Q^* F_A \right. \\
 &\quad + c_7 F_Q F_M^* + c_8 F_Q^* F_M + c_9 F_Q F_E^* + c_{10} F_Q^* F_E + c_{11} F_A F_M^* + c_{12} F_A^* F_M \\
 &\quad \left. + c_{13} F_A F_E^* + c_{14} F_A^* F_E + c_{15} F_M F_E^* + c_{16} F_M^* F_E \right), \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

c_i con $i = 1, \dots, 16$ son funciones escalares las cuales dependen de las masas de todos los leptones, de $p_2 \cdot p_3$ y q^2 . Pero al analizar cada coeficiente por separado se observan las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}
 c_5 &= c_6 = c_9 = c_{10} = c_{11} = c_{12} = c_{15} = c_{16} = 0, \\
 c_7 &= c_8 \quad y \quad c_{13} = -c_{14}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

La expresión (6.18) queda en términos de solo seis constantes que llamaremos g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 y g_6

$$\begin{aligned}
 |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \left[g_1 |F_Q|^2 + g_2 |F_A|^2 + g_3 |F_M|^2 + g_4 |F_E|^2 + \frac{1}{2} g_5 (F_Q F_M^* + F_Q^* F_M) - \frac{i}{2} g_6 (F_A F_E^* - F_A^* F_E) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^4}{(q^2)^2} \left[g_1 |F_Q|^2 + g_2 |F_A|^2 + g_3 |F_M|^2 + g_4 |F_E|^2 + g_5 \text{Re} \{F_Q F_M^*\} + g_6 \text{Im} \{F_A F_E^*\} \right], \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

donde

$$g_1 = 8(q^2(m_\alpha^2 - 2m_\alpha m_\beta - m_\beta^2 - 2m_\sigma^2) + 4p_2 \cdot p_3(m_\alpha^2 - m_\beta^2 - 2p_2 \cdot p_3 - q^2) + 2m_\sigma^2(m_\alpha - m_\beta)^2 - (q^2)^2),$$

$$g_2 = 8(q^2)^2(q^2(m_\alpha^2 + 2m_\alpha m_\beta - m_\beta^2 - 2m_\sigma^2) + 4p_2 \cdot p_3(m_\alpha^2 - m_\beta^2 - 2p_2 \cdot p_3 - q^2) + 2m_\sigma^2(m_\alpha + m_\beta)^2 - (q^2)^2),$$

$$g_3 = 8(2m_\sigma^2(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 + 4q^2 p_2 \cdot p_3(-m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_2 \cdot p_3 + q^2) + (q^2)^2(-m_\alpha^2 - 2m_\alpha m_\beta + m_\beta^2) + q^2(m_\alpha + m_\beta)^2((m_\alpha - m_\beta)^2 - 2m_\sigma^2)),$$

$$g_4 = 8(2m_\sigma^2(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 + 4q^2 p_2 \cdot p_3(-m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_2 \cdot p_3 + q^2) + (q^2)^2(-m_\alpha^2 + 2m_\alpha m_\beta + m_\beta^2) + q^2(m_\alpha - m_\beta)^2((m_\alpha + m_\beta)^2 - 2m_\sigma^2)),$$

$$g_5 = 16(m_\alpha + m_\beta)(2m_\sigma^2 + q^2)((m_\alpha - m_\beta)^2 - q^2),$$

$$g_6 = -16q^2(m_\alpha - m_\beta)(2m_\sigma^2 + q^2)((m_\alpha + m_\beta)^2 - q^2), \quad (6.21)$$

Notemos que $|\bar{\mathcal{M}}|^2$ es una cantidad real, debido a que todos los coeficientes g_i con $i = 1, \dots, 6$ son reales.

6.2. Tasa de decaimiento

Considerando el proceso de decaimiento $1 \rightarrow n$ la diferencial de la tasa de decaimiento Γ en el marco en reposo de la partícula inicial está dado por

$$d\Gamma = d\frac{1}{\tau} = (2\pi)^4 \left(\frac{\delta^4(\sum_k p_{f_k} - p_1)}{2m_1} \right) \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_{f_k}}{(2\pi)^3 2E_{f_k}} |\bar{\mathcal{M}}|^2, \quad (6.22)$$

τ es el tiempo de vida de la partícula inicial, p_1, p_f son los momentos inicial y final respectivamente, y $E_a = \sqrt{\vec{p}_a^2 + m_a^2}$ es la energía relativista. La tasa total de decaimiento se obtiene integrando sobre el espacio fase de la partículas finales,

$$\Gamma = \prod_l S_l \int d\Gamma, \quad (6.23)$$

$S_l \equiv \frac{1}{l!}$ es un factor estático para l partículas idénticas.

De acuerdo al decaimiento que se está estudiando, $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$, se tiene un proceso $1 \rightarrow 3$ donde $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ son los momentos de los leptones $l_\alpha, l_\beta, l_\sigma, \bar{l}_\sigma$ respectivamente.

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_2 + p_3 + p_4 - p_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} |\bar{\mathcal{M}}|^2. \quad (6.24)$$

Basándonos en el apartado anterior notemos que $|\bar{\mathcal{M}}|^2 = |\bar{\mathcal{M}}|^2(m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, m_w, \kappa_j, q^2, p_2 \cdot p_3)$, es decir, hay dependencia en los momentos de las partículas que participan en el decaimiento, por lo que este término no puede salir de la integral, entonces

$$\Gamma = \int (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_2 + p_3 + p_4 - p_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} |\bar{\mathcal{M}}|^2. \quad (6.25)$$

Realizando los cambios de variable $y = \frac{(p_2 + p_3)^2}{m_w^2}$ y $x = \frac{q^2}{m_w^2}$ y haciendo ciertas manipulaciones en la expresión de Γ podemos llegar al siguiente resultado

$$\Gamma = \frac{2m_w}{(8\pi\sqrt{x_\alpha})^3} \int_{4x_\sigma}^{(\sqrt{x_\alpha} - \sqrt{x_\beta})^2} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy |\bar{\mathcal{M}}|^2. \quad (6.26)$$

Cuyos límites de integración con respecto de y son

$$y_{min} = \frac{(x_\alpha + x_\beta + 2x_\sigma - x)x - \sqrt{x(x - 4x_\sigma)((\sqrt{x_\alpha} + \sqrt{x_\beta})^2 - x)((\sqrt{x_\alpha} - \sqrt{x_\beta})^2 - x)}}{2x},$$

$$y_{max} = \frac{(x_\alpha + x_\beta + 2x_\sigma - x)x + \sqrt{x(x - 4x_\sigma)((\sqrt{x_\alpha} + \sqrt{x_\beta})^2 - x)((\sqrt{x_\alpha} - \sqrt{x_\beta})^2 - x)}}{2x}. \quad (6.27)$$

Si sustituimos las expresiones de $x_\alpha, x_\beta, x_\sigma, x$, en los límites de integración (6.27), y lo dejamos todo en términos de masas, para poder separar las potencias de m_w al momento de evaluar en la integrales, se tiene

$$y_{min} = \frac{q^2(m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2m_\sigma^2 - q^2) - \sqrt{q^2(q^2 - 4m_\sigma^2)(m_\alpha^4 - 2m_\alpha^2(m_\beta^2 + q^2) + (m_\beta^2 - q^2)^2)}}{2q^2m_w^2},$$

$$y_{min} = \frac{q^2(m_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2m_\sigma^2 - q^2) + \sqrt{q^2(q^2 - 4m_\sigma^2)(m_\alpha^4 - 2m_\alpha^2(m_\beta^2 + q^2) + (m_\beta^2 - q^2)^2)}}{2q^2m_w^2}. \quad (6.28)$$

El primer paso es calcular la siguiente integral

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} dy |\bar{\mathcal{M}}|^2, \quad (6.29)$$

para esto regresemos por un momento a la ecuación (6.20). Notemos que los coeficientes g_i son funciones que dependen de $g_i = g_i(m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, q^2, p_2 \cdot p_3)$ con $i = 1, \dots, 6$, mientras que las expresiones F_Ω son funciones de la forma $F_\Omega = F_\Omega(m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, m_w, q^2, \kappa_1, \kappa_N)$ siendo $\Omega = Q, A, M, E$.

Pero si nos enfocamos en la forma en que está definida la variable y y analizamos a detalle la dependencia de g_i y F_Ω podemos concluir que a los únicos términos a los que va a afectar la integral son a los coeficientes g_i , debido a que son los únicos que contienen productos de la forma $p_2 \cdot p_3$ el cual está relacionando con la variable y .

$$y = \frac{(m_\beta^2 + 2p_2 \cdot p_3 + m_\sigma^2)}{m_w^2} \quad \Rightarrow \quad p_2 \cdot p_3 = \frac{y m_w^2 - (m_\beta^2 + m_\sigma^2)}{2}. \quad (6.30)$$

Haciendo el cambio de variable en cada $g_i(m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, q^2, p_2 \cdot p_3)$ utilizando (6.30) e integrando sobre la variable y de la forma

$$\mathfrak{g}_i = \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy g_i(m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, q^2, y), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (6.31)$$

se utilizan los límites de integración mostrados en (6.28), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{1}{m_w^2} \left[-\frac{8}{3(q^2)^2} (2m_\sigma^2 + q^2)(q^2 - (m_\alpha - m_\beta)^2)((m_\alpha + m_\beta)^2 + 2q^2) \right] \Xi, \quad (6.32)$$

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{1}{m_w^2} \left[-\frac{8}{3} (2m_\sigma^2 + q^2)(q^2 - (m_\alpha + m_\beta)^2)((m_\alpha - m_\beta)^2 + 2q^2) \right] \Xi, \quad (6.33)$$

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{1}{m_w^2} \left[-\frac{8}{3q^2} (2m_\sigma^2 + q^2)(q^2(m_\alpha^2 + 6m_\alpha m_\beta + m_\beta^2) - 2(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 + (q^2)^2) \right] \Xi, \quad (6.34)$$

$$\mathfrak{g}_4 = \frac{1}{m_w^2} \left[-\frac{8}{3q^2} (2m_\sigma^2 + q^2)(q^2(m_\alpha^2 - 6m_\alpha m_\beta + m_\beta^2) - 2(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 + (q^2)^2) \right] \Xi, \quad (6.35)$$

$$\mathfrak{g}_5 = \frac{1}{m_w^2} \left[-\frac{16}{q^2} (2m_\sigma^2 + q^2)(m_\alpha + m_\beta)(q^2 - (m_\alpha - m_\beta)^2) \right] \Xi, \quad (6.36)$$

$$\mathfrak{g}_6 = \frac{1}{m_w^2} [16(2m_\sigma^2 + q^2)(m_\alpha - m_\beta)(q^2 - (m_\alpha + m_\beta)^2)] \Xi, \quad (6.37)$$

$$\Xi = \sqrt{q^2(q^2 - 4m_\sigma^2)(m_\alpha^4 - 2m_\alpha^2(m_\beta^2 + q^2) + (m_\beta^2 - q^2)^2)}.$$

Uniando los resultados que se acaban de obtener para las $\mathfrak{g}_i$ junto con expresión (6.20) y al sustituirlos en (6.26) se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{e^4}{2} \frac{2m_w}{(8\pi\sqrt{x_\alpha})^3} \int_{4x_\sigma}^{(\sqrt{x_\alpha} - \sqrt{x_\beta})^2} dx \frac{1}{(q^2)^2} [\mathfrak{g}_1 |F_Q|^2 + \mathfrak{g}_2 |F_A|^2 + \mathfrak{g}_3 |F_M|^2 + \mathfrak{g}_4 |F_E|^2 \\ + \mathfrak{g}_5 \text{Re}\{F_Q F_M^*\} + \mathfrak{g}_6 \text{Im}\{F_A F_E^*\}]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

El último paso para calcular la tasa de decaimiento (6.26) es realizar la integral sobre la variable x , pero para esto es conveniente regresar a la variable q^2

$$\begin{aligned} x = \frac{q^2}{m_w^2} &\Rightarrow dx = \frac{d(q^2)}{m_w^2}, \\ (\sqrt{x_\alpha} - \sqrt{x_\beta})^2 &= \frac{1}{m_w^2} (m_\alpha - m_\beta)^2, \\ 4x_\sigma &= 4\frac{m_\sigma^2}{m_w^2}, \\ (\sqrt{x_\alpha})^3 &= \frac{m_\alpha^3}{m_w^3}. \end{aligned}$$

Con estos cambios regresemos a (6.38)

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{e^4}{2} \frac{2m_w}{(8\pi)^3 \frac{m_\alpha^3}{m_w^3}} \int_{4m_\sigma^2}^{(m_\alpha - m_\beta)^2} \frac{d(q^2)}{m_w^2} \frac{1}{(q^2)^2} [\mathfrak{g}_1 |F_Q|^2 + \mathfrak{g}_2 |F_A|^2 + \mathfrak{g}_3 |F_M|^2 + \mathfrak{g}_4 |F_E|^2 \\ + \mathfrak{g}_5 \text{Re}\{F_Q F_M^*\} + \mathfrak{g}_6 \text{Im}\{F_A F_E^*\}], \\ = \frac{e^4}{2} \frac{2m_w^2}{(8\pi)^3 m_\alpha^3} \int_{4m_\sigma^2}^{(m_\alpha - m_\beta)^2} \frac{d(q^2)}{(q^2)^2} [\mathfrak{g}_1 |F_Q|^2 + \mathfrak{g}_2 |F_A|^2 + \mathfrak{g}_3 |F_M|^2 + \mathfrak{g}_4 |F_E|^2 \\ + \mathfrak{g}_5 \text{Re}\{F_Q F_M^*\} + \mathfrak{g}_6 \text{Im}\{F_A F_E^*\}]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Introduciendo el espectro de masas donde $m_1 \neq m_2$, $m_1 \neq m_3$ y $m_2 \approx m_3 \approx m_N$ discutido en el capítulo anterior, se tiene el siguiente resultado

$$\Gamma = |v_{1\beta}^* v_{1\alpha}|^2 \frac{e^4}{2} \frac{2m_w^2}{(8\pi)^3 m_\alpha^3} \int_{4m_\sigma^2}^{(m_\alpha - m_\beta)^2} \frac{d(q^2)}{(q^2)^2} \left[\mathfrak{g}_1 |\tilde{F}_Q|^2 + \mathfrak{g}_2 |\tilde{F}_A|^2 + \mathfrak{g}_3 |\tilde{F}_M|^2 + \mathfrak{g}_4 |\tilde{F}_E|^2 \right. \\ \left. + \mathfrak{g}_5 \text{Re} \{F_Q F_M^*\} + \mathfrak{g}_6 \text{Im} \{F_A F_E^*\} \right], \quad (6.40)$$

$\tilde{F}_\Omega$ son las expresiones que se definen en (5.59).

Para la mezcla de neutrinos pesados utilizaremos la parametrización usual de las matrices unitarias 3×3 [59], en términos de la tres ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} y la fase de Dirac δ (ver Apéndice H):

$$\bullet \mu^- \rightarrow e^- e^+ e^- \\ v_{1e}^* v_{1\mu} = \frac{1}{2} c_{12} c_{13} (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{-i\delta}), \quad (6.41)$$

$$\bullet \tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^- \quad \text{y} \quad \tau^- \rightarrow e^- e^+ e^- \\ v_{1e}^* v_{1\tau} = \frac{1}{2} c_{12} c_{13} (s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{-i\delta}), \quad (6.42)$$

$$\bullet \tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^- \quad \text{y} \quad \tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^- \\ v_{1\mu}^* v_{1\tau} = \frac{1}{2} (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta}) (s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{-i\delta}). \quad (6.43)$$

Hemos denotado $\sin \theta_{kn} = s_{kn}$ y $\cos \theta_{kn} = c_{kn}$, donde θ_{kn} son los ángulos de mezcla para los neutrinos pesados. Suponemos que la mezcla de neutrinos pesados es caracterizada por los mismos parámetros que la mezcla de neutrinos ligeros, así tomamos [60, 61] $\theta_{12} = 33.36^\circ$, $\theta_{23} = 40^\circ$ y $\theta_{13} = 8.66^\circ$. Para propósitos ilustrativos usamos el valor $\delta = -\pi/2$ [62, 63, 64] para la fase de Dirac de la mezcla de neutrinos masivos. Con estos $v_{1e}^* v_{1\mu} = 0.125439$.

Antes de calcular la integral sobre la variable q^2 en la ecuación (6.40) fue necesario darle valores a $m_\alpha, m_\beta, m_\sigma, \kappa_1, \kappa_N$ y sustituirlos en la expresión que se muestra dentro de los corchetes.

■ **Decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-$**

$$m_\alpha = 105.65 \times 10^{-3} \text{GeV}, \quad m_\beta = 0.51 \times 10^{-3} \text{GeV}, \quad m_\sigma = 0.51 \times 10^{-3} \text{GeV}.$$

Los valores numéricos de las masas de los leptones se obtienen de [60] y los valores de κ_1 y κ_N se eligen arbitrariamente. Ya que se incluyeron dichos datos, se suman todos los factores de forma y se organiza el resultado obtenido en potencias negativas de m_w

$$\Gamma_{\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-} = \frac{1}{4}(0.125439) \frac{e^4}{2} \frac{2m_w^2}{(8\pi)^3 m_\alpha^3} \int_{4m_\sigma^2}^{(m_\alpha - m_\beta)^2} \frac{d(q^2)}{(q^2)^2} \underbrace{\frac{1}{m_w^2}}_{(*)} \underbrace{\frac{1}{m_w^4}}_{(**)} \left[j_0(q^2) + j_2(q^2) \frac{1}{m_w^2} + j_4(q^2) \frac{1}{m_w^4} + j_6(q^2) \frac{1}{m_w^6} + j_8(q^2) \frac{1}{m_w^8} \right]. \quad (6.44)$$

$j_i(s)$, donde $i = 0, 2, 4, 6, 8$, son funciones escalares que solo dependen de q^2 . Por otra parte $(*)$ viene de los factores globales del conjunto de expresiones (6.32)-(6.37) y $(**)$ viene de elevar al cuadrado (5.61). Hablando de factores globales es necesario enfatizar que cada función $j_i(s)$ resulta del producto de escalares por una función h exclusiva de q^2

$$j_i(q^2) = \left(\frac{1}{(2\sqrt{2})^2} \right)^2 \left(\frac{1}{i\pi^2} \right)^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 h(q^2), \quad (6.45)$$

el primer producto viene de las reglas de Feynman y los otros dos vienen de las integrales de Passarino-Veltman (ver Apéndice I). Juntando todos los escalares de (6.44) y (6.45)

$$\frac{1}{4}(0.125439) \frac{e^4}{2} \frac{2m_w^2}{(8\pi)^3 m_\alpha^3} \frac{1}{m_w^2} \frac{1}{m_w^4} \left(\frac{1}{(2\sqrt{2})^2} \right)^2 \left(\frac{1}{i\pi^2} \right)^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 = \left(\frac{e^4}{(4^7)(2\pi)^{11} m_\alpha^2} \right) \frac{1}{m_w^4}, \quad (6.46)$$

para obtener el valor de e se considera la expresión de la constante de estructura fina ($\alpha = \frac{1}{137}$):

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}, \quad (6.47)$$

así

$$\left(\frac{e^4}{(4^7)(2\pi)^{11} m_\alpha^2} \right) \frac{1}{m_w^4} \approx 9.0657 \times 10^{-14}. \quad (6.48)$$

Finalmente resta realizar las siguientes integrales :

$$\int_{4m_\sigma^2}^{(m_\alpha - m_\beta)^2} d(q^2) \frac{h_i(q^2)}{(q^2)^2} \quad i = 0, 2, 4, 6, 8, \quad (6.49)$$

las cuales se realizaron de manera numérica, en Mathematica, debido a la complejidad de las expresiones $h_i(q^2)$.

6.3. Branching Ratio

La tasa total de decaimiento es la suma de las tasas de decaimiento individuales [65]

$$\Gamma_{tot} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i, \quad (6.50)$$

el tiempo de vida de la partícula es el recíproco de Γ_{tot} :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}}. \quad (6.51)$$

En adición a τ , queremos calcular varios *Branching ratios*, que son la fracción de todas las partículas de un tipo dado que decaen de cierto modo. El Branching ratio es determinado por la tasa de decaimiento

$$BR_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}, \quad (6.52)$$

se usó la notación BR_i para describir el branching ratio del i -ésimo modo de decaimiento. Pero tradicionalmente en la física de partículas se trabaja con el tiempo de vida medio ($t_{\lambda/2}$) en lugar del tiempo de vida (τ), $t_{\lambda/2}$ es el tiempo que toma la mitad de los participantes de una larga muestra para decaer y su relación con τ es

$$\tau = \frac{t_{\lambda/2}}{\log(2)}. \quad (6.53)$$

En [21] se reporta el tiempo de vida media para el muón μ

$$\tau = \frac{2.19\mu s}{\log(2)} \approx 4.8177 \times 10^{18} GeV^{-1}, \quad (6.54)$$

así

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \tau \Gamma_{\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-} = 4.8177 \times 10^{18} GeV^{-1} \Gamma_{\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-}. \quad (6.55)$$

Los Branching Ratio que consideramos han sido reportados con las siguientes cotas superiores [66, 67, 68]

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) < 1.0 \times 10^{-12}, \quad (6.56)$$

$$BR(\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-) < 2.7 \times 10^{-8}, \quad (6.57)$$

$$BR(\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-) < 1.8 \times 10^{-8}, \quad (6.58)$$

$$BR(\tau^- \rightarrow e^- e^+ e^-) < 2.7 \times 10^{-8}, \quad (6.59)$$

$$BR(\tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-) < 2.1 \times 10^{-8}, \quad (6.60)$$

todos estos a 90 % C.L. La idea es comparar estas cotas con los Branching ratios que obtuvimos y encontrar el conjunto de parámetros m_w, κ_1, κ_N con los cuales se satisfacen (6.56)-(6.60).

6.4. Resultados y discusión

El Branching ratio para decaimiento ($\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-$) depende de los valores de κ_1 y κ_N . Para nuestro análisis se fijaron los valores de $\kappa_1 = 2.5$, y se hicieron tres gráficas con κ_N diferente en cada caso

■ **Caso uno:** $\kappa_1 = 0.90$

- $\kappa_N = 0.70$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{5.6956}{m_w^4} + \frac{0.0086}{m_w^6} - \frac{9.0897 \times 10^{-6}}{m_w^8} + \frac{5.9760 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{1.4831 \times 10^{-20}}{m_w^{12}}. \quad (6.61)$$

- $\kappa_N = 0.50$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{9.5049}{m_w^4} + \frac{0.0167}{m_w^6} + \frac{6.6350 \times 10^{-6}}{m_w^8} - \frac{3.0973 \times 10^{-13}}{m_w^{10}} + \frac{1.0600 \times 10^{-19}}{m_w^{12}}. \quad (6.62)$$

- $\kappa_N = 0.45$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{10.5043}{m_w^4} + \frac{0.1653}{m_w^6} - \frac{6.0311 \times 10^{-5}}{m_w^8} - \frac{2.3664 \times 10^{-12}}{m_w^{10}} + \frac{1.5151 \times 10^{-19}}{m_w^{12}}. \quad (6.63)$$

■ **Caso dos:** $\kappa_1 = 2.50$

- $\kappa_N = 2.40$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0140}{m_w^4} - \frac{0.0002}{m_w^6} - \frac{2.3851 \times 10^{-6}}{m_w^8} - \frac{6.2240 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{1.5113 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.64)$$

- $\kappa_N = 2.33$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0277}{m_w^4} + \frac{0.0005}{m_w^6} - \frac{4.8583 \times 10^{-6}}{m_w^8} + \frac{2.5020 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{6.4971 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.65)$$

- $\kappa_N = 2.18$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0556}{m_w^4} + \frac{0.0008}{m_w^6} + \frac{3.7430 \times 10^{-6}}{m_w^8} + \frac{6.7703 \times 10^{-13}}{m_w^{10}} + \frac{2.2276 \times 10^{-20}}{m_w^{12}}. \quad (6.66)$$

■ **Caso tres:** $\kappa_1 = 3.50$

- $\kappa_N = 3.37$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0018}{m_w^4} + \frac{8.6949 \times 10^{-5}}{m_w^6} + \frac{1.4182 \times 10^{-7}}{m_w^8} + \frac{1.7139 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{1.1907 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.67)$$

- $\kappa_N = 3.30$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0051}{m_w^4} - \frac{0.0001}{m_w^6} + \frac{3.0632 \times 10^{-6}}{m_w^8} + \frac{1.4332 \times 10^{-15}}{m_w^{10}} + \frac{1.5919 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.68)$$

- $\kappa_N = 3.18$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0112}{m_w^4} - \frac{0.0001}{m_w^6} + \frac{3.7347 \times 10^{-6}}{m_w^8} - \frac{1.7545 \times 10^{-13}}{m_w^{10}} - \frac{1.0897 \times 10^{-20}}{m_w^{12}}. \quad (6.69)$$

■ **Caso cuatro:** $\kappa_1 = 7.50$

- $\kappa_N = 7.19$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0008}{m_w^4} - \frac{3.6083 \times 10^{-5}}{m_w^6} + \frac{5.7036 \times 10^{-7}}{m_w^8} - \frac{2.0066 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{5.5769 \times 10^{-22}}{m_w^{12}}. \quad (6.70)$$

- $\kappa_N = 6.80$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0041}{m_w^4} - \frac{0.0001}{m_w^6} + \frac{2.0220 \times 10^{-6}}{m_w^8} + \frac{2.2011 \times 10^{-14}}{m_w^{10}} + \frac{4.0981 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.71)$$

- $\kappa_N = 6.60$

$$BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = \frac{0.0056}{m_w^4} - \frac{4.4773 \times 10^{-5}}{m_w^6} - \frac{9.8722 \times 10^{-7}}{m_w^8} - \frac{1.9716 \times 10^{-13}}{m_w^{10}} - \frac{7.2355 \times 10^{-21}}{m_w^{12}}. \quad (6.72)$$

En la Figura 6.1 se muestra el conjunto de gráficas de $BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-)$ como función de m_w , para diferentes elecciones de los parámetros kappa (κ_1, κ_N). Para una clara discusión, se ha fijado, en cada gráfica, el valor de κ_1 pero hemos explorado tres diferentes valores de κ_N para cada caso. A partir de los comportamientos de las gráficas de la Figura 6.1 podemos comentar que hay un valor mínimo de la masa del W que mantiene la contribución por debajo de la cota $BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-) = 1.0 \times 10^{-12}$, cota que ha sido marcada en cada una de las cuatro gráficas con una línea sólida horizontal. Por lo que la región sombreada, debajo de cada línea, comprende todos los valores que son posibles por la constricción antes mencionada.

La situación de la gráfica (6.1a), para el cual $\kappa_1 = 0.90$, nos permite obtener una cota inferior para la masa del bosón W tan pequeña como $m_w \gtrsim 1549 \text{ GeV}$, la cual hemos marcado, en la imagen

correspondiente, con una linea vertical. La gráfica (6.1b) muestra gráficas del Branching ratio con valores más grandes de κ_1 y κ_N . Como esto decrece la masa de los neutrinos pesados m_1 y m_N , las contribuciones son más pequeñas, y también la cota inferior de m_w se reduce a $m_w \gtrsim 344.1 \text{ GeV}$. Para la gráfica (6.1c) tenemos el mismo patrón, obteniendo $m_w \gtrsim 208.4 \text{ GeV}$. Pero uno de los mejores escenarios que hemos investigado viene de la gráfica (6.1d), que en este caso, la cota inferior es tan pequeña como $m_w \gtrsim 173.4 \text{ GeV}$. En la Tabla 6.1, se muestra, para cada gráfica de la Figura 6.1, la cota inferior más pequeña de m_w y la masa de los neutrinos pesados correspondientes a cada escenario.

	Gráfica (a)	Gráfica (b)	Gráfica (c)	Gráfica (d)
$m_w^{\min}$	1549	344.1	208.8	173.4
m_1	1721.11	137.64	59.54	23.12
m_N	2212.86	143.37	61.83	24.11

Tabla 6.1: Diferentes valores de m_w , m_1 , m_N para las gráficas de la Figura 6.1. El primer renglón muestra las cotas inferiores de m_w , mientras que la segunda y tercera columna dan, para κ_1 y κ_N asociados al valor de m_w correspondiente, los valores de los neutrinos pesados para cada caso. Todo es expresado en GeV

El comportamiento de las gráficas (6.1a)-(6.1d) nos permite observar que entre más grande sea la diferencia entre κ_1 y κ_N la cota inferior de m_w se aleja más. Por ejemplo en la gráfica (6.1d) disminuyendo κ_N de 7.19 a 6.60 la cota inferior se incrementa de $m_w \gtrsim 173.4 \text{ GeV}$ a $m_w \gtrsim 274.2 \text{ GeV}$ con masa de los neutrinos $m_1 \approx 36.56 \text{ GeV}$ y $m_N \approx 41.54 \text{ GeV}$.

Ahora discutamos los decaimientos del leptón τ . Primero señalaremos que una vez que fijamos los valores para (κ_1, κ_N) y también establecimos el valor mínimo de m_w . De acuerdo a las cotas experimentales dadas en la ecuación (6.56), las cotas superiores en las ecuaciones (6.57)-(6.60) para los Branching ratios del decaimiento del tau en tres leptones son automáticamente cumplidas. En efecto, en cada caso las contribuciones varían muy poco, lo cual podemos apreciar en la Tabla (6.2). Las entradas de dichas tablas son los Branching ratios que corresponden a los parámetros kappa que se indican en cada renglón. Para generar estas tablas se utilizaron los parámetros κ_1 y κ_N que generaban la cota inferior más pequeña para más masa m_w en cada gráfica de la Figura 6.1. Ya que para cada conjunto (κ_1, κ_N) el mínimo valor de m_w , permitido por la cota superior $BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-)$, produce el valor más grande para el Branching ratio para cualquier decaimiento trileptónico del tau, esta masa $m_w^{\min}$ es la que consideramos para las tablas.

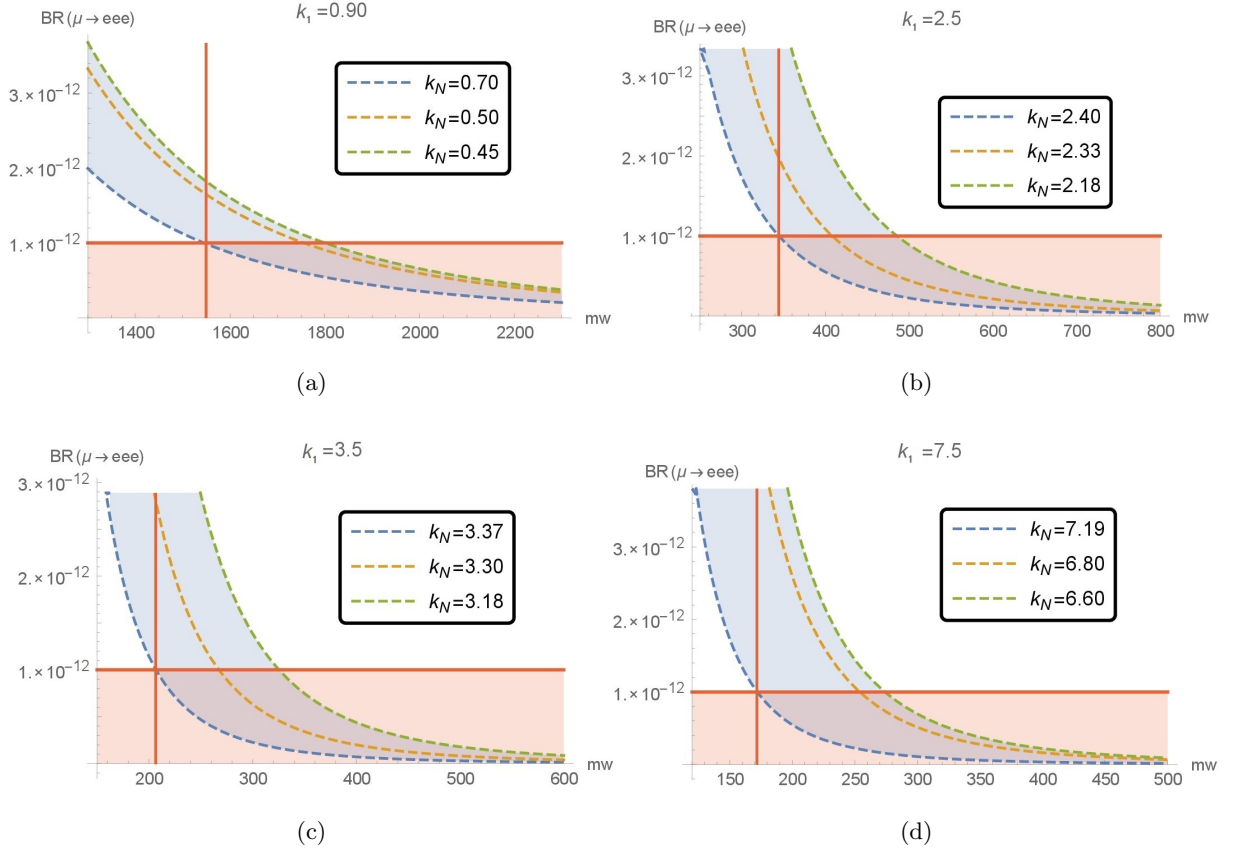


Figura 6.1: Cotas inferiores de la masa del bosón W , a través de una adecuada elección de los parámetros κ_1 y κ_2 : incrementando el valor de las kappas, correspondientes a masas de neutrinos pesados más pequeñas y kappas cada vez más cercanas unas a otras. La cota inferior más pequeña de m_w , indicada en cada gráfica por una línea vertical, son dadas en la la Tabla 6.1. En todos los casos las unidades de masa son GeV.

	$BR(\tau \rightarrow e\mu\mu)_{max}$	$BR(\tau \rightarrow \mu ee)_{max}$	$BR(\tau \rightarrow 3e)_{max}$	$BR(\tau \rightarrow 3\mu)_{max}$
$(\kappa_1, \kappa_N) = (0.9, 0.7)$	2.02×10^{-12}	8.12×10^{-14}	1.12×10^{-12}	4.63×10^{-14}
$(\kappa_1, \kappa_N) = (2.5, 2.4)$	4.43×10^{-12}	1.07×10^{-14}	2.31×10^{-13}	2.42×10^{-15}
$(\kappa_1, \kappa_N) = (3.5, 3.37)$	3.91×10^{-12}	1.63×10^{-13}	5.41×10^{-12}	1.62×10^{-14}
$(\kappa_1, \kappa_N) = (7.5, 7.19)$	1.78×10^{-12}	1.08×10^{-14}	3.21×10^{-12}	1.09×10^{-14}

Tabla 6.2: Valores de los Branching ratio de los decaimientos tripleptónicos del tau, determinados por los parámetros κ_1, κ_N, m_w . Para cada par (κ_1, κ_N) el valor mínimo correspondiente de m_w , dado en la Tabla 6.1, ha sido usado.

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos calculado a nivel de un lazo las contribuciones de las corrientes cargadas con neutrinos y bosones de norma pesados del decaimiento del leptón tau a tres cuerpos cargados $l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$, en el cual el sabor del leptón l_α no se conserva. Estos efectos son posibles debido a la oscilación de neutrinos lo cual no ocurre en el Modelo Estándar.

Calculamos la contribución más importante a la amplitud de estos decaimientos, los cuales vienen de diagramas reducibles, en los cuales los subdiagramas que contienen el lazo están relacionados con el vértice electromagnético, por medio del propagador del fotón. Recordemos que también teníamos diagramas de caja y subdiagramas donde se tenía al bosón Z y el bosón de Higgs como propagadores, pero estas contribuciones se ven suprimidas por los diagramas que se mencionaron antes.

Además los resultados no distinguieron si los neutrinos involucrados en el lazo eran de Dirac o Majorana ya que los diagramas de Feynman que producen las contribuciones más grandes son los mismos en ambos casos. También probamos explícitamente que la amplitud no tiene divergencias ultravioleta y es invariante de norma, además de que se desacopla cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. Consideramos un espectro de masas de neutrinos pesados en la cual la masa m_1 es diferente de las masas m_2 y m_3 , pero $m_2 \approx m_3 \approx m_N$.

Luego se calculó el Branching ratio $BR(l_\alpha \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma)$ y se implementó a decaimientos específicos de leptones, en este caso decaimientos de los leptones τ y μ . Primero analizamos el decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-$ en donde usamos la cota reportada en [21] para $BR(\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-)$ que es del orden de $\sim 10^{-12}$. Luego se graficó el BR con respecto a la masa m_w , donde se fueron fijando los parámetros κ_1 y κ_N , los cuales fueron definidos por una relación entre la masa m_w y la masa de los neutrinos pesados m_j , $m_w \approx \kappa_j m_j$, para $j = 1, 2, 3$. Pudimos observar que entre más se alejaban los valores de κ_1 y κ_N más grandes eran las contribuciones y entre más grandes eran los valores de estas κ la masa m_w^{min} era más grande siendo del orden de $1.5 TeV$ cuando κ_1 y κ_N son menores que la unidad.

Una vez que encontramos los valores de m_w y de las κ que hacían consistentes los resultados con las

cotas obtenidas experimentalmente, los utilizamos para calcular los Branching ratios de los decaimientos del leptón *tau*, es decir $\tau \rightarrow l_\beta l_\sigma \bar{l}_\sigma$, y se encontró que son del orden de $\sim 10^{-14} - 10^{-13}$, los cuales resultaron lejanos de las cotas reportadas valores reportados por las colaboraciones Belle y BABAR que son del orden de $\sim 10^{-8}$.

Apéndice A

Álgebra de las matrices de Dirac

Álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{A.2})$$

De las relaciones anteriores se prueba que

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^j)^2 = 1 \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.3})$$

También

$$\begin{aligned} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 \frac{-i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0) \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Representación de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Representación de quiral o de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Ambas representaciones satisfacen el Álgebra de Clifford, en este caso vamos a trabajar en la representación quiral, en este caso:

$$\gamma^{*0} = \gamma^0, \quad \gamma^{*1} = \gamma^1, \quad \gamma^{*2} = -\gamma^2, \quad \gamma^{*3} = \gamma^3. \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

Ecuaciones de movimiento de la teoría de Yang-Mills

Las ecuaciones de movimiento de la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

se obtienen de

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^j} = 0, \quad (\text{B.2})$$

debido a que las únicas variables dinámicas son los campos A_μ^j .

Calculando por partes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\epsilon} g^{\beta\lambda} F_{\alpha\beta}^k F_{\epsilon\lambda}^k \right) \\ &= -\frac{1}{4} 2 F^{k\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^k}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} \\ &= -\frac{1}{2} F^{k\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} (\partial_\alpha A_\beta^k - \partial_\beta A_\alpha^k) \\ &= -\frac{1}{2} (F^{j\mu\nu} - F^{j\nu\mu}), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

pero

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^j &= \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + g\epsilon^{jlm} A_\mu^l A_\nu^m \\ &= -(\partial_\nu A_\mu^j - \partial_\mu A_\nu^j + g\epsilon^{jml} A_\nu^m A_\mu^l) \\ &= -F_{\nu\mu}^j, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} = -F^{j\mu\nu} \quad \implies \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} = -\partial_\mu F^{j\mu\nu}. \quad (\text{B.5})$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^j} &= \frac{\partial}{\partial A_\nu^j} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^k F^{k\alpha\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} F^{k\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial A_\nu^j} (g\epsilon^{klm} A_\alpha^l A_\beta^m) \\ &= -\frac{1}{2} g(\epsilon^{kjm} F^{k\nu\beta} A_\beta^m + \epsilon^{klj} F^{k\alpha\nu} A_\alpha^l) \\ &= -g\epsilon^{kjm} F^{k\nu\beta} A_\beta^m. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$-\partial_\mu F^{j\mu\nu} + g\epsilon^{kjm} F^{k\nu\beta} A_\beta^m = 0. \quad (\text{B.7})$$

Haciendo cambio en índices se puede obtener

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \delta^{jk} - g\epsilon^{jkm} A_\mu^m) F^{k\mu\nu} &= 0 \\ \mathcal{D}_\mu^{jk} F^{k\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$\mathcal{D}_\mu^{jk}$ es la derivada covariante en la representación adjunta.

Ahora calculemos la ecuaciones de movimiento de la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^j)^2, \quad (\text{B.9})$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}. \quad (\text{B.10})$$

Sabemos

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^j)} = -\partial_\mu F^{j\mu\nu} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^j} &= \frac{\partial}{\partial A_\nu^j} \left(-\frac{1}{4} (F_{\alpha\beta}^k)^2 - i^2 g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu^k \frac{\sigma^k}{2} \psi(x) \right) \\ &= -g\epsilon^{kjm} F^{k\nu\beta} A_\beta^m + g \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \frac{\sigma^j}{2} \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Por lo tanto las ecuaciones de los campos de Yang-Mills son

$$\begin{aligned}
 & -\partial_\mu F^{j\mu\nu} + g\epsilon^{kjm} F^{k\nu\beta} A_\beta^m - g\bar{\psi}(x)\gamma^\nu \frac{\sigma^j}{2}\psi(x) = 0 \\
 \Rightarrow & \quad \mathcal{D}_\mu^{jk} F^{k\mu\nu} = \underbrace{-g\bar{\psi}(x)\gamma^\nu \frac{\sigma^j}{2}\psi(x)}_{\text{Corriente}},
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

se he utilizado la definición de la derivada covariante mostrada en (B.8).

Apéndice C

Propiedades de las matrices de Dirac y Proyectores

Algunas propiedades de la matriz γ^5

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \quad (\text{C.1})$$

Si nos fijamos en el hermítico conjugado

$$\gamma_5^\dagger = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger}, \quad (\text{C.2})$$

utilizando $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ y $\gamma^0\gamma^\mu\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_5^\dagger &= -i\gamma^0\gamma^0\gamma^{3\dagger}\gamma^0\gamma^0\gamma^{2\dagger}\gamma^0\gamma^0\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} \\ &= -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

recordando que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$\gamma_5^\dagger = -i(-1)^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5. \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto $\gamma_5 = \gamma_5^\dagger$ es hermitiana. Ahora elevemos al cuadrado

$$\begin{aligned} (\gamma_5)^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\ &= -(-1)^3(-1)^2(-1)\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3\gamma^3, \end{aligned}$$

pero recordemos que $(\gamma^j)^2 = -\mathbb{1}$, entonces

$$(\gamma_5)^2 = -\mathbb{1}(-\mathbb{1})^3 = \mathbb{1}. \quad (\text{C.5})$$

Ahora calculemos

$$\gamma_5 \gamma^\mu = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu = i(-1)^4 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^\mu \gamma_5, \quad (\text{C.6})$$

eso implica que

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Por otra parte

$$[\gamma_5, \gamma_5^\dagger] = [\gamma_5, \gamma_5] = 0, \quad (\text{C.8})$$

es decir γ_5 es una matriz normal por lo tanto es diagonalizable por una matriz unitaria, es decir, existe $U = U^\dagger$ tal que $U^\dagger \gamma_5 U = \gamma_d^5$ y de ahí

$$(\gamma_d^5)^2 = U^\dagger \gamma_5 \underbrace{UU^\dagger}_{\mathbb{1}} \gamma_5 U = \mathbb{1}. \quad (\text{C.9})$$

A nivel matricial se tiene

$$\gamma_d^5 = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{pmatrix} \implies (\gamma_d^5)^2 = \begin{pmatrix} l_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies l_j = \pm 1. \quad (\text{C.10})$$

Utilizando la ciclicidad de la traza se prueba

$$\text{tr} \{\gamma_5\} = 0. \quad (\text{C.11})$$

También

$$\text{tr} \{U^\dagger \gamma_5 U\} = \text{tr} \{UU^\dagger \gamma_5\} = \text{tr} \{\gamma_5\} = 0 = \text{tr} \{\gamma_d^5\}. \quad (\text{C.12})$$

Debido a que la traza de γ_d^5 es nula debe ocurrir que dos valores de la diagonal l_j sean +1 y los otros dos sean -1, por lo que se tienen estas opciones

$$\gamma_5 \psi_R = (+1) \psi_R, \quad (\text{C.13})$$

$$\gamma_5 \psi_L = (-1) \psi_L. \quad (\text{C.14})$$

Si sumamos y restamos términos al campo ψ

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi + \psi + \gamma_5 \psi - \gamma_5 \psi) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi + \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = P_R \psi + P_L \psi. \quad (\text{C.15})$$

Multiplicando por γ_5 a $P_R \psi$ y $P_L \psi$

$$\gamma_5 P_R \psi = \gamma_5 \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \psi = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \psi = P_R \psi, \quad (\text{C.16})$$

$$\gamma_5 P_L \psi = \gamma_5 \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \psi = -\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \psi = -P_L \psi. \quad (\text{C.17})$$

Ahora definamos los siguientes campos

$$P_R \psi \equiv \psi_R \quad P_L \psi \equiv \psi_L \quad \implies \quad \psi = \psi_R + \psi_L. \quad (\text{C.18})$$

A continuación de muestran algunas propiedades de los proyectores P_R y P_L

$$P_R + P_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} + \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \mathbb{1}, \quad (\text{C.19})$$

$$(\text{C.20})$$

$$P_R - P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} + \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \gamma_5, \quad (\text{C.21})$$

$$(\text{C.22})$$

$$P_R^2 = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} = P_R, \quad (\text{C.23})$$

$$(\text{C.24})$$

$$P_L^2 = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = P_L, \quad (\text{C.25})$$

$$(\text{C.26})$$

$$P_R^\dagger = P_R, \quad (\text{C.27})$$

$$(\text{C.28})$$

$$P_L^\dagger = P_L, \quad (\text{C.29})$$

$$(\text{C.30})$$

$$P_R P_L = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = 0, \quad (\text{C.31})$$

$$(\text{C.32})$$

$$P_L P_R = 0, \quad (\text{C.33})$$

$$(\text{C.34})$$

$$P_R \gamma^\mu = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \frac{\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu}{2} = \gamma^\mu \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_L, \quad (\text{C.35})$$

$$(\text{C.36})$$

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R. \quad (\text{C.37})$$

Apéndice D

Cálculo del vértice electromagnético en la norma no lineal de Feynman-t'Hooft

En esta norma se tiene mas diagramas debido a que se tienen que considerar las interacciones con los bosones de Golstone. Podemos ver el Figura (D.1) que por cada diagrama que teníamos en la norma unitaria ahora tenemos que agregar otro similar pero con bosones de Golstone:

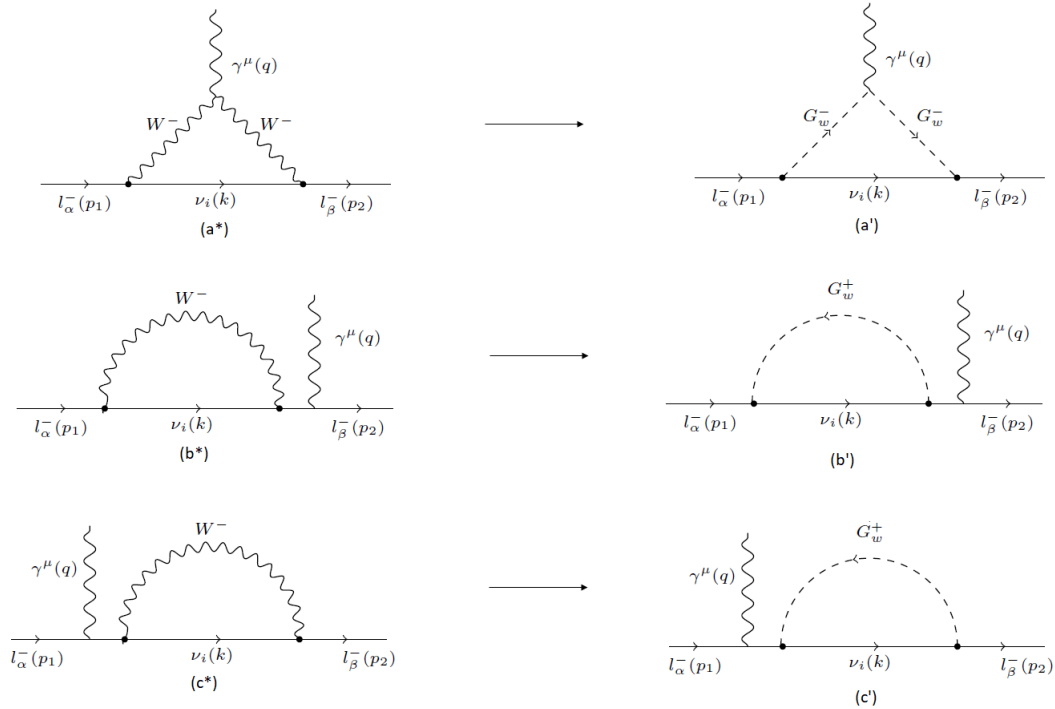
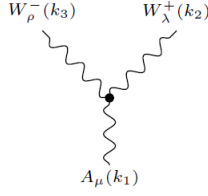


Figura D.1: Nuevos diagramas en la norma no lineal.

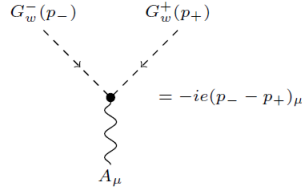
Las reglas de Feynman en esta norma, Figura (D.2) y Figura (D.3), son:



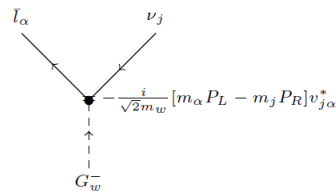
$$= -ie[(k_3 - k_2)_\mu g_{\lambda\rho} + (k_1 - k_3 - \frac{1}{\xi}k_2)_\lambda g_{\rho\mu} + (k_2 - k_1 + \frac{1}{\xi}k_3)_\rho g_{\lambda\mu}]$$

$$\downarrow \quad \xi = 1$$

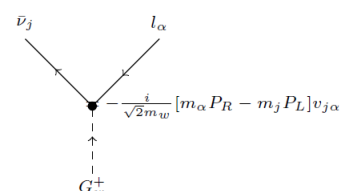
$$= -ie[(k_3 - k_2)_\mu g_{\lambda\rho} + (k_1 - k_3 - k_2)_\lambda g_{\rho\mu} + (k_2 - k_1 + k_3)_\rho g_{\lambda\mu}]$$



$$= -ie(p_- - p_+)_\mu$$



$$-\frac{i}{\sqrt{2}m_w}[m_\alpha P_L - m_j P_R]v_{j\alpha}^*$$



$$-\frac{i}{\sqrt{2}m_w}[m_\alpha P_R - m_j P_L]v_{j\alpha}$$

Figura D.2: Vértices en la norma no lineal $\xi = 1$.

$$-\frac{k}{G_w} = \frac{i}{k^2 - m_w^2}$$

$$\sim W^\pm = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m_w^2}$$

Figura D.3: propagador del bosón de Golstone y bosón W en la norma $\xi = 1$.

Se eligió la norma no lineal para eliminar las interacciones de la forma $G_w^\pm \gamma W^\pm$ y así reducir el numero de diagramas, que incluyen a los bosones de Goldstone, a solamente tres.

Las reglas de los diagramas del lado izquierdo de la Figura (D.1), $\Gamma_\mu^{a*}, \Gamma_\mu^{b*}, \Gamma_\mu^{c*}$, son similares a las que se obtuvieron en (5.8), solo se tienen algunos cambios menores en la expresión del vértice $\gamma W^+ W^-$ y la forma en como se define el propagador del bosón W.

Las reglas de los diagramas donde hay interacciones con los bosones de Goldstone son las siguientes

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{(a')} &= e \left(\frac{1}{2\sqrt{2}m_w} \right)^2 \bar{U}_\beta(p_2) [m_\beta(1 - \gamma_5) - m_i(1 + \gamma_5)] \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} [m_\alpha(1 + \gamma_5) - m_i(1 - \gamma_5)] U_\alpha(p_1) \\
&\quad (p_1 + p_2 - 2k)_\mu \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2} \frac{1}{(p_2 - k)^2 - m_w^2}, \\
\Gamma_\mu^{(b')} &= e \left(\frac{1}{2\sqrt{2}m_w} \right)^2 \bar{U}_\beta(p_2) [m_\beta(1 - \gamma_5) - m_i(1 + \gamma_5)] \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} [m_\alpha(1 + \gamma_5) - m_i(1 - \gamma_5)] \frac{\not{p}_2 + m_\alpha}{m_\beta^2 - m_\alpha^2} \gamma_\mu U_\alpha(p_1) \\
&\quad \frac{1}{(p_2 - k)^2 - m_w^2}, \\
\Gamma_\mu^{(c')} &= e \left(\frac{1}{2\sqrt{2}m_w} \right)^2 \bar{U}_\beta(p_2) \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m_\beta}{m_\alpha^2 - m_\beta^2} [m_\beta(1 - \gamma_5) - m_i(1 + \gamma_5)] \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} [m_\alpha(1 + \gamma_5) - m_i(1 - \gamma_5)] U_\alpha(p_1) \\
&\quad \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m_w^2}.
\end{aligned} \tag{D.1}$$

La contribución total es

$$\Gamma_\mu^{NL} = \Gamma_\mu^{a*} + \Gamma_\mu^{b*} + \Gamma_\mu^{c*} + \Gamma_\mu^{a'} + \Gamma_\mu^{b'} + \Gamma_\mu^{c'}. \tag{D.2}$$

Para tener una prueba de consistencia, estos cálculos también se hicieron cuando se tiene como propagador al bosón Z y se verificó que los resultados también fueran finitos y se cumpliera invariancia de norma.

Otra relación de consistencia en la que se pensó fue en verificar que las amplitudes en la norma unitaria y en la norma no lineal debían de coincidir cuando el fotón estuviera on-shell y en efecto esto sucede.

Apéndice E

Identidades de Gordon

Recordemos algunos resultados importantes:

Ecuación: de Dirac

$$\not{p}U(p) = mU(p), \quad (\text{E.1})$$

$$\bar{U}(p)\not{p} = \bar{U}m. \quad (\text{E.2})$$

Del Algebra de Clifford

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}.$$

También

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (\text{E.3})$$

De acuerdo al decaimiento que estamos analizando se cumple que $q = p_1 - p_2$, donde q es el cuadrimomento del fotón, p_1 el cuadrimomento del leptón entrante y p_2 el del leptón saliente.

Desarrollemos explícitamente las siguientes expresiones utilizando los resultados anteriores

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(p_2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu U(p_1) &= i\frac{i}{2}\bar{U}(p_2)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)q^\nu U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[\gamma_\mu(\not{p}_1 - \not{p}_2) - (\not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma_\mu]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[\gamma_\mu m_\alpha - \gamma_\mu \not{p}_2 - \not{p}_1\gamma_\mu + m_\beta\gamma_\mu]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu + \not{p}_2\gamma_\mu - 2g_{\mu\nu}p_2^\nu + \gamma_\mu \not{p}_1 - 2g_{\mu\nu}p_1^\nu]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[2(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu - 2(p_{1\mu} + p_{2\mu})]U(p_1) \\
 &= -\bar{U}(p_2)[(m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu - s_\mu]U(p_1) \\
 \\
 &\Rightarrow s_\mu = i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + (m_\alpha + m_\beta)\gamma_\mu,
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(p_2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 U(p_1) &= i\frac{i}{2}\bar{U}(p_2)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)q^\nu\gamma_5 U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[\gamma_\mu(\not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma_5 - (\not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma_\mu\gamma_5]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[- \gamma_\mu\gamma_5 m_\alpha - \gamma_\mu \not{p}_2\gamma_5 - \not{p}_1\gamma_\mu\gamma_5 + m_\beta\gamma_\mu\gamma_5]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[(m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu\gamma_5 + \not{p}_2\gamma_\mu\gamma_5 - 2g_{\mu\nu}p_2^\nu\gamma_5 - \gamma_\mu\gamma_5 \not{p}_1 - 2g_{\mu\nu}p_1^\nu\gamma_5]U(p_1) \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{U}(p_2)[2(m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu\gamma_5 - 2(p_{1\mu} + p_{2\mu})\gamma_5]U(p_1) \\
 &= -\bar{U}(p_2)[(m_\beta - m_\alpha)\gamma_\mu\gamma_5 - s_\mu\gamma_5]U(p_1) \\
 \\
 &\Rightarrow s_\mu\gamma_5 = i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 - (m_\alpha - m_\beta)\gamma_\mu\gamma_5.
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Apéndice F

Amplitud invariante de norma

La amplitud está dada de forma general como se muestra en (5.19)

$$\kappa_\mu = f_1 q_\mu + f_2 q_\mu \gamma_5 + f_3 \gamma_\mu + f_4 \gamma_\mu \gamma_5 + f_5 \sigma_{\mu\nu} q^\nu + f_6 \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5. \quad (\text{F.1})$$

Al contraer con el cuadrimomento del fotón y utilizando la identidad de Ward $q^\mu \Gamma_\mu^{\text{tot}}(q^2) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f_1 q^2 + f_2 q^2 \gamma_5 + f_3 \not{q} + f_4 \not{q} \gamma_5 + f_5 \underbrace{\sigma_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}_{=0} + f_6 \underbrace{\sigma_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}_{=0} \gamma_5 \\ &= f_1 q^2 + f_2 q^2 \gamma_5 + f_3 \not{q} + f_4 \not{q} \gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Por otra parte, al aplicar la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta(p_2) \not{q} U_\alpha(p_1) &= \bar{U}_\beta(p_2) (\not{p}_1 - \not{p}_2) U_\alpha(p_1) \\ &= \bar{U}_\beta(p_2) (m_\alpha - m_\beta) U_\alpha(p_1), \\ \Rightarrow \not{q} &= m_\alpha - m_\beta. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_\beta(p_2) \not{q} \gamma_5 U_\alpha(p_1) &= \bar{U}_\beta(p_2) (\not{p}_1 - \not{p}_2) \gamma_5 U_\alpha(p_1) \\ &= \bar{U}_\beta(p_2) (-\gamma_5 \not{p}_1 - \not{p}_2 \gamma_5) U_\alpha(p_1) \\ &= \bar{U}_\beta(p_2) (-\gamma_5 m_\alpha - m_\beta \gamma_5) U_\alpha(p_1), \\ &= \bar{U}_\beta(p_2) (-)(m_\alpha + m_\beta) \gamma_5 U_\alpha(p_1), \\ \Rightarrow \not{q} \gamma_5 &= -(m_\alpha + m_\beta) \gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Sustituyendo las expresiones (F.3) y (F.4) en (F.2)

$$\begin{aligned}
 0 &= f_1 q^2 + f_2 q^2 \gamma_5 + f_3(m_\alpha - m_\beta) - f_4(m_\alpha + m_\beta) \gamma_5 \\
 &= [f_1 q^2 + f_3(m_\alpha - m_\beta)] \mathbb{1} + [f_2 q^2 - f_4(m_\alpha + m_\beta)] \gamma_5,
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

que por independencia lineal de las matrices $\mathbb{1}$ y γ_5 se cumplen las siguientes constricciones

$$f_1 q^2 + f_3(m_\alpha - m_\beta) = 0, \tag{F.6}$$

$$f_2 q^2 - f_4(m_\alpha + m_\beta) = 0. \tag{F.7}$$

Apéndice G

Soluciones de las funciones de Passarino-Veltman

■ Función de dos puntos

La función de Passarino-Veltman B_0 se define como

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - m_0^2][(k + p_1)^2 - m_1^2]}, \quad (\text{G.1})$$

D es la dimensión del espacio-tiempo, dentro del esquema de la regularización dimensional, y μ , se utiliza para corregir unidades y sus unidades son $(\text{masa})^1$. Utilizando el método de la parametrización de Feynman, esta función se puede expresar como

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \Delta_\varepsilon - \int_0^1 \log \left[\frac{xm_0^2 + (1-x)m_1^2 - (1-x)xp_1}{\mu^2} \right]. \quad (\text{G.2})$$

La integración sobre la variable x viene de la parametrización de Feynman. Este método nos permite separar la parte divergente

$$\Delta_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \log(4\pi), \quad (\text{G.3})$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ y γ_E es la constante de Euler-Mascheroni. A continuación se mencionan algunos casos especiales de esta función escalar, distinguiendo unos de otros por la relación que existe entre p_1^2 y $(m_0 - m_1)^2$ y entre p_1^2 y $(m_0 + m_1)^2$, para esto definamos

$$\hat{s}_\pm = \sqrt{(\sqrt{x_0} \pm \sqrt{x_1})^2 - x_{p_1}}. \quad (\text{G.4})$$

Se ha definido $x_0 = \frac{m_0^2}{M^2}$, $x_1 = \frac{m_1^2}{M^2}$ y $x_{p_1} = \frac{p_1^2}{M^2}$, siendo M alguna masa o escala de energía que se toma como referencia. Cabe mencionar que en esta tesis se ha tomado $M = m_w$

1) Supongamos que $\mathbf{m}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}_1^2 \neq \mathbf{0}$. Además $\mathbf{p}_1^2 < (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1)^2$ entonces B_0 se reduce a

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log(x_0) + \frac{x_1}{x_0 - x_1} \log(x_1) + 2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_{p_1}} - \frac{x_0 + x_1}{x_0 - x_1} \right) \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \frac{\hat{s}_+ \hat{s}_-}{x_{p_1}} \log\left(\frac{\hat{s}_+ + \hat{s}_-}{\hat{s}_+ - \hat{s}_-}\right). \quad (\text{G.5})$$

Esta expresión es la que se utiliza para desarrollar en serie de Taylor a las funciones B_3 y B_4 mostradas en (5.50) y (5.51).

2) Si $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{m}_0 \neq \mathbf{m}_1$ entonces

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + 1 - \frac{x_0}{x_0 - x_1} \log(x_0) + \frac{x_1}{x_0 - x_1} \log(x_1). \quad (\text{G.6})$$

Esta expresión es la que se utiliza para desarrollar en serie de Taylor a B_1 (5.48).

3) En el caso donde $\mathbf{p}_1^2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_1$ y $\mathbf{p}_1^2 < 2\mathbf{m}_0^2$, podemos expresar a B_0 como

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \log(x_0) + 2 - \pi \sqrt{\frac{4x_0 - x_{p_1}}{x_{p_1}}} + 2 \sqrt{\frac{4x_0 - x_{p_1}}{x_{p_1}}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{4x_0 - x_{p_1}}{x_{p_1}}} \right). \quad (\text{G.7})$$

El resultado anterior se utilizó para analizar a B_2 mostrada en (5.49).

Debido a que la parte divergente es la misma para todas las funciones, se va a eliminar de todas las expresiones, este punto se discutió en el Capítulo 4.

■ Función de tres puntos

La función escalar C_0 tiene la siguiente forma

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - m_0^2][(k + p_1)^2 - m_1^2][(k + p_1 - p)^2 - m_2^2]}. \quad (\text{G.8})$$

Utilizando el método de parametrización de Feynman, podemos escribir esta función como

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [xm_0^2 + ym_1^2 + (1 - x - y)m_2^2 - x(1 - x)p_1^2 \\ - (x + y)(1 - x - y)p^2 + 2x(1 - x - y)p_1 \cdot p]^{-1}. \quad (\text{G.9})$$

La expresión que se encuentra dentro de los corchetes es la que se expande en serie de Taylor, utilizando los valores de C_1 dada en (5.52).

Nota: Todos los desarrollos se toman a primer orden en las variables x, x_β, x_α (definidas en el Capítulo 4), también despreciamos los productos entre ellas mismas.

Apéndice H

Matriz PMNS

En el Modelo Estándar el conjunto de corrientes cargadas está dado

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cc} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{\begin{pmatrix} e & \mu & \tau \end{pmatrix}_L} \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_{e1} & u_{e2} & u_{e3} \\ u_{\mu 1} & u_{\mu 2} & u_{\mu 3} \\ u_{\tau 1} & u_{\tau 2} & u_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^- + h.c. \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\alpha \sum_j \bar{l}_{L\alpha} \gamma^\mu U_{\alpha j} \nu_{Lj} W_\mu^- + h.c. + \dots\end{aligned}\quad (\text{H.1})$$

U es la matriz PMNS

$$U = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{-i\delta_{13}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2})$$

Comparando con la lagrangiana que se considera en la tesis

$$\mathcal{L}_{cc} = \sum_\alpha \sum_j \bar{l}_\alpha \gamma^\mu v_{j\alpha}^* \nu_j W_\mu^- + h.c. + \dots \quad (\text{H.3})$$

Podemos decir que $v_{j\alpha}$ se relaciona con los elementos de matriz de U como

$$v_{j\alpha}^* \approx \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\alpha j}, \quad \Rightarrow \quad v_{j\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\alpha j}^*. \quad (\text{H.4})$$

al escoger un espectro de masas para los neutrinos y al aplicarlo a la condición de unitariedad de $\sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha}$, obtuvimos que los factores de forma están dados

$$F_\Omega = \sum_j v_{j\beta}^* v_{j\alpha} f_\Omega^j = v_{1\beta}^* v_{1\alpha} (f_\Omega^1 - f_\Omega^N). \quad (\text{H.5})$$

Si nos fijamos el proceso $l_\mu^- \rightarrow l_e^- l_e^+ l_e^-$ entonces $v_{1\beta}^* \approx \frac{1}{\sqrt{2}} u_{e1}$ y $v_{1\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\mu 1}^*$ así

$$\begin{aligned}
 F_{\Omega} &\approx \frac{1}{2}(c_{12} c_{13})(-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}})^*(f_{\Omega}^1 - f_{\Omega}^N) \\
 &= -\frac{1}{2}(c_{12} c_{13} s_{12} c_{23} + c_{12}^2 s_{23} s_{13}^2 e^{-i\delta_{13}})(f_{\Omega}^1 - f_{\Omega}^N)
 \end{aligned} \tag{H.6}$$

Apéndice I

Factor global de las funciones de PaVe

El factor global de las funciones de Passarino-Veltman [57] está dado por

$$\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{a\pi^2} \int \dots, \quad (\text{I.1})$$

donde se está integrando sobre el espacio de Minkowski D-dimensional (una dimensión temporal junto con el espacio Euclidiano (D-1)-dimensional). μ tiene unidades de $[masa]^{-1}$ con $D = 4$ se tiene

$$\frac{1}{i\pi^2} \int \dots,$$

que es el factor global que se obtiene al realizar los cálculos en Mathematica.

Originalmente se está realizando la integral sobre el cuadrimomento p

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \dots, \quad (\text{I.2})$$

pero, en regularización dimensional se tiene

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \dots. \quad (\text{I.3})$$

El objetivo es ahora deducir una expresión que relacione el factor global de (I.3) con el de (I.1), para esto se tiene que multiplicar y dividir por ciertos factores de manera adecuada

$$\frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} = \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^4} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{(2\pi)^4} = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{4^2\pi^2} \frac{1}{\pi^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2}.$$

Por lo tanto, de la expresión anterior se concluye que es necesario multiplicar el resultado de la amplitud por los factores $\frac{i}{(4\pi)^2}$ y $\frac{1}{i\pi^2}$.

Bibliografía

- [1] H. Novales-Sánchez, M. Salinas and J. J. Toscano, arXiv:1710.08474v1 [hep-ph] 23 Oct 2017.
- [2] M. E. Peskin and D.V. Schroeder, Quantum Field Theory, Addison-Wesley (1995).
- [3] Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields Vol. I, Cambridge University Press (1996).
- [4] W. Pauli, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **14**, 1 (2000).
- [5] F. Reines and C. L. Cowan, Jr., *Detection of the Free Neutrino*, Phys. Rev. **92**, 830 (1953).
- [6] F. Reines, C. L. Cowan, F. B. Harrison, A. D. McGuire, and H. W. Kruse, *Detection of the free antineutrino*, Phys. Rev. **177**, 159 (1960).
- [7] B. Pontecorvo, *Mesonium and antimesonium*, Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957).
- [8] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, Sov. Phys. JETP **7**, 172 (1958).
- [9] C. Giunti and C.W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, London, 2007).
- [10] Y. Fukuda et al., *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [11] Q. R. Ahmad et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002).
- [12] B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis, Jr., J. D. Distel, K. Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain, and J. Ullman, *Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector*, Astrophys. J. **496**, 505 (1998).
- [13] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli, and S. Basu, *New Solar Opacities, Abundances, Helioseismology, and Neutrino Fluxes*, Astrophys. J. **621**, L85 (2005).
- [14] F. P. An et al., *Observation of Electron Antineutrino Disappearance at Daya Bay*, Phys. Rev. Lett. **108**, 171803 (2012).
- [15] J. K. Ahn et al. (RENO Collaboration), *Observation of Reactor Electron Antineutrinos Disappearance in the RENO Experiment*, Phys. Rev. Lett. **108**, 191802 (2012).

- [16] E. Majorana, *Theory of the Symmetry of Electrons and Positrons*, Nuovo. Cim. **14**, 171 (1937).
- [17] C. Giunti and A. Studenikin, Phys. At. Nucl. **72**, 2089 (2009); C. Brogini, C. Giunti, and A. Studenikin, Adv. High Energy Phys. **2012**, 459526 (2012); C. Giunti and A. Studenikin, Rev. Mod. Phys. **87**, 531 (2015).
- [18] B. Kayser, *Majorana neutrinos and their electromagnetic properties*, Phys. Rev. D **26**, 1662 (1982).
- [19] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Majorana neutrinos and magnetic fields*, Phys. Rev. D **24**, 1883 (1981).
- [20] M. L. Pearl et al., *Evidence for Anomalous Lepton Production in $e^+ \rightarrow e^-$ annihilation*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1489 (1975).
- [21] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), *The Review of Particle Physics* (2015), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
- [22] A. Pich, *Precision tau physics*, Prog. Part. Nucl. Phys. **75**, 41 (2014).
- [23] A. Cordero-Cid, J. M. Hernández, G. Tavares-Velasco, and J. J. Toscano, *Rare top quark decay $t \rightarrow u_1 \bar{u}_2 u_2$ in the standard model*, Phys. Rev. D **73**, 094005 (2006).
- [24] G. Eilam, M. Frank, and I. Turan, *Rare decay of the top $t \rightarrow cgg$ in the standard model*, Phys. Rev. D **73**, 053011 (2006).
- [25] A. Abbasabadi, D. Bowser-Chao, D. A. Dicus, and W. W. Repko, *Radiative Higgs boson decays $H \rightarrow f \bar{f} \gamma$* , Phys. Rev. D **55**, 5647 (1997).
- [26] D. Delepine and H. Novaes-Sánchez, *Interplay between neutrino magnetic moments and CP violating phases in left-right models*, Phys. Rev. D **92**, 095016 (2015).
- [27] R. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [28] W. Pauli, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **14**, 1 (2000).
- [29] L. Chau and W. Y. Keung, Phys. Rev. Lett. **53**, 1802 (1984).
- [30] A. D. Zakharov, Sov. Phys. Usp. **34**, 392 (1991).
- [31] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957).
- [32] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **7**, 172-173 (1958).
- [33] M. Gell-Mann and A. Pais, Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
- [34] M. Nakagawa, arXiv:9811358 [hep-ph].
- [35] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **26**, 984-988 (1968).
- [36] G. Danby et al., Phys. Rev. Lett. **9**, 36-44 (1962).

- [37] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **10**, 1236-1240 (1960).
- [38] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [39] B. T. Cleveland et al., Astrophys. J. **496**, 505-526 (1998).
- [40] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett. B **28**, 493 (1969).
- [41] S. Eliezer and A. R. Swift, Nucl. Phys. B **105**, 45 (1976).
- [42] H. Fritzsch and P. Minkowski, Phys. Lett., **B62**, 72 (1976).
- [43] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 316-319 (1976).
- [44] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Nuovo Cim. Lett. **17**, 569 (1976).
- [45] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Phys. Rep., **41**, 225 (1978).
- [46] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957).
- [47] P. Minkowski, Phys. Lett. B **67**, 421 (1977).
- [48] T. Yanagida, 1979, Workshop on the Baryon Number of the Universe and United Theories, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb (1979).
- [49] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, 1979, In "Supergravity", p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam.
- [50] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44**, 914 (1988).
- [51] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1745-1755 (1991).
- [52] U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, Phys. Lett. B **260**, 447-455 (1991).
- [53] J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **260**, 131-137 (1991).
- [54] J. G. Méndez and J. J. Toscano, A nonlinear R_ξ -gauge for the electroweak theory, Rev. Mex. Fís. **50**, 346 (2004).
- [55] G. 't Hooft and M. Veltman, Scalar one-loop integrals, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
- [56] Paul Langacker, *The Standard Model and Beyond* (CRC Press, USA, 2010).
- [57] G. Passarino and M. Veltman, One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
- [58] W. Hollik, J.I. Illana, S. Rigolin, C. Schappacher and D. Stockinger, Nucl. Phys. B **551**, 3-40 (1999).
- [59] C. Giunti and C.W. Kim, Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics (Oxford University Press, New York, 2007).
- [60] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016).

- [61] I. Esteban, M. C. Gonzalez-García, M. Maltoni, I. Martinez-Soler, and T. Schwetz, Updated t to three neutrino mixing: exploring the accelerator reactor complementarity, JHEP **1701**, 087 (2017).
- [62] K. Abe et al. (T2K Collaboration), Phys. Rev. Lett. **112**, 061802 (2014).
- [63] G. Senjanović and V. Tello, Right-Handed Quark Mixing in Left-Right Symmetric Theory, Phys. Rev. Lett. **114**, 071801 (2015).
- [64] G. Senjanović and V. Tello, Restoration of parity and the right-handed analog of the CKM matrix, Phys. Rev. D **94**, 095023 (2016).
- [65] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles, (Wiley-VCH, Germany, 2008).
- [66] U. Bellgardt et al. (SINDRUM Collaboration), Search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$, Nucl. Phys. B **299**, 1 (1988).
- [67] J. P. Lees et al. (BABAR Collaboration), Limits on τ lepton-flavor violating decays into three charged leptons, Phys. Rev. D **81**, 111101(R) (2010).
- [68] K. Hayasaka et al (Belle Collaboration), Search for lepton-flavor-violating τ decays into three leptons with 719 million produced $\tau^+\tau^-$ pairs, Phys. Lett. B **687**, 139 (2010).