Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

LA FÓRMULA DE KÜNNETH EN CATEGORÍAS ABELIANAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Jorge Aguilar Guzmán

DIRECTOR DE TESIS
Prof. Ángel Contreras Pérez

PUEBLA, PUE. OCTUBRE DE 2015

“No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje; y no la posesión, sino el acto de llegar a ella, lo que concede el mayor disfrute”.

Carl Friedrich Gauss

A mis padres Jorge y Filiberta

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres Jorge y Filiberta por todo su apoyo y cariño, gracias por las enseñanzas y consejos que me han dado a lo largo de la vida. A mi hermana María del Carmen por siempre motivarme a lograr cosas trascendentales. A mis hermanas Elvia y Marcela por todo su apoyo y afecto.

En segundo lugar, agradezco al profesor Ángel Contreras Pérez por haber confiado en mí para la realización de esta tesis, sobre todo por el tiempo dedicado a aclarar todas las dudas que surgieron durante su realización. Gracias por todos los conocimientos inculcados.

Agradezco a mis amigos Luis y Liliana por compartir grandes momentos conmigo. Por apoyarme, escucharme y aconsejarme en momentos cruciales.

Muchas gracias por hacer esto posible.
Jorge

Introducción

Uno de los objetivos principales dentro de la topología es clasificar a los espacios topológicos, es decir, determinar cuando dos espacios son homeomorfos o no. En algunas ocasiones dicho problema no queda resuelto si sólo se usan herramientas conocidas en topología general, y por tanto surge la necesidad de emplear nuevas técnicas que involucran el estudio del álgebra homológica.
Algo habitual que surge en topología algebraica es dilucidar la homología de un producto cartesiano de espacios topológicos $X \times Y$. El teorema de Eilenberg-Zilber nos da una respuesta concreta al afirmar que $H_n(X \times Y) \cong H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y))$, donde $S_*(X)$ es el grupo abeliano libre que tiene como base a todos los n-símplices singulares en X [17]. Dicho teorema ejemplifica claramente la relación existente entre la homología de un producto de espacios y la homología de cada uno de los espacios involucrados. En el caso de un producto tensorial de complejos de cadenas, existe un teorema conocido como la fórmula de Künneth, en honor al matemático alemán Hermann Lorenz Künneth (1892-1975), el cual afirma que la homología de un producto tensorial de complejos de cadenas queda en términos de la homología de cada uno de los factores.
Por otro lado, en 1955 el matemático David Alvin Buchsbaum introduce el concepto de categoría exacta y más tarde, en 1957, Grothendieck define las nociones de categorías aditiva y abeliana con la finalidad de aplicar métodos homológicos en categorías que surgen en geometría algebraica, además de intentar unificar varias teorías de cohomología pues en ese momento se encontraban la teoría de cohomología de gavillas y la teoría de cohomología de grupos. La relevancia de estas definiciones radica en que las categorías abelianas son las más generales para desarrollar álgebra homológica debido a que extiende las propiedades fundamentales de las categorías $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ y $\mathcal{A}\mathfrak{b}$.
Una pregunta que surge inmediatamente es si existe una versión de la fórmula de Künneth en una categoría abeliana arbitraria. La respuesta es sí. Por lo tanto, el objetivo principal de esta tesis es enunciar y demostrar dicho resultado para funtores exactos derechos en categorías abelianas.
Para lograr nuestro propósito suponemos conocidas la teoría básica de categorías y R-módulos. Además, la tesis se desarrolla de la siguiente manera:
En el capítulo 1 se presentan las versiones de la fórmula de Künneth en Álge-

bra Homológica y en Topología Algebraica con la finalidad de hacer énfasis en el rol que desempeña dentro de otras áreas de las matemáticas. Además, su estudio nos permite tener una visión más clara de la versión más general. En el capítulo 2 se presenta una de las definiciones más importantes de toda la tesis, la noción de categoría abeliana. Asimismo, se hace un análisis exhaustivo acerca de los teoremas válidos en este tipo de categorías. La importancia de este capítulo radica en que nos permitirá entender con mayor facilidad las demostraciones de teoremas posteriores. En el capítulo 3 se exponen las definiciones de funtor aditivo y complejo $n-$graduado en una categoría abeliana, dicho concepto es una generalización del complejo de cadenas conocido en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$. Más aún, se describe a los funtores $\mathcal{Z}_n$, $\mathcal{Z}'_n$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}'_n$ y $\mathcal{H}_n$. Este último es el más importante pues nos permitirá la construcción de un nuevo tipo de funtores. En el capítulo 4 se desarrolla la mayoría de la teoría del álgebra homológica en categorías abelianas, por ejemplo, se enuncian las definiciones de resoluciones proyectiva e inyectiva para posteriormente presentar los conceptos más importantes de toda esta sección: funtor derivado izquierdo y funtor derivado derecho. Además, se demuestran los teoremas que afirman la existencia de sucesiones exactas largas donde estos nuevos funtores aparecen. Finalmente, en el capítulo 5 se usa toda la herramienta preparada a lo largo de los apartados anteriores para cumplir el objetivo primordial de la tesis, es decir, enunciar y demostrar la fórmula de Künneth para funtores exactos derechos en categorías abelianas.

Índice general

LA FÓRMULA DE KÜNNETH EN CATEGORÍAS ABELIANAS

Jorge Aguilar Guzmán

Octubre de 2015

Capítulo 1

Preliminares

1.1. La fórmula de Künneth en álgebra homológica

En este capítulo se presentan las definiciones de categoría, funtor covariante, isomorfismo natural, núcleo y conúcleo, las cuales desempeñan un papel muy importante a lo largo de la tesis. Además, el objetivo de esta sección es proporcionar la teoría necesaria que involucran la fórmula de Künneth en álgebra homológica y su versión en topología algebraica. Para mayor información pueden consultarse [2], [5], [11] y [14].

Definición 1.1. *Una* ***categoría*** *es un quíntuple* $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathscr{M}, dom, cod, \circ)$ *donde*
1) $\mathscr{O}$ *es la clase cuyos elementos se denominan* $\mathscr{C}$***-objetos****,*

2) $\mathscr{M}$ *es la clase cuyos elementos se llaman* $\mathscr{C}$***-morfismos****,*

3) dom y cod son funciones de $\mathscr{M}$ *en* $\mathscr{O}$ *(*$dom(f)$ *se llama el* ***dominio*** *de* f*, mientras que* $cod(f)$ *se denomina el* ***codominio*** *de* f*),*

4) $\circ$ *es una función de*

$$D = \{(f, g)|\ f, g \in \mathscr{M} \text{ y } dom(f) = cod(g)\}$$

en $\mathscr{M}$*, llamada la* ***ley de composición de*** $\mathscr{C}$ *(*$\circ(f,g)$ *se denota por* $f \circ g$ *y decimos que* $f \circ g$ *está definido si y sólo si* $(f, g) \in D$*); tal que satisface las* *siguientes propiedades:*

(i) ***Condición de igualación****: Si $f \circ g$ está definido, entonces $dom(f \circ g) = dom(g)$ y $cod(f \circ g) = cod(f)$;*

(ii) ***Condición de asociatividad****: Si $f \circ g$ y $h \circ f$ están definidos, entonces $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$;*

(iii) ***Condición de existencia de identidades****: Para cada $\mathscr{C}$-objeto A existe un $\mathscr{C}$-morfismo e tal que $dom(e) = A = cod(e)$ y*
(a) $f \circ e = f$ si $f \circ e$ está definido, y
(b) $e \circ g = g$ si $e \circ g$ está definido;

(iv) ***Condición de pequeñez de clase de morfismos****: Para cualquier par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos, la clase*

$$hom_{\mathscr{C}}(A, B) = \{f |\ f \in \mathscr{M}, dom(f) = A \ y \ cod(f) = B\}$$

es un conjunto.

Dada una categoría $\mathscr{C}$, la clase de $\mathscr{C}$-objetos se denota por $Ob(\mathscr{C})$, mientras que $Mor(\mathscr{C})$ representa la clase de $\mathscr{C}$-morfismos. Además, si no existe confusión alguna, escribimos $hom(A, B)$ en lugar de $hom_{\mathscr{C}}(A, B)$.
Aunque los $\mathscr{C}$-morfismos no necesariamente son funciones, usamos indistintamente las notaciones: $f \in hom(A, B)$, $A \xrightarrow{f} B$ y $f : A \longrightarrow B$. Asimismo, utilizamos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ o gf para representar la composición $g \circ f$.
Finalmente, el único $\mathscr{C}$-morfismo $e : A \longrightarrow A$ que satisface (a) y (b) de la definición anterior se indica por 1_A y se denomina la **$\mathscr{C}$-identidad** de A.

Ejemplo 1.2. 1. La **categoría de conjuntos** se denota por **Set** y está definida por:
$Ob(\mathbf{Set})$ es la clase de todos los conjuntos, $hom_{\mathbf{Set}}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B y $\circ$ es la composición usual de funciones.

2. La **categoría de espacios topológicos** se denota por **Top** y está definida por:
$Ob(\mathbf{Top})$ es la clase de todos los espacios topológicos, $hom_{\mathbf{Top}}(A, B)$ es el

conjunto de todas las funciones continuas de A en B y $\circ$ es la composición usual de funciones.

3. La **categoría de grupos abelianos** se denota por $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ y está definida por:
$Ob(\mathcal{A}\mathfrak{b})$ es la clase de todos los grupos abelianos, $hom_{\mathcal{A}\mathfrak{b}}(A,B)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grupos abelianos de A en B y $\circ$ es la composición usual de funciones.

4. Dado un anillo R conmutativo con $1 \neq 0$, la **categoría de R-módulos izquierdos** se denota por $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ y está definida por:
$Ob(\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}})$ es la clase de todos los R-módulos izquierdos, $hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A,B)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de R-módulos izquierdos de A en B y $\circ$ es la composición usual de funciones. Mientras que ${}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R}$ indica la **categoría de R-módulos derechos**.

Definición 1.3. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. $F:\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un* ***funtor*** *o* ***funtor covariante*** *de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ si satisface:*

1) Para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$, $F(A) \in Ob(\mathscr{D})$.

2) Si $f : A \longrightarrow B$ es un $\mathscr{C}$-morfismo, entonces $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ es un $\mathscr{D}$-morfismo.

3) Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son $\mathscr{C}$-morfismos, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

4) Para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Veamos algunos ejemplos importantes de funtores covariantes.

Ejemplo 1.4. *1.- Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in Ob(\mathscr{C})$. Definimos la aplicación $Hom_{\mathscr{C}}(A,\_)$:$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ como sigue:*

En objetos. *Para cada $B \in Ob(\mathscr{C})$, $Hom_{\mathscr{C}}(A,\_)(B) := Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$.*

En morfismos. *Si $f : B \longrightarrow B'$ es un $\mathscr{C}$-morfismo, entonces*
$Hom_{\mathscr{C}}(A,\_)(f) := Hom_{\mathscr{C}}(A,f)$, donde la función

$$Hom_{\mathscr{C}}(A, f) : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A, B')$$

está definida por $Hom_{\mathscr{C}}(A, f)(h) = f \circ h$ *para cada* $h \in hom_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Entonces $Hom_{\mathscr{C}}(A, \_)$ *es un funtor covariante.*

2.- Sea $B \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$. *Definimos la aplicación* $\_ \otimes_R B :_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ *definido de la siguiente manera:*

En objetos: *Para cada* $A \in Ob({}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R})$, $(\_ \otimes_R B)(A) := A \otimes_R B$;

En morfismos: *Si* $f : A \longrightarrow A'$ *es un* ${}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R}$*-morfismo,*
$(\_ \otimes_R B)(f) := f \otimes_R 1_B$.

Entonces $(\_ \otimes_R B)$ *es un funtor covariante.*

Definición 1.5. *Sean* $F, G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{C}$ *funtores. Entonces:*

1) Una ***transformación natural*** *de* F *en* G *es un triple* (F, η, G), *donde* $\eta : Ob(\mathscr{A}) \longrightarrow Mor(\mathscr{C})$ *es una función que satisface las siguiente condiciones:*
a) Para cada $A \in Ob(\mathscr{A})$, $\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ *es un* $\mathscr{C}$*-morfismo.*
b) Para cada $\mathscr{A}$*-morfismo* $f : A \longrightarrow A'$, *conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A'). \end{tikzcd}$$

2) Una transformación natural (F, η, G) *se llama isomorfismo natural o equivalencia natural si para cada* $A \in Ob(\mathscr{A})$, η_A *es un* $\mathscr{C}$*-isomorfismo.*

3) Se dice que F *y* G *son isomorfos naturalmente (se denota* $F \cong G$*) o naturalmente equivalentes si existe un isomorfismo natural de* F *en* G.

La importancia de las siguientes definiciones radica en que serán utilizadas en los capítulos restantes.

Definición 1.6. *Sean* $\mathscr{C}$ *una categoría con objeto cero y* $f : A \longrightarrow B$ *un* $\mathscr{C}$*-morfismo. Se llama* ***núcleo de f*** *a la pareja* $(ker(f), j)$, *donde* $ker(f) \in$

$Ob(\mathscr{C})$ y $j \in hom_{\mathscr{C}}(ker(f), A)$, tal que
1) $fj = 0$,
2) si $g : H \longrightarrow A$ es otro $\mathscr{C}$-morfismo con $fg = 0$, entonces existe un único $h : H \longrightarrow ker(f)$ $\mathscr{C}$-morfismo tal que $g = jh$, es decir, tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ ker(f) \arrow[r, "j"'] & A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Dualmente:

Definición 1.7. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $f : A \longrightarrow B$ un $\mathscr{C}$-morfismo. Se llama **conúcleo de f** a la pareja $(p, coker(f))$, donde $coker(f) \in Ob(\mathscr{C})$ y $p \in hom_{\mathscr{C}}(B, coker(f))$, tal que*
1) $pf = 0$,
2) si $g : B \longrightarrow H$ es otro $\mathscr{C}$-morfismo con $gf = 0$, entonces existe un único $h : coker(f) \longrightarrow H$ $\mathscr{C}$-morfismo tal que $g = hp$, es decir, tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & coker(f) \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & H. \end{tikzcd}$$

De aquí en adelante nos centraremos en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ y usamos el término R-módulo en lugar de R-módulo izquierdo.

Veamos la construcción de los funtores más importantes dentro del álgebra homológica: el **n-ésimo funtor de Homología**, el **Funtor Ext** y el **Funtor Tor**.

Sea R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Definición 1.8. *Una sucesión de R-módulos y homomorfismos de R-módulos*

$$A : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots$$

se llama **complejo de cadenas**, *denotado por* $A = (A, \delta)$, *si* $im(\delta_{i+1}) \subset ker(\delta_i)\ \forall\ i \in \mathbb{Z}$.

La siguiente definición nos indica qué entenderemos por un morfismo entre dos complejos de cadenas dados.

Definición 1.9. *Sean*

$$\begin{array}{l} A : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \\ B : \cdots \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\xi_{n+1}} B_n \xrightarrow{\xi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\xi_{n-1}} \cdots \end{array}$$

dos complejos de cadenas, un **homomorfismo**, **transformación** *o* **aplicación de cadenas** *de* (A, δ) *en* (B, ξ) *es una familia de morfismos de R-módulos* $f = \{f_n : A_n \longrightarrow B_n\}$ *tal que* $\xi_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \delta_n$ *para todo entero n, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier entero n:*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ B_n \arrow[r, "\xi_n"] & B_{n-1} \end{tikzcd}$$

Ahora, resulta natural definir la composición de dos transformaciones de cadenas $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $g = \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ como la composición componente a componente de cada aplicación, esto es, $g \circ f = \{g_n \circ f_n : n \in \mathbb{Z}\}$.
Una vez definido los complejos de cadenas, las aplicaciones de cadenas y la composición entre ellas, queda totalmente definida la categoría de los complejos de cadenas, denotada por $\mathfrak{Comp}$, la cual será indispensable para la construcción del n-ésimo funtor de Homología.

Nota 1. *Para fines más prácticos, si* (A, δ) *es un complejo de cadenas definamos* $Z_n(A) := ker(\delta_n)$ *y* $B_n(A) := im(\delta_{n+1})$.

Definición 1.10. *Al funtor* $\mathbb{H}_n : \mathfrak{Comp} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ *definido:*
En objetos. *Para cada* $(C, d_n) \in Ob(\mathfrak{Comp})$, $\mathbb{H}_n(C) := Z_n(A)/B_n(A)$.
En morfismos. *Para cada* $f : A \longrightarrow B \in Mor(\mathfrak{Comp})$,
$\mathbb{H}_n(f) = \mathbb{H}_n(A) \longrightarrow \mathbb{H}_n(B)$ *tal que* $\mathbb{H}_n(f)(z_n + B_n(A)) := f_n(z_n) + B_n(B)$.
se le llama **n-ésimo funtor de homología**.

Observación 1.11. *El anterior funtor tiene muchas propiedades interesantes, una de ellas es que es invariante bajo transformaciones homotópicas; es decir, si* $f \simeq g$ *entonces se cumple que* $\mathbb{H}_n(f) = \mathbb{H}_n(g)$. *Esta observación nos será de gran utilidad en la construcción de los funtores derivados izquierdos.*

Funtores derivados izquierdos

Antes de definir este tipo de funtores, veamos un teorema previo.

Teorema 1.12. *(Teorema de comparación) Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de módulos y consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X_A : \cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & X_0 \arrow[r, "\epsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Y_B : \cdots \arrow[r] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] & Y_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_0 \arrow[r, "\delta"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde X_A y Y_B son complejos. Si cada X_n es proyectivo y la fila inferior es exacta, entonces existe una aplicación de cadenas $g : X_A \longrightarrow Y_B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "g_0"'] & A \arrow[d, "f"] \\ Y_0 \arrow[r, "\delta"] & B \end{tikzcd}$$

Más aún, g es única salvo homotopía.

Una vez enunciado el teorema de comparación, se procede a denifir los funtores derivados izquierdos.
Sean $\mathbb{F} : \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ un funtor covariante y A un R-módulo. Supongamos que

$$P : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A. Consideremos el complejo recortado de P

$$P_A : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\mathbb{F}$ obtenemos el nuevo complejo

$$\mathbb{F}(P_A) : \cdots \longrightarrow \mathbb{F}(P_2) \xrightarrow{\mathbb{F}(\delta_2)} \mathbb{F}(P_1) \xrightarrow{\mathbb{F}(\delta_1)} \mathbb{F}(P_0) \longrightarrow 0.$$

Definamos el funtor $\mathbb{L}_n\mathbb{F} : \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ de la siguiente manera:

1. Si $A \in Ob(\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}})$, $\mathbb{L}_n\mathbb{F}(A) := \mathbb{H}_n(\mathbb{F}(P_A)) = ker(\mathbb{F}(\delta_n))/im(\mathbb{F}(\delta_{n+1}))$.

2. Si $f \in Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A, B)$, por el teorema 1.12, existe una transformación de cadenas $g : (P_A, \delta) \longrightarrow (P_B, \alpha)$ sobre f. Luego $\mathbb{L}_n\mathbb{F}(f) := \mathbb{H}_n(\mathbb{F}(g))$ donde $\mathbb{F}(g) = \{\mathbb{F}(g_n)\}$, esto es, el morfismo $\mathbb{L}_n\mathbb{F}(f) : \mathbb{L}_n\mathbb{F}(A) \longrightarrow \mathbb{L}_n\mathbb{F}(B)$ está definido por $\mathbb{L}_n\mathbb{F}(f)(z_n + im(\mathbb{F}(\delta_{n+1}))) = \mathbb{F}(g_n)(z_n) + im(\mathbb{F}(\alpha_{n+1}))$.

Observación 1.13. *Se verifica fácilmente que $\mathbb{L}_n\mathbb{F}$ es efectivamente un funtor. Además dicho funtor no depende de la resolución proyectiva elegida ni de la transformación de cadenas garantizada por 1.12. En efecto: Si*

$$\widehat{P} : \cdots \longrightarrow \widehat{P}_2 \xrightarrow{\widehat{\delta}_2} \widehat{P}_1 \xrightarrow{\widehat{\delta}_1} \widehat{P}_0 \xrightarrow{\widehat{\epsilon}} A \longrightarrow 0$$

es otra resolución proyectiva de A y realizamos el procedimiento anterior, obtenemos otro funtor que denotaremos por $\widehat{\mathbb{L}}_n\mathbb{F}$. Luego, se demuestra que $\mathbb{L}_n\mathbb{F}$ y $\widehat{\mathbb{L}}_n\mathbb{F}$ son naturalmente equivalentes, es decir, existe un isomorfismo natural de $\mathbb{L}_n\mathbb{F}$ a $\widehat{\mathbb{L}}_n\mathbb{F}$ (véase [5, pág 106]).
Finalmente si $\overline{g} : (P_A, \delta) \longrightarrow (P_B, \alpha)$ es otra transformación de cadenas sobre f, se sigue que $\mathbb{F}(g)$ y $\mathbb{F}(\overline{g})$ son aplicaciones de cadenas sobre $\mathbb{F}(f)$ y por el teorema 1.12 obtenemos que $\mathbb{F}(g) \simeq \mathbb{F}(\overline{g})$ y por tanto, en virtud de la observación 1.11, conseguimos que $\mathbb{H}_n(\mathbb{F}(g)) = \mathbb{H}_n(\mathbb{F}(\overline{g}))$.

Definición 1.14. *El funtor $\mathbb{L}_n\mathbb{F}$ se denomina* **n-ésimo funtor derivado izquierdo de** *$\mathbb{F}$.*

Observación 1.15. *La construcción del* **n-ésimo funtor derivado derecho de** *$\mathbb{F}$ se logra dualizando los pasos anteriores, es decir, elegimos B un R-módulo, $\mathbb{F}$ un funtor covariante o contravariante y E una resolución inyectiva de B. Dicho funtor lo denotamos por $\mathbb{R}^n\mathbb{F}$.*

Definición 1.16. *Sea B un R-módulo y consideremos el funtor $\mathbb{F} = \_ \bigotimes_R B$. El funtor $Tor_n(\_, B) := \mathbb{L}_n\mathbb{F}$ se llama **n-ésimo funtor Tor respecto a** B, mientras que la familia $\{Tor_n(\_, B) : n \in \mathbb{Z}\}$ se denomina **funtor Tor respecto a** B.*

Definición 1.17. *Sea A un R-módulo y consideremos $\mathbb{F} = Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A, \_)$. El funtor $Ext^n(A, \_) := \mathbb{R}^n\mathbb{F}$ se denomina **n-ésimo funtor Ext respecto a** A y la familia $\{Ext^n(A, \_) : n \in \mathbb{Z}\}$ se denomina **funtor Ext respecto a** A.*

Directamente de las definiciones anteriores obtenemos que si

$$P : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A, entonces

$$Tor_n(A,B) = ker(\delta_n \otimes 1_B)/im(\delta_{n+1} \otimes 1_B).$$

Mientras que si

$$E : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución inyectiva de B,

$$Ext^n(A,B) = ker(Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A,\alpha_n))/im(Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A,\alpha_{n-1})).$$

Observación 1.18. *Sean (C,∂) un complejo de cadenas y G un R-módulo, entonces*

$$C \otimes G : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes 1} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes 1} \cdots$$

resulta ser un complejo de cadenas. Por tanto, si A y B son R-módulos entonces

$$Tor_n(A,B) = \mathbb{H}_n(P_A \otimes B) = \mathbb{H}_n(A \otimes Q_B)$$

donde P_A y Q_B son los complejos recortados de las resoluciones proyectivas de A y B respectivamente.
Análogamente,

$$Ext^n(A,B) = \mathbb{H}_{-n}(Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(P_A,B)) = \mathbb{H}_{-n}(Hom_{\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}}(A,E_B))$$

donde E_B es el complejo recortado de una resolución inyectiva de B.

Sean (C,∂), (D,∂^*) complejos de cadenas y $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijo. Consideremos la suma directa $E_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ y el homomorfismo $\delta_n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$ definido como

$$\delta(x \otimes y) = \partial_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q^*(y)$$

Entonces se verifica que $\delta_n \delta_{n+1} = 0$.

Definición 1.19. *El complejo*

$$E : \cdots \longrightarrow E_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} E_n \xrightarrow{\delta_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se denomina ***producto tensorial de los complejos C y D*** *y lo denotaremos por $E = C \otimes D$.*

De manera similar, sean (C, ∂), (D, ∂^*) complejos de cadenas y $n \in \mathbb{Z}$. Si $F_n = \sum_{p+q=n} Tor_1(C_p, D_q)$ y el homomorfismo $\vartheta_n : F_n \longrightarrow F_{n-1}$ está definido como

$$\vartheta_n \mid_{Tor_1(C_p, D_q)} = Tor_1(\partial_p, 1_{D_q}) + (-1)^p Tor_1(1_{C_p}, \partial_q^*)$$

entonces $\vartheta_n \vartheta_{n+1} = 0$.

Definición 1.20. *El complejo*

$$F : \cdots \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} F_n \xrightarrow{\vartheta_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se llama ***producto torsión de los complejos C y D*** *y lo denotaremos por $F = Tor(C, D)$.*

Una pregunta interesante es si existe alguna relación entre $\mathbb{H}_n(C \otimes D)$, $\mathbb{H}_n(C)$ y $\mathbb{H}_n(D)$. La fórmula de Künneth nos garantiza que la homología de un producto tensorial de complejos de cadenas queda en términos de la homología de cada uno de los factores. Explícitamente:

Teorema 1.21. *(Fórmula de Künneth) Si C y D son complejos de módulos libres sobre un dominio de ideales principales, entonces existe un homomorfismo $\theta : \mathbb{H}_n(C \otimes D) \longrightarrow \{Tor[\mathbb{H}(C), \mathbb{H}(D)]\}_{n-1}$ para todo entero n tal que*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \{\mathbb{H}(C) \otimes \mathbb{H}(D)\}_n &\xrightarrow{\pi} \mathbb{H}_n(C \otimes D) \\ &\xrightarrow{\theta} \{Tor[\mathbb{H}(C), \mathbb{H}(D)]\}_{n-1} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

es una sucesión exacta corta descomponible, es decir,

$$\mathbb{H}_n(C \otimes D) \cong \{\mathbb{H}(C) \otimes \mathbb{H}(D)\}_n \oplus \{Tor[\mathbb{H}(C), \mathbb{H}(D)]\}_{n-1}$$

para todo entero n.

En el teorema anterior:

1. $\mathbb{H}(C)$ y $\mathbb{H}(D)$ denotan complejos de cadenas con borde trivial, es decir, sus operadores de borde son triviales. Además, sus cadenas n-dimensionales son $\mathbb{H}_n(C)$ y $\mathbb{H}_n(D)$ respectivamente.

2. El complejo $\mathbb{H}(C) \otimes \mathbb{H}(D)$ denota el **producto tensorial** de los complejos $\mathbb{H}(C)$ y $\mathbb{H}(D)$. Sus cadenas n-dimensionales están dadas por

$$\{\mathbb{H}(C) \otimes \mathbb{H}(D)\}_n = \sum_{p+q=n} \mathbb{H}_p(C) \otimes \mathbb{H}_q(D).$$

3. El complejo $Tor[\mathbb{H}(C), \mathbb{H}(D)]$ denota el **producto torsión** de los complejos $\mathbb{H}(C)$ y $\mathbb{H}(D)$. Sus cadenas n-dimensionales están dadas por

$$\{Tor[\mathbb{H}(C), \mathbb{H}(D)]\}_n = \sum_{p+q=n} Tor_1[\mathbb{H}_p(C), \mathbb{H}_q(D)].$$

4.

$$\pi : \{\mathbb{H}(C) \otimes \mathbb{H}(D)\}_n = \sum_{p+q=n} \mathbb{H}_p(C) \otimes \mathbb{H}_q(D) \longrightarrow \mathbb{H}_n(C \otimes D)$$

es un homomorfismo de R-módulos denominado **producto de homología n-dimensional** de los complejos C y D. Su existencia lo garantiza el morfismo $\pi_{pq} : \mathbb{H}_p(C) \otimes \mathbb{H}_q(D) \longrightarrow \mathbb{H}_{p+q}(C \otimes D)$ y la propiedad universal de $\sum_{p+q=n} \mathbb{H}_p(C) \otimes \mathbb{H}_q(D)$.

1.2. La fórmula de Künneth en topología algebraica

Antes de presentar dicha versión es necesario dar algunas definiciones y teoremas previos. Cabe señalar que en esta sección utilizamos principalmente [17] como referencia, incluso en dicha bibliografía podemos encontrar la construcción de la sucesión de grupos abelianos libres y homomorfismos de un espacio topológico que mencionamos más adelante.

Definición 1.22. $\Delta^n := \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1$ *y* $x_i \geq 0$ *para cada* $i \in \{1, 2, ..., n+1\}\}$, *se llama* ***n-símplice estándar***.

Ejemplo 1.23. 1. Δ^0 consiste de un solo punto.

2. Δ^1 es un segmento de línea (incluyendo sus puntos extremos).

3. Δ^2 es un triángulo junto con su interior.

4. Δ^3 es un tetraedro sólido.

Definición 1.24. *Sea X un espacio topológico. Un **n-símplice singular** en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, donde Δ^n es el n-símplice estándar.*

Definición 1.25. *Sea X un espacio topológico. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $S_n(X)$ como el grupo abeliano libre que tiene como base todos los n-símplices singulares en X. Los elementos de $S_n(X)$ se llaman **n-cadenas singulares** en X.*

En [17, pág 64] se demuestra que para cada $n \geq 0$ existe un único homomorfismo $\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ tal que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Los homomorfismos ∂_n se llaman **operadores frontera**.

Así, dado un espacio topológico X se puede construir una sucesión de grupos abelianos libres y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

llamado ***complejo singular*** de X, y se denota por $(S_*(X), \partial)$ o simplemente por $S_*(X)$.

Definición 1.26. *El grupo de **n-ciclos singulares** en X, denotado por $Z_n(X)$, es $Ker(\partial_n)$. Mientras que el grupo de **n-fronteras singulares** en X, denotado por $B_n(X)$, es $Im(\partial_{n+1})$.*

Definición 1.27. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el **n-ésimo grupo de homología singular** de un espacio X es $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$. La clase lateral $z_n + B_n(X)$, donde z_n es un n-ciclo, se llama **clase de homología** de z_n y se denota por cls z_n.*

Es de esperar que en este caso también aparezca el funtor Tor, para ello habrá que aclarar su significado.

Definición 1.28. *Para cada grupo abeliano A, sea*

$$0 \longrightarrow R \overset{i}{\hookrightarrow} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta con F un grupo abeliano libre. Para cualquier grupo abeliano libre B, se define $Tor(A, B) = Ker(i \otimes 1_B)$.

Observación 1.29. *Notar que si eliminamos A de la sucesión anterior obtenemos el complejo de cadenas*

$$C_* = 0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

y por la observación 1.3 obtenemos que $Tor(A, B) = H_1(C_* \otimes B)$.

Recordar que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es una equivalencia homotópica si existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$, donde $\simeq$ simboliza la homotopía entre funciones continuas. Sin embargo, el concepto de homotopía entre morfismos de complejos de cadenas también lo tenemos definido. Así que resulta natural tener la siguiente definición.

Definición 1.30. *Un morfismo de cadenas $f : (S_*, \partial) \longrightarrow (S'_*, \partial')$ es una* ***cadena equivalencia*** *si existe un morfismo $g : (S'_*, \partial') \longrightarrow (S_*, \partial)$ tal que $gf \simeq 1_{S_*}$ y $fg \simeq 1_{S'_*}$. Dos complejos de cadenas se dicen* ***cadena equivalentes*** *si existe una cadena equivalencia entre ellos.*

El siguiente teorema es fundamental para demostrar la fórmula de Künneth en topología algebraica.

Teorema 1.31. *(Eilenberg-Zilber) Sean X y Y espacios topológicos. Entonces existe una cadena equivalencia $\psi : S_*(X \times Y) \longrightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$ única salvo homotopía. Por tanto, $H_n(X \times Y) \cong H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Así llegamos al siguiente resultado.

Teorema 1.32. *(Fórmula de Künneth) Sean X y Y espacios topológicos, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión exacta corta que se divide*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \sum_{i+j=n} (H_i(X) \otimes H_j(Y)) &\xrightarrow{\alpha''} H_n(X \times Y) \\ &\longrightarrow \sum_{p+q=n-1} Tor(H_p(X), H_q(Y)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha'' : (cls z_i) \otimes (cls z'_j) \longmapsto cls(\psi'(z_i \otimes z'_j))$ *y* $\psi' : S_*(X) \otimes S_*(Y) \longrightarrow S_*(X \times Y)$ *es la inversa de la cadena de equivalencia dada por el teorema de Eilenberg-Zilber. Por tanto,*

$$H_n(X \times Y) \cong \sum_{i+j=n} (H_i(X) \otimes H_j(Y)) \bigoplus \sum_{p+q=n-1} Tor(H_p(X), H_q(Y)).$$

Capítulo 2

Categorías abelianas

En este capítulo se presenta la definición de categoría abeliana, concepto que juega un papel fundamental a lo largo de esta tesis. Además se enuncian algunos teoremas de gran relevancia.

Definición 2.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un* $\mathscr{C}$***-producto*** *de un par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos es un triple (P, π_A, π_B), donde P es un $\mathscr{C}$-objeto, $\pi_A : P \to A$ y $\pi_B : P \to B$ son $\mathscr{C}$-morfismos (llamados proyecciones) tales que para cada C $\mathscr{C}$-objeto y para cualesquiera $f : C \to A$, $g : C \to B$ $\mathscr{C}$-morfismos, existe un único $\mathscr{C}$-morfismo $< f, g >: C \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"'] & P \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

Por abuso de notación al triple (P, π_A, π_B) lo denotaremos simplemente por $A \times B$, teniendo en mente las proyecciones correspondientes. Por otro lado, si trasladamos la definición anterior a $\mathscr{C}^{op}$, es decir, si dualizamos el concepto anterior, obtenemos lo siguiente.

Definición 2.2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un* $\mathscr{C}$***-coproducto*** *o una* $\mathscr{C}$**-suma** *de un par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos es un triple (μ_A, μ_B, S), donde S es un $\mathscr{C}$-objeto, $\mu_A : A \to S$ y $\mu_B : B \to S$ son $\mathscr{C}$-morfismos (llamadas inclusiones)* *tales que para cada C $\mathscr{C}$-objeto y para cualesquiera $f : A \to C$, $g : B \to C$ $\mathscr{C}$-morfismos, existe un único $\mathscr{C}$-morfismo $[f,g] : S \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\mu_A"] \\ C & S \arrow[l, dashed, "{[f,g]}"'] \\ & B. \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "\mu_B"'] \end{tikzcd}$$

De manera similar, acordamos que al triple (μ_A, μ_B, S) lo denotaremos solamente por $A + B$, teniendo en mente las inclusiones correspondientes.
Las definiciones anteriores fueron dadas para dos $\mathscr{C}$-objetos en particular, sin embargo, pueden generalizarse para una familia arbitraria de $\mathscr{C}$-objetos. Explícitamente tenemos:

Definición 2.3. *Un $\mathscr{C}$**-producto** de una familia $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$-objetos es un par $(\prod_{i\in I} A_i, (\pi_i)_{i\in I})$ tal que:*
1) $\prod_{i\in I} A_i$ es un $\mathscr{C}$-objeto.
2) Para cada $j \in I$, $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ es un $\mathscr{C}$-morfismo.
3) Para cada par $(C, (f_i)_{i\in I})$, donde C es un $\mathscr{C}$-objeto y $f_j : C \to A_j$ para cualquier $j \in I$, existe un único $\mathscr{C}$-morfismo $< f_i >: C \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "<f_i>"] \arrow[dr, "f_j"'] & \prod_{i\in I} A_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & A_j \end{tikzcd}$$

para cada $j \in I$.

Definición 2.4. *Un $\mathscr{C}$**-coproducto** de una familia $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$-objetos es un par $((\mu_i)_{i\in I}, \coprod_{i\in I} A_i)$ tal que:*

1) $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ *es un* $\mathscr{C}$*-objeto.*

2) Para cada $j \in I$*,* $\mu_j : A_j \to \coprod\limits_{i\in I} A_i$ *es un* $\mathscr{C}$*-morfismo.*

3) Para cada par $((f_i)_{i\in I}, C)$*, donde* C *es un* $\mathscr{C}$*-objeto y* $f_j : A_j \to C$ *para cualquier* $j \in I$*, existe un único* $\mathscr{C}$*-morfismo* $[f_i] : \coprod\limits_{i\in I} A_i \to C$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C & \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[l, dashed, "{[f_i]}"'] \\ & A_j \arrow[ul, "f_j"] \arrow[u, "\mu_j"'] \end{tikzcd}$$

para cada $j \in I$*.*

Por simplicidad $\prod\limits_{i\in I} A_i$ denotará al par $(\prod\limits_{i\in I} A_i, (\pi_i)_{i\in I})$, mientras que $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ hará alusión a $((\mu_i)_{i\in I}, \coprod\limits_{i\in I} A_i)$. No es difícil demostrar que si $\prod\limits_{i\in I} A_i$ o $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ existen entonces son únicos salvo isomorfismo y por consiguiente las definiciones anteriores tienen sentido.
Recordar que en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ no sólo se tenían definidos estos conceptos. Más aún, se daba explícitamente la definición de suma directa de una familia de R-módulos dada (véase [19]). A lo largo de este capítulo veremos que dicho concepto se puede formular para una familia finita de $\mathscr{C}$-objetos, y para ello será necesario añadirle más propiedades a la categoría $\mathscr{C}$.

Definición 2.5. *Una categoría* $\mathscr{L}$ *se llama* ***lineal*** *o* ***preaditiva*** *si para cada par* (A, B) *de* $\mathscr{L}$*-objetos se cumple que* $Hom_{\mathscr{L}}(A, B)$ *es un grupo abeliano. Además, para cualesquiera* $f, f' \in Hom_{\mathscr{L}}(A, B)$ *y* $h, h' \in Hom_{\mathscr{L}}(B, C)$*,*

$$(h + h')f = hf + h'f \text{ y } h(f + f') = hf + hf',$$

es decir, la composición de $\mathscr{L}$*-morfismos es una operación bilineal.*

Observaciones 2.6. *1) Si* $\mathscr{L}$ *es una categoría lineal entonces* $Hom_{\mathscr{L}}(A, A)$ *es un anillo asociativo, teniendo a* 1_A *como la unidad.*
2) Si $\mathscr{L}$ *posee objeto cero, entonces el morfismo cero* $0_{A,B} \in Hom_{\mathscr{L}}(A, B)$ *es el neutro aditivo del grupo abeliano* $Hom_{\mathscr{L}}(A, B)$*.*

El siguiente teorema nos dará una respuesta concreta para la definición de suma directa de dos $\mathscr{L}$-objetos.

Teorema 2.7. *Sea $\mathscr{L}$ una categoría lineal y sean $A, B \in Ob(\mathscr{L})$. Entonces la suma $A + B$ con inclusiones $\mu_1 : A \to A + B$ y $\mu_2 : B \to A + B$ coincide con el producto $A \times B$, es decir, $A + B \cong A \times B$.*

Demostración.
En primer lugar veamos la existencia de las proyecciones $\pi_1 : A + B \to A$ y $\pi_2 : A + B \to B$. En efecto, consideremos los morfismos $1_A : A \to A$ y $0_{B,A} : B \to A$, entonces por definición de $A+B$ existe $\pi_1 : A+B \to A$ tal que $\pi_1\mu_1 = 1_A$ y $\pi_1\mu_2 = 0_{B,A}$. Análogamente, para los morfismos $1_B : B \to B$ y $0_{A,B} : A \to B$, existe $\pi_2 : A + B \to B$ tal que $\pi_2\mu_1 = 0_{A,B}$ y $\pi_2\mu_2 = 1_B$. Es decir, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\
A & A+B \arrow[l, dashed, "\pi_1"'] \\
& B \arrow[ul, "0_{B,A}"] \arrow[u, "\mu_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "0_{A,B}"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\
B & A+B \arrow[l, dashed, "\pi_2"'] \\
& B. \arrow[ul, "1_B"] \arrow[u, "\mu_2"']
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, sean $C \in Ob(\mathscr{L})$, $f : C \to A$ y $g : C \to B$ $\mathscr{L}$-morfismos, nos interesa probar la existencia del morfismo $< f, g >: C \to A + B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, dashed, "<f,g>"] & A+B \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

conmuta.
Sea $< f, g >:= \mu_1 f + \mu_2 g : C \to A + B$, entonces
$\pi_1 < f, g >= \pi_1(\mu_1 f + \mu_2 g) = \pi_1(\mu_1 f) + \pi_1(\mu_2 g) = (\pi_1\mu_1)f + (\pi_1\mu_2)g =$
$= 1_A f + O_{B,A} g = f$
$\pi_2 < f, g >= \pi_2(\mu_1 f + \mu_2 g) = \pi_2(\mu_1 f) + \pi_2(\mu_2 g) = (\pi_2\mu_1)f + (\pi_2\mu_2)g =$
$= 0_{A,B} f + 1_B g = g.$

Finalmente veamos que $< f, g >$ es el único $\mathscr{L}$-morfismo con esta propiedad. Supongamos que $h : C \to A + B$ satisface que $\pi_1 h = f$ y $\pi_2 h = g$.
Notar que $\psi := (\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2) : A + B \to A + B$ verifica que
$\psi\mu_1 = (\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2)\mu_1 = (\mu_1\pi_1)\mu_1 + (\mu_2\pi_2)\mu_1 = \mu_1(\pi_1\mu_1) + \mu_2(\pi_2\mu_1) =$
$= \mu_1 1_A + \mu_2 0_{A,B} = \mu_1$ y
$\psi\mu_2 = (\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2)\mu_2 = (\mu_1\pi_1)\mu_2 + (\mu_2\pi_2)\mu_2 = \mu_1(\pi_1\mu_2) + \mu_2(\pi_2\mu_2) =$
$= \mu_1 0_{B,A} + \mu_2 1_B = \mu_2,$
es decir, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\
A + B & A + B \arrow[l, "\psi"'] \\
 & B. \arrow[ul, "\mu_2"] \arrow[u, "\mu_2"']
\end{tikzcd}$$

No obstante, tenemos que el siguiente diagrama conmuta trivialmente

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\
A + B & A + B \arrow[l, "1_{A+B}"'] \\
 & B. \arrow[ul, "\mu_2"] \arrow[u, "\mu_2"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto, por la propiedad universal de la suma, obtenemos que $\psi = 1_{A+B}$ y por consiguiente $h = 1_{A+B}h = \psi h = (\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2)h = (\mu_1\pi_1)h + (\mu_2\pi_2)h = \mu_1(\pi_1 h) + \mu_2(\pi_2 h) = \mu_1 f + \mu_2 g =< f, g >$.
Por lo tanto, A+B satisface las propiedades de la definición del $\mathscr{L}$-producto de los $\mathscr{L}$-objetos A y B. Luego $A + B \cong A \times B$. $\square$

Nota 2. *El teorema anterior indica que la $\mathscr{L}$-suma de una colección* **finita** *de $\mathscr{L}$-objetos coincide con su $\mathscr{L}$-producto. No afirma que la $\mathscr{L}$-suma de una colección infinita de $\mathscr{L}$-objetos es igual a su $\mathscr{L}$-producto.*

Por lo tanto, en una categoría lineal $\mathscr{L}$ a la suma de los $\mathscr{L}$-objetos A y B, la denominaremos **suma directa** y la denotaremos con el símbolo $A \oplus B$, con la finalidad de hacer énfasis que en este tipo de categorías se cumple que $A + B \cong A \times B$.

Observación 2.8. *Observar que en la demostración de 2.7, supusimos que* $(A+B, \mu_1, \mu_2)$ *existía y en virtud de este hecho los* $\mathscr{L}$*-morfismos* μ_1 *y* μ_2 *determinaron completamente a los* $\mathscr{L}$*-morfismos* π_1 *y* π_2 *mediante las condiciones* $\pi_1\mu_1 = 1_A$*,* $\pi_1\mu_2 = 0_{B,A}$*,* $\pi_2\mu_1 = 0_{A,B}$*,* $\pi_2\mu_2 = 1_B$ *y* $\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 = 1_{A+B}$*. Sin embargo, si en 2.7 suponemos que* $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ *existe entonces obtendremos que los* $\mathscr{L}$*-morfismos* π_1 *y* π_2 *determinan de manera única a los* $\mathscr{L}$*-morfismos* μ_1 *y* μ_2 *mediante condiciones similares a las anteriores. Una vez aclarada esta situación, el siguiente teorema resulta fácil de demostrar.*

Teorema 2.9. *Sean A, B, C* $\mathscr{L}$*-objetos de una categoría lineal* $\mathscr{L}$ *y* $\mu_A : A \to C$ *y* $\mu_B : B \to C$ $\mathscr{L}$*-morfismos. La condición necesaria y suficiente para que* (C, μ_A, μ_B) *sea la suma directa de A y B es que existan* $\pi_A : C \to A$ *y* $\pi_B : C \to B$ $\mathscr{L}$*-morfismos tales que*

1) $\pi_A\mu_A = 1_A$*,* $\pi_A\mu_B = 0_{B,A}$

2) $\pi_B\mu_A = 0_{A,B}$*,* $\pi_B\mu_B = 1_B$

3) $\mu_A\pi_A + \mu_B\pi_B = 1_C$*.*

Demostración.
Necesidad. En la demostración del teorema 2.7 se probó la existencia de $\pi_A : C \to A$ y $\pi_B : C \to B$ $\mathscr{L}$-morfismos que cumplan las propiedades deseadas.
Suficiencia. Supongamos las hipótesis y veamos que (C, μ_A, μ_B) es la suma directa de A y B, es decir, que $C \cong A + B$. En efecto:
Es claro que $\mu_A : A \to C$ y $\mu_B : B \to C$ son las inclusiones, resta demostrar la propiedad universal de la suma. Para ello sean $K \in Ob(\mathscr{L})$ y $f : A \to K$, $g : B \to K$ $\mathscr{L}$-morfismos, si definimos $\xi = (f\pi_A + g\pi_B) : C \to K$ (y usando los incisos 1 y 2 de nuestras hipótesis) se verifica que $\xi\mu_A = f$ y $\xi\mu_B = g$, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\mu_A"] \\
K & C \arrow[l, "\xi"'] \\
 & B. \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "\mu_B"']
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, supongamos que $\xi' : C \to K$ también satisface que $\xi'\mu_A = f$ y $\xi'\mu_B = g$, entonces usando el inciso 3 de nuestras hipótesis, se sigue que $\xi' = \xi' 1_c = \xi'(\mu_A\pi_A + \mu_B\pi_B) = \xi'(\mu_A\pi_A) + \xi'(\mu_B\pi_B) = (\xi'\mu_A)\pi_A + (\xi'\mu_B)\pi_B =$ $= f\pi_A + g\pi_B = \xi$.
Por lo tanto, por la unicidad de la suma de A y B, $C \cong A + B$. $\square$

Una regla mnemotécnica para el teorema anterior es recordar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & A \\
& A \oplus B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
B \arrow[ur, "\mu_B"] \arrow[rr, "1_B"'] & & B.
\end{tikzcd}$$

Cabe mencionar que en ningún momento hemos mencionado que dada una categoría lineal $\mathscr{L}$ siempre existe la suma directa de dos $\mathscr{L}$-objetos, pues en general no se cumple que dados dos $\mathscr{L}$-objetos siempre existe su $\mathscr{L}$-suma o su $\mathscr{L}$-producto. Si una categoría $\mathscr{L}$ cumple con esta importante propiedad recibirá un nombre especial.

Definición 2.10. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría lineal. Diremos que $\mathscr{A}$ es una categoría **aditiva** si posee objeto cero y para cada par (A, B) de $\mathscr{A}$-objetos existe su suma directa. Mientras que, un funtor entre categorías lineales $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ se llamará **aditivo** si para cada par (A_1, A_2) de $\mathscr{A}$-objetos, la función $F_{A_1,A_2} : Hom_{\mathscr{A}}(A_1, A_2) \to Hom_{\mathscr{B}}(F(A_1), F(A_2))$ es un morfismo de grupos abelianos.*

Observación 2.11. *Directamente de la definición obtenemos que un funtor entre categorías lineales $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es aditivo si $F(f + g) = F(f) + F(g)$, donde $f, g \in Hom_{\mathscr{A}}(A_1, A_2)$.*

Teorema 2.12. *Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor aditivo entre categorías aditivas, entonces F preserva objeto cero y sumas directas.*

Demostración.
Dado que para cada par (A_1, A_2) de $\mathscr{A}$-objetos la función

$$F_{A_1,A_2} : Hom_{\mathscr{A}}(A_1, A_2) \to Hom_{\mathscr{B}}(F(A_1), F(A_2))$$

es un morfismo de grupos abelianos, F preserva objeto cero.
Para la segunda afirmación usaremos la caracterización de la suma directa que probamos en el teorema 2.9. En efecto, sea $(A \oplus B, \mu_A, \mu_B)$ la $\mathscr{A}$-suma directa de A y B, donde $\mu_A : A \to A \oplus B$ y $\mu_B : B \to A \oplus B$ son las inclusiones. En virtud del teorema 2.9 existen $\pi_A : A \oplus B \to A$ y $\pi_B : A \oplus B \to B$ $\mathscr{A}$-morfismos tales que

1. $\pi_A \mu_A = 1_A$, $\pi_A \mu_B = 0_{B,A}$.
2. $\pi_B \mu_A = 0_{A,B}$, $\pi_B \mu_B = 1_B$.
3. $\mu_A \pi_A + \mu_B \pi_B = 1_{A \oplus B}$.

Obteniendo así, $F(\mu_A) : F(A) \to F(A \oplus B)$, $F(\mu_B) : F(B) \to F(A \oplus B)$, $F(\pi_A) : F(A \oplus B) \to F(A)$ y $F(\pi_B) : F(A \oplus B) \to F(B)$ $\mathscr{B}$-morfismos tales que

1. $F(\pi_A)F(\mu_A) = F(\pi_A \mu_A) = F(1_A) = 1_{F(A)}$,
   $F(\pi_A)F(\mu_B) = F(\pi_A \mu_B) = F(0_{B,A}) = 0_{F(B),F(A)}$,
2. $F(\pi_B)F(\mu_A) = F(\pi_B \mu_A) = F(0_{A,B}) = 0_{F(A),F(B)}$,
   $F(\pi_B)F(\mu_B) = F(\pi_B \mu_B) = F(1_B) = 1_{F(B)}$,
3. $F(\mu_A)F(\pi_A) + F(\mu_B)F(\pi_B) = F(\mu_A \pi_A + \mu_B \pi_B) = F(1_{A \oplus B}) = 1_{F(A \oplus B)}$.

Por el teorema 2.9, $(F(A \oplus B), F(\mu_A), F(\mu_B))$ es la $\mathscr{B}$-suma directa de $F(A)$ y $F(B)$, es decir, $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$. Por lo tanto F preserva sumas directas. $\square$

Una observación interesante es notar que el recíproco del teorema 2.12 es válido en el siguiente sentido.

Teorema 2.13. *Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor entre categorías aditivas. Si F preserva sumas directas entonces F es aditivo.*

Demostración.
Sean $f, g \in Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$ y supongamos que $(A \oplus A, \mu_1, \mu_2)$ es la suma directa de A y A. Por el teorema 2.9 existen $\mathscr{A}$-morfismos $\pi_1, \pi_2 : A \oplus A \to A$ tales que

1. $\pi_1 \mu_1 = 1_A$, $\pi_1 \mu_2 = 0_{A,A}$.

2. $\pi_2\mu_1 = 0_{A,A}$, $\pi_2\mu_2 = 1_A$.

3. $\mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 = 1_{A\oplus A}$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\ B & A \oplus A \arrow[l, dashed, "\xi"'] \\ & A. \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "\mu_2"'] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Por 2.9 sabemos explícitamente que $\xi = f\pi_1 + g\pi_2$. Aplicando F al diagrama 2.1 conseguimos

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, "F(f)"'] \arrow[d, "F(\mu_1)"] \\ F(B) & F(A \oplus A) \arrow[l, dashed, "F(\xi)"'] \\ & F(A). \arrow[ul, "F(g)"] \arrow[u, "F(\mu_2)"'] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Observar que $F(f)F(\pi_1) + F(g)F(\pi_2) : F(A \oplus A) \to B$ también hace conmutar el diagrama 2.2 (usando 1 y 2). En virtud de que F preserva sumas directas y por la propiedad universal de la misma, concluimos que $F(\xi) =$ $= F(f)F(\pi_1)+F(g)F(\pi_2)$, es decir, $F(f\pi_1+g\pi_2) = F(f)F(\pi_1)+F(g)F(\pi_2)$. Aplicando $F(\mu_1 + \mu_2)$ del lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} F(f\pi_1 + g\pi_2)F(\mu_1 + \mu_2) &= F((f\pi_1 + g\pi_2)(\mu_1 + \mu_2)) \\ &= F(f\pi_1\mu_1 + f\pi_1\mu_2 + g\pi_2\mu_1 + g\pi_2\mu_2) \\ &= F(f1_A + f0_{A,A} + g0_{A,A} + g1_A) \\ &= F(f + g). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(F(f)F(\pi_1)+F(g)F(\pi_2))F(\mu_1+\mu_2) &= F(f)F(\pi_1\mu_1+\pi_1\mu_2)+\\ &\quad F(g)F(\pi_2\mu_1+\pi_2\mu_2)\\ &= F(f)F(1_A)+F(g)F(1_A)\\ &= F(f)1_{F(A)}+F(g)1_{F(A)}\\ &= F(f)+F(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto $F(f+g)=F(f)+F(g)$, esto es, F es aditivo. $\square$

Antes de continuar es necesario tener claro que la $\mathscr{A}$-suma directa[1] de dos $\mathscr{A}$-objetos A y B es el quíntuple $(A\oplus B,\mu_A,\mu_B,\pi_A,\pi_B)$, donde $\mu_A: A\to A\oplus B$ y $\mu_B: B\to A\oplus B$ son las $\mathscr{A}$-inclusiones; mientras que $\pi_A: A\oplus B\to A$ y $\pi_B: A\oplus B\to B$ son las $\mathscr{A}$-proyecciones. Además, dichos $\mathscr{A}$-morfismos satisfacen las propiedades del teorema 2.9.

Teorema 2.14. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Supongamos que $(A\oplus B,\mu_A,\mu_B,\pi_A,\pi_B)$ es la $\mathscr{A}$-suma directa de A y B, entonces μ_A es el núcleo de π_B y π_A es el conúcleo de μ_B.*

Demostración.
Veamos que μ_A es el núcleo de π_B, la otra afirmación se demuestra de manera análoga.
Por el teorema 2.9 sabemos que $\pi_B\mu_A=0_{A,B}$.
Sean $K\in Ob(\mathscr{A})$ y $f: K\to A\oplus B$ tal que $\pi_B f=0_{K,B}$. Nos interesa probar la existencia de un único $\mathscr{A}$-morfismo $g: K\to A$ tal que $\mu_A g=f$. En efecto, dado que $\mu_A\pi_A+\mu_B\pi_B=1_{A\oplus B}$ entonces $f=1_{A\oplus B}f=(\mu_A\pi_A+\mu_B\pi_B)f=$ $=(\mu_A\pi_A)f+(\mu_B\pi_B)f=\mu_A(\pi_A f)+\mu_B(\pi_B f)=\mu_A(\pi_A f)+\mu_B 0_{K,B}=\mu_A\pi_A f$, luego tomando $g=\pi_A f$ se cumple lo requerido.
Finalmente para probar la unicidad de $g: K\to A$, supongamos que existe $h: K\to A$ tal que $\mu_A h=f$. Como $\pi_A\mu_A=1_A$ entonces $h=1_A h=$ $=(\pi_A\mu_A)h=\pi_A(\mu_A h)=\pi_A f=g$.
Por lo tanto μ_A es el núcleo de π_B. $\square$

El siguiente teorema nos permite caracterizar monomorfismos y epimorfismos a partir de morfismos cero.

[1] En algunos textos se utiliza el término **biproducto** en lugar de suma directa.

Teorema 2.15. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $f : A \to B$ un $\mathscr{A}$-morfismo. Entonces*

1) f es $\mathscr{A}$-monomorfismo si y sólo si para cada $\mathscr{A}$-morfismo $h : C \to A$ tal que $fh = 0_{C,B}$, se cumple que $h = 0_{C,A}$.

2) f es $\mathscr{A}$-epimorfismo si y sólo si para cada $\mathscr{A}$-morfismo $h : B \to C$ tal que $hf = 0_{A,C}$, se verifica que $h = 0_{B,C}$.

Demostración.
Probaremos sólo la primera afirmación, la segunda se sigue por dualidad.
Supongamos que f es un $\mathscr{A}$-monomorfismo y sea $h : C \to A$ tal que $fh = 0_{C,B}$. Notar que $fh = 0_{C,B} = f0_{C,B}$ y en virtud de nuestra hipótesis se concluye que $h = 0_{C,A}$.
Ahora supongamos que para cada $\mathscr{A}$-morfismo $h : C \to A$ tal que $fh = 0_{C,B}$ se cumple que $h = 0_{C,A}$ y veamos que f es un $\mathscr{A}$-monomorfismo.
Sean $g, k : D \to A$ $\mathscr{A}$-morfismos tal que $fg = fk$, entonces $f(g - k) = fg - fk = 0_{D,B}$ y por hipótesis obtenemos que $g - k = 0_{D,A}$, esto es, $g = k$. Luego f es un $\mathscr{A}$-monomorfismo. $\square$

Teorema 2.16. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con núcleos y conúcleos.*

1) $f : A \to B$ es $\mathscr{A}$-monomorfismo si y sólo si $(0, 0_{0,A})$ es el núcleo de f.

2) $f : A \to B$ es $\mathscr{A}$-epimorfismo si y sólo si $(0_{B,0}, 0)$ es el conúcleo de f.

Demostración.
Probaremos sólo la primera proposición, la segunda se consigue por dualidad.
($\Rightarrow$) Supongamos que f es $\mathscr{A}$-monomorfismo y veamos que $(0, 0_{0,A})$ es el núcleo de f.
(a) Es claro que $f0_{0,A} = 0_{0,B}$.
(b) Sean $K \in Ob(\mathscr{A})$ y $g : K \to A$ tal que $fg = 0_{K,B}$. Deseamos hallar un único $\mathscr{A}$-morfismo $h : K \to 0$ tal que $0_{0,A}h = g$. En efecto, dado que f es $\mathscr{A}$-monomorfismo, y usando el teorema 2.15, obtenemos que $g = 0_{K,A}$. Luego tomando $h = 0_{K,0}$ se consigue lo deseado.

Finalmente la unicidad de h se sigue del hecho de que 0 es un objeto final y por lo tanto $ker(f) = (0, 0_{0,A})$.

Supongamos ahora que $ker(f) = (0, 0_{0,A})$ y veamos que f es $\mathscr{A}$-monomorfismo. Sean $h, k \in Hom_{\mathscr{A}}(K, A)$ tal que $fh = fk$. Entonces $f(h - k) = 0_{K,B}$ y en virtud de que $ker(f) = (0, 0_{0,A})$, existe un único $\mathscr{A}$-morfismo $g : K \to 0$ tal que $0_{0,A}g = h - k$, es decir, $h = k$. Luego f es $\mathscr{A}$-monomorfismo. $\square$

Abusando un poco de notación, el teorema anterior afirma que f es $\mathscr{A}$-monomorfismo si y sólo si $ker(f) = 0$. Mientras que f es $\mathscr{A}$-epimorfismo si y sólo si $coker(f) = 0$.
Una pregunta interesante es si el núcleo o el conúcleo de una composición queda en términos de los morfismos que estamos relacionando. El siguiente teorema nos da una respuesta concreta.

Teorema 2.17. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Sea $f : A \to B$ un $\mathscr{C}$-morfismo y supongamos que $(ker(f), j)$ es el núcleo de f y $(p, coker(f))$ es el conúcleo de f.*

1) Si $g : B \to K$ es un $\mathscr{C}$-monomorfismo entonces $(ker(f), j)$ es el núcleo de gf.

2) Si $h : K \to A$ es un $\mathscr{C}$-epimorfismo entonces $(p, coker(f))$ es el conúcleo de fh.

Demostración.
Probaremos sólo la proposición 1, mientras que 2 se sigue por dualidad.
(a) Es claro que $(gf)j = 0$ pues $fj = 0$.

(b) Sean $D \in Ob(\mathscr{A})$ y $\delta : D \to A$ tal que $(gf)\delta = 0_{D,K}$. Deseamos encontrar un único $\mathscr{A}$-morfismo $\beta : D \to Ker(f)$ tal que $j\beta = \delta$. En efecto, dado que $(gf)\delta = 0_{D,K}$ y g es $\mathscr{C}$-monomorfismo, implicamos que $f\delta = 0_{D,B}$ (teorema 2.15). En virtud de que $(ker(f), j)$ es el núcleo de f, existe un único $\mathscr{C}$-morfismo $\beta : D \to ker(f)$ tal que $j\beta = \delta$.
Por tanto $ker(gf) = (ker(f), j)$. $\square$

Finalmente, para terminar esta sección enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.18. *Toda categoría aditiva $\mathscr{A}$ con núcleos y conúcleos tiene igualadores y coigualadores.*

Demostración.
Veamos que la primera afirmación se cumple y la segunda se obtendrá por dualidad.
Sea $\mathscr{A}$ una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Consideremos $f, g \in Hom_{\mathscr{A}}(A, B)$, nos interesa hallar un par (K, e) donde $e : K \to A$ verifica

1) $fe = ge$

2) Si $e' : K' \to A$ satisface que $fe' = ge'$ entonces existe un único morfismo $\alpha : K' \to K$ tal que $e\alpha = e'$.

Claramente $(ker(f-g), j)$ satisface las condiciones deseadas. Luego $\mathscr{A}$ posee igualadores. $\square$

2.1. Definición de categoría abeliana

Recordar que nuestra intención es definir un nuevo tipo de categoría donde se sigan cumpliendo resultados que se tenían en las categorías $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, para ello se toman algunos teoremas válidos en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ como axiomas de nuestra nueva categoría, por ejemplo, que todo morfismo tenga núcleo y conúcleo. Sin más preámbulos hacemos explícita la definición de categoría abeliana.

Definición 2.19. *Una* ***categoría abeliana*** $\mathscr{A}$ *es una categoría aditiva que cumple las siguientes propiedades:*

1) Todo $\mathscr{A}$-morfismo tiene núcleo y conúcleo.

2) Cada $\mathscr{A}$-monomorfismo f es el núcleo de su conúcleo.

3) Todo $\mathscr{A}$-epimorfismo h es el conúcleo de su núcleo.

Con esta definición obtenemos que $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ resultan ser ejemplos inmediatos de categorías abelianas. Más adelante se definirá la categoría de los complejos uno-graduados sobre una categoría abeliana $\mathscr{A}$, denotada por $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$, y no es difícil demostrar que en efecto también es una categoría abeliana.

Un ejemplo de una categoría no abeliana es la de los grupos abelianos libres de torsión, pues en general no todo morfismo posee conúcleo. Específicamente, la inclusión $i : 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ tiene como conúcleo a $\mathbb{Z}_2$, el cual no es libre de torsión debido a que el elemento $\overline{1}$ posee orden finito.

Antes de continuar hacemos unas observaciones pertinentes de la definición anterior.

Observaciones 2.20. *1) Sea $f : A \to B$ un $\mathscr{A}$-monomorfismo, supongamos que $(p, coker(f))$ es el conúcleo de f y $(ker(p), i)$ es el núcleo de p, entonces el axioma 2 de 2.19 nos indica que (A, f) y $(ker(p), i)$ son subobjetos de B isomorfos, es decir, existe un único $\varphi : A \to ker(p)$ $\mathscr{A}$-isomorfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ ker(p) \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & coker(f). \end{tikzcd}$$

2) Análogamente, sea $f : A \to B$ un $\mathscr{A}$-epimorfismo. Supongamos que $(ker(f), i)$ es el núcleo de f y $(p, coker(i))$ es el conúcleo de i, entonces el axioma 3 afirma que (f, B) y $(p, coker(i))$ son objetos cociente de A isomorfos, esto es, existe un único $\phi : coker(i) \to B$ $\mathscr{A}$-isomorfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & coker(i) \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & & B. \end{tikzcd}$$

3) Si $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana entonces $\mathscr{A}^{op}$ también lo es. Este hecho se sigue de que los conceptos núcleo y monomorfismo son duales a los de conúcleo y epimorfismo, respectivamente.

4) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías abelianas entonces $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ también lo es. Este resultado se debe a que dado (α, β) un $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$-morfismo se verifica que (α, β) es $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$-monomorfismo si y sólo si α es $\mathscr{A}$-monomorfismo y β es $\mathscr{B}$-monomorfismo, además $ker((\alpha, \beta)) = (ker(\alpha), ker(\beta))$. De manera análoga, (α, β) es $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$-epimorfismo si y sólo si α es $\mathscr{A}$-epimorfismo y β es $\mathscr{B}$-epimorfismo, mientras que $coker((\alpha, \beta)) = (coker(\alpha), coker(\beta))$.

Lo que haremos a continuación será definir los funtores $\mathscr{K}er$ y $\mathscr{C}oker$, posteriormente se demostrará que en una categoría abeliana uno de estos funtores es el "inverso" del otro. Para ello necesitamos algunas definiciones previas. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in Ob(\mathscr{C})$. La ***categoría de subobjetos de*** A, denotada por $[\mathscr{C}, A]$, está definida como sigue:

- $Ob([\mathscr{C}, A]) := \{(\alpha, A) | \alpha : Dom(\alpha) \to A$ es $\mathscr{C}$-monomorfismo$\}$.
- Sean $(\alpha, A), (\beta, A) \in Ob([\mathscr{C}, A])$, entonces $hom_{[\mathscr{C},A]}((\alpha, A), (\beta, A)) := \{\gamma : Dom(\alpha) \to Dom(\beta) | \beta\gamma = \alpha\}$.
- La composición es la misma que la de $\mathscr{C}$ pues $hom_{[\mathscr{C},A]}((\alpha, A), (\beta, A)) \subset hom_{\mathscr{C}}(Dom(\alpha), Dom(\beta))$.

De manera similar se define la ***categoría de objetos cociente de*** A, la cual denotaremos por $[A, \mathscr{C}]$ (véase [18]).

Definición 2.21. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría con núcleos y $A \in Ob(\mathscr{C})$. Definamos el funtor $\mathscr{K}er : [A, \mathscr{C}] \to [\mathscr{C}, A]$ de la siguiente manera:*

1) **En objetos**. *Sea $(A, \beta) \in Ob([A, \mathscr{C}])$ entonces $\mathscr{K}er((A, \beta)) := (\alpha, A)$ donde $\alpha : ker(\beta) \to A$ es el núcleo de β.*

2) **En morfismos**. *Sea $\gamma \in hom_{[A,\mathscr{C}]}((A, \beta_1), (A, \beta_2))$. Notar que dado el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} ker(\beta_1) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed, "\gamma*"'] & A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & B_1 \arrow[d, "\gamma"] \\ ker(\beta_2) \arrow[ur, "\alpha_2"'] & & B_2, \end{tikzcd}$$

se cumple que $\beta_2\alpha_1 = 0$ pues $\beta_2\alpha_1 = (\gamma\beta_1)\alpha_1 = \gamma(\beta_1\alpha_1) = \gamma 0 = 0$; por tanto, existe un único $\gamma* : ker(\beta_1) \to ker(\beta_2)$ $\mathscr{C}$-morfismo que hace conmutar el diagrama anterior (porque $(ker(\beta_2), \alpha_2)$ es el núcleo de β_2). Así pues, $\mathscr{K}er(\gamma) := \gamma*$ tal que $\alpha_2\gamma* = \alpha_1$.

Observar que la unicidad del $\mathscr{C}$-morfismo $\gamma*$ tal que $\alpha_2\gamma* = \alpha_1$, nos garantiza que en efecto $\mathscr{K}er$ preserva identidades y composiciones.

Definición 2.22. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría con conúcleos y $A \in Ob(\mathscr{C})$. Definamos el funtor $\mathscr{C}oker : [\mathscr{C}, A] \to [A, \mathscr{C}]$ de la siguiente manera:*

1) **En objetos**. *Sea $(\alpha, A) \in Ob([\mathscr{C}, A])$ entonces $\mathscr{C}oker((\alpha, A)) := (A, \beta)$ donde $\beta : A \to coker(\alpha)$ es el conúcleo de α.*

2) **En morfismos**. *Sea $\delta \in hom_{[\mathscr{C},A]}((\alpha_1, A), (\alpha_2, A))$. Notar que dado el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\delta"'] & A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & coker(\alpha_1) \arrow[d, dashed, "\overline{\delta}"] \\
A_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] & & coker(\alpha_2),
\end{tikzcd}$$

existe un único $\overline{\delta} : coker(\alpha_1) \to coker(\alpha_2)$ $\mathscr{C}$-morfismo que hace conmutar el diagrama anterior. Por tanto, $\mathscr{C}oker(\delta) := \overline{\delta}$ tal que $\overline{\delta}\beta_1 = \beta_2$.

Observar que la unicidad del $\mathscr{C}$-morfismo $\overline{\delta}$ tal que $\overline{\delta}\beta_1 = \beta_2$, garantiza que en efecto $\mathscr{C}oker$ es un funtor.

Una vez definidos los funtores anteriores y usando la observación 2.20 podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema. donde $\cong$ simboliza

Teorema 2.23. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y A un $\mathscr{A}$-objeto, entonces $\mathscr{C}oker\mathscr{K}er \cong 1_{[A,\mathscr{A}]}$ y $\mathscr{K}er\mathscr{C}oker \cong 1_{[\mathscr{A},A]}$.*

Demostración.
Demostraremos que $\mathscr{K}er\mathscr{C}oker \cong 1_{[\mathscr{A},A]}$ y la otra afirmación se consigue por dualidad.
Sea $(\alpha, A) \in Ob([\mathscr{A}, A])$ y supongamos que $(p, coker(\alpha))$ es el conúcleo de α y $(ker(p), i)$ es el núcleo de p. Entonces α es un $\mathscr{A}$-monomorfismo y por la observación 2.20 existe un único $\varphi : Dom(\alpha) \to ker(p)$ $\mathscr{A}$-isomorfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Dom(\alpha) \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
ker(p) \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & coker(\alpha).
\end{tikzcd}$$

Notar que $(\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)((\alpha, A)) = \mathscr{K}er(\mathscr{C}oker((\alpha, A))) = \mathscr{K}er((A, p)) =$ $= (i, A)$ y por tanto definiendo $\eta_{(\alpha,A)} := \varphi$ afirmamos que

$$\eta = \{\eta_{(\alpha,A)} | (\alpha, A) \in Ob([\mathscr{A}, A])\}$$

es una equivalencia natural. En efecto:

1) Es claro que para cada $(\alpha, A) \in Ob([\mathscr{A}, A])$ se verifica que $\eta_{(\alpha,A)}$ es un $[\mathscr{A}, A]$-isomorfismo.

2) Sea $\gamma : (\alpha_1, A) \to (\alpha_2, A)$ un $[\mathscr{A}, A]$-morfismo y veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 1_{[\mathscr{A},A]}((\alpha_1, A)) = (\alpha_1, A) \arrow[r, "\eta_{(\alpha_1,A)}"] \arrow[d, "1_{[\mathscr{A},A]}(\gamma)=\gamma"'] & (\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)((\alpha_1, A)) \arrow[d, "(\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)(\gamma)"] \\ 1_{[\mathscr{A},A]}((\alpha_2, A)) = (\alpha_2, A) \arrow[r, "\eta_{(\alpha_2,A)}"'] & (\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)((\alpha_2, A)). \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Para ello, supongamos que $(p_1, coker(\alpha_1))$ y $(p_2, coker(\alpha_2))$ son los conúcleos de α_1 y α_2 respectivamente; mientras que $(ker(p_1), i_1)$ y $(ker(p_2), i_2)$ son los núcleos de i_1 y i_2 respectivamente. Así obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} ker(p_1) \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, dashed, "\overline{\gamma}^*"'] & & coker(\alpha_1) \arrow[dd, dashed, "\overline{\gamma}"] \\ & A \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ ker(p_2) \arrow[ur, "i_2"'] & & coker(\alpha_2), \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

donde $\overline{\gamma} = \mathscr{C}oker(\gamma)$ y $\overline{\gamma}^* = \mathscr{K}er(\overline{\gamma})$. No obstante, la observación 2.20 nos garantiza la existencia de $\mathscr{A}$-isomorfismos $\varphi_1 : Dom(\alpha_1) \to ker(p_1)$ y $\varphi_2 : Dom(\alpha_2) \to ker(p_2)$ tales que

$$\begin{tikzcd} Dom(\alpha_1) \arrow[d, dashed, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \\ ker(p_1) \arrow[r, "i_1"'] & A \arrow[r, "p_1"'] & coker(\alpha_1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Dom(\alpha_2) \arrow[d, dashed, "\varphi_2"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \\ ker(p_2) \arrow[r, "i_2"'] & A \arrow[r, "p_2"'] & coker(\alpha_2) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

conmutan. Notar que con esta notación

$$\eta_{(\alpha_1,A)} = \varphi_1,\ \eta_{(\alpha_2,A)} = \varphi_2 \text{ y } (\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)(\gamma) = \overline{\gamma}^*;$$

luego probar que el diagrama 2.3 conmuta se reduce a demostrar la igualdad $\varphi_2\gamma = \overline{\gamma}^*\varphi_1$.
Sabemos que $\alpha_2\gamma = \alpha_1$ (por definición de γ), $i_2\overline{\gamma}^* = i_1$ (diagrama 2.4), $i_1\varphi_1 = \alpha_1$ y $i_2\varphi_2 = \alpha_2$ (diagrama 2.5), esto implica que $\alpha_2\gamma = i_1\varphi_1$ y por consiguiente

$$\begin{aligned} i_2\varphi_2\gamma &= \alpha_2\gamma \\ &= i_1\varphi_1 \\ &= i_2\overline{\gamma}^*\varphi_1. \end{aligned}$$

Finalmente, como i_2 es $\mathscr{A}$-monomorfismo obtenemos lo deseado.
De 1) y 2) concluimos que η es una equivalencia natural y por lo tanto $\mathscr{K}er\mathscr{C}oker \cong 1_{[\mathscr{A},A]}$. □

Convención. Para facilitar cálculos posteriores y abusando un poco de notación, acordamos que si f es un $\mathscr{A}$-monomorfismo entonces el teorema 2.23 nos indica que $f = ker(coker(f))$. Mientras que si g es un $\mathscr{A}$-epimorfismo, establece que $g = coker(ker(g))$.

2.2. Algunos teoremas importantes en categorías abelianas

En esta parte demostraremos algunos teoremas importantes que se cumplen en una categoría abeliana y que, sin lugar a dudas, usaremos en los capítulos restantes. Cabe mencionar que todos los teoremas probados en la sección anterior, bajo la hipótesis de una categoría aditiva con núcleos y conúcleos, siguen siendo válidos en una categoría abeliana.
Recordar que en una categoría $\mathscr{C}$ en general no se cumple que todo $\mathscr{C}$-bimorfismo es un $\mathscr{C}$-isomorfismo. No obstante, si suponemos que $\mathscr{C}$ es abeliana obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.24. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, entonces $f : A \to B$ es $\mathscr{A}$-isomorfismo si y sólo si es $\mathscr{A}$-monomorfismo y $\mathscr{A}$-epimorfismo, es decir, toda categoría abeliana es balanceada.*

Demostración.
Sabemos que siempre se cumple que si $f : A \longrightarrow B$ es un $\mathscr{A}$-isomorfismo entonces f es un $\mathscr{A}$-monomorfismo y un $\mathscr{A}$-epimorfismo.

Supongamos ahora que $f : A \to B$ es un $\mathscr{A}$-monomorfismo y un $\mathscr{A}$-epimorfismo. Entonces $(f, B) \in [\mathscr{A}, B]$ y por el teorema 2.23 conseguimos que

$$(\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)((f, B)) \cong (f, B).$$

No obstante, como f es un $\mathscr{A}$-epimorfismo obtenemos que $\mathscr{C}oker((f, B)) = = (B, 0_{B,0})$ (teorema 2.16) y por consiguiente $\mathscr{K}er((B, 0_{B,0})) = (1_B, B)$. Por tanto $(\mathscr{K}er\mathscr{C}oker)((f, B)) = (1_B, B) \cong (f, B)$, es decir, existe $\phi : A \to B$ $\mathscr{A}$-isomorfismo tal que $1_B\phi = \phi = f$. Luego f es $\mathscr{A}$-isomorfismo. □

La siguiente definición es muy importante porque nos permitirá trasladar toda la teoría del álgebra homológica a una categoría abeliana arbitraria.

Definición 2.25. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \to B$ un $\mathscr{A}$-morfismo. Supongamos que $(ker(f), j)$ es el núcleo de f y $(p, coker(f))$ es el conúcleo de f. Entonces:*

*1) La **imagen** de f, denotada por $im(f)$, está definida como el núcleo de p.*

*2) La **coimagen** de f, denotada por $coim(f)$, está definida como el conúcleo de j.*

Observaciones 2.26. *1) La definición anterior tiene sentido debido a la unicidad hasta isomofismo del núcleo y conúcleo.*

2) Está claro que toda categoría abeliana posee imágenes y coimágenes, es decir, todo morfismo tiene imagen y coimagen.

3) Directamente de la definición 2.25 obtenemos que $im(f)$ es un $\mathscr{A}$-monomorfismo y $coim(f)$ es un $\mathscr{A}$-epimorfismo.

Convención. Abusando un poco de la notación, la definición 2.25 afirma que $im(f) = ker(coker(f))$ y $coim(f) = coker(ker(f))$.

Importante. La convención anterior no afirma que $im(f) = ker(coker(f)) = = f$ y $coim(f) = coker(ker(f)) = f$, pues en ningún momento hemos supuesto que f es monomorfismo o epimorfismo respectivamente.

Teorema 2.27. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Si $f : A \to B$ es un $\mathscr{A}$-morfismo entonces existen $C \in Ob(\mathscr{A})$, $m \in Hom_{\mathscr{A}}(A, C)$ y $e \in Hom_{\mathscr{A}}(C, B)$ tal que $f = me$ con m un $\mathscr{A}$-monomorfismo y e un $\mathscr{A}$-epimorfismo. Más aún, $m = im(f)$ y $e = coim(f)$.*

Demostración.
Supongamos que $(p_1, coker(f))$ es el conúcleo de f y $(ker(p_1), m)$ es el núcleo de p_1. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "e"'] & B \arrow[r, "p_1"] & coker(f) \\ ker(p_1) \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}.$$

Dado que $p_1 f = 0$ y $(ker(p_1), m)$ es el núcleo de p_1, existe un único $\mathscr{A}$-morfismo $e : A \to ker(p_1)$ tal que $me = f$.

Afirmación 1. $ker(e) = ker(f)$
Usando el teorema 2.17 conseguimos que $ker(f) = ker(me) = ker(e)$ pues m es $\mathscr{A}$-monomorfismo .

Afirmación 2. e es $\mathscr{A}$-epimorfismo.
En efecto, sea $u \in Hom_{\mathscr{A}}(ker(p_1), D)$ tal que $ue = 0$ y consideremos $(ker(u), j)$ el núcleo de u. Entonces existe un único $\mathscr{A}$-morfismo $\delta : A \to ker(u)$ tal que $j\delta = e$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, dashed, "\delta"'] \arrow[d, "e"] & B \arrow[r, "p_1"] & coker(f) \\ ker(u) \arrow[r, "j"'] & ker(p_1) \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, "m"] & D & \end{tikzcd}.$$

Sea $(p_2, coker(mj))$ el conúcleo del $\mathscr{A}$-monomorfismo mj (y de aquí se implica que $(ker(u), mj)$ es el núcleo de p_2 pues mj es monomorfismo).

Notar que $p_2 f = p_2(me) = p_2 m(j\delta) = (p_2 mj)\delta = 0\delta = 0$, y por tanto existe un único $\mathscr{A}$-morfismo $\beta : coker(f) \to coker(mj)$ tal que $\beta p_1 = p_2$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & & coker(mj) \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[r, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"] & coker(f) \arrow[u, dashed, "\beta"'] \\
ker(u) \arrow[r, "j"'] & ker(p_1) \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, "m"'] & D & .
\end{tikzcd}$$

Además, observar que $p_2 m = (\beta p_1)m = \beta(p_1 m) = \beta 0 = 0$ y de forma análoga existe un único $\mathscr{A}$-morfismo $\varphi : ker(p_1) \to ker(u)$ tal que $mj\varphi = m$ (pues $(ker(u), mj)$ es el núcleo de p_2), esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
ker(p_1) \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
ker(u) \arrow[r, "mj"'] & B \arrow[r, "p_2"'] & coker(mj).
\end{tikzcd}$$

En virtud de que m es $\mathscr{A}$-monomorfismo y $mj\varphi = m = m1_{ker(p_1)}$ se sigue que $j\varphi = 1_{ker(p_1)}$. Asimismo, por ser j $\mathscr{A}$-monomorfismo y $j\varphi j = 1_{ker(p_1)} j = j = = j1_{ker(u)}$ obtenemos que $\varphi j = 1_{ker(u)}$, es decir, j es $\mathscr{A}$-isomorfismo. No obstante, $uj = 0$ y j un $\mathscr{A}$-epimorfismo implican que $u = 0$.
Así, hemos probado que si $ue = 0$ entonces $u = 0$, luego e es $\mathscr{A}$-epimorfismo (teorema 2.15).
Finalmente, $e = coker(ker(e)) = coker(ker(f))$ pues e es $\mathscr{A}$-epimorfismo y por lo tanto $f = me$, donde

$$m = ker(coker(f)) = im(f) \text{ y } e = coker(ker(f)) = coim(f).$$

$\square$

Observación 2.28. *Observar que en teorema 2.27 obtuvimos que $(e, ker(p_1))$ es el conúcleo del núcleo de f, es decir, $(e, ker(p_1)) \cong (p*, coker(j*))$ como objetos cocientes de A, donde $(ker(f), j*)$ es el núcleo de f y $p* : A \to coker(j*)$. Por tanto, existe un isomorfismo $\overline{f} : coker(j*) \to ker(p_1)$ tal que $\overline{f}p* = e$. Luego $f = me = m\overline{f}p*$.*
Más aún, $\overline{f}$ es único pues si existira otro isomorfismo ξ con la propiedad de que $m\xi p* = f = m\overline{f}p*$, usamos que m y $p*$ son monomorfismo y epimorfismo respectivamente para obtener que $\xi = \overline{f}$.

Una vez realizada la observación anterior, la demostración del siguiente teorema es evidente.

Teorema 2.29. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : A \to B$ un $\mathscr{A}$-morfismo. Entonces existe un único $\overline{f} : coim(f) \to im(f)$ $\mathscr{A}$-isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "q"] & coker(f) \\ & coim(f) \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & im(f) \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}.$$

□

Vale la pena resaltar que los teoremas 2.27 y 2.29 nos dan factorizaciones de un morfismo dado. En la literatura es común hallar la descomposición de f como en el teorema 2.27, sin embargo, siempre debemos tener en mente el isomorfismo existente entre $im(f)$ y $coim(f)$ en una categoría abeliana.

2.3. Sucesiones exactas

Una vez introducidos los conceptos de imagen y núcleo de un morfismo, el siguiente paso es definir la noción de sucesión exacta en una categoría abeliana.
De aquí en adelante, si no hay lugar a dudas, usaremos el término morfismo en lugar de $\mathscr{A}$-morfismo, respectivamente con los conceptos $\mathscr{A}$-isomorfismo, $\mathscr{A}$-monomorfismo, etc.

Definición 2.30. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y consideremos la siguiente sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$*

$$A : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots$$

*1) A es una **sucesión exacta** en $\mathscr{A}$ si $im(\delta_{i+1}) = ker(\delta_i)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

*2) A es un **complejo** en $\mathscr{A}$ si $\delta_i\delta_{i+1} = 0$ (o de manera equivalente si $im(\delta_{i+1}) \subset ker(\delta_i)$) para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

Observación 2.31. *Notar que la definición anterior es muy similar a la que teníamos en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, no obstante, la expresión $im(\delta_{i+1}) = ker(\delta_i)$ indica formalmente que $im(\delta_{i+1})$ y $ker(\delta_i)$ son isomorfos como subobjetos de A_i.*

Teorema 2.32. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Entonces:*

1) $A \xrightarrow{\delta} B \xrightarrow{\beta} C$ es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si $C \xrightarrow{\beta^*} B \xrightarrow{\delta^*} A$ es exacta en $\mathscr{A}^{op}$.

2) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} B$ es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si δ es monomorfismo.

3) $A \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si δ es epimorfismo.

4) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si δ es isomorfismo.

Demostración.
1) Supongamos que $A \xrightarrow{\delta} B \xrightarrow{\beta} C$ es exacta en $\mathscr{A}$. Consideremos las factorizaciones de δ y β a través de sus imágenes:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "e_1"'] & & B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "e_2"'] & & C \\
& I \arrow[ur, "m_1"'] & & J, \arrow[ur, "m_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $e_1 = coim(\delta)$, $e_2 = coim(\beta)$, $m_1 = im(\delta)$ y $m_2 = im(\beta)$ (teorema 2.27).
Por el teorema 2.17, $ker(\beta) = ker(m_2e_2) = ker(e_2)$ y $coker(\delta) = coker(m_1e_1) =$ $= coker(m_1)$. Mientras que por hipótesis, $m_1 = im(\delta) = ker(\beta)$, luego $m_1 = ker(e_2)$ y por tanto $coker(m_1) = e_2$ (teorema 2.22).
Así obtenemos que

$$\begin{aligned} im(\beta^*) &= coim(\beta) \\ &= e_2 \\ &= coker(m_1) \\ &= coker(\delta) \\ &= ker(\delta^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C \xrightarrow{\beta^*} B \xrightarrow{\delta^*} A$ es exacta en $\mathscr{A}^{op}$.
El recíproco se realiza de manera análoga.

2) Se sigue del hecho de que en toda categoría abeliana, α es monomorfismo si y sólo si $ker(\alpha) = 0$.

3) Es consecuencia de 1) y 2).

4. Supongamos que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$. Por 2) y 3) obtenemos que δ es monomorfismo y epimorfismo, es decir, δ es isomorfismo (pues toda categoría abeliana es balanceada). $\square$

Definición 2.33. *Una* ***sucesión exacta corta*** *en una categoría abeliana* $\mathscr{A}$ *es una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Además, diremos que una sucesión exacta corta se ***divide*** *si existe un morfismo* $\gamma : C \longrightarrow B$ *tal que* $\beta\gamma = 1_C$.

Observación 2.34. *Por el teorema 2.21 obtenemos que*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es exacta si y sólo si α *es monomorfismo,* β *es epimorfismo y* (A, α) *es el núcleo de* β *(o equivalentemente* (β, C) *es el conúcleo de* α*). En este caso,* C *lo denotaremos como* B/A.

Teorema 2.35. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana.*
Consideremos $(A \oplus B, \pi_A, \pi_B, \mu_A, \mu_B)$ *la suma directa de* A *y* B*, entonces*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0.$$

es una sucesión exacta corta.

Demostración.
Por el teorema 2.9 sabemos que $\pi_A \mu_A = 1_A$ y $\pi_B \mu_B = 1_B$, y en virtud de que 1_A y 1_B son monomorfismo y epimorfismo respectivamente, conseguimos que μ_A es monomorfismo y π_B es epimorfismo.
Además por el teorema 2.14 obtenemos que (A, μ_A) es el núcleo de π_B. Por lo tanto, por la observación 2.34, concluimos que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu_A} A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B \longrightarrow 0.$$

es exacta. □

Antes de terminar esta sección enunciamos los siguientes teoremas, los cuales serán de gran relevancia en la sección 2.6.

Teorema 2.36. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd} ker(g) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[d, "\eta"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con

1) $(ker(g), j)$ el núcleo de g y

2) φ, η y f' son monomorfismos.

Entonces ψ es monomorfismo.

Demostración.

Sea $(ker(\psi), i)$ el núcleo de ψ y veamos que $i = 0$. En efecto, dado que $\psi i = 0$ se cumple que $\eta gi = g'\psi i = 0$, y como η es monomorfismo obtenemos que $gi = 0$. No obstante, $(ker(g), j)$ es el núcleo de g y por consiguiente existe un único morfismo $\alpha : ker(\psi) \to ker(g)$ tal que $j\alpha = i$.

Por tanto $f'\varphi\alpha = \psi j\alpha = \psi i = 0$ y en virtud de que f' es monomorfismo conseguimos que $\varphi\alpha = 0$. Luego $\alpha = 0$ pues φ es monomorfismo. Así, $i = j\alpha = 0$ y por lo tanto $ker(\psi) = 0$, es decir, ψ es monomorfismo. □

Teorema 2.37. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y sean $j : K \to A$, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos, donde j y f son monomorfismos. Supongamos que (K, fj) es el núcleo de g, entonces (K, j) es el núcleo de gf.*

Demostración.

Es claro que $(gf)j = 0$. Sea $h : D \to A$ un morfismo tal que $(gf)h = g(fh)0$, y por ser (K, fj) el núcleo de g, existe un único morfismo $\beta : D \to K$ tal que $(fj)\beta = fh$. Además, como f es monomorfismo se sigue que $j\beta = h$.

Finalmente, si existiera otro morfismo $\beta' : D \to K$ tal que $j\beta' = h$, entonces

$j\beta' = h = j\beta$ y por tanto $\beta = \beta'$ pues j es monomorfismo. Por lo tanto (K, j) es el núcleo de gf. $\square$

Teorema 2.38. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y sean $\pi : A \to B$, $\varphi : B \to C$ morfismos con π epimorfismo. Si π y $\varphi\pi$ tienen el mismo núcleo entonces φ es monomorfismo.*

Demostración.
Supogamos que φ es epimorfismo y sea (K, j) el núcleo de π y $\varphi\pi$. Entonces por 2.23 obtenemos que π y $\varphi\pi$ son conúcleos de j (pues tanto π y $\varphi\pi$ son epimorfismos) y por tanto existe un isomorfismo $\gamma : B \to C$ tal que $\gamma\pi = \varphi\pi$ (por la unicidad del conúcleo de j). Sin embargo, como π es epimorfismo concluimos que $\gamma = \varphi$, es decir, φ es isomorfismo y por lo tanto φ es monomorfismo. Si φ no fuera un epimorfismo entonces $\varphi = me$ con m monomorfismo y e epimorfismo. Luego $ker(\pi) = ker(\varphi\pi) = ker(me\pi) = ker(e\pi)$ pues m es monomorfismo y aplicamos la demostración anterior tomando, e en lugar de φ, para conseguir que e es isomorfismo y por lo tanto $\varphi = me$ es monomorfismo. $\square$

Teorema 2.39. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j'"'] & B' \arrow[r, "\pi'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta y tiene filas exactas en $\mathscr{A}$. Si ψ es monomorfismo entonces η también lo es.

Demostración.
Dado que las filas son exactas $j = ker(\pi)$ y $\psi j = j' = ker(\pi')$. Por el teorema 2.37 obtenemos que $j = ker(\pi'\psi) = ker(\eta\pi)$, es decir, $ker(\pi) = ker(\eta\pi)$ con π epimorfismo. Luego, por el teorema 2.38, concluimos que η es monomorfismo. $\square$

2.4. Pullbacks y pushouts

Definición 2.40. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y consideremos los homomorfismos $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$. Un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

*se llama **pullback** para α_1 y α_2 si para cada par de morfismos $\beta_1' : P' \to A_1$ y $\beta_2' : P' \to A_2$ tal que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, existe un único morfismo $\gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1\gamma = \beta_1'$ y $\beta_2\gamma = \beta_2'$, es decir, conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Es relevante mencionar que el concepto dual de pullback es pushout. Explícitamente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.41. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y consideremos los morfismos $\alpha_1 : A \to A_1$ y $\alpha_2 : A \to A_2$. Un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P \end{tikzcd}$$

*se llama **pushout** para α_1 y α_2 si para cada par de morfismos $\beta_1' : A_1 \to P'$ y $\beta_2' : A_2 \to P'$ tal que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, existe un único morfismo $\gamma : P \to P'$*

tal que $\gamma\beta_1 = \beta_1'$ *y* $\gamma\beta_2 = \beta_2'$*, es decir, conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_1'"] & \\
A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_2'"'] & P \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
& & P'.
\end{tikzcd}$$

No es difícil demostrar que si los conceptos anteriores existen entonces son únicos hasta isomorfismo. Lo que resulta interesante es ilustrar que en una categoría abeliana sí podemos asegurar su existencia.

Teorema 2.42. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana, entonces existen pullbacks y pushouts.*

Demostración.
Probaremos sólo la primera afirmación, la segunda se sigue por dualidad.
En efecto, sean $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ morfismos.
Consideremos $(A_1 \times A_2, \pi_{A_1}, \pi_{A_2})$ el producto de A_1 y A_2 y sea (P, β) el igualador de $\alpha_1\pi_{A_1}$ y $\alpha_2\pi_{A_2}$. Más aún, sabemos por el teorema 2.18 que $\beta = ker(\alpha_1\pi_{A_1} - \alpha_2\pi_{A_2})$.
Sea $\beta_i = \pi_{A_i}\beta$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Por definición de β obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, sean $\beta_1' : P' \to A_1$ y $\beta_2' : P' \to A_2$ morfismos tales que $\alpha_1\beta_1' = = \alpha_2\beta_2'$, deseamos exhibir la existencia de un único morfismo $\gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1\gamma = \beta_1'$ y $\beta_2\gamma = \beta_2'$. Por la propiedad universal de $A_1 \times A_2$, existe un único morfismo $\eta : P' \to A_1 \times A_2$ tal que $\pi_{A_i}\eta = \beta_i'$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\pi_{A_1})\eta &= \alpha_1(\pi_{A_1}\eta) \\
&= \alpha_1\beta_1' \\
&= \alpha_2\beta_2' \\
&= \alpha_2(\pi_{A_2}\eta) \\
&= (\alpha_2\pi_{A_2})\eta.
\end{aligned}$$

Dado que (P, β) es el igualador de $\alpha_1\pi_{A_1}$ y $\alpha_2\pi_{A_2}$, existe un único morfismo $\gamma : P' \to P$ tal que $\beta\gamma = \eta$. Luego para cada $i \in \{1, 2\}$ se verifica que

$$\begin{aligned} \beta_i\gamma &= (\pi_{A_i}\beta)\gamma \\ &= \pi_{A_i}(\beta\gamma) \\ &= \pi_{A_i}\eta \\ &= \beta_i'. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $\gamma' : P' \to P$ también satisface que $\beta_i\gamma' = \beta_i'$ para cada $i \in \{1, 2\}$, entonces $\pi_{A_i}\beta\gamma' = \beta_i'$ y por la unicidad del morfismo η concluimos que $\beta\gamma' = \eta$. No obstante $\eta = \beta\gamma$, y como β es monomorfismo se sigue que $\gamma = \gamma'$.
Por lo tanto

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

es el pullback para α_1 y α_2. Así, $\mathscr{A}$ tiene pullbacks. □

Teorema 2.43. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y consideremos el pullback para los morfismos α_1 y α_2*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Sea $(ker(\beta_2), j)$ el núcleo de β_2, entonces $(ker(\beta_2), \beta_1 j)$ es el núcleo de α_1. En particular, β_2 es monomorfismo si y sólo si α_1 es monomorfismo.

Demostración.
Veamos que $(ker(\beta_2), \beta_1 j)$ es el núcleo de α_1.

1.- $\alpha_1(\beta_1 j) = (\alpha_1\beta_1)j = (\alpha_2\beta_2)j = \alpha_2(\beta_2 j) = \alpha_2 0 = 0.$

2.- Sea $\gamma : K \to A$ tal que $\alpha_1\gamma = 0$, deseamos hallar un único morfismo $u : K \to ker(\beta_2)$ tal que $(\beta_1 j)u = \gamma$.
Dado que $\alpha_1\gamma = 0$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\gamma"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A, \end{tikzcd}$$

y por la propiedad universal del pullback para α_1 y α_2, existe un único morfismo $v : K \to P$ tal que $\beta_1 v = \gamma$ y $\beta_2 v = 0$. No obstante, $(ker(\beta_2), j)$ es el núcleo de β_2 y por consiguiente existe un único morfismo $u : K \to ker(\beta_2)$ tal que $ju = v$ y así $(\beta_1 j)u = \beta_1(ju) = \beta_1 v = \gamma$.

Finalmente, si existe otro morfismo $u' : K \to ker(\beta_2)$ tal que $(\beta_1 j)u' = \gamma$ entonces, por la unicidad de v, obtenemos que $ju' = v$, y por la unicidad de u concluimos que $u = u'$. Por lo tanto $(ker(\beta_2), \beta_1 j)$ es el núcleo de α_1. $\square$

Teorema 2.44. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A \arrow[r, "\alpha_1"'] & P. \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Consideremos la sucesión $C \xrightarrow{\varphi_1} A \oplus B \xrightarrow{\varphi_2} P$, donde $\varphi_1 :=< \beta_1, \beta_2 >$ y $\varphi_2 := [\alpha_1, -\alpha_2]$ (notaciones vistas en las definiciones 2.1 y 2.2). Entonces

1) $\varphi_2\varphi_1 = 0$ si y sólo si el cuadrado conmuta.

2) $0 \longrightarrow C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P$ es exacta si y sólo si el cuadrado es un pullback.

3) $C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si el cuadrado es un pushout.

4) $0 \longrightarrow C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si el cuadrado es un pullback y pushout.

Demostración.
Sabemos, por las definiciones de φ_1 y φ_2, que $\pi_A\varphi_1 = \beta_1$, $\pi_B\varphi_1 = \beta_2$, $\varphi_2\mu_A = \alpha_1$, $\varphi_2\mu_B = -\alpha_2$ y $\mu_A\pi_A + \mu_B\pi_B = 1_{A\oplus B}$; donde π_A, π_B son las

proyecciones y μ_A, μ_B las inclusiones.

1) Notar que

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 &= \varphi_2\mu_A\pi_A\varphi_1 + \varphi_2\mu_B\pi_B\varphi_1\\ &= \varphi_2(\mu_A\pi_A + \mu_B\pi_B)\varphi_1\\ &= \varphi_2(1_{A\oplus B})\varphi_1\\ &= \varphi_2\varphi_1.\end{aligned}$$

Así, $\varphi_2\varphi_1 = 0$ si y sólo si $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$.

2) Supongamos que $0 \longrightarrow C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P$ es exacta, es decir, $\varphi_1 = ker(\varphi_2)$. Para ver que 2.6 es el pullback para α_1 y α_2 haremos uso de la demostración del teorema 2.42, esto es, basta con demostrar que
$\varphi_1 = ker(\alpha_1\pi_A - \alpha_2\pi_B)$, $\beta_1 = \pi_A\varphi_1$ y $\beta_2 = \pi_B\varphi_1$.
Las dos últimas igualdades se cumplen en general, mientras que la primera se sigue del hecho de que

$$\begin{aligned}ker(\alpha_1\pi_A - \alpha_2\pi_B) &= ker(\varphi_2\mu_A\pi_A + \varphi_2\mu_B\pi_B)\\ &= ker(\varphi_2(\mu_A\pi_A + \mu_B\pi_B))\\ &= ker(\varphi_2(1_{A\oplus B}))\\ &= ker(\varphi_2)\\ &= \varphi_1.\end{aligned}$$

Además 2.6 es conmutativo pues por hipótesis $\varphi_2\varphi_1 = 0$. Luego 2.6 es el pullback para α_1 y α_2.

Supongamos ahora que 2.6 es el pullback para α_1 y α_2. Entonces por la demostración del teorema 2.42 obtenemos que $\varphi_1 = ker(\alpha_1\pi_A - \alpha_2\pi_B)$, es decir, $\varphi_1 = ker(\varphi_2)$. Por lo tanto, $0 \longrightarrow C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P$ es exacta.

3) Se realiza de manera análoga a 2).

4) Se sigue de 2) y 3). □

Teorema 2.45. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y consideremos el pullback* *para* α_1 *y* α_2

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A \arrow[d, "\alpha_2"] \\ B \arrow[r, "\alpha_1"'] & C. \end{tikzcd}$$

Si α_2 *es epimorfismo, entonces* β_1 *también lo es.*

Lo que haremos es demostrar su teorema dual.

Teorema 2.46. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana y consideremos el pushout para* β_1 *y* β_2

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A \arrow[r, "\alpha_1"'] & P. \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Si β_2 *es monomorfismo, entonces* α_1 *también lo es.*

Demostración.
Usando la misma terminología que en el teorema 2.44 , conseguimos que si 2.7 es un pushout entonces $C \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ es exacta (teorema 2.44 inciso 3). Más aún, dado que $\pi_B \varphi_1 = \beta_2$ y β_2 es monomorfismo implicamos que φ_1 es monomorfismo. Luego

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi_1} A \oplus B \xrightarrow{\varphi_2} P \longrightarrow 0$$

es exacta y por consiguiente 2.7 es también un pullback (teorema 2.44 inciso 4). Finalmente, por el teorema 2.43 concluimos que α_1 es monomorfismo. □

2.5. Elementos de objetos en categorías abelianas

Es bien sabido que en matemáticas la generalización de una teoría nos ayuda a tener una visión más clara y general de lo que estamos estudiando. Sin embargo, a lo largo de este proceso es inevitable perder ciertas propiedades. Por ejemplo, si $\mathscr{C}$ es una categoría en general y $A \in Ob(\mathscr{C})$ carece de sentido la expresión "$x \in A$". Lo importante es que en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ sí podemos darle un cierto significado.

Definición 2.47. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in Ob(\mathscr{A})$.*

*1) Un **elemento** de A es un morfismo $x : X \to A$. En símbolos, $x \in^* A$.*

*2) Dos elementos $x, y \in^* A$ se dicen **equivalentes** si existen epimorfismos u, v tales que $xu = yv$, es decir, tal que hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, dashed, "u"'] & X' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "x"'] & A. \end{tikzcd}$$

En símbolos, $x \equiv y$.

Teorema 2.48. *$\equiv$ es una relación de equivalencia sobre A.*

Demostración.
Es claro que $\equiv$ es reflexiva y simétrica.
Veamos que $\equiv$ es transitiva. Sean x, y, $z \in^* A$, donde $A \in Ob(\mathscr{A})$ y $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, tales que $x \equiv y$ y $y \equiv z$. Entonces existen u_1, u_2, v_1 y v_2 epimorfismos tales que hacen conmutar los siguiente diagramas

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "x"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U' \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v_2"'] & Z \arrow[d, "z"] \\ Y \arrow[r, "y"'] & A, \end{tikzcd}$$

es decir, $xu_2 = yu_1$ y $yv_2 = zv_1$.
Por el teorema 2.42 podemos considerar el pullback para v_2 y u_1

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & U \arrow[d, "u_1"] \\ U' \arrow[r, "v_2"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Además, por el teorema 2.45 sabemos que tanto β_1 como β_2 también resultan ser epimorfismos. Luego $u_2\beta_1 : P \to X$ y $v_1\beta_2 : P \to Z$ son epimorfismos tales que

$$\begin{aligned} x(u_2\beta_1) &= (xu_2)\beta_1 \\ &= (yu_1)\beta_1 \\ &= y(u_1\beta_1) \\ &= y(v_2\beta_2) \\ &= (yv_2)\beta_2 \\ &= (zv_1)\beta_2 \\ &= z(v_1\beta_2). \end{aligned}$$

Esto es, $x \equiv z$.
Por lo tanto $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre A. $\square$

Una vez acordado el significado de elementos de un objeto en una categoría abeliana, lo que procede es demostrar el siguiente teorema que nos resultará muy familiar.

Teorema 2.49. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y consideremos los morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Entonces*

1) f es monomorfismo si y sólo si para cada $x \in^* A$ la condición $fx \equiv 0$ implica que $x \equiv 0$.

2) f es monomorfismo si y sólo si para cada $x, y \in^* A$ tal que $fx \equiv fy$ implica que $x \equiv y$.

3) f es epimorfismo si y sólo si para cada $y \in^* B$ existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv y$.

4) f es el morfismo cero si y sólo si para cada $x \in^* A$ se verifica que $fx \equiv 0$.

5) La sucesión

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es exacta si y sólo si $gf = 0$ y para cada $y \in^* B$ con $gy \equiv 0$ existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv y$.

Demostración.
1) Supongamos que f es monomorfismo y sea $x \in^* A$ tal que $fx \equiv 0$, entonces existen u y v epimorfismos con la propiedad de que $fxu = 0v = 0 = f0$. Por ser f monomorfismo obtenemos que $xu = 0 = 0v$, esto es, $x \equiv 0$.

Supongamos ahora que para cada $x \in^* A$ la condición $fx \equiv 0$ implica que $x \equiv 0$ y veamos que f es monomorfismo. En efecto:
Sean h, k morfismos tales que $fh = fk$, entonces $f(h-k) = 0$ y por consiguiente $f(h-k) \equiv 0$. Luego, por hipótesis, $(h-k) \equiv 0$; es decir, existen u, v epimorfismos tales que $(h-k)u = 0v = 0 = 0u$ y por tanto $h - k = 0$ (pues u es epimorfismo), esto es, $h = k$. Luego f es monomorfismo.

2) Supongamos que f es monomorfismo y sean $x, y \in^* A$ tal que $fx \equiv fy$, entonces existen u y v epimorfismos tales que $fxu = fyv$. Por ser f monomorfismo conseguimos que $xu = xv$ con u y v epimorfismos, esto es, $x \equiv v$.
Supongamos ahora que para cada $x, y \in^* A$ tal que $fx \equiv fy$ implica que $x \equiv y$, entonces se verifica que para cada $x \in^* A$ la condición $fx \equiv 0$ implica que $x \equiv 0$. Luego, por el inciso anterior, f es monomorfismo.

3) Supongamos que f es epimorfismo y sea $y \in^* B$. Por el teorema 2.42 existe el pullback para f y y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Además, como f es epimorfismo se sigue que β_1 también lo es. Tomando $x = \beta_2$ obtenemos que $fx = fx1_P = y\beta_1$ con 1_P y β_1 epimorfismos; esto es, $fx \equiv y$.

Supongamos ahora que para cada $y \in^* B$ existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv y$ y veamos que f es un epimorfismo.
Sean r, s morfismos tales que $rf = sf$. Tomando $y = 1_B$ en nuestra hipótesis obtenemos que existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv 1_B$, es decir, existen epimorfismos u y v tales que $fxu = 1_B v = v$ y por consiguiente $rfxu = sfxu$, esto es, $rv = sv$. Dado que v es un epimorfismo se sigue que $r = s$ y por lo tanto f

es un epimorfismo.

4) Evidente que se cumple.

Supongamos ahora que para cada $x \in^* A$ se verifica que $fx \equiv 0$ y veamos que f es el morfismo cero. En efecto, tomando $x = 1_A$ en nuestra hipótesis obtenemos que $fx = f1_A = f \equiv 0$, esto es, existen u y v epimorfismos tales que $fu = 0v = 0 = 0u$, y como u es epimorfismo concluimos que $f = 0$.

5) Supongamos que

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \tag{2.8}$$

es exacta, entonces $gf = 0$.
Resta probar que para cada $y \in^* B$ con $gy \equiv 0$ existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv y$. En efecto, sea $y \in^* B$ tal que $gy \equiv 0$, entonces existen u y v epimorfismos tales que $gyu = 0v = 0 = 0u$ y por consiguiente $gy = 0$ (pues u es epimorfismo). Consideremos la factorización canónica $f = me$ donde $m = im(f)$ y $e = coim(f)$, dado que 2.9 es exacta conseguimos que $m = ker(g)$. Luego, como $gy = 0$ existe un único morfismo $\gamma : K \to Dom(m)$ tal que $y = m\gamma$.

Por otro lado, consideremos el pullback para γ y e

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & K \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[r, "e"'] & Dom(m).
\end{tikzcd}$$

Por el teorema 2.45, β_1 resulta ser epimorfismo. Así, tomando $x = \beta_2$ obtenemos que $fx1_A = me\beta_2 = m\gamma\beta_1 = y\beta_1$ con 1_A y β_1 epimorfismos, es decir, $fx \equiv y$.

Supongamos ahora que $gf = 0$ y para cada $y \in^* B$ con $gy \equiv 0$ existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv y$. Veamos que 2.8 es exacta.

Consideremos la factorización $f = me$ donde $m = im(f)$ y $e = coim(f)$, probaremos que $m = ker(g)$. En efecto, dado que $gf = gme = 0$ y e es un epimorfismo se sigue que $gm = 0$.

Sea $\alpha : K \longrightarrow B$ un morfismo tal que $g\alpha = 0$. Entonces $g\alpha \equiv 0$ y por tanto, por hipótesis, existe $x \in^* A$ tal que $fx \equiv \alpha$, esto es, existen epimorfismos u y v tal que $mexu = \alpha v$.
Por el teorema 2.42 podemos considerar el pullback para los morfismos m y α

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & K \arrow[d, "\alpha"] \\ im(f) \arrow[r, "m"'] & B. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del pullback P existe un único morfismo $\gamma : Dom(\gamma) \longrightarrow P$ tal que $\beta_1\gamma = exu$ y $\beta_2\gamma = v$.
Notar que β_2 es un monomorfismo pues m lo es (teorema 2.43), más aún β_2 es un epimorfismo pues v lo es y $\beta_2\gamma = v$. Luego β_2 es un isomorfismo debido a que toda categoría abeliana es balanceada y por consiguiente $m(\beta_1\beta_2^{-1}) = \alpha$.
Si existiera otro morfismo ξ tal que $m\xi = \alpha$ entonces $\xi = \beta_1\beta_2^{-1}$ pues m es un monomorfismo.
Luego $m = ker(g)$ y por lo tanto 2.8 es exacta. $\square$

2.6. Lemas clásicos en categorías abelianas

En esta sección ilustraremos que los lemas del 4 y del 5, que se cumplían en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, siguen siendo válidos en una categoría abeliana.

2.6.1. Lema del cuatro y del cinco

Teorema 2.50. *(Lema del 4) Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[d, "\varphi_4"'] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4 \end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas. Si φ_1 es epimorfismo y φ_2, φ_4 son monomorfismos entonces φ_3 es monomorfismo.

Demostración.
Antes probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación. f_1 y g_1 tienen imágenes isomorfas.
En efecto:
Consideremos las siguientes factorizaciones de f y g a través de sus imágenes:

$$A_1 \xrightarrow{e_1} I_1 \xrightarrow{m_1} A_2 \text{ y } B_1 \xrightarrow{e_2} I_2 \xrightarrow{m_2} B_2.$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & I_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "\theta"'] & A_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
B_1 \arrow[r, "e_2"'] & I_2 \arrow[r, "m_2"'] & B_2.
\end{tikzcd}$$

(Para mayor detalle acerca de la existencia del morfismo θ con dicha propiedad se recomienda ver la sección 3.3, específicamente la construcción del funtor $\mathcal{B}_n$.)
Debido a la conmutatividad del diagrama anterior y a que m_1 y φ_2 son monomorfismos se sigue que θ también lo es. Similarmente, por la conmutatividad del diagrama mencionado y porque e_2 y φ_1 son epimorfismos concluimos que θ también lo es. Luego θ es un bimorfismo y por tanto un isomorfismo (pues toda categoría abeliana es balanceada), quedando así demostrada la afirmación.

Ahora, sean $(ker(f_i), j_i)$ el núcleo de f_i para cada $i \in \{1,2,3\}$ y $(ker(g_i), j_i^*)$ el núcleo de g_i para cada $i \in \{1,2,3\}$. Por la afirmación anterior sabemos que $ker(f_2) = im(f_1) \cong im(g_1) = ker(g_2)$ y por consiguiente tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & im(f_1) \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "1_{im(f_1)}"'] & A_2 \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & ker(f_3) = im(f_2) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & im(f_1) \arrow[r, "j_2^*"'] & B_2 \arrow[r, "q_2^*"'] & ker(g_3) = im(g_2) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $q_2 = coim(f_2)$ y $q_2^* = coim(g_2)$. Más aún, el diagrama anterior posee filas exactas pues j_2, j_2^* son monomorfismos; q_2, q_2^* son epimorfismos y además $ker(q_2) = ker(f_2) = j_2$, $ker(q_2^*) = ker(g_2) = j_2^*$.

Por el teorema 2.39 obtenemos que ψ es un monomorfismo pues φ_2 lo es. Finalmente, observar que el siguiente diagrama es conmutativo y posee filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker(f_3) \arrow[r, "j_3"] \arrow[d, "\psi"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[d, "\varphi_4"] \\
0 \arrow[r] & ker(g_3) \arrow[r, "j_3^*"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & A_4.
\end{tikzcd}$$

Luego las hipótesis del teorema 2.36 se cumplen y por tanto φ_3 es un monomorfismo. □

Dualmente:

Teorema 2.51. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[d, "\varphi_4"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas. Si φ_4 es monomorfismo y φ_1, φ_3 son epimorfismos, entonces φ_2 es epimorfismo.

□

Teorema 2.52. *(Lema del 5) Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas. Si

1) φ_2 y φ_4 son isomorfismos,

2) φ_1 es epimorfismo y

3) φ_5 *es monomorfismo*

entonces φ_3 *es isomorfismo.*

Demostración.
φ_3 es monomorfismo por el teorema 2.50, mientras que el teorema 2.51 afirma que φ_3 es epimorfismo. Por lo tanto φ_3 es un isomorfismo debido a que toda categoría abeliana es balanceada. $\square$

2.6.2. Lema de la serpiente

Teorema 2.53. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana y supongamos que*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\psi"'] & B_2 \arrow[r, "\rho"'] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas. Si extendemos el diagrama anterior incluyendo núcleos y conúcleos obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & ker(f_1) \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "j_1"'] & ker(f_2) \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "j_2"'] & ker(f_3) \arrow[d, "j_3"'] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "q_1"'] & B_2 \arrow[r, "\rho"'] \arrow[d, "q_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "q_3"'] & 0 \\
 & coker(f_1) \arrow[r, "\overline{\psi}"'] \arrow[d] & coker(f_2) \arrow[r, "\overline{\rho}"'] \arrow[d] & coker(f_3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

donde $(ker(f_i), j_i)$ es el núcleo de f_i y $(q_i, coker(f_i))$ es el conúcleo de f_i para cada $i \in \{1,2,3\}$. Entonces el diagrama 2.8 tiene filas y columnas exactas. Además existe $\delta : ker(f_3) \longrightarrow coker(f_1)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow ker(f_1) \longrightarrow ker(f_2) \longrightarrow ker(f_3) \xrightarrow{\delta} \\ coker(f_1) \longrightarrow coker(f_2) \longrightarrow coker(f_3) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

es exacta.

Demostración.
Es claro que los morfismos $\overline{\varphi}$, $\overline{\pi}$, $\overline{\psi}$ y $\overline{\rho}$ se inducen por las definiciones de $ker(f_2)$, $ker(f_3)$, $coker(f_1)$ y $coker(f_2)$ respectivamente.
Veamos que el diagrama 2.9 posee filas y columnas exactas, para ello sólo probaremos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow ker(f_1) \xrightarrow{j_1} A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{q_1} coker(f_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow ker(f_1) \xrightarrow{\overline{\varphi}} ker(f_2) \xrightarrow{\overline{\pi}} ker(f_3)$$

son exactas, pues la demostración de la exactitud de las demás filas y columnas se hace de manera similar. En efecto:

Por construcción $j_1 = ker(f_1)$ y $q_1 = coker(f_1)$, luego la sucesión

$$0 \longrightarrow ker(f_1) \xrightarrow{j_1} A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{q_1} coker(f_1) \longrightarrow 0$$

es exacta.
Para demostrar la exactitud deseada usaremos el inciso 5 del teorema 2.49.
Notar que $j_3\overline{\pi}\,\overline{\varphi} = \pi\varphi j_1 = 0 j_1 = 0$ y como j_3 es un monomorfismo implicamos que $\overline{\pi}\,\overline{\varphi} = 0$.
Por otro lado, sea $x \in^* ker(f_2)$ tal que $\overline{\pi}x \equiv 0$. Dado que $\pi j_2 x \equiv j_3\overline{\pi}x \equiv 0$ se sigue que existe $y \in^* A_1$ tal que $\varphi y \equiv j_2 x$. Además, como $\psi f_1 y = f_2\varphi y \equiv f_2 j_2 x \equiv 0$ y ψ es un monomorfismo implicamos que $f_1 y \equiv 0$. Por consiguiente existe $z \in^* ker(f_1)$ tal que $j_1 z \equiv y$ pues la primera columna del diagrama 2.9 es exacta. Más aún, dado que $j_2\overline{\varphi}z \equiv \varphi j_1 z \equiv \varphi y \equiv j_2 x$ y j_2 es un monomorfismo se sigue que $\overline{\varphi}z \equiv x$. Esto implica que

$$ker(f_1) \xrightarrow{\overline{\varphi}} ker(f_2) \xrightarrow{\overline{\pi}} ker(f_3)$$

es exacta. Sin embargo, $\overline{\varphi}$ es un monomorfismo pues $j_2\overline{\varphi} = \varphi j_1$ con φj_1 un monomorfismo. Por lo tanto

$$0 \longrightarrow ker(f_1) \xrightarrow{\overline{\varphi}} ker(f_2) \xrightarrow{\overline{\pi}} ker(f_3)$$

es exacta.
Veamos la existencia del morfismo δ.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[r, dashed, "\beta_1"] \arrow[d, dashed, "\beta_2"] & ker(f_3) \arrow[d, "j_3"'] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[ur, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "q_1"'] & B_2 \arrow[r, "\rho"'] \arrow[d, dashed, "\gamma_2"'] & B_3 \arrow[r] & 0 \\
 & coker(f_1) \arrow[r, dashed, "\gamma_1"'] & F \arrow[ur, dashed, "\alpha^*"'] & &
\end{tikzcd},$$

donde P es el pullback para j_3 y π, mientras que F es el pushout para q_1 y ψ (notar que el teorema 2.42 nos garantiza que P y F existen). Además, la existencia de los morfismos α y α^* tales que $\varphi = \beta_2\alpha$ y $\rho = \alpha^*\gamma_2$ se debe a las propiedades universales de P y F respectivamente.
Dado que π es un epimorfismo se sigue que β_1 también lo es (teorema 2.45) y en virtud del teorema 2.46 concluimos que γ_1 es un monomorfismo pues ψ lo es. Más aún, el teorema 2.43 y su dual nos garantizan que β_2 es un monomorfismo pues j_3 lo es y γ_2 es un epimorfismo debido a que q_1 también lo es.
Sea $\delta_0 := \gamma_2 f_2 \beta_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_0\alpha &= \gamma_2 f_2 \varphi \\
&= \gamma_2 \psi f_1 \\
&= \gamma_1 q_1 f_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De manera similar también se verifica que $\alpha^*\delta_0 = 0$.

Afirmación 1. (A_1, α) es el núcleo de β_1.

En efecto:
Es claro que $\beta_1\alpha = 0$.
Sea $u : D \longrightarrow P$ tal que $\beta_1 u = 0$, entonces $0 = j_3\beta_1 u = \pi\beta_2 u$ y dado

que (A_1, φ) es el núcleo de π se sigue que existe un morfismo v tal que $\beta_2 u = \varphi v = \beta_2 \alpha v$ y por consiguiente $u = \alpha v$ (pues β_2 es un monomorfismo). Si existiera otro morfismo v' tal que $u = \alpha v = \alpha v'$ entonces $\beta_2 \alpha v = \beta_2 \alpha v'$, es decir, $\varphi v = \varphi v'$ y por tanto $v = v'$ pues φ es un monomorfismo.
Por lo tanto (A_1, α) es el núcleo de β_1 y dado que β_1 es un epimorfismo se sigue que $coker(\alpha) = \beta_1$.

De la misma manera concluimos que $(coker(f_1), \gamma_1)$ es el núcleo de α^*.
Como $\delta_0 \alpha = 0$ y $coker(\alpha) = \beta_1$ entonces existe un único morfismo
$m_1 : ker(f_3) \longrightarrow F$ tal que $\delta_0 = m_1 \beta_1$.
No obstante, en virtud de que $0 = \alpha^* \delta_0 = \alpha^* m_1 \beta_1$ y β_1 es un epimorfismo se sigue que $\alpha^* m_1 = 0$. Dado que $(coker(f_1), \gamma_1)$ es el núcleo de α^* concluimos que existe un único morfismo $\delta : ker(f_3) \longrightarrow coker(f_1)$ tal que $\gamma_1 \delta = m_1$. Luego el morfismo δ_0 se factoriza de manera única como

$$\delta_0 = \gamma_1 \delta \beta_1,$$

donde $\delta : ker(f_3) \longrightarrow coker(f_1)$ es el morfismo conector requerido.

Antes de seguir veamos el efecto del morfismo δ sobre un elemento de $ker(f_3)$ (comparar con el diagrama 2.11).
Sea $x \in^* ker(f_3) \subset A_3$. Por ser π un epimorfismo existe $y \in^* A_2$ tal que $\pi y \equiv j_3 x$. Entonces $\rho f_2 y \equiv f_3 \pi y \equiv f_3 j_3 x \equiv 0$, esto es, $f_2 y \in^* ker(\rho) = im(\psi)$ y por tanto existe $z \in^* B_1$ tal que $\psi z \equiv f_2 y$ (si existiera otro $z_1 \in^* B_1$ tal que $\psi z_1 \equiv f_2 y$ entonces $z_1 \equiv z$ pues ψ es un monomorfismo).

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[d, "j_3"] \\
 & y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_2"'] & j_3 x \arrow[d, "f_3"] \\
z \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "q_1"'] & f_2 y \arrow[r, "\rho"'] & 0 \\
q_1 z & &
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Afirmación 2. $q_1 z \equiv \delta x$.
Dado que $\pi y \equiv j_3 x$ y P es un pullback para j_3 y π, existe $w \in^* P$ tal que

$\beta_2 w \equiv y$ y $\beta_1 w \equiv x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \delta x &\equiv \gamma_1 \delta \beta_1 w \\
&\equiv \delta_0 w \\
&\equiv \gamma_2 f_2 \beta_2 w \\
&\equiv \gamma_2 f_2 y \\
&\equiv \gamma_2 \psi z \\
&\equiv \gamma_1 q_1 z
\end{aligned}$$

y por consiguiente $\delta x \equiv q_1 z$ pues γ_1 es un monomorfismo. Por lo tanto queda demostrada la afirmación 2. Más aún, el anterior argumento tambień demuestra que δx es independiente de la elección del elemento $y \in^* A_2$ y por tanto sólo depende de x.

Finalmente, veamos que la sucesión 2.10 es exacta en $ker(f_3)$ y $coker(f_1)$.
Para probar que $\delta\overline{\pi} = 0$ basta demostrar que para cada $w \in^* ker(f_2)$ se verifica que $\delta\overline{\pi}w = 0$.
Sea $w \in^* ker(f_2)$ entonces $x := \overline{\pi}w \in^* ker(f_3)$ satisface que $j_3 x = j_3\overline{\pi}w = \pi j_2 w$. Luego podemos tomar $y = j_2 w$ en la descripción del efecto del morfismo δ y así obtenemos que $f_2 y = f_2 j_2 w \equiv 0$, es decir, $z = 0$ en el diagrama 2.11 y por consiguiente $0 = q_1 0 \equiv \delta x \equiv \delta\overline{\pi}w$, esto es, $\delta\overline{\pi} = 0$. Por lo tanto $im(\pi) \subset ker(\delta)$.
Resta probar que $ker(\delta) \subset im(\pi)$. Para ello sea $x \in^* ker(f_3)$ tal que $\delta x \equiv 0$, esto significa que en el diagrama 2.11, $q_1 z \equiv 0$. Por la exactitud de la primera columna del diagrama 2.9, existe $t \in^* A_1$ tal que $f_1 t \equiv z$, lo cual implica que $f_2 \varphi t \equiv \psi f_1 t \equiv \psi z \equiv f_2 y$.
Sea $u := y - \varphi t$, entonces $\pi u \equiv \pi y = j_3 x$ y $f_2 u \equiv 0$. No obstante por definición de j_2 existe $x_0 \in^* ker(f_2)$ tal que $j_2 x_0 \equiv u$, es decir, $j_3\overline{\pi}x_0 = \pi j_2 x_0 = \pi u \equiv j_3 x$ y como j_3 es un monomorfismo se sigue $\overline{\pi}x_0 \equiv x$, esto es, $x \in^* im(\pi)$.

De manera análoga se prueba que $im(\delta) = ker(\overline{\psi})$.
Por lo tanto la sucesión 2.10 es exacta. □

2.6.3. El teorema de Inmersión completa

Con lo desarrollado hasta el momento hemos observado que una categoría abeliana posee bastantes propiedades interesantes y teoremas muy parecidos a los que se tenían en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$. Si deseamos averiguar más acerca de esta estrecha relación, el teorema de Inmersión completa es la clave. Desafortunadamente su demostración se escapa de los objetivos de esta tesis, sin embargo, considero relevante mencionarlo debido a sus sorprendentes consecuencias.

Teorema 2.54. *(Teorema de Inmersión) Toda categoría abeliana pequeña $\mathscr{A}$ admite una inmersión fiel, covariante y exacta en la categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}\mathfrak{b}$.*

Este teorema fue demostrado independientemente por Lubkin, Heron y Freyd. Su importancia radica en que si deseamos demostrar un enunciado que involucra exactitud y conmutatividad de un diagrama en una categoría abeliana, basta probarlo en la categoría $\mathcal{A}\mathfrak{b}$.
No obstante, debido a que la inmersión en el teorema anterior no es necesariamente plena, surgen problemas con las proposiciones concernientes a la demostración de existencia de morfismos en un diagrama. Este problema fue resuelto años después por B. Mitchell. Su resultado se conoce como el teorema de Inmersión completa.

Teorema 2.55. *(Teorema de Inmersión completa) Toda categoría abeliana pequeña $\mathscr{A}$ admite una inmersión fiel, plena, exacta y covariante en una categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ para algún anillo R.*

Capítulo 3

Funtores aditivos y complejos

A lo largo de este capítulo estudiaremos con más detalle a los funtores aditivos entre categorías abelianas, en particular, a los que preservan propiedades de exactitud. Cabe señalar que de aquí en adelante nuestra referencia principal será [9].

3.1. Funtores aditivos

Anteriormente ya hemos definido el concepto de funtor aditivo entre categorías aditivas, lo que sigue es dilucidar el caso en el que el funtor tenga más de una variable.

Definición 3.1. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor entre categorías abelianas. El funtor t es* ***aditivo*** *si $\forall\, A_k, A'_k \in Ob(\mathscr{A}_k)$ con $k \in \{1, .., n\}$ y $\forall\, \varphi_k, \psi_k \in Hom(A_k, A'_k)$ se cumple que*

$$t(1, ..., \varphi_k + \psi_k, ..., 1) = t(1, ..., \varphi_k, ..., 1) + t(1, ..., \psi_k, ..., 1).$$

De esta definición se sigue que $t(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0$ si cada $\varphi_k = 0$. Además, si $A_k = 0$ para algún $k \in \{1, ..., n\}$ entonces $t(1_{A_1}, .., 1_{A_n}) = 0$ dado que $1_{A_k} = 0$.

Lo que ahora nos interesa es clasificar a los funtores aditivos que preservan exactitud.

Definición 3.2. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Si para sucesiones exactas arbitrarias $A'_k \longrightarrow A_k \longrightarrow A''_k$ en $\mathscr{A}_k$ con $k \in \{1, 2\}$, las sucesiones*

$$t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2)$$

$$t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2')$$

*son exactas, entonces el funtor t se denomina **exacto**.*

Antes de proseguir, acordamos que de aquí en adelante sólo consideraremos un funtor $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ entre categorías abelianas covariante en la primera variable y contravariante en la segunda, a menos que se indique lo contrario.

Veamos algunas caracterizaciones de un funtor exacto.

Teorema 3.3. *Un funtor aditivo $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ entre categorías abelianas, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda, es exacto si y sólo si para toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A_k' \longrightarrow A_k \longrightarrow A_k'' \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}_k$, las sucesiones*

$$0 \longrightarrow t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2') \longrightarrow 0$$

son exactas.

Demostración.
Es evidente la necesidad.

Supongamos ahora las hipótesis y veamos que t es exacto. Para ello sea $A_1' \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{g} A_1''$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}_1$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_1"'] & & A_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "e_2"'] & & A_1'' \arrow[dr, "q"] & & \\
 & I' \arrow[ur, "j"] & & I \arrow[ur, "m_1"] \arrow[dr] & & I'' \arrow[ur, "m_2"] \arrow[dr] & & M \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde (I', j) es el núcleo de f, (e_1, I) es la coimagen de f, (I, m_1) es la imagen de f, (e_2, I'') es la coimagen de g, (I'', m_2) es la imagen de g y finalmente

(q, M) es el conúcleo de g.

Afirmamos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow I' \xrightarrow{j} A_1' \xrightarrow{e_1} I \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{m_1} A_1 \xrightarrow{e_2} I'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I'' \xrightarrow{m_2} A_1'' \xrightarrow{q} M \longrightarrow 0$$

son exactas.
En efecto, para la primera sucesión notar que, por el teorema 2.17, $j = ker(f) = = ker(m_1 e_1) = ker(e_1)$. Además j es monomorfismo y e_1 es epimorfismo. Luego, por la observación 2.34, $0 \longrightarrow I' \xrightarrow{j} A_1' \xrightarrow{e_1} I \longrightarrow 0$ es exacta.

Para la segunda sucesión observar que $im(m_1) = ker(coker(m_1)) = m_1$ pues m_1 es monomorfismo. Más aún, $m_1 = im(f) = ker(g) = ker(m_2 e_2) = = ker(e_2)$. Además m_1 y e_2 son monomorfismo y epimorfismo respectivamente. Por tanto, $0 \longrightarrow I \xrightarrow{m_1} A_1 \xrightarrow{e_2} I'' \longrightarrow 0$ es exacta.

Finalmente, para la última sucesión notar que $q = coker(g) = coker(m_2 e_2) = = coker(m_2)$ (teorema 2.17). Además, m_2 es monomorfismo y q es epimorfismo. Luego, por la observación 2.34, $0 \longrightarrow I'' \xrightarrow{m_2} A_1'' \xrightarrow{q} M \longrightarrow 0$ es exacta.

Aplicando $t(\_, A_2)$ al diagrama 3.1 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & t(A_1', A_2) \arrow[rr, "t(f,1)"] \arrow[dr, "t(e_1,1)"] & & t(A_1, A_2) \arrow[rr, "t(g,1)"] \arrow[dr, "t(e_2,1)"] & & t(A_1'', A_2) \arrow[dr, "t(q,1)"] & & \\
 & t(I', A_2) \arrow[ur, "t(j,1)"] & & t(I, A_2) \arrow[ur, "t(m_1,1)"] \arrow[dr] & & t(I'', A_2) \arrow[ur, "t(m_2,1)"] \arrow[dr] & & t(M, A_2) \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0.
\end{tikzcd}$$

Más aún, por hipótesis, las siguientes sucesiones cortas resultan ser exactas

$$0 \longrightarrow t(I', A_2) \xrightarrow{t(j,1)} t(A_1', A_2) \xrightarrow{t(e_1,1)} t(I, A_2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow t(I, A_2) \xrightarrow{t(m_1,1)} t(A_1, A_2) \xrightarrow{t(e_2,1)} t(I'', A_2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow t(I'', A_2) \xrightarrow{t(m_2,1)} t(A_1'', A_2) \xrightarrow{t(q,1)} t(M, A_2) \longrightarrow 0.$$

Así, $im(t(f,1)) = im(t(m_1,1))$ y $ker(t(g,1)) = ker(t(e_2,1))$.

Finalmente, dado que

$$0 \longrightarrow t(I, A_2) \overset{t(m_1,1)}{\longrightarrow} t(A_1, A_2) \overset{t(e_2,1)}{\longrightarrow} t(I'', A_2) \longrightarrow 0$$

es exacta, conseguimos que $im(t(m_1,1)) = ker(t(e_2,1))$ y por consiguiente $im(t(f,1)) = ker(t(g,1))$, es decir,

$$t(A_1', A_2) \overset{t(f,1)}{\longrightarrow} t(A_1, A_2) \overset{t(g,1)}{\longrightarrow} t(A_1'', A_2)$$

es exacta.
La prueba con respecto a la variable contravariante es similar.
Luego t es exacto. $\square$

En general los funtores aditivos no son exactos, sin embargo pueden preservan la exactitud parcialmente. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.4. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Si para toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A_k' \longrightarrow A_k \longrightarrow A_k'' \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}_k$, se cumple que*

1) Las sucesiones

$$t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2)$$

$$t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2')$$

*son exactas, entonces el funtor se llama **funtor semiexacto**.*

2) Las sucesiones

$$0 \longrightarrow t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2)$$

$$0 \longrightarrow t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2')$$

*son exactas, entonces el funtor se denomina **funtor exacto izquierdo**.*

3) Las sucesiones

$$t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0$$

$$t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2') \longrightarrow 0$$

son exactas, entonces el funtor se llama ***funtor exacto derecho****.*

Una pregunta interesante es si en la definición 3.4 podemos prescindir de que las sucesiones iniciales sean exactas cortas. La respuesta es sí.

Teorema 3.5. *Un funtor aditivo $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ entre categorías abelianas, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda, es exacto derecho si y sólo si para toda sucesión exacta $A_1' \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1'' \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}_1$ y $0 \longrightarrow A_2' \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_2''$ en $\mathscr{A}_2$, las sucesiones*

$$t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0$$

$$t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2') \longrightarrow 0$$

son exactas.

Demostración.
Sea $A_1' \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}_1$ y consideremos el diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_1"'] & & A_1 \arrow[r, "g"] & A_1'' \arrow[r] & 0 \\
 & I' \arrow[ur, "j"] & & I \arrow[ur, "m_1"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

donde (I', j) es el núcleo de f, (e_1, I) es la coimagen de f y (I, m_1) es la imagen de f.

Además, de manera análoga a como se procedió en la demostración del teorema 3.3, tenemos las siguiente sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow I' \xrightarrow{j} A_1' \xrightarrow{e_1} I \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{m_1} A_1 \xrightarrow{g} A_1'' \longrightarrow 0.$$

Aplicando $t(\_, A_2)$ al diagrama 3.2 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & t(A_1', A_2) \arrow[rr, "t(f,1)"] \arrow[dr, "t(e_1,1)"'] & & t(A_1, A_2) \arrow[r, "t(g,1)"] & t(A_1'', A_2) \arrow[r] & 0 \\
& t(I', A_2) \arrow[ur, "t(j,1)"] & & t(I, A_2) \arrow[ur, "t(m_1,1)"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & .
\end{tikzcd}$$

Además, dado que t es un funtor exacto derecho, las siguientes sucesiones resultan ser exactas

$$t(I', A_2) \xrightarrow{t(j,1)} t(A_1', A_2) \xrightarrow{t(e_1,1)} t(I, A_2) \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

$$t(I, A_2) \xrightarrow{t(m_1,1)} t(A_1, A_2) \xrightarrow{t(g,1)} t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

De 3.4 conseguimos que la sucesión

$$t(A_1', A_2) \xrightarrow{t(f,1)} t(A_1, A_2) \xrightarrow{t(g,1)} t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

es exacta en $t(A_1'', A_2)$.

Mientras que de 3.3 obtenemos que $t(e_1, 1)$ es epimorfismo y por consiguiente, haciendo referencia al teorema 2.17, concluimos que

$$\begin{aligned}
im(t(f,1)) &= im(t(m_1,1)t(e_1,1)) \\
&= ker(coker(t(m_1,1)t(e_1,1))) \\
&= ker(coker(t(m_1,1))) \\
&= im(t(m_1,1)).
\end{aligned}$$

No obstante, como 3.4 es exacta, $im(t(m_1, 1)) = ker(t(g, 1))$ y por lo tanto $im(t(f, 1)) = ker(t(g, 1))$.

Luego 3.5 también es exacta en $t(A_1, A_2)$ y por tanto

$$t(A_1', A_2) \xrightarrow{t(f,1)} t(A_1, A_2) \xrightarrow{t(g,1)} t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

es una sucesión exacta.
La prueba en la segunda variable es similar. Luego t es un funtor exacto

derecho.

Es evidente la suficiencia. $\square$

Observación 3.6. *En la demostración del teorema anterior se aplicó el funtor $t(\_, A_2)$ al diagrama 3.2, sin embargo, los funtores $t(\_, A_2')$ y $t(\_, A_2'')$ también pudieron ser utilizados. En el caso de la segunda variable, los funtores $t(A_1, \_)$, $t(A_1', \_)$ y $t(A_1'', \_)$ pueden ser empleados. Por lo tanto, en el teorema 3.5 obtenemos en total seis sucesiones exactas.*

Veamos otra caracterización útil de los funtores aditivos exactos derechos. Para ello necesitamos un poco de teoría previa. Sean A_{kl} $(1 \leq k, l \leq 3)$ objetos de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_{11} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\delta_1"'] & A_{12} \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\eta_1"'] & A_{13} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_1"'] & 0 \\
A_{21} \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] & A_{22} \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & A_{23} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_2"'] & 0 \\
A_{31} \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & A_{32} \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d] & A_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

es conmutativo, además posee filas y columnas exactas. Del diagrama anterior podemos construir la sucesión

$$A_{12} \oplus A_{21} \xrightarrow{\psi} A_{22} \xrightarrow{\varphi} A_{33} \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

donde $\psi = \eta_1\pi_1 + \beta_1\pi_2$ y $\varphi = \xi_2\beta_2 = \gamma_2\eta_2$, mientras que $\pi_1 : A_{12} \oplus A_{21} \longrightarrow A_{12}$ y $\pi_2 : A_{12} \oplus A_{21} \longrightarrow A_{21}$ son las proyecciones canónicas.

Afirmación. La sucesión 3.8 es exacta.
En efecto, dado que β_2 y ξ_2 son epimorfismos, se sigue que φ también lo es.

Además,

$$
\begin{aligned}
\varphi\psi &= \varphi(\eta_1\pi_1 + \beta_1\pi_2)\\
&= \varphi\eta_1\pi_1 + \varphi\beta_1\pi_2\\
&= (\gamma_2\eta_2)\eta_1\pi_1 + (\xi_2\beta_2)\beta_1\pi_2\\
&= \gamma_2(\eta_2\eta_1)\pi_1 + \xi_2(\beta_2\beta_1)\pi_2\\
&= \gamma_2 0\pi_1 + \xi_2 0\pi_2\\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, usando el teorema 2.49 inciso 5, resta probar que para cada $x \in^* A_{22}$ tal que $\varphi x \equiv 0$ existe $y \in^* A_{12} \oplus A_{21}$ tal que $\psi y \equiv x$.

Sea $x \in^* A_{22}$ tal que $0 \equiv \varphi x = (\gamma_2\eta_2)x = \gamma_2(\eta_2 x)$.
Por ser $A_{31} \xrightarrow{\gamma_1} A_{32} \xrightarrow{\gamma_2} A_{33} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, existe $x_{31} \in^* A_{31}$ tal que $\gamma_1 x_{31} \equiv \eta_2 x$ (teorema 2.49 inciso 5). Además, como δ_2 es epimorfismo existe $x_{21} \in^* A_{21}$ tal que $\delta_2 x_{21} \equiv x_{31}$.
Sea $x_{22} := \beta_1 x_{21}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\eta_2 x_{22} &= \eta_2(\beta_1 x_{21})\\
&= (\eta_2\beta_1)x_{21}\\
&= (\gamma_1\delta_2)x_{21}\\
&= \gamma_1(\delta_2 x_{21})\\
&= \gamma_1 x_{31}\\
&= \eta_2 x
\end{aligned}
$$

y por consiguiente $\eta_2(x - x_{22}) \equiv 0$.
Por otro lado, en virtud de que la columna de en medio del diagrama 3.7 es exacta, se sigue que existe $x_{12} \in^* A_{12}$ tal que $\eta_1 x_{12} \equiv (x - x_{22})$.
Finalmente, sea $y := x_{12} + x_{21} \in^* A_{12} \oplus A_{21}$. Notar que

$$
\begin{aligned}
\psi y &= \psi x_{12} + \psi x_{21}\\
&= \eta_1 x_{12} + \beta_1 x_{21}\\
&\equiv (x - x_{22}) + x_{22} = x.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión 3.8 es exacta.

Una vez aclarada esta situación podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea* $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ *un funtor aditivo como en el teorema 3.5. Entonces* t *es exacto derecho si y sólo si para toda sucesión exacta* $A_1' \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1'' \longrightarrow 0$ *en* $\mathscr{A}_1$ *y* $0 \longrightarrow A_2' \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_2''$ *en* $\mathscr{A}_2$*, la sucesión*

$$t(A_1', A_2) \oplus t(A_1, A_2'') \xrightarrow{\varphi} t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2') \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\varphi := t(A_1' \to A_1, A_2 \to A_2'')$.

Demostración.
La observación 3.6 afirma que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
t(A_1', A_2'') \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1, A_2'') \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1'', A_2'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
t(A_1', A_2) \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1, A_2) \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1'', A_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
t(A_1', A_2') \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1, A_2') \arrow[r] \arrow[d] & t(A_1'', A_2') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

posee filas y columnas exactas. Luego el resultado se sigue por la afirmación demostrada anteriormente.

Ahora, dados cualesquiera objetos $A_k \in \mathscr{A}_k$, existen sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{1} A_1 \longrightarrow 0 \text{ y } \longrightarrow A_2 \xrightarrow{1} A_2 \longrightarrow 0.$$

Entonces, por hipótesis, las siguientes sucesiones son exactas

$$t(A_1', A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2) \longrightarrow 0$$
$$t(A_1, A_2'') \longrightarrow t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2') \longrightarrow 0.$$

Finalmente, por el teorema 3.5 obtenemos que t es exacto derecho. $\square$

3.2. Complejos n-graduados

Es bien sabido que en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ existen los llamados bicomplejos o complejos dobles. El objetivo de esta sección es definir la noción de colección

n-graduada y finalmente enunciar el concepto de complejo n-graduado, el cual será una generalización del complejo de cadenas que teníamos en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$.

Antes, acordamos la siguiente notación: los elementos del grupo abeliano $\mathbb{Z}^n$ serán denotados por variables con una barra encima, esto es, $\overline{i} = (i_1, ..., i_n)$, $\overline{j} = (j_1, ..., j_n)$, $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$, etc. $\overline{e}_k := (0, ..., e_k = 1, ..., 0)$ con $k \in \{1, 2, ..., n\}$, mientras que el **valor total entero** de $\overline{i}$ está definido por $\sigma(\overline{i}) := i_1 + i_2 + ... + i_n$. Además, $\overline{i} \leq \overline{j}$ si y sólo si $i_k \leq j_k$ para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, y de manera similar se define $\overline{i} \geq \overline{j}$, $\overline{i} < \overline{j}$ y $\overline{i} > \overline{j}$. Con $\overline{i} \nleq \overline{j}$ se denota la negación de $\overline{i} \leq \overline{j}$.

Definición 3.8. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.*

1) Una ***colección n-graduada*** *M en $\mathscr{A}$ es una colección de objetos $M_{\overline{i}}$, donde $\overline{i} \in \mathbb{Z}^n$. En símbolos, $M := (M_{\overline{i}})$.*

2) Una ***subcolección*** *M' de M es una colección n-graduada $M' := (M'_{\overline{i}})$ tal que $M'_{\overline{i}}$ es un subobjeto de $M_{\overline{i}}$ para cada $\overline{i} \in \mathbb{Z}^n$. En símbolos, $M' \subset M$.*

3) Si $M' \subset M$ como colecciones n-gradudas, entonces el objeto cociente $(M/M')_{\overline{i}} := M_{\overline{i}}/M'_{\overline{i}}$ está definido $\forall\, \overline{i} \in \mathbb{Z}^n$. Así, $M/M' := ((M/M')_{\overline{i}})$ se denomina ***colección cociente*** *de M y M'.*

4) Una colección n-graduada M se dice que es ***positiva*** *(respectivamente* ***negativa****) si $M_{\overline{i}} = 0$ siempre que $0 \nleq \overline{i}$ (repectivamente $\overline{i} \nleq 0$).*

5) Sean M y M' dos colecciones n-graduadas en $\mathscr{A}$. Un ***homomorfismo*** *$f : M \longrightarrow M'$* ***de colecciones n-graduadas*** *en $\mathscr{A}$* ***de grado*** *$\overline{p}$ es una colección de homomorfismos $f := \{f_{\overline{i}} : M_{\overline{i}} \longrightarrow M'_{\overline{i}+\overline{p}}\}$ donde $\overline{i}, \overline{p} \in \mathbb{Z}^n$. La composición de dichos homomorfismos se realiza componente a componente.*

Notar que la condición $0 \nleq \overline{i}$ (repectivamente $\overline{i} \nleq 0$) no equivale a la expresión $\overline{i} < 0$ (respectivamente $0 < \overline{i}$).

Ejemplo 3.9. Veamos algunos ejemplos sencillos en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$.

1. Si (C, d) es un complejo de cadenas, entonces $d : C \longrightarrow C$ dada por $d = (d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de colecciones uno-graduadas de grado -1.

2. Si $f : C \longrightarrow C'$ es un morfismo de complejos de cadenas, entonces $f = (f_n : C_n \longrightarrow C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de colecciones uno-graduadas de grado 0.

3. Si $f, g : C \longrightarrow C'$ son morfismos de complejos de cadenas homotópicas, entonces una homotopía $s = (s_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de colecciones uno-graduadas de grado 1.

4. Sea (M, d', d'') un bicomplejo, entonces $d', d'' : M \longrightarrow M$ son morfismos de colecciones dos-graduadas de grado $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ respectivamente.

Dado un morfismo $f : M \longrightarrow M'$ de colecciones n-graduadas de grado $\overline{p}$ podemos definir su imagen, núcleo, coimagen y conúcleo. Específicamente tenemos que

$$\begin{aligned} im(f) &:= (im(f_{\overline{i}-\overline{p}})) \\ ker(f) &:= (ker(f_{\overline{i}})) \\ coim(f) &:= M/ker(f) \\ coker(f) &:= M'/im(f). \end{aligned}$$

Recordar que una colección uno-graduada es dotada con la estructura de complejo de cadenas introduciendo un morfismo diferenciación de grado -1. Para el caso de una colección n-graduada se espera que sean n morfismos de este tipo con su respectivo grado.

Definición 3.10. *Sea $C = (C_{\overline{i}})$ una colección n-graduada en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.*

*1) Un **conjunto de diferenciaciones** $\partial := \{\partial^{(k)}\}$ sobre C es una colección de n homomorfismos $\partial^{(k)} : C \longrightarrow C$ de grado $-\overline{e_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ que anticonmutan, esto es, para todo $1 \leq k, k' \leq n$,*

$$\partial^{(k)}\partial^{(k')} + \partial^{(k')}\partial^{(k)} = 0 \text{ y } \partial^{(k)}\partial^{(k)} = 0.$$

*2) Una colección n-graduada en $\mathscr{A}$ junto con un conjunto de diferenciaciones ∂ se denomina **complejo n-graduado** en $\mathscr{A}$. En símbolos, $C := (C_{\overline{i}}, \partial^{(k)})$ o simplemente $C := (C_{\overline{i}}, \partial)$.*

*3) Sean $C = (C_{\bar{i}}, \partial)$ y $C' = (C'_{\bar{i}}, \partial')$ dos complejos n-graduados. Un morfismo $f : C \longrightarrow C'$ es un **homomorfismo de complejos n-graduados de grado** $\overline{p}$ si $f\partial^{(k)} = (-1)^{\sigma(\overline{p})}\partial'^{(k)}f$ para todo $1 \leq k \leq n$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{(i_1,i_2)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d, "\partial^{(1)}"'] & C_{(i_1,i_2-1)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d, "\partial^{(1)}"] & C_{(i_1,i_2-2)} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{(1)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{(i_1-1,i_2)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d, "\partial^{(1)}"'] & C_{(i_1-1,i_2-1)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d, "\partial^{(1)}"] & C_{(i_1-1,i_2-2)} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{(1)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{(i_1-2,i_2)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d] & C_{(i_1-2,i_2-1)} \arrow[r, "\partial^{(2)}"] \arrow[d] & C_{(i_1-2,i_2-2)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & {} &
\end{tikzcd}$$

Figura 1

En la figura 1 se observa un fragmento de un complejo bigraduado en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.
Cabe señalar que los complejos n-graduados en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y los homomorfismos de grado 0 forman una categoría, la cual denotaremos por $\mathfrak{Comp}^n_{\mathscr{A}}$ o simplemente $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$ en el caso $n = 1$.

3.3. Los funtores $\mathcal{Z}_n$, $\mathcal{Z}'_n$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}'_n$ y $\mathcal{H}_n$

En la sección 2.1 ya hemos definido los funtores $\mathscr{K}er$ y $\mathscr{C}oker$, lo que haremos en esta parte será modificarlos ligeramente para posteriormente definir el funtor de homología.

Primero construyamos el funtor $\mathcal{Z}_n$.

Sea $\mathcal{Z}_n : \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathscr{A}$ definido de la siguiente manera:

En objetos: Sea $(A,\partial) \in Ob(\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}})$, entonces $\mathcal{Z}_n((A,\partial)) := ker(\partial_n)$, donde $ker(\partial_n) \in Ob(\mathscr{A})$.
En morfismos: Sea $f : (A,\partial) \longrightarrow (B,\partial')$ un $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$-morfismo y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} ker(\partial_n) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, dashed, "\mathcal{Z}_n(f)"'] & A_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ ker(\partial'_n) \arrow[r, "j'_n"'] & B_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & B_{n-1}. \end{tikzcd}$$

Notar que

$$\begin{aligned} \partial'_n(f_n j_n) &= (\partial'_n f_n) j_n \\ &= (f_{n-1}\partial_n) j_n \\ &= f_{n-1}(\partial_n j_n) \\ &= f_{n-1} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y como $(ker(\partial'_n), j'_n)$ es el núcleo de ∂'_n, existe un único $\mathscr{A}$-morfismo

$$\mathcal{Z}_n(f) : \mathcal{Z}_n((A,\partial)) \longrightarrow \mathcal{Z}_n((B,\partial'))$$

tal que $j'_n \mathcal{Z}_n(f) = f_n j_n$.

La unicidad del morfismo $\mathcal{Z}_n(f)$ nos garantiza que en efecto $\mathcal{Z}_n$ es un funtor. $\mathcal{Z}_n((A,\partial))$ se llama **objeto de ciclos n-dimensionales del complejo** (A,∂).

Veamos ahora que $\mathcal{Z}_n$ es un funtor aditivo.

Sean $f, g : (A,\partial) \longrightarrow (B,\partial')$ dos $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$-morfismos. Por lo anterior sabemos que $j'_n\mathcal{Z}_n(f) = f_n j_n$ y $j'_n\mathcal{Z}_n(g) = g_n j_n$. Por otro lado, notar que

$$\begin{aligned} j'_n(\mathcal{Z}_n(f) + \mathcal{Z}_n(g)) &= j'_n\mathcal{Z}_n(f) + j'_n\mathcal{Z}_n(g) \\ &= f_n j_n + g_n j_n \\ &= (f_n + g_n) j_n. \end{aligned}$$

Por la unicidad del morfismo $\mathcal{Z}_n(f+g)$ tal que $j'_n\mathcal{Z}_n(f+g) = (f_n+g_n)j_n$, concluimos que $\mathcal{Z}_n(f+g) = \mathcal{Z}_n(f) + \mathcal{Z}_n(g)$, esto es, $\mathcal{Z}_n$ es un funtor aditivo.

De manera muy similar se define el funtor $\mathscr{Z}'_n$ y también se demuestra que es aditivo, la única diferencia será que $\mathscr{Z}'_n((A,\partial)) := coker(\partial_{n+1})$.

Ahora, veamos la construcción del funtor $\mathcal{B}_n$, mientras que $\mathcal{B}'_n$ se definirá de manera análoga.

Sea $\mathcal{B}_n : \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathscr{A}$ definido de la siguiente manera:
En objetos: Sea $(A,\partial) \in Ob(\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}})$, entonces $\mathcal{B}_n((A,\partial)) := im(\partial_{n+1})$ donde $im(\partial_{n+1}) \in Ob(\mathscr{A})$.
En morfismos: Sea $f : (A,\partial) \longrightarrow (B,\partial')$ un $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$-morfismo y consideremos las factorizaciones de ∂_{n+1} y ∂'_{n+1} a través de sus imágenes

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "q_{n+1}"'] & & A_n & B_{n+1} \arrow[rr, "\partial'_{n+1}"] \arrow[dr, "q'_{n+1}"'] & & B_n \\
& im(\partial_{n+1}) \arrow[ur, "\rho_{n+1}"'] & & & im(\partial'_{n+1}) \arrow[ur, "\rho'_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "q_{n+1}"] \arrow[dd, "f_{n+1}"'] & & A_n \arrow[r, "t_{n+1}"] \arrow[dd, "f_n"] & coker(\partial_{n+1}) \arrow[dd, "\mathscr{Z}'_n(f)"] \\
& im(\partial_{n+1}) \arrow[ur, "\rho_{n+1}"] & & \\
B_{n+1} \arrow[rr, "\partial'_{n+1}"] \arrow[dr, "q'_{n+1}"'] & & B_n \arrow[r, "t'_{n+1}"] & coker(\partial'_{n+1}) \\
& im(\partial'_{n+1}) \arrow[ur, "\rho'_{n+1}"'] & &
\end{tikzcd}. \tag{3.9}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
t'_{n+1}(f_n\rho_{n+1}) &= (t'_{n+1}f_n)\rho_{n+1} \\
&= (\mathscr{Z}'_n(f)t_{n+1})\rho_{n+1} \\
&= \mathscr{Z}'_n(f)(t_{n+1}\rho_{n+1}) \\
&= \mathscr{Z}'_n(f)0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

y como $im(\partial'_{n+1}) = ker(t'_{n+1})$, existe un único $\mathscr{A}$-morfismo

$$\mathcal{B}_n(f) : \mathcal{B}_n((A,\partial)) \longrightarrow \mathcal{B}_n((B,\partial'))$$

tal que $f_n\rho_{n+1} = \rho'_{n+1}\mathcal{B}_n(f)$ y $\mathcal{B}_n(f)q_{n+1} = q'_{n+1}f_{n+1}$.

Nuevamente la unicidad del morfismo $\mathcal{B}_n(f)$ nos asegura que $\mathcal{B}_n$ preserva identidades y composiciones. Además, $\mathcal{B}_n$ también resulta ser un funtor aditivo. $\mathcal{B}_n((A,\partial))$ se llama **objeto de fronteras n-dimensionales del complejo** (A,∂). Cabe mencionar que para el funtor $\mathcal{B}'_n$, tenemos que $\mathcal{B}'_n((A,\partial)) := coim(\partial_n)$.

Finalmente veamos la construcción del funtor $\mathcal{H}_n$.
Sea $f : (A,\partial) \longrightarrow (B,\partial')$ un $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$-morfismo, probaremos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_n((A,\partial)) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\mathcal{B}_n(f)"'] & \mathcal{Z}_n((A,\partial)) \arrow[d, "\mathcal{Z}_n(f)"] \\
\mathcal{B}_n((B,\partial')) \arrow[r, "\varphi'_n"'] & \mathcal{Z}_n((B,\partial')),
\end{tikzcd}$$

donde φ_n y φ'_n son monomorfismos (usamos el hecho de que $\partial\partial = 0$ y $\partial'\partial' = 0$.) En efecto:
Usando la misma notación del diagrama 3.9, notar que tanto ∂_{n+1} como ∂'_{n+1} admiten las siguientes factorizaciones

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[rrr, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "q_{n+1}"'] & & & A_n \\
& im(\partial_{n+1}) \arrow[r, "\varphi_n"'] & ker(\partial_n) \arrow[ur, "j_n"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B_{n+1} \arrow[rrr, "\partial'_{n+1}"] \arrow[dr, "q'_{n+1}"'] & & & B_n \\
& im(\partial'_{n+1}) \arrow[r, "\varphi'_n"'] & ker(\partial'_n) \arrow[ur, "j'_n"'] &
\end{tikzcd}$$

y por tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[rrr, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "q_{n+1}"'] \arrow[ddd, "f_{n+1}"'] & & & A_n \arrow[ddd, "f_n"] \\
& im(\partial_{n+1}) \arrow[r, "\varphi_n"'] & ker(\partial_n) \arrow[ur, "j_n"'] & \\
& & & \\
B_{n+1} \arrow[rrr, "\partial'_{n+1}"] \arrow[dr, "q'_{n+1}"'] & & & B_n \\
& im(\partial'_{n+1}) \arrow[r, "\varphi'_n"'] & ker(\partial'_n) \arrow[ur, "j'_n"'] &
\end{tikzcd},$$

es decir,

$$j'_n\varphi'_n q'_{n+1} f_{n+1} = f_n j_n \varphi_n q_{n+1}. \qquad (1)$$

No obstante, los morfismos $\mathcal{Z}_n(f) : ker(\partial_n) \longrightarrow ker(\partial'_n)$ y $\mathcal{B}_n(f) : im(\partial_{n+1}) \longrightarrow im(\partial'_{n+1})$ satisfacen que

$$j'_n\mathcal{Z}_n(f) = f_n j_n \text{ y } q'_{n+1}f_{n+1} = \mathcal{B}_n(f)q_{n+1}.$$

Usando (1) y las igualdades anteriores obtenemos que

$$j'_n\varphi'_n\mathcal{B}_n(f)q_{n+1} = j'_n\mathcal{Z}_n(f)\varphi_n q_{n+1}.$$

En virtud de que j'_n y q_{n+1} son monomorfismo y epimorfismo respectivamente, obtenemos lo deseado, esto es, $\varphi'_n\mathcal{B}_n(f) = \mathcal{Z}_n(f)\varphi_n$.

Finalmente, sea $\mathcal{H}_n : \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathscr{A}$ definido como:
En objetos: Sea $(A, \partial) \in Ob(\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}})$, entonces

$$\mathcal{H}_n((A, \partial)) := \mathcal{Z}_n((A, \partial))/\mathcal{B}_n((A, \partial)),$$

donde $\mathcal{Z}_n((A, \partial))/\mathcal{B}_n((A, \partial))$ es el conúcleo del monomorfismo $\mathcal{B}_n((A, \partial)) \longrightarrow \mathcal{Z}_n((A, \partial))$.
En morfismos: Sea $f : (A, \partial) \longrightarrow (B, \partial')$ un $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$-morfismo, entonces $\mathcal{H}_n(f) : \mathcal{H}_n((A, \partial)) \longrightarrow \mathcal{H}_n((B, \partial'))$ se define como el único $\mathscr{A}$-morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_n((A, \partial)) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\mathcal{B}_n(f)"'] & \mathcal{Z}_n((A, \partial)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{Z}_n(f)"] & \mathcal{H}_n((A, \partial)) \arrow[d, dashed, "\mathcal{H}_n(f)"] \\
\mathcal{B}_n((B, \partial')) \arrow[r, "\varphi'_n"'] & \mathcal{Z}_n((B, \partial')) \arrow[r] & \mathcal{H}_n((B, \partial')).
\end{tikzcd}$$

Nuevamente, la unicidad del morfismo $\mathcal{H}_n(f)$ garantiza que $\mathcal{H}_n$ es efectivamente un funtor. Además $\mathcal{H}_n$ resulta ser un funtor aditivo pues tanto $\mathcal{Z}_n$ como $\mathcal{B}_n$ lo son. $\mathcal{H}_n((A,\partial))$ se denomina **n-ésimo objeto de homología del complejo** (A,∂).

Hasta el momento los anteriores funtores sólo se han definido sobre la categoría $\mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}$. ¿Será posible definirlos en general sobre la categoría $\mathfrak{Comp}^n_{\mathscr{A}}$?, es decir, ¿podemos calcular el n-ésimo objeto de homología de un complejo n-graduado? La respuesta es sí.
Recordar que en el caso de un bi-complejo en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, se definía un complejo de cadenas denominado complejo total y por tanto la homología del primero quedaba en términos del segundo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.11. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $C = (C_{\bar{i}}, \partial)$ un complejo n-graduado. Supongamos que existen los objetos*

$$\widetilde{C}_j := \coprod_{\sigma(\bar{i})=j} C_{\bar{i}} \tag{3.10}$$

$\forall\, j \in \mathbb{Z}$. Entonces el objeto $\widetilde{C}_j$ define un complejo uno-graduado $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_j, \widetilde{\partial})$, donde $\widetilde{\partial}$ es la diferenciación inducida por

$$\widetilde{\partial}_{\bar{j}} := \partial^{(1)}_{\bar{j}} + \ldots + \partial^{(n)}_{\bar{j}},$$

*es decir, $\widetilde{\partial} = \{\widetilde{\partial}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ donde $\widetilde{\partial}_j = [\widetilde{\partial}_{\bar{j}}]$. El complejo $\widetilde{C}$ se llama **el complejo asociado (uno-graduado) del complejo n-graduado** C.*

Observaciones 3.12. *1) Supongamos que $\sigma(\bar{i}) = i$. Dado que $\partial^{(k)}_{\bar{i}} : C_{\bar{i}} \longrightarrow C_{\bar{i}-\overline{e_k}}$ para cada $k \in \{1,2,...,n\}$, obtenemos que $\widetilde{\partial}_{\bar{i}} : C_{\bar{i}} \longrightarrow \coprod_{\sigma(\bar{i})=i-1} C_{\bar{i}}$ y por lo tanto, por la propiedad universal de la suma, existe un único morfismo $[\widetilde{\partial}_{\bar{i}}] : \coprod_{\sigma(\bar{i})=i} C_{\bar{i}} \longrightarrow \coprod_{\sigma(\bar{i})=i-1} C_{\bar{i}}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\sigma(\bar{i})=i-1} C_{\bar{i}} & \coprod_{\sigma(\bar{i})=i} C_{\bar{i}} \arrow[l, dashed, "{[\widetilde{\partial}_{\bar{i}}]}"'] \\
 & C_{\bar{i}} \arrow[ul, "\widetilde{\partial}_{\bar{i}}"] \arrow[u, "\mu_i"']
\end{tikzcd}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. Así, $\widetilde{\partial}_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$.

2) Abusando un poco de notación, $\widetilde{\partial} = \partial^{(1)} + ... + \partial^{(n)}$.

3) La propiedad de anticonmutar nos asegura que $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_j, \widetilde{\partial})$ es un complejo uno-graduado. En efecto:
Notar que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\partial}\widetilde{\partial} &= (\partial^{(1)} + ... + \partial^{(n)})(\partial^{(1)} + ... + \partial^{(n)}) \\
&= \sum \partial^{(k)}\partial^{(k)} + \sum(\partial^{(k)}\partial^{(k')} + \partial^{(k')}\partial^{(k)}) \\
&= 0 \quad \textit{(pues cada término es igual a cero)}
\end{aligned}$$

Es importante recalcar que 3.10 no existe en todas las categorías abelianas, por ejemplo en la categoría abeliana de los grupos abelianos finitos. Sin embargo, cuando el complejo n-graduado es positivo o negativo, 3.10 siempre existe pues es una suma finita de objetos (si $n = 2$ y $\sigma(\bar{i}) = m$ entonces 3.10 posee $m + 1$ objetos) y por consiguiente coincide con $\displaystyle\prod_{\sigma(\bar{i})=j} C_{\bar{i}}$ y por lo tanto $\widetilde{C}_j := \displaystyle\bigoplus_{\sigma(\bar{i})=j} C_{\bar{i}}$. En el caso que la categoría abeliana admita sumas arbitrarias, por ejemplo la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, cualquier complejo n-graduado posee un complejo asociado. La figura 2 de la siguiente página nos muestra el complejo asociado de un complejo bi-graduado, en este caso, $\widetilde{C}_n := \displaystyle\coprod_{p+q=n} C_{p,q}$.

Así pues, la construcción del complejo asociado queda en términos únicamente del complejo n-graduado dado. Por lo tanto, si C es un complejo n-graduado, $\mathcal{Z}_n(C) := \mathcal{Z}_n(\widetilde{C})$, $\mathcal{Z}'_n(C) := \mathcal{Z}'_n(\widetilde{C})$, $\mathcal{B}_n(C) := \mathcal{B}_n(\widetilde{C})$, $\mathcal{B}'_n(C) := \mathcal{B}'_n(\widetilde{C})$ y $\mathcal{H}_n(C) := \mathcal{H}_n(\widetilde{C})$, donde $\widetilde{C}$ es el complejo asociado de C.

Definición 3.13. *Un complejo n-graduado C se dice **acíclico** si admite un complejo asociado y $\mathcal{H}_n(C) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Consideremos el caso $n = 1$. Dos morfismos $f, g : (C, \partial) \longrightarrow (C', \partial')$ de complejos uno-graduados de grado 0 se dicen ***homotópicos*** si existe un homomorfismo $D : (C, \partial) \longrightarrow (C', \partial')$ de grado 1 (llamado homotopía) tal que $f_n - g_n = \partial'_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ o simplemente, si no hay confusión con los subíndices, $f - g = \partial' D + D\partial$. En símbolos $f \simeq g$ o $D : f \simeq g$.

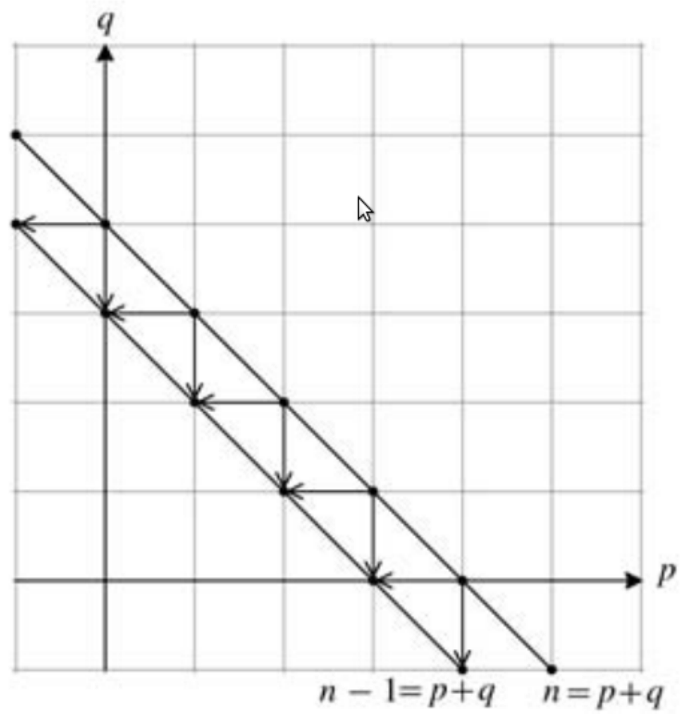

Figura 2

Resulta importante mencionar que si f y g son morfismos homotópicos entonces $\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g)$.
La siguiente definición muestra que en el caso $n > 1$ no sólo tendremos una homotopía sino n en total.

Definición 3.14. *Sean $f, g : (C, \partial) \longrightarrow (C', \partial')$ homomorfismos de complejos n-graduados de grado 0, f es* ***homotópica*** *a g (en símbolos $f \simeq g$) si existen un conjunto de n homomorfismos de colecciones n-graduadas $D^{(k)} : (C, \partial) \longrightarrow (C', \partial')$ (llamadas homotopías) de grado $\overline{e_k}$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} D^{(k)}\partial^{(k)} + \partial'^{(k)}D^{(k)} = f - g$$

$$D^{(k)}\partial^{(k')} + \partial'^{(k')}D^{(k)} = 0 \quad (k \neq k').$$

Por último, homomorfismos homotópicos $f, g : C \longrightarrow C'$ inducen homomorfismos homotópicos en los complejos asociados $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}'$ y por tanto $\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g)$. Además, dos complejos C y C' se dicen ***homotópicos*** si existen morfismos $f : C \longrightarrow C'$ y $g : C' \longrightarrow C$ tales que $gf \simeq 1_C$ y $fg \simeq 1_{C'}$.

3.4. Funtores de complejos

Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ categorías abelianas y (C, ∂) un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}$. Además, consideremos $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor aditivo. Sabemos que $(F(C), F(\partial))$ resulta ser un complejo uno-graduado en $\mathscr{B}$.

Por otro lado, consideremos $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas, $C^{(1)} = (C^{(1)}, \partial^{(1)})$ y $C^{(2)} = (C^{(2)}, \partial^{(2)})$ complejos uno-graduados en $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. ¿Habrá una manera de definir $t(C^{(1)}, C^{(2)})$ de tal forma que resulte ser un complejo bi-graduado en $\mathscr{A}$? Lo que haremos en esta sección será darle una respuesta a la anterior pregunta, y para ello iniciamos con un ejemplo en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$.
Sea $\otimes : {}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathcal{A}\mathfrak{b}$ el bifuntor producto tensorial, el cual es un funtor aditivo y covariante en ambas variables. Además, sean $C^{(1)} = (C^{(1)}, \partial^{(1)})$ y $C^{(2)} = (C^{(2)}, \partial^{(2)})$ complejos uno-graduados en ${}_{\mathfrak{M}}\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ respectivamente. Entonces

$$T_{\bar{i}} := C^{(1)}_{i_1} \otimes C^{(2)}_{i_2},$$

donde $\bar{i} = (i_1, i_2)$, forma una colección bi-graduada $T = (T_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \mathbb{Z}^2}$. El objetivo es extender dicha colección a un complejo bi-graduado usando las diferenciaciones $\partial^{(1)}$ y $\partial^{(2)}$.
La manera más inmediata de definir el conjunto de diferenciaciones ∂ de T es

$$\partial^{(1)}_{\bar{i}} := \partial^{(1)}_{i_1} \otimes 1 \text{ y } \partial^{(2)}_{\bar{i}} := 1 \otimes \partial^{(2)}_{i_2}.$$

Estos morfismos resultan ser de grados $-\overline{e_1}$ y $-\overline{e_2}$ respectivamente, asimismo $\partial^{(1)}\partial^{(1)} = 0$ y $\partial^{(2)}\partial^{(2)} = 0$. Sin embargo, no anticonmutan. La solución es introducir una ligera modificación en el segundo morfismo:

$$\partial^{(1)}_{\bar{i}} := \partial^{(1)}_{i_1} \otimes 1 \text{ y } \partial^{(2)}_{\bar{i}} := (-1)^{i_1} 1 \otimes \partial^{(2)}_{i_2}.$$

Así obtenemos que si $\overline{i} = (i_1, i_2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\partial^{(1)}_{\overline{i}-\overline{e_2}}\partial^{(2)}_{\overline{i}} + \partial^{(2)}_{\overline{i}-\overline{e_1}}\partial^{(1)}_{\overline{i}} &= (-1)^{i_1}(\partial^{(1)}_{i_1}\otimes 1)(1\otimes\partial^{(2)}_{i_2}) + (-1)^{i_1-1}(1\otimes\partial^{(2)}_{i_2})(\partial^{(1)}_{i_1}\otimes 1) \\
&= (-1)^{i_1}(\partial^{(1)}_{i_1}\otimes\partial^{(2)}_{i_2} - \partial^{(1)}_{i_1}\otimes\partial^{(2)}_{i_2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(T, \partial^{(1)}, \partial^{(2)})$ forma un bi-complejo en $\mathcal{A}\mathfrak{b}$. Todo lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3.15. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas, covariante en alguna variable y contravariante en las demás.*

1) Sea $A^{(k)}$ una colección uno-graduada en $\mathscr{A}_k$ $(1 \leq k \leq n)$, entonces definimos la colección n-graduada $t(A^{(1)}, ..., A^{(n)})$ dada por

$$t_{\overline{i}}(A^{(1)}, ..., A^{(n)}) := t(A^{(1)}_{\varepsilon_1 i_1}, ..., A^{(n)}_{\varepsilon_n i_n}),$$

donde $\overline{i} = (i_1, ..., i_n)$, $\varepsilon_k = 1$ si t es covariante en la k-ésima variable y $\varepsilon_k = -1$ si t es contravariante en la k-ésima variable.

2) Si $B^{(k)}$ es una colección uno-graduada en $\mathscr{A}_k$ con $k \in \{1, ..., n\}$ y $f^{(k)} : A^{(k)} \longrightarrow B^{(k)}$ (si la k-ésima variable es covariante) o $f^{(k)} : B^{(k)} \longrightarrow A^{(k)}$ (si la k-ésima variable es contravariante) son homomorfismos de grado p_k, entonces $t(f^{(1)}, ..., f^{(n)})$ es el homomorfismo de colecciones n-graduadas de grado $\overline{p} = (p_1, ..., p_n)$,

$$t(f^{(1)}, ..., f^{(n)}) : t(A^{(1)}, ..., A^{(n)}) \longrightarrow t(B^{(1)}, ..., B^{(n)}),$$

definida como

$$t_{\overline{i}}(f^{(1)}, ..., f^{(n)}) := (-1)^{\varepsilon} t(f^{(1)}_{l_1}, ..., f^{(n)}_{l_n}),$$

donde $\varepsilon := -\sum_{j<k} i_j p_k$, $l_k = i_k$ si la k-ésima variable es covariante y $l_k = -i_k + p_k$ si la k-ésima variable es contravariante.

Si $g^{(k)} : B^{(k)} \longrightarrow C^{(k)}$ son homomorfismos de grado q_k y $h^{(k)} = g^{(k)} f^{(k)}$, entonces

$$t(h^{(1)}, ..., h^{(n)}) = (-1)^{\eta} t(g^{(1)}, ..., g^{(n)}) t(f^{(1)}, ..., f^{(n)}),$$

donde $\eta = \sum_{j<k} p_j q_k$.

Finalmente, la siguiente definición responde, de manera más general y concreta, nuestra pregunta inicial.

Definición 3.16. *Si $t : \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor aditivo entre categorías abelianas y $C^{(k)} := (C^{(k)}_{\bar{i}}, \partial^{(k)})$ son complejos uno-graduados en $\mathscr{A}_k$ $(1 \leq k \leq n)$, entonces $t(C^{(1)}, ..., C^{(n)})$ denota al complejo n-graduado*

$$t(C^{(1)}, ..., C^{(n)}) := (t_{\bar{i}}(C^{(1)}, ..., C^{(n)}), \partial^{(k)}),$$

donde, abusando un poco de notación, $\partial^{(k)} := t(1, .., \partial^{(k)}, ..., 1)$.

Observación 3.17. *Dado que el funtor t es aditivo, el conjunto de diferenciaciones $\{\partial^{(1)}, ..., \partial^{(n)}\}$ verifica que*

$$\begin{aligned}
\partial^{(k)}\partial^{(k)} &= t(1, .., \partial^{(k)}, ..., 1)t(1, .., \partial^{(k)}, ..., 1) \\
&= t(1, .., \partial^{(k)}\partial^{(k)}, ..., 1) \\
&= t(1, ..., 0, ..., 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial^{(k)}\partial^{(k')} + \partial^{(k')}\partial^{(k)} &= t(1, .., \partial^{(k)}, ..., 1)t(1, .., \partial^{(k')}, ..., 1) + \\
&\quad + t(1, .., \partial^{(k')}, ..., 1)t(1, .., \partial^{(k)}, ..., 1) \\
&= t(1, .., \partial^{(k)}\partial^{(k')} + \partial^{(k')}\partial^{(k)}, ..., 1) \\
&= t(1, ..., 0, ..., 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto es, $t(C^{(1)}, ..., C^{(n)}) := (t_{\bar{i}}(C^{(1)}, ..., C^{(n)}), \partial^{(k)})$ es en efecto un complejo n-graduado.

De esta manera, el funtor aditivo $t : \mathscr{A}_1 \times ... \times \mathscr{A}_n \longrightarrow \mathscr{A}$ es extendido a un funtor

$$t : \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}_1} \times ... \times \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}_n} \longrightarrow \mathfrak{Comp}^n_{\mathscr{A}}.$$

Si la categoría abeliana $\mathscr{A}$ posee sumas arbitrarias, podemos construir el complejo asociado uno-graduado y así obtener un funtor

$$t : \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}_1} \times ... \times \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}_n} \longrightarrow \mathfrak{Comp}_{\mathscr{A}}.$$

Por último, si $D^{(k)} : f^{(k)} \simeq g^{(k)}$ son homotopías ($1 \leq k \leq n$) entonces, abusando un poco de notación, $D^{(k)} := t(1, ..., D^{(k)}, ..., 1)$ define una homotopía $D : t(f^{(1)}, ..., f^{(n)}) \simeq t(g^{(1)}, ..., g^{(n)})$.

Capítulo 4

Funtores derivados en categorías abelianas

Los funtores derivados aparecen cuando se estudia el efecto de los funtores aditivos en la homología de los complejos uno-graduados más simples: las resoluciones proyectiva e inyectiva de un objeto dado. Además, las resoluciones de sucesiones exactas cortas y el Lema de la Serpiente nos ayudarán a demostrar la existencia de sucesiones exactas largas que involucran a los funtores derivados izquierdos o a los funtores derivados derechos.

4.1. Resoluciones proyectivas e inyectivas

Definición 4.1. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría y $P \in Ob(\mathscr{A})$.*

*1) Se dice que P es **proyectivo** si para cada diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con fila exacta (es decir, f es un epimorfismo), existe $h : P \longrightarrow A$ tal que $fh = g$.

*2) $\mathscr{A}$ **tiene proyectivos** si cada objeto A es un objeto cociente de un objeto proyectivo P, es decir, si existe un epimorfismo $h : P \longrightarrow A$ donde P es un* *objeto proyectivo.*

3) Dualmente, un objeto Q es ***inyectivo*** *si para cada diagrama*

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

con fila exacta (esto es, f es un monomorfismo), existe $h : B \longrightarrow Q$ tal que $hf = g$.

4) $\mathscr{A}$ ***tiene inyectivos*** *si cada objeto A es un subobjeto de un objeto inyectivo Q, esto es, si existe un monomorfismo $j : A \longrightarrow Q$ con Q un objeto inyectivo.*

Veamos las definiciones de resoluciones proyectiva e inyectiva de un objeto dado.

Definición 4.2. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in Ob(\mathscr{A})$.*

1) Una ***aumentación*** *sobre A de un complejo uno-graduado positivo (P, δ) es un morfismo $\epsilon : P_0 \longrightarrow A$ tal que $\epsilon\delta_1 = 0$. Una* ***resolución positiva*** *de A es un complejo uno-graduado positivo P aumentado sobre A tal que la sucesión*

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

es exacta. Si cada P_k es proyectivo entonces P es una ***resolución proyectiva****. Mientras que si cada objeto de $\mathscr{A}$ admite una resolución proyectiva, se dice que la categoría $\mathscr{A}$* ***tiene resoluciones proyectivas****.*

2) Dualmente, una ***aumentación*** *sobre A de un complejo uno-graduado negativo (Q, δ) es un morfismo $\epsilon : A \longrightarrow Q_0$ tal que $\delta_0\epsilon = 0$. Una* ***resolución negativa*** *de A es un complejo uno-graduado negativo Q aumentado sobre A tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} Q_{-1} \xrightarrow{\delta_1} Q_{-2} \longrightarrow \cdots$$

es exacta. Si cada Q_k es inyectivo entonces Q es una ***resolución inyectiva****. Asimismo, si cada objeto de $\mathscr{A}$ admite una resolución inyectiva, se dice que la categoría $\mathscr{A}$* ***posee resoluciones inyectivas****.*

Observar que si P es una resolución positiva de A, el morfismo aumentación resulta ser un epimorfismo. Mientras que, si Q es una resolución negativa de A entonces el homomorfismo aumentación es un monomorfismo. Estas observaciones nos ayudarán a probar el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tiene resoluciones proyectivas si y sólo si posee proyectivos. Dualmente, $\mathscr{A}$ tiene resoluciones inyectivas si y sólo si posee inyectivos.*

Demostración.
Sólo se probará el caso proyectivo pues el caso inyectivo se sigue por dualidad.
Sean $A \in Ob(\mathscr{A})$ y (P, δ) una resolución proyectiva de A. Entonces el morfismo $\epsilon : P_0 \longrightarrow A$ es un epimorfismo con P_0 un objeto proyectivo, es decir, A es un objeto cociente de un objeto proyectivo. Luego $\mathscr{A}$ posee proyectivos.

Supongamos ahora que $\mathscr{A}$ tiene proyectivos y sea $A \in Ob(\mathscr{A})$. Entonces A es un objeto cociente de un objeto proyectivo P_0, esto es, existe un epimorfismo $\epsilon : P_0 \longrightarrow A$ y por consiguiente $P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$ resulta ser una sucesión exacta.
Sea $(ker(\epsilon), j_0)$ el núcleo de ϵ entonces, por hipótesis, existe un epimorfismo $h_0 : P_1 \longrightarrow ker(\epsilon)$ donde P_1 es un objeto proyectivo. Ahora, si $\delta_1 := j_0 h_0$ afirmamos que $P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. En efecto, basta notar que

$$\begin{aligned} im(\delta_1) &= im(j_0 h_0) \\ &= ker(coker(j_0 h_0)) \\ &= ker(coker(j_0)) && \text{(Teorema 2.17)} \\ &= j_0 && \text{(pues } j_0 \text{ es un monomorfismo)} \\ &= ker(\epsilon) \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento anterior se logra construir una resolución proyectiva de A. Luego $\mathscr{A}$ tiene resoluciones proyectivas. □

Definición 4.4. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Consideremos $A, B \in Ob(\mathscr{A})$ y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Además, sean X y Y complejos positivos uno-graduados en $\mathscr{A}$ aumentados sobre A y B respectivamente. Un morfismo de* *complejos uno-graduados* $F : X \longrightarrow Y$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "\epsilon"] & Y_0 \arrow[d, "\epsilon'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B, \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

se llama un ***homomorfismo sobre f****.*

Dualmente tenemos la siguiente definición.

Definición 4.5. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana. Consideremos* $A, B \in Ob(\mathscr{A})$ *y* $f : A \longrightarrow B$ *un morfismo. Además, sean* X *y* Y *complejos negativos en* $\mathscr{A}$ *aumentados sobre* A *y* B *respectivamente. Un morfismo de complejos uno-graduados* $F : X \longrightarrow Y$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F_0"] & Y_0 \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\epsilon"] & B, \arrow[u, "\epsilon'"'] \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

se llama un ***homomorfismo sobre f****.*

El siguiente resultado se le conoce como el Teorema de comparación debido a la similitud que guarda con respecto a la proposición del mismo nombre que teníamos en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$.

Teorema 4.6. *(Teorema de comparación) Sea* X *un complejo uno-graduado, proyectivo, positivo y aumentado sobre* A*. Además, sean* Y *una resolución positiva de* B *y* $f : A \longrightarrow B$ *un homomorfismo. Entonces existe un morfismo* $F : X \longrightarrow Y$ *sobre* f*, dicho morfismo es único salvo homotopía. En particular, este resultado es válido si* X *y* Y *son resoluciones proyectivas.*

Antes de demostrar el teorema anterior necesitamos un lema previo.

Lema 4.7. *Considerar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "\tau"] & \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[r, "\varphi"'] & C \end{tikzcd}$$

con P un objeto proyectivo y la fila exacta. Si $\varphi\tau = 0$ entonces existe un morfismo $\sigma : P \longrightarrow A$ tal que $\tau = \psi\sigma$.

Demostración.
Consideremos la factorización canónica $\psi = me$ donde $m = im(\psi)$ es un monomorfismo y $e = coim(\psi)$ es un epimorfismo. Dado que la fila es exacta obtenemos que $m = ker(\varphi)$. Luego, como $\varphi\tau = 0$ existe un único morfismo $\gamma : P \to ker(\varphi)$ tal que $\tau = m\gamma$.
Por otro lado, en virtud de que P es un objeto proyectivo y la sucesión $A \xrightarrow{e} im(\psi) = ker(\varphi) \longrightarrow 0$ es exacta (pues e es un epimorfismo), existe $\sigma : P \longrightarrow A$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
A \arrow[r, "e"'] & im(\psi) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

esto es, $e\sigma = \gamma$. Por lo tanto, $\tau = m\gamma = m(e\sigma) = (me)\sigma = \psi\sigma$. $\square$

Una vez demostrado el lema 4.7 procedemos a probar el Teorema de Comparación.

Demostración.
El homomorfismo F es construido recursivamente como sigue: consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, dashed, "F_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Y_0 \arrow[r, "\epsilon'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Dado que X_0 es proyectivo y la fila inferior del diagrama 4.3 es exacta, existe un morfismo $F_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ tal que $\epsilon' F_0 = f\epsilon$. Así obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dashed, "F_1"'] & X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "F_0"] & A \arrow[d, "f"] \\
Y_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & Y_0 \arrow[r, "\epsilon'"'] & B
\end{tikzcd}$$

con la fila inferior exacta (pues por hipótesis Y es una resolución de B).
Dado que $\epsilon' F_0 \partial_1 = f\epsilon\partial_1 = f0 = 0$ y usando el lema 4.7 conseguimos la existencia de un morfismo $F_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ tal que $\partial'_1 F_1 = F_0 \partial_1$.
Iterando esta construcción obtenemos recursivamente homomorfismos $F_i : X_i \longrightarrow Y_i$ $(i > 1)$ y por tanto un morfismo $F : X \longrightarrow Y$ sobre f.

Hasta esta parte hemos demostrado la existencia del homomorfismo sobre f, falta garantizar que es único salvo homotopía. En efecto:

Sea $F' : X \longrightarrow Y$ otro morfismo sobre f y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dl, dashed, "D_0"'] \arrow[d, "\tau_0"] & \\ Y_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & Y_0 \arrow[r, "\epsilon'"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $\tau_0 := F'_0 - F_0$.
Notar que

$$\begin{aligned} \epsilon'\tau_0 &= \epsilon'(F'_0 - F_0) \\ &= \epsilon' F'_0 - \epsilon' F_0 \\ &= f\epsilon - f\epsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto, por el lema 4.7, existe un homomorfismo $D_0 : X_0 \longrightarrow Y_1$ tal que $\partial'_1 D_0 = \tau_0$. No obstante, el morfismo ∂_0 se considera trivial por suposición (pues $X_k = 0$ si $k < 0$) y por consiguiente $\partial'_1 D_0 + D_{-1}\partial_0 = F'_0 - F_0$.
Ahora consideremos otro diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, dashed, "D_1"'] \arrow[d, "\tau_1"] & \\ Y_2 \arrow[r, "\partial'_2"'] & Y_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & Y_0, \end{tikzcd}$$

donde $\tau_1 := F_1' - F_1 - D_0\partial_1$. Nuevamente observar que

$$\begin{aligned}\partial_1'\tau_1 &= \partial_1'(F_1' - F_1 - D_0\partial_1)\\ &= \partial_1'F_1' - \partial_1'F_1 - \partial_1'D_0\partial_1\\ &= F_0'\partial_1 - F_0\partial_1 - \partial_1'D_0\partial_1\\ &= ((F_0' - F_0) - \partial_1'D_0)\partial_1\\ &= (\tau_0 - \tau_0)\partial_1\\ &= 0\partial_1\\ &= 0\end{aligned}$$

y por el lema 4.7 existe un homomorfismo $D_1 : X_1 \longrightarrow Y_2$ tal que $\partial_2'D_1 = \tau_1$, es decir, $\partial_2'D_1 + D_0\partial_1 = F_1' - F_1$.
En general, definiendo $\tau_n := F_n' - F_n - D_{n-1}\partial_n$ y repitiendo esta construcción obtenemos una homotopía $D : F \longrightarrow F'$ y por tanto $F \simeq F'$. □

Una consecuencia inmediata del teorema de comparación es que si X y X' son resoluciones proyectivas de A entonces $X \simeq X'$, es decir, existen morfismos $F : X \longrightarrow X'$ y $F' : X' \longrightarrow X$ tal que $F'F \simeq 1_X$ y $FF' \simeq 1_{X'}$.

Finalmente terminamos esta sección enunciando la proposición dual al teorema 4.6.

Teorema 4.8. *Sean X una resolución negativa de A y Y un complejo unograduado, inyectivo, negativo y aumentado sobre B. Además, sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo. Entonces existe un morfismo $F : X \longrightarrow Y$ sobre f, más aún, cualesquiera dos morfismos que satisfagan dicha condición son homotópicas. En particular, este resultado es válido si X y Y son resoluciones inyectivas.*

□

4.2. Resoluciones de sucesiones exactas cortas

Supongamos que $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana con proyectivos y consideremos la siguiente sucesión exacta corta en $\mathscr{A}$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0.$$

En la sección anterior probamos, bajo ciertas hipótesis, que existen resoluciones proyectivas X', X y X'' sobre A', A y A'' respectivamente. Además, el teorema de comparación afirma que existen homomorfismos Ψ y Φ sobre ψ y φ respectivamente, obteniendo así una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0,$$

la cual puede ser exacta o no. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4.9. *Supongamos que X', X y X'' son complejos uno-graduados positivos aumentados sobre A', A y A'' respectivamente. Además, asumamos que*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0. \tag{4.4}$$

es una sucesión exacta corta. Si existen homomorfismos $\Psi : X' \longrightarrow X$ y $\Phi : X \longrightarrow X''$ sobre ψ y φ respectivamente, tal que

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

*es una sucesión exacta corta, entonces la sucesión 4.5 se llama una **sucesión positiva sobre** la sucesión 4.4.*
*Si X', X y X'' son resoluciones proyectivas de A', A y A'' respectivamente, entonces la sucesión 4.5 se denomina una **resolución proyectiva** de la sucesión 4.4.*

De manera similar se definen los conceptos ***una sucesión negativa sobre*** y ***resolución inyectiva*** de la sucesión 4.4.

Lo que haremos a continuación será demostrar que la definición anterior tiene sentido, esto es, probaremos que dadas una categoría abeliana con proyectivos y una sucesión exacta como la 4.4, existen resoluciones proyectivas. Para lograr nuestro objetivo necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 4.10. *Una sucesión exacta corta como la 4.5 se llama **normal** si para cada $k \in \mathbb{Z}$ la sucesión $0 \longrightarrow X'_k \longrightarrow X_k \longrightarrow X''_k \longrightarrow 0$ se divide.*

Si la sucesión 4.5 es normal conseguimos que $X \cong X' \oplus X''$. Además, el teorema 2.9 nos aseguran la existencia de morfismos $\Psi' : X' \oplus X'' \longrightarrow X'$ y $\Phi : X'' \longrightarrow X' \oplus X''$ tales que

1. $\Psi'\Psi = 1_{X'}$ y $\Phi\Phi' = 1_{X''}$,

2. $\Phi\Psi = 0$ y $\Psi'\Phi' = 0$,

3. $\Psi\Psi' + \Phi'\Phi = 1_{X'\oplus X''}$.

Supongamos que la sucesión 4.5 es normal y es una resolución de la sucesión 4.4, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial'_{k+1}"'] & \vdots \arrow[d, "\partial_{k+1}"'] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{k+1}"'] & \\
0 \arrow[r] & X'_k \arrow[r, "\Psi_k"] \arrow[d, "\partial'_k"'] & X'_k \oplus X''_k \arrow[r, "\Phi_k"] \arrow[d, "\partial_k"'] & X''_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_{k-1} \arrow[r, "\Psi_{k-1}"] \arrow[d, "\partial'_{k-1}"'] & X'_{k-1} \oplus X''_{k-1} \arrow[r, "\Phi_{k-1}"] \arrow[d, "\partial_{k-1}"'] & X''_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{k-1}"'] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "\partial'_1"'] & \vdots \arrow[d, "\partial_1"'] & \vdots \arrow[d, "\partial''_1"'] & \\
0 \arrow[r] & X'_0 \arrow[r, "\Psi_0"] \arrow[d, "\epsilon'"'] & X'_0 \oplus X''_0 \arrow[r, "\Phi_0"] \arrow[d, "\epsilon"'] & X''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r, "\varphi"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Nuestro objetivo es describir los morfismos $\partial_k : X'_k \oplus X''_k \longrightarrow X'_{k-1} \oplus X''_{k-1}$ y $\epsilon : X'_0 \oplus X''_0 \longrightarrow A$ en términos de los morfimos ∂', ∂'', Ψ, Φ, ψ y φ.

Primero consideremos el morfismo aumentación ϵ. Notar que

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon 1_{X'_0\oplus X''_0} \\
&= \epsilon(\Psi_0\Psi'_0 + \Phi'_0\Phi_0) \\
&= \epsilon\Psi_0\Psi'_0 + \epsilon\Phi'_0\Phi_0 \\
&= \psi\epsilon'\Psi'_0 + \sigma\Phi_0
\end{aligned}$$

para algún $\sigma : X''_0 \longrightarrow A$.
Veamos que propiedades debe poseer σ y así poder asegurar su existencia.

Observar que

$$\begin{aligned}
\epsilon''\Phi_0 &= \varphi\epsilon \\
&= \varphi(\psi\epsilon'\Psi'_0 + \sigma\Phi_0) \\
&= \varphi\psi\epsilon'\Psi'_0 + \varphi\sigma\Phi_0 \\
&= \varphi\sigma\Phi_0 \qquad (\text{pues } \varphi\psi = 0)
\end{aligned}$$

y como Φ_0 es un epimorfismo concluimos que $\epsilon'' = \varphi\sigma$. Por lo tanto, una condición suficiente para que σ exista y cumpla la propiedad deseada es que X''_0 sea un objeto proyectivo.
Ahora consideremos el homomorfismo ∂_1. Notar que

$$\begin{aligned}
\partial_1 &= 1_{X'_0 \oplus X''_0}\partial_1 1_{X'_1 \oplus X''_1} \\
&= (\Psi_0\Psi'_0 + \Phi'_0\Phi_0)\partial_1(\Psi_1\Psi'_1 + \Phi'_1\Phi_1) \\
&= \Psi_0\Psi'_0\partial_1\Psi_1\Psi'_1 + \Phi'_0\Phi_0\partial_1\Psi_1\Psi'_1 + \Psi_0\Psi'_0\partial_1\Phi'_1\Phi_1 + \Phi'_0\Phi_0\partial_1\Phi'_1\Phi_1 \\
&= \Psi_0\underbrace{\Psi'_0\Psi_0}_{=1_{X'_0}}\partial'_1\Psi'_1 + \Phi'_0\Phi_0\Psi_0\partial'_1\Psi'_1 + \Psi_0\Psi'_0\partial_1\Phi'_1\Phi_1 + \Phi'_0\partial''_1\underbrace{\Phi_1\Phi'_1}_{=1_{X''_1}}\Phi_1 \\
&= \Psi_0\partial'_1\Psi'_1 + \Phi'_0\Phi_0\Psi_0\partial'_1\Psi'_1 + \Psi_0\Psi'_0\partial_1\Phi'_1\Phi_1 + \Phi'_0\partial''_1\Phi_1 \\
&= \Psi_0\partial'_1\Psi'_1 + \Phi'_0\Theta'_1\Psi'_1 + \Psi_0\Theta_1\Phi_1 + \Phi'_0\partial''_1\Phi_1
\end{aligned}$$

para algunos morfimos $\Theta_1 : X''_1 \longrightarrow X'_0$ y $\Theta'_1 : X'_1 \longrightarrow X''_0$.
Nuevamente veamos qué características deden poseer Θ_1 y Θ'_1 para poder garantizar su existencia.
Una condición para ∂_1 es que $\Phi_0\partial_1 = \partial''_1\Phi_1$, es decir,

$$\begin{aligned}
\partial''_1\Phi_1 &= \Phi_0\partial_1 \\
&= \Phi_0(\Psi_0\partial'_1\Psi'_1 + \Phi'_0\Theta'_1\Psi'_1 + \Psi_0\Theta_1\Phi_1 + \Phi'_0\partial''_1\Phi_1) \\
&= \underbrace{\Phi_0\Psi_0}_{=0}\partial'_1\Psi'_1 + \underbrace{\Phi_0\Phi'_0}_{=1_{X''_0}}\Theta'_1\Psi'_1 + \underbrace{\Phi_0\Psi_0}_{=0}\Theta_1\Phi_1 + \underbrace{\Phi_0\Phi'_0}_{=1_{X''_0}}\partial''_1\Phi_1) \\
&= \Theta'_1\Psi'_1 + \partial''_1\Phi_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Theta'_1\Psi'_1 = 0$, esto es, $\Theta'_1\underbrace{\Psi'_1\Psi_1}_{1_{X'_1}} = 0\Psi_1 = 0$. Luego $\Theta'_1 = 0$.

Por otro lado, otro requerimiento para ∂_1 es la relación $\epsilon\partial_1 = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon\partial_1 \\
&= (\psi\epsilon'\Psi_0' + \sigma\Phi_0)(\Psi_0\partial_1'\Psi_1' + 0 + \Psi_0\Theta_1\Phi_1 + \Phi_0'\partial_1''\Phi_1) \\
&= \psi\epsilon'\underbrace{\Psi_0'\Psi_0}_{=1_{X_0'}}\partial_1'\Psi_1' + \psi\epsilon'\underbrace{\Psi_0'\Psi_0}_{=1_{X_0'}}\Theta_1\Phi_1 + \psi\epsilon'\underbrace{\Psi_0'\Phi_0'}_{=0}\partial_1''\Phi_1 + \\
&\quad \sigma\underbrace{\Phi_0\Psi_0}_{=0}\partial_1'\Psi_1' + \sigma\underbrace{\Phi_0\Psi_0}_{=0}\Theta_1\Phi_1 + \sigma\underbrace{\Phi_0\Phi_0'}_{=1_{X_0''}}\partial_1''\Phi_1 \\
&= \psi\epsilon'\partial_1'\Psi_1' + \psi\epsilon'\Theta_1\Phi_1 + \sigma\partial_1''\Phi_1 \\
&= \psi\underbrace{\epsilon'\partial_1'}_{=0}\Psi_1' + \psi\epsilon'\Theta_1\Phi_1 + \sigma\partial_1''\Phi_1 \\
&= \psi\epsilon'\Theta_1\Phi_1 + \sigma\partial_1''\Phi_1 \\
&= (\psi\epsilon'\Theta_1 + \sigma\partial_1'')\Phi_1
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\psi\epsilon'\Theta_1 + \sigma\partial_1'' = 0$ pues Φ_1 es un epimorfismo.
De manera similar, usando la condición $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ $(k > 1)$ podemos concluir que

$$\partial_k = \Psi_{k-1}(\partial_k'\Psi_k' + \Theta_k\Phi_k) + \Phi_{k-1}'\partial_k''\Phi_k,$$

donde el morfismo $\Theta_k : X_k'' \longrightarrow X_{k-1}'$ satisface que $\partial_{k-1}'\Theta_k + \Theta_{k-1}\partial_k'' = 0$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.11. *Sea*

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0 \tag{4.7}$$

una sucesión normal sobre la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0.$$

La descripción

$$\begin{aligned}
\partial_k &= \Psi_{k-1}(\partial_k'\Psi_k' + \Theta_k\Phi_k) + \Phi_{k-1}'\partial_k''\Phi_k \\
\epsilon &= \psi\epsilon'\Psi_0' + \sigma\Phi_0
\end{aligned}$$

con $\sigma : X_0'' \longrightarrow A$ *y* $\Theta_k : X_k'' \longrightarrow X_{k-1}'$ $(k > 0)$ *tales que*

$$\begin{aligned}
\epsilon'' &= \varphi\sigma \qquad &(4.8)\\
\psi\epsilon'\Theta_1 + \sigma\partial_1'' &= 0 \qquad &(4.9)\\
\partial_{k-1}'\Theta_k + \Theta_{k-1}\partial_k'' &= 0 \quad (k > 1), \qquad &(4.10)
\end{aligned}$$

se llama la ***forma normal*** *de la sucesión 4.7.*

Teorema 4.12. *Sean* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta,* X' *un complejo uno-graduado, acíclico, positivo y aumentado sobre* A'*, y* X'' *un complejo uno-graduado, proyectivo, positivo y aumentado sobre* A''*. Entonces existen un complejo uno-graduado, positivo y aumentado sobre* A *y homomorfismos* Ψ, Φ *sobre* ψ *y* φ *respectivamente tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración.
Para cada $n \in \omega = \{0, 1, ...\}$ sea $X_n := X'_n \oplus X''_n$, además sean $\Psi_n := \mu_{X'_n}$ y $\Phi_n := \pi_{X''_n}$ la inclusión y proyección canónicas de $X'_n \oplus X''_n$ respectivamente. Por el teorema 2.35 sabemos que

$$0 \longrightarrow X'_n \xrightarrow{\Psi_n} X_n \xrightarrow{\Phi_n} X''_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta para cada $n \in \omega$. Luego

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$$

es exacta.
Falta garantizar la existencia del complejo uno-graduado, positivo y aumentado sobre A. Para ello basta con exhibir la existencia de homomorfismos $\sigma : X''_0 \longrightarrow A$ y $\Theta_k : X''_k \longrightarrow X'_{k-1}$ que cumplan las condiciones 4.8, 4.9 y 4.10.
Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X''_0 \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "\epsilon''"] & \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & A'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dado que φ es un epimorfismo y X''_0 es proyectivo por hipótesis, existe un morfismo $\sigma : X''_0 \longrightarrow A$ tal que $\varphi\sigma = \epsilon''$. Luego se cumple la condición 4.8.

Ahora, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X''_1 \arrow[dl, dashed, "\Theta_1"'] \arrow[d, "-\sigma\partial''_1"] & \\ X'_0 \arrow[r, "\psi\epsilon'"'] & A \arrow[r, "\varphi"'] & A''. \end{tikzcd}$$

Dado que ϵ' es un epimorfismo (pues por hipótesis X' es acíclico y por tanto exacto) se sigue que $im(\psi\epsilon') = im(\psi) = ker(\varphi)$. Además X_1'' es proyectivo y $\varphi(-\sigma\partial_1'') = -(\varphi\sigma\partial_1'') = -\epsilon''\partial_1'' = 0$. Por el lema 4.7 existe un morfismo $\Theta_1 : X_1'' \longrightarrow X_0'$ tal que $\psi\epsilon'\Theta_1 = -\sigma\partial_1''$, esto es, $\psi\epsilon'\Theta_1 + \sigma\partial_1'' = 0$. Por lo tanto la condición 4.9 también se cumple.

Para la definición del homomorfismo Θ_2 se hace alusión al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_2'' \arrow[dl, dashed, "\Theta_2"'] \arrow[d, "-\Theta_1\partial_2''"] & \\ X_1' \arrow[r, "\partial_1'"'] & X_0' \arrow[r, "\epsilon'"'] & A'. \end{tikzcd}$$

Como $-\psi\epsilon'\Theta_1\partial_2'' = \sigma\partial_1''\partial_2'' = 0 = \psi 0$ y ψ es un monomorfismo, concluimos que $-\epsilon'\Theta_1\partial_2'' = 0$. Además la fila del diagrama anterior es exacta (nuevamente se usa que X' es acíclico y por tanto exacto) y por el lemma 4.7 existe un morfismo $\Theta_2 : X_2'' \longrightarrow X_1'$ tal que $\partial_1'\Theta_2 + \Theta_1\partial_2'' = 0$.

Finalmente, Θ_k $(k > 2)$ se define mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_k'' \arrow[dl, dashed, "\Theta_k"'] \arrow[d, "-\Theta_{k-1}\partial_k''"] & \\ X_{k-1}' \arrow[r, "\partial_{k-1}'"'] & X_{k-2}' \arrow[r, "\partial_{k-2}'"'] & X_{k-3}' \end{tikzcd}$$

con fila exacta y X_k'' proyectivo. Además por inducción $-\partial_{k-2}'\Theta_{k-1}\partial_k'' = \partial_{k-2}'\partial_{k-1}'\Theta_k = 0$ y por tanto, por el lema 4.7, existe un morfismo $\Theta_k : X_k'' \longrightarrow X_{k-1}'$ tal que $\partial_{k-1}'\Theta_k + \Theta_{k-1}\partial_k'' = 0$. Luego la propiedad 4.10 también se cumple.

Por lo tanto, definiendo

$$\begin{aligned} \partial_k &= \Psi_{k-1}(\partial_k'\Psi_k' + \Theta_k\Phi_k) + \Phi_{k-1}'\partial_k''\Phi_k \qquad (4.11) \\ \epsilon &= \psi\epsilon'\Psi_0' + \sigma\Phi_0 \qquad (4.12) \end{aligned}$$

donde Ψ' y Φ' son los mismos morfismos que expusimos después de la definición 4.10, obtenemos que X es un complejo uno-graduado, positivo y aumentado sobre A. Más aún, con la ayuda de 4.11 y 4.12 se verifica que Φ

y Ψ son homomorfimos sobre φ y ψ respectivamente. $\square$

Teorema 4.13. *Sea* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de complejos uno-graduados en* $\mathscr{A}$*. Si* X' *y* X'' *son proyectivos entonces* X *también lo es.*

Demostración.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$ la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow X'_k \longrightarrow X_k \longrightarrow X''_k \longrightarrow 0$ se divide pues cada X''_k es proyectivo (véase [5, pág 58]). Por consiguiente $X_k \cong X'_k \oplus X''_k$ es proyectivo porque cada sumando lo es. Por lo tanto X resulta ser un complejo proyectivo. $\square$

Teorema 4.14. *Sea* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta sobre la sucesión* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$ *y supongamos que las sucesiones* $X' \longrightarrow A' \longrightarrow 0$ *y* $X'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *son exactas. Entonces la sucesión* $X \longrightarrow A \longrightarrow 0$ *también lo es.*

Demostración.
Recordar que el funtor de homología $\mathcal{H}$ es semiexacto y por tanto la sucesión

$$\underbrace{\mathcal{H}(X' \to A' \to 0)}_{=0} \to \mathcal{H}(X \to A \to 0) \to \underbrace{\mathcal{H}(X'' \to A'' \to 0)}_{=0}$$

es exacta y necesariamente $\mathcal{H}(X \to A \to 0) = 0$. Luego $X \longrightarrow A \longrightarrow 0$ es exacta. $\square$

Combinando los teoremas 4.12, 4.13 y 4.14 obtenemos el siguiente teorema, el cual afirma que la definición 4.9 en efecto tiene sentido.

Teorema 4.15. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana con proyectivos. Entonces para cada sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *existe una resolución proyectiva* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$.

$\square$

Dualmente:

Teorema 4.16. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana con inyectivos. Entonces para cada sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *existe una resolución inyectiva* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$.

□

4.3. Funtores derivados izquierdos y derechos

En esta sección consideraremos nuevamente un funtor aditivo entre categorías abelianas $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow A$ covariante en la primera entrada y contravariante en la segunda. Además, asumiremos que la categoría $\mathscr{A}_1$ tiene proyectivos mientras que la categoría $\mathscr{A}_2$ posee inyectivos. Por lo tanto, por el teorema 4.3, $\mathscr{A}_1$ tiene resoluciones proyectivas y $\mathscr{A}_2$ posee resoluciones inyectivas.

Sean $A_1 \in Ob(\mathscr{A}_1)$ y $A_2 \in Ob(\mathscr{A}_2)$. Dado que $\mathscr{A}_1$ tiene proyectivos y $\mathscr{A}_2$ posee inyectivos, existen una resolución proyectiva $\mathcal{P}$ de A_1 y una resolución inyectiva $\mathcal{Q}$ de A_2. Así, $t(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ resulta ser un complejo dos-graduado positivo en $\mathscr{A}$ y por tanto admite un complejo asociado $\widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.
Por lo general $\widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ depende de la elección de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. Sean $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{Q}'$ otras resoluciones proyectiva e inyectiva de A_1 y A_2 respectivamente. Por los teoremas 4.6 y 4.8, $\mathcal{P} \simeq \mathcal{P}'$ y $\mathcal{Q} \simeq \mathcal{Q}'$. Por consiguiente $t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \simeq t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ y finalmente $\widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \simeq \widetilde{t}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$. Esto es, $\widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es único salvo homotopía y por tanto $\mathcal{H}t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{H}\widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{H}\widetilde{t}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ es independiente de las resoluciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

Ahora, supongamos que $f_1 : A_1 \longrightarrow A_1'$ y $f_2 : A_2 \longrightarrow A_2'$ son homomorfismos en $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. Además, sean $\mathcal{P}$ una resolución proyectiva de A_1, $\mathcal{P}'$ una resolución proyectiva de A_1', $\mathcal{Q}$ una resolución inyectiva de A_2 y $\mathcal{Q}'$ una resolución inyectiva de A_2'. Por el teorema de Comparación y su proposición dual existen homomorfismos $F_1 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ y $F_2 : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'$ sobre f_1 y f_2 respectivamente. Dichos morfismos son únicos salvo homotopía (teoremas 4.6 y 4.8), los cuales definen un morfismo $t(F_1, F_2) : t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$ sobre $t(f_1, f_2)$ salvo homotopía y por tanto un único morfismo $\mathcal{H}t(F_1, F_2) : \mathcal{H}t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}')$.

Las aplicaciones $(A_1, A_2) \longmapsto \mathcal{H}_i t(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ y $(f_1, f_2) \longmapsto \mathcal{H}_i t(F_1, F_2)$ $(i \in \mathbb{Z})$ tienen carácter funtorial y son no triviales cuando $i \geq 0$. Esto nos permite definir el importante concepto de funtor derivado.

Definición 4.17. *Sea* $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ *un funtor aditivo entre categorías abelianas. Supongamos que* $\mathscr{A}_1$ *tiene proyectivos y* $\mathscr{A}_2$ *tiene inyectivos. Entonces el* ***i-ésimo funtor derivado izquierdo*** $(i \in \omega)$ *es el funtor* $t_i : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ *definido por:*

En objetos: $\forall\,(A_1, A_2) \in Ob(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$, $t_i(A_1, A_2) = \mathcal{H}_i t(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ *donde* $\mathcal{P}$ *es una resolución proyectiva de* A_1 *y* $\mathcal{Q}$ *es una resolución inyectiva de* A_2*.*

En morfimos: $\forall\,(f_1, f_2) \in Mor(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$, $t_i(f_1, f_2) = \mathcal{H}_i t(F_1, F_2)$ *donde* F_1 *y* F_2 *son los homomorfismos sobre* f_1 *y* f_2 *respectivamente.*

Observación 4.18. *Si en la definición anterior la variable covariante es utilizada para resoluciones inyectivas y la variable contravariante para resoluciones proyectivas, y además definimos de la misma manera el funtor en objetos y morfismos, obtenemos los* ***funtores derivados derechos*** t'_i*.*

Notar que si A_1 es un objeto proyectivo, entonces

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

resulta ser una resolución proyectiva de A_1. Similarmente, si A_2 es un objeto inyectivo, entonces

$$0 \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

resulta ser una resolución inyectiva de A_2. Así, obtenemos de manera inmediata el siguiente resultado.

Teorema 4.19. *Si* A_1 *es un objeto proyectivo o* A_2 *es un objeto inyectivo, entonces* $t_i(A_1, A_2) = 0$ *para* $i > 0$*. Similarmente, si* A_1 *es un objeto inyectivo o* A_2 *es un objeto proyectivo, entonces* $t'_i(A_1, A_2) = 0$ *para* $i > 0$*.*

$\square$

Es bien sabido que en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ existen sucesiones exactas largas que engloban a los funtores derivados. Estas sucesiones son construidas a partir de las sucesiones exactas largas de homología. El siguiente teorema afirma que dichas sucesiones existen en un contexto más general.

Teorema 4.20. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ una sucesión exacta de complejos uno-graduados en $\mathscr{A}$. Entonces existe un morfismo $\delta : \mathcal{H}(X'') \to \mathcal{H}(X')$ de grado -1 y una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to \mathcal{H}_{i+1}(X'') \stackrel{\delta_{i+1}}{\to} \mathcal{H}_i(X') \to \mathcal{H}_i(X) \to \mathcal{H}_i(X'') \stackrel{\delta_i}{\to} \mathcal{H}_{i-1}(X') \to \mathcal{H}_{i-1}(X) \to \mathcal{H}_{i-1}(X'') \to \cdots$$

Demostración.
Sea (X, ∂) un complejo uno-graduado en una categoría abeliana $\mathscr{A}$.
En virtud de que $im(\partial_k)$ es un subobjeto de $ker(\partial_{k-1})$, existe un monomorfismo $im(\partial_k) \longrightarrow ker(\partial_{k-1})$. Además, en general tenemos el monomorfismo $ker(\partial_{k-1}) \longrightarrow X_{k-1}$ y los siguientes epimorfismos $X_k \longrightarrow coker(\partial_{k+1})$, $coker(\partial_{k+1}) \longrightarrow coim(\partial_k)$. Más aún, por el teorema 2.29, existe un isomorfismo $coim(\partial_k) \longrightarrow im(\partial_k)$.
De lo anterior obtenemos la siguiente factorización de ∂_k

$$X_k \longrightarrow \mathcal{Z}'_k \longrightarrow \mathcal{B}'_k \longrightarrow \mathcal{B}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1} \longrightarrow X_{k-1}$$

Sea $\widetilde{\partial}_k := \mathcal{Z}'_k \longrightarrow \mathcal{B}'_k \longrightarrow \mathcal{B}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}$. Dado que $\mathcal{B}'_k \longrightarrow \mathcal{B}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}$ es un monomorfismo obtenemos que $ker(\widetilde{\partial}_k) = ker(\mathcal{Z}'_k \longrightarrow \mathcal{B}'_k)$ (teorema 2.17). De manera similar, como $\mathcal{Z}'_k \longrightarrow \mathcal{B}'_k \longrightarrow \mathcal{B}_{k-1}$ es un epimorfismo concluimos que $coker(\widetilde{\partial}_k) = coker(\mathcal{B}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}) = ker(\partial_{k-1})/im(\partial_k)$.
Además, la sucesión

$$0 \longrightarrow im(\partial_{k+1}) \longrightarrow ker(\partial_k) \longrightarrow X_k/im(\partial_{k+1}) \longrightarrow X_k/ker(\partial_k) \longrightarrow 0$$

es exacta y por consiguiente la sucesión

$$0 \longrightarrow ker(\partial_k)/im(\partial_{k+1}) \longrightarrow X_k/im(\partial_{k+1}) \longrightarrow X_k/ker(\partial_k) \longrightarrow 0$$

también lo es, es decir,

$$ker(\partial_k)/im(\partial_{k+1}) = ker(X_k/im(\partial_{k+1}) \longrightarrow X_k/ker(\partial_k))$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} coker(\widetilde{\partial}_{k+1}) &= ker(\partial_k)/im(\partial_{k+1}) \\ &= ker(X_k/im(\partial_{k+1}) \longrightarrow X_k/ker(\partial_k)) \\ &= ker(\mathcal{Z}'_k \longrightarrow \mathcal{B}'_k) \\ &= ker(\widetilde{\partial}_k) \end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{H}_k(X) := ker(\partial_k/im(\partial_{k+1})) = coker(\widetilde{\partial}_{k+1}) = ker(\widetilde{\partial}_k).$$

Ahora, dada una sucesión exacta corta de complejos uno-graduados

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}_k(X') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_k(X'') \arrow[d] & \\
 & \mathcal{Z}'_k(X') \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial'}_k"'] & \mathcal{Z}'_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial}_k"'] & \mathcal{Z}'_k(X'') \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial''}_k"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}_{k-1}(X') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}_{k-1}(X'') \arrow[d] & \\
 & \mathcal{H}_{k-1}(X') \arrow[r] & \mathcal{H}_{k-1}(X) \arrow[r] & \mathcal{H}_{k-1}(X'') &
\end{tikzcd} \tag{4.13}$$

con filas y columnas exactas (por ejemplo, la columna central es exacta debido a que $ker(\widetilde{\partial}_k) = \mathcal{H}_k(X)$ y $coker(\widetilde{\partial}_k) = \mathcal{H}_{k-1}(X)$). Por el Lema de la Serpiente existe un homomorfismo $\delta_k : \mathcal{H}_k(X'') \longrightarrow \mathcal{H}_{k-1}(X')$ tal que la sucesión

$$\mathcal{H}_k(X') \to \mathcal{H}_k(X) \to \mathcal{H}_k(X'') \xrightarrow{\delta_k} \mathcal{H}_{k-1}(X') \to \mathcal{H}_{k-1}(X) \to \mathcal{H}_{k-1}(X'')$$

es exacta. □

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente proposición.

Teorema 4.21. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas, supongamos que $\mathscr{A}_1$ tiene proyectivos y $\mathscr{A}_2$ tiene inyectivos. Si $0 \to A'_k \to A_k \to A''_k \to 0$ $(k = 1, 2)$ son sucesiones exactas en $\mathscr{A}_k$ entonces existen sucesiones exactas largas*

$$\begin{aligned} \cdots \to t_2(A''_1, A_2) \to t_1(A'_1, A_2) \to t_1(A_1, A_2) \to t_1(A''_1, A_2) \\ \to t_0(A'_1, A_2) \to t_0(A_1, A_2) \to t_0(A''_1, A_2) \to 0 \end{aligned}$$

y

$$\cdots \to t_2(A_1, A_2') \to t_1(A_1, A_2'') \to t_1(A_1, A_2) \to t_1(A_1, A_2')$$
$$\to t_0(A_1, A_2'') \to t_0(A_1, A_2) \to t_0(A_1, A_2') \to 0$$

Demostración.
Sean $0 \to A_k' \to A_k \to A_k'' \to 0$ $(k = 1, 2)$ sucesiones exactas en $\mathscr{A}_k$. Por los teoremas 4.15 y 4.16 para $0 \to A_1' \to A_1 \to A_1'' \to 0$ existe una resolución proyectiva $0 \longrightarrow \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'' \longrightarrow 0$ y para $0 \to A_2' \to A_2 \to A_2'' \to 0$ existe una resolución inyectiva $0 \longrightarrow \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'' \longrightarrow 0$.
Así obtenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}) \longrightarrow t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow t(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}'') \longrightarrow t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}') \longrightarrow 0$$

Pasando a los complejos asociados conseguimos las siguiente sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}) \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}'', \mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}'') \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow \widetilde{t}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}') \longrightarrow 0.$$

Aplicando el teorema 4.20 obtenemos las sucesiones exactas largas requeridas. □

Corolario 4.22. *Los funtores derivados izquierdos t_i son semiexactos. Mientras que el funtor t_0 es exacto derecho y además, t_0 es exacto si y sólo si $t_1 = 0$.*

□

Si $\mathcal{P}$ es una resolución proyectiva de A_1 y $\mathcal{Q}$ es una resolución inyectiva de A_2, entonces los homomorfismos aumentación $\varepsilon_1 : \mathcal{P} \longrightarrow A_1$ y $\varepsilon_2 : A_2 \longrightarrow \mathcal{Q}$ proporcionan un homomorfismo $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \longrightarrow t(A_1, A_2)$ y por tanto se induce el morfismo

$$\mathcal{H}_0 t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \mathcal{H}_0 t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = t_0(A_1, A_2) \longrightarrow \mathcal{H}_0 t(A_1, A_2) = t(A_1, A_2).$$

Esto define una transformación natural

$$\sigma_0 : t_0 \longrightarrow t.$$

En efecto:

1) Es claro que para cada $(A_1, A_2) \in Ob(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$
$\sigma_0(A_1, A_2) : t_0(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1, A_2)$ es un $\mathscr{A}$-morfismo.

2) Sea $(f_1, f_2) : (A_1, B_2) \longrightarrow (B_1, A_2)$ un $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$-morfismo y veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
t_0(A_1, A_2) \arrow[r, "\sigma_0(A_1,A_2)"] \arrow[d, "t_0(f_1,f_2)"'] & t(A_1, A_2) \arrow[d, "t(f_1,f_2)"] \\
t_0(B_1, B_2) \arrow[r, "\sigma_0(B_1,B_2)"'] & t(B_1, B_2).
\end{tikzcd}$$

Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ resoluciones proyectivas de A_1 y B_1 respectivamente. Similarmente, sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ resoluciones inyectivas de A_2 y B_2 respectivamente. Por los teoremas 4.6 y 4.8 existen morfimos $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ y $F^* : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q}$ tales que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "F_0"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\mathcal{P}'_0 \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & B_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B_2 \arrow[r, "\varepsilon_3"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathcal{Q}'_0 \arrow[d, "F^*_0"] \\
A_2 \arrow[r, "\varepsilon_4"'] & \mathcal{Q}_0
\end{tikzcd}$$

conmutan. Por consiguiente obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \arrow[r, "t(\varepsilon_1,\varepsilon_4)"] \arrow[d, "t(F,F^*)"'] & t(A_1, A_2) \arrow[d, "t(f_1,f_2)"] \\
t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \arrow[r, "t(\varepsilon_2,\varepsilon_3)"'] & t(B_1, B_2).
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\mathcal{H}_0$ al diagrama anterior conseguimos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_0 t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_0 t(A_1, A_2) = t(A_1, A_2) \arrow[d] \\
\mathcal{H}_0 t(\mathcal{P}', \mathcal{Q}') \arrow[r] & \mathcal{H}_0 t(B_1, B_2) = t(B_1, B_2),
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{tikzcd}
t_0(A_1, A_2) \arrow[r, "\sigma_0(A_1,A_2)"] \arrow[d] & t(A_1, A_2) \arrow[d] \\
t_0(B_1, B_2) \arrow[r, "\sigma_0(B_1,B_2)"'] & t(B_1, B_2).
\end{tikzcd}$$

Luego σ_0 es una transformación natural de t_0 en t.

Lo que afirma el siguiente teorema es que si t es exacto derecho entonces t y t_0 son esencialmente los mismos.

Teorema 4.23. *La transformación natural σ_0 es un isomorfismo natural si y sólo si el funtor t es exacto derecho.*

Demostración.
Si σ_0 es una equivalencia entonces t es un funtor exacto derecho pues t_0 lo es (corolario 4.22).

Supongamos ahora que t es exacto derecho y veamos que para cada $(A_1, A_2) \in Ob(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$ se verifica que $\sigma_0(A_1, A_2)$ es un isomorfismo.
En efecto, consideremos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ resoluciones proyectiva e inyectiva de A_1 y A_2 respectivamente. Entonces tenemos las siguiente sucesiones exactas

$$\begin{array}{c}
\mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} A_1 \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathcal{Q}_0 \longrightarrow Q_{-1}
\end{array}$$

en $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. Por el teorema 3.7 la sucesión

$$t(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_0) \oplus t(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_{-1}) \xrightarrow{\psi} t(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0) \xrightarrow{\varphi} t(A_1, A_2) \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego φ es un epimorfismo y por tanto $t(A_1, A_2) \cong t(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)/ker(\varphi)$.
No obstante,

$$\begin{array}{rcl}
t_0(A_1, A_2) & := & \mathcal{H}_0 t(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \\
 & = & coker(\psi) \\
 & = & t(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)/im(\psi) \\
 & = & t(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)/ker(\varphi).
\end{array}$$

Por lo tanto, $t(A_1, A_2) \cong t_0(A_1, A_2)$, es decir, σ_0 es un isomorfismo natural.

$\square$

Corolario 4.24. *Sean $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}$ y t como en el teorema 4.21. Supongamos que $0 \to A'_k \to A_k \to A''_k \to 0$ $(k = 1, 2)$ son sucesiones exactas en $\mathscr{A}_k$. Si t es exacto derecho entonces existen suceciones exactas largas*

$$\begin{aligned} \cdots \to t_2(A''_1, A_2) \to t_1(A'_1, A_2) \to t_1(A_1, A_2) \to t_1(A''_1, A_2) \\ \to t(A'_1, A_2) \to t(A_1, A_2) \to t(A''_1, A_2) \to 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdots \to t_2(A_1, A'_2) \to t_1(A_1, A''_2) \to t_1(A_1, A_2) \to t_1(A_1, A'_2) \\ \to t(A_1, A''_2) \to t(A_1, A_2) \to t(A_1, A'_2) \to 0. \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado es la proposición dual al teorema 4.21.

Teorema 4.25. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Supongamos que $\mathscr{A}_1$ tiene inyectivos y $\mathscr{A}_2$ tiene proyectivos. Si $0 \to A'_k \to A_k \to A''_k \to 0$ $(k = 1, 2)$ son sucesiones exactas en $\mathscr{A}_k$ entonces existen sucesiones exactas largas*

$$\begin{aligned} 0 \to t'_0(A'_1, A_2) \to t'_0(A_1, A_2) \to t'_0(A''_1, A_2) \to t'_1(A'_1, A_2) \\ \to t'_1(A_1, A_2) \to t'_1(A''_1, A_2) \to t'_2(A'_1, A_2) \to \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 \to t'_0(A_1, A''_2) \to t'_0(A_1, A_2) \to t'_0(A_1, A'_2) \to t'_1(A_1, A''_2) \\ \to t'_1(A_1, A_2) \to t'_1(A_1, A'_2) \to t'_2(A_1, A''_2) \to \cdots . \end{aligned}$$

$\square$

De manera similar, como se hizo para el caso de los funtores t_0 y t, podemos definir una transformación natural $\tau_0 : t \longrightarrow t'_0$ y así obtener un resultado dual al teorema 4.23, el cual lo enunciamos a continuación.

Teorema 4.26. *La transformación natural τ_0 es un isomorfismo natural si y sólo si el funtor t es exacto izquierdo.*

□

Para finalizar este capítulo, veamos una descripción alternativa de los morfismos conectores $\delta_k : \mathcal{H}_k(X'') \longrightarrow \mathcal{H}_{k-1}('')$ que usaremos más adelante (específicamente en la demostración del teorema 5.3).

Sea $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos uno-graduados.
Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & K_k \arrow[r, dashed, "\tau''_k"] \arrow[d, "j_k"] \arrow[lldd, dashed, "\tau'_k"'] & \mathcal{Z}_k(X'') \arrow[d, "i_k"] \\
 & & X_k \arrow[r, "\varphi_k"'] \arrow[d, "\partial_k"] & X''_k \arrow[d, "\partial''_k"] \\
\mathcal{Z}_{k-1}(X') \arrow[r] & X'_{k-1} \arrow[r, "\psi_{k-1}"'] & X_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"'] & X''_{k-1},
\end{tikzcd}$$

donde (K_k, j_k) es el núcleo de la composición $\varphi_{k-1}\partial_k$ y el cuadrado inferior del diagrama conmuta.

Para asegurar la existencia del morfismo τ''_k consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_k \arrow[r, "j_k"] \arrow[d, dashed, "\tau''_k"'] & X_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & X_{k-1} \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] \\
\mathcal{Z}_k(X'') \arrow[r, "i_k"'] & X''_k \arrow[r, "\partial''_k"'] & X''_{k-1}
\end{tikzcd}$$

donde (K_k, j_k) es el núcleo de la composición $\varphi_{k-1}\partial_k = \partial''_k\varphi_k$ y $(\mathcal{Z}_k(X''), i_k)$ es el núcleo de ∂''_k. Entonces el diagrama anterior puede ser extendido, mediante el morfismo $\tau''_k : K_k \longrightarrow \mathcal{Z}_k(X'')$, a un pullback (véase la proposición 13.2 de [14, pág 15]). Además, por hipótesis φ_k es un epimorfismo y por tanto τ''_k también lo es (teorema 2.45).

Por otro lado, $\partial_k(K_k) := im(\partial_k j_k) \subset im(\psi_{k-1}) = ker(\varphi_{k-1})$ y también se

cumple que $\partial_k(K_k) \subset ker(\partial_{k-1})$.
Dado que ψ_{k-1} es un monomorfismo, ψ_{k-1} induce un isomorfismo que denotaremos por $\psi_{k-1}^{-1} : im(\psi_{k-1}) \longrightarrow X'_{k-1}$ y por consiguiente podemos definir un morfismo $\tau'_k := \psi_{k-1}^{-1}\partial_k : K_k \longrightarrow X'_{k-1}$ pues $\partial_k(K_k) \subset Dom(\psi_{k-1}^{-1}) = = im(\psi_{k-1})$. Más aún, $\partial'_{k-1}\tau'_k(K_k) = \psi_{k-2}^{-1}\partial_{k-1}\partial_k(K_k) = 0$ y por lo tanto $\tau'_k : K_k \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}(X')$, es decir, $\tau'_k(K_k) \subset ker(\partial'_{k-1}) = \mathcal{Z}_{k-1}(X')$.

Denotemos por $\mu''_k : \mathcal{Z}_k(X'') \longrightarrow \mathcal{H}_k(X'')$ y $\mu'_{k-1} : \mathcal{Z}_{k-1}(X') \longrightarrow \mathcal{H}_{k-1}(X')$ las proyecciones canónicas.

Teorema 4.27. *Usando la notación anterior obtenemos que*

$$\mu'_{k-1}\tau'_k = \delta_k\mu''_k\tau''_k,$$

donde el homomorfismo $\delta_k : \mathcal{H}_k(X'') \longrightarrow \mathcal{H}_{k-1}(X')$ *es el morfismo conector definido en el teorema 4.20.*

Demostración.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K_k \arrow[rrr, "\mu''_k\tau''_k"] \arrow[ddl, "\tau'_k"'] \arrow[dd, "\partial_k"] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_k(X'') \arrow[d] \\
 & & \mathcal{Z}'_k(X) \arrow[r] \arrow[dl, "\widetilde{\partial}_k"] & \mathcal{Z}'_k(X'') \\
\mathcal{Z}_{k-1}(X') \arrow[r] & \mathcal{Z}_{k-1}(X) & &
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

donde los triángulos $\triangle K_k\mathcal{Z}_{k-1}(X')\mathcal{Z}_{k-1}(X)$ y $\triangle K_k\mathcal{Z}_{k-1}(X)\mathcal{Z}'_k(X)$ conmutan debido a las definiciones de los morfismos involucrados. La conmutatividad del cuadrilátero $\square K_k\mathcal{Z}'_k(X)\mathcal{Z}'_k(X'')\mathcal{H}_k(X'')$ se sigue de la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_k(X) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathcal{H}_k(X'') \arrow[ddd] \\
& K_k \arrow[r, "\tau''_k"] \arrow[d, "j_k"'] & \mathcal{Z}_k(X'') \arrow[ur, "\mu''_k"] \arrow[d] & \\
& X_k \arrow[r, "\varphi_k"'] \arrow[dl] & X''_k \arrow[dr] & \\
\mathcal{Z}'_k(X) \arrow[rrr] & & & \mathcal{Z}'_k(X'')
\end{tikzcd}
$$

Hechas estas observaciones, pasamos a demostrar la igualdad de morfismos requerida, para ello usaremos lo visto en la sección 2.5.
Sea $x \in^* K_k$, deseamos demostrar que $\delta_k \mu''_k \tau''_k x \equiv \mu'_{k-1}\tau'_k x$. Denotemos por $x'' := \mu''_k \tau''_k x \in^* \mathcal{H}_k(X'')$ y veamos el efecto bajo el morfismo δ_k.
Sea $z'' := (\mathcal{H}_k(X'') \longrightarrow \mathcal{Z}'_k(X''))x''$. Como $\mathcal{Z}'_k(X) \longrightarrow \mathcal{Z}'_k(X'')$ es un epimorfismo existe $z \in^* \mathcal{Z}'_k(X)$ tal que $(\mathcal{Z}'_k(X) \longrightarrow \mathcal{Z}'_k(X''))z \equiv z''$. Dado que $\delta_k x''$ no depende de la elección de z y el cuadrilátero $\square K_k \mathcal{Z}'_k(X) \mathcal{Z}'_k(X'') \mathcal{H}_k(X'')$ del diagrama 4.14 conmuta, se sigue que $z = (K_k \longrightarrow \mathcal{Z}'_k(X))x$. Luego $\widetilde{\partial}_k z \in^* \mathcal{Z}'_{k-1}(X)$.
Por otro lado,
$\widetilde{\partial}_k z \in^* ker(\mathcal{Z}_{k-1}(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}(X'')) = im(\mathcal{Z}_{k-1}(X') \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}(X))$ y por tanto existe $z' \in^* \mathcal{Z}_{k-1}(X')$ tal que $(\mathcal{Z}_{k-1}(X') \longrightarrow \mathcal{Z}_{k-1}(X))z' \equiv \widetilde{\partial}_k z$. En virtud de que $\delta_k x''$ no depende de la elección de z' y de la conmutatividad de los triángulos $\triangle K_k \mathcal{Z}_{k-1}(X')\mathcal{Z}_{k-1}(X)$ y $\triangle K_k \mathcal{Z}_{k-1}(X)\mathcal{Z}'_k(X)$ en el diagrama 4.14, se sigue que $z' \equiv \tau'_k x$.
Por lo tanto, $\mu'_{k-1}\tau'_k x \equiv \mu'_{k-1} z' \equiv \delta_k \mu''_k \tau''_k x$. $\square$

Capítulo 5

La fórmula de Künneth en categorías abelianas

Dado un funtor aditivo y exacto derecho $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$, estudiaremos las relaciones existentes entre $t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$ y $\mathcal{H}t(X_1, X_2)$. Más específicamente, probaremos la existencia de cierto homomorfismo

$$\alpha : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2),$$

donde X_1 y X_2 son complejos uno-graduados en $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. Dicho morfismo desempeñará el rol del homomorfismo producto de homología n-dimensional visto en la sección de preliminares.
La fórmula de Künneth nos garantizará, bajo ciertas condiciones, la existencia de un homomorfismo β tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \xrightarrow{\beta} t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow 0$$

es exacta. Además, garantizaremos que dicha sucesión se divide si añadimos más condiciones.

5.1. El homomorfismo α

Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda.
Sean X_1 y X_2 complejos uno-graduados en $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. Notar

que si $X_1 = (X_1, \partial)$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} im(\partial_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & ker(\partial_n) \arrow[d] \\ im(\partial_{n+1}) \arrow[r] & X_{1_n} \end{tikzcd}$$

y por consiguiente obtenemos un nuevo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} im(\partial_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & ker(\partial_n) \arrow[r] \arrow[d] & ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1}) \arrow[d, dashed] \\ im(\partial_{n+1}) \arrow[r] & X_{1_n} \arrow[r] & X_{1_n}/im(\partial_{n+1}). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si no tomamos en cuenta los subíndices, los siguientes diagramas resultan conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}(X_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(X_1) \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & \mathcal{Z}'(X_1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{Z}'(X_2) & \mathcal{H}(X_2) \arrow[l] \\ X_2 \arrow[u] & \mathcal{Z}(X_2). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor t conseguimos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[r] \arrow[d] & t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d] \\ t(X_1, X_2) \arrow[r] & t(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{Z}(X_2)), \end{tikzcd}$$

donde todos los complejos son vistos como complejos uno-graduados. Más aún, notar que $t(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{Z}(X_2))$, $t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$ y $t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2))$ tienen diferenciaciones triviales, luego son isomorfos a sus sucesiones de homología. Por tanto, aplicando el funtor $\mathcal{H}$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\eta"'] & t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d, "\tau"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ \mathcal{H}t(X_1, X_2) \arrow[r, "\zeta"'] & t(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Veamos que condiciones debe poseer t para asegurar la existencia del morfismo α.

Teorema 5.1. *Si el funtor* $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ *es exacto derecho entonces existe un único homomorfismo*

$$\alpha : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$$

de grado 0 *que preserva la conmutatividad del diagrama 5.1. Este homomorfismo es relativo natural a los morfismos* $X_1 \longrightarrow X_1'$ *y* $X_2' \longrightarrow X_2$*. Además, si* X_1 *y* X_2 *tienen diferenciaciones triviales entonces* α *es la identidad. Estas dos últimas propiedades caracterizan de manera única al homomorfismo* α*.*

Demostración.
En general tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_2) \longrightarrow 0$$

Dado que el funtor t es exacto derecho, las sucesiones

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow 0$$
$$t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow 0$$

son exactas, y por tanto $\xi : t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$ es un epimorfismo. Así, para asegurar la existencia de dicho homomorfismo tal que $\alpha\xi = \eta$, es suficiente probar que $ker(\xi) \subset ker(\eta)$. Además dicho morfismo satisface que $\zeta\alpha\xi = \zeta\eta = \tau\xi$, esto es, $\zeta\alpha = \tau$ y por consiguiente se garantiza la conmutatividad del diagrama 5.1.

Aplicando el teorema 3.7 a las sucesiones exactas

$$\mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_2),$$

obtenemos la sucesión exacta

$$t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \oplus t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \xrightarrow{\varphi} t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2))$$
$$\xrightarrow{\xi} t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow 0.$$

Por tanto $ker(\xi)$ es la suma directa de las imágenes de

$$t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2))$$

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)).$$

Entonces, para demostrar que $ker(\xi) \subset ker(\eta)$, es suficiente probar que la composición de los homomorfismos

$$t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \xrightarrow{\eta} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \tag{5.2}$$

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \xrightarrow{\eta} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \tag{5.3}$$

son iguales a cero. No obstante, dado que el morfismo η admite las factorizaciones

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$$

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$$

los homomorfismos 5.2 y 5.3 admiten las factorizaciones

$$t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$$

$$t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2),$$

respectivamente y por tanto es suficiente demostrar que los homomorfismos β y γ son cero.
Consideremos la factorización

$$t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \xrightarrow{t(\widetilde{\partial},1)} t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \xrightarrow{\beta'} t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2))$$

del operador diferenciación $t(\partial, 1) : t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2))$. Como t es exacto derecho el homomorfismo $t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow (\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{Z}'(X_2))$ es un epimorfismo. Además, en vitud de que $\widetilde{\partial}$ es el isomorfismo inducido por $\partial : X_1 \longrightarrow X_1$ se sigue que el morfismo $t(\widetilde{\partial}, 1)$ es un isomorfismo también. Esto implica que $im(\beta') = im(t(\partial, 1)) = \mathcal{B}t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2))$.
Observar que el homomorfismo β es inducido por β', el cual garantiza que $im(\beta) = 0$ y por lo tanto $\beta = 0$.

Similarmente, de la factorización

$$t(\mathcal{Z}(X_1), (X_2) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) \xrightarrow{t(1,\widetilde{\partial})} t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \xrightarrow{\beta'} t(\mathcal{Z}(X_1), (X_2)$$

del operador diferenciación $t(1,\partial) : t(\mathcal{Z}(X_1),(X_2) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1),(X_2)$, concluimos que $im(\gamma)=0$ y por lo tanto $\gamma=0$.
Es claro α es la identidad si X_1 y X_2 tienen diferenciaciones triviales. Veamos que α es relativo natural a los morfismos $X_1 \longrightarrow X_1'$ y $X_2' \longrightarrow X_2$, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{H}(X_1),\mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathcal{H}t(X_1,X_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ t(\mathcal{H}(X_1'),\mathcal{H}(X_2')) \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{H}t(X_1',X_2') \end{tikzcd}$$

En efecto, sabemos que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{H}(X_1),\mathcal{H}(X_2)) \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathcal{H}t(X_1,X_2) \\ & t(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[ul, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"'] & \\ t(\mathcal{H}(X_1'),\mathcal{H}(X_2')) \arrow[rr, "\alpha'"] & & \mathcal{H}t(X_1',X_2') \\ & t(\mathcal{Z}(X_1'),\mathcal{Z}'(X_2')) \arrow[ul, "\xi'"] \arrow[ur, "\eta'"'] & \end{tikzcd} .$$

Más aún, los siguientes diagramas también resultan ser conmutativos

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{H}(X_1),\mathcal{H}(X_2)) \arrow[d, "\lambda"'] & t(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[l, "\xi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ t(\mathcal{H}(X_1'),\mathcal{H}(X_2')) & t(\mathcal{Z}(X_1'),\mathcal{Z}'(X_2')) \arrow[l, "\xi'"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{H}t(X_1,X_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ t(\mathcal{Z}(X_1'),\mathcal{Z}'(X_2')) \arrow[r, "\eta'"'] & \mathcal{H}t(X_1',X_2') \end{tikzcd}$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha'\lambda\xi &= \alpha'\xi'\psi \\ &= \eta'\psi \\ &= \varphi\eta \\ &= \varphi\alpha\xi \end{aligned}$$

y como ξ es un epimorfismo se sigue que $\alpha'\lambda = \varphi\alpha$. Luego se cumple la conmutatividad del diagrama deseado.

Consideremos los complejos uno-graduados $\mathcal{Z}(X_1)$ y $\mathcal{Z}'(X_2)$. Como dichos complejos tienen diferenciaciones triviales obtenemos que $\mathcal{H}\mathcal{Z}(X_1) = \mathcal{Z}(X_1)$ y $\mathcal{Z}'(X_2) = \mathcal{H}\mathcal{Z}'(X_2)$. Entonces los homomorfismos canónicos $\mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1$ y $X_2 \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2)$ inducen un epimorfismo $\mathcal{Z}(X_1) = \mathcal{H}\mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1)$ y un monomorfismo $\mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{Z}'(X_2) = \mathcal{Z}'(X_2)$. Con estos morfismos en mente consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) = t(\mathcal{H}\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}\mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "1"'] & t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d, "\alpha"] \\ t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) = \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \arrow[r, "\eta"'] & \mathcal{H}t(X_1, X_2) \end{tikzcd}$$

donde ξ es el epimorfismo $t(\mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2))$.

Si $\alpha' : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$ es otro morfismo que también satisface las dos condiciones de naturalidad e identidad, entonces la conmutatividad es preservada si lo introducimos en el diagrama anterior. Luego $\alpha'\xi = \eta = \alpha\xi$ y como ξ es un epimorfismo se sigue que $\alpha = \alpha'$. Por lo tanto las dos condiciones caracterizan de manera única al morfismo α. $\square$

Si el funtor t es exacto izquierdo existe un morfismo similar pero en dirección opuesta.

Teorema 5.2. *Si el funtor $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ mencionado anteriormente es exacto izquierdo entonces existe un único homomorfismo*

$$\alpha' : \mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

de grado 0 que preserva la conmutatividad del diagrama 5.1. Este homomorfismo es relativo natural a los morfismos $X_1 \longrightarrow X_1'$ y $X_2' \longrightarrow X_2$. Además, si X_1 y X_2 tienen diferenciaciones triviales entonces α' es la identidad. Estas dos últimas propiedades caracterizan de manera única al homomorfismo α'.

$\square$

Teorema 5.3. *Sea $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} X'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos uno-graduados en $\mathscr{A}_1$ y Y un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$ tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow t(X', Y) \longrightarrow t(X, Y) \longrightarrow t(X'', Y) \longrightarrow 0$$

es exacta. Sean $\delta : \mathcal{H}(X'')\longrightarrow\mathcal{H}(X')$ *y* $\Delta : \mathcal{H}t(X'', Y)\longrightarrow\mathcal{H}t(X', Y)$ *los homomorfismos de conexión. Entonces, si el funtor* t *es exacto derecho, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{H}(X''), \mathcal{H}(Y)) \arrow[r, "t(\delta,1)"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & t(\mathcal{H}(X'), \mathcal{H}(Y)) \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \mathcal{H}t(X'', Y) \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{H}t(X', Y). \end{tikzcd}$$

Nota. Si el funtor t es exacto izquierdo, en el teorema anterior sólo se sustituyen α_1 y α_2 por α'_1 y α'_2 respectivamente.

Además, el teorema anterior también puede ser formulado para la variable contravariante, explícitamente tenemos:

Teorema 5.4. *Sea* $0\longrightarrow Y' \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\varphi} Y''\longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de complejos uno-graduados en* $\mathscr{A}_2$ *y* X *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_1$ *tal que la sucesión*

$$0\longrightarrow t(X, Y'')\longrightarrow t(X, Y)\longrightarrow t(X, Y')\longrightarrow 0$$

es exacta. Sean $\delta : \mathcal{H}(Y'')\longrightarrow\mathcal{H}(Y')$ *y* $\Delta : \mathcal{H}t(X, Y')\longrightarrow\mathcal{H}t(X, Y'')$ *los homomorfismos de conexión. Entonces, si el funtor* t *es exacto derecho, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y')) \arrow[r, "t(1,\delta)"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & t(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y'')) \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \mathcal{H}t(X, Y') \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{H}t(X, Y''). \end{tikzcd}$$

$\square$

Nota. Nuevamente, si t es un funtor exacto izquierdo, en el teorema anterior sólo se sustituyen α_1 y α_2 por α'_1 y α'_2 respectivamente.

Una vez aclarada esta situación, continuamos con la demostración del teorema 5.3.

Demostración.

Sea K_k el núcleo de la composición $\varphi_{k-1}\partial_k : X_k \longrightarrow X''_{k-1}$. Por el teorema 4.27 existen homomorfismos

$$\mathcal{H}_{k-1}(X') \xleftarrow{\mu'_{k-1}} \mathcal{Z}_{k-1}(X') \xleftarrow{\tau'_k} K_k \xrightarrow{\tau''_k} \mathcal{Z}_k(X'') \xrightarrow{\mu''_k} \mathcal{H}_k(X'')$$

tales que

$$\mu'_{k-1}\tau'_k = \delta_k \mu''_k \tau''_k. \tag{5.4}$$

De manera similar, sea (M_k, j_k) el núcleo de la composición

$$t(X,Y)_k \xrightarrow{\partial_k} t(X,Y)_{k-1} \longrightarrow t(X'',Y)_{k-1} \tag{5.5}$$

Nuevamente por el teorema 4.27 existen morfismos

$$\mathcal{H}_{k-1}t(X',Y) \xleftarrow{\rho'_{k-1}} \mathcal{Z}_{k-1}t(X',Y) \xleftarrow{\sigma'_k} M_k \xrightarrow{\sigma''_k} \mathcal{Z}_k t(X'',Y) \xrightarrow{\rho''_k} \mathcal{H}_k t(X'',Y)$$

tales que

$$\rho'_{k-1}\sigma'_k = \Delta_k \rho''_k \sigma''_k \tag{5.6}$$

Haciendo la composición del morfismo $t(K, \mathcal{Z}'(Y))_k \longrightarrow t(X,Y)_k$ con el homomomorfismo 5.5 obtenemos el morfismo cero, por lo tanto dicho morfismo se factoriza a través del núcleo M_k, es decir, existe un homomorfismo

$$\Theta_k : t(K, \mathcal{Z}'(Y))_k \longrightarrow M_k$$

tal que $j_k\Theta_k = t(K, \mathcal{Z}'(Y))_k \longrightarrow t(X,Y)_k$.
Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
t(\mathcal{H}(X'), \mathcal{H}(Y)) \arrow[d, "\alpha_1"'] & t(\mathcal{Z}(X'), \mathcal{Z}'(Y)) \arrow[l, "t(\mu', i)"'] \arrow[d] & t(K, \mathcal{Z}'(Y)) \arrow[l, "t(\tau', 1)"'] \arrow[d, "\Theta"] \\
\mathcal{H}t(X',Y) & \mathcal{Z}t(X',Y) \arrow[l, "\rho'"] & M \arrow[l, "\sigma'"]
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

y

$$\begin{tikzcd}
t(K, \mathcal{Z}'(Y)) \arrow[r, "t(\tau'',1)"] \arrow[d, "\Theta"'] & t(\mathcal{Z}(X''), \mathcal{Z}'(Y)) \arrow[r, "t(\mu'',i)"] \arrow[d] & t(\mathcal{H}(X''), \mathcal{H}(Y)) \arrow[d, "\alpha_2"] \\
M \arrow[r, "\sigma''"'] & \mathcal{Z}t(X'', Y) \arrow[r, "\rho''"'] & \mathcal{H}t(X'', Y)
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

donde $i : \mathcal{H}(Y) \longrightarrow \mathcal{Z}'(Y)$ es la inclusión.
La conmutatividad del rectángulo izquierdo del diagrama 5.7 y el rectángulo derecho del diagrama 5.8 se sigue directamente de la definición de los homomorfismos α_1 y α_2. Además, la comutatividad de los rectángulos restantes se sigue de la definición del morfismo Θ.
De las igualdades 5.4 y 5.6 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_2 t(\mu''\tau'', i) &= \Delta\rho''\sigma''\Theta \\
&= \rho'\sigma'\Theta \\
&= \alpha_1 t(\mu'\tau', i) \\
&= \alpha_1 t(\delta\mu''\tau'', i) \\
&= \alpha_1 t(\delta, 1) t(\mu''\tau'', i).
\end{aligned}$$

Dado que μ'', τ'' son epimorfismos, i es un monomorfismo y t es un funtor exacto derecho, el homomorfismo $t(\mu''\tau'', i)$ es necesariamente un epimorfismo. Por lo tanto $\Delta\alpha_2 = \alpha_1 t(\delta, 1)$. □

Teorema 5.5. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor exacto derecho. Sean X_1 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_1$ y X_2 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$. Supongamos que la sucesión*

$$0 \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2)$$

es exacta y que el homomorfismo

$$\alpha : t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2)$$

es un epimorfismo. Entonces la sucesión

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2) &\xrightarrow{k_*} \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \\
\xrightarrow{i_*} \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) &\xrightarrow{j_*} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \cdots
\end{aligned}$$

inducida por los homomorfismos naturales

$$X_1 \xrightarrow{k} \mathcal{B}(X_1) \xrightarrow{i} \mathcal{Z}(X_1) \xrightarrow{j} X_1 \tag{5.9}$$

es exacta.

Nota. Existe un resultado similar para la segunda variable contravariante, sólo se reemplaza $\mathcal{Z}(X_1)$ y $\mathcal{B}(X_1)$ por $\mathcal{Z}'(X_2)$ y $\mathcal{B}'(X_2)$ respectivamente, además de invertir la dirección de las flechas en 5.9.

Demostración.
Por hipótesis t es exacto derecho y la sucesión

$$0 \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2)$$

es exacta, así obtenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos unograduados

$$0 \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2) \longrightarrow t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \longrightarrow 0.$$

Por el teorema 4.20 existe una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2) &\xrightarrow{k_*} \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \\ \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) &\xrightarrow{j_*} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

Resta probar que $\Delta = i_*$. En efecto:
Por el teorema 5.3 existe un diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "t(\delta,1)"] \arrow[d, "\alpha"'] & t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2), \end{tikzcd}$$

donde $\delta : \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1)$ es el morfismo conector de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow 0.$$

Ahora, $\delta = i$ y por la naturalidad del homomorfismo α concluimos que $i_*\alpha = \alpha' t(\delta, 1)$ y por tanto $i_*\alpha = \Delta\alpha$. No obstante, α es un epimorfismo por hipótesis y por consiguiente concluimos que $i_* = \Delta$. $\square$

Dualmente tenemos el siguiente resultado para funtores exactos izquierdos.

Teorema 5.6. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor exacto izquierdo. Sean X_1 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_1$ y X_2 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$. Supongamos que la sucesión*

$$t(Z'(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2) \longrightarrow 0$$

es exacta y que el homomorfismo

$$\alpha' : \mathcal{H}t(B'(X_1), X_2) \longrightarrow t(B'(X_1), H(X_2))$$

es un monomorfismo. Entonces la sucesión

$$\begin{gathered} \cdots \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2) \xrightarrow{k_*} \mathcal{H}t(\mathcal{Z}'(X_1), X_2) \\ \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}t(\mathcal{B}'(X_1), X_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow \cdots \end{gathered}$$

inducida por los homomorfismos naturales

$$X_1 \xrightarrow{k} \mathcal{Z}'(X_1) \xrightarrow{i} \mathcal{B}'(X_1) \xrightarrow{j} X_1 \tag{5.10}$$

es exacta.

$\square$

5.2. La fórmula de Künneth

Finalmente hemos llegado al objetivo principal de esta tésis, enunciar y demostrar la fórmula de Künneth. Existen dos variantes de este teorema, una es para funtores exactos derechos y otra para funtores exactos izquierdos. Presentaremos las dos versiones de dicho teorema pero sólo probaremos el caso de los funtores exactos derechos. Antes presentamos un resultado necesario:

Teorema 5.7. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \to \mathscr{A}$ un funtor exacto derecho, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Sean X_1 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_1$ y X_2 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$. Supongamos que las sucesiones exactas cortas*

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_1) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_1) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

se dividen. Entonces el homomorfismo $\alpha : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, X_2)$ es un monomorfismo y la imagen de α es un sumando directo de $\mathcal{H}t(X_1, X_2)$.

Demostración.
Dado que las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_1) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow 0$$

se dividen, existen morfismos

$$\mathcal{Z}'(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1)$$
$$\mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2)$$

tales que

$$\mathcal{Z}'(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_1) = 1_{\mathcal{Z}'(X_1)}$$
$$\mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) = 1_{\mathcal{H}(X_2).}$$

Haciendo la composición de los morfismos existentes con los morfismos canónicos $X_1 \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_1)$ y $\mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow X_2$, obtenemos los homomorfismos

$$\beta : X_1 \longrightarrow \mathcal{H}(X_1)$$
$$\gamma : \mathcal{H}(X) \longrightarrow X_2.$$

Luego los homomorfismos inducidos $\mathcal{H}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1)$ y $\mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2)$ resultan ser las identidades correspondientes. Por la naturalidad de α obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\alpha"'] & t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d, "1"] \\
\mathcal{H}t(X_1, X_2) \arrow[r, "\xi"'] & t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)),
\end{tikzcd}$$

donde el homomorfismo ξ es inducido por el homomorfismo $t(\beta, \gamma)$. Por lo tanto $\xi\alpha = 1$, lo cual garantiza lo afirmado por el teorema. $\square$

Existe un teorema análogo al anterior para funtores exactos izquierdos.

Teorema 5.8. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \rightarrow \mathscr{A}$ un funtor exacto izquierdo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Sean X_1 un complejo* *uno-graduado en* $\mathscr{A}_1$ *y* X_2 *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_2$*. Supongamos que las sucesiones exactas*

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_2) \longrightarrow 0$$

se dividen. Entonces el homomorfismo $\alpha' : \mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$ *es un epimorfismo y la imagen de* α' *es un sumando directo de* $\mathcal{H}t(X_1, X_2)$*.*

□

Finalmente, enunciamos el teorema principal de esta tesis.

Teorema 5.9. *(Fórmula de Künneth para funtores exactos derechos) Sean* $\mathscr{A}_1$*,* $\mathscr{A}_2$ *y* $\mathscr{A}$ *categorías abelianas y* $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \rightarrow \mathscr{A}$ *un funtor exacto derecho aditivo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Supongamos que* $\mathscr{A}_1$ *tiene proyecciones,* $\mathscr{A}_2$ *inyectivos y* $\mathscr{A}$ *coproductos. Sean* X_1 *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_1$ *y* X_2 *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_2$*.*

Si los homomorfismos

$$\alpha_1 : t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2)$$
$$\alpha_2 : t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2)$$

son isomorfismos y

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0 = t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

o

si los homomorfismos

$$\alpha_1 : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{B}'(X_2))$$
$$\alpha_2 : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2))$$

son isomorfismos y

$$t_1(X_1, \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)),$$

entonces existe un homomorfismo β *de grado* -1 *tal que la sucesión*

$$0 \to t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \xrightarrow{\beta} t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \to 0 \tag{5.11}$$

es exacta. Más aún, si añadimos las hipótesis del teorema 5.7 obtenemos que 5.11 se divide y por tanto

$$\mathcal{H}t(X_1, X_2) \cong t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \bigoplus (t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)))^+$$

donde $(t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)))^+$ *denota al complejo uno-graduado derivado del complejo uno-graduado* $t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$ *al reemplazar* k *por* $k-1$.

Si el teorema anterior es formulado para funtores exactos izquierdos, la dirección de los morfismos cambia, los funtores $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{B}$ se sustituyen por $\mathcal{Z}'$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente, y los homomorfismos α y α_k son reemplazados por α' y α'_k respectivamente. Además los funtores derivados izquierdos t_i son cambiados por los funtores derivados derechos t'_i.

Teorema 5.10. *(Fórmula de Künneth para funtores exactos izquierdos) Sean* $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ *y* $\mathscr{A}$ *categorías abelianas y* $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \to \mathscr{A}$ *un funtor exacto izquierdo aditivo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Supongamos que* $\mathscr{A}_1$ *posee inyectivos,* $\mathscr{A}_2$ *proyectivos y* $\mathscr{A}$ *coproductos. Sean* X_1 *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_1$ *y* X_2 *un complejo uno-graduado en* $\mathscr{A}_2$.

Si los homomorfismos

$$\alpha'_1 : \mathcal{H}t(\mathcal{B}'(X_1), X_2) \longrightarrow t(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$
$$\alpha'_2 : \mathcal{H}t(\mathcal{Z}'(X_1), X_2) \longrightarrow t(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

son isomorfismos y

$$t'_1(\mathcal{B}'(X_1), X_2) = 0 = t'_1(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

o

si los homomorfismos

$$\alpha'_1 : \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$$
$$\alpha'_2 : \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{Z}(X_2)) \longrightarrow t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}(X_2))$$

son isomorfismos y

$$t'_1(X_1, \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t'_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)),$$

entonces existe un homomorfismo β' de grado -1 tal que la sucesión

$$0 \to t_1'(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \xrightarrow{\beta'} \mathcal{H}t(X_1, X_2) \xrightarrow{\alpha'} t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \to 0 \tag{5.12}$$

es exacta. Más aún, si añadimos las hipótesis del teorema 5.8 obtenemos que 5.12 se divide.

□

A continuación presentamos la prueba del teorema 5.9.

Demostración.
Supongamos que los morfismos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \\ \alpha_2 &: t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \end{aligned}$$

son isomorfismos y que

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0 = t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)).$$

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d] & \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \arrow[d] & \\
t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d] & \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{H}t(X_1, X_2) \arrow[r, dashed, "\beta"] \arrow[d] & t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d] \\
0 & \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \arrow[r, "\alpha_1^{-1}"] \arrow[d] & t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \arrow[d] \\
 & \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \arrow[r, "\alpha_2^{-1}"] & t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)).
\end{tikzcd} \tag{5.13}$$

En virtud de que el funtor t es exacto derecho se sigue que la primera columna

del diagrama 5.13 es exacta.
Aplicando el corolario 4.24 a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) \longrightarrow t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2).$$

Sin embargo, por hipótesis, $t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0$ y por tanto el morfismo $t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2)$ es un monomorfismo. Luego las hipótesis del teorema 5.5 se satisfacen y por consiguiente la columna central del diagrama 5.13 es exacta.
Similarmente, aplicando el corolario 4.24 a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{aligned} t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \to t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \to t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \\ \to t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)). \end{aligned}$$

Dado que $t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) = 0$, la tercera columna del diagrama 5.13 es exacta. De lo anterior es claro que existe un único morfismo

$$\beta : \mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

tal que hace conmutar el diagrama 5.13. Asimismo, notar que el homomorfismo $\mathcal{H}t(X_1, X_2) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2)$ es el único que tiene grado -1 y los demás tiene grado 0. Por tanto, β debe tener grado -1 también.
Finalmente, la exactitud de la sucesión 5.11 se sigue directamente del diagrama 5.13.
La prueba es similar si suponemos que los homomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha_1 : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{B}'(X_2)) \\ \alpha_2 : t(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(X_1, \mathcal{Z}'(X_2)) \end{aligned}$$

son isomorfismos y que

$$t_1(X_1, \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)).$$

□

Por último, veamos que a partir del teorema 5.9 se deduce la fórmula de Künneth para álgebra homológica.
El siguiente resultado nos muestra las condiciones que deben cumplirse para obtener las hipótesis del teorema 5.9.

Teorema 5.11. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo, exacto derecho, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Supongamos que $\mathscr{A}_1$ tiene proyectivos, $\mathscr{A}_1$ inyectivos y $\mathscr{A}_1$ coproductos. Sean X_1 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_1$ y X_2 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$ tal que*

$$\begin{aligned} t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \\ t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Entonces las primeras condiciones del teorema 5.9 se cumplen.
Por otro lado, si

$$\begin{aligned} t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) \\ t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}'(X_2)), \end{aligned} \tag{5.15}$$

entonces las segundas condiciones del teorema 5.9 se satisfacen.

Demostración.
Probaremos la primera afirmación, la segunda se realiza de manera análoga. Supongamos las condiciones 5.14, deseamos demostrar que los homomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha_1 : t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), X_2) \\ \alpha_2 : t(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{Z}(X_1), X_2) \end{aligned}$$

son isomorfismos y que

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0 = t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

En efecto, por hipótesis $t_1(\mathcal{Z}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) = 0$. Resta ver que $t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) =$ $= 0$. Aplicando el funtor $t_1(\mathcal{B}(X_1), \_)$ (el cual es semiexacto por el corolario 4.22) a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) \longrightarrow t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)).$$

Por hipótesis $t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) = 0$ y $t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2)) = 0$ y por consiguiente $t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) = 0$. De manera similar, aplicando el funtor $t_1(\mathcal{B}(X_1), \_)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow X_2 \longrightarrow \mathcal{B}(X_2) \longrightarrow 0,$$

obtenemos que $t_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0$.
Finalmente, veamos que α_1 y α_2 son isomorfismos.
Observar que los homomorfismos

$$\begin{aligned} t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) &\longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) \\ t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) &\longrightarrow \mathcal{H}t(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) \end{aligned}$$

son identidades (pues $\mathcal{B}(X_2)$ y $\mathcal{Z}(X_2)$ tienen diferenciaciones triviales) y por consiguiente son isomorfismos.
Luego se cumplen las primeras condiciones del teorema 5.9. $\square$

La proposición dual para funtores exactos izquierdos es la siguiente.

Teorema 5.12. *Sea $t : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \longrightarrow \mathscr{A}$ un funtor aditivo, exacto izquierdo, covariante en la primera variable y contravariante en la segunda. Supongamos que $\mathscr{A}_1$ tiene inyectivos, $\mathscr{A}_1$ proyectivos y $\mathscr{A}_1$ coproductos. Sean X_1 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_1$ y X_2 un complejo uno-graduado en $\mathscr{A}_2$ tal que*

$$\begin{aligned} t'_1(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t'_1(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{H}(X_2)) \\ t'_1(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t'_1(\mathcal{Z}'(X_1), \mathcal{H}(X_2)). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Entonces las primeras condiciones del teorema 5.10 se cumplen.
Por otro lado, si

$$\begin{aligned} t'_1(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t'_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) \\ t'_1(\mathcal{B}'(X_1), \mathcal{Z}(X_2)) = 0 = t'_1(\mathcal{H}(X_1), \mathcal{Z}(X_2)), \end{aligned} \tag{5.17}$$

entonces las segundas condiciones del teorema 5.10 se satisfacen.

□

Si t es exacto derecho y t_1 es exacto izquierdo (o dualmente, si t es exacto izquierdo y t'_1 es exacto derecho) podemos simplificar las anteriores restricciones.

Sea t un funtor exacto derecho como antes y supongamos las condiciones 5.14. Aplicando el funtor $t_1(\_,\mathcal{B}(X_2))$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$t_1(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t_1(X_1,\mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t_1(\mathcal{B}(X_1),\mathcal{B}(X_2)).$$

Entonces las condiciones 5.14 implican que $t_1(X_1,\mathcal{B}(X_2)) = 0$.

Similarmente, aplicando el funtor $t_1(\_,\mathcal{H}(X_2))$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow 0$$

obtenemos que $t_1(X_1,\mathcal{H}(X_2)) = 0$.

Por otro lado, supongamos que

$$t_1(X_1,\mathcal{H}(X_2)) = 0 = t_1(X_1,\mathcal{B}(X_2)). \tag{5.18}$$

Si suponemos que el funtor t_1 es exacto izquierdo, entonces aplicando los funtores $t_1(\_,\mathcal{B}(X_2))$ y $t_1(\_,\mathcal{H}(X_2))$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow 0,$$

obtenemos las siguiente sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow t_1(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t_1(X_1,\mathcal{B}(X_2)) \longrightarrow t_1(\mathcal{H}(X_1),\mathcal{B}(X_2))$$
$$0 \longrightarrow t_1(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow t_1(X_1,\mathcal{H}(X_2)) \longrightarrow t_1(\mathcal{H}(X_1),\mathcal{H}(X_2))$$

y por tanto

$$t_1(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{B}(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{Z}(X_1),\mathcal{H}(X_2)).$$

Similarmente, de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}X_1 \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$

conseguimos que

$$t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t_1(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{H}(X_2))$$

y por tanto la condición 5.18 implica las igualdades 5.14.
Un razonamiento análogo al anterior muestra que

$$t_1(\mathcal{B}'(X_1), X_2) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), X_2) \tag{5.19}$$

es equivalente a las condiciones 5.15, es decir, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 5.13. *Sea t un funtor aditivo y exacto derecho como antes y supongamos que t_1 es exacto izquierdo. Sean X_1 y X_2 complejos uno-graduados. Entonces las condiciones 5.14 son equivalentes a*

$$t_1(X_1, \mathcal{B}(X_2)) = 0 = t_1(X_1, \mathcal{H}(X_2))$$

y las condiciones 5.15 equivalen a

$$t_1(\mathcal{B}'(X_1), X_2) = 0 = t_1(\mathcal{H}(X_1), X_2).$$

□

Dualmente:

Teorema 5.14. *Sea t un funtor aditivo y exacto izquierdo como antes y supongamos que t'_1 es exacto derecho. Sean X_1 y X_2 complejos uno-graduados. Entonces las condiciones 4.5 son equivalentes a*

$$t'_1(X_1, \mathcal{B}'(X_2)) = 0 = t'_1(X_1, \mathcal{H}(X_2))$$

y las condiciones 4.3 equivalen a

$$t'_1(\mathcal{B}(X_1), X_2) = 0 = t'_1(\mathcal{H}(X_1), X_2).$$

□

Una vez probado los teoremas anteriores y usando el teorema 5.9 para el caso de R-módulos, obtenemos las siguientes versiones de la fórmula de Künneth.

Teorema 5.15. *(Fórmula de Künneth para homología) Sean C_1 un complejo de cadenas de R-módulos derechos y C_2 un complejo de cadenas de R-módulos izquierdos. Supongamos que*

$$Tor_1(\mathcal{B}(C_1), \mathcal{B}(C_2)) = 0 = Tor_1(\mathcal{B}(C_1), \mathcal{H}(C_2))$$
$$Tor_1(\mathcal{Z}(C_1), \mathcal{B}(C_2)) = 0 = Tor_1(\mathcal{Z}(C_1), \mathcal{H}(C_2))$$

y que las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_1) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_2) \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow 0$$

se dividen. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}(C_1) \otimes \mathbb{H}(C_2) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{H}(C_1 \otimes C_2)$$
$$\xrightarrow{\beta} Tor_1(\mathbb{H}(C_1), \mathbb{H}(C_2)) \longrightarrow 0,$$

donde α tiene grado cero y β grado -1.

Teorema 5.16. *(Fórmula de Künneth para cohomología) Sean C_1 y C_2 complejos de cadenas de R-módulos izquierdos. Supongamos que*

$$Ext^1(\mathcal{B}(C_1), \mathcal{B}'(C_2)) = 0 = Ext^1(\mathcal{B}(C_1), \mathcal{H}(C_2))$$
$$Ext^1(\mathcal{Z}(C_1), \mathcal{B}'(C_2)) = 0 = Ext^1(\mathcal{Z}(C_1), \mathcal{H}(C_2))$$

y que las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X_1) \longrightarrow \mathcal{Z}(X_1) \longrightarrow \mathcal{H}(X_1) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(X_2) \longrightarrow \mathcal{Z}'(X_2) \longrightarrow \mathcal{B}'(X_2) \longrightarrow 0$$

se dividen. Entonces existe una sucesión exacta corta que se divide

$$0 \longrightarrow Ext^1(\mathcal{H}(C_1), \mathcal{H}(C_2)) \xrightarrow{\beta'} \mathbb{H}Hom_R(C_1, C_2)$$
$$\xrightarrow{\alpha'} Hom_R(\mathbb{H}(C_1), \mathbb{H}(C_2)) \longrightarrow 0,$$

donde α' tiene grado cero y β' grado -1.

Conclusión

A lo largo de esta tesis nos percatamos que las categorías abelianas poseen propiedades bastantes interesantes y teoremas muy parecidos a los que se cumplen en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$, lo que nos permitió desarrollar la mayor parte del álgebra homológica y así poder lograr nuestro objetivo final. Además, los conceptos de ciclos, fronteras, co-ciclos y co-fronteras n-dimensionales que teníamos en la categoría $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ definen los funtores $\mathcal{Z}_n$, $\mathcal{B}_n$,$\mathcal{Z}'_n$ y $\mathcal{B}'_n$. En el caso del n-ésimo funtor de homología, se logró darle un sentido a la expresión $\mathcal{H}_n := \mathcal{Z}_n(A)/\mathcal{B}_n(A)$ pues sabemos que en general carece de significado hablar de un cociente entre objetos.

Sin lugar a dudas el teorema que nos resultó más familiar en una categoría abeliana fue la proposición 2.49, la cual recupera la noción de inyectividad y sobreyectividad que tenemos en la categoría **Set**. Asimismo, las construcciones de los funtores derivados izquierdos y de los funtores derivados derechos en una categoría abeliana son muy similares a las que teníamos en $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$. La pregunta que surge inmediatamente es si existen los funtores Ext y Tor. Al parecer en una categoría abeliana no podemos asociarles un significado pues recordar que para el caso del funtor Tor se involucra el concepto de producto tensorial de R-módulos. Una posible respuesta es estudiar categorías con más condiciones que nos permitan darle un sentido al produto tensorial de dos objetos, por ejemplo categorías monoidales o categorías abelianas tensoriales (ver [6]).

Finalmente, una vez dada la versión de la fórmula de Künneth para funtores exactos izquierdos en una categoría abeliana, hacemos las siguientes observaciones.

1. Las versiones de la fórmula de Künneth vistas en esta tesis nos garantizan la existencia de un homomorfismo que nos permitirá, bajo ciertas hipótesis, relacionar la homología de un par de complejos con la homología de cada uno de ellos.

2. En el caso general, el homomorfismo α desempeña el mismo papel que el producto de homología n-dimensional y el morfismo α'' en las versiones de álgebra homológica y topología algebraica respectivamente.

3. Los teoremas 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14 nos permitieron deducir las versiones de la fórmula de Künneth para homología y cohomología a partir del teorema 5.9. Más aún, las hipótesis del teorema 1.6 fueron reemplazadas por otras diferentes sin alterar la conclusión del mismo, es decir, se dejaron a un lado las condiciones que deben cumplir los complejos de cadenas y el anillo R.

Bibliografía

[1] Berrick, A. J. y M. E. Keating, *Categories and Modules with K-theory in view*. United Kingdom, Cambridge University Press, 2000.

[2] Berriel Mastretta, Juan Pablo, *Teorema de los Coeficientes Universales y la Fórmula de Künneth*. Tesis, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2002.

[3] Borceux Francis, *Handbook of categorical algebra 2: Categories and structures*. Great Britain, Cambridge University Press, 1994.

[4] Bucur, Ion y Aristide Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*. London, John Wiley, 1968.

[5] Contreras Pérez, Ángel, *Los funtores Ext y Tor y algunas de sus propiedades*. Tesis, Escuela de Ciencias Físico Matemáticas, UAP, 1988.

[6] Deligne P. y Milne J.S., *Tannakian Categories*. Agosto 15, 2012.

[7] Cartan, Henri y Samuel Eilenberg, *Homological algebra*. United States of America, Princeton University Press, 1956.

[8] Freyd, Peter, *Abelian categories*. New York, Columbia University, 1962.

[9] Fluch, MartinG., *The Künneth Formula in Abelian Categories*. Master's thesis, Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, 2004.

[10] Hatcher, Allen, *Algebraic Topology*. New York, Cambridge University Press, 2001.

[11] Herrlich, Horst y George E. Strecker, *Category Theory: An introduction*. New York, Allyn and Bacon, 1973.

[12] Hilton, P. J., y U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*. New York, Springer-Verlag, 1971.

[13] Mc Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*. New York, Springer-Verlag, 19.

[14] Mitchell, Barry, *Theory of categories*. New York, Academic Press, 1965.

[15] Northcott, D.G., *An introduction to homological algebra*. Great Britain, Cambrigde University Press, 1960.

[16] Osborne, M. Scott, *Basic homological algebra*. New York, Springer, 2000.

[17] Rotman, Joseph J., *An introduction to Algebraic Topology*. New York, Springer, 1988.

[18] Santiago Vargas, Valente, *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos*. Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.

[19] Weibel, Charles A., *An introduction to homological algebra*. United States of America, Cambridge University Press, 1994.