

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS



DINÁMICA POLINOMIAL ALTERNADA

TESIS PRESENTADA QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

EDUARDO MONTIEL ORTEGA

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

PUEBLA, PUE

DICIEMBRE 2015

DEDICATORIA

A mi esposa Lulú, al Maestro Estrada, a mis padres... en general a todos y a todo aquello que me ha permitido conservar mi paz mental, asesinar al dragón y encontrar el corazón sagrado.

AGRADECIMIENTOS

“I accept chaos, i´m not sure whether it accepts me” Bob Dylan.

Seré breve, para los que me conocen, no deber ser difícil imaginar la razón de otorgarle una inmensa gratitud a mi esposa, que tiene que lidiar conmigo durante muchas horas cada día, aunque supongo que mi compañía, en ocasiones le causa alguna emoción o sentimiento al menos semejante a la felicidad.

El segundo personaje con el que estoy enteramente agradecido por obvias y no tan obvias razones, es el maestro Estrada, el cual plasma con actitudes y palabras dignas de filósofos, sabios o gurús, la esencia del ser matemático, la esencia de la responsabilidad y la autonomía, y la esencia perdida por muchos desde hace ya bastante tiempo de ser humanos. Sus cualidades parecen permear siquiera de modo infinitesimal en uno, y aunque siempre aparece disfrazado de profesor de algún curso o en este caso director de tesis, si se le observa con detenimiento se encuentra a uno de los mas entrañables y caritativos filósofos, sabios, matemáticos, guías, ciudadanos, humanos.

Introducción

Esta tesis presenta un tema reciente, aunque no nuevo, que ha acaparado la atención de propios y extraños, la dinámica holomorfa, es decir el tratado de las propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas, en particular nos enfocaremos al caso polinomial cuadrático y luego daremos un pequeño giro al asunto para intentar generar una novedad.

La historia de esta teoría empieza con el trabajo en ecuaciones diferenciales de Isaac Newton que intentaba solucionar el problema del movimiento de n cuerpos, luego en 1890 Poincaré en lugar de buscar las soluciones explícitas, se ocupó del estudio cualitativo de los sistemas dinámicos. En la década de 1920 los franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, separadamente, continuaron con el estudio de la dinámica de funciones analíticas complejas, de hecho lograron describir globalmente el comportamiento de su dinámica, produciendo una dicotomía, el conjunto de Fatou y su complemento el conjunto de Julia; pero el trabajo se detuvo debido a la falta de imágenes de computadora. En los últimos 35 años se ha tenido un auge, motivado por los resultados obtenidos mediante computadora en 1980 por Mandelbrot, en especial el descubrimiento del conjunto que lleva su apellido, y por las poderosas herramientas del análisis complejo, desarrolladas principalmente en los trabajos de A. Douady, J. Hubbard y D. Sullivan. El estudio de esta teoría es muy bello y enriquecedor; Uno es premiado con imágenes estupendas, obras de arte, surgidas de la naturaleza matemática, ya uno sumergido en el trance onírico originado por éstas, es atraído sin remedio (como insecto a la orquídea) a entender su origen, sus características, su esencia, y finalmente uno acaba con las patas llenas de polen (para continuar con la analogía del bicho) fecundando la misma flor o incluso otras, tales como ecuaciones diferenciales, teoría de números, grupos, análisis, topología, etcétera; En la aquí presentada, después de la confusión de no poder escapar tan fácil de la orquídea se intentara fecundar una de la misma especie o ¿será incluso la misma flor?.

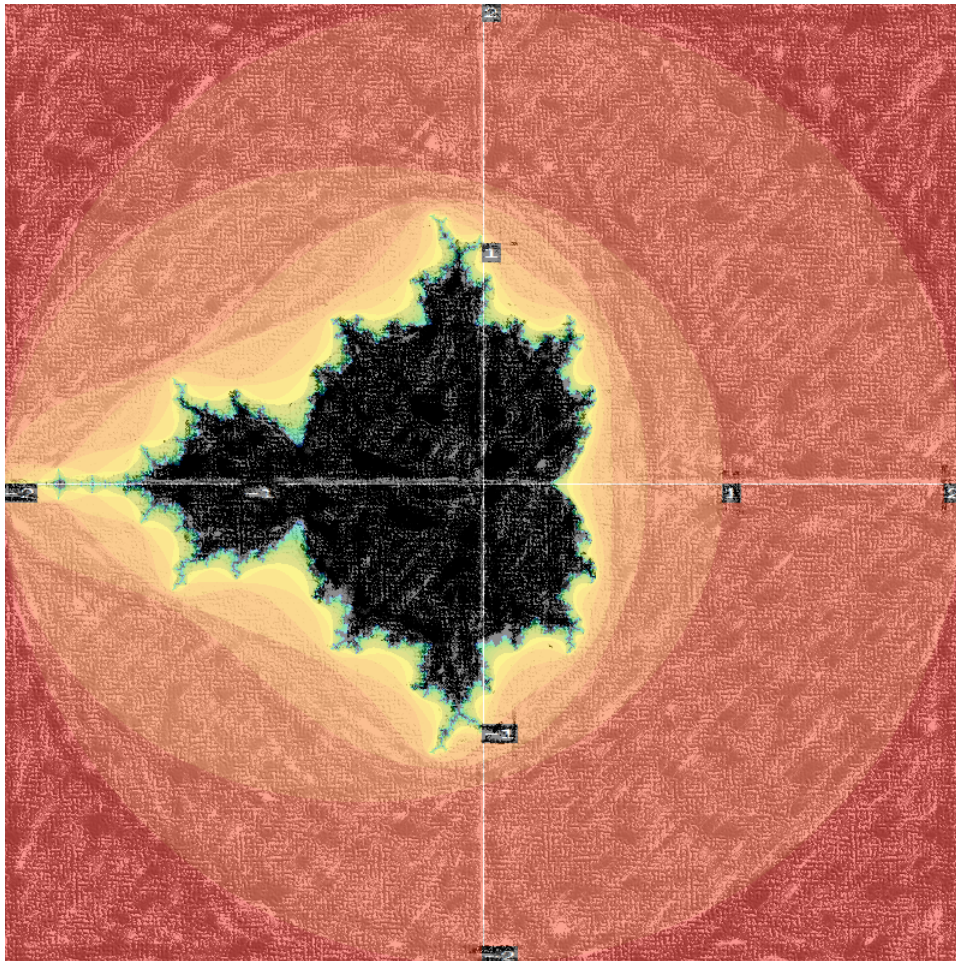
En el capítulo 1, se presenta un poco del material necesario para la comprensión de esta teoría, el lector debe observar desde un principio la versatilidad del tema, y más tarde quedara claro el rol que juegan, por ejemplo el teorema sobre familias normales de Montel o el por demás utilizado teorema de la transformación de Riemann. Además en este capítulo se dan las definiciones básicas de la teoría de iteración y una herramienta que será utilizada con frecuencia, la conjugación. Por último se dan a conocer las funciones racionales, este tipo de funciones es donde muchos de los teoremas sobre iteración son validos, y por consecuencia son útiles en nuestro caso donde solo nos fijamos en polinomios.

En el capítulo 2, se exponen las definiciones del conjunto de Fatou y del conjunto de Julia, desde el punto de vista de las familias normales, y se manifiestan los resultados clásicos obtenidos por Fatou y Julia. Luego se revela la importancia del teorema de Montel, siendo parte esencial en las demostraciones de resultados que conciernen al conjunto de Julia. Después usando hechos topológicos se muestra la estructura de ambos conjuntos. Posteriormente se esclarece la importancia de los puntos fijos y la conjugación, analizando el fenómeno localmente, como se hiciera al inicio del desarrollo de esta teoría con los teoremas de Koenigs y Bötcher. Se sigue con más propiedades de nuestros conjuntos de estudio, obtenidos en gran medida al restringir nuestro campo de trabajo a funciones racionales y en ocasiones a polinomios. Finalmente hace su aparición (al menos de cierto modo) el caso de un polinomio cuadrático.

En el último capítulo, se intenta analizar un caso bastante peculiar, la dinámica polinomial alternada, la cual dependerá de dos parámetros. Por tanto dividiremos el estudio en tres partes, la primera cuando ambos parámetros son cero, donde se usará la conjugación para reducir nuestro problema al caso cuadrático. Luego se tratará el caso cuando solo uno de los dos sea cero, otra vez se mostrará que una conjugación aligera el problema. Por último se dan algunos resultados cuando ambos parámetros no son cero, y su relación con el caso cuadrático.

Fecha: Abril, 2015. Eduardo Montiel Ortega

DINÁMICA POLINOMIAL ALTERNADA



EDUARDO MONTIEL ORTEGA

DICIEMBRE 2015

Contents

Introducción	4
Chapter 1. Preliminares	8
1.1. Análisis Complejo	8
1.2. Sistemas dinámicos discretos	14
1.3. Funciones racionales	16
Chapter 2. Conjuntos de Julia y Fatou	18
2.1. Definición y primeros resultados	18
2.2. Propiedades del conjunto de Julia	20
2.3. Estructura de los conjuntos de Fatou y de Julia	24
2.4. Teoría local de los puntos fijos	26
2.5. Más propiedades de los Conjuntos de Julia y de Fatou	36
2.6. El espacio de parámetros	41
Chapter 3. Dinámica polinomial alternada	45
3.1. Dinámica de la función z^4	45
3.2. Dinámica de la función $z^4 + c$	47
3.3. Dinámica de la función $(z^2 + c_1)^2 + c_2$	59
Conclusión	70
Bibliography	71
Índice alfabético	72
Apéndice	73
Programa A	73
Programa B	75
Programa C	76
Programa D	78
Programa E	80
Programa F	81

CHAPTER 1

Preliminares

En este capítulo se presentarán las bases necesarias para la asimilación, de la teoría posterior; Aunque el lector deberá observar que si se desea avanzar más profundamente en el tema, estos preliminares serían insuficientes.

1.1. Análisis Complejo

Comencemos por desempolvar algunas definiciones y teoremas.

DEFINICIÓN. Una transformación uno a uno, f , de A sobre B es un homeomorfismo si ambas f y f^{-1} son continuas.

Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$ es un homeomorfismo entre el intervalo $(0, 1)$ y \mathbb{R} .

DEFINICIÓN. Un dominio Ω es un subconjunto abierto y conexo del plano.

DEFINICIÓN. Si Ω un dominio en \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ entonces f es diferenciable en el punto a en G si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, el valor de este límite es denotado por $f'(a)$ y es llamado la derivada de f en a ; Si la derivada existe en todo punto en la que f este definida se dice diferenciable o equivalentemente holomorfa; Si además f' es continua entonces decimos que f es continuamente diferenciable. Más si f' es diferenciable entonces f es dos veces diferenciable; de igual modo una función diferenciable para la cual cada derivada sucesiva es diferenciable se dice infinitamente diferenciable.

DEFINICIÓN. La transformación $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es meromorfa en Ω , si cada punto de Ω tiene una vecindad sobre la cual f o bien $\frac{1}{f}$ es holomorfa. Los polos de f son los puntos w donde $f(w) = \infty$, y cerca de tales puntos la transformación $z \rightarrow \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa con valor cero en w .

DEFINICIÓN. Una función f se dice definida *cerca* o en alguna vecindad de ∞ si esta está definida en algún conjunto $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$, y en este caso, es holomorfa (o meromorfa) en ∞ si la transformación $z \rightarrow f(\frac{1}{z})$ es holomorfa (o meromorfa) cerca del origen.

DEFINICIÓN. Una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ entre dos subdominios de $\bar{\mathbb{C}}$ es analítica en Ω_1 si es holomorfa o meromorfa en cada punto de Ω_1 .

DEFINICIÓN. Una serie de potencias es de la forma

$$(1.1.1) \quad a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots$$

donde los coeficientes a_n y la variable z son complejos. Más generalmente consideraremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

las cuales son series de potencias con respecto al centro z_0 .

TEOREMA 1.1.1. *Para toda serie de potencias (1.1) existe un número R , $0 \leq R \leq \infty$, llamado el radio de convergencia, con las siguientes propiedades:*

- (i) La serie converge absolutamente para toda z con $|z| < R$. Si $0 \leq \rho \leq R$ la convergencia es uniforme para $|z| \leq \rho$.
- (ii) Si $|z| > R$ los términos de la serie no son acotados, y la serie por consecuencia es divergente.
- (iii) En $|z| < R$ la suma de la serie es una función analítica. La derivada puede ser obtenida por diferenciación término a término, y la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia.

Para la demostración el lector puede consultar [Ahl].

TEOREMA 1.1.2. *Si $f(z)$ es analítica en la región Ω , que contiene a z_0 , entonces la representación*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \cdots$$

es válida en el disco abierto más grande de centro z_0 contenido en Ω .

DEFINICIÓN. Un conjunto abierto y conexo G es simplemente conexo si toda curva cerrada en G se puede deformar continuamente a un punto. En ocasiones se dice que son aquellos conexos abiertos que no tienen huecos.

DEFINICIÓN. Una variedad conexa analítica compleja de dimensión compleja uno es llamada una superficie de Riemann. Dos de tales superficies S y S' son conformemente isomorfas si existe un homeomorfismo de S sobre S' el cual es holomorfo, con inversa holomorfa.

TEOREMA 1.1.3. (*uniformización de superficies de Riemann*). *Toda superficie de Riemann es conformemente isomorfa a una y solo una de las siguientes superficies*

- (1) al plano \mathbb{C}

- (2) al disco abierto unitario $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
 (3) a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ la cual consiste de \mathbb{C} junto con un punto en infinito.

LEMA 1.1.4. (**Schwarz**). Si $f : D \rightarrow D$ es una transformación holomorfa con $f(0) = 0$, entonces la derivada en el origen cumple $|f'(0)| \leq 1$. Si se tiene la igualdad, entonces f es una rotación sobre el origen, es decir $f(z) = \lambda z$ para alguna constante $\lambda = f'(0)$ sobre el círculo unitario. En particular se tiene que f es un automorfismo de D . De otro modo, si $|f'(0)| < 1$, entonces $|f(z)| < |z|$ para toda $z \neq 0$, y f no es automorfismo conforme.

Una prueba de esto puede encontrarse en [Mil].

Una corolario del lema anterior es el teorema de Liouville, el cual dice que una función acotada la cual esta definida y es holomorfa en cualquier lugar de \mathbb{C} debe ser constante.

TEOREMA 1.1.5. Sea G un dominio y suponga que f es una función analítica no constante en G . Entonces para todo conjunto A abierto en G , $f(A)$ es abierto.

TEOREMA 1.1.6. (**Modulo máximo primera versión**). Si f es analítica en un dominio G y a es un punto en G , con $|f(a)| \geq |f(z)|$ para toda z en G , entonces f debe ser una función constante.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Omega = f(G)$ y $\alpha = f(a)$ por hipótesis $|\alpha| \geq |\epsilon|$ para cada ϵ en Ω , entonces $\alpha \in \partial\Omega \cap \Omega$. En particular, el conjunto no puede ser abierto ya que si lo fuera $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$, por tanto por el teorema 5 f debe ser constante \square .

La siguiente versión del teorema es la que ocuparemos usualmente.

TEOREMA 1.1.7. (**Modulo máximo segunda versión**). Sea G un conjunto abierto acotado en \mathbb{C} , f una función analítica continua en \hat{G} y analítica en G . Entonces $\max \{|f(z)| : z \in \hat{G}\} = \max \{|f(z)| : z \in \partial G\}$.

DEMOSTRACIÓN: Como G es acotado, existe un punto $a \in \hat{G}$ tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \hat{G}$. Si f es una función constante el resultado es trivial. Si f no es constante el resultado se sigue del TEOREMA 1.1.6 \square .

TEOREMA 1.1.8. (**Transformación de Riemann**). Dado cualquier dominio simplemente conexo Ω diferente del plano completo, y un punto $a \in \Omega$, existe una única función analítica $f(z)$ en Ω , normalizada por las condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, tal que $f(z)$ define una transformación uno a uno de Ω sobre el disco $|w| < 1$.

De nuevo una demostración puede ser encontrada en [Ahl].

Nos gustaría establecer dos teoremas fundamentales debidos a C. Carathéodory (1913) y E. Lindelöf (1915).

DEFINICIÓN. Decimos que un conjunto compacto K es localmente conexo en $z_0 \in K$ si para cualquier sucesión $\{z_n\} \subset K$ convergente a z_0 existe, para n grande, un conjunto conexo $L_n \subset K$ que contiene a z_0 y z_n , tal que $\text{diam}(L_n) \rightarrow 0$. Un conjunto compacto es localmente conexo si es localmente conexo en todo punto.

TEOREMA 1.1.9. (Carathéodory). *Sea Ω un dominio simplemente conexo en $\overline{\mathbb{C}}$ cuya frontera tiene al menos dos puntos. Entonces $\partial\Omega$ es localmente conexa si y sólo si la transformación de Riemann $\psi : D \rightarrow \Omega$ se extiende continuamente al disco cerrado \overline{D} .*

En este caso la prueba anterior y también la siguiente se pueden consultar en [Car].

Recuerde que un ángulo de Stolz en $\zeta_0 \in \partial D$ es un sector en D con vértice en ζ_0 y apertura estrictamente menor que π , bisectada por el radio.

Para el estudio local de una transformación conforme en un punto frontera z_0 , aparece una consecuencia inmediata de dos bien conocidos teoremas de Lindelöf.

TEOREMA 1.1.10. *Sea $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ simplemente conexo, suponga que $\partial\Omega$ tiene mas de un punto, y sea $\varphi(\zeta)$ que transforma D conformemente a Ω . Sea γ un arco de Jordan en Ω excepto para un extremo $z_0 \in \partial\Omega$. Entonces la curva $\varphi^{-1} \circ \gamma$ arriba en un punto $\zeta_0 \in \partial D$, y $\varphi(\zeta) \rightarrow z_0$ cuando $\zeta \rightarrow \zeta_0$ dentro de cualquier angulo de Stolz en ζ_0 .*

DEFINICIÓN. Sean R y S superficies de Riemann. Una transformación holomorfa $P : R \rightarrow S$ es una transformación cubriente si todo $w \in S$ esta en un disco coordinado U tal que cada componente conexa de $P^{-1}(U)$ es transformada conformemente por P sobre U .

DEFINICIÓN. Si S es una superficie de Riemann, entonces entonces su cubriente universal S^∞ es una superficie de Riemann simplemente conexa bien definida, con una proyección canónica $p : S^\infty \rightarrow S$. De acuerdo con el teorema de uniformización, el cubriente universal S^∞ debe ser conformemente equivalente a uno y sólo uno de nuestros modelos, es decir D , \mathbb{C} o $\overline{\mathbb{C}}$. Los tres casos son nombrados como hiperbólico, parabólico y elíptico respectivamente.

Para nuestro estudio nos enfocaremos en el caso hiperbólico.

EJEMPLO 1.1.11. (Hiperbólico maximal). Si a_1, a_2, a_3 son tres puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces el complemento $\sum_3 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ llamado la esfera tres veces perforada, es una superficie hiperbólica.

TEOREMA 1.1.12. (de Picard). *Cualquier transformación holomorfa de $\mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que omita tres diferentes valores debe ser constante. Más generalmente, si la superficie de Riemann S admite alguna transformación holomorfa no constante a la esfera tres veces perforada \sum_3 , entonces S debe ser hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN: Esta transformación $f : S \rightarrow \sum_3$ puede ser levantada a una transformación holomorfa del cubriente universal S^∞ a el cubriente universal $\sum_3^\infty \cong D$. Por el teorema de Liouville se sigue que $S^\infty \cong D$ \square .

DEFINICIÓN. Sea S y S' superficies de Riemann, con S' compacto. Una colección \mathcal{F} de transformaciones holomorfas $f_\alpha : S \rightarrow S'$ es normal si toda sucesión infinita de transformaciones de \mathcal{F} contiene una subsucesión la cual converge uniformemente localmente a un limite.

DEFINICIÓN. Si consideramos que S' no es compacto, la definición sería modificada como sigue. Continuemos asumiendo que S es conexo. Una colección \mathcal{F} de transformaciones holomorfas $f_\alpha : S \rightarrow S'$ es normal si toda sucesión infinita de transformaciones de \mathcal{F} contiene una subsucesión la cual

- (1) converge uniformemente localmente a una transformación holomorfa de $S \rightarrow S'$, o bien
- (2) diverge uniformemente localmente a infinito, en el sentido de que las imágenes sucesivas de cualquier subconjunto compacto de S eventualmente omiten cualquier subconjunto compacto de S' .

Denotemos por Ω un dominio en \mathbb{C} , y sea

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}\}$$

Sea $\{E_k\}$ una sucesión decreciente de compactos, tal que cada compacto E de Ω este contenido en algún E_k . Considérese la métrica δ en \mathbb{C} definida por

$$\delta(a, b) = \frac{|a - b|}{1 + |a - b|}$$

DEFINICIÓN. Sea

$$\delta_k(f, g) = \sup_{z \in E_k} \delta(f(z), g(z))$$

la cual es una métrica para \mathcal{F} restringida a E_k . En consecuencia,

$$\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k(f, g)}{2^k}$$

es una métrica para \mathcal{F} en Ω , respecto a la cual, la convergencia significa convergencia uniforme en compactos de Ω .

EJEMPLO 1.1.13. Sea $f(z) = az$ con $|a| < 1$ y sea $f_n(z) = f^n(z)$. Entonces $\{f_n\}$ forman una familia normal de funciones sobre cualquier dominio en \mathbb{C} , debido a que f_n converge uniformemente a la función constante 0 en subconjuntos compactos.

El teorema de Bolzano-Weierstrass afirma: Un espacio métrico es compacto si y solo si cada sucesión infinita tiene una subsucesión convergente. Aplicando este teorema al espacio métrico (\mathcal{F}, ρ) , tenemos: (\mathcal{F}, ρ) es compacto si y solo si \mathcal{F} es normal, y si las funciones límite pertenecen a \mathcal{F} . Por otro lado, si \mathcal{F} es normal, también lo es su cerradura $\overline{\mathcal{F}}$. Por tanto obtenemos la siguiente caracterización de las familias normales:

TEOREMA 1.1.14. *Una familia \mathcal{F} es normal si y sólo si $(\overline{\mathcal{F}}, \rho)$ es compacto.*

Se acostumbra decir que \mathcal{F} es relativamente compacta si $\overline{\mathcal{F}}$ es compacta. Así, familias normales y familias relativamente compactas son lo mismo.

DEFINICIÓN. Un conjunto A es totalmente acotado si, para cada $\epsilon > 0$, A puede ser cubierto por una cantidad finita de bolas de radio ϵ . Puesto que: Un conjunto es compacto si y solo si este es completo y totalmente acotado, tenemos:

TEOREMA 1.1.15. *$(\overline{\mathcal{F}}, \rho)$ es normal si y solo si ésta es totalmente acotada.*

El siguiente resultado establece la condición de acotación total en términos del valor absoluto en \mathbb{C} .

TEOREMA 1.1.16. *La familia \mathcal{F} es totalmente acotada si y solo si para cada compacto $E \subset \Omega$ y para cada $\epsilon > 0$, es posible encontrar $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que para cada $f \in \mathcal{F}$ se satisface $|f(z) - f_j(z)| < \epsilon$ para cada $z \in E$ para alguna $j = 1, \dots, n$.*

DEFINICIÓN. Las funciones en una familia \mathcal{F} se les llama equicontinuas en un conjunto $E \subset \Omega$ si y solamente si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ si $|z - z_0| < \delta$ con $z, z_0 \in E$, simultáneamente para toda función $f \in \mathcal{F}$.

El siguiente teorema marca la pauta para relacionar funciones normales y equicontinuas.

TEOREMA 1.1.17. (Arzela-Ascoli). *Una familia \mathcal{F} de funciones continuas es normal en un dominio Ω si y solo si*

- (i) \mathcal{F} es equicontinua en cada compacto de Ω
- (ii) Para cada $f \in \mathcal{F}$, la cerradura de $f(\Omega)$ es un compacto de \mathbb{C} .

Para funciones analíticas tenemos:

TEOREMA 1.1.18. *Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas es normal, si y solo si está es localmente acotada.*

Además la acotación local se hereda para sus derivadas.

TEOREMA 1.1.19. *Una familia de funciones analíticas localmente acotada, tiene derivadas localmente acotadas.*

Cuando los elementos de \mathcal{F} son funciones meromorfas, la condición (ii) es innecesaria usando la métrica esférica $\frac{2|dz|}{1+|z|^2}$. En este caso se permite que $f_n \rightarrow \infty$ en la definición de normalidad. Así que $f \equiv \infty$ es considerada una función meromorfa.

Por último, se enuncia el resultado clave que permite el estudio de la dinámica generada por iteraciones de funciones analíticas.

TEOREMA 1.1.20. (Montel). *Sea S cualquier superficie de Riemann. Si \mathcal{F} es una familia de funciones holomorfas de S a $\overline{\mathbb{C}}$, la cual tiene valores en algún subconjunto abierto hiperbolico $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, o equivalentemente si existen tres puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ los cuales omite como valores entonces \mathcal{F} es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Picard la superficie S debe ser hiperbólica, a menos que todas nuestras transformaciones sean constantes. Podemos asumir que S es un disco, y, por composición con una transformación de Möbius, podemos asumir que las funciones en \mathcal{F} omiten los valores $0, 1, \infty$. Sea $R = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ entonces existe una transformación cubriente $\psi : D \rightarrow R$. Sea $\tilde{f} : S \rightarrow D$ un levantamiento de $f \in \mathcal{F}$, tal que $\tilde{f} \circ \psi = f$. Entonces $\tilde{f} : f \in \mathcal{F}$ es una familia normal y esto implica que \mathcal{F} es normal \square .

1.2. Sistemas dinámicos discretos

DEFINICIÓN 1.2.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \rightarrow X$ continua, al par (X, f) se le llama sistema dinámico discreto generado por f , y a la composición $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n -veces) se la llama la n -ésima iterada de f . En particular si f es holomorfa diremos que es un sistema dinámico holomorfo discreto.

Nuestro problema básico se centra en obtener el retrato fase de dicho sistema, esto es, el comportamiento de sus diferentes trayectorias u órbitas. Estimulados por este hecho damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2.2. Dado (X, f) un sistema dinámico discreto, definimos

- (1) La órbita hacia adelante de z a través de f como $\{f^n(z) | n \in \mathbb{N} \cup 0\}$ denotado por $\mathcal{O}^+(z)$.
- (2) Si f es un homeomorfismo, podemos definir la órbita completa de z como $\mathcal{O}(z) = \{f^n(z) | n \in \mathbb{N} \cup 0\} \cup \{w \in X | f^m(w) = z \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$
- (3) La órbita hacia atrás de z a través de f como $\mathcal{O}^-(z) = \{w \in X | f^m(w) = z \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$, y
- (4) La órbita grande de z a través de f como $\mathcal{GO}(z) = \{w \in X | f^n(w) = f^m(z) \text{ para algunos } n, m \in \mathbb{N}\}$.

EJEMPLO 1.2.3. Transformaciones de Möbius

Una transformación de Möbius es una función racional de la forma

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

con la convención usual de que $R(\infty) = a/c$, y $R(-d/c) = \infty$, si $c \neq 0$, y $R(\infty) = \infty$ cuando $c = 0$.

Consideremos la función $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $L(z) = \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$, los puntos fijos de esta función son los $z \in \mathbb{C}$, tales que $L(z) = z$, así que si $\lambda \neq 0, 1$, entonces $z = 0$ es el único punto de fijo de L y si $\lambda = 1$, L fija todo elemento de \mathbb{C} . Si $z \neq 0$, la órbita de z se puede calcular como,

$$\mathcal{O}^+(z) = \{z_0 := z, z_1 = \lambda L(z_0), z_2 = L(z_1), \dots\}$$

por lo cual $L^n(z_0) = \lambda^n z_0$ y $\mathcal{O}^+(z)$ consta de una sucesión que converge a $z = 0$ si $|\lambda| < 1$ y de una sucesión que diverge a ∞ si $|\lambda| > 1$. Si $|\lambda| = 1$, tenemos dos posibilidades, que el argumento θ de λ sea racional o irracional, en el primer caso, si $\theta = \frac{p}{q}$ con p y q coprimos, $\lambda^q = 1$ y $L^q(z) = z$, así que $\mathcal{O}^+(z)$ consta de un conjunto con q -puntos en la circunferencia de radio $|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, la cual se conoce como órbita periódica, ya que si tomamos cualquiera de esos puntos y le aplicamos iteradamente L q -veces, regresamos al punto inicial. Por último si θ es irracional, $\mathcal{O}^+(z)$ consta de un conjunto denso en esa circunferencia.

Para la función $L : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida por $L(z) = z + b$ donde $b \in \mathbb{C}^* := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ y $L(\infty) = \infty$, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{O}^+(z)$ consta de una sucesión que diverge a ∞ .

Si ahora $L : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es definida por $L(z) = 1/z$, con $L(0) := \infty$ y $L(\infty) := 0$, puede determinarse $\mathcal{O}^+(z)$ sin mayor dificultad.

Por lo que hemos observado se pueden calcular explícitamente los elementos de $\mathcal{O}_f^+(z)$, para f una transformación de Möbius y por ende su dinámica es completamente entendida.

El lector interesado en un poco mas de detalles puede consultar, por ejemplo [Bea].

Por la discusión anterior parece claro que los puntos fijos y los que forman una órbita periódica son importantes en nuestra teoría, en seguida damos la definición de estos ademas de una clasificación para ellos.

DEFINICIÓN. El punto z es un punto fijo de f si $f(z) = z$. Análogamente un punto z es un punto periódico de periodo n si $f^n(z) = z$, el menor entero positivo n tal que $f^n(z) = z$ es llamado el periodo de z . En particular un punto fijo es un punto periódico de periodo n . El conjunto de todas las iteradas de un punto periódico forman una órbita periódica, digamos $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ donde $x_i = f^i(z)$.

Nuestro interés en estos puntos radica en que en una vecindad cercana de estos, el comportamiento de nuestra función es un tanto peculiar, y por ende el comportamiento de los puntos en esa vecindad. Para aclarar esto sigamos con una definición.

DEFINICIÓN. Sea z_0 un punto periódico de periodo n . Entonces el número $\lambda_{z_0} = (f^n)'(z_0)$ si $z_0 \neq \infty$ es el multiplicador de la órbita periódica, y si $z_0 = \infty$, se define $\lambda_{z_0} = (A \circ f^n \circ A^{-1})'(0)$ usando el cambio de coordenadas $A(z) = \frac{1}{z}$. En nuestro caso hay que observar que la regla de la cadena implica que λ_{z_0} es el producto de las derivadas de f a través de la órbita.

Entonces, si z es cercano a z_i , $f^n(z) - z_i$ es aproximadamente $\lambda(z - z_i)$. Ademas podemos identificar otro tipo de puntos

DEFINICIÓN. Un punto z es pre-periódico, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x)$ es q -periódico. Se observa que un punto periódico es por consecuencia pre-periódico.

El paso natural es cuestionarnos acerca de la convergencia de la sucesión $\{z_n\} = \mathcal{O}_f^+(z_0)$ y que pasaría a está si perturbamos un poco a z_0 .

Notemos que si para algún z_0 , la sucesión $\{z_n\}$ converge a w , entonces: $w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = R(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = R(w)$ así que w es un punto fijo de R .

Una herramienta útil para nuestro estudio sera el concepto de conjugación.

DEFINICIÓN. Sean (X, f) y (X, g) sistemas dinámicos discretos, diremos que (X, f) es conjugada a (X, g) (resp. semi conjugada) mediante h , donde $h : X \rightarrow X$ es homeomorfismo (resp. sobreyectiva), si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

esto es, $h \circ f(z) = g \circ h(z)$ para todo $z \in X$, lo cual equivale a $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

EJEMPLO. z^k y z^{-k} son conjugadas.

La definición nos dice que, las iteradas f^n y g^n son también conjugadas, $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$, y además f^{-1} y g^{-1} aún lo son $g^{-1} = h \circ f^{-1} \circ h^{-1}$. Notemos entonces que h transforma puntos fijos de f en puntos fijos de g , y que los multiplicadores en los correspondientes puntos fijos son iguales.

1.3. Funciones racionales

En nuestro estudio nos enfocaremos generalmente en funciones racionales y particularmente en polinomios.

DEFINICIÓN. Una función racional $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, es una función holomorfa $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y sin factores comunes, y el grado de R está definido por, $\text{grad}(R) = \max\{\text{grad}(p), \text{grad}(q)\}$.

A continuación daremos una muestra de la aplicación de la conjugación definida en la sección anterior, pero antes una definición.

DEFINICIÓN. Un punto z es un punto crítico de f , si f no es inyectiva en cualquier vecindad de z ; alternativamente en nuestro caso si la derivada de f se anula en z o si z es un polo múltiple de f . Un valor w es un valor crítico para f si este es imagen de un punto crítico; esto es $w = f(z)$ para algún punto crítico z .

Ahora nos gustaría calcular el multiplicador para una función racional para cualquier punto fijo ζ , en particular si este punto es ∞ , supongamos que

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}$$

con $a_nb_m \neq 0$ y $n > m$, así R fija a ∞ . Por definición λ_∞ es la derivada de

$$S(z) = 1/[R(1/z)]$$

en el origen y por tanto

$$S'(0) = \begin{cases} b_m/a_n & \text{si } n = m + 1 \\ 0 & \text{si } n > m + 1 \end{cases}$$

otro calculo usando el hecho de que $R'(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} R'(z_n)$ muestra

$$R'(\infty) = \begin{cases} a_n/b_m & \text{si } n = m + 1 \\ \infty & \text{si } n > m + 1 \end{cases}$$

lo anterior nos permite definir el multiplicador de cualquier punto ζ de una función racional R como

$$\lambda_\zeta = \begin{cases} R'(\zeta) & \text{si } \zeta \neq \infty \\ 1/R'(\infty) & \text{si } \zeta = \infty \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 1.3.1. *La primera parte de esta proposición es conocida como la fórmula de Riemann-Hurwitz.*

- (1) Sea R una función racional de grado d , entonces el número de puntos críticos contados con multiplicidad es $2(d-1)$
- (2) Sea R una función racional de grado d , entonces f tiene a lo mas $d+1$ puntos fijos.

DEMOSTRACIÓN:

(i) Por conjugación supongamos que ∞ no es un punto crítico o un valor crítico para R , y $R(\infty) = 0$, por tanto.

$$R(z) = \frac{a + \dots + wz^{d-1}}{b + \dots + z^d}$$

y encontrar los puntos críticos es encontrar las soluciones de $R'(z) = 0$ o equivalentemente

$$(dz^{d-1} + \dots + k)(a + \dots + wz^{d-1}) - (b + \dots + z^d)(c + \dots + (d-1)wz^{d-2}) = 0$$

que tiene $2(d-1)$ soluciones contadas con multiplicidad. Si ∞ es un punto crítico o valor crítico, consideremos x elemento del plano distinto de cero, no punto crítico o valor crítico, tampoco fijo ni polo. Sea M una transformación de Möbius que manda la terna $(\infty, 0, x)$ en $(x, f(x), \infty)$, tendremos que $g = M^{-1} \circ f \circ M(\infty) = 0$, y por tanto ∞ no podría ser punto crítico ni polo.

(ii) Sea $R = \frac{p}{q}$ con p y q coprimos, entonces $R(x) = x$ es equivalente a $p(x) - xq(x) = 0$, la cual tiene al menos una solución ζ . Sea M la transformación de Möbius que manda ζ a ∞ , se tiene que $h = M \circ R \circ M^{-1}$ fija al infinito, con lo cual $h(z) = \frac{f(z)}{s(z)}$ con f y s polinomios coprimos y $\text{grad}(f) = d > \text{grad}(s)$, con lo cual $h(x) = x$ tiene a lo más d soluciones, y por tanto R tiene a lo sumo $d+1$ puntos fijos \square .

En particular si R es un polinomio de grado positivo d este tiene a lo más $d-1$ puntos críticos.

CHAPTER 2

Conjuntos de Julia y Fatou

2.1. Definición y primeros resultados

Ahora daremos paso a los germenos de esta teoría, una buena parte de esta desarrollada por Pierre Fatou y Gaston Julia de manera independiente. La idea en el capítulo anterior de equicontinuidad nos dice cuando una familia de funciones tiene un buen comportamiento, el siguiente teorema estimulara nuestra definición del conjunto Estable o el también llamado conjunto de Fatou.

TEOREMA 2.1.1. *Sea F una familia de funciones, cada función de (X, d) en (X_1, d_1) . Entonces existe un subconjunto maximal abierto de X sobre el cual F es equicontinua. En particular, si f transforma un espacio métrico (X, d) en sí mismo, entonces existe un subconjunto maximal abierto de X sobre el cual la familia de iteradas $\{f^n\}$ es equicontinua.*

DEFINICIÓN. Sea R una transformación racional. El conjunto Fatou de R denotado por $F(R)$ es el subconjunto maximal abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ sobre el cual $\{R^n\}$ es equicontinua, y el conjunto de Julia de R escrito $J(R)$ es el complemento de $F(R)$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Hay que observar que por definición el conjunto de Fatou es abierto, y el conjunto de Julia es compacto.

TEOREMA 2.1.2. *Para cualquier transformación racional no constante R , y para cualquier entero positivo p , $F(R^p) = F(R)$ y $J(R^p) = J(R)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = R^p$. Como $\{S^n : n \geq 1\}$ es una subfamilia de $\{R^n : n \geq 1\}$, entonces esta familia es equicontinua donde $\{R^n : n \geq 1\}$ lo es, por tanto $F(R) \subset F(S)$. Ahora, como cada R^k satisface una condición de Lipschitz, la familia $\mathcal{F}_k = \{R^k(S^n) : n \geq 0\}$ es equicontinua dondequiera que $\{S^n : n \geq 1\}$ lo sea. En particular, cada \mathcal{F}_k es equicontinua en el conjunto $F(S)$, y entonces también lo es la unión finita $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{p-1}$. Como esta unión es $\{R^n : n \geq 0\}$, la familia $\{R^n : n \geq 1\}$ es equicontinua en $F(S)$, de este modo $F(S) = F(R)$. Uno de los primeros resultados es que los conjuntos de Fatou y de Julia son completamente invariantes, empecemos con la definición de los tipos de invarianza.

DEFINICIÓN. Sea g una transformación de X en sí mismo, un subconjunto E de X es:

- Invariante hacia adelante sí $g(E) = E$.
- Invariante hacia atrás sí $g^{-1}(E) = E$.
- Completamente Invariante sí $g(E) = E = g^{-1}(E)$.

Nota: si g es sobreyectiva entonces los conceptos de invariante hacia atrás y completamente invariante coinciden.

TEOREMA 2.1.3. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a 2 y sea E un conjunto finito completamente invariante bajo R . Entonces E tiene a los más dos elementos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que E tiene k elementos, Como E es finito y como R transforma E en si mismo, R debe actuar como una permutación de E y para algún entero q , R^q es la transformación identidad. Ahora si R^q tiene grado d , se sigue que para todo w en E , la ecuación $R^q(z) = w$ tiene d soluciones, y por la relación de Riemann-Hurwitz aplicada a R^q , tenemos que $k(d-1) \leq 2d-2$, por último como $d \geq 2$, se obtiene que $k \leq 2$. \square .

TEOREMA 2.1.4. *Sea g una transformación abierta continua de un espacio topológico X sobre sí mismo y sea E un subconjunto de X completamente invariante bajo g . Entonces también lo son su complemento $X - E$, su interior E , su frontera ∂E y su clausura \bar{E} .*

DEMOSTRACIÓN: Es de cierto modo fácil ver que $X - E$ es completamente invariante. Ahora como g es continua en X , $g^{-1}(E^0)$ es un subconjunto abierto de $g^{-1}(E)$, y por lo tanto (por la invarianza) de E . Así, de esta manera $g^{-1}(E^0) \subset E^0$. Similarmente, como g es una transformación abierta, $g(E^0)$ es un subconjunto abierto de E y entonces $g(E^0) \subset E^0$. Por lo tanto

$$E^0 \subset g^{-1}g(E^0) \subset g(E^0)$$

entonces E^0 es completamente invariante.

Ahora sabemos que la completa invarianza de E implica la de $X - E$ y E^0 , y por tanto los argumentos topológicos usuales garantizan que la clausura y la frontera de E son también completamente invariantes. \square .

Uno de los primeros resultados interesantes es el siguiente:

TEOREMA 2.1.5. *Sea R una transformación racional. Entonces $F(R)$ y $J(R)$ son completamente invariantes.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente probar que F es completamente invariante, y como R es sobreyectiva, solo necesitamos probar que es invariante hacia atrás. Tomemos cualquier z_0 en $R^{-1}(F)$ y sea $w_0 = R(z_0)$, entonces w_0 esta en F . De esto se sigue que dado cualquier ε positivo, existe δ positiva tal que si $\sigma(w, w_0) < \delta$, entonces para toda n , $\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) < \varepsilon$. Por la continuidad, existe un ρ positivo tal que si $\sigma(z, z_0) < \rho$, entonces $\sigma(R(z), w_0) < \delta$, así $\sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$. Esto muestra que $\{R^{n+1} : n \geq 1\}$ es equicontinua en z_0 , y por tanto en $R^{-1}(F)$. Como $R^{-1}(F)$ es abierto, deducimos que $R^{-1}(F) \subset F$.

Para probar la inclusión opuesta, tomemos cualquier z_0 en F y sea $w_0 = R(z_0)$, como z_0 esta en F , dado ε positivo existe un δ positivo tal que para todo n , si $\sigma(z, z_0) < \delta$, entonces $\sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$, el conjunto de los z tales que $\sigma(z, z_0) < \delta$ es una vecindad abierta N de z_0 , y tal que $R(N)$ es una vecindad abierta de w_0 , si w esta en $R(N)$, entonces $w = R(z)$ para alguna z en N , de este modo $\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) = \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$. Esto muestra que w_0 esta en F , y $F \subset R^{-1}(F)$. \square . Si R es un polinomio, podemos decir más aun.

TEOREMA 2.1.6. *Sea P un polinomio de grado mayor o igual a 2. Entonces ∞ está en $F(P)$, y la componente F_∞ de F que contiene a ∞ es completamente invariante bajo P .*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que existe una vecindad W de ∞ en la cual $P^n \rightarrow \infty$ uniformemente, así dado un $\varepsilon > 0$, existe un entero N , tal que si $n \geq N$, y si $z, w \in W$, se tiene $\sigma(P^n(z), P^n(w)) \leq \sigma(P^n(z), \infty) + \sigma(\infty, P^n(w)) < \varepsilon$, por tanto la familia $\{P^n\}$ es equicontinua en W , de este modo $\infty \in F$.

Para mostrar que F_∞ es completamente invariante, observemos que $P(F_\infty)$ contiene a ∞ y además es un subconjunto conexo de F , de este modo P transforma F_∞ dentro de sí mismo y como consecuencia $F_\infty \subset P^{-1}(F_\infty)$, ahora sea $z \in P^{-1}(F_\infty)$, por el teorema anterior z está en alguna componente digamos F_1 de F , y por el argumento dado P transforma F_1 dentro de F_∞ . Si $F_1 \neq F_\infty$, existiría algún punto $\zeta \in \partial F_1$ con $P(\zeta) \in F_\infty$, pero esto no puede ser ya que $\zeta \in J(P)$ y J es completamente invariante, se sigue que $P(F_1) = F_\infty$, y por tanto que F_1 contiene algún w que cumple $P(w) = \infty$. Pero entonces $w = \infty$, $F_1 = F_\infty$ y $z \in F_\infty$. \square .

TEOREMA 2.1.7. *Sea f una transformación continua de un espacio topológico X sobre sí mismo, y supongamos que X tiene un número finito de componentes X_j . Entonces para algún entero m , cada X_j es completamente invariante bajo f^m .*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que cada $f(X_j)$ es conexo, y por tanto f induce una transformación $\tau : \{0, 1, \dots, t\} \rightarrow \{0, 1, \dots, t\}$, donde t es el número de componentes, definida por $\tau(i) = j$ con $f(X_i) \subset X_j$, como f es sobreyectiva también lo es τ , así τ es necesariamente una permutación de $\{0, 1, \dots, t\}$, de este modo τ tiene orden finito, digamos m , y para toda j , $f^m(X_j) = X_j$. Usando el hecho de que las componentes son disjuntas dos a dos muestra que cada X_j es completamente invariante bajo f^m . \square .

2.2. Propiedades del conjunto de Julia

Ahora nos concentraremos en las propiedades del conjunto de Julia, para esto fijemos en el siguiente tipo de puntos bastante peculiar.

DEFINICIÓN. Un punto z es un punto excepcional para R si $G\mathcal{O}(z)$ es finita, y el conjunto de tales puntos es denotado por $E(R)$.

TEOREMA 2.2.1. *Una transformación racional R de grado mayor o igual a dos tiene a lo más dos puntos excepcionales. Si $E(R) = \{\zeta\}$, entonces R es conjugada a un polinomio con ζ correspondiente a ∞ . Si $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, donde $\zeta_1 \neq \zeta_2$, entonces R es conjugada a una transformación $z \rightarrow z^d$, donde ζ_1 y ζ_2 corresponden a 0 e ∞ .*

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que $E(R)$ es completamente invariante bajo R y por tanto consiste a lo más de dos puntos. Y después de una conjugación conveniente tenemos cuatro posibilidades.

- (1) $E(R) = \emptyset$
- (2) $E(R) = \{\infty\} = G\mathcal{O}(\infty)$
- (3) $E(R) = \{0, \infty\}$, $\{0\} = G\mathcal{O}(0)$, $\{\infty\} = G\mathcal{O}(\infty)$
- (4) $E(R) = \{0, \infty\} = G\mathcal{O}(0) = G\mathcal{O}(\infty)$

No hay nada que decir sobre el primer caso. Si el segundo ocurre entonces es de algún modo claro que R es conjugada a un polinomio. En el tercer caso notemos que de nuevo podemos conjugar a un polinomio pero esta vez de la forma az^d . Por ultimo, en el cuarto caso, $R(0) = \infty$ y $R(\infty) = 0$, y por tanto R tiene todos sus ceros y polos en $\{0, 1\}$, es decir debe ser conjugada a una transformación de la forma az^d donde d es un entero negativo. \square .

En todos los casos $E \subset F$, y tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 2.2.2. *Si el grado de R una transformación racional es mayor o igual a 2. Entonces los puntos excepcionales de R están en $F(R)$.*

Una caracterización de los puntos excepcionales esta dado por.

TEOREMA 2.2.3. *La órbita hacia atrás $\mathcal{O}^-(z)$ de z es finita si y sólo si z es excepcional.*

DEMOSTRACIÓN: Solo falta probar que si $\mathcal{O}^-(z)$ de z es finita entonces z es excepcional. Para esto, definamos los conjuntos no vacíos B_n por

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} R^{-m}(z)$$

entonces $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$ y $G\mathcal{O}(z) \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, ahora como $\mathcal{O}^-(z)$ es finita entonces cada B_n lo es, y por tanto existe una m para la cual $B_m = B_{m+1}$, esto quiere decir que $R^{-1}(B_m) = B_m$ y por tanto B_m es completamente invariante, entonces éste contiene la gran órbita de algún w , que es un subconjunto de la gran órbita de z , por lo cual $G\mathcal{O}(w) = G\mathcal{O}(z)$, obteniendo que $G\mathcal{O}(z)$ es finita y por consecuencia $\mathcal{O}^-(z)$ también. De hecho $G\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}^-(z)$. \square .

Una de las primeras preguntas que podríamos hacernos es ¿cuando el conjunto de Julia es no vacío?, en vista de esto tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2.4. *Si el grado de R una transformación racional es mayor o igual a 2, entonces $J(R)$ es infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Empecemos demostrando que J es no vacío. Si J es vacío, entonces la familia de iteradas $\{R^n\}$ es normal en toda la esfera de Riemann, y alguna subfamilia $\{R^{n_j}\}$ debe converger uniformemente sobre toda la esfera de Riemann, a una función holomorfa $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, eventualmente, es decir para un j grande, el grado de R^{n_j} es igual al grado de g , pero el grado de R^n es igual a d^n , el cual diverge a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$, y por tanto se sigue una contradicción.

Ahora sabemos que J contiene algún punto ζ , como J es completamente invariante, si J es finito, entonces ζ debe ser un punto excepcional, pero esto seria una contradicción ya que los puntos excepcionales están en F , por tanto J es infinito. \square .

TEOREMA 2.2.5. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea A un subconjunto cerrado completamente invariante de la esfera de Riemann. Entonces:*

- (i) *A tiene a lo más dos elementos y $A \subset E(R) \subset F(R)$; o*
- (ii) *A es infinito y $A \supset J(R)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que A tiene a lo más dos puntos o es infinito. Si es finito entonces solo contiene puntos excepcionales y claramente se sigue (i). Ahora si A es infinito, como A es completamente invariante también lo es su complemento Ω , y así cada R^n transforma el conjunto abierto Ω en si mismo, y por tanto la familia $\{R^n\}$ restringida a Ω , omite tres puntos dados en A , y por lo tanto es normal, es decir $\Omega \subset F$, por consecuencia $J \subset A$. \square .

Es útil pensar este último resultado de la siguiente manera: J es el conjunto mas pequeño cerrado y completamente invariante, que contiene al menos tres puntos.

TEOREMA 2.2.6. $J = \overline{C}$ o bien J tiene interior vacío.

DEMOSTRACIÓN: El plano extendido \overline{C} es la unión disjunta del interior y la frontera de J , junto con el conjunto F , y cada uno de estos es completamente invariante. Entonces si F es no vacío, entonces $F \cup \partial J$ es un conjunto completamente invariante, cerrado e infinito, y por la minimalidad de J , se tiene $J \subset \partial J$. \square .

TEOREMA 2.2.7. Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces J es perfecto y por tanto incontable.

DEMOSTRACIÓN: Como J es infinito entonces su conjunto derivado es no vacío, además es automáticamente cerrado. Ahora como R es continua y de grado finito, es claro que $R(J') \subset J'$, por tanto $J' \subset R^{-1}(J')$, además, como R es una transformación abierta se puede ver que $R^{-1}(J') \subset J'$, y se deduce que J' es completamente invariante, además por el teorema anterior J' es infinito y por la minimalidad de J , $J \subset J'$, así $J = J'$ y se sigue que J no tiene puntos aislados. Aún más J es incontable por el teorema de la categoría de Baire, y en la terminología usual, J es perfecto. \square .

TEOREMA 2.2.8. Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea W cualquier conjunto abierto no vacío que intersekte a J . Entonces:

$$(i) \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W) \supset \overline{C} - E(R); \text{ y}$$

(ii) Para todo entero suficientemente grande n , $R^n(W) \supset J$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $W_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W)$, y sea K el complemento de W_0 . Si K contiene tres puntos distintos, se sigue que $\{R^n\}$ es normal en W , y por tanto tenemos una contradicción. Esto muestra que W_0 contiene todo punto de la esfera con a lo mas dos excepciones. Ahora consideremos z no excepcional, entonces z tiene órbita hacia atrás infinita y esta debe intersekte W_0 , de este modo para algún punto w y algunos enteros no negativos se tiene que $R^p(w) = z$ y $w \in R^q(W)$, de lo cual $z \in R^{p+q}(W)$ y se tiene (i).

Para probar (ii) tomemos tres conjuntos abiertos W_1, W_2 y W_3 , cada uno con intersección no vacía con J , y apartados por una distancia cordal positiva. Observe que para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ existen enteros n y k tal que $R^n(W_j) \supset W_k$ (si no fuera así la familia $\{R^n\}$ sería normal en cada W_j). Denotemos a k por $\pi(j)$, entonces π transforma $\{1, 2, 3\}$ en si mismo, por lo cual π debe tener un punto fijo para alguna iterada, es decir para algunos j y n , $R^n(W_j) \supset W_j$. Si $S = R^n$, entonces $S(W_j) \supset W_j$, y la sucesión de conjuntos $S^m(W_j)$ es creciente. Aplicando (i) a S y W_j , se tiene que los conjuntos $S^m(W_j)$ forman una cubierta abierta creciente del

conjunto compacto J , por tanto una unión finita y es más uno de ellos, cubre a J . Simplemente escojamos que todos los W_k estén en W , y para algún n se tiene, $J \subset R^n(W_j) \subset R^n(W)$, y para toda n , $J = R(J) \subset R^{n+1}(W)$ y (ii) se cumple por inducción. \square .

TEOREMA 2.2.9. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces J esta contenido en la clausura del conjunto de los puntos periódicos de R .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos cualquier conjunto abierto \mathcal{N} , tal que $\mathcal{N} \cap J \neq \emptyset$, debemos probar que \mathcal{N} contiene algún punto periódico de R . Escojamos un punto w en la intersección y asumamos que éste no es un valor crítico de R^2 , si lo fuera simplemente elegimos otro cerca de este que no lo sea. Como el grado de R es al menos dos y w no es crítico, existen al menos cuatro puntos distintos en $R^{-2}\{w\}$. Tomemos tres de ellos distintos a w , y construyamos vecindades $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ y \mathcal{N}_3 alrededor de w y esos tres puntos, tales que tengan clausuras disjuntas dos a dos, con $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ y además que R^2 es un homeomorfismo de cada \mathcal{N}_j sobre \mathcal{N}_0 . Ahora sea $S_j : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}_j$ la inversa de R^2 . Si para todo $z \in \mathcal{N}_0$, toda j y todo $n \geq 1$, tenemos que $R^n(z) \neq S_j(z)$ entonces $\{R^n\}$ sería normal en \mathcal{N}_0 lo que es imposible. Por lo cual existe $z \in \mathcal{N}_0$, algún $j \in \{1, 2, 3\}$ y algún $n \geq 1$, tal que $R^n(z) = S_j(z)$, entonces $R^{2+n}(z) = R^2(S_j(z)) = z$ y por tanto z es un punto periódico en \mathcal{N} . \square .

TEOREMA 2.2.10. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces:*

(i) *Si z no es un punto excepcional, entonces J esta contenido en la clausura de $\mathcal{O}^-(z)$.*

(ii) *Si $z \in J$, entonces J es la clausura de $\mathcal{O}^-(z)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos z un punto no excepcional y un conjunto abierto no vacío W con intersección con J no vacía. Entonces por el teorema 2.1.15 z esta en algún $R^n(w)$ y por tanto $\mathcal{O}^-(z)$ intersecta a W , esto prueba (i). Ahora si $z \in J$, entonces J por ser cerrado y completamente invariante contiene a la clausura de $\mathcal{O}^-(z)$ y por (i) se cumple (ii). \square .

TEOREMA 2.2.11. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea E un subconjunto compacto de la esfera de Riemann con la propiedad de que para todo z en $F(R)$, la sucesión $\{R^n(z) : n \geq 1\}$ no se acumula en ningún punto de E . Entonces dado cualquier conjunto abierto U que contenga a $J(R)$, $R^{-n}(z) \subset U$ para todo n suficientemente grande.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la conclusión es falsa, entonces en algún conjunto abierto U de J , y para n en alguna sucesión $\{n_1, n_2, \dots\}$, existen puntos $z_n \in R^{-n}(E)$ pero no en U . Ahora sin pérdida de generalidad, los puntos z_n convergen a w , y como U es abierto, $w \notin U$, además $J \subset U$ y así $w \in F$. De este modo dado $\varepsilon > 0$, como $\{R^n\}$ es equicontinua en alguna vecindad de w , existe $\delta > 0$ tal que para toda n , si $\sigma(z, w) < \delta$ entonces $\sigma(R^n(z), R^n(w)) < \varepsilon$, entonces para un n suficientemente grande (de la forma n_j), $\sigma(R^n(z_n), R^n(w)) < \varepsilon$, y como $R^n(z_n) \in E$, tenemos que la sucesión $R^n(w)$ se acumula en E , lo cual es una contradicción. \square .

OBSERVACIÓN. De lo anterior se puede decir que $R^{-n}(E)$ converge a J , en símbolos $R^{-n}(E) \rightarrow J$. Es fácil encontrar ejemplos de tales conjuntos, note que si F_0 es una componente del conjunto de Fatou que contenga un punto fijo atractor ζ , entonces cualquier subconjunto compacto de $F_0 - \{\zeta\}$ tiene la propiedad requerida.

2.3. Estructura de los conjuntos de Fatou y de Julia

En este pequeñísimo apartado se hará notar como algunas características de nuestros conjuntos de Julia y de Fatou, se obtienen simplemente por la topología. Primero daremos algunos resultados sin prueba, pero el lector interesado puede consultar [New] como referencia.

PROPOSICIÓN 2.3.1. *La clausura de un conjunto conexo es conexa.*

PROPOSICIÓN 2.3.2. *Un conjunto compacto K en la esfera es desconexo si y sólo si existe una curva de Jordan γ que separe a K (esto es, K es disjunto de γ e intersecta ambas componentes del complemento de γ).*

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Un dominio D es simplemente conexo si y sólo si su complemento es conexo y esto, sí y sólo si ∂D es conexa.*

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Sea D un conjunto abierto de la esfera de Riemann. Entonces $\overline{\mathbb{C}} - D$ es conexo si y sólo si cada componente de D es simplemente conexa.*

Como una consecuencia primaria de las anteriores se tiene:

TEOREMA 2.3.5. *Sea R una transformación racional. Entonces $J(R)$ es conexo si y solo si cada componente de $F(R)$ es simplemente conexa.*

Un objeto de nuestro estudio es analizar las componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou, por lo que iniciamos con el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3.6. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea F_0 una componente completamente invariante de F . Entonces:*

- (i) $\partial F_0 = J$
- (ii) F_0 es simplemente conexa o bien infinitamente conexa
- (iii) Las demás componentes de F son simplemente conexas; y
- (iv) F_0 es simplemente conexa si y solo si J es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Como F_0 es completamente invariante, también lo es su clausura, y por la minimalidad de J , y como J y F_0 son disjuntos se tiene que $\partial F_0 = J$. Ahora supongamos que F_0 tiene conexidad finita, y denotemos las componentes del complemento de F_0 por E_1, \dots, E_c por el teorema 2.1.7, existe un entero m tal que E_j es completamente invariante bajo R^m y como J es infinito, entonces una de las E_j , digamos E_1 es infinita. La minimalidad de $J(R^m)$ implica que $J(R) = J(R^m) \subset E_1$, y por la condición (i) cada E_j intersecta a J , por tanto $c = 1$. Para (iii), observe que la clausura de F_0 es $J \cup F_0$ y esta es conexa por la proposición 2.1.19, además por la proposición 2.1.22, las componentes de su complemento son simplemente conexas y esas son las otras componentes de F . (iv) es una consecuencia de (i) y la proposición 2.1.21. \square . Automáticamente si F es conexo se tiene.

COROLARIO 2.3.7. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y si F es conexo, entonces:*

- (i) *F es simplemente conexo y J es conexo; o bien*
- (ii) *F es infinitamente conexa y J tiene un número infinito de componentes.*

En el caso de un polinomio sabemos que $\{\infty\}$ es completamente invariante, por lo tanto también la componente no acotada de F que lo contiene, y entonces tenemos.

COROLARIO 2.3.8. *Sea F el conjunto de Fatou de un polinomio no lineal. Entonces:*

- (i) *La componente no acotada F es simplemente conexa o bien infinitamente conexa; y.*
- (ii) *Cada componente acotada de F es simplemente conexa.*

TEOREMA 2.3.9. *El conjunto de Fatou de una transformación racional R de grado d , $d \geq 2$ contiene a lo más dos componentes completamente invariantes, y si tiene dos entonces cada una es simplemente conexa.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que tenemos k componentes completamente invariantes de F , F_1, \dots, F_k , donde $k \geq 2$, aplicando el teorema 2.1.24 tenemos que cada F_j es simplemente conexa y por tanto la característica de Euler de F_j , $\chi(F_j) = 1$, y por la relación de Riemann-Hurwitz se tiene $\delta_R(F_j) = (d-1)\chi(F_j) = d-1$, donde $\delta_R(F_j)$ representa la deficiencia de F_j y de este modo $k(d-1) = \sum_{j=1}^k \delta_R(F_j) \leq \delta_R(\overline{\mathbb{C}}) = 2d-2$ y por tanto $k \leq 2$. \square .

TEOREMA 2.3.10. *El conjunto de Fatou de una transformación racional R contiene 0, 1, 2 o bien infinitas componentes.*

DEMOSTRACIÓN: En el caso donde el grado de R es uno es trivial. Si el grado es mayor o igual a dos, supongamos que F tiene solo un número finito de componentes, digamos, F_1, \dots, F_k , como cada F_j es completamente invariante bajo alguna iterada de R^m , y aplicando el teorema anterior a esta iterada, tenemos que $k \leq 2$. \square . Por último enunciemos un lema y un teorema, de los cuales no se incluye la prueba pero el interesado puede consultar [Bea]. El teorema nos responde por el número de componentes de un conjunto de Julia desconexo.

LEMA 2.3.11. *Sea K un conjunto compacto del plano complejo y sea R una transformación racional de grado d , $d \geq 2$. Entonces $R^{-1}(K)$ contiene a lo más dos d componentes y cada una es transformada bajo R sobre K .*

TEOREMA 2.3.12. *Si J es disconexo, entonces tiene innumerables componentes y cada punto de J es un punto de acumulación de infinitas componentes distintas de J .*

2.4. Teoría local de los puntos fijos

Ahora nos enfocaremos en el estudio del comportamiento local cerca de un punto fijo, este comportamiento jugará un papel muy importante tanto localmente y globalmente. De hecho lo que se realiza a continuación vale también para puntos periódicos, esto debido a la regla de la cadena en el cálculo del multiplicador, y por consecuencia el estudio de los puntos periódico se simplifica al estudio de puntos fijos. Para empezar con esto clasifiquemos los puntos fijos (más generalmente se pueden clasificar del mismo modo las orbitas periódicas) de acuerdo a su multiplicador de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 2.4.1. Sea \hat{z} un punto fijo de f con multiplicador λ , entonces se tiene la siguiente clasificación :

- (1) si $0 < |\lambda| < 1$, entonces \hat{z} es un punto fijo atractor
- (2) si $\lambda = 0$, entonces \hat{z} es un punto fijo súper atractor
- (3) si $|\lambda| > 1$, entonces \hat{z} es un punto fijo repulsor
- (4) si $|\lambda| = 1$. entonces \hat{z} es un punto fijo indiferente (o neutral). Los puntos indiferentes están divididos en puntos racionales (cuando λ es raíz de la unidad) e irracionales (en caso contrario).

2.4.1. Puntos fijos atractores (y repulsores). Consideremos una función

$$(2.4.1) \quad f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

la cual está definida en alguna vecindad del origen, con un punto fijo de multiplicador λ en $z = 0$. Si $|\lambda| \neq 1$, entonces f puede ser reducida a una forma normal simple mediante un conveniente cambio de coordenadas. Primero consideremos el caso $\lambda \neq 0$, es decir el origen no es un punto crítico. El siguiente teorema fue probado en 1884 por G. Koenigs.

TEOREMA 2.4.2. (*Linealización de Koenigs*) *Si el multiplicador λ satisface $|\lambda| \neq 0, 1$, entonces existe un cambio holomorfo local de coordenadas $w = \phi(z)$, con $\phi(0) = 0$, tal que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \lambda w$ para todo w en alguna vecindad del del origen. Aún más, ϕ es única salvo multiplicación de una constante no cero.*

DEMOSTRACIÓN: Primero demostremos la unicidad. Si existen dos de tales transformaciones ϕ y ψ , entonces la composición

$$\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$$

debe conmutar con la transformación $w \mapsto \lambda w$. Comparando los coeficientes de las dos series de potencias resultantes, tenemos que $\lambda b_n = b_n \lambda^n$ para toda n . Como λ no es cero ni tampoco una raíz de la unidad, tenemos que $b_2 = b_3 = \dots = 0$, por lo cual $\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w$, es decir $\psi(z) = b_1 \phi(z)$.

Ahora para demostrar la existencia cuando $0 < |\lambda| < 1$. Escojamos una constante $c < 1$ tal que $c^2 < |\lambda| < c$, y elijamos una vecindad D_r del origen tal que $|f(z)| \leq c|z|$ para $z \in D_r$. Entonces para cualquier punto de partida $z_0 \in D_r$, la órbita de z_0 converge hacia el origen, con $|z_n| \leq rc^n$, donde z_n es la n -ésima iterada de z_0 . Por el teorema de Taylor

$$|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2$$

para alguna constante k y para todo $z \in D_r$, por tanto

$$|z_{n+1} - \lambda z_n| \leq kr^2 c^{2n}$$

Se sigue que los números $w_n = z_n/\lambda^n$ satisfacen

$$|w_{n+1} - w_n| \leq k'(c^2/|\lambda|)^n$$

donde $k' = kr^2/|\lambda|$. Esta diferencia converge uniformemente y geoméricamente al cero. Por lo cual la funciones holomorfas $z_0 \mapsto w_n(z_0)$ convergen uniformemente en todo D_r , a un limite holomorfo $\phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n/\lambda^n)$. La identidad requerida $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ se obtiene inmediatamente. Un argumento similar muestra que $|\phi(z) - z|$ es menor o igual que $|z|^2$ multiplicado por alguna constante. Entonces $\phi'(0) = 1$, y por lo tanto es un difeomorfismo conforme local.

Finalmente si $|\lambda| > 1$, como $\lambda \neq 0$, la transformación inversa f^{-1} esta localmente bien definida y es holomorfa, además tiene al origen como punto fijo atractor con multiplicador λ^{-1} . Aplicando argumentos similares a los anteriores a f^{-1} , se obtiene la conclusión. \square

OBSERVACIÓN. Más generalmente, supongamos que tenemos una familia de transformaciones f_α de la forma (2.4.1) la cual depende holomorfa de uno (o mas) parámetros α y con multiplicador $\lambda = \lambda(\alpha)$ que satisface $|\lambda(\alpha)| \neq 0, 1$. Entonces un argumento similar muestra que la función de Koenigs $\phi(z) = \phi_\alpha(z)$ depende holomorfa de α . Para probar esto, fijemos $0 < c < 1$ y supongamos que $|\lambda(\alpha)|$ cambia a través de algún subconjunto compacto del intervalo (c^2, c) . Entonces es fácil comprobar que la convergencia en la prueba anterior es uniforme en α . Y la conclusión se sigue fácilmente.

COROLARIO 2.4.3. *Supongamos que $f : S \rightarrow S$ es una transformación holomorfa de una superficie de Riemann en si misma con un punto fijo atractor con multiplicador $\lambda \neq 0$ en \hat{z} . Sea $A(\hat{z}) \subset S$ la cuenca de atracción, la cual consiste de todos los $z \in S$ para lo cuales $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$ existe y es igual a \hat{z} . Entonces existe una transformación holomorfa ϕ de $A(\hat{z})$ sobre \mathbb{C} tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A(\hat{z}) & \xrightarrow{f} & A(\hat{z}) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda \cdot} & \mathbb{C} \end{array}$$

es conmutativo, y tal que ϕ lleva una vecindad de \hat{z} difeomorfamente sobre una vecindad de cero. Más aún, ϕ es única salvo multiplicación por una constante.

De hecho, para calcular $\phi(z_0)$ en un punto arbitrario de $A(\hat{z})$ debemos simplemente seguir la órbita de z_0 hasta que alcancemos un punto z_n el cual este muy cerca de \hat{z} , después evaluar la coordenada de Koenigs $\phi(z_n)$ y multiplicar por λ^{-n} . El enunciado en el caso repulsor es un tanto diferente.

COROLARIO 2.4.4. *Si \hat{z} es un punto repulsor, entonces existe una transformación holomorfa $\psi : \mathbb{C} \rightarrow S$ en la dirección opuesta, tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow \psi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

es conmutativo, y tal que ψ transforma una vecindad de cero difeomorfamente sobre una vecindad de \hat{z} . Aquí ψ es única salvo por $w \mapsto \psi(cw)$ para cualquier constante $c \neq 0$.

Para calcular $\psi(w)$ simplemente encojemos algún $\lambda^{-n}w$ tan pequeña que $\phi^{-1}(\lambda^{-n}w)$ este definida, y después aplicamos f^n al resultado.

DEFINICIÓN. Sea R una transformación racional con un punto fijo (súper)atractor \hat{z} . Por la cuenca inmediata $A^*(\hat{z})$ entenderemos la componente conexa de \hat{z} en la cuenca de atracción $A(\hat{z})$, o equivalentemente la componente conexa de \hat{z} en el conjunto de Fatou.

El siguiente resultado liga el comportamiento local con el global es debido a Fatou (1905).

TEOREMA 2.4.5. *Si R es una transformación racional de grado mayor o igual a dos, entonces la cuenca inmediata de un punto fijo (súper)atractor \hat{z} de R contiene al menos un punto crítico. Más aún si el multiplicador λ no es cero, entonces existe una única vecindad compacta \bar{U} de \hat{z} en $A^*(\hat{z})$ la cual:*

- (a) *es transformada de modo biyectivo sobre algún disco cerrado \bar{D}_r bajo la transformación de Koenigs ϕ , y*
- (b) *tiene al menos un punto crítico sobre su frontera ∂U .*

DEMOSTRACIÓN: Si $\lambda = 0$, entonces \hat{z} es un punto crítico. Asumamos que $\lambda \neq 0$ y apliquemos el teorema 2.4.2. Evidentemente alguna rama ϕ_0^{-1} de la transformación inversa puede ser definida como una transformación holomorfa inyectiva sobre un disco pequeño D_ε , con $\phi_0^{-1}(0) = \hat{z}$. Intentemos extender ϕ_0^{-1} mediante una continuación analítica a lo largo de las líneas radiales a través del origen en D_ε . Es imposible extender indefinidamente en cada dirección, por que si no entonces ϕ_0^{-1} debe ser una transformación holomorfa no constante de todo el plano \mathbb{C} en la cuenca $A^*(\hat{z})$, esto es imposible, ya que la cuenca es hiperbólica. Por tanto debe existir algún radio mayor r tal que ϕ_0^{-1} se extiende analíticamente en todo el disco abierto D_r . Sea $U = \phi_0^{-1}(D_r)$, debemos probar que la clausura \bar{U} es un subconjunto compacto de la cuenca $A(\hat{z})$, y también que hay al menos un punto crítico de R en la frontera ∂U . Si $z_1 \in \partial U$, usando la identidad $\phi(R(z)) = \lambda\phi(z)\epsilon D_{|\lambda|r}$ para $z \in U$ arbitrariamente cercano a z_1 , observamos que $R(z_1)$ pertenece al conjunto abierto $U \subset A(\hat{z})$. Luego z_1 pertenece a la cuenca $A(\hat{z})$, con $|\phi(z_1)| = r$ por continuidad. Ahora al menos uno de tales z_1 debe ser crítico para R . \square .

2.4.2. Puntos fijos super atractores. Ahora consideremos el caso súper atractor, el siguiente teorema fue probado por Bötcher en 1904.

TEOREMA 2.4.6. *Supongamos que f tiene un punto fijo súper atractor en \hat{z}*

$$f(z) = \hat{z} + a_p(z - \hat{z})^p + \dots$$

con $p \geq 2$, $a_p \neq 0$. Entonces existe una transformación conforme $w = \psi(z)$ de una vecindad de \hat{z} sobre una vecindad de cero, la cual conjuga f con la transformación $w \mapsto w^n$. Más aún, ψ es única salvo multiplicación de una raíz $(p-1)$ -ésima de la unidad.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\hat{z} = 0$. Para $|z|$ pequeño existe $C > 1$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^p$. Por inducción usando el hecho de que $p \geq 2$, se tiene que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$$

con $|z| \leq \delta$ y así $f^n(z) \rightarrow 0$ super-exponencialmente. Si hacemos cambio de variables $\zeta = cz$ donde $c^{p-1} = 1/a_p$ entonces hemos conjugado f a la forma $f(w) = \zeta^p + \dots$. Así podemos asumir $a_p = 1$, deseamos encontrar una transformación $\psi(z) = z + \dots$ tal que $\psi(f(z)) = \psi(z)^p$, lo cual es equivalente a la condición $\psi \circ f \circ \psi^{-1} = w^p$. Sea

$$\psi_n(z) = f^n(z)^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}}$$

la cual ésta bien definida en una vecindad del origen. Las ψ_n 's satisfacen

$$\psi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{-n+1} = \psi_n^p$$

entonces si $\psi_n \rightarrow \psi$, se obtiene $\psi \circ f = \psi^p$ y por tanto una solución. Para mostrar que $\{\psi_n\}$ converge, notamos que

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = \left(\frac{\psi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + O(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + O(p^{-n})O(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + O(p^{-n})$$

si $|z| \leq 1/C$. Entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$$

converge uniformemente para $|z| \leq c \leq 1/C$, y esto implica que $\{\psi_n\}$ converge. Por tanto ψ existe.

Para probar la unicidad usamos el mismo método que en el caso atractor, la ecuación en este caso es $\psi(z^p) = \psi(z)^p$, y comparando las series de potencias tenemos $\psi(z) = a_1 z$ donde $a_1^p = a_1$. \square

OBSERVACIÓN. Si f depende analíticamente de un parámetro, entonces por consecuencia también ψ , en este caso la ecuación funcional satisface por la función coordenada de Bötcher,

$$\psi(f(z)) = \psi(z)^p$$

y esto nos permite extender ψ analíticamente hasta que nos encontremos con un punto crítico de f , aún así la ecuación funcional

$$\log |\psi(f(z))| = p \log |\psi(z)|$$

nos permite extender $\log |\psi(z)|$ a toda la cuenca de atracción $A(\hat{z})$. La función extendida es una función armónica negativa, excepto para los polos logarítmicos en todas las iteradas inversas de \hat{z} . Consideremos el caso en el cual f es una cubierta de p hojas de la cuenca inmediata de atracción $A^*(\hat{z})$ sobre si misma. El único polo de $\log |\psi(z)|$ es ahora \hat{z} , y $\log |\psi(z)| = \log |z - \hat{z}| + O(1)$ en \hat{z} . Más aún la ecuación funcional muestra que $\log |\psi(z)| \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \partial A^*(\hat{z})$. Excepto por el signo, estas son precisamente las propiedades que caracterizan a la función de Green $G(z, \hat{z})$ para $A^*(\hat{z})$ con un polo en \hat{z} , esto es

$$\log |\psi(z)| = -G(z, \hat{z})$$

con $z \in A^*(\hat{z})$.

En nuestro estudio particular es decir los polinomios este teorema tiene una aplicación mas que útil.

EJEMPLO. Un polinomio $P(z) = az^d + \dots$, con $d \geq 2$ y $a \neq 0$ tiene un punto fijo súper atractor en ∞ . Reemplazando 0 por ∞ en el teorema de Böttcher, observamos que $P(z)$ es conjugado a w^d cerca de ∞ . La transformación de conjugación es de la forma $\psi(z) = cz + O(1)$, con un polo simple en ∞ . Una vez más la ecuación funcional

$$\log |\psi(p(z))| = d \log |\psi(z)|$$

con $|z| > R$, nos permite extender $\log |\psi|$ a toda la cuenca de atracción $A(\infty)$. Ésta cuenca no tiene componentes acotadas debido al principio del máximo, así que $A^*(\infty) = A(\infty)$ es conexa. La extensión de $\log |\psi|$ es armónica en $A(\infty)$, y $\log |\psi(z)| \rightarrow 0$ cuando z tiende a la frontera. Esta vez

$$\log |\psi(z)| = \log |z| + \log |c| + o(1)$$

cuando $|z| \rightarrow \infty$. Ahora la función de Green para un dominio exterior Ω con polo en ∞ es caracterizada como la función armónica en Ω la cual tiende a cero en ∂D , y la cual tiene la forma

$$G(z, \infty) = \log |z| + \sigma + o(1)$$

en ∞ .

2.4.3. Puntos fijos indiferentes racionales. Supongamos que f tiene un punto fijo indiferente racional \hat{z} . Si U es una vecindad de \hat{z} y tratamos de conjugar $f|_U$ a su derivada, entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ D_r & \xrightarrow{\lambda} & D_r \end{array}$$

equivale a la ecuación funcional:

$$\phi \circ f(z) = \lambda \circ \phi(z)$$

esta ecuación es llamada la ecuación funcional de Schröder, por el lema de Schwarz, geoméricamente esta ecuación dice que \hat{z} es el centro de un disco en el cual la transformación f es conjugada a una rotación.

TEOREMA 2.4.7. *Sea \hat{z} un punto fijo indiferente. Entonces $\hat{z} \in F$ si y sólo si la ecuación funcional de Schröder tiene solución analítica en alguna vecindad de \hat{z} .*

DEMOSTRACIÓN: Si la ecuación funcional de Schröder tiene una solución, entonces directamente de las definiciones se tiene $\hat{z} \in F$.

Ahora supongamos que $\hat{z} \in F$ y sea U el dominio maximal tal que $\hat{z} \in U$ y que $U \subset F$. Como $U \cap J = \emptyset$, U evita tres puntos y por el teorema de la uniformización, el cubriente universal \bar{U} de U es conformemente equivalente a el disco unitario D . Escojamos una transformación cubriente $p : D \rightarrow U$ tal que $p(0) = \hat{z}$ y un levantamiento \tilde{f} de $f|_U$ con $\tilde{f}(0) = 0$, entonces $\tilde{f} : D \rightarrow D$ y $|\tilde{f}'(0)| = 1$. Por una aplicación del lema de Schwarz obtenemos $\tilde{f}(z) = \lambda z$. Por lo cual el cubriente universal p es la solución ϕ de la ecuación funcional de Schröder. \square .

COROLARIO 2.4.8. *Si λ es una raíz de la unidad digamos $\lambda = \exp 2\pi i \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$, entonces la ecuación funcional de Schröder no tiene solución, es decir $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$, no es localmente linealizable.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $\hat{z} = 0$ es un punto fijo. Además $\lambda^q = 1$ y supongamos que la ecuación funcional de Schröder tiene solución en alguna vecindad U de \hat{z} . Entonces $\phi \circ f^l \circ \phi^{-1} \equiv Id$, y entonces $f^q \equiv Id$ en U . Como f es analítica, entonces $f^q \equiv Id$ en $\bar{\mathbb{C}}$, contradiciendo nuestra suposición de que f tiene grado mayor a uno. \square .

DEFINICIÓN. En este caso decimos que $\hat{z} = 0$ es un punto parabólico de f .

Como f^q no es la identidad, obtenemos que existe un $n \geq 1$ tal que:

$$f^q(z) = z + cz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

. y además n es un múltiplo de q , para ver este último hecho notemos que

$$f \circ f^q(z) = f(z + cz^{n+1} + O(z^{n+2})) = f(z) + \lambda cz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

y

$$f^q \circ f(z) = f(z) + c(f(z))^{n+1} + O((f(z))^{n+2}) = f(z) + c\lambda^{n+1}z^{n+1} + O(z^{n+2})$$

. así $\lambda = \lambda^{n+1}$ es decir $\lambda^n = 1$.

Mediante una conjugación lineal, pongamos $c = 1$, y de este modo

$$f^q(z) = z + z^{n+1} + O(z^{n+2}) = z(1 + z^n + O(z^{n+1}))$$

La expresión anterior nos brinda la siguiente información sobre la dinámica de f en U :

(i) Si $z^n \in \mathbb{R}^+$, existen exactamente $n = kq$ semirrectas a partir de $z = 0$, con direcciones dadas por $\frac{2\pi j}{n}$, con $j = 0, \dots, n-1$, llamados ejes repulsivos.

(ii) Si $z^n \in \mathbb{R}^-$, existen exactamente $n = kq$ semirrectas a partir de $z = 0$, con direcciones dadas por $2\pi \frac{j+1/2}{n}$, con $j = 0, \dots, n-1$, llamados ejes atractores.

Estas direcciones las podemos observar como una rotación de las raíces $2n$ -ésimas de la unidad.

A continuación presentamos un resultado de Camacho (1978) que clasifica la dinámica de este tipo, aunque no damos la demostración de éste.

TEOREMA 2.4.9. *Sea $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ una transformación analítica en una vecindad del origen. Supongamos que $\lambda = \exp 2\pi i \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$, entonces $f^q(z) = Id$ ó existe un homeomorfismo local h y un entero $k > 1$ tal que $h(0) = 0$ y $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z(1 + z^{kq})$.*

DEFINICIÓN. Un conjunto abierto conexo U , con clausura compacta $\bar{U} \subset N \cap N'$, sera llamado un pétalo atractor para f en el origen si

$$f(\bar{U}) \subset U \cup \{0\} \quad \text{y} \quad \bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U}) = \{0\}$$

Similarmente, $U' \subset N \cap N'$ es un pétalo repulsor para f si U' es un pétalo atractor para f^{-1} .

TEOREMA 2.4.10. *Si el origen es un punto fijo de multiplicidad $n+1 \geq 2$, entonces existen $n = kq$ pétalos atractores U_i ajenos y n pétalos repulsores U'_i ajenos de f , tales que la unión de éstos $2n$ pétalos junto con el origen, forman una vecindad N_0 del origen. Los pétalos atractores y repulsores se encuentran de manera alternada de forma que cada U_i interseca únicamente a U'_i y a U'_{i-1} (con $U'_0 = U'_n$)*

OBSERVACIÓN. Si U_i es un pétalo atractor, entonces la sucesión de transformaciones $\{f^k\}$ restringida a \bar{U}_i converge uniformemente a cero. Análogamente si U'_i es un pétalo repulsor cualquier órbita que comience en U'_i debe eventualmente salir de U'_i , de hecho debe salir de la unión $U'_1 \cup \dots \cup U'_n$.

Tenemos tres consecuencias inmediatas de este teorema.

COROLARIO 2.4.11. *No existe órbita periódica de $f|_{N_0}$ contenida completamente en N_0 excepto por el punto fijo en el origen.*

DEFINICIÓN. La cuenca parabólica de atracción Ω_i , determinada por el pétalo U_i , es el conjunto $\{z | f^m(z) \in U_i \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$ y $\Omega = \bigcup \Omega_j$ es la cuenca parabólica de atracción de f en el origen. Claramente las cuencas $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ son conjuntos abiertos disjuntos.

COROLARIO 2.4.12. *Si excluimos el caso de una órbita la cual contenga al punto fijo, entonces la órbita converge al punto fijo si y sólo si ésta eventualmente cae en un pétalo atractor U_i , y por tanto pertenece a la cuenca asociada Ω_i .*

COROLARIO 2.4.13. *Cada cuenca parabólica Ω_i esta contenida en $F(f)$, pero su frontera $\partial\Omega_i$ esta contenida en $J(f)$, en particular el origen esta en $J(f)$. Es más, cada pétalo repulsor U'_i interseca a $J(f)$.*

DEMOSTRACIÓN: de 2.4.13. Como

$$f^k(z) = z + kz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

. entonces ninguna sucesión de iteradas $\{f^k\}$ puede converger uniformemente en una vecindad del origen, ya que las correspondientes $(n+1)$ -ésimas derivadas no convergen. Por tanto $0 \in J(f)$, y por consecuencia todo punto en la órbita grande

de cero pertenece a J . Si $z_1 \in \Omega_i$ no pertenece a la órbita grande de cero, entonces por 2.4.12 podemos extraer una subsucesión que de la órbita de z_1 la cual siempre permanezca acotada lejos del cero. Y debido a que la sucesión de iteradas $\{f^k\}$ converge a cero en todo el conjunto abierto Ω_i , se tiene que $\{f^k\}$ no puede ser normal en ninguna vecindad de z_1 . Así que J intersecta a cada pétalo repulsor U'_i . \square

DEMOSTRACIÓN: del teorema 2.4.10 Si bien f no es localmente linealizable en cero, se busca conjugar a f o equivalentemente a f^q en cada sector S_j entre las direcciones repulsoras de 0, por medio de $w = -\frac{1}{mz^n}$ con inversa $z = (-1/nw)^{1/n}$, con lo cual, cada sector es enviado en $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - (\infty, 0)$ y obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} S_j & \xrightarrow{f^q} & S_j \\ \downarrow w & & \downarrow w \\ \mathbb{C}^- & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^- \end{array}$$

. donde

$$f^q(z) = z(1 + z^n + o(|z^n|))$$

cuando $|z| \rightarrow 0$ y

$$F(w) = w \circ f^q(z) = \frac{-1}{n(f^q(z))^n} = -\frac{1}{nz^n}(1 + z^n + o(|z^n|))^{-n} =$$

$$= w(1 - nz^{-n} + o(|z^n|)) = w(1 + w^{-1} + o(|w^{-1}|)) = w + 1 + o(1)$$

cuando $|w| \rightarrow \infty$. Así que podemos tomar $\text{Sen } \varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|F(w) - w - 1| < \text{Sen } \varepsilon$$

si $|w| > r$. Lo cual hace que la pendiente del vector que va de w a $F(w)$ tenga valor absoluto acotado por tan ε si $|w| > r$. De este modo se construye una región atractora para ∞ y por medio de $z = (-1/nw)^{1/n}$ obtenemos un pétalo atractor para f en cero. \square .

OBSERVACIÓN. Debido a que $n = kq$ es el número de pétalos atractores U_i , se tiene que f permuta esos n pétalos en k ciclos de longitud q , mientras que $f^q(U_i) \subset U_i$.

TEOREMA 2.4.14. $F(w) = w + 1 + O(1/w^{1/n})$ es conformemente conjugada a $w' \mapsto w' + 1$ si $|w| > R$ y $|\arg w| < \pi$, con R suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN: $F'(w) = 1 + O(1/w^{1+\frac{1}{n}})$ y sea $\{w_n\}$ tal que $\frac{w_n}{n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $F'(w_n) = 1 + O(1/w^{1+\frac{1}{n}})$ y.

(*) $\prod_{n=1}^{\infty} F'(w_n) = \alpha(w)$ con $w_1 = w$ es convergente ya que $\prod_{n=1}^{\infty} \left| O(1/w^{1+\frac{1}{n}}) \right|$ converge absolutamente en un dominio simplemente conexo. Entonces existe ϕ holomorfa tal que $\phi'(w) = \alpha(w) = F'(w) \prod_{n=2}^{\infty} F'(w_n) = F'(w)\alpha(F(w)) = F'(w)[\phi'(F(w))]$.

$[\phi(F(w))]'$. Por tanto $\phi(F(w)) = \phi(w) + cte.$, además del hecho de que $\frac{w_n}{n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene de (*) que $\frac{\phi(w_n)}{w_n} \rightarrow 1$ cuando $w_n \rightarrow \infty$. Así $cte. \equiv 1$. \square .

DEFINICIÓN. A cada uno de los k -ciclos de pétalos atractores de longitud q se le llama un sistema de pétalos P_i de f en cero. La cuenca inmediata de P_i denotada por $A_f(P_i)$, es la unión de las componentes conexas de $\Omega(P_i)$.

TEOREMA 2.4.15. *La cuenca inmediata, $A_f(P_i)$ de un sistema de pétalos de un punto fijo parabólico de f contiene al menos un punto crítico.*

COROLARIO 2.4.16. *La cuenca inmediata Ω de un punto fijo parabólico contiene al menos k puntos críticos, donde k es el número de ciclos de pétalos de f en cero.*

2.4.4. Puntos fijos indiferentes irracionales. Supongamos que

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

esta definida en laguna vecindad del origen y además que el multiplicador puede ser escrito como

$$\lambda = e^{2\pi i \theta}$$

con ξ real e irracional.

Una vez más nos gustaría saber cuando existe un cambio local de coordenadas $z = h(w)$ que conjugue f a una rotación irracional $w \mapsto \lambda w$, tal que

$$f(h(w)) = h(\lambda w)$$

cerca del origen.

Si tal linealización es posible, entonces un disco pequeño $|w| < \varepsilon$ en el plano w corresponde a un conjunto abierto U en el plano z , el cual es transformado biyectivamente sobre si mismo por f . Evidentemente U no contiene puntos periódico de f salvo el punto fijo en cero. Además si f es una función racional $U \subset F$.

DEFINICIÓN. Una propiedad para un número complejo unitario es cierta para un genérico $\lambda \in \mathbb{S}^1$ si el conjunto de λ para el cual es verdad contiene una intersección contable de subconjuntos abiertos densos de \mathbb{S}^1 . De acuerdo al teorema de Baire, tal intersección debe ser necesariamente denso e infinitamente no numerable.

TEOREMA 2.4.17. *(de no linealización de Cremer) Para una elección genérica de $\lambda \in \mathbb{S}^1$, se cumple: si z_0 es un punto fijo con multiplicador λ para una función racional arbitraria de grado mayor a dos, entonces z_0 es el límite de una sucesión infinita de puntos periódicos. Por tanto no existe una coordenada linealizante en una vecindad de z_0 .*

Durante mucho años se mantuvo abierta la pregunta de que si la sentencia anterior era verdadera para todo número λ en la circunferencia unitaria, hasta que en 1942 Siegel probó lo siguiente.

TEOREMA 2.4.18. *(de linealización de Siegel) Para casi cada ángulo λ en el círculo unitario (esto es para todo λ fuera de un conjunto con medida de Lebesgue unidimensional igual a cero) todo germen de una función holomorfa con punto fijo de multiplicador λ puede ser linealizada mediante un cambio holomorfo de coordenadas.*

DEFINICIÓN. Diremos que un punto fijo indiferente irracional es un punto de Siegel o un punto de Cremer, de acuerdo a cuando una linealización es posible o no. (Los puntos de Siegel son llamados centros)

LEMA 2.4.19. *Un punto fijo indiferente irracional de una función racional es un punto de Cremer o un punto de Siegel de acuerdo a cuando este pertenece al conjunto de Julia o no. En el caso de un punto de Siegel z_0 , la componente conexa U de F que contenga a z_0 , es conformemente isomorfo al disco unitario abierto de tal modo que la transformación f de U sobre si misma corresponde a la rotación irracional $w \mapsto \lambda w$ del disco unitario. Por definición tal componente U es llamada un disco de Siegel, o un disco de rotación.*

DEMOSTRACIÓN: Si z_0 es un punto de Siegel, entonces las iteradas de f en una vecindad corresponden a las rotaciones iteradas de un disco pequeño, y por lo tanto forman una familia normal. De este modo z_0 pertenece a F . Recíprocamente, cuando z_0 pertenece a F , se puede ver que z_0 es un punto de Siegel. \square . Para mas detalles de nuestra ultima aserción, el lector puede consultar [Mil].

DEFINICIÓN. Dado un número real $k \geq 2$, decimos que un ángulo irracional θ satisface una condición diofantina de orden k si existe $\varepsilon(\theta) > 0$ tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^k}$$

para cada racional $\frac{p}{q}$. Denotemos por D_k al conjunto de los números que cumplen esta condición. Observemos que si $k < n$ entonces $D_k \subset D_n$. Definimos el conjunto S de números de Siegel a la unión de los D_k .

TEOREMA 2.4.20. (*De Siegel*) *Si el ángulo θ pertenece a ésta unión $S = \bigcup D_k$, entonces cualquier germen holomorfo con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ es localmente linealizable.*

Centremos nuestra atención en la linealización de los polinomios cuadráticos. Para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tomemos $p_\lambda = \lambda z + z^2$. Hay que observar que todo polinomio de grado dos que tenga un punto fijo con multiplicador λ correspondiente, es conjugado a p_λ mediante una conjugación afín. El punto crítico de p_λ es $z_\lambda = -\frac{\lambda}{2}$, y su valor crítico es $w_\lambda = -\frac{\lambda}{4}$. Supongamos que λ no es una raíz de la unidad y denotemos por H_λ la única serie formal que cumple $H_\lambda(0) = 0$, $H'_\lambda(0) = 1$ y

$$H_\lambda(\lambda z) = p_\lambda(H_\lambda(z)).$$

Denotaremos por $R(\lambda)$ al radio de convergencia para H_λ .

Para poder pasar a nuestro siguiente teorema primero necesitamos hablar sobre capacidad conforme. Sea U un dominio de Riemann (abierto, simplemente conexo de \mathbb{C} , distinto de \mathbb{C}), y $x_0 \in U$. Si f_r y k_j son representaciones conformes de D sobre D_r y de D sobre U con $j = 1, 2$, tales que $f_r(0) = 0$ y $k_j(0) = x_0$, entonces, $k_1^{-1} \circ k_2$ y $k_2^{-1} \circ k_1$ son automorfismos de D que fijan al cero y de acuerdo al lema de Schwarz

$$|(k_1^{-1} \circ k_2)'(0)| = 1 = |k_1^{-1}(0)| |k_2'(0)| = \frac{|k_2'(0)|}{|k_1'(0)|}.$$

DEFINICIÓN. Sea $k : D \rightarrow U$ con $k_0(0) = x_0$ una representación conforme de D sobre U , entonces $|k'(0)| = C(U, x_0)$ es la capacidad conforme de U con respecto a x_0 .

Equivalentemente, la capacidad conforme $C(U, x_0)$ es el único real r positivo para el cual existe una representación conforme h del disco D_r sobre U que cumple $h(0) = x_0$ y $|h'(0)| = 1$. El siguiente resultado es debido a Yoccoz, 1987.

TEOREMA 2.4.21. *Para casi cada ángulo $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en el sentido de Lebesgue, $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$ con $\lambda = e^{2\pi\theta}$ tiene un disco de Siegel alrededor del cero.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ϕ_λ la transformación que linealiza a p_λ para $0 < |\lambda| < 1$. Sabemos que ésta está definida en la cuenca de atracción U_λ de p_λ en el origen, y que el punto crítico $-\frac{\lambda}{2} \in U_\lambda$. Por el lema de Schwarz, existe un abierto simplemente conexo $U'_\lambda \subset U_\lambda$ el cual contiene al origen y tal que $\phi_\lambda : U'_\lambda \rightarrow D_r$ es holomorfa e inyectiva, con $\phi'_\lambda(0) = 1$ donde r es la capacidad conforme de U'_λ en el origen. De este modo $r = |\phi_\lambda(-\frac{\lambda}{2})|$ y la correspondencia $\eta(\lambda) = \phi_\lambda(-\frac{\lambda}{2})$ es holomorfa. Puesto que el radio de escape de p_λ es 2, entonces $\phi_\lambda^{-1}(D_r) \subset D_2$ y por el lema de Schwarz $r \leq 2$. Por tanto η es holomorfa y acotada en D , y en consecuencia tiene una singularidad removible en el origen. Y como una función holomorfa y acotada en D admite en casi todo punto de su frontera ∂D , un límite tangencial no nulo, así que ϕ_{λ_0} tiene un radio de convergencia al menos igual al límite superior de $|\eta(\lambda)|$, cuando $\lambda \in D$ tiende a $\lambda_0 \in \mathbb{S}^1$, con λ_0 tal que p_{λ_0} no tiene un punto de Cremer o un punto parabólico en el origen y ϕ_{λ_0} linealiza a p_{λ_0} . \square .

TEOREMA 2.4.22. *Si $p_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ es linealizable entonces cualquier $f(z) = \lambda z + g(z)$ con $g(z) \in o(|z^2|)$ analítica, es linealizable.*

2.5. Más propiedades de los Conjuntos de Julia y de Fatou

Volvamos ahora al estudio de los conjuntos de Julia y de Fatou tan primordiales en esta tesis, ahora con nuestras nuevas herramientas podemos obtener mediante los puntos periódicos propiedades globales de nuestros conjuntos. Para comenzar tenemos que:

LEMA 2.5.1. *Toda componente de F contiene a lo más un punto periódico de R .*

DEMOSTRACIÓN: Sea F_0 una componente de F y supongamos que α y β son puntos periódicos de F_0 . Reemplazando a R por alguna iterada R^n , podemos suponer que α y β son puntos fijos para R . Si α es (súper) atractor entonces $R^n \rightarrow \alpha$ en F_0 , y como R fija a β , entonces $\alpha = \beta$. De otro modo α es un punto fijo indiferente, y entonces $R : F_0 \rightarrow F_0$ es conjugada a una rotación de orden infinito en el disco unitario, así que $\alpha = \beta$ es el único punto fijo de R en F_0 . \square .

El lema es suficiente para probar que el conjunto derivado de los puntos periódicos de R está en J , y nos da la mitad del siguiente teorema.

TEOREMA 2.5.2. *Si R es una transformación racional de grado d , $d \geq 2$, entonces J es el conjunto derivado de los puntos periódicos de R .*

La parte faltante de la demostración es análoga a cuando demostramos que el conjunto de Julia está contenido en la clausura de los puntos periódicos, y por tanto la omitimos.

Como veremos luego R de grado d tiene a lo más $2d - 2$ ciclos repulsores y por tanto de nuestro teorema anterior concluimos que:

TEOREMA 2.5.3. *Si R es una transformación racional de grado d , $d \geq 2$, entonces J es la clausura de los puntos periódicos repulsores de R .*

Ahora escudriñemos un poco el conjunto de Fatou, para esto necesitamos el teorema de no errancia de Sullivan, la demostración de éste teorema es la que al parecer renovó los ánimos para seguir estudiando la teoría de iteración, resolviendo uno de los problemas abiertos de Fatou. La demostración de este teorema no es obvia y usa material que de incluirse alargaría por demás nuestro estudio, así que solo incluiremos una definición y a continuación el teorema, el interesado en la demostración puede consultar [Car].

DEFINICIÓN. Una componente F_0 de F es:

- (a) periódica si para algún entero positivo n , $R^n(F_0) = F_0$;
- (b) eventualmente periódica si para algún entero positivo m , $R^m(F_0)$ es periódica; y
- (c) errante si los conjuntos $R^n(F_0)$, $n \geq 0$ son disjuntos dos a dos.

TEOREMA 2.5.4. (no errancia de Sullivan) *Toda componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica.*

El siguiente paso es dar una clasificación para las componentes invariantes hacia adelante de F .

DEFINICIÓN. Una componente F_0 invariante hacia adelante de F es:

- Una componente atractora si ésta contiene un punto fijo atractor ζ de R ;
- Una componente super-atractora si ésta contiene un punto fijo súper-atractor ζ de R ;
- Una componente parabólica si existe un punto fijo indiferente racional ζ de R en la frontera de F_0 , y si $R^n \rightarrow \zeta$ en F_0 ;
- Un disco de Siegel si $R : F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada a una rotación Euclidiana del disco unitario sobre sí mismo.
- Un anillo de Herman si $R : F_0 \rightarrow F_0$ es analíticamente conjugada a una rotación Euclidiana de algún anillo sobre sí mismo.

TEOREMA 2.5.5. *Una componente invariante hacia adelante de F es de algún tipo mencionado en la definición.*

Tampoco se dará demostración de este hecho.

Ahora esclareceremos el rol de los puntos críticos en la dinámica global. Denotemos por $C(R)$ el conjunto de los puntos críticos de R , y por $C^+(R)$ las imágenes hacia adelante de $C(R)$, es decir,

$$C^+(R) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(C(R)).$$

. Como ya vimos cuando estudiamos las conjugaciones locales, toda cuenca inmediata de un ciclo (súper) atractor contiene un punto crítico, al igual que la cuenca inmediata de un ciclo indiferente racional. Además si $\{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$ es un ciclo de discos de Siegel o de anillos de Herman, entonces la clausura de $C^+(R)$ contiene a $\bigcup \partial\Omega_j$. Y por último todo ciclo indiferente irracional de R en J esta en el conjunto derivado de $C^+(R)$.

TEOREMA 2.5.6. *Sea R una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces toda componente invariante hacia adelante de $F(R)$ es simplemente, doblemente o bien infinitamente, conexa.*

DEMOSTRACIÓN: Como F_0 es invariante hacia adelante, entonces es de algún tipo de los mencionados en la definición. Si F_0 es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces es simplemente o doblemente conexa. Si F_0 es de algún tipo de los tres restantes entonces contiene un punto crítico de R . Supongamos que F_0 tiene conexidad finita, entonces R restringida a F_0 es una transformación cubriente ramificado de m hojas sobre si mismo para algún entero positivo m . De este modo obtenemos la relación

$$\chi(F_0) + \delta(F_0) = m\chi(F_0)$$

con todos los términos finitos. Se sigue que

$$(m-1)\chi(F_0) = \delta(F_0) > 0$$

así $m \geq 2$ y $\chi(F_0) > 0$. Por tanto en estos casos, $\chi(F_0) = 1$ y F_0 es simplemente conexo. \square .

COROLARIO 2.5.7. *Si F es conexo, entonces es simplemente o bien infinitamente conexo.*

COROLARIO 2.5.8. *Si una componente de $F(R)$ contiene un punto fijo de R , entonces esta es simplemente o bien infinitamente conexa.*

COROLARIO 2.5.9. *Una componente invariante hacia adelante de R es doblemente conexa si y sólo si esta es un anillo de Herman.*

Otra aplicación de los puntos críticos obtenida simplemente por conteo es:

TEOREMA 2.5.10. *Sea R una transformación racional de grado d , $d \geq 2$. Entonces el número combinado de ciclos (súper)atractores e indiferentes racionales es a lo mas $2d - 2$.*

La siguiente aplicación es muy útil cuando tenemos polinomios.

TEOREMA 2.5.11. *Si el conjunto de Fatou $F(R)$ de R tiene dos componentes completamente invariantes, entonces estas son las únicas componentes de $F(R)$.*

DEMOSTRACIÓN: Nombremos a nuestras componentes completamente invariantes por F_1 y F_2 , primeramente ninguna de estas componentes puede ser un disco de Siegel o un anillo de Hermann (si lo fuera entonces el grado de R tendría que ser 1). Por tanto nuestras componentes deben ser de alguno de los otros tipos, y por tanto la órbita hacia adelante de todo punto en F_j converge a un punto fijo ζ_j en la clausura de F_j .

Además toda componente de F incluyendo F_1 y F_2 son simplemente conexas, de lo que obtenemos que

$$\delta(F_1) = d - 1 = \delta(F_2)$$

este hecho junto con el hecho de que tenemos $2d - 2$ puntos críticos, implican que la órbita de esta en $F_1 \cup F_2$ y se acumula solo en los puntos ζ_1 y ζ_2 . Supongamos ahora que F tiene otra componente, entonces ésta debe contener un algún ciclo de componentes disjunto de nuestras componentes invariantes. Entonces el ciclo debe intersectar a la órbita de los puntos críticos lo cual no es posible, o debe ser un disco de Siegel o anillo de Herman, pero estos se deben de acumular en una infinidad de puntos lo que también es imposible. \square .

TEOREMA 2.5.12. *Si todo punto crítico de R es pre-periódico, entonces $J = \overline{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que F no es vacío, entonces F debe contener una componente periódica bajo R , y debe ser de alguno de los tipos discutidos, pero si tuviéramos un ciclo atractor entonces existiría un punto crítico periódico, y en los otros casos tendríamos un punto crítico con órbita infinita, ninguna de esas cosas puede pasar y por tanto $J = \overline{C}$. \square .

Para polinomios tenemos el siguiente teorema y dos corolarios aunque no daremos las demostraciones.

TEOREMA 2.5.13. *Sea P un polinomio de grado d , $d \geq 2$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) F_∞ es simplemente conexa;
- (ii) J es conexo;
- (iii) F_∞ no contiene puntos críticos de P .

COROLARIO 2.5.14. *Si:*

- (a) toda punto crítico de P esta en J ; o bien
 - (b) toda punto crítico de P tiene órbita hacia adelante finita,
- entonces F_∞ es simplemente conexa.

COROLARIO 2.5.15. *Si todo punto crítico finito de P es pre-periódico, entonces $F(R)$ es conexo y simplemente conexo.*

La siguiente cota para los ciclos no repulsores fue obtenida por Shishikura en su tesis de maestría, usando cirugía casi-conforme el mostró que mediante una perturbación analítica todos los ciclos indiferentes se pueden volver atractores.

TEOREMA 2.5.16. *Una transformación racional R de grado d , $d \geq 2$ tiene a lo más $2d - 2$ ciclos no repulsores.*

Nuestros últimos teoremas se darán en forma de lista y sin demostración, pues de hacerlo otra vez extenderíamos de más el material.

Sea R una transformación racional con conjunto de Julia J , y sea $\omega(z) |dz|$ la métrica Riemanniana definida en alguna vecindad W de J (por tanto ω es positiva y continua sobre W). Si z esta en $W \cap R^{-1}(W)$, entonces el cambio de escala de R en z (medido en la métrica ω) es

$$\|R'(z)\| = \frac{\omega(Rz) |R'(z)|}{\omega(z)}$$

definido en alguna vecindad de J .

DEFINICIÓN 2.5.17. Decimos que R es expandible sobre J (con respecto a ω) si existen números positivos c y λ , con $\lambda \geq 1$ y $\|(R^n)'(z)\| \geq c\lambda^n$, $n \geq 1$, en J . Llamamos a λ una constante de dilatación de R en J .

TEOREMA 2.5.18. *Supongamos que cada punto crítico de R tiene órbita hacia adelante la cual se acumula en un ciclo (súper)atractor de R . Entonces R es expandible sobre J .*

Un conjunto de la esfera de Riemann es un conjunto de Cantor si es no vacío, cerrado, perfecto (es decir no tiene puntos aislados) y totalmente desconexo (cada componente es un solo punto).

TEOREMA 2.5.19. *Sea R una transformación racional de grado d , $d \geq 2$, y sea ζ un punto fijo (súper)atractor de R . Si todos los puntos críticos de R caen en la cuenca inmediata de atracción de ζ , entonces $J(R)$ es un Cantor.*

TEOREMA 2.5.20. *Suponga que R satisface las hipótesis del teorema anterior, entonces:*

- (i) *para un conjunto denso de ζ en J , la órbita hacia delante de ζ es densa en J ; y*
- (ii) *los puntos periódicos son densos en J .*

TEOREMA 2.5.21. *Sea P un polinomio de grado d , $d \geq 2$. Si F_∞ es implemente conexa, y si P es extensible en su conjunto de Julia J , entonces J es una curva cerrada y cada punto de J es accesible de F_∞ .*

TEOREMA 2.5.22. *Sea P un polinomio extensible en su conjunto de Julia, y supongamos que la cuenca inmediata de atracción F_0 de un punto fijo (súper)atractor ζ de P es implemente conexo. Entonces J es una curva cerrada y cada punto de J es accesible de F_∞ .*

TEOREMA 2.5.23. *Sea P un polinomio extensible en su conjunto de Julia, y supongamos que $F(P)$ es la unión de exactamente dos componentes, cada una conteniendo un punto fijo (súper)atractor. Entonces $J(P)$ es la frontera compartida por las componentes y es una curva de Jordan.*

2.6. El espacio de parámetros

Consideremos la familia de polinomios cuadráticos $P(z) = az^2 + bz + c$, a primera vista nuestra función depende de tres parámetros, pero en realidad podemos realizar una conjugación afín y transformar nuestro problema a polinomios del tipo

$$P_c = z^2 + c$$

o incluso conjugar a otras formas normales como

$$P_\lambda = \lambda z + z^2$$

donde ahora nuestras familias solo dependen de un parámetro, de hecho nuestra segunda conjugación se obtiene moviendo el punto fijo con multiplicador λ al origen, es decir mediante $h(w) = w - \frac{\lambda}{2}$, esto se puede observar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_{\frac{\lambda}{2}}} & \bar{\mathbb{C}} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_\lambda} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

la importancia de poner a nuestra familia dependiendo de un parámetro es que podemos relacionar el c -plano (resp. λ -plano) con nuestro estudio de dinámica. En nuestro caso como solo tenemos un punto crítico en 0 (resp. en $-\frac{\lambda}{2}$) podemos observar que en el espacio de parámetros hay también una dicótoma, esta dado por la condición de que el punto crítico sea acotado o no, si es acotado tenemos J_c conexos, en caso contrario tendremos J_c conjuntos de cantor.

DEFINICIÓN. El conjunto de Mandelbrot correspondiente a la familia cuadrática de define por $M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ es conexo}\}$; Más aún por nuestras observaciones si denotamos como z_0 al punto crítico entonces $M = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z_0) \not\rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$.

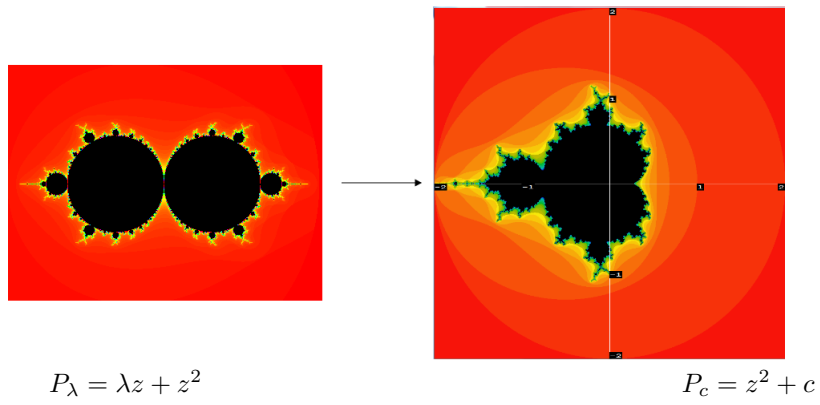
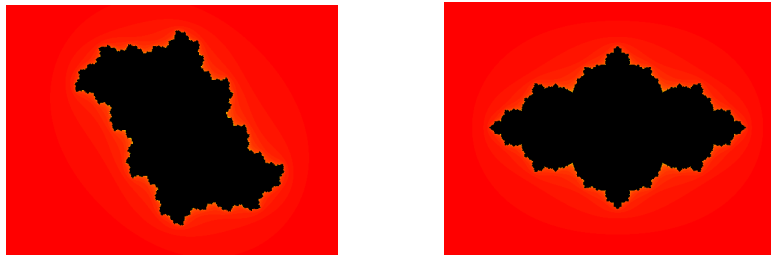
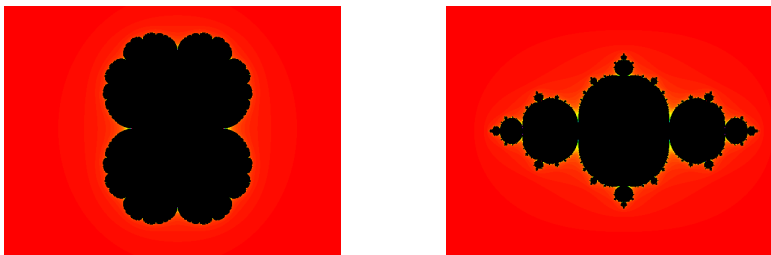


FIGURE 2.6.1. Espacios de parámetros

FIGURE 2.6.2. Cuasi-círculos $c = 0.5i$ y $c = -0.6$ FIGURE 2.6.3. Conjuntos de Julia con ciclos parabólicos $c = 0.25$ y $c = -0.75$

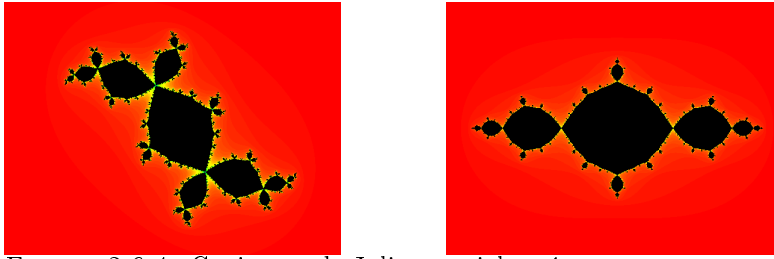


FIGURE 2.6.4. Conjuntos de Julia con ciclos súper atractores $c \approx -0.122561 + 0.744862i$ y $c = -1$

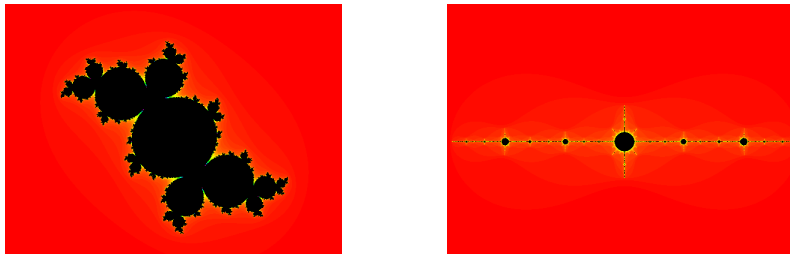


FIGURE 2.6.5. Uno con ciclo parabólico y otro con súper atractor c correspondiente a $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ y $c \approx -1.754878$

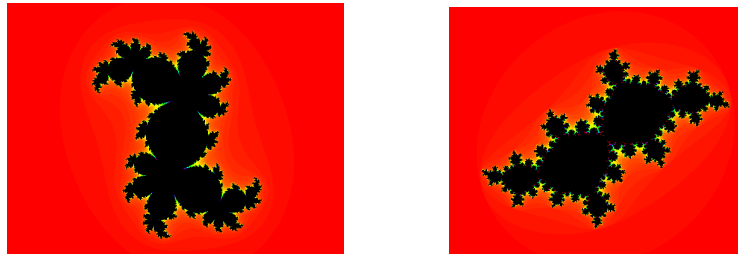


FIGURE 2.6.6. Uno con ciclo parabólico y con disco de Siegel c correspondiente a $\lambda = \frac{2\pi}{5}$ y λ igual a la razón dorada

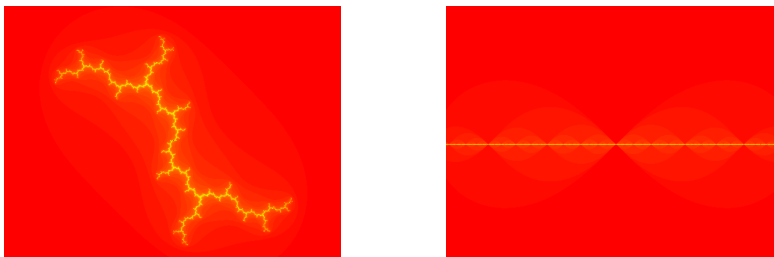


FIGURE 2.6.7. Dendritas $c = i$ y $c = -2$

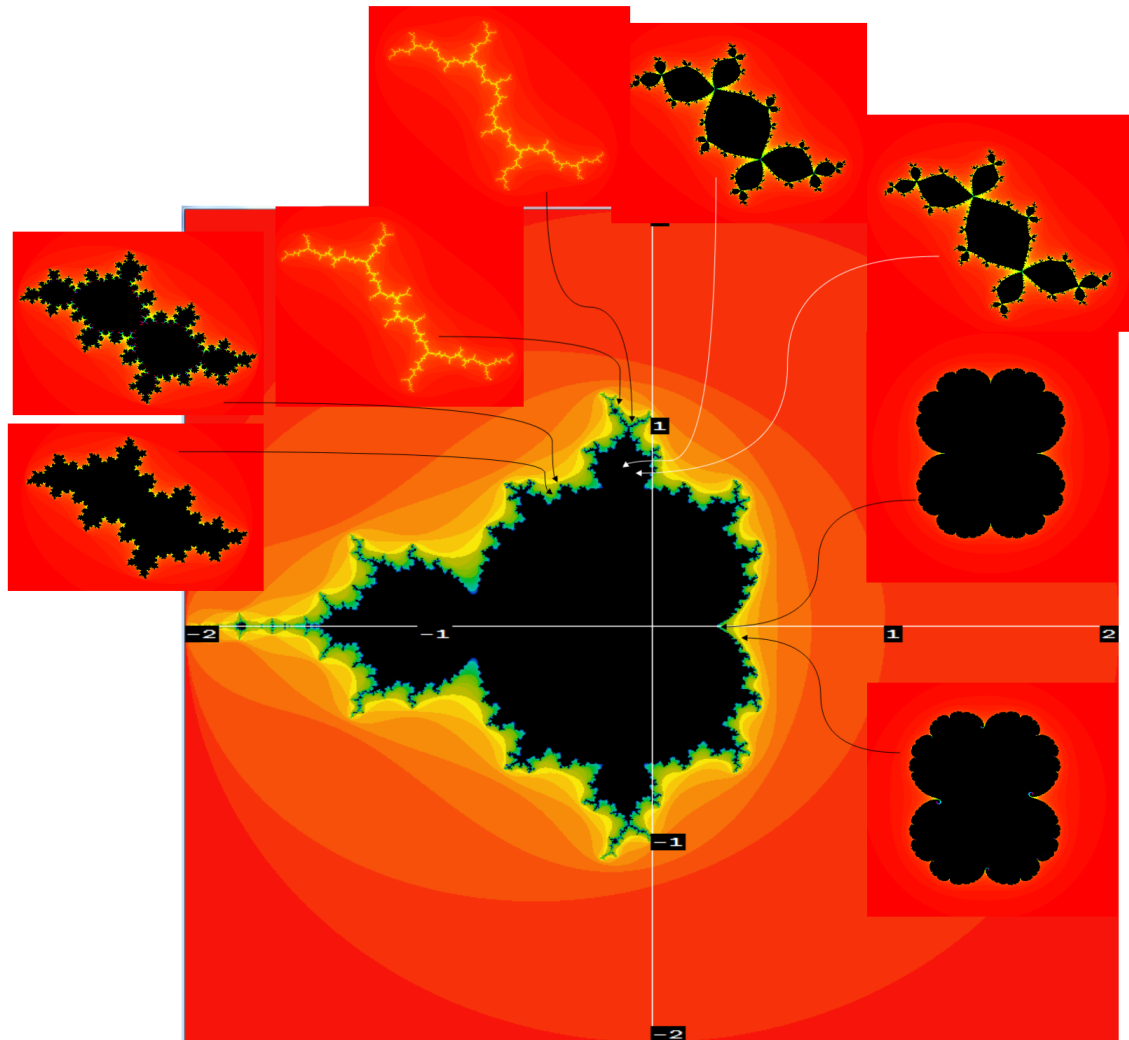


FIGURE 2.6.8. El espacio de parámetros y algunos conjuntos de Julia.

Dinámica polinomial alternada

3.1. Dinámica de la función z^4

La intención principal de esta tesis es desarrollar una teoría para la iteración polinomial alternada cuadrática, aunque sea escueta, es decir intentaremos entender la dinámica de los polinomios de la forma

$$p_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$$

con z, c_1 y c_2 complejos; para esto usaremos la vieja técnica divide y vencerás, esto es analizar p_{c_1, c_2} para valores de c_1 y c_2 muy específicos.

El caso mas sencillo de todos es cuando tenemos $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto $p_{c_1, c_2}(z) = P(z) = z^4$. De forma natural pensamos en los puntos fijos para P , pues si existieran sucesiones convergentes deberían converger a uno de estos, como ya se ha visto antes, en nuestro caso particular P tiene cinco puntos fijos:

- 0 (súper atractor)
- 1 (repulsor)
- ∞ (súper atractor)
- $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$ (repulsor)
- $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp(\frac{4}{3}\pi i)$ (repulsor);

Si $z_n = P(z_{n-1})$ tenemos que $z_n \rightarrow 0$ cuando $|z_0| < 1$, mientras que $z_n \rightarrow \infty$ cuando $|z_0| > 1$, como 0 e ∞ son súper atractores entonces las cuencas de atracción $A(0) = \{z \mid |z_0| < 1\}$ y $A(\infty) = \{z \mid |z_0| > 1\}$ están contenidas en $F(P)$, de hecho estas cuencas son las únicas componentes de F digamos F_0 y F_∞ , y como ambas son completamente invariantes, entonces son las únicas componentes de $F(P)$, ambas simplemente conexas y J es la frontera común, es decir, $J = \mathbb{S}^1$.

Por tanto nos enfocamos en la dinámica de z^4 sobre la circunferencia unitaria \mathbb{S}^1 , es decir para los z tales que $|z| = 1$, escribiendo $z = e^{i\theta}$, se tiene que $P(z) = e^{i4\theta}$, esto es, la acción de P es cuadruplicar el argumento de z . Lo siguiente es calcular los puntos periódicos y pre-periódicos de P para lo cual es útil poner a $z = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in [0, 1)$ y analizar la transformación $\theta \rightarrow 4\theta \pmod{1}$.

Esta transformación es más fácil de entender si reescribimos a θ en su expansión binaria, es decir, $\theta = 0.a_1a_2a_3\dots$, con $a_j = 0$ ó 1 . Tal expansión está determinada por $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}$, hay que remarcar que si θ tiene dos expansiones $0.a_1a_2a_3\dots$, y $0.b_1b_2b_3\dots$, entonces $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j}$ y por tanto $a_n = b_n$ para todo n , o para algún N , $a_N = 1$, $a_n = 0$ para $n > N$, y $b_n = a_n$ para $n < N$, $b_n = 1 - a_n$ para $n \geq N$. Por tanto los únicos números que admiten dos representaciones son de la forma $\frac{1}{2^n}$. Observemos como actúa la transformación $\theta \rightarrow 2\theta \pmod{1}$, si $\theta = 0.a_1a_2a_3\dots$, entonces por el módulo 1, $2\theta = 0.a_2a_3a_4\dots$, y el efecto es ignorar el primer coeficiente y mover los otros coeficientes un lugar hacia la izquierda. Continuando de este modo $4\theta = 0.a_3a_4a_5\dots$, que no es más que aplicar dos veces la primera transformación.

Un punto es pre-periódico si $P^n(e^{i2\pi\theta}) = P^m(e^{i2\pi\theta}) \Leftrightarrow (e^{i2\pi\theta*4^n}) = (e^{i2\pi\theta*4^m}) \Leftrightarrow 2\pi\theta*4^n = 2\pi\theta*4^m + 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Para continuar con nuestro estudio presentemos algunas herramientas.

DEFINICIÓN. El espacio de sucesiones en dos símbolos es el conjunto

$$\Sigma = \{(s_0s_1s_2\dots) | s_j = 0 \text{ ó } 1\}$$

Para observar cuando dos “puntos” de este espacio están “cerca”, es necesario definir una métrica para Σ como sigue.

DEFINICIÓN. Sean $s = (s_0s_1s_2\dots)$ y $t = (t_0t_1t_2\dots)$ dos puntos en Σ . La distancia entre s y t esta dada por:

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Nuestro objetivo es observar la cercanía de dos puntos en Σ , lo cual es sencillo de la mano del teorema de proximidad.

TEOREMA 3.1.1. Sean s y $t \in \Sigma$, si $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$. Y recíprocamente, si $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Es natural continuar definiendo la función avance $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ por $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$.

PROPOSICIÓN 3.1.2. Sea D la transformación dobladora $D : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por

$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Si nosotros iteramos esta función n veces obtendremos

$$D^n(x) = \begin{cases} 2^n x - k & \frac{k}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{d.o.f} \end{cases}$$

3.2. Dinámica de la función $z^d + c$

Para poder analizar nuestros casos restantes primero recordemos algunos hechos útiles, si P es un polinomio de grado d mayor o igual a dos, es claro que ∞ es un punto fijo súper atractor, y además que las iteradas de P son acotadas en las componentes acotadas de F debido al principio del máximo, por lo cual la cuenca de atracción $A(\infty)$ de ∞ es conexa. Además el conjunto de Julia coincide con la frontera de esta cuenca. En este punto el criterio para saber cuando el Julia asociado al polinomio P es conexo, está dado por una condición de los puntos críticos de P . El caso que concierne a esta sección es cubierto por los siguientes teoremas.

TEOREMA 3.2.1. *El conjunto de Julia es conexo si y sólo si no existen puntos críticos finitos de P en $A(\infty)$, esto es, si la órbita hacia delante de cada punto crítico finito es acotada.*

PROOF. Sea φ que conjugue $P(z)$ a ζ^d cerca de ∞ , con $\varphi(z) = z + o(1)$ en ∞ . Más aun $\log |\varphi(z)|$ coincide con la función de Green $G(z)$ para $A(\infty)$ con polo en ∞ . La ecuación funcional para $\varphi(z)$ nos da una ecuación funcional para la función de Green,

$$G(P(z)) = d \cdot G(z), \quad z \in A(\infty)$$

De este modo P transforma las curvas de nivel de G a curvas de nivel, incrementando d hojas al valor de la función de Green. La función de Green nos proporciona una medida precisa de la velocidad de escape a ∞ . El exterior $\{G > r\}$ de la curva de nivel es invariante bajo P , y P transforma este de modo d a uno sobre $\{G > rd\}$. Para un r grande, $\varphi(z)$ es definida sobre $\{G > r\}$ y transforma este conformemente sobre $\{|\zeta| > e^r\}$. La ecuación $\varphi(z) = (\varphi(p(z)))^{\frac{1}{d}}$ nos permite extender $\varphi(z)$ a $\{G > \frac{r}{d}\}$ ya que los puntos críticos finitos de P no pertenecen a este dominio.

Ahora como no hay puntos críticos de P en $A(\infty)$, podemos prolongar φ indefinidamente a todo $A(\infty)$, y φ transforma $A(\infty)$ conformemente sobre el complemento $\{|\zeta| > 1\}$ del disco unitario cerrado en el ζ -plano. En particular, $A(\infty)$ es simplemente conexo, y el conjunto de Julia $J = \partial A(\infty)$ es conexo. \square

Nota: Si existieran puntos críticos finitos de P en $A(\infty)$, extenderíamos φ hasta alcanzar una línea de nivel $\{G = r\}$ de la función de Green la cual contiene un punto crítico de P . El dominio $\{G > r\}$ es simplemente conexo y es transformado conformemente por φ sobre $\{|\zeta| > e^r\}$. El dominio forma varias cúspides en el punto crítico, y $\varphi(z)$ se acerca a distintos valores cuando z se acerca al punto crítico a través de las diferentes cúspides. La línea de nivel $\{G = r\}$ consiste al menos dos curvas cerradas simples que se tocan en el punto crítico. Dentro de esas curvas hay puntos de J , o sino G debe ser armónica y positiva, por tanto constante dentro de la curva. Por tanto J es disconexo. La situación totalmente contraria es cubierta por el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2.2. *Si $P^n(q) \rightarrow \infty$ para cada punto crítico q , entonces el conjunto de Julia J es totalmente disconexo, y además J es un cantor.*

PROOF. Sea D un disco abierto grande el cual contiene a J tal que $P(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. Eligiendo un N tan grande que P^N lleve los puntos críticos de P a $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Para $n \geq N$ no hay puntos críticos en \overline{D} , así que todas las ramas inversas

P^{-n} están definidas y transforman \overline{D} conformemente en D . Sea $z_0 \in J$, entonces $P^n(z_0) \in J$, definiendo f_n la rama inversa de P^n que transforma $P^n(z_0)$. Las f_n son uniformemente acotadas en alguna vecindad de \overline{D} , por tanto forman una familia normal ahí, como $f_n(z)$ se acumula en J para $z \in D \cap A(\infty)$, cualquier función límite f transforma $D \cap A(\infty)$ en J , además J no contiene conjuntos abiertos y por tanto f debe ser constante, por lo cual $f_n(\overline{D})$ tiene diámetro que tiende a cero, así $f_n(\partial\overline{D})$ es disjunto de J , y $\{z_0\}$ debe ser una componente conexa de J , es decir J es totalmente desconexo. Para la última sentencia no hay nada que probar ya que J es perfecto por el teorema 2.1.14, cerrado por definición y no vacío por el teorema 2.1.11, además de totalmente desconexo como acabamos de probar. \square

En el modo en el que hemos estado trabajando, el siguiente caso a analizar es cuando solo uno de nuestros parámetros es cero. Tenemos dos casos: Si $c_2 = 0$, $P_{c_1 c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2$ podemos conjugar $P_{c_1 c_2}(z)$ con $R(z) = z^4 + c_1$ mediante la función $h(z) = z^2 + c_1$, para ver esto observemos que $h(P_{c_1 c_2}(z)) = h((z^2 + c_1)^2) = (z^2 + c_1)^4 + c_1 = R(z^2 + c_1) = R(h(z))$.

Ahora si $c_1 = 0$, se obtiene simplemente $P_{c_1 c_2}(z) = z^4 + c_2$, esto significa que podemos reducir nuestro estudio por el momento a $P_c(z) = z^4 + c$, y nuestro interés, al igual que en el caso cuadrático recae en como el comportamiento dinámico de P_c depende del parámetro c , nuestro primer resultado es bastante claro debido a los teoremas y a que P_c tiene un único punto crítico finito en cero.

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Si $P_c^n(0) \rightarrow \infty$, entonces el conjunto de Julia asociado J_c es totalmente desconexo. De otro modo $P_c^n(0)$ es acotado y J_c es conexo.*

Inmediatamente surge la pregunta, ¿para qué valores de c , J_c es conexo?, llamemos a este conjunto de parámetros el Mandelbrot y denotémoslo por M , es decir $M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ es conexo}\}$. Por tanto $c \in M$ si y sólo si 0 no pertenece a la cuenca de atracción del punto fijo súper-atractor ∞ , la siguiente proposición aclara nuestra pregunta.

PROPOSICIÓN 3.2.4. *El conjunto de Mandelbrot M es un subconjunto cerrado simplemente conexo del disco $\{|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}\}$, el cual intersecta el eje real en el intervalo $[-2^{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4^{\frac{4}{3}}}]$. Más aun, M consiste precisamente de los c tales que $|P_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{3}}$ para toda $n \geq 1$.*

PROOF. Si $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$, como $|P_0(c)| = |c|$, entonces $|P_c^2(0)| = |c^4 + c| \geq |c|^4 - |c| = |c|(|c|^3 - 1)$, y

$$|P_c^3(0)| = |(P_c^2(0))^4 + c| \geq |P_c^2(0)|^4 - |P_c^2(0)| = |P_c^2(0)| (|P_c^2(0)|^3 - 1)$$

$$\implies |P_c^3(0)| \geq |P_c^2(0)| (|c|^3 - 1) \geq |c| (|c|^3 - 1)^2$$

el penúltimo paso debido a que $|P_c^2(0)| \geq |c|$ y que $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$, continuando de este modo se tiene que $|P_c^n(0)| \geq |c| (|c|^3 - 1)^n$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo cual $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$ y $c \notin M$.

Ahora supongamos que $|P_c^m(0)| = 2^{\frac{1}{3}} + \delta > 2^{\frac{1}{3}}$ para alguna $m \geq 1$. Si $|P_0(c)| = |c| > 2^{\frac{1}{3}}$ entonces $c \notin M$. Si $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$, entonces $|P_c^{m+1}(0)| \geq \left(2^{\frac{1}{3}} + \delta\right)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8\delta$, y

$$|P_c^{m+2}(0)| \geq \left(\left(2^{\frac{1}{3}} + \delta\right)^4 - 2^{\frac{1}{3}}\right)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq \left(2^{\frac{1}{3}} + 8\delta\right)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8^2\delta$$

Continuando de este modo $|P_c^{m+k}(0)| \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8^k\delta \rightarrow \infty$ y de nueva cuenta $c \notin M$. Esto prueba la sentencia final de la proposición, de la cual se sigue que M es cerrado. Por el principio del máximo, $\mathbb{C} \setminus M$ no tiene componentes acotadas, por tanto $\mathbb{C} \setminus M$ es conexo, y por ende M es simplemente conexo.

Si c es real, entonces $P_c(x) - x$:

No tiene raíces reales si $c > \frac{3}{4^{4/3}}$.

Tiene una raíz en $\frac{1}{2^{2/3}}$ si $c = \frac{3}{4^{4/3}}$.

Tiene dos raíces reales cuando $c < \frac{3}{4^{4/3}}$.

Si $c > \frac{3}{4^{4/3}}$, $P_c^n(0)$ es creciente y se va a infinito, ya que cualquier punto límite debe satisfacer $P_c(x) = x$.

Si $c \leq \frac{3}{4^{4/3}}$, sea a la raíz más grande de $P_c(x) - x$, si además $c > -2^{\frac{1}{3}}$, se puede verificar que $a \geq |c| = |P_c(0)|$, entonces $|P_c^n(0)| \leq a$ esto que implica $|P_c^{n+1}(0)| = \left|(P_c^n(0))^4 + c\right| \leq a^4 + c = a$, y por tanto la sucesión es acotada.

Así $M \cap \mathbb{R} = [-2^{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4^{4/3}}]$. \square

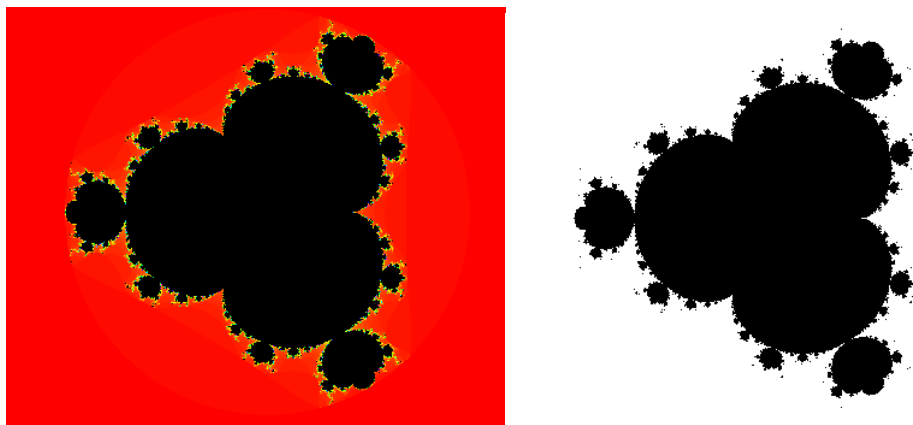


FIGURE 3.2.1. El conjunto de Mandelbrot

Lo siguiente que nos gustaría observar son las diversas posibilidades para J_c de P_c . Para esto hay que recordar el siguiente teorema debido a Douady, omitiremos la demostración pero se puede encontrar en [Ca] o en [Bla], la cual usa la idea implementada por Douady y Hubbard de transformaciones *parecidas* a polinomios. Esta idea es estimulada intuitivamente por los dibujos ya que parece ser que los conjuntos de Julia de polinomios de grado mayor tienen en ocasiones alguna parte similar a los conjuntos de Julia de grado menor.

DEFINICIÓN 3.2.5. Llamamos a la terna (f, U, V) de dominios acotados simplemente conexos U y V tales que $\bar{U} \subset V$ y a una transformación propia holomorfa $f : U \rightarrow V$ una transformación *parecida* a un polinomio. Por f propia se entiende que f es holomorfa en \bar{U} , y que transforma U sobre V con cubriente *ded* pliegues, y tal que f transforma ∂U sobre ∂V . Alternativamente una transformación *parecida* a un polinomio $f : U \rightarrow V$, donde U y V son dos conjuntos abiertos en \mathbb{C} acotados por curvas de Jordan γ y γ' con $\bar{U} \subset V$, es una transformación holomorfa la cual puede ser extendida en una transformación continua $\bar{U} \rightarrow \bar{V}$, induciendo una transformación $\gamma' \rightarrow \gamma$. El grado de f es el grado de la transformación inducida $\gamma' \rightarrow \gamma$.

TEOREMA 3.2.6. (Douady). *Un polinomio P de grado d tiene a lo más $d - 1$ ciclos no repulsores en el plano finito.*

Idea de la demostración: Una transformación parecida a un polinomio de grado d tiene $d - 1$ puntos críticos contando multiplicidad. Si f es un polinomio de grado d , la transformación $g : f^{-1}(D_R) \rightarrow D_R$ es una transformación parecida a un polinomio. Entonces el teorema 2.1.48 puede ser extendido a las transformaciones parecidas a polinomios: cada ciclo atractor atrae al menos un punto crítico. La prueba puede ser copiada de la prueba para polinomios. Como consecuencia, una transformación parecida a un polinomio de grado d tiene a lo mas $d - 1$ ciclos atractores. La ventaja es que mientras que no es fácil modificar un polinomio para convertir todos los ciclos no repulsores en atractores (sin modificar el grado), es muy fácil para transformaciones parecidas a polinomios. Entonces una transformación parecida a un polinomio de grado d tiene a lo mas $d - 1$ ciclos no repulsores, o si no la transformación modifica nos daría una contradicción. Y esta condición también es verdadera para polinomios.

En nuestro caso debido a la multiplicidad del punto crítico, tenemos a los más un ciclo periódico de las componentes acotadas de las componentes acotadas de F_c , ya que por el teorema de Sullivan no hay componentes errantes, y por tanto, toda componente acotada de F_c es eventualmente iterada en el ciclo, es decir es eventualmente periódica. Además tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2.7. *Las componentes periódicas de un polinomio no pueden ser anillos de Herman.*

PROOF. Probaremos el teorema aplicando el principio del máximo a la familia de funciones $\{P_c^n\}$. Supongamos que una de las componentes digamos A es un anillo de Herman. Sea ℓ cualquiera de las curvas de Jordan invariantes en A . Sea U el disco abierto acotado por ℓ y que no contenga a infinito. Como $U \cap J(P_c) \neq \emptyset$ y no estamos tratando con el caso en el cual la cardinalidad de $E(P_c)$ es dos. Si lo estuviéramos podríamos conjugar P_c a alguna transformación z^d . Podemos concluir que $\cup P_c^n(U) = \mathbb{C}$, lo cual contradice el principio del máximo aplicado a las funciones $P_c^n|U$ ya que $P_c^n(\ell) = \ell$. \square

Con estas consideraciones usando el teorema de clasificación de Sullivan nos deja las siguientes cuatro posibilidades para $c \in M$.

- (1) Existe un ciclo atractor para P_c . En este caso tenemos dos opciones, existe un punto fijo atractor, en cuyo caso existe solo una componente acotada

de F_c . O el ciclo tiene longitud dos o mayor, y por tanto tenemos infinitas componentes acotadas de F_c . Además J_c es localmente conexo.

- (2) Existe un ciclo parabólico para P_c . También aquí nos encontramos con dos casos, existe un punto fijo con multiplicador 1, y existe una única componente de F_c . O bien el ciclo de las componentes parabólicas de F_c tiene longitud dos o más, y por ende infinitas componentes acotadas de F_c . El primer caso ocurre para tres valores de c , específicamente $c = -\frac{3}{4^{4/3}}$, $c = -\frac{3}{4^{4/3}}e^{\frac{1}{3}\pi i}$ y $c = -\frac{3}{4^{4/3}}e^{\frac{5}{3}\pi i}$. Nuevamente J_c es localmente conexo.
- (3) Existe un ciclo correspondiente a un disco de Siegel, $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots \rightarrow U_m \rightarrow U_1 \rightarrow \dots$, las componentes de F_c en el ciclo son transformadas uno a uno sobre ellas mismas por P_c . Cada U_j en el ciclo es la imagen de U_{j-1} y de otras tres componentes acotadas de F_c , digamos A_j , B_j y C_j , cada una de estas tiene cuatro distintas preimágenes, y cada una de esas cuatro preimágenes distintas más, y así sucesivamente, tal que las imágenes inversas de cada componente forma un árbol. Y como no puede haber ciclos atractores o neutros más que el ciclo de Siegel, concluimos que toda componente acotada de F_c es eventualmente iterada por P_c al ciclo de Siegel.
- (4) No existen componentes acotadas de F_c . Esto ocurre por ejemplo para $c = -2^{\frac{1}{3}}$, $c = \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}}i$ y $c = \frac{1}{2^{2/3}} - \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}}i$ o $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ para los cuales J_c es una dendrita y por consecuencia localmente conexo, pero podría pasar que J_c no sea localmente conexo.

Centrados en el primer punto de nuestro análisis, como nuestro objetivo es identificar los valores de c para los cuales tenemos un punto fijo atractor, notemos que

$$z^4 - z + c = 0$$

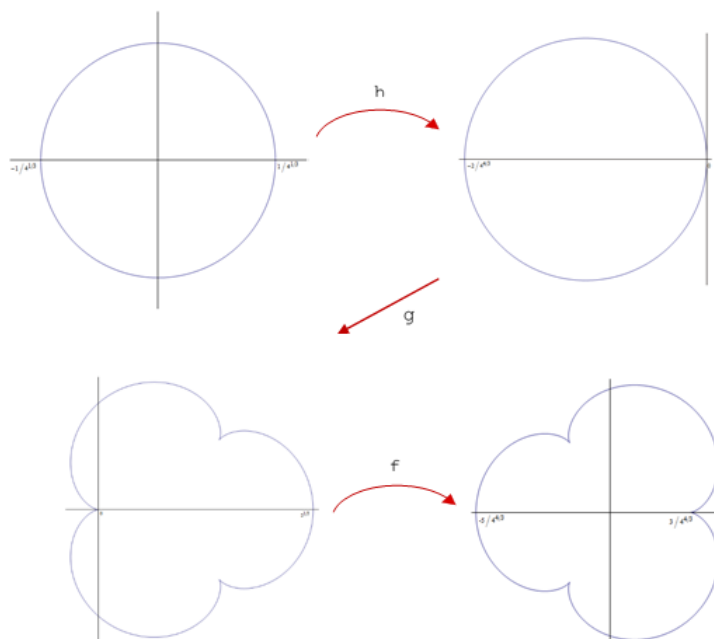
y

$$|4z^3| < 1$$

de este modo

$$c = z - z^4$$

Y el conjunto de c 's que estamos buscando es la imagen del disco $\left\{z \mid |z| < \frac{1}{4^{1/3}}\right\}$ bajo la transformación $z - z^4$. Como esta transformación es $f \circ g \circ h$, donde

FIGURE 3.2.2. Conjunto C

$$h(z) = z - \frac{1}{4^{1/3}}$$

$$g(z) = \frac{3z^2}{2^{1/3}} + 2^{4/3}z^3 + z^4$$

$$f(z) = \frac{3}{4^{4/3}} - z$$

este conjunto le llamamos C .

Otra manera de entender esto es poniendo a $z = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta}$ esto es z sobre el disco y usar la relación obtenida para c anteriormente, por tanto $c = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta} - \frac{1}{4^{4/3}}e^{4i\theta}$ con θ arbitrario.

PROPOSICIÓN 3.2.8. *Sea $C = \left\{c \in \mathbb{C} \mid c = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta} - \frac{1}{4^{4/3}}e^{4i\theta}\right\}$ si $c \in C$, entonces J_c es una curva de Jordan y de hecho un cuasi-circulo.*

PROOF. Sea Γ_0 que denota el círculo de radio $\frac{5}{4^{4/3}}$ alrededor del cero, Γ_0 contiene al punto fijo atractor y al punto crítico de P_c es su interior. Más aun $|P'_c(z)| > 1$ para z en el exterior de Γ_0 . Para cada $\theta \in \mathbb{S}^1$, definamos una curva continua $\gamma_\theta : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con la propiedad de que $z(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t)$ es una parametrización continua de J_c . Para definir $z(\theta)$, primero notamos que la preimagen Γ_1 de Γ_0 bajo P_c es una curva cerrada simple la cual contiene a Γ_0 en su interior y la cual es transformada de modo cuatro a uno sobre Γ_0 . El hecho de que Γ_1 es una curva de Jordan se sigue de que el punto crítico y su imagen están en el interior de Γ_0 . Por tanto las curvas Γ_0 y Γ_1 acotan una región anular A_1 (A_1

podría ser considerado como un dominio fundamental para el punto fijo atractor de P_c).

Sea N el anillo estándar definido por $N = \{re^{i\theta} \mid 1 \leq r \leq 2, \theta \text{ arbitrario}\}$.

Escojamos cualquier difeomorfismo $\varphi : N \rightarrow A_1$, que transforme las fronteras interna y externa de N a las correspondientes fronteras de A_1 . Esto nos permite definir el segmento inicial de

$$\gamma_\theta = \varphi(re^{i\theta})$$

Esto es, γ_θ es la imagen de una rayo en N bajo φ .

Para $r \geq 2$, podemos extender γ_θ como sigue, P_c no tiene puntos críticos en el exterior de Γ_1 , por tanto existe una curva de Jordan Γ_2 la cual es transformada de modo cuatro a uno sobre Γ_1 . Más aun, P_c transforma la región anular A_2 entre Γ_1 y Γ_2 sobre A_1 , de nuevo de modo cuatro a uno. Así, la preimagen de cualquier γ_θ en A_1 son cuatro curvas las cuales no se intersectan en A_2 . Existe una única curva de esas que toca la frontera interna de Γ_1 . Por tanto, para cada θ , existe una única curva en A_2 que contiene al punto $\gamma_\theta(2)$. Podemos entonces coser juntas esas dos curvas de la manera obvia en ese punto, produciendo una sola curva definida sobre el intervalo $[1, 3]$.

Continuando de este modo, extendemos cada γ_θ sobre el intervalo $[1, \infty)$. Ahora recordemos que $|P'_c(z)| > k > 1$ cuando z esta en el exterior de Γ_1 , por lo cual las longitudes de cada extensión de γ_θ decrecen geoméricamente. De esto se sigue que $\gamma_\theta(t)$ converge uniformemente en θ y que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t) = z(\theta)$ sea un único punto en \mathbb{C} para cada θ .

Afirmamos que $z(\theta)$ parametriza una curva de Jordan en \mathbb{C} . Claramente, $z(\theta)$ es continua, por la convergencia uniforme en θ . Para mostrar que la curva imagen es simple, debemos probar que si $z(\theta_1) = z(\theta_2)$, entonces $z(\theta) = z(\theta_1)$ para todo θ con $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Ya que si este no fuera el caso, entonces las porciones de las curvas Γ_1 , $\gamma_{\theta_1}(t)$ y $\gamma_{\theta_2}(t)$ deberían acotar a una región simplemente conexa que contuviera a $z(\theta)$ en su interior, esto implica que exista una vecindad de $z(\theta)$ cuya imagen bajo P_c^n permaneciera acotada. Por tanto $z(\theta) \notin J_c$, lo cual es imposible. \square

Es claro que también hemos entendido de algún modo el punto número dos, pues la frontera ∂C consiste precisamente de los valores c para los cuales P_c tiene un punto fijo neutral. La figura 3.2.4 muestra imágenes para valores de c , donde J_c es un cuasicírculo. Los conjuntos de Julia llenos correspondientes a los puntos fijos parabólicos con multiplicadores $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ son ilustrados en la figura 3.2.6.

Lo que nos concierne ahora es el caso general de ciclos atractores.

TEOREMA 3.2.9. *Supongamos que existe un ciclo atractor de longitud m para P_a . Entonces a pertenece al interior de M . Más si W es la componente del interior de M donde esta contenido a , entonces P_c tiene un ciclo atractor $\{z_1(c), \dots, z_m(c)\}$ de longitud m para toda $c \in W$, donde cada z_j depende analíticamente de c .*

PROOF. Sea $z_1(a)$ un punto periódico atractor de periodo m para a . Aplicando el teorema de la función implícita a $Q(z, c) = P_c^m(z) - z$, obtenemos un punto periódico atractor $z_1(c)$ para P_c de periodo m , el cual depende analíticamente de c en una vecindad de a . En particular, a pertenece al interior de M , digamos la componente W . La sucesión $f_j(c) = P_c^{jm}(0)$ es acotada y por tanto normal en W , y esta converge en a a algún punto en el ciclo de $z_1(a)$, digamos al mismo $z_1(a)$. Como $z_1(c)$ es atractor, $f_j(c)$ converge a $z_1(c)$ para c cerca de a . Por normalidad $f_j(c)$ converge en W a alguna función analítica $g(c)$, la cual satisface $Q(g(c), c) = 0$ cerca de a y por tanto en W . Ahora $g(c)$ puede ser un punto periódico repulsor para un $c \in W$ fijo solo si $P_c^{jm}(0)$ coincide con $g(c)$ para un j grande. Esto ocurre a lo mas en un conjunto contable. Como el multiplicador $\lambda(c)$ de un ciclo es analítica, concluimos que $|\lambda| < 1$ en W , esto es, el ciclo de $g(c)$ es atractor para $c \in W$. Mas aún el periodo de $g(c)$ es exactamente m para toda $c \in W$. La función $P_c^i(g(c))$, $0 \leq i \leq m$, dan selecciones analíticas de los puntos de un ciclo. \square

Para ciclos de longitud dos, tenemos que.

$$Q(z, c) = (z^4 + c)^4 + c - z = (z^4 - z + c)(1 + c^3 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + c^2(z + 3z^4) + c(z^2 + 2z^5 + 3z^8))$$

descartando los puntos fijos, obtenemos la ecuación

$$1 + c^3 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + c^2(z + 3z^4) + c(z^2 + 2z^5 + 3z^8) = 0$$

para puntos periódicos de periodo dos. El multiplicador esta dado por

$$16c^3z^3 + 48c^2z^7 + 48cz^{11} + 16z^{15}$$

y bueno mediante esas condiciones se obtienen las figuras 3.2.5 y 3.2.7, las componentes que cumplen estas condiciones son las principales decoraciones del conjunto C , aunque esto se vera mas adelante.

Es posible calcular los valores de c para los cuales P_c tiene un ciclo súper atractor. El punto crítico 0 debe pertenecer al ciclo, y por tanto los parámetros buscados, son precisamente los valores c , para los cuales 0 es periódico, equivalentemente las soluciones de $P_c^n(0) = 0$. Listemos algunos.

- $p_c(0) = c$
- $p_c^2(0) = c^4 + c$
- $p_c^3(0) = c^{16} + 4c^{13} + 6c^{10} + 4c^7 + c^4 + c$

Para $n = 1$, la ecuación se reduce a $c = 0$, y obtenemos el punto fijo superatractor 0, para $n = 2$ la ecuación nos da tres valores mas, coincidentes con las raíces cubicas de -1 , de nuevo véase la figura 3.2.7.

para $n = 3$, excluimos la raíz 0 y obtenemos.

- $c \approx -1.10658 + 0.24848i$ y su conjugada
- $c \approx 0.338099 + 1.08256i$ y su conjugada
- $c \approx 0.708568 + 0.36122i$ y su conjugada
- $c \approx -0.414587 + 0.794248i$ y su conjugada
- $c \approx -0.667109 + 0.433028i$ y su conjugada
- $c \approx 0.768479 + 0.834084i$ y su conjugada
- $c \approx 0.614538 + 1.06441i$ y su conjugada
- $c \approx -1.22908$

Estas figuras las podemos apreciar en 3.2.11 y 3.2.12.

TEOREMA 3.2.10. *Los valores de $c \in M$ correspondientes a ciclos súper atractores se agrupan en toda la frontera ∂M , En particular, el interior de M es denso en M .*

PROOF. Sea U un disco que intersekte ∂M , tal que $0 \in U$. Supongamos que U no contiene valores c para los cuales 0 es periódico. Considere una rama de $\sqrt[4]{-c}$ definida en U . Tenemos que $P_c^n(0) \neq \sqrt[4]{-c}$, si no $P_c^{n+1}(0) = 0$ y 0 es periódico. De este modo $f_n(c) = P_c^n / \sqrt[4]{-c}$ omite los valores $0, 1, \infty$ en U , por lo cual es una sucesión normal en U . Pero como U intersekte ∂M , este contiene puntos c para los cuales $f_n(c)$ es acotada y puntos donde $f_n(c) \rightarrow \infty$, y por tanto la sucesión no puede ser normal. \square

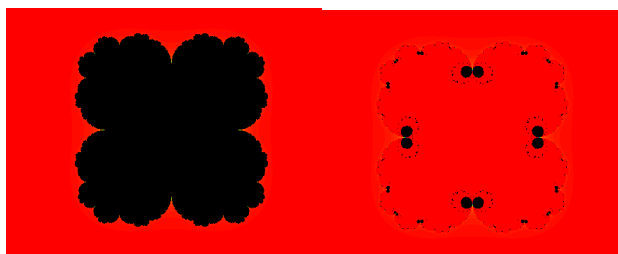


FIGURE 3.2.3. $c = \frac{3}{4^{4/3}}$ (curva de Jordan, pero no cuasicírculo), y $c = .4725$ (totalmente desconexo)

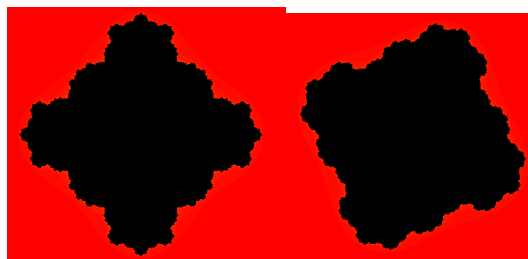


FIGURE 3.2.4. $c = -0.6$ y $c = \frac{1}{2}i$ (cuasicírculos)

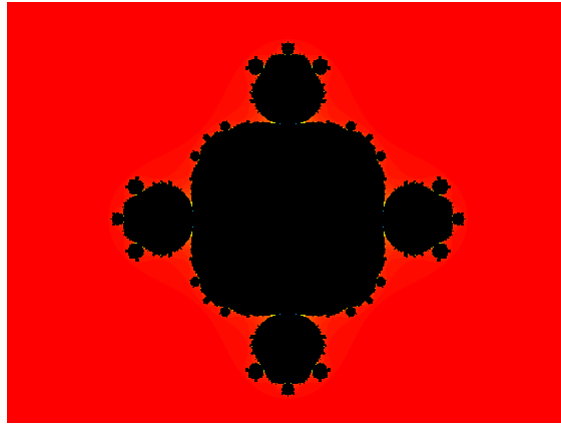
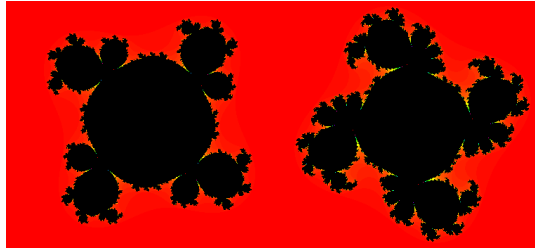
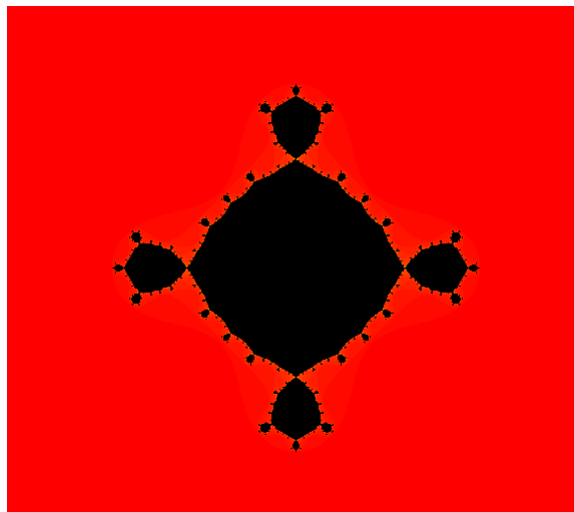
FIGURE 3.2.5. $c = -\frac{5}{4^{4/3}}$ ciclo parabólico de periodo dos

FIGURE 3.2.6. flores atractoras

FIGURE 3.2.7. $c = -1$ ciclo super atractor de periodo dos

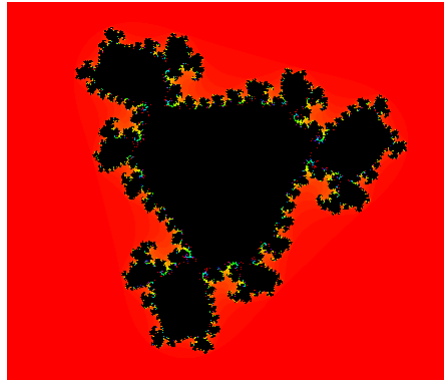


FIGURE 3.2.8. disco de siegel para $P(z) = \lambda z + z^4$ donde $\lambda = e^{2\pi \frac{\sqrt{5}+1}{2} i}$

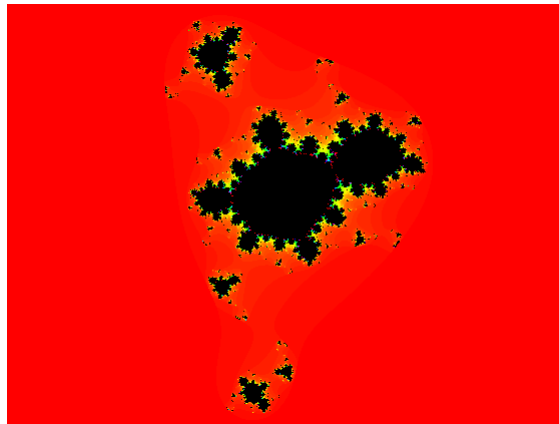


FIGURE 3.2.9. disco de siegel para $P(z) = \lambda z + z^4 + z^2$ donde $\lambda = e^{2\pi \frac{\sqrt{5}+1}{2} i}$

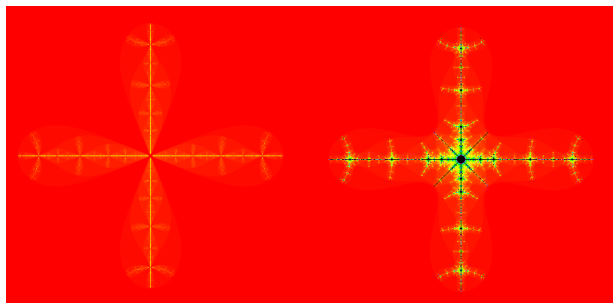
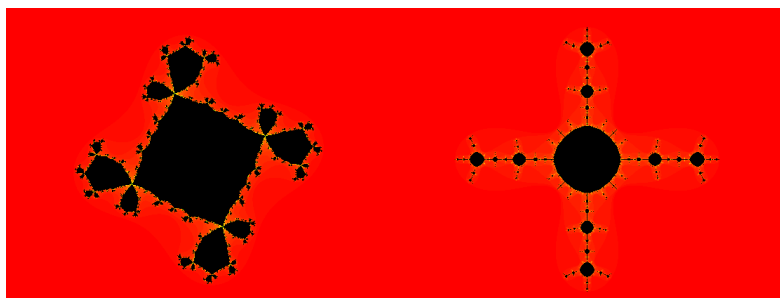
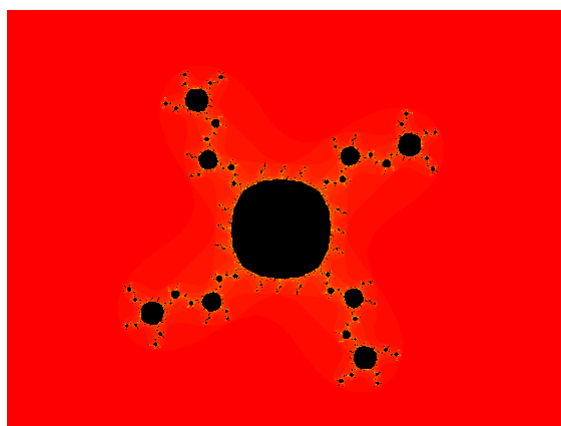


FIGURE 3.2.10. $c = -\sqrt[3]{2}$ (dendrita) y $c = -1.24$ (cerca a una dendrita)

FIGURE 3.2.11. $c = -1.08422 + 0.290515i$ FIGURE 3.2.12. $c \approx -0.667109 + 0.433028i$ y $c \approx -1.22908$ FIGURE 3.2.13. $c \approx 0.768479 + 0.834084i$

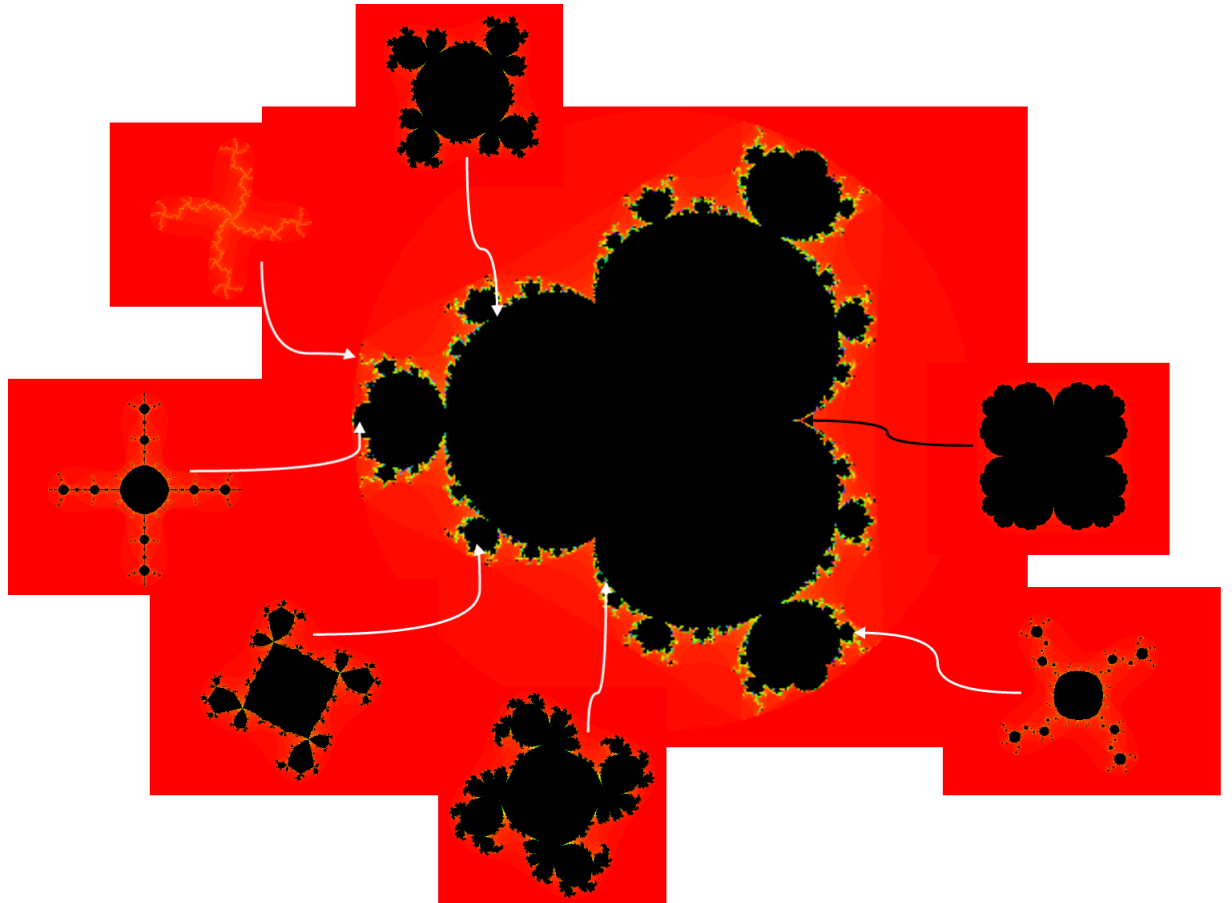


FIGURE 3.2.14. Mandelbrot y conjuntos de Julia

3.3. Dinámica de la función $(z^2 + c_1)^2 + c_2$

Como primera impresión uno podría preguntarse, si se heredan las propiedades de los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} asociados a los polinomios $P_{c_1}(z) = z^2 + c_1$ y $P_{c_2}(z) = z^2 + c_2$, en particular la conexidad. Otra vez usemos la eficiencia del teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

Los puntos críticos de la función $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$ son:

- 0 y
- $\pm\sqrt{-c_1}$

la primera observación es que

$$P_{c_1, c_2}(\sqrt{-c_1}) = (-c_1 + c_1)^2 + c_2 = c_2 = P_{c_1, c_2}(-\sqrt{-c_1})$$

. de donde obtenemos que si uno de los puntos críticos distintos de cero, tiene órbita no acotada el otro también, además de que el valor crítico de estos puntos es c_2 , lo que nos puede ayudar.

Decimos que el z escapa bajo f si $f^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Donde existe un $R > 0$ tal que cualquier z con $|z| > R$ escapa. Al valor de R es llamado el radio de escape. Para $f : z \rightarrow a_d z^d + \dots + a_0$ el radio

$$R = \frac{1 + |a_d| + \dots + |a_0|}{|a_d|}$$

es un radio de escape.

Hay que considerar que el radio de escape no es único, de hecho todo polinomio cuártico es conjugado a un de la forma normal de Fatou es decir $f(z) = z^4 + az^2 + bz + c$, de este modo tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.3.1. *Si $|z| > \max\{|c|, |b| + 1, \sqrt{|a| + 2}, 1\}$ entonces $|f^n(z)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

PROOF. notemos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^4 + az^2 + bz + c| \geq |z|^4 - |a||z|^2 - |b||z| - |c| \geq |z|^4 - |a||z|^2 - |b||z| - |z| \\ \Rightarrow |f(z)| &\geq |z|(|z|^3 - |a||z| - |b| - 1) = |z|(|z|^3 - |a||z| - (|b| + 1)) \geq |z|(|z|^3 - |a||z| - |z|) \\ &\Rightarrow |f(z)| \geq |z|^2(|z|^2 - (|a| + 1)) \geq |z|^2 > \lambda|z| \end{aligned}$$

con $\lambda > 1$. En particular $|f(z)| > |z|$, y aplicando esta desigualdad n -veces obtenemos

$$|f^n(z)| > \lambda^n |z|$$

y por lo tanto la órbita de z tiende a infinito. \square

En particular para nuestro caso como $P_{c_1, c_2}(z) = z^4 + 2c_1 z^2 + c_1^2 + c_2$ el criterio de escape anterior queda de la siguiente manera. si $|z| > \max\{|c_1^2 + c_2|, \sqrt{|c_1| + 2}, 1\}$ entonces $|P_{c_1, c_2}^n(z)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

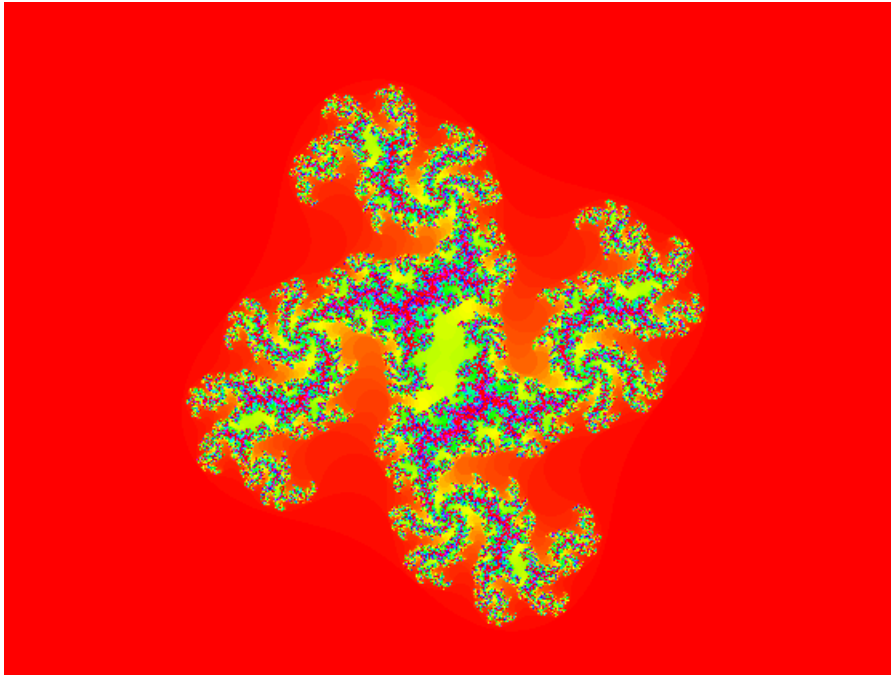
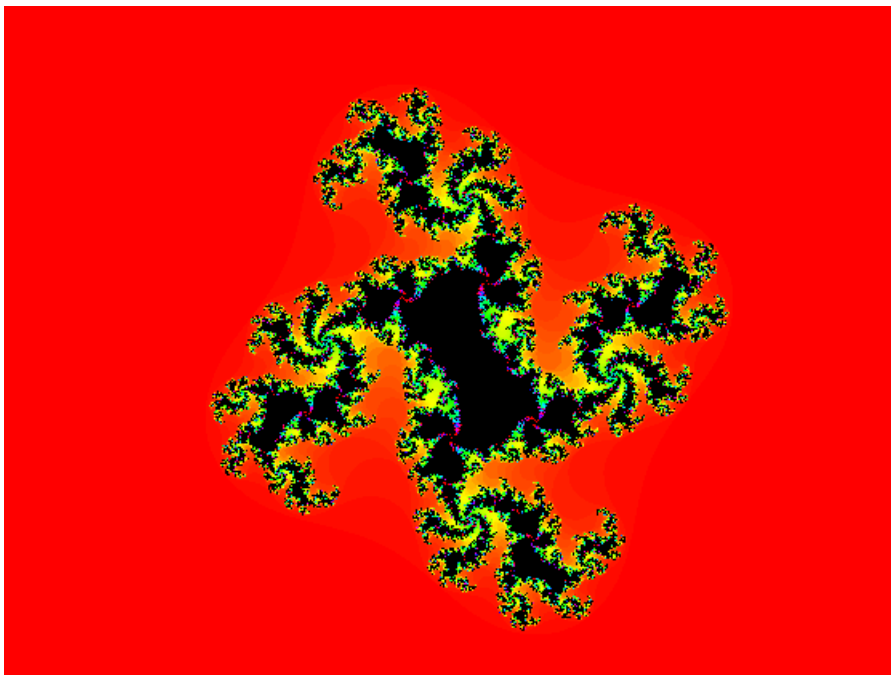
Gracias a la computadora uno puede darse una idea del comportamiento de la dinámica requerida, la primera pregunta es si c_1 y c_2 son tales que J_{c_1} y J_{c_2} son conexos entonces, ¿ J_{c_1, c_2} el conjunto de Julia asociado a P_{c_1, c_2} es conexo?, la respuesta es negativa considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.3.2. Sea $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$ con $c_1 = 0.0475 + 0.0475i$ y $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$. Los puntos fijos de esta función son:

- (i) $z \approx -0.563467 - 0.530248i$ con $|\lambda| > 1$
- (ii) $z \approx -0.501937 + 1.06455i$ con $|\lambda| > 1$
- (iii) $z \approx 0.005646 - 0.670506i$ con $|\lambda| > 1$
- (iv) $z \approx 1.05976 + 0.136206i$ con $|\lambda| > 1$
- (v) $z = \infty$ con $\lambda = 0$

Ademas los cálculos, muestran que $|P_{c_1, c_2}^{25}(0)| > 76$ y por tanto el punto crítico 0 tiene órbita no acotada, y $|P_{c_1, c_2}^{94}(\sqrt{-c_1})| > 611$.

Por nuestras discusiones anteriores podemos concluir que J_{c_1, c_2} es totalmente disconexo, y de hecho un Cantor.

FIGURE 3.3.1. $c_1 = 0.0475 + 0.0475i$ y $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$ FIGURE 3.3.2. $c_1 = 0.045 + 0.045i$ y $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$

EJEMPLO 3.3.3. Sea $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$ con $c_1 = 0.5 + i$ y $c_2 = 0.6 - i$. Los puntos fijos de esta función son:

- (i) $z \approx -0.857601 + 1.43768i$ con $|\lambda| > 1$
- (ii) $z \approx -0.123522 + 0.0234516i$ con $|\lambda| < 1$
- (iii) $z \approx 0.392381 - 0.489343i$ con $|\lambda| > 1$
- (iv) $z \approx 0.588743 - 0.971792i$ con $|\lambda| < 1$
- (iv) $z = \infty$ con $\lambda = 0$

Tenemos dos puntos fijos atractores (finitos) y como la órbita hacia adelante de dos de los puntos fijos es la misma salvo al primer termino, entonces estos puntos fijos son suficientes para asegurarnos la conexidad.

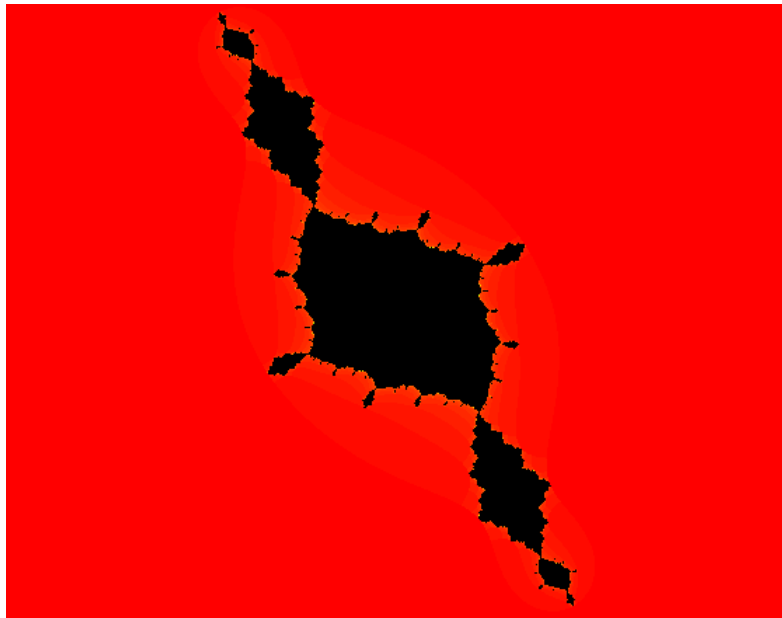


FIGURE 3.3.3. $c_1 = 0.5 + i$ y $c_2 = 0.6 - i$

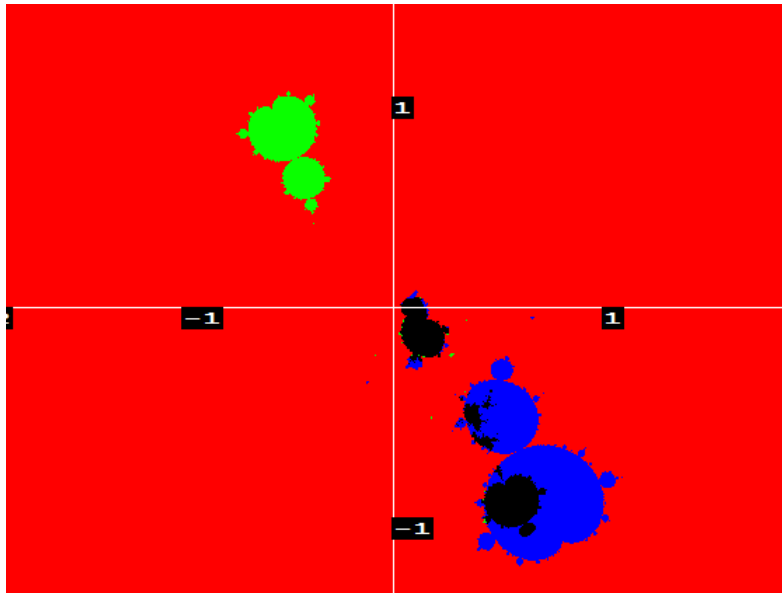


FIGURE 3.3.4. corte con $c_1 = 0.5 + i$

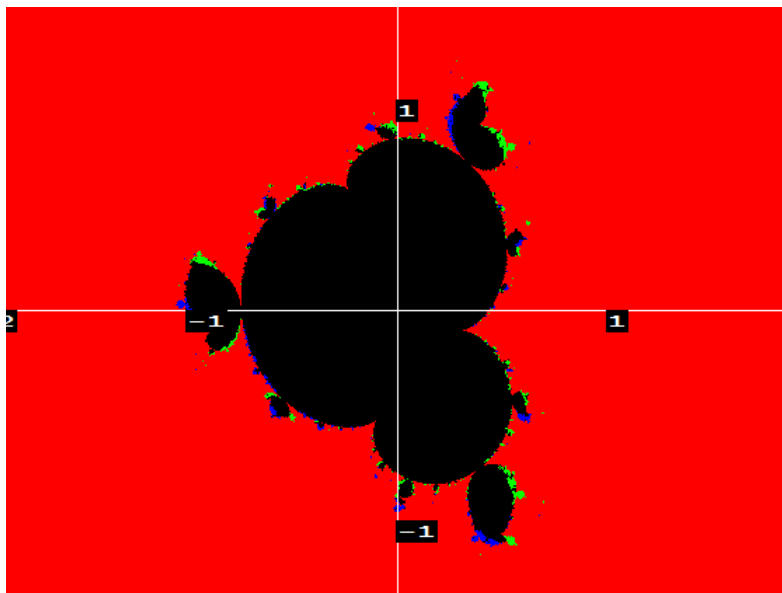


FIGURE 3.3.5. corte con $c_1 = 0.2 + 0.1i$

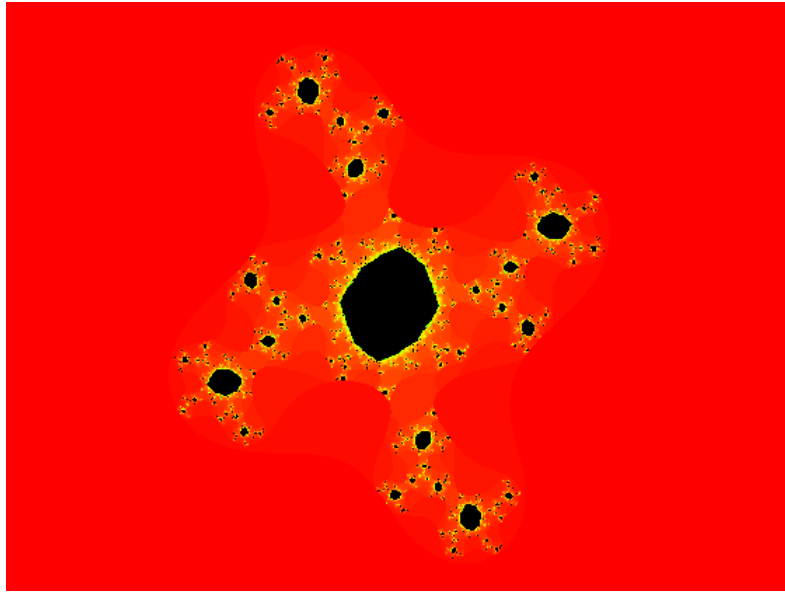


FIGURE 3.3.6. $c_1 = 0.2 + 0.1i$ y $c_2 = -0.95i$

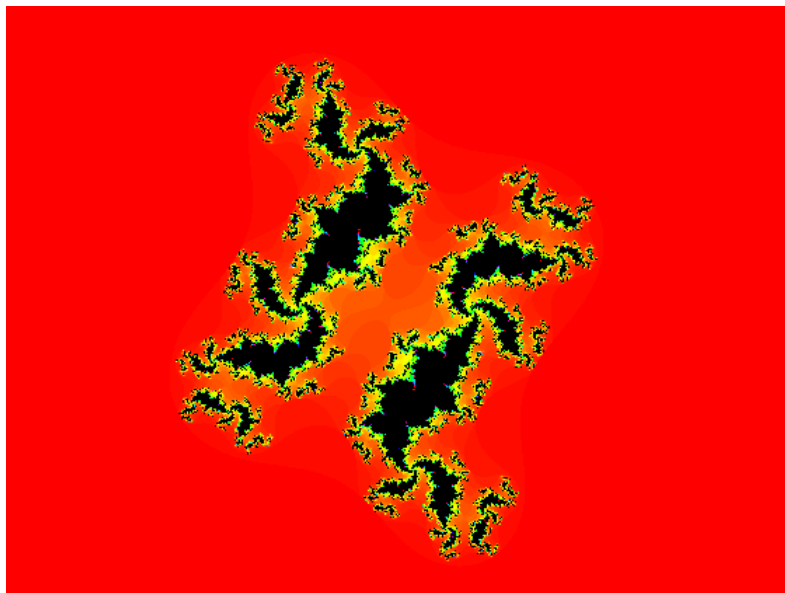


FIGURE 3.3.7. $c_1 = 0.2 + 0.1i$ y $c_2 = -0.83i$

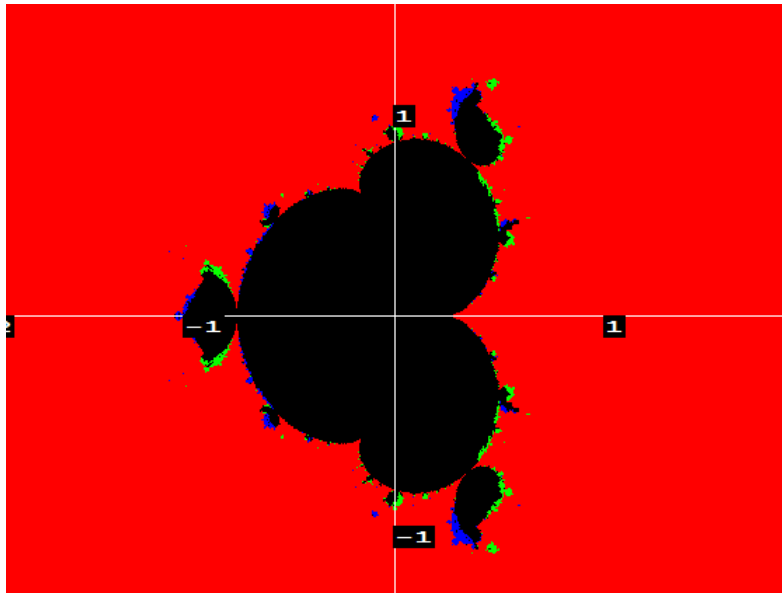


FIGURE 3.3.8. corte con $c_1 = 0.25$

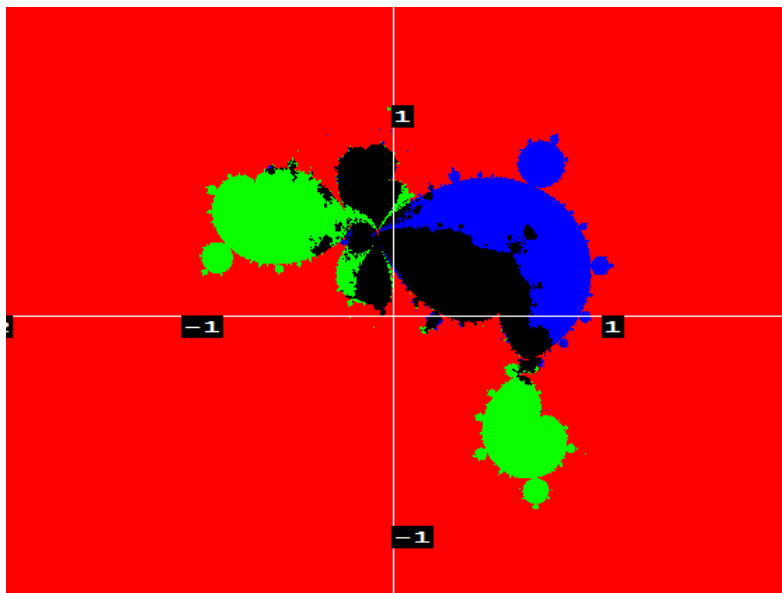


FIGURE 3.3.9. corte con $c_1 = -0.122561 + 0.744862i$

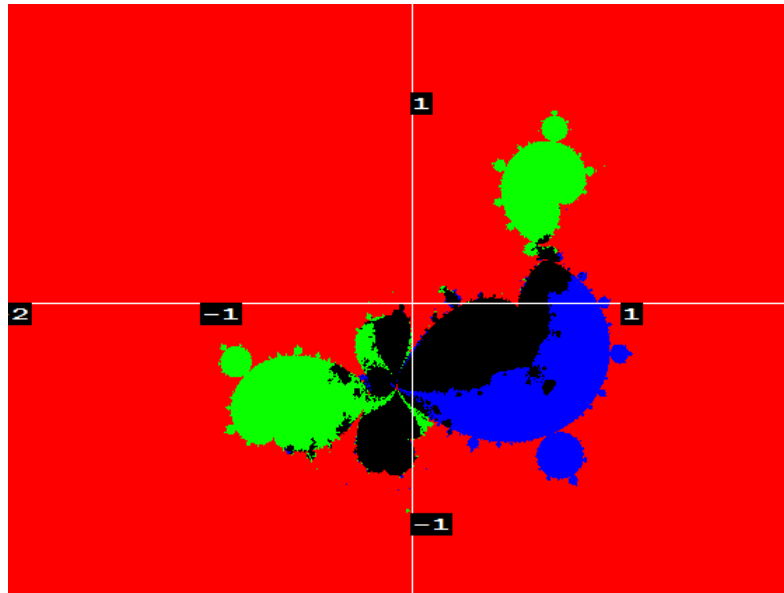


FIGURE 3.3.10. corte con $c_1 = -0.122561 - 0.744862i$

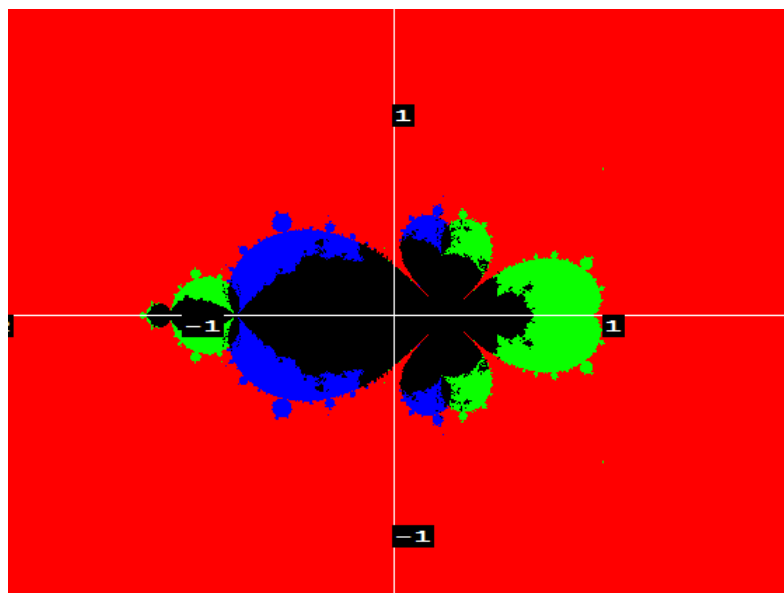


FIGURE 3.3.11. corte con $c_1 = -0.75$

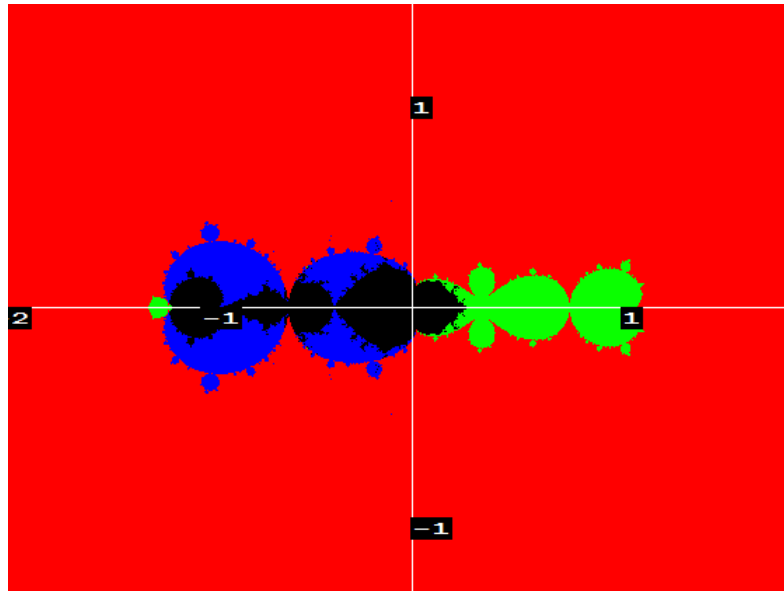


FIGURE 3.3.12. corte con $c_1 = -1$

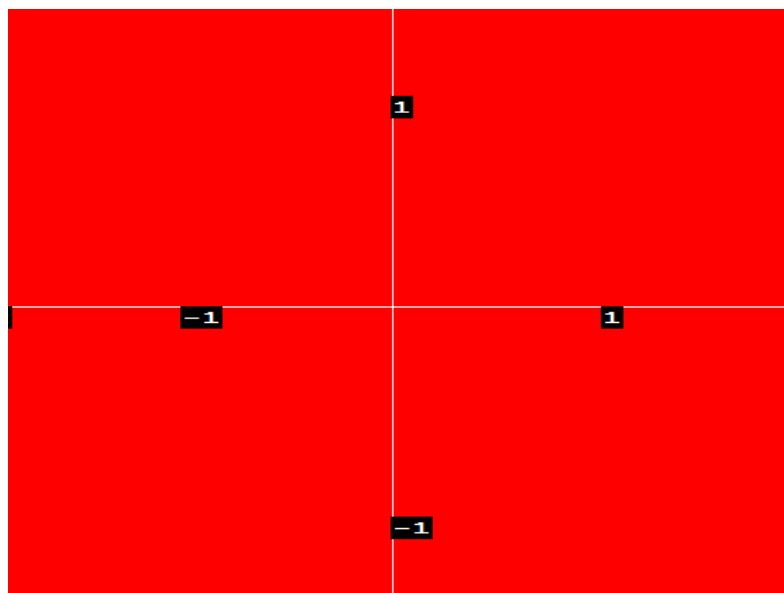


FIGURE 3.3.13. corte con $c_1 = -1.754878$

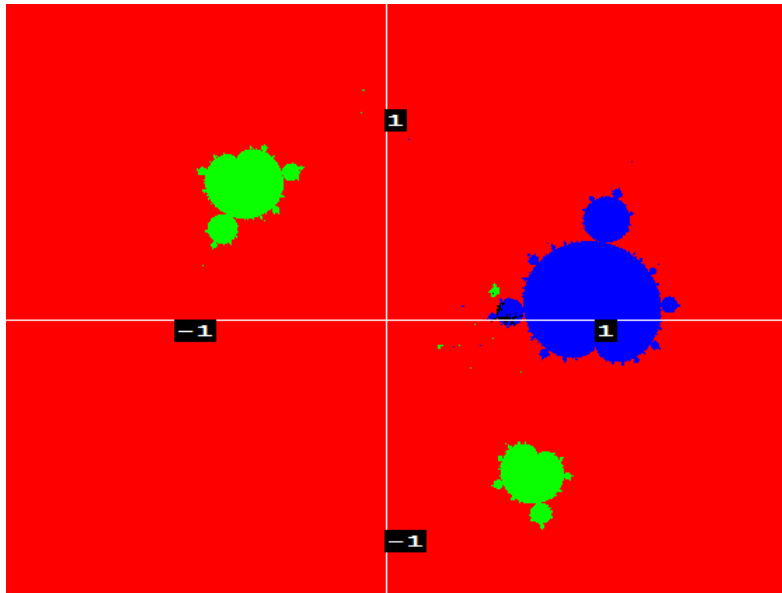


FIGURE 3.3.14. corte con $c_1 = -1.754878$

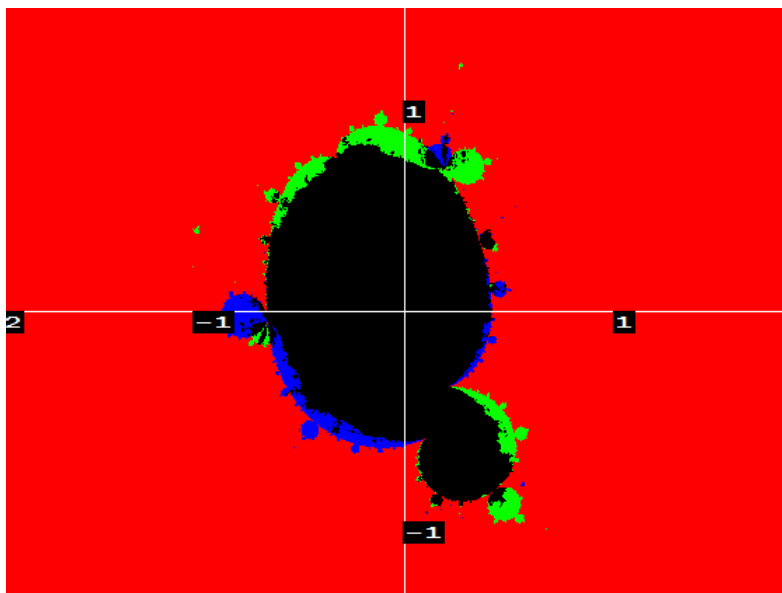


FIGURE 3.3.15. corte con $\lambda = \frac{2\pi}{5}$

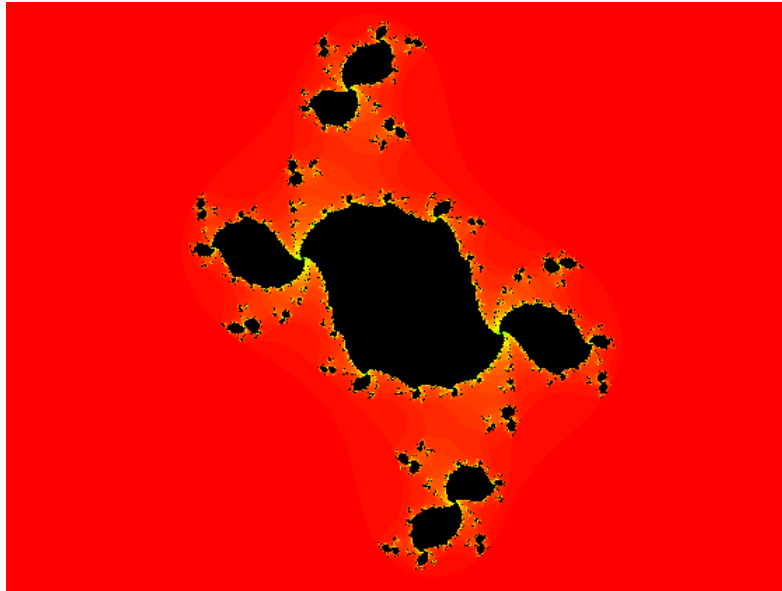


FIGURE 3.3.16. $c_1 = 0.356763 + 0.328582i$ y $c_2 = -0.75$

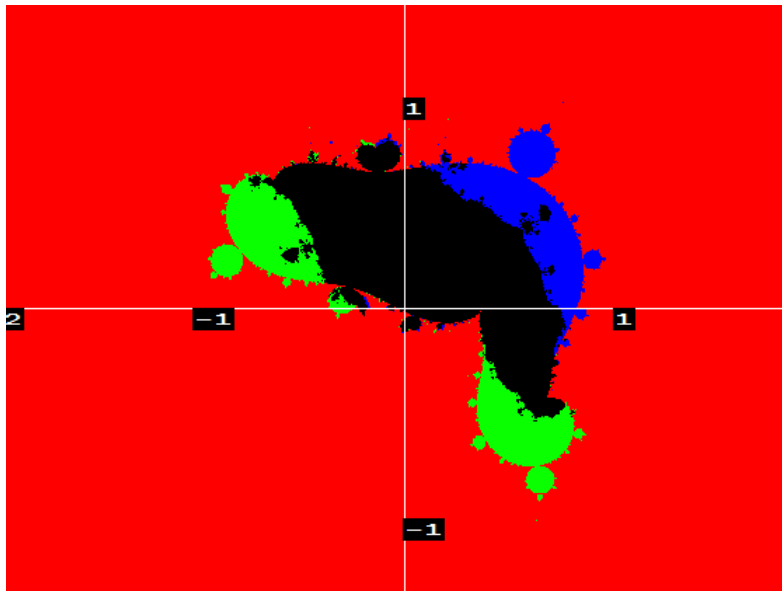


FIGURE 3.3.17. corte con $\lambda = \frac{2\pi}{3}$

Conclusión

Bibliography

- [Ahl] Ahlfors L. (1953). complex analysis. New York: McGraw-Hill.
- [Ber] Berenstein C. (1998). Complex analysis. España: Springer.
- [Mil] John Willard Milnor. (2006). Dynamics in one complex variable. Princeton, N.J. : Princeton University Press .
- [Car] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin. (1993). Complex dynamics. New York : Springer-Verlag.
- [Bla] P. Blanchard. Complex analysis on the Riemann Sphere
- [Dev] Robert L. Devaney. (2003). An introduction to chaotic dynamical systems. Colorado: Westview Press.
- [Bea] Alan F. Beardon. (1991). Iteration of rational functions, Grad. Texts Math. 132, Springer-Verlag, New York
- [New] M. Newman (1939). Elements of the topology of plane sets, Cambridge University Press

Índice alfabético

Apéndice

Programa A

```
Programa para dibujar Julias llenos del polinomio alternado. #INCLUDE <WIN-
BGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,p1=0,p2=0,monitor=DETECT,modo;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,l,p,j,k,x,y,r,a,rc,ra1,raux,iaux,ra2,raf;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
scanf("%lf",&rc1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
scanf("%lf",&ic1);
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C2\n");
scanf("%lf",&rc2);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C2\n");
scanf("%lf",&ic2);
rs1=-2;
is1=-2;
l=4;
rs2=rs1+l;
is2=is1+l;
raux=pow(rc1,2)-pow(ic1,2)+rc2;
iaux=2*rc1*ic1+ic2;
ra1=sqrt(pow(raux,2)+pow(iaux,2));
```

```

RA2=SQRT(SQRT(POW(RC1,2)+POW(IC1,2))+2);
IF(RA1>1)
{IF (RA1>RA2) RAF=RA1; ELSE RAF=RA2; }
ELSE { IF(RA2>1) RAF=RA2; ELSE RAF=1; }
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P)
{ P2=0; FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P)
{ X=J; Y=K; I=0; R=0;
WHILE (I<MAXITER&&R<=RAF)
{ A=X*X-Y*Y+RC1; Y=2*X*Y+IC1; X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2; Y=2*X*Y+IC2; X=A; I++; R=X*X+Y*Y; }
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

Programa B

Programa para dibujar Mandelbrot (siempre hay que poner $c_2 = 0 + 0i$).

```
#INCLUDE <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int I,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MOD0;
double RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A,RC,RA1,RAUX,IAUX,RA2,RAF;
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%f",&L);
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C2\n");
scanf("%f",&RC2);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C2\n");
scanf("%f",&IC2);
RS2=-2+L; IS2=-2+L; P=L/PANTALLA;
initwindow(PANTALLA,PANTALLA);
for(J=-2;J<=RS2;J=J+P)
{ P2=0; for(K=-2;K<=IS2;K=K+P)
{
RC1=J;
IC1=K;
X=0;
Y=0;
I=0;
RC=0;
while (I<MAXITER&&RC<=4)
{
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2;
```

```

Y=2*X*Y+IC2;
X=A; I++;
R=X*X+Y*Y;
RC=R*R*R;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

Programa C

Programa para dibujar Julias llenos particulares por ejemplo con discos de Siegel solo hay que cambiar la función y el radio. `#INCLUDE <WINBGIM.H>`

```

#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{

```

```

INT I,P1=0,P2=0,
MONITOR=DETECT,MOD0;
FLOAT RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A;
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
SCANF("%F",&RC1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
SCANF("%F",&IC1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE REAL DE LA SEMILLA\n");
SCANF("%F",&RS1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE LA SEMILLA\n");
SCANF("%F",&IS1); PRINTF("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
SCANF("%F",&L);
RS2=RS1+L;
IS2=IS1+L;
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P) {
P2=0; FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P) {
X=J;
Y=K;
I=0;
R=0;
WHILE (I<MAXITER&&R<=4) {
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
I++;
R=X*X+Y*Y;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));

```

```

ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

Programa D

Programa para dibujar Julias llenos de $z^2 + c$ aunque también sirve para dibujar el Mandelbrot solo hay que cambiar el inicio de la iteración siempre a cero.

```

#include <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MOD0;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,L,P,J,K,X,Y,R,A,RC,RA1,RAUX,IAUX,RA2,RAF;
M1=-0.737369;
M2=-0.67549;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE LA SEMILLA\n");
scanf("%Lf",&rs1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE LA SEMILLA\n");
scanf("%Lf",&is1);
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%Lf",&L); rs2=rs1+L;
is2=is1+L;

```

```

P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P) {
P2=0;
FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P) {
X=J;
Y=K;
I=0;
RC=0;
WHILE (I<MAXITER&&RC<=4)
{
A=POW(X,4)-6*POW(X,2)*POW(Y,2)+POW(Y,4)+M1*X-M2*Y+POW(X,2)-POW(Y,2);

Y=4*POW(X,3)*Y-4*POW(Y,3)*X+M1*Y+M2*X+2*X*Y;
X=A; I++; R=X*X+Y*Y; RC=R*R*R;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

Programa E

```

Programa que dibuja el Mandelbrot con la forma normal  $z^2 + \lambda z$ . #INCLUDE
<WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int I,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MODO;
float RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A;
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%f",&L);
RS2=-5+L;
IS2=-5+L;
P=L/600;
initwindow(600,600);
for(J=-5;J<=RS2;J=J+P) {
P2=0;
for(K=-5;K<=IS2;K=K+P) {
RC1=J;
IC1=K;
X=-RC1/2;
Y=-IC1/2;
I=0;
R=0;
while (I<MAXITER&&R<=20) {
A=POW(X,2)-POW(Y,2)+RC1*X-IC1*Y;
Y=2*X*Y+RC1*Y+IC1*X;
X=A;
I++; R=X*X+Y*Y;
}
if(I==MAXITER)
putpixel(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
}
}

```

```

ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

Programa F

```

Programa que localiza los cortes de Mandelbrot. #INCLUDE <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include<MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,p1=0,p2=0,monitor=DETECT,
modo;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,
l,p,j,t,k,x,y,r,rc,a,w,z,b,pc,mpc,rcr1,icr1;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
scanf("%lf",&rc1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
scanf("%lf",&ic1);

```

```

PRINTF("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
SCANF("%LF",&L); RS2=-2+L; IS2=-2+L;
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=-2;J<=RS2;J=J+P)
{ P2=0; FOR(K=-2;K<=IS2;K=K+P)
{ RC2=J; IC2=K; X=0; Y=0; I=0; W=RC2; Z=IC2; RC=0; T=0; PC=0;
WHILE (I<MAXITER&&RC<=4) {
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2;
Y=2*X*Y+IC2;
X=A;
I++;
R=X*X+Y*Y;
RC=R*R*R;
}
WHILE (T<MAXITER&&PC<=4) {
B=W*W-Z*Z+RC1;
Z=2*W*Z+IC1;
W=B;
B=W*W-Z*Z+RC2;
Z=2*W*Z+IC2;
W=B;
T++;
MPC=W*W+Z*Z;
PC=MPC*MPC*MPC; }
IF(I==MAXITER) {
IF (T==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255)); }
ELSE { IF (T==MAXITER) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(10,255,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); } P2++; } P1++; }
SETCOLOR(15);

```

```
LINE(PANTALLA/2, 0, PANTALLA/2, PANTALLA); LINE(0, PANTALLA/2,
PANTALLA, PANTALLA/2);
SETTEXTSTYLE(0,0,2); OUTTEXTXY(PANTALLA/2, 0, "2"); OUTTEXTXY(PANTALLA/2,
PANTALLA/4, "1");
OUTTEXTXY(PANTALLA/2, PANTALLA*3/4, "-1"); OUTTEXTXY(PANTALLA/2,
PANTALLA-15, "-2");
OUTTEXTXY(0, PANTALLA/2, "-2"); OUTTEXTXY(PANTALLA/4, PANTALLA/2,
"-1");
OUTTEXTXY(PANTALLA*3/4, PANTALLA/2, "1"); OUTTEXTXY(PANTALLA-
15, PANTALLA/2, "2");
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}
```