



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA

TEMA DE TESIS:

**“ANÁLISIS DEL TRANSPORTE DE MASA DURANTE EL
SECADO CONVECTIVO SISTEMAS MODELO SUJETOS A
DEFORMACIÓN Y ENCOGIMIENTO”**

QUE PRESENTA:

BETZABETH ORTÍZ GARCÍA CARRASCO

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN INGENIERÍA QUÍMICA**

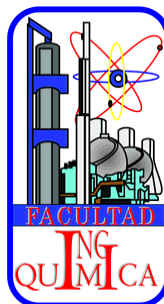
ASESOR:

DR. IRVING ISRAEL RUIZ LÓPEZ

CO-ASESOR:

DR. ALEJANDRO ESCOBEDO MORALES

DICIEMBRE 2016





BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA



ACTA DE REVISIÓN, LIBERACIÓN E IMPRESIÓN DE TESIS

Nombre del (de la) estudiante: Betzabeth Ortiz García Carrasco

Matrícula: 214470697

Nombre del asesor: DR. IRVING ISRAEL RUIZ LÓPEZ

Nombre del coasesor: DR. ALEJANDRO ESCOBEDO MORALES

Título de la Tesis:

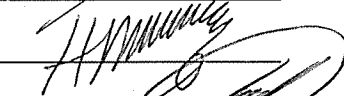
"ANÁLISIS DEL TRANSPORTE DE MASA DURANTE EL SECADO CONVECTIVO DE SISTEMAS
MODELO SUJETOS A DEFORMACIÓN Y ENCOGIMIENTO"

Comisión Revisora:

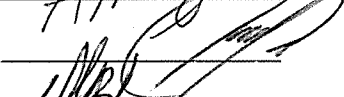
Presidente: Dr. Francisco Manuel Pacheco Aguirre

Firma: 

Secretario(a): M.C. Héctor Ruiz Espinosa

Firma: 

Vocal (1): Dr. Alejandro Escobedo Morales

Firma: 

Vocal (2): Dr. Irving Israel Ruiz López

Firma: 

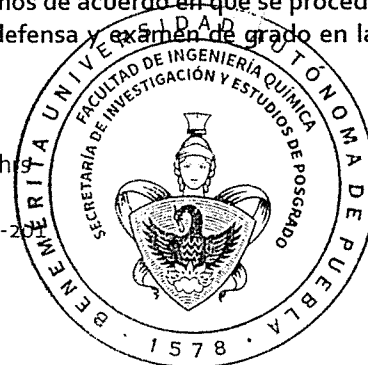
Los integrantes de la Comisión Revisora expresamos que hemos leído y revisado el manuscrito de la tesis de maestría que presenta el (la) estudiante arriba indicado, por lo que **estamos de acuerdo en que se proceda con la impresión definitiva de la tesis y que el (la) estudiante presente su defensa y examen de grado en la fecha, horario y lugar que se indican a continuación.**

Fecha de examen: 12 de diciembre de 2016

Hora: 10:00 hrs

Día de la semana: lunes

Lugar: FIQ 1-2



*La verdad. Es una cosa
hermosa y terrible, y por lo
tanto debe ser tratada con
cuidado.*

J.K. Rowling

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de llegar al final de esta etapa de mi vida, *“Más vale un buen final que un buen principio”*.

Gracias a mi familia. A mi madre y mi hermana, las dos mujeres más importantes en mi vida. Gracias por su amor, comprensión, motivación, apoyo, compañía y cuidado. Las amo con todo mi corazón.

Gracias a mis familiares y amigos. A mi Tío Javier por tus consejos, enseñanzas, por escucharme y motivarme a no claudicar a pesar de las circunstancias. A mi abuelo Luis por ser esa figura que creía perdida, por tu cariño. A mi amiga Fanny, por los buenos momentos, por este viaje inesperado y por mostrarme el otro lado de la vida y saber que no *“No todo es blanco o gris, depende del matiz”*.

Gracias Dr. Irving por compartir sus conocimientos conmigo, por motivarme, por alguna vez me enseñarme que el tiempo lo arregla todo y a no perder el camino.

Gracias Dr. Paco por su tiempo, sus enseñanzas, su apoyo y sus sabias opiniones. A mi comité revisor, Mtro. Héctor por su tiempo, buen humor y disponibilidad; Dr. Alejandro por su disponibilidad y atención.

Agradezco también a CONACYT por haberme brindado la oportunidad de participar del Programa de Becas para Estudios de Posgrado. A la VIEP por los apoyos recibidos durante mi estancia como estudiante de maestría.

Índice general

Índice de figuras	VI
Índice de tablas	VIII
Nomenclatura	IX
Introducción	1
1. Marco teórico	3
1.1. El secado en materiales alimenticios	3
1.2. Mecanismos de transporte durante el secado	4
1.3. Propiedades termofísicas del producto	9
1.3.1. Propiedades térmicas	9
1.3.2. Propiedades físicas	10
1.4. Matrices biológicas	10
1.5. Alteraciones físicas en el producto seco	12
1.6. Modelación descriptiva del proceso de secado	15
1.6.1. Enfoques de la modelación	15
1.6.2. Formulación matemática	16
1.6.3. Métodos de solución	18

1.6.4.	Generación de mallas	18
1.6.5.	Propiedades de modelación	21
1.6.6.	Antecedentes de la inclusión de cambios físicos en la modelación del proceso de secado	22
2.	Metodología	26
2.1.	Elaboración de los sistemas modelo	27
2.2.	Experimentos de secado	28
2.2.1.	Determinación de las cinéticas de secado	29
2.3.	Determinación del encogimiento y deformación	30
2.3.1.	Análisis de imagen	31
2.4.	Modelación del proceso de secado	33
2.4.1.	Modelo general del proceso de secado por difusión	33
2.4.2.	Expresión del modelo de secado en los sistemas coordenados es- tudiados	34
2.4.3.	Forma adimensional en los sistemas coordenados de estudio . . .	35
2.5.	Solución de los modelos	38
2.5.1.	Solución numérica	38
2.5.2.	Solución analítica	60
2.5.3.	Modelación de las parámetros de tamaño y factores de forma . .	63
2.6.	Determinación de la difusividad efectiva	64
3.	Resultados y Discusión	66
3.1.	Cinéticas de secado	66
3.2.	Determinación del encogimiento mediante medición directa	68
3.2.1.	Encogimiento de cilindros completos y placas circulares	68

Índice general

3.3. Determinación de deformación mediante el análisis de imagen	71
3.4. Determinación de parámetros de forma mediante análisis de imagen . .	74
3.5. Determinación de la difusividad efectiva del agua en el producto	79
3.5.1. Método de pendientes	79
3.5.2. Modelo	81
3.5.3. Simulación del proceso de secado	85
4. Conclusiones	90
Bibliografía	92

Índice de figuras

1.1. Mecanismos de secado.	5
1.2. Representación esquemática del encogimiento y colapso durante el proceso de secado (Khalloufi <i>et al.</i> , 2009).	14
1.3. Malla estructurada (Nicoletti, 2013).	19
1.4. Malla no estructurada.	20
2.1. Descripción general de la metodología propuesta.	26
2.2. Dibujo de un secador de túnel horizontal.	29
2.3. Metodología general del análisis de imagen.	32
2.4. Representación de una malla triangular mostrando los vecinos de primer (Ω_{1i}) y segundo nivel (Ω_{2i}) del vértice \mathbf{v}_i	39
2.5. Ejemplo de malla con vértices numerados.	40
2.6. Porción de la malla de estudio.	47
2.7. Malla original y malla deformada.	50
2.8. Elemento triangular.	53
2.9. Elemento en coordenadas cartesianas (a) y baricéntricas (b).	56
2.10. Temperatura en el elemento triangular.	57

2.11. Esquema del procedimiento de determinación del coeficiente de difusividad utilizando el método de pendientes.	61
3.1. Curvas de secado de los sistemas modelo. Cilindro completo (CC), placa plana (PP), medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).	67
3.2. Curvas de velocidad de secado. Cilindro completo (CC), placa plana (PP), medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).	68
3.3. Características de encogimiento de los cilindros de gel como función del contenido de humedad.	69
3.4. Características de encogimiento de las placas circulares de gel como función del contenido de humedad.	71
3.5. Mapa de encogimiento-deformación para los medios cilindros. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).	72
3.6. Mapa de encogimiento-deformación para los cuartos de cilindro. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).	73
3.7. Mapa de encogimiento-deformación para los prismas cuadrangulares. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).	73
3.8. Evolución del perímetro de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).	77

3.9. Evolución del área de sección transversal de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).	78
3.10. Evolución del área específica de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).	79
3.11. Difusividad de agua como función del contenido de humedad durante el secado de los sistemas de estudio.	81
3.12. Curvas de secado experimentales y simuladas de cilindro completo.	84
3.13. Curvas de secado experimentales y simuladas de placa circular.	85
3.14. Malla al inicio del proceso de simulación (a), malla deformada finalizada la simulación(b).	86
3.15. Gráfica de contorno.	87
3.16. Comparación entre el modelo de encogimiento-deformación (resuelto con $k = -5$ y $n = 0.9$) y los datos experimentales de prisma cuadrangular de agar.	87
3.17. Datos experimentales (puntos) y simulados (línea) de las cinéticas de secado de prismas cuadrangulares de agar.	88
3.18. Perfiles predichos de humedad en prismas cuadrangulares de agar. El número inferior de cada gráfica representa la fracción de humedad libre (Ψ)/ tiempo de secado adimensional (τ)/ área de sección transversal normalizada (A/A_0).	89

Índice de tablas

1.1. Modelos matemáticos descriptivos.	24
2.1. Composición de los sistemas modelo.	27
2.2. Características físicas iniciales de las geometrías estudiadas.	28
2.3. Procedimientos usados para determinar el encogimiento y encogimiento-deformación.	28
2.4. Conectividad de los vértices.	48
2.5. Coordenadas de la malla modificada.	49
2.6. Diseño de caras centradas para los parámetros de ajuste en la estimación de las distancias objetivo.	51
3.1. Parámetros de regresión para el modelo de encogimiento del producto en función del contenido de humedad para cilindros completos.	69
3.2. Parámetros de regresión para el modelo de encogimiento del producto en función del contenido de humedad para placas circulares.	70
3.3. Valores de las dimensiones iniciales de los sistemas de estudio.	74
3.4. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en medios cilindros.	75

3.5. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en cuartos de cilindro.	75
3.6. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en prismas cuadrangulares.	76
3.7. Parámetros de regresión para el modelo de la difusividad del agua.	81
3.8. Consideraciones para la solución numérica del modelo de transferencia de masa (TM).	83
3.9. Valores de difusividad efectiva de agua en los sistemas de estudio con geometrías de cilindro completo (CC) y placa plana (PP).	84

Nomenclatura

ΔH_s	calor de sorción de agua del alimento (J/kg)
C	matriz de conectividad de los vértices
D	vector de derivadas conocidas
F	matriz de distancias entre vértices
U	matriz de diferencias de humedad
v	vértice de la malla
Z	matriz de coordenadas actualizadas de los vértices
Bi_m	número de Biot de transporte de masa
c	concentración volumétrica de sólidos secos (kg sólidos secos/m ³ producto)
C_p	calor específico (J/kg·K)
D	coeficiente de difusividad (m ² /s)

Nomenclatura

d	diámetro (cm)
Fo	número de Fourier
H	humedad absoluta del aire (kg de agua/kg aire seco)
h_h	coeficiente de transporte externo de energía (W/m ² ·K)
H_i	humedad en la interfase gas-sólido (kg agua/kg aire seco)
h_m	coeficiente de transporte externo de masa (m/s)
k	conductividad térmica (W/m·K)
L	longitud característica de difusión (m)
l	longitud (cm)
m	masa del producto (kg)
N	número de vértices de la malla
Q	flujo de energía radiante (J/s)
q	tamaño de paso
S	parámetro de control de la reducción final de la distancia entre los vértices
T	temperatura (K)
t	tiempo (s)
V	volumen (cm ³)

Nomenclatura

v	volumen húmedo del aire (m^3 aire húmedo/kg aire seco)
w	función de ponderación
X	humedad del producto (kg agua/kg aire seco)
X_i	humedad del producto en la interfase gas-sólido (kg agua/kg aire seco)

Letras griegas

λ	distancias entre vértices (en las coordenadas x ó y)
Ω	conjunto de vértices vecinos
Ψ	fracción de humedad libre promedio
ψ	fracción de humedad libre local
ρ	densidad del producto (kg producto/ m^3 producto)
Θ	temperatura del producto (K)
θ	ángulo de rotación del contorno requerido para su alineación (rad)
Θ_i	temperatura del aire (K)
ε	desplazamiento total esperado del vértice (en las coordenadas x ó y)
ξ	coordenada adimensional en la dirección x
ζ	coordenada adimensional en la dirección y

Subíndices

e	equilibrio
-----	------------

Nomenclatura

p producto

0 inicial

Introducción

El secado es una de las operaciones unitarias de considerable importancia tanto práctica como económica, es la técnica más utilizada en la deshidratación de alimentos. Este proceso involucra mecanismos simultáneos de transferencia de masa y energía, la eliminación de la humedad se lleva a cabo generalmente por difusión desde el interior del alimento a la interfase aire-alimento y por convección de la interfase al aire. De forma similar, el calor se transfiere por convección en la interfase aire-alimento y por conducción en el interior del alimento.

Durante el secado de alimentos se desarrollan en ellos alteraciones físicas y químicas que influyen en el comportamiento del proceso, principalmente en productos con un alto contenido de humedad, por ejemplo cambios en viscosidad, aroma, color y sabor, textura, tamaño y forma. Estos dos últimos son fenómenos definidos como encogimiento y deformación, y son originados por la pérdida de agua y el calentamiento de los sólidos que generan estrés en la estructura celular del alimento; cada producto presenta un nivel distinto en la reducción de tamaño y cambio de forma dependiendo de su naturaleza y del método y condiciones de secado; además de que ambos ocurren de manera simultánea. Por ello es necesaria la inclusión de estos cambios en el desarrollo de modelos matemáticos detallados que describan los mecanismos de transporte de masa y calor, con el fin de evitar una sobre-estimación de los coeficientes que gobiernan

estos mecanismos tal como lo señalan Ruiz-López & García-Alvarado (2007) y Pavón-Melendez *et al.* (2002). Cabe mencionar que en la mayoría de los estudios realizados se simplifican las ecuaciones de transporte de masa y/o calor asumiendo que el encogimiento es despreciable o considerándolo como la reducción volumétrica del producto, estableciendo que el cambio en el tamaño es proporcional en cada dimensión. Por consiguiente, el propósito de este trabajo fue determinar el encogimiento y la deformación de un sistema modelo base gel de agar moldeado en diferentes geometrías (cilindros completos, placas circulares, medios cilindros, cuartos de cilindro y prismas cuadrangulares), para estimar su coeficiente de difusividad efectiva de agua en condiciones de secado constantes a una temperatura de 70 °C y una velocidad de secado de 2 m/s. Los resultados obtenidos bajo considerar el encogimiento del producto se encuentran en los rangos de $3.907 \times 10^{-10} - 4.982 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$; sin embargo, no considerar este fenómeno produce una sobre-estimación del parámetro, obteniendo valores de difusividad entre $6.707 \times 10^{-10} - 7.248 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$.

Con los resultados obtenidos se plantea la posibilidad de predecir asertivamente la evolución del proceso de secado, extrapolar los resultados obtenidos a otro producto con características similares al producto de estudio, así como conocer la distribución de humedad en el producto; con lo que sería posible evitar daños en el tejido, como la formación de fisuras o grietas, determinando las condiciones de secado óptimas (tiempo y temperatura de operación) con el fin de reducir los cambios indeseables en los productos (deformación y reducción de tamaño), además de diseñar equipos que provean una mayor eficiencia de secado reduciendo el consumo energético que impacta en el costo de generación de energía, entre otras posibles aplicaciones.

1. Marco teórico

El secado se define como la operación unitaria encargada de transformar un material líquido, sólido o semi-sólido en un producto sólido con bajo contenido de humedad (Baker, 1997). La característica esencial del proceso de secado radica en que la humedad contenida en el sólido se transfiere por evaporación hacia la fase gaseosa que lo envuelve (Nonhebel & Moss, 2002).

1.1. El secado en materiales alimenticios

El proceso de secado se considera una de las operaciones unitarias más comunes de la ingeniería química. Es un proceso de conservación antiguo y uno de los más importantes en la industria del procesado de alimentos que consiste en la remoción de agua de un producto con la finalidad de reducir el contenido de líquido residual hasta un valor estimado mínimo. El contenido de humedad final del producto seco varía dependiendo del alimento y de la cantidad final de agua que se desea, aproximadamente un valor del 5% de humedad (base húmeda). El secado suele ser la etapa final de los procesos, previo al empaque y permite que muchos materiales sean más adecuados para su manejo (Geankoplis, 1998). Se llega al final del proceso de secado cuando el sistema llega a un equilibrio, generalmente determinado a partir de la actividad de agua del producto. El

1.2. MECANISMOS DE TRANSPORTE DURANTE EL SECADO

nivel máximo de humedad para cada producto se establece con base a las características deseadas después del secado y durante el almacenamiento.

El secado o deshidratación de alimentos, se utiliza como una técnica de preservación. Los microorganismos que provocan la descomposición de los alimentos no pueden crecer y multiplicarse en ausencia de agua, de igual forma, muchas de las enzimas que causan cambios químicos en alimentos y otros materiales biológicos no pueden funcionar sin agua. Los microorganismos dejan de ser activos cuando el contenido de agua se reduce por debajo del 10 % en peso. Sin embargo, generalmente es necesario reducir este contenido de humedad por debajo del 5 % en peso en los alimentos para preservar su sabor y su valor nutritivo; con lo que se pueden almacenar durante periodos bastante largos.

Los objetivos principales del secado son (1) incrementar la vida útil del producto aumentando su estabilidad al reducir su actividad de agua, ya que este parámetro es una medida indirecta de la disponibilidad del agua presente en el producto para participar en las reacciones de deterioro o en el crecimiento microbiano (Monzón, 2006), (2) reducir los costos de envasado y almacenamiento, (3) reducir el peso del producto final a transportar, (4) mejorar las cualidades sensoriales, retención de aromas y, en algunos casos, (5) la preservación del valor nutrimental del alimento (Fito-Maupoe *et al.*, 2001).

1.2. Mecanismos de transporte durante el secado

El secado de sólidos incluye dos procesos simultáneos y fundamentales: (1) se transmite calor para evaporar el líquido y (2) se transporta masa en forma de líquido o vapor dentro del sólido hasta su superficie y como vapor desde la superficie hasta el medio de remoción de humedad. Los factores que regulan la velocidad de estos procesos determi-

1.2. MECANISMOS DE TRANSPORTE DURANTE EL SECADO

nan la rapidez de la operación de secado; estos factores son la temperatura, humedad, velocidad y patrón de distribución del aire, así como, la geometría, espesor, estructura y composición del producto a secar (Figura 1.1). De forma general se observa que a mayor temperatura del aire la velocidad de secado es mayor; si la velocidad de aire es mayor también lo será la velocidad de secado; mientras más baja sea la humedad del aire mayor será la velocidad de secado. Se debe recordar que la humedad relativa es más baja cuando la temperatura del aire es elevada.

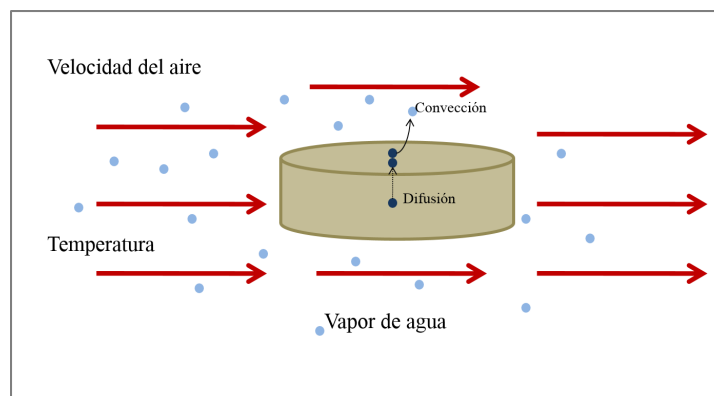


Figura 1.1. Mecanismos de secado.

Durante el proceso de secado la transferencia de calor puede llevarse a cabo por convección, conducción, radiación o una combinación de estos. Para cada caso, el calor deberá fluir hacia la superficie externa y luego al interior del sólido. Por otro lado, la masa se transfiere en forma de líquido o vapor dentro del sólido y como vapor desde las superficies expuestas. El movimiento del agua dentro del sólido se debe a un gradiente de concentración que depende de las características del mismo.

La humedad presente en el producto se considera que puede estar ligada en diversos grados. En principio se creía que el agua contenida en un producto alimenticio se categorizaba en dos: agua libre y agua ligada. Se conoce que el agua está retenida por fuerzas cuya intensidad varía desde las fuerzas muy débiles que retienen el agua superfi-

1.2. MECANISMOS DE TRANSPORTE DURANTE EL SECADO

cial, hasta los enlaces químicos muy fuertes. Evidentemente durante el secado se separa con mayor facilidad el agua que está retenida débilmente. Por lo tanto, se espera que las velocidades de secado disminuyan a medida que decrece el contenido de humedad y que el agua que queda en la matriz del alimento esté cada vez más fuertemente unida al producto a medida que su cantidad disminuye. En la mayoría de los casos, existe mayor cantidad de agua retenida débilmente, pudiéndose considerar para fines de secado como agua libre en la superficie.

Los mecanismos de transferencia de humedad dependen, principalmente de los tipos o estados físicos de los productos alimenticios, y del proceso de secado. Los materiales alimenticios se pueden clasificar como geles homogéneos, materiales porosos que en su interior están formados por poros de interconexión o capilares, y materiales que tienen una capa o piel exterior que se considera como la principal barrera al flujo de humedad. Otro factor que juega un papel importante en el proceso de secado es la estructura del alimento, la cual determina el mecanismo por medio del cual tendrá lugar el flujo interno del agua. Los mecanismos pueden ser difusión en sólidos homogéneos continuos, flujo capilar en sólidos granulados y porosos, flujo provocado por gradientes de concentración y presión, flujo producido por gravedad y flujo originado por una secuencia de evaporación y condensación. De forma general se considera que existe un mecanismo predominante dentro del sólido a un tiempo dado (Perry & Maloney, 2002).

El secado es un proceso de transferencia simultánea de materia y de calor; sin embargo, el alimento opone dos resistencias: una a la transferencia de calor y la otra a la transferencia de materia, siendo la transferencia de masa la dominante. La humedad crítica depende de las características de los alimentos y de las condiciones de secado. Gradualmente, la transferencia de materia va siendo sustituida por una difusión de vapor dentro de una estructura porosa. En el punto de saturación ya no queda líquido

1.2. MECANISMOS DE TRANSPORTE DURANTE EL SECADO

disponible en los poros, por ello, la transferencia de materia es totalmente sustituida por la difusión de vapor. En las sustancias sólidas, la humedad se transfiere por mecanismos de difusión o capilaridad.

En general, existen tres factores interrelacionados que controlan la capacidad del aire para eliminar agua de un alimento:

1. La cantidad de vapor de agua que hay en el aire.
2. La temperatura del aire.
3. La cantidad de aire que pasa sobre el alimento.

Cuando se hace pasar aire caliente sobre un alimento húmedo, el vapor de agua difunde a través de una capa límite de aire que rodea el alimento, para posteriormente ser arrastrado por la corriente de aire. Se establece un gradiente de presiones de vapor desde el interior del alimento húmedo hasta el aire seco. Este gradiente constituye la fuerza impulsora para la eliminación del agua del alimento.

La capa límite actúa como barrera tanto a la transmisión de calor como a la eliminación de agua durante el secado. El espesor de esta capa límite está determinado principalmente por la velocidad del aire. Si la velocidad es baja, el espesor es mayor, lo que reduce tanto el coeficiente de transmisión de calor como la velocidad de eliminación de vapor de agua. Este vapor abandona la superficie del alimento y eleva la humedad del aire circundante, causando una disminución del gradiente de presiones de vapor de agua y con ello, de la velocidad de secado. Por lo tanto, cuanto mayor sea la velocidad de la corriente de aire, menor será el espesor de la capa límite y en consecuencia mayor será la velocidad de secado (Fellows, 2000).

Se considera que durante el proceso de secado existe movimiento de agua y energía en el interior del producto. Generalmente es un proceso de transporte simultáneo de

materia y energía donde el agua se transfiere por difusión desde el interior del producto hasta la interfase aire-alimento, y por convección desde la interfase hacia la corriente de aire. La energía se transfiere por convección desde el aire hacia la interfase aire-alimento y por conducción hacia el interior de este. Los flujos internos de materia y energía se representan como densidades de flujo de difusión y conducción en régimen no permanente por medio de las leyes de Fick y Fourier, respectivamente.

Pavón-Melendez *et al.* (2002) propusieron el análisis adimensional de un modelo detallado, expresado para una geometría generalizada con la finalidad de estimar los mecanismos que controlan la transferencia de materia y energía; puntualizan que durante el secado se considera que ocurren 4 fenómenos principales:

1. Transporte difusivo de materia en el interior del alimento.

$$\frac{\partial (cX)}{\partial t} = \nabla \cdot [D\nabla (cX)] \quad (1.1)$$

2. Transporte conductivo de energía en el interior del alimento.

$$\frac{\partial (\rho C_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot [k\nabla (T)] \quad (1.2)$$

3. Transporte convectivo de materia en la interfase aire-alimento del lado del aire en el que el flujo de agua transferido desde la interfase del lado del aire hacia el seno del aire es igual al flujo difusivo de agua que llega a la interfase por el lado del producto.

$$-D\nabla (cX_i) = \frac{h_m}{v} (H_i - H) \quad (1.3)$$

1.3. PROPIEDADES TERMOFÍSICAS DEL PRODUCTO

4. Transporte convectivo de energía en la interfase aire-alimento del lado del aire en el que el flujo de energía transferido desde el seno del aire hacia la interfase del lado del aire se divide en flujo conductivo de energía que deja la interfase por el lado del producto para elevar su temperatura y la cantidad de energía requerida para evaporar el agua en su superficie.

$$h_h (\Theta_i - \Theta) + Q = k \nabla (T_i) + D \nabla (cX_i) \Delta H_s \quad (1.4)$$

1.3. Propiedades termofísicas del producto

El diseño y optimización de cualquier proceso que involucre la transferencia de calor, requiere el conocimiento de las propiedades térmicas y físicas de los materiales que serán procesados. En el secado de alimentos, las propiedades termofísicas más importantes requeridas para una descripción apropiada del proceso de secado son: el calor específico, la conductividad térmica, la densidad y porosidad (Baker, 1997; Nonhebel & Moss, 2002).

1.3.1. Propiedades térmicas

La conductividad térmica se utiliza para estimar la velocidad de la transferencia de calor por conducción en el proceso de secado. Esta propiedad indica que tan efectivo es el material como conductor y depende principalmente de la composición del producto, principalmente del contenido de agua. Los valores de conductividad térmica para alimentos presentan variaciones que se atribuyen a factores como la composición y estructura del material, los métodos experimentales y condiciones de proceso (temperatura, presión y el modo de transferencia de energía).

1.4. MATRICES BIOLÓGICAS

El calor específico puede ser definirse como el promedio de la energía necesaria para incrementar la temperatura de una unidad de masa del material en un grado, esta propiedad al igual que la conductividad térmica está fuertemente ligada al contenido de humedad ya que el agua pura tiene el calor específico más alto de todos los componentes alimenticios (Sokhansanj & Jayas, 2006).

1.3.2. Propiedades físicas

La estructura de los materiales alimenticios suele ser caracterizada por la densidad (aparente y real), porosidad, tamaño y distribución de poro y volumen específico; siendo la densidad y la porosidad las propiedades estructurales más comunes.

Los cambios significativos en las propiedades estructurales se observan durante el proceso de secado, conforme el producto pierde agua. Los cambios ocurridos en estas propiedades dependen de varios factores como los pre-tratamientos, contenido de humedad, método de proceso y las condiciones de proceso.

1.4. Matrices biológicas

Un gel es un estado intermedio que presenta las características elásticas de un sólido y la fluidez de un líquido. Algunos ingredientes que forman geles son selectivamente empleados para generar atributos aceptables a los alimentos, particularmente textura. La mayoría de los hidrocoloides utilizados en la industria de alimentos derivan de fuentes naturales de una amplia gama de polisacáridos y proteínas, que son utilizados en diversas aplicaciones: como espesantes y gelantes de dispersiones acuosas, estabilizantes de espumas, emulsiones y dispersiones, suspensión de materiales particulados y como inhibidores de sinéresis, así como para incrementar la capacidad de retención de

1.4. MATRICES BIOLÓGICAS

agua. Un gel también puede ser considerado como una red tridimensional polimérica que resiste el flujo bajo presión y que más o menos conserva su forma estructural; es una red continua de partículas interconectadas o macromoléculas dispersas en una fase continua líquida. La gelificación es el fenómeno que involucra la asociación de las cadenas poliméricas a una red tridimensional que atrapa o inmoviliza el agua dentro de una estructura rígida. Frecuentemente los gelificantes usados incluyen gomas naturales, proteínas, almidones, pectinas, agar-agar que son clasificados en polisacáridos y proteínas. El agar es un hidrocoloide extraído de algas marinas rojas ampliamente utilizado en la industria de alimentos, es un gel termorreversible que posee un alto poder gelificante debido a los enlaces de puentes de hidrógeno, baja viscosidad y sus temperaturas de fusión y gelificación son definidas (Banerjee & Bhattacharya, 2012).

El proceso de formación de un gel se da de manera espontánea a partir de una simple dispersión de un polímero o la suspensión de partículas y de condiciones externas físicas o químicas controlables de temperatura, presión o composición. Este proceso se divide en dos etapas, la primera es el despliegue o disociación de las moléculas debido a la entrada de energía que expone los sitios activos, esta etapa puede ser reversible, y la segunda es la asociación o agregación de las moléculas desplegadas a formas complejas de mayor peso molecular. Básicamente la formación de gel es la transformación de un sol a gel durante la cual la viscoelasticidad cambia abruptamente con un desarrollo simultáneo de características propias de un sólido, es decir, existe un intercambio de la fase continua y la discontinua durante la formación del gel (Lahrech *et al.*, 2005).

1.5. Alteraciones físicas en el producto seco

Durante los tratamientos térmicos las propiedades de físicas de los productos sufren cambios como en color, textura, volumen, forma, porosidad, densidad, capacidad de retención de agua, encogimiento y/o colapso de la estructura celular que afectan las propiedades de transferencia de materia y la calidad del producto (Khalloufi *et al.*, 2012; Mayor & Sereno, 2004).

Los sistemas alimenticios sólidos y semi-sólidos son materiales heterogéneos considerados una matriz o una red sólida tridimensional, que en su interior contiene altas cantidades de líquido (Aguilera, 1992; Campos-Mendiola *et al.*, 2007); tomando en cuenta que los geles son definidos como una red tridimensional polimérica de macromoléculas dispersas en una fase continua y en cuyo interior queda atrapada el agua, se puede considerar como sistema modelo de estudio.

Durante los primeros intervalos de tiempo del proceso de secado se observa una reducción en las dimensiones del producto fenómeno conocido como encogimiento, los productos con un alto contenido de humedad generalmente experimentan un mayor encogimiento. El encogimiento se ha clasificado en tres tipos: unidimensional, cuando el cambio del volumen sigue la dirección de la difusión, isotrópico o tridimensional que se describe como el encogimiento uniforme en todas las dimensiones geométricas del material; y anisotrópico o arbitrario que es descrito como el encogimiento no uniforme en las diferentes dimensiones geométricas del producto.

Además del contenido de humedad, el encogimiento también está ligado a la velocidad del aire de secado y a la geometría del producto; sin embargo, los cambios en la relación de área superficial por volumen de agua son independientes a las condiciones de secado, pero dependientes de la geometría y tipo de alimento (Ratti, 1994). Cuando el producto

1.5. ALTERACIONES FÍSICAS EN EL PRODUCTO SECO

ha alcanzado una fracción de humedad libre entre 0.5 y 0.6, la estructura colapsa dando lugar al fenómeno conocido como deformación. Este fenómeno puede ocurrir por dos razones, la primera es que al ser removida el agua de la matriz y sustituida por aire provoca que se pierda el equilibrio entre el interior y el exterior del producto, dando como resultado el colapso de la estructura al no soportar la presión exterior que es mayor; la segunda es que la temperatura cause daño en la estructura del alimento tensándolo de tal forma que no pueda resistir y colapse (Achanta & Okos, 2000; Mayor & Sereno, 2004). Si el encogimiento no es uniforme durante el secado (Mizuno *et al.*, 2013; Zhang *et al.*, 2013) o debido al alto gradiente de humedad y a la alta velocidad de encogimiento (de Lima *et al.*, 2002) se genera un nivel de estrés crítico que deriva en la formación de fisuras o grietas; la formación de grietas es un proceso complejo influenciado interactivamente por la transferencia de calor y humedad, propiedades físicas y condiciones de operación. A mayores velocidades de secado, las capas externas del material se ponen rígidas y el volumen final se ajusta inmediatamente; conforme transcurre el proceso, los tejidos se dividen y se forman rupturas internas, se abre la estructura y se forman las grietas en el interior de la estructura. Cuando el interior finalmente se seca y encoge, el estrés interno empuja al tejido.

Tanto el encogimiento como la deformación son fenómenos físicos que están interrelacionados con la estructura interna del producto y se llevan a cabo de forma simultánea a la difusión de la humedad; la humedad disminuye juntamente con la velocidad de encogimiento, conduciendo a un perfil no lineal de encogimiento en la etapa final del secado convectivo (Heldman & Lund, 2007; Khalloufi *et al.*, 2009); hacia el final del proceso, el encogimiento es cada vez menor, de modo que el tamaño y la forma finales del producto se alcanzan antes de finalizar el proceso de secado. Se estima que la mayoría de los alimentos se encogen aproximadamente el 50% de su tamaño original

1.5. ALTERACIONES FÍSICAS EN EL PRODUCTO SECO

(Balaban & Pigott, 1988).



Figura 1.2. Representación esquemática del encogimiento y colapso durante el proceso de secado (Khalloufi *et al.*, 2009).

Durante el proceso de secado, la concentración de la humedad en las capas exteriores de los alimentos es menor que en el interior, las capas externas pierden humedad antes que el interior; tanto el encogimiento como la caída de la difusividad son factores que se pueden combinar para formar una piel o costra prácticamente impermeable a la humedad, encerrando al volumen del material y evitando que la humedad del interior no se pueda remover tan fácilmente. Se puede reducir la formación de costra manteniendo los gradientes de humedad de forma lineal; mientras más rápida sea la velocidad de secado, más delgada será la costra.

Se ha utilizado la teoría de la transición vítrea como una propuesta de conceptos que explican el proceso de encogimiento y colapso durante el secado. De acuerdo con

este concepto, se reduciría el colapso del material si se procesa bajo la temperatura de transición vítrea, si la diferencia entre la temperatura de proceso y la temperatura de transición vítrea es mayor, mayor es el colapso.

1.6. Modelación descriptiva del proceso de secado

Conforme se ha estudiado el proceso de secado, se han realizado esfuerzos considerables para entender algunos de los cambios químicos, bioquímicos y físicos que ocurren durante el secado, y con base a ello se han desarrollado métodos para prevenir cambios indeseables en la calidad del producto.

Modelar, diseñar y controlar el proceso de secado requiere tomar en cuenta los cambios en las dimensiones físicas del producto, contenido de humedad, encogimiento, porosidad, densidad y volumen .

1.6.1. Enfoques de la modelación

Sabarez (2015) señala que se presentan distintos enfoques para la modelación de los diferentes procesos de secado. En general, los modelos para el secado de materiales alimenticios se clasifican en dos grupos: aquellos que involucran ecuaciones empíricas y aquellos basados en la física fundamental de los procesos de secado.

Los modelos empíricos son sistemas específicos que no pueden generalizarse, ya que no se fundamentan en ninguna base física. Los modelos empíricos resultan del simple ajuste de las curvas de secado determinadas experimentalmente; aunque producen buenos resultados para aplicaciones en la industria de alimentos, no pueden ser aplicados en algunos casos, por ejemplo, en alimentos de geometrías complejas o cuando se cambian las condiciones de operación del proceso. Tanto la temperatura como el contenido de

humedad se consideran función del tiempo y del espacio existente dentro del material; sin embargo, estos modelos no lo incluyen, tampoco toman en cuenta la dependencia de las propiedades termofísicas y de transporte en la temperatura y el contenido de humedad del producto (Mujumdar & Huang, 2007; Togrul, 2005). Incluso, estos modelos solo consideran la resistencia o interna o externa a la transferencia de masa en un proceso isotérmico (el análisis del transporte de calor es despreciable) y no consideran el encogimiento o deformación del producto.

El segundo enfoque se basa en modelos que utilizan las leyes fundamentales de conservación de masa, momento y energía. Este enfoque comprende la física involucrada en el proceso de secado, representada por el acoplamiento de las ecuaciones de transferencia de masa y calor. De forma general, estos modelos son matemáticamente complejos y determinan varios parámetros.

Un enfoque de modelación más completo involucra la solución numérica de modelos teóricos que describen la simultáneamente acoplada transferencia de masa y energía durante el secado convectivo de alimentos. Requiere un modelo matemático simple, preciso y robusto con la finalidad de reducir el tiempo y el esfuerzo computacional. Actualmente, con el alto poder computacional es posible simular fenómenos tan complejos en menos tiempo; la propuesta es optimizar los niveles de simplicidad y precisión con el fin de explicar un sistema real de forma satisfactoria (Hayakawa & Furuta, 1988; Sabarez, 2012).

1.6.2. Formulación matemática

El desarrollo de un modelo conceptual es seguido por la formulación de las ecuaciones matemáticas que describen el proceso físico. El enfoque dado depende generalmente del

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

problema de estudio; en el proceso de secado de alimentos, ocurren simultáneamente dos mecanismos distintos de transporte, la transferencia de calor del medio de secado al alimento y el transporte de humedad desde el interior del producto sólido a su superficie y eventualmente al aire (Mayor & Sereno, 2004).

La ventaja de un enfoque numérico es que pueden resolverse las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), tomando en cuenta ambos mecanismos de transporte. La solución de las EDP que gobiernan el proceso de secado, requiere conocer las propiedades termofísicas y de transporte, tanto del producto como del aire. La mayoría de estos parámetros no pueden suponerse constantes en el proceso de secado, pero si dependientes de la temperatura o del contenido de humedad, igualmente dependientes de la composición del producto y expresadas como función de la temperatura local. Tanto los coeficientes de transferencia de calor como de masa pueden variar significativamente dependiendo de los parámetros de secado (tamaño del alimento, velocidad de aire, temperatura, etc.) (Aversa *et al.*, 2007; Curcio & Aversa, 2014; Sabarez, 2012).

El coeficiente de difusividad efectiva, es el parámetro principal para la caracterización de la transferencia de masa en alimentos sólidos. Se considera una propiedad que puede ser utilizada en los distintos casos de transferencia de humedad como el transporte de agua por difusión de líquido o vapor, o flujo capilar o hidrodinámico debido al gradiente de presión establecido en el material durante el secado. Este coeficiente depende de la forma geométrica del producto y de las condiciones de secado, y es función tanto de la temperatura como del contenido de humedad. En algunos casos la difusividad efectiva incrementa gradualmente con la temperatura y decrece con la disminución del contenido de humedad. De forma general, los valores de difusividad reportados están en los rangos de $10^{-9} - 10^{-11}$ m²/s para materiales alimenticios (Boudhrioua *et al.*, 2003; Ortiz-García-Carrasco *et al.*, 2015; Pacheco-Aguirre *et al.*, 2015; Ruiz-López *et al.*, 2012;

Souraki *et al.*, 2014).

1.6.3. Métodos de solución

Para geometrías con formas regulares (cilindro infinito, placa infinita y esfera), con las condiciones apropiadas iniciales y de frontera, juntamente con los supuestos del modelo matemático de un sistema, es posible obtener información de dicho sistema por medios analíticos, derivando en soluciones generales. Sin embargo, para geometrías y ecuaciones más complejas, es necesario utilizar métodos numérico-computacionales para proveer soluciones aproximadas para el problema investigado. El concepto fundamental del método de solución numérica para resolver sistemas complejos es la discretización de la geometría de estudio en un número finito de elementos o celdas, con lo que se reducen las ecuaciones complejas en grupos de ecuaciones simples o polinómicas. Los métodos numéricos generan soluciones en pasos, donde cada paso es la solución de un grupo de condiciones que permiten expandir el rango de soluciones (Patankar, 1980).

Los métodos numéricos comúnmente utilizados para resolver ecuaciones complejas del proceso secado incluyen los métodos de diferencias finitas, elemento finito y volumen finito. Si se considera el encogimiento y la deformación del material, se obtienen EDP en el dominio del tiempo y espacio que pueden ser resueltas por las distintas técnicas de discretización espacial, donde se encuentran la discretización de Lagrange, Euler y de malla (Bern & Plassmann, 2000a).

1.6.4. Generación de mallas

Una malla es la discretización de un dominio geométrico en pequeñas formas simples conocidas como elementos, que intersectan en puntos llamados nodos, tales como

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

triángulos o cuadriláteros, en dos dimensiones, y tetraedros o hexaedros en tres dimensiones. Son utilizadas en diversas áreas, incluyendo geografía, cartografía, gráficos computacionales, ingeniería, física, etcétera; se aplican en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que surgen en la simulación de procesos físicos (Bern & Plassmann, 2000b; Mavriplis, 1995).

Existen dos tipos fundamentales de mallas las estructuradas y las no estructuradas; la malla estructurada se refiere a toda discretización cuya conexión entre elementos obedece a un patrón fijo. Por ello, en este tipo de mallas se utilizan elementos cuadriláteros (2D), o hexaédricos (3D). Tomando como ejemplo la Figura 1.3, el nodo de índices (i, j) , siempre tendrá como vecino a la izquierda al nodo con índices $(i - 1, j)$ y por la derecha al $(i + 1, j)$.

En las mallas no estructuradas, a diferencia de las estructuradas, no existe un patrón de conectividad predeterminado. El tipo de discretización es el elemento triangular (2D) o el tetraédrico (3D). La libertad en la conectividad permite una discretización del contorno arbitraria, por lo cual, son de aplicación más general que las estructuradas (Figura 1.4).

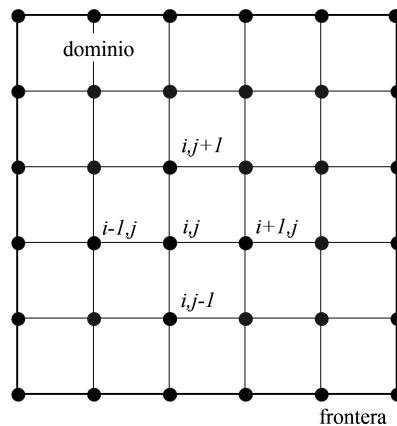


Figura 1.3. Malla estructurada (Nicoletti, 2013).

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

Aunque las mallas estructuradas suelen ser más simples de resolver y convenientes para su uso en el método de diferencias finitas (MDF), ya que requieren menos capacidad de almacenamiento computacional y es más fácil controlar la forma y tamaño de los elementos, ofrecen poca flexibilidad para adaptarse a dominios con geometrías complicadas. A pesar del desarrollo de diversas técnicas para encontrar transformaciones de coordenadas adecuadas, es imposible encontrar una que se adapte satisfactoriamente a la forma de un dominio complicado (Díaz-Morcillo, 2000).

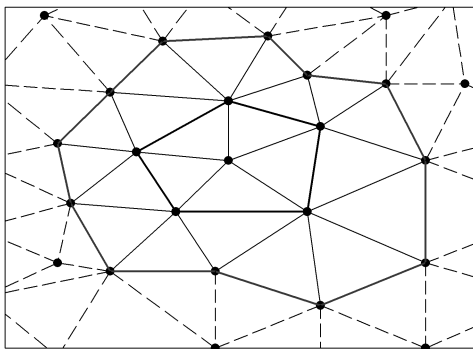


Figura 1.4. Malla no estructurada.

Aunque existe diversidad en los métodos para generar este tipo de discretizaciones, los más empleados se dividen en aquellos que parten de una distribución determinada de nodos y únicamente se ocupan de obtener una conectividad adecuada, y aquellos en los que nodos, aristas y elementos (2D) o nodos, aristas, caras y elementos (3D) se generan conforme la malla crece.

Para el primer caso, se desea que la conexión sea óptima de modo que los elementos presenten una buena relación de aspecto, adaptarse lo mejor posible a la forma del objeto, debe existir una mayor densidad de elementos en las zonas donde la solución varíe rápidamente, a esta acción se le conoce como refinamiento local, la transición de una zona donde los elementos sean grandes a otra donde sean pequeños debe ser

gradual. Algunos softwares como Matlab utilizan este método para generar las mallas utilizadas para la solución de EDP.

Muchas de las medidas de calidad de una triangulación están motivadas por la aplicación del método de elementos finitos (MEF). Estas medidas toman en consideración las longitudes, ángulos y áreas o volúmenes de los triángulos o tetraedros. Si el tamaño de los elementos de la malla es uniforme, el error cometido por el MEF suele ser mayor en las regiones donde la solución varía más rápido, esto es, en regiones donde el gradiente de la solución es mayor. Una forma de reducir el error consiste en aumentar la densidad de elementos en estas zonas; a esta acción se le conoce como refinamiento local. Para problemas evolutivos, es decir, que dependen del tiempo, la localización de la zona donde el gradiente de la solución es mayor puede variar con este. El refinamiento global de toda la malla puede hacer que el número de nodos aumente prohibitivamente. En dos dimensiones, existen técnicas de desrefinamiento que disminuyen la densidad de elementos en las regiones en que la solución es más uniforme (Escobar-Sánchez, 2011; Viquez-Cano, 2008).

1.6.5. Propiedades de modelación

Es importante considerar que la composición y la temperatura del producto cambian durante el secado, así que, para predecir el comportamiento de las cinéticas de secado o evaluar los cambios en la calidad del producto durante el secado, se debe contar con la descripción de las propiedades termofísicas como funciones continuas del contenido de humedad o de la temperatura. Existen diferentes fuentes que presentan ecuaciones teóricas y empíricas para modelar estas propiedades; sin embargo, debido a la dificultad de utilizar modelos teóricos en sistemas tan complejos como los alimentos, los mode-

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

los empíricos son más populares y extensamente utilizados. Estos modelos se pueden clasificar en dos grupos: modelos lineales y no lineales.

En los modelos lineales el contenido de agua juega un rol significativo en las propiedades termofísicas de los alimentos ya que las propiedades del agua distan de aquellas de otros compuestos como las proteínas, grasas, carbohidratos y el aire, es por ello que las propiedades termofísicas de los alimentos son modeladas frecuentemente como función del contenido de humedad, por lo general mediante una relación lineal, si el contenido de agua está expresado en base humedad.

En el caso de los modelos no lineales, son algunas veces limitados a la reducción del rango del contenido de agua, los parámetros de ajuste varían dependiendo de el tipo de material.

1.6.6. Antecedentes de la inclusión de cambios físicos en la modelación del proceso de secado

Tanto el encogimiento como la deformación son dos de los principales cambios físicos que ocurren durante el secado. El encogimiento se expresa por lo general en términos de la relación entre el volumen de la muestra antes y después del secado. El volumen puede medirse ya sea por el principio de Arquímedes o por cualquier otra técnica de desplazamiento, también puede ser expresado como una función del cambio en dimensiones seleccionadas de la muestra.

El encogimiento, forma y tamaño de la muestra han sido cuantificados, la mayoría de las veces, por mediciones directas utilizando instrumentos como el vernier, micrómetro o planímetro. Sin embargo, los avances tecnológicos ocurridos en el transcurso de la década pasada han dado lugar al uso del análisis de imagen para cuantificar el

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

encogimiento y la deformación de productos alimenticios, debido a que estas técnicas proveen una alternativa práctica a la inspección manual y pueden ser integradas directamente. Una de las principales ventajas de utilizar el análisis de imagen para evaluar el encogimiento y la deformación es la fácil comparación de la muestra antes y después del secado (Mayor *et al.*, 2011; Ratti, 2009).

El objetivo principal en la cuantificación tanto del encogimiento como de la deformación es, introducir los datos obtenidos a los modelos que describen el proceso de secado.

Existen varios modelos que se utilizan para determinar la distribución de la humedad y temperatura de productos alimenticios sometidos a secado bajo condiciones de operación, forma y composición distintas; estos modelos suponen que el encogimiento y/o deformación son despreciables, la razón es simplificar las ecuaciones y facilitar su solución. Sin embargo, estos supuestos y los modelos basados en ellos no son necesariamente válidos, ya que para un mejor análisis y diseño de procesos y equipos de secado es necesario considerar todos los cambios ocurridos en los productos deshidratados con la finalidad de evitar posibles desviaciones en los resultados.

En la Tabla 1.1 se citan algunos trabajos que estiman los cambios en las características físicas del producto y las formas distintas de medir dichos cambios, con la finalidad de incluir sus resultados en los modelos matemáticos que describen el proceso de transferencia de masa o energía durante el proceso de secado.

1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

Tabla 1.1. Modelos matemáticos descriptivos.

CAMBIO FÍSICO	MEDICIÓN	REPORTE DE RESULTADOS	REFERENCIA
Reducción de dimensiones (Longitud, espesor o diámetro)	Directa	Modelo lineal, encogimiento dependiente del contenido de humedad.	Mizuno <i>et al.</i> , 2013
	Directa	Descripción lineal del modelo, reducción del espesor en función del contenido de humedad.	da Silva <i>et al.</i> , 2014
	Directa	Modelo lineal del encogimiento en función del tiempo.	Curcio & Aversa, 2014
Área normalizada y/o perímetro normalizado	Análisis de imagen	Área normalizada y perímetro normalizado linealmente dependientes del contenido de humedad.	Yadollahinia & Jahangiri, 2009
	Análisis de imagen	Modelo lineal del índice de encogimiento respecto del contenido de humedad.	Zhang <i>et al.</i> , 2013
	Análisis de imagen	Relación linealmente dependiente del área normalizada (A/A_0) y la humedad removida.	Campos-Mendiola <i>et al.</i> , 2007
	Análisis de imagen	Encogimiento representado por el área normalizada que presenta un comportamiento linealmente dependiente del contenido de humedad.	Bacelos & Almeida, 2011

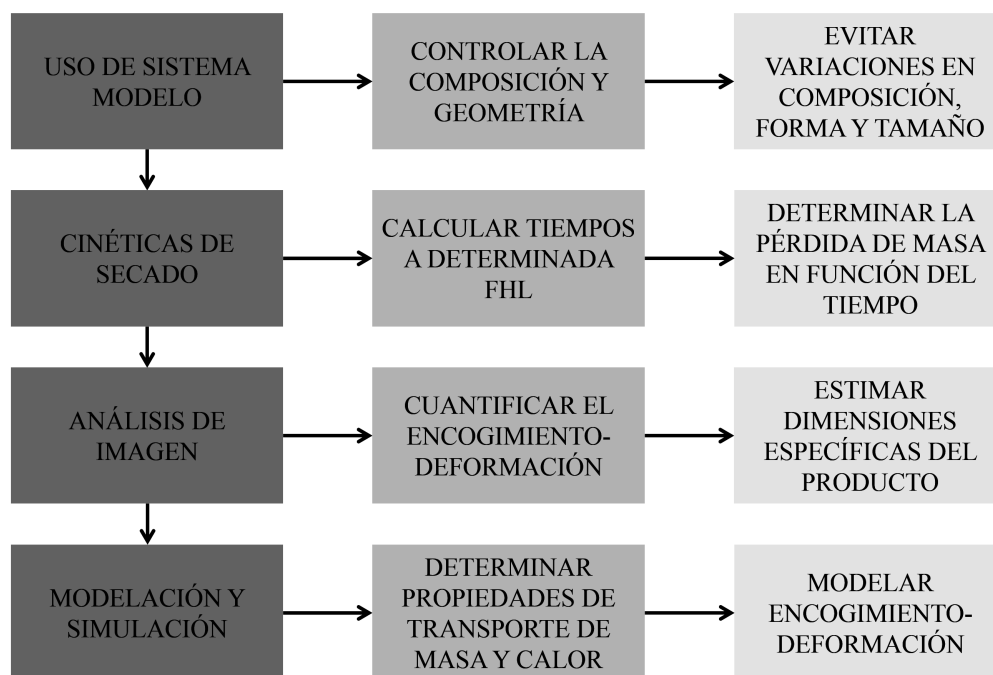
1.6. MODELACIÓN DESCRIPTIVA DEL PROCESO DE SECADO

Tabla 4.1 Modelos matemáticos descriptivos (continuación)

Volumen	Método de desplazamiento de líquido (agua)	Ajuste lineal de los valores predichos de encogimiento respecto de los valores experimentales.	Amiryousefi <i>et al.</i> , 2014
	Desplazamiento de líquido (agua)	Reporte de comportamiento lineal del volumen adimensional (V/V_0) y la longitud normalizada (L/L_0) en función de la pérdida de agua.	Souraki <i>et al.</i> , 2014
	Análisis de imagen	Volumen normalizado (V/V_0) modelado linealmente, dependiente de la cantidad de humedad presente en el producto.	Aprajeeta <i>et al.</i> , 2015
Dimensiones (longitud, espesor y altura)	Dimensiones medidas directamente Desplazamiento de líquido (glicerina)	Radio equivalente de la esfera linealmente dependiente del radio aritmético y geométrico.	Delgado <i>et al.</i> , 2014
	Dimensiones medidas directamente Cálculo del volumen con las dimensiones obtenidas	Encogimiento volumétrico en función del contenido de humedad por medio de un ajuste lineal.	Dissa <i>et al.</i> , 2008
	Directa	Encogimiento radial y axial relacionado linealmente con el tiempo.	Zhang <i>et al.</i> , 2013

2. Metodología

En esta sección se presenta la metodología utilizada durante el desarrollo de este proyecto. El esquema global que describe dicha metodología y los objetivos que pretende alcanzar se presenta en la Figura 2.1.



FHL = Fracción de Humedad Libre

Figura 2.1. Descripción general de la metodología propuesta.

2.1. Elaboración de los sistemas modelo

Los alimentos son sistemas complejos cuyas características como composición (contenido de humedad), tamaño y estructura interna (homogénea o porosa) dependen de su tipo, grado de madurez, entre otros aspectos extrínsecos. Con la finalidad de evitar variaciones en estas características y lograr un proceso controlado, los datos experimentales se obtuvieron a partir de sistemas modelo elaborados a base de agar-agar, sacarosa y agua, de composición establecida en base a estudios previos (Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Composición de los sistemas modelo.

Compuesto	Composición (g/100 g producto)
Agar-agar	5
Sacarosa	20
Agua destilada	75

Se disolvieron los sólidos en agua destilada y se repartió la solución resultante en matraces Erlenmeyer que se introdujeron en la autoclave a 121 °C (15 lb de presión) por 15 minutos. La mezcla homogénea caliente se moldeó de acuerdo a las geometrías de estudio, vertiéndose en cajas petri de 18.5 centímetros de diámetro para placas circulares, en tubos de CPVC de media pulgada para cilindros completos y en un recipiente cuadrado para los prismas cuadrangulares, dejándolos enfriar para posteriormente desmoldar el gel formado. Los cilindros completos se cortaron longitudinalmente para producir mitades y cuartos, mientras que la placa cuadrada se cortó longitudinalmente para producir los prismas cuadrangulares. En la Tabla 2.2 se muestran las características físicas de las geometrías estudiadas.

2.2. EXPERIMENTOS DE SECADO

Tabla 2.2. Características físicas iniciales de las geometrías estudiadas.

Geometría	Clave	Dimensión (cm)	Área (cm ²)	Volumen (cm ³)	Densidad (g/cm ³)	Área específica (cm ⁻¹)
Cilindro completo	CC	D = 1.27 L = 14	58.40	17.24	1.07	3.33
Placa plana	PP	D = 18.5 L = 14	558.08	188.16	1.11	2.97
Medio cilindro	MC	D = 1.27 L = 14	46.98	8.87	1.10	5.30
Cuarto de cilindro	QC	D = 1.27 L = 14	32.38	4.44	1.09	7.30
Prisma cuadrangular	PC	L ₁ = 0.95 L ₂ = 0.95 L ₃ = 14	55.15	12.70	1.07	4.34

D = Diámetro; L = Longitud

2.2. Experimentos de secado

La fase experimental de este trabajo se dividió en dos etapas, la primera consiste en la medición y descripción del proceso por medio de la obtención de las cinéticas de secado; la segunda etapa consta de la evaluación del encogimiento y encogimiento-deformación de los sistemas estudiados como lo señala la Tabla 2.3.

Tabla 2.3. Procedimientos usados para determinar el encogimiento y encogimiento-deformación.

Geometrías	Análisis de los cambios dimensionales
Cilindro completo Placa plana circular	Medición directa del encogimiento
Medio cilindro Cuarto de cilindro Prisma cuadrangular	Determinación del encogimiento-deformación por análisis de imagen

2.2.1. Determinación de las cinéticas de secado

Los cinéticas de secado convectivo se determinaron experimentalmente para cada geometría a una temperatura de 70 °C, introduciendo de 300 a 400 g de muestra en un secador de tipo túnel sobre bandejas perforadas (Figura 2.2).

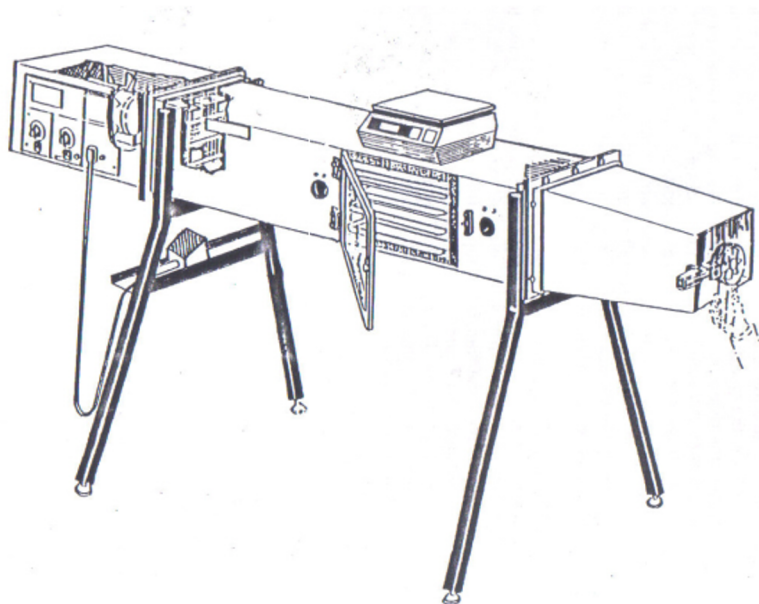


Figura 2.2. Dibujo de un secador de túnel horizontal.

Las muestras se colocaron de forma que el aire fluyera en dirección paralela a la dimensión de mayor tamaño. La velocidad de aire se reguló a 2 m/s, condición que permite un proceso controlado por difusión de acuerdo a Pavón-Melendez *et al.* (2002). La masa del producto se registró a intervalos definidos de tiempo hasta que las muestras llegaron a un peso constante. El producto retirado del secador se almacenó en bolsas de cierre fácil, reservándose para su uso posterior.

Los datos registrados de masa del producto a lo largo del secado se utilizaron para determinar la fracción de humedad libre en cada tiempo (Ψ) por medio de la ecuación:

$$\Psi = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = \frac{m_p - m_{pe}}{m_{p0} - m_{pe}} \quad (2.1)$$

Los valores de fracción de humedad libre se emplearon para calcular la velocidad de secado $d\Psi/dt$ mediante diferencias finitas centradas por medio de la expresión:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.2)$$

2.3. Determinación del encogimiento y deformación

Los valores de la fracción de humedad libre obtenidos de las cinéticas de secado se utilizaron para estimar el tiempo requerido en que el producto alcanza aproximadamente diferentes contenidos de humedad desde $\Psi = 0.9$ hasta $\Psi = 0.1$ en incrementos de 0.1, con la finalidad de determinar la evolución del encogimiento y/o deformación del producto.

Se formaron grupos de 5 muestras para cada valor de Ψ para evaluar el comportamiento del encogimiento-deformación del producto. El encogimiento en cilindros completos y placas circulares fue cuantificado de manera directa con un vernier, midiendo diámetro y longitud del producto. En el caso de los productos con geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prismas cuadrangulares, se determinó el encogimiento y la deformación del producto por medio del análisis de imagen, haciendo un corte transversal a las tiras de agar para obtener una lámina de aproximadamente 1 mm de espesor de las que se tomaron fotografías digitales inmediatamente después de obtener el corte.

2.3. DETERMINACIÓN DEL ENCOGIMIENTO Y DEFORMACIÓN

También se realizó este mismo procedimiento para el producto fresco ($\Psi = 1$) y seco ($\Psi = 0$).

2.3.1. Análisis de imagen

Las láminas de agar se colocaron junto a un objeto de referencia de dimensiones conocidas (arandela metálica de 0.59 cm de diámetro). Las imágenes se obtuvieron sobre un fondo de contraste que facilitara la posterior extracción de la imagen del producto. Las imágenes digitales fueron adquiridas con una cámara digital en formato JPG (Nikon Coolpix L810).

Las imágenes se procesaron de acuerdo a lo propuesto por Ortiz-García-Carrasco *et al.* (2015). En la Figura 2.3 se muestra de forma general los pasos de la metodología utilizada.

Con el análisis de imagen fue posible obtener los parámetros de tamaño del objeto de estudio: el área de sección transversal (A) definida como el número de píxeles de la región delimitada por el contorno, el perímetro (P) estimado a partir de las coordenadas que delimitan al objeto definido como la suma de las distancias Euclidianas entre los puntos consecutivos. El tamaño real de estos parámetros se determinó por medio de la relación entre el número de píxeles y las dimensiones reales del objeto de referencia.

2.3. DETERMINACIÓN DEL ENCOGIMIENTO Y DEFORMACIÓN

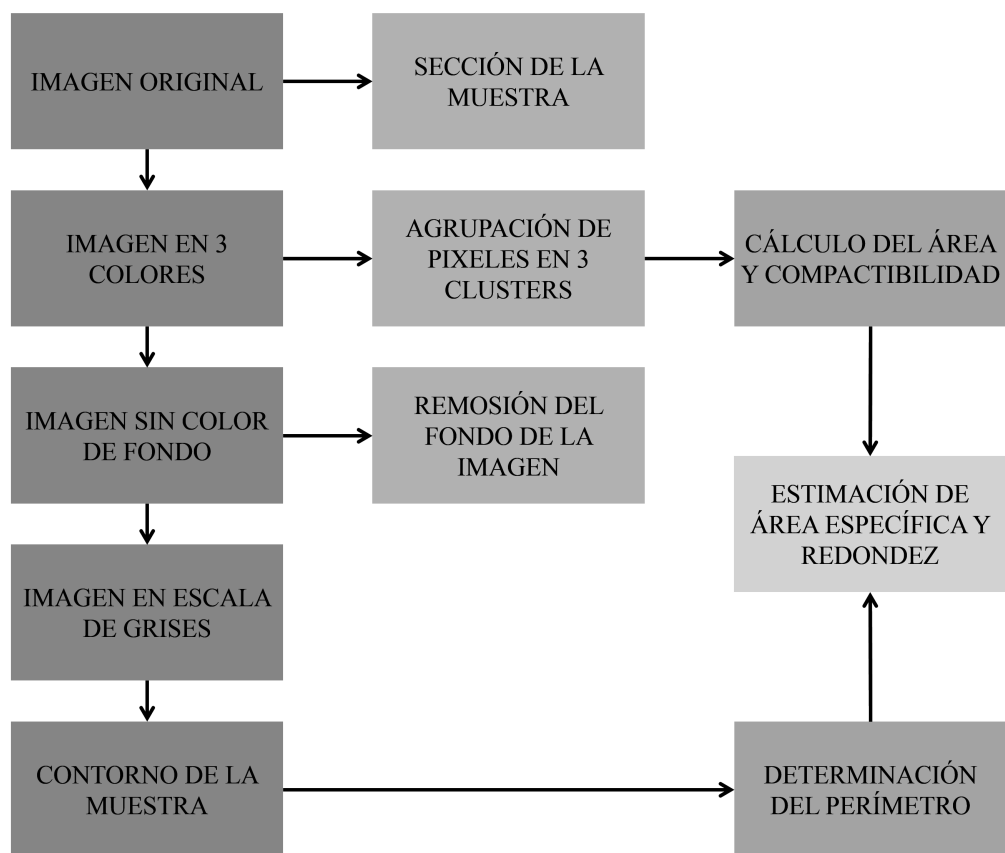


Figura 2.3. Metodología general del análisis de imagen.

Los factores de forma como área específica, redondez, que es la relación entre el área del objeto y el área del círculo más pequeño que encierra a la muestra, y compactibilidad se estimaron a partir de los datos de los parámetros de tamaño y las Ecuaciones (2.3) a (2.5). Los factores de redondez y compactibilidad proporcionan una idea de la circularidad del objeto, ambos factores se encuentran en el rango de 0 a 1, si el objeto es un círculo perfecto el valor será igual a 1, cuando el valor disminuye el objeto se vuelve menos circular y menos redondo.

$$a = \frac{P}{A} \quad (2.3)$$

$$R = \frac{4\pi A}{P^2} \quad (2.4)$$

$$C = \frac{A}{A_c} \quad (2.5)$$

2.4. Modelación del proceso de secado

2.4.1. Modelo general del proceso de secado por difusión

La ecuación de transporte de masa para la difusión de humedad en el interior de un material homogéneo e isotrópico se expresa de forma general por medio de:

$$\frac{\partial(cX)}{\partial t} = \nabla \cdot [D\nabla(cX)] \quad (2.6)$$

En cambio, el transporte de masa en la superficie del producto está dado por la condición de frontera:

$$-D\nabla(cX_i) = \frac{h_m}{v}(H_i - H) \quad (2.7)$$

La Ecuación (2.7) establece que el flujo de humedad en la interfase aire-producto se rige por el mecanismo de convección.

2.4.2. Expresión del modelo de secado en los sistemas coordenados estudiados

La solución numérica de las Ecuaciones (2.6) y (2.7), implica su representación en el sistema coordenado de estudio mediante el desarrollo de los operadores de divergencia y gradiente. En este proyecto se considera que las propiedades del producto c y D son constantes y la transferencia de masa es bidireccional: en dirección radial-axial en coordenadas cilíndricas y axial-axial en coordenadas rectangulares.

2.4.2.1. Sistema coordenado cilíndrico

El modelo del proceso de secado por difusión en coordenadas cilíndricas (despreciando la transferencia de masa en dirección angular) así como la condición de frontera convectiva se muestran en las Ecuaciones (2.8) y (2.9), respectivamente. Este modelo se usó para modelar la transferencia de masa en la geometría de cilindros completos y placas circulares.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

$$-D \frac{\partial X}{\partial r} - D \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{h_m}{v} (H_i - H) \quad (2.9)$$

2.4.2.2. Sistema coordenado rectangular

De igual forma, el modelo que describe el proceso de secado gobernado por difusión y la condición de frontera convectiva en coordenadas rectangulares se expresan en las

2.4. MODELACIÓN DEL PROCESO DE SECADO

Ecuaciones (2.10) y (2.11), respectivamente. Este modelo se utilizó para modelar la transferencia de masa en la geometría de prismas cuadrangulares.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) + D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

$$-D \frac{\partial X}{\partial x} - D \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{h_m}{v} (H_i - H) \quad (2.11)$$

2.4.3. Forma adimensional en los sistemas coordenados de estudio

Las ecuaciones que describen el proceso de secado por difusión y la condición de frontera convectiva se pueden representar de forma adimensional utilizando las siguientes variables:

$$\psi = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} \quad (2.12)$$

donde ψ es la fracción de humedad libre local, X es la humedad del producto, X_0 la humedad inicial del producto y X_e es la humedad en equilibrio. Asimismo, se introduce la variable adimensional de tiempo

$$Fo = \frac{Dt}{L^2} \quad (2.13)$$

2.4. MODELACIÓN DEL PROCESO DE SECADO

donde Fo es el número de Fourier, D es el coeficiente de difusividad efectiva, t es el tiempo y L es la longitud característica de difusión, considerando que puede tratarse tanto de la longitud o el radio según sea el caso de estudio.

Las variables siguientes son las coordenadas adimensionales en la dirección de la difusión, donde ξ podrá representar la coordenada adimensional axial o radial según el sistema coordenado empleado.

$$\xi = \frac{x}{L} \text{ ó } \frac{r}{L} \quad (2.14)$$

$$\zeta = \frac{y}{L} \quad (2.15)$$

La adimensionalización completa de la condición de frontera (2.7) requiere establecer una relación entre las variables X y H . De esta forma (Pavón-Melendez *et al.*, 2002),

$$H = KX \quad (2.16)$$

De acuerdo a la Ecuación (2.16), si $X = X_i$ entonces $H = H_i$. Por otra parte, cuando el producto alcanza su humedad de equilibrio, es decir, si $X = X_e$ entonces $H = H_e$. Es importante señalar que el valor de humedad en el que se equilibra el aire es su humedad inicial, representada simplemente por H , ya que las características del aire de secado se consideran constantes.

La condición de frontera adimensional se puede simplificar si se considera que el proce-

2.4. MODELACIÓN DEL PROCESO DE SECADO

so está controlado exclusivamente por la transferencia interna de humedad ($Bi_m < 40$) (Pavón-Melendez *et al.*, 2002). En este caso, $X = X_e$ en la superficie del producto inmediatamente después de haber empezado el proceso. Es decir,

$$\psi_i = 0 \quad (2.17)$$

2.4.3.1. Sistema de coordenadas cilíndricas

Las Ecuaciones (2.8) y (2.9) expresadas en términos adimensionales para el sistema de coordenadas cilíndricas es el siguiente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} = -Bi_m \psi_i \quad (2.19)$$

2.4.3.2. Sistema de coordenadas rectangulares

La ecuación de difusión para coordenadas rectangulares queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \quad (2.20)$$

De forma similar, la condición de frontera adimensional, que describe el proceso del

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

transporte de masa por convección para coordenadas rectangulares se define como:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} = -Bi_m \psi_i \quad (2.21)$$

En las Ecuaciones (2.19) y (2.21), Bi_m es el número de Biot de transporte de masa definido como:

$$Bi_m = \frac{Kh_m}{cv(D/L)} \quad (2.22)$$

donde κ es la relación que existe entre la longitud del producto y el radio.

2.5. Solución de los modelos

2.5.1. Solución numérica

Los métodos de mallas no estructuradas surgieron originalmente como una alternativa viable para discretizar geometrías complejas. Estos métodos, como se menciona en el capítulo anterior, utilizan triángulos (2D) y tetraedros (3D) como elementos; y a diferencia de los nodos de las mallas ortogonales, estos pueden alterarse, añadir, eliminar o desplazar, además de que la conectividad de la malla puede reconfigurarse y adaptarse al proceso en cada intervalo de tiempo.

Para comprender mejor el funcionamiento de la simulación del proceso de secado de un material que presenta cambios estructurales y de tamaño, se necesitan definir algunos conceptos básicos del método de solución a partir de mallas no estructuradas.

2.5.1.1. Conceptos básicos

Se considera que la forma del producto es aproximada a un modelo de malla triangular M en dos dimensiones que consiste en N nodos o vértices representados por $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i) \in M$ ($i = 1, 2, \dots, N$) (Figura 2.4). Los vecinos de primer nivel del vértice \mathbf{v}_i se definen como el conjunto Ω_{1i} de tamaño N_{1i} que contiene todos los vértices conectados a \mathbf{v}_i por un segmento (es decir, son adyacentes),

$$\Omega_{1i} \equiv \Omega_1(\mathbf{v}_i) = \{\mathbf{v}_j \mid g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 1; i, j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.23)$$

donde

$$g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si los vértices } \mathbf{v}_i \text{ y } \mathbf{v}_j \text{ están conectados} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.24)$$

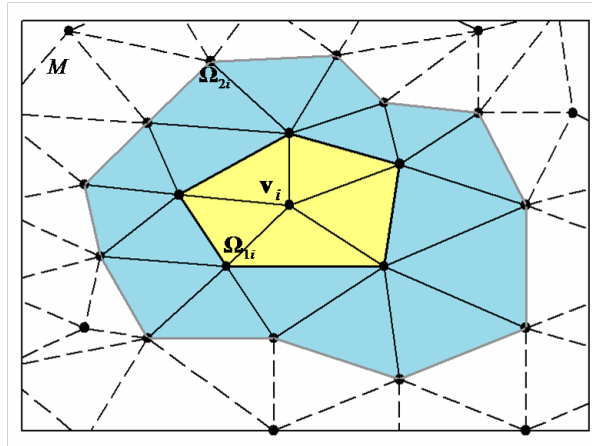


Figura 2.4. Representación de una malla triangular mostrando los vecinos de primer (Ω_{1i}) y segundo nivel (Ω_{2i}) del vértice \mathbf{v}_i .

De forma similar, los vecinos de segundo nivel del vértice \mathbf{v}_i se definen como el

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

conjunto Ω_{2i} de tamaño N_{2i} que contiene todos los vértices \mathbf{v}_k conectados a los vecinos de primer nivel del conjunto de \mathbf{v}_i ,

$$\Omega_{2i} \equiv \Omega_2(\mathbf{v}_i) = \{\mathbf{v}_k \mid g(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 1; \mathbf{v}_j \in \Omega_1(\mathbf{v}_i); i, j, k = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.25)$$

La Figura 2.5 muestra el ejemplo de una malla numerada mostrando los conceptos de vecinos de primer y segundo nivel. Para esta figura

$$\Omega_{1,1} = \Omega_1(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$$

Por lo tanto, $N_{1,1} = N_1(\mathbf{v}_1) = 5$. Es decir, \mathbf{v}_1 tiene 5 vecinos de primer nivel.

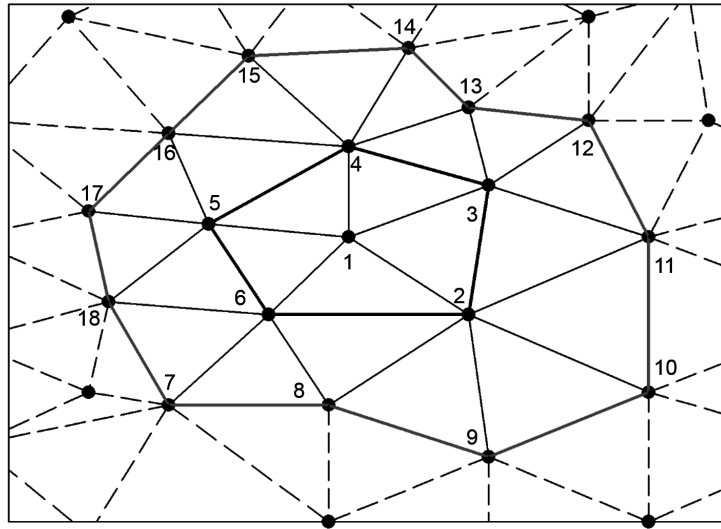


Figura 2.5. Ejemplo de malla con vértices numerados.

En cambio los vecinos de segundo nivel de \mathbf{v}_1 son:

$$\Omega_{2,1} = \Omega_2(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8, \mathbf{v}_9, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{14}, \mathbf{v}_{15}, \mathbf{v}_{16}, \mathbf{v}_{17}, \mathbf{v}_{18}\}$$

Por consiguiente, $N_{2,1} = N_2(\mathbf{v}_1) = 12$. En otros términos, \mathbf{v}_1 tiene 12 vecinos de segundo nivel.

2.5.1.2. Método de solución

La ecuación que describe el proceso de difusión en coordenadas rectangulares (2.10) se puede resolver utilizando el método de líneas (ML). Este método produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con Fo como variable independiente a partir de la ecuación original por medio de una representación discreta de las derivadas espaciales en cada vértice. De forma común, las derivadas espaciales se pueden aproximar por medio de diferencias finitas, si la geometría del producto está representada por una malla regular, formada por celdas de lados ortogonales en el sistema de coordenadas curvilíneas elegido. Sin embargo, si el producto es descrito por una malla irregular o si la malla se deforma durante la simulación, entonces los esquemas tradicionales para diferencias finitas ya no son aplicables.

Con el fin de aplicar el ML al problema actual, se deben calcular las segundas derivadas de ψ para cada vértice. Se puede aplicar la serie de Taylor para aproximar los valores de la humedad ψ_j en \mathbf{v}_i para todos los $\mathbf{v}_j \in \Omega_{1i}$. La siguiente serie se obtiene para una función de dos variables $\psi(\xi, \zeta)$ si se utiliza una aproximación de segundo orden para $\psi_j \in \Omega_{1i}$,

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

$$\psi_j \approx \psi_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} \xi_{ji} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} \zeta_{ji} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} \xi_{ji}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} \zeta_{ji}^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} \xi_{ji} \zeta_{ji} \quad (2.26)$$

$$\xi_{ji} = \xi_j - \xi_i; \quad \zeta_{ji} = \zeta_j - \zeta_i \quad (2.27)$$

Así, todos los $\psi_j \in \Omega_{1i}$ son descritos por una función lineal de las derivadas desconocidas en \mathbf{v}_i , el cual se puede arreglar como un sistema lineal de la forma

$$\mathbf{F}_i \mathbf{D}_i = \mathbf{U}_i \quad (2.28)$$

donde

$$\mathbf{D}_i^T = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi \partial \zeta} \end{array} \right] \in R^{1 \times 5} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{F}_i = \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{ij}^2 \xi_{ji} & w_{ij}^2 \zeta_{ji} & w_{ij}^2 \xi_{ji}^2 & w_{ij}^2 \zeta_{ji}^2 & w_{ij}^2 \xi_{ji} \zeta_{ji} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \in R^{N_{1i} \times 5} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{U}_i^T = \left[\dots \quad w_{ij}^2 \psi_j \quad -w_{ij}^2 \psi_i \quad \dots \right] \in R^{N_{1i} \times 1} \quad (2.31)$$

Para ello, es necesario que $N_{1i} \geq 5$ para poder evaluar \mathbf{D}_i . El sistema tiene solución única si $N_{1i} = 5$. Sin embargo, si $N_{1i} \geq 5$ entonces el sistema es sobre-determinado, requiriendo de una regresión lineal ordinaria o regresión lineal ponderada para satisfacer,

$$\sum_{j \in \Omega_{1i}} w_{ij}^2 (\psi_j - \psi_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.32)$$

donde cada w_{ij} es una función de peso dada por

$$w_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{ji}^2 + \zeta_{ji}^2}} \quad (2.33)$$

La solución analítica de la Ecuación (2.28) está dada por,

$$\mathbf{D}_i = \left(\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i \right)^{-1} \left(\mathbf{F}_i^T \mathbf{U}_i \right) \quad (2.34)$$

Finalmente, las Ecuaciones (2.18) y (2.20) en forma discreta quedan expresadas como (donde las derivadas espaciales requeridas se toman de la solución \mathbf{D}_i)

$$\frac{d\psi_i}{dF_o} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} \quad (2.35)$$

El sistema de ecuaciones dado por (2.28) se resolvió por medio de Matlab con la rutina `ode15s`, considerando un perfil uniforme de humedad inicial en el producto ($\psi = 1$); la malla se generó con Partial Differential Equation Toolbox de Matlab.

2.5.1.3. Algoritmo de encogimiento-deformación

Con la finalidad de simular los fenómenos de encogimiento y deformación del producto, causados por el colapso de la estructura celular, se tomó el algoritmo desarrollado por Pacheco-Aguirre *et al.* (2015) que actualiza las posiciones de los vértices de la malla en función del contenido de humedad local. El símbolo λ se utilizó por simplicidad para representar ya sea las coordenadas ξ o ζ . Sea $\boldsymbol{\lambda}_i$ el conjunto de distancias acortadas a lo largo de los ejes x o y debido a la pérdida de agua entre los vértices \mathbf{v}_i y sus vecinos de primer orden, donde

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \{\lambda_{ij} \mid \mathbf{v}_j \in \Omega_1(\mathbf{v}_i); i, j = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.36)$$

Cada elemento en el conjunto (2.36) está relacionado con las posiciones deformadas desconocidas λ_i y λ_j por

$$\lambda_{ij} = \lambda_j - \lambda_i \text{ para } \lambda_i, \lambda_j \in \boldsymbol{\lambda}_i \quad (2.37)$$

Cada λ_{ij} representa una distancia objetivo que debe ser satisfecha por las nuevas coordenadas de la malla y se pueden calcular una vez que el contenido local de humedad se actualice. El desplazamiento total esperado $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ a lo largo de los ejes x o y del vértice

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

i es igual a

$$\varepsilon_i = \sum \lambda_{ij} = \sum (\lambda_j - \lambda_i) \text{ para } \lambda_{ij} \in \boldsymbol{\lambda}_i \quad (2.38)$$

Las ecuaciones de desplazamiento total para cada vértice en la malla se pueden combinar para formar un sistema lineal

$$\mathbf{CZ} = \mathbf{E} \quad (2.39)$$

donde \mathbf{Z} es el vector de coordenadas desconocidas, \mathbf{E} es el desplazamiento total del vector (objetivo) y \mathbf{C} es la matriz de conexión que se define de la siguiente manera

$$\mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_N \end{bmatrix} \in R^{1 \times N} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \end{bmatrix} \in R^{1 \times N} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{C} \in R^{N \times N} \text{ donde } c_{ii} = -N_{1i} \text{ y } c_{ij} = g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \quad (2.42)$$

Una solución en el sentido de mínimos cuadrados de la Ecuación (2.39) se puede utilizar para minimizar el error entre distancias objetivo contenidas en \mathbf{E} y las nuevas

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

coordenadas de la malla. Sin embargo, el desplazamiento total del vector \mathbf{E} puede ser potencialmente satisfecho por varias posiciones \mathbf{Z} (por ejemplo si la malla es movida horizontalmente o verticalmente las posiciones de los vértices son modificadas, pero las distancias de los bordes permanecen idénticas). Así, debería proporcionarse información adicional para resolver la Ecuación (2.39). Si se representa todo el producto, entonces un vértice arbitrario se puede fijar, por ejemplo en $\mathbf{v}_i = (x, y) = (0, 0)$. De esta forma se calculan las posiciones deformadas respecto al vértice fijo elegido.

Las distancias objetivo a satisfacer por el algoritmo de deformación se calcularon por medio de la ecuación

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij0}} = \Delta_{ij} + (1 - \Delta_{ij}) \left(\frac{\psi_i + \psi_j}{2} \right) \quad (2.43)$$

donde cada Δ_{ij} representa la distancia final entre los vértices \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j (como fracción de su valor inicial) y se evalúan a partir del contorno promedio de deformación obtenido experimentalmente.

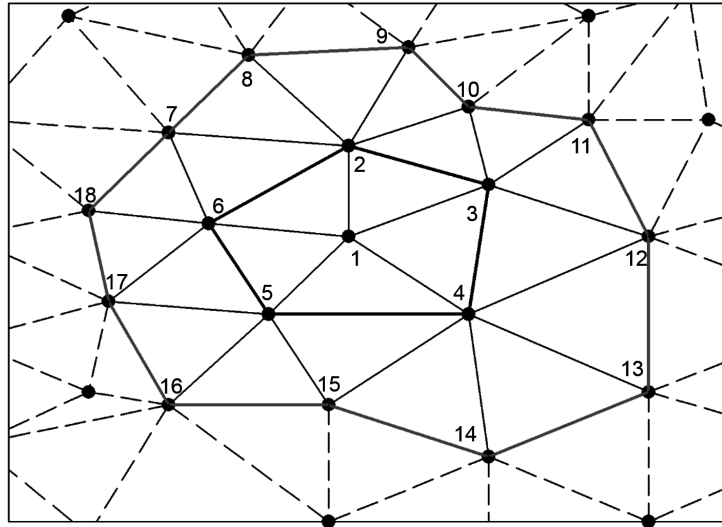


Figura 2.6. Porción de la malla de estudio.

Para explicar mejor el desarrollo del algoritmo se considera el siguiente ejemplo considerando una porción del producto representado por una malla irregular cuyos vértices numerados tienen asignados un valor inicial de humedad (Figura 2.6). En la Tabla (2.4) se presentan los valores iniciales de humedad, las posiciones iniciales de los vértices así como la conectividad de cada uno con sus vecinos de primer nivel.

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

Tabla 2.4. Conectividad de los vértices.

\mathbf{v}_i	x	y	ψ	Conectividad con \mathbf{v}_i	N_{ii}
1	0.17	-0.18	0.9	2, 3, 4, 5, 6	5
2	0.17	-0.11	0.83	1, 3, 6, 7, 8, 9, 10	7
3	0.24	-0.14	0.81	1, 2, 4, 10, 11, 12	6
4	0.23	-0.24	0.78	1, 3, 5, 12, 13, 14, 15	7
5	0.13	-0.24	0.75	1, 4, 6, 15, 16, 17	6
6	0.1	-0.17	0.66	1, 2, 5, 7, 17, 18	6
7	0.08	-0.1	0.59	2, 6, 8, 18	4
8	0.12	-0.04	0.65	2, 7, 9	3
9	0.2	-0.034	0.5	2, 8, 10	3
10	0.23	-0.08	0.33	2, 3, 9, 11	4
11	0.29	-0.09	0.4	3, 10, 12	3
12	0.32	-0.18	0.35	3, 11, 13	3
13	0.32	-0.3	0.45	4, 12, 14	3
14	0.24	-0.35	0.3	4, 13, 15	3
15	0.16	-0.31	0.16	4, 5, 14, 16	4
16	0.08	-0.31	0.1	5, 15, 17	3
17	0.05	-0.23	0.09	5, 6, 16, 18	4
18	0.04	-0.16	0.21	6, 7, 17	3

Una vez establecidas las conectividades de cada vértice, se determinaron las distancias iniciales entre los vértices λ_{ij0} y el valor promedio de la fracción de humedad local entre los vértices conectados ψ_{ij} .

Se calcularon las distancias objetivo λ_{ij} a partir de la Ecuación (2.43), suponiendo en este ejemplo ficticio que $n = 0.7$ y $\Delta_{ij} = 0.25$. Subsecuentemente se calculó el

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

desplazamiento total esperado ε_i por medio de la Ecuación (2.38).

Tabla 2.5. Coordenadas de la malla modificada.

v_i	x	y
1	0.038	-0.069
2	0	0
3	0.092	-0.016
4	0.090	-0.096
5	0.001	-0.104
6	-0.034	-0.054
7	-0.059	0.001
8	-0.032	0.054
9	0.034	0.059
10	0.069	0.028
11	0.132	0.024
12	0.177	-0.028
13	0.160	-0.128
14	0.093	-0.168
15	0.031	-0.146
16	-0.026	-0.141
17	-0.056	-0.095
18	-0.073	-0.049

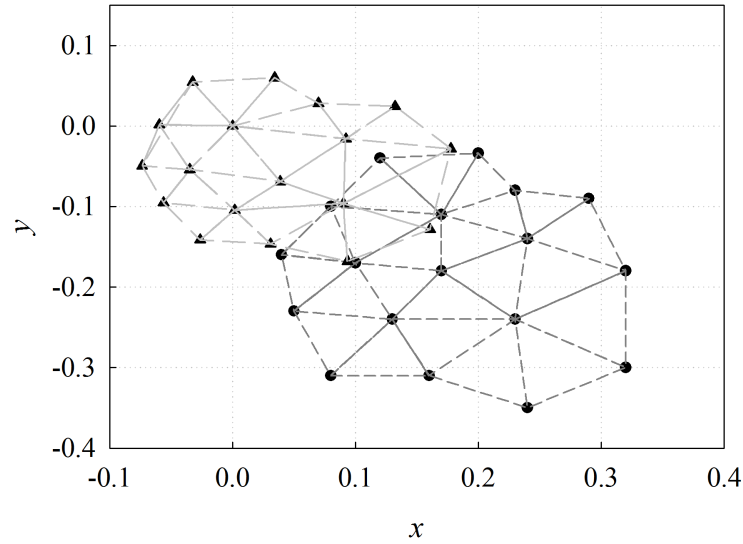


Figura 2.7. Malla original y malla deformada.

Fijando el valor del \mathbf{v}_2 en $(0, 0)$, se obtienen las nuevas coordenadas o posiciones de los vértices que se muestran en la Tabla 2.5; se observa que la modifica su tamaño y posición como lo muestra la Figura (2.7).

Por lo tanto, se determina posible simular el proceso de secado, considerando el encogimiento y la deformación del producto, al alimentar al simulador el contorno final promedio obtenido a partir del análisis de imagen para la geometría de estudio.

2.5.1.4. Estimación de las distancias objetivo

El algoritmo de encogimiento-deformación desarrollado por Pacheco-Aguirre *et al.* (2015) depende de una función que evalúa las distancias objetivo λ_{ij} y el modelo que actualiza la malla. Por lo que, sugiere el siguiente modelo:

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij0}} = (1 - S_{ij}) + S_{ij} \exp(-k\tau^n) \quad \text{para } \lambda_{ij} \in \lambda_i \quad (2.44)$$

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

Tabla 2.6. Diseño de caras centradas para los parámetros de ajuste en la estimación de las distancias objetivo.

k	n	R^2
-4	0.95	0.929
-4	0.90	0.947
-4	0.85	0.959
-5	0.95	0.961
-5	0.90	0.963
-5	0.85	0.956
-6	0.95	0.962
-6	0.90	0.954
-6	0.85	0.935

donde S_{ij} , k y n controlan el grado de encogimiento final y el comportamiento del encogimiento a lo largo de la coordenada λ . El parámetro de encogimiento S_{ij} se asigna a cada vértice de la malla para marcar el tamaño final de la malla del producto deformada. Los parámetros k y n se ajustaron para reproducir la relación experimental de la reducción de tamaño del producto; se determinó la combinación de parámetros que lograron un mejor ajuste por medio de un diseño experimental de caras centradas (Tabla 2.6), tomando como límites $-6 \leq k \leq -4$ y $0.85 \leq n \leq 0.95$.

2.5.1.5. Estimación del contenido promedio de humedad

El contenido de humedad promedio Ψ se calculó a partir de la integración numérica de los valores locales por medio de la siguiente expresión

$$\Psi = \frac{\iiint_v \psi dv}{\iiint_v dv} = \frac{I_1}{I_2} \quad (2.45)$$

En dos dimensiones, la integral I_2 corresponde al área de sección transversal de la geometría de estudio, es decir, al área total de la malla $A(M)$, equivalente a la suma de todas las áreas de los elementos o celdas triangulares C_I de acuerdo a la Ecuación (2.46).

$$I_2 = A(M) = \sum_{I=1}^T \iint_{C_I} d\xi d\zeta = \sum_{I=1}^T A(C_I) \quad (2.46)$$

Por otra parte, el área de una celda triangular con sus tres pares de coordenadas $P_1(\xi_1, \zeta_1)$, $P_2(\xi_2, \zeta_2)$ y $P_3(\xi_3, \zeta_3)$ se calculará de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{J}_I| \quad (2.47)$$

donde

$$\mathbf{J}_I = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

A manera de ejemplo se considera que se tiene un elemento de coordenadas $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(5, 2)$ (Figura 2.8).

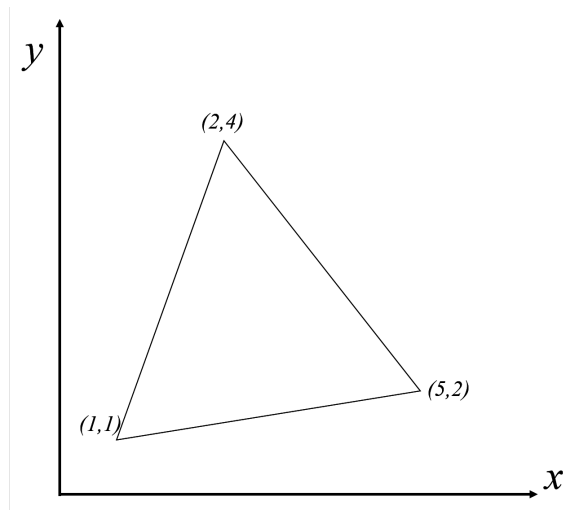


Figura 2.8. Elemento triangular.

De acuerdo a la Ecuación (2.48) se sustituyen y ordenan los valores de las coordenadas en la matriz y se obtiene su determinante:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = -11$$

De manera que, al aplicar la Ecuación (2.47) se obtiene que el área del elemento con coordenadas en $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(5, 2)$ es $A = 5.5$.

I_1 , por otra parte, se calcula por medio de la integración numérica de la función deseada $f = \psi$ sobre las celdas triangulares representadas por el sistema de coordenadas baricéntricas locales como:

$$I_1 = \sum_{I=1}^T \iint_{cI} f_1(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \sum_{I=1}^T \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f_1(L_1, L_2) dL_1 dL_2 \dots$$

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

$$= \sum_{I=1}^T \sum_{i=1}^3 w_{(i)} f_{1(i)} \left(L_{1(i)}, L_{2(i)} \right) |\mathbf{J}_I| \quad (2.49)$$

donde

i	(L_1, L_2)	w
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1/6
2	$(\frac{1}{2}, 0)$	1/6
3	$(0, \frac{1}{2})$	1/6

Para transformar coordenadas rectangulares a baricéntricas o viceversa, se puede utilizar una transformación lineal por medio de la siguiente expresión

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{L} + \mathbf{R}_3 \quad (2.50)$$

donde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} - \xi_{(3)} & \xi_{(2)} - \xi_{(3)} \\ \zeta_{(1)} - \zeta_{(3)} & \zeta_{(2)} - \zeta_{(3)} \end{bmatrix}$$

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \xi_{(3)} \\ \zeta_{(3)} \end{bmatrix}$$

Así que, se selecciona uno de los vértices y simplemente se traslada el origen para obtenerse la referencia baricéntrica.

Retomando el ejemplo anterior, se considera un elemento de coordenadas rectangulares $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(5, 2)$ del que se desean obtener las coordenadas baricéntricas que lo describen. Se fija como \mathbf{R}_3 el punto con coordenadas $(5, 2)$, y se estructura la matriz \mathbf{T} :

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 - 5 & 2 - 5 \\ 1 - 2 & 4 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

de esta forma \mathbf{R} tomará los valores de:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la Ecuación (2.50) se obtienen los valores de las matrices \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_2 , ya que \mathbf{L}_3 queda en el origen (Figura 2.9).

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

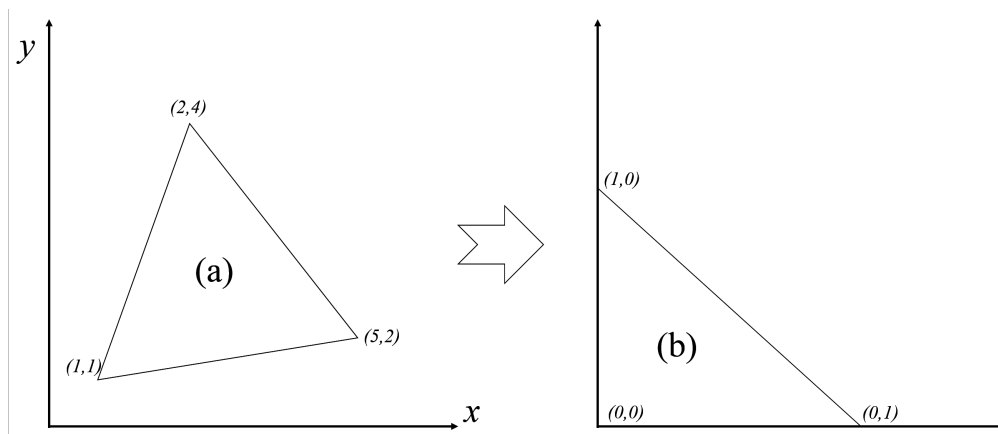


Figura 2.9. Elemento en coordenadas cartesianas (a) y baricéntricas (b).

La función de interpolación en cada celda f_1 se define como

$$f_1(\xi, \zeta) = a_{I0} + a_{I1}\xi + a_{I2}\zeta \quad (2.51)$$

donde los coeficientes de las celdas a_{I0} , a_{I1} y a_{I2} son evaluados por medio de la solución de la ecuación

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

$$\mathbf{J}_I \mathbf{a}_I = \mathbf{f}_I \quad (2.52)$$

con

$$\mathbf{a}_I^T = [a_{I0} \quad a_{I1} \quad a_{I2}]; \quad \mathbf{f}_I^T = [f_{(1)} \quad f_{(2)} \quad f_{(3)}]$$

Suponiendo que el elemento del ejemplo anterior tiene asignados a cada uno de los vértices que lo componen (Figura 2.10) diferentes valores de humedad, se desea estimar su valor promedio del contenido de humedad.

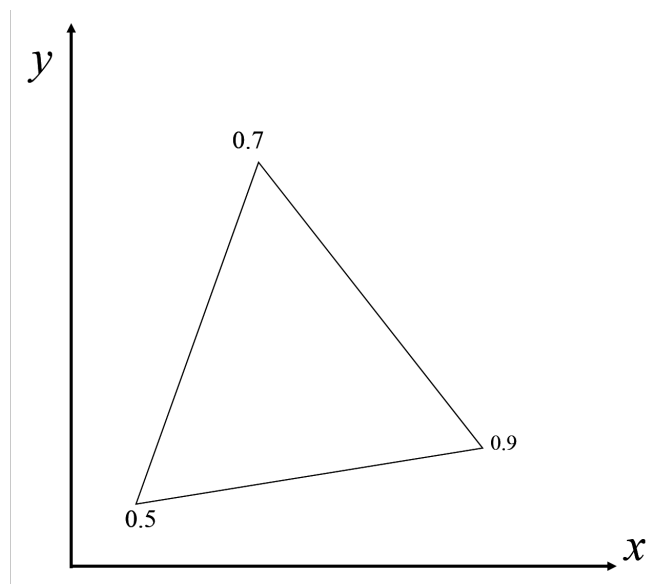


Figura 2.10. Temperatura en el elemento triangular.

Es posible estimarlo haciendo uso de la Ecuación (2.51); a manera que, se realiza el siguiente arreglo:

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

$$a_0 + a_1(1) + a_2(1) = 0.5$$

$$a_0 + a_1(2) + a_2(4) = 0.7$$

$$a_0 + a_1(5) + a_2(2) = 0.9$$

o en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

de manera que se soluciona la matriz de la Ecuación (2.52); así pues, la solución de este sistema se muestra a continuación:

$$\mathbf{a}_I = \begin{bmatrix} 0.3727 \\ 0.0909 \\ 0.0364 \end{bmatrix}$$

donde $a_1 = 0.3737$, $a_2 = 0.0909$ y $a_3 = 0.0364$.

Determinando la equivalencia de las coordenadas baricéntricas en coordenadas cartesianas a partir del número de puntos de integración que para este caso son 3, se obtiene lo siguiente:

2.5. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS

L_1	L_2	x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.5	2.5
$\frac{1}{2}$	0	3	1.5
0	$\frac{1}{2}$	3.5	3

Se calcula f_1 a partir de la Ecuación (2.51), sustituyendo los valores de los parámetros \mathbf{a}_I obtenidos y con las nuevas coordenadas estimadas x, y que se muestran en la tabla anterior:

$$0.3727 + 0.0909(1.5) + 0.0364(2.5) = 0.6$$

$$0.3727 + 0.0909(3.0) + 0.0364(1.5) = 0.7$$

$$0.3727 + 0.0909(3.5) + 0.0364(3.0) = 0.8$$

de esta forma, se obtienen los valores de f_1 que se sustituyen en la Ecuación (2.49) juntamente con el valor obtenido del determinante de la matriz \mathbf{J}_I para obtener la expresión siguiente:

$$I_1 = \frac{1}{6} (0.6 + 0.7 + 0.8) |-11| = 3.85$$

Por lo tanto el valor promedio del contenido de humedad tomando como ejemplo un elemento de coordenadas iniciales (1, 1), (2, 4) y (5, 2) con $A = 5.5$ se define como:

$$\bar{\Psi} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{3.85}{5.5} = 0.7$$

de este modo el valor promedio de la humedad en dicho elemento es de $\bar{\Psi} = 0.7$

2.5.2. Solución analítica

El método de pendientes está basado en la solución de la ecuación de Fick para la difusión en estado no estacionario para coordenadas cilíndricas y coordenadas rectangulares de acuerdo a las Ecuaciones (2.18) y (2.20), respectivamente. De manera que la forma de la solución de estas ecuaciones para cilindro finito y placa plana, considerando difusividad constante se expresan como lo indican las Ecuaciones (2.53) y (2.54):

$$\Psi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 Fo') \quad (2.53)$$

$$\Psi = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} Fo'\right) \quad (2.54)$$

donde λ_n^2 son los valores propios obtenidos por medio de la función de Bessel $J_0(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, 3 \dots$ y Fo' es el número de Fourier modificado definido como $Fo' = Dt/[L(t)]^2$ donde L , que es la dimensión característica de la difusión ya sea radio o longitud del producto, es función del tiempo, es decir, su valor se modifica respecto del tiempo; de tal forma que $L(t)$ se estima a partir de la Ecuación (2.58) como se describe en la siguiente subsección.

2.5.2.1. Método simplificado de pendientes

El método de pendientes estima la difusividad efectiva de agua para cada contenido de humedad (Ψ) esencialmente aplicando de forma repetitiva la ecuación de difusión, para cilindro (Ecuación 2.53) y para placa (Ecuación 2.54), desde $\Psi = 1$ hasta que el producto alcanza el equilibrio; a partir de suponer que la pendiente de la curva de secado y las dimensiones de la muestra cambian durante el proceso de secado, los valores estimados de la difusividad (D) varían de acuerdo al contenido de humedad de la muestra (Karathanos *et al.*, 1990).

La Figura 2.11 muestra un esquema del procedimiento que se llevó a cabo para calcular el coeficiente de difusividad (D) por medio del método de pendientes.

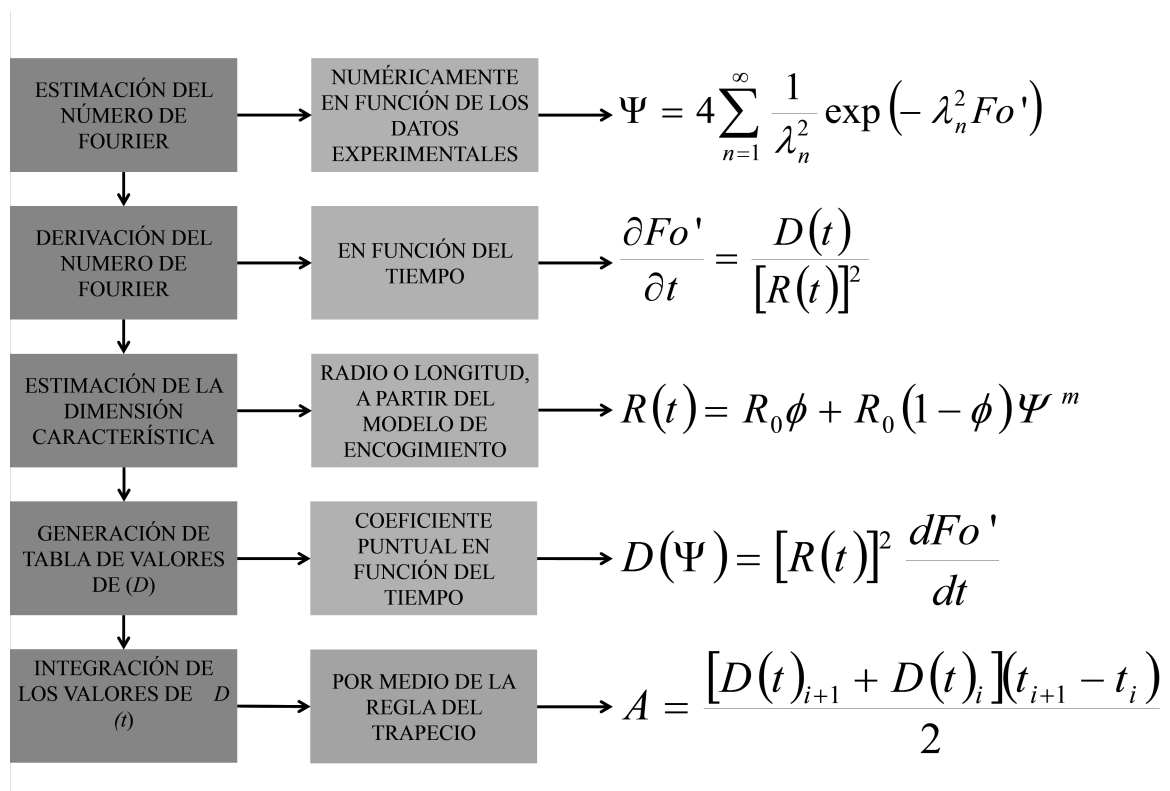


Figura 2.11. Esquema del procedimiento de determinación del coeficiente de difusividad utilizando el método de pendientes.

2.5.2.2. Ajuste del modelo al método de pendientes

Autores como Thuwapanichayanan *et al.* (2008) reportan que es posible modelar los datos experimentales obtenidos del coeficiente de difusividad en función del contenido de humedad por medio de un modelo lineal que relaciona el cambio entre los espacios de cada sección en la que se divide el objeto de estudio y el contenido promedio de humedad.

Sin embargo, a diferencia de ellos, Ruiz-López *et al.* (2012) proponen un modelo que se ajusta a los valores de difusividad en función de la fracción de humedad libre.

Este modelo se construyó como el producto de dos tipos de funciones: monótonicamente decrecientes ($0 \leq D_1 \leq 1$) y de crecimiento exponencial ($0 \leq D_2 \leq 1$) de la fracción de humedad libre basado en el modelo de Page.

$$D(\Psi) = D_1 D_2 \tag{2.55}$$

donde

$$D_1 = \exp(-k_1 \Psi^{n_1}) \tag{2.56}$$

$$D_2 = 1 - \exp(-k_2 \Psi^{n_2}) \tag{2.57}$$

La Ecuación (2.55) genera una función cóncava ($0 \leq D_1 D_2 \leq 1$) donde la amplitud del pico, la forma y el desplazamiento se pueden ajustar con los parámetros k_1 , k_2 , n_1 y n_2

por medio de una regresión no lineal.

2.5.3. Modelación de los parámetros de tamaño y factores de forma

Ruiz-López *et al.* (2012) implementaron un modelo que relaciona los cambios en las dimensiones del producto con su contenido de humedad.

$$y(\Psi) = y_0\phi + y_0(1 - \phi)\Psi^m \quad (2.58)$$

Siendo y los parámetros de tamaño: diámetro (d), longitud (l) y volumen (V) en los sistemas modelo con geometrías de cilindro completo y placa plana circular; de igual forma perímetro (P) y área de sección transversal (A) para las geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular.

Este modelo implica que si el exponente $m = 1$ el encogimiento sigue una tendencia de línea recta durante el secado del producto. Además, el modelo es capaz de considerar posibles desviaciones del comportamiento lineal del encogimiento. Es decir, si $0 \leq m < 1$ entonces la curva sigue un comportamiento cóncavo, y si $m > 1$ entonces la gráfica presenta un comportamiento convexo, en contraste, si $m = 0$ representa un producto cuyo encogimiento es despreciable (Ruiz-López & García-Alvarado, 2007).

De forma similar, se utilizó el modelo propuesto por Ortiz-García-Carrasco *et al.* (2015) que describe el comportamiento que sigue el área específica, ya que estos datos siguen una tendencia distinta a los otros descriptores de forma.

$$\frac{a}{a_0} = 1 + \phi_a \exp^{-k_a \Psi^{m_a}} \quad (2.59)$$

La Ecuación (2.59) es un modelo de decaimiento exponencial similar al modelo de Page, donde ϕ_a controla el incremento relativo del área específica, mientras que k_a y m_a definen la velocidad de decaimiento y la forma de la curva, respectivamente.

2.6. Determinación de la difusividad efectiva

Los perfiles de humedad obtenidos en cada tiempo se integraron numéricamente para obtener su valor promedio en el volumen del cuerpo de acuerdo a la siguiente expresión

$$\Psi = \frac{\int_V \psi dV}{\int_V dV} \quad (2.60)$$

La humedad promedio se puede usar para obtener una gráfica de Ψ vs Fo . En comparación, los datos experimentales que se obtengan se representarán como Ψ vs t . Dado que el valor inicial de longitud característica de difusión L se conocerá, es posible transformar los datos de t a Fo_{exp} si se conoce el valor de D . El valor de D se determinará por regresión no lineal usando el procedimiento que se describe a continuación:

1. Se supone un valor de D .
2. Se calcula el valor de Fo_{exp} para cada t en la curva de secado.
3. Se obtiene el valor predicho de Ψ para cada Fo_{exp} por interpolación de la tabla de Ψ vs Fo de la solución numérica.

2.6. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA

4. Se calcula el error entre los valores predichos y experimentales de Ψ y la suma de cuadrados del error.
5. Se modifica D para minimizar la suma de cuadrados del error y se repiten los pasos 2 a 5.

3. Resultados y Discusión

3.1. Cinéticas de secado

Los datos experimentales obtenidos de pérdida de masa a 70 °C en geometrías de cilindro completo (CC), placa plana circular (PP), medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC) se utilizaron para construir las curvas de secado en términos de la fracción de humedad libre (Figura 3.1). Los tiempos finales de secado se encontraron entre los 400 y 500 minutos. La geometría con menor tiempo de secado fue la de cuartos de cilindro, mientras que los prismas cuadrangulares y las placas planas exhibieron los tiempos de secado más largos, considerando que a menor área específica el tiempo de secado es mayor.

3.1. CINÉTICAS DE SECADO

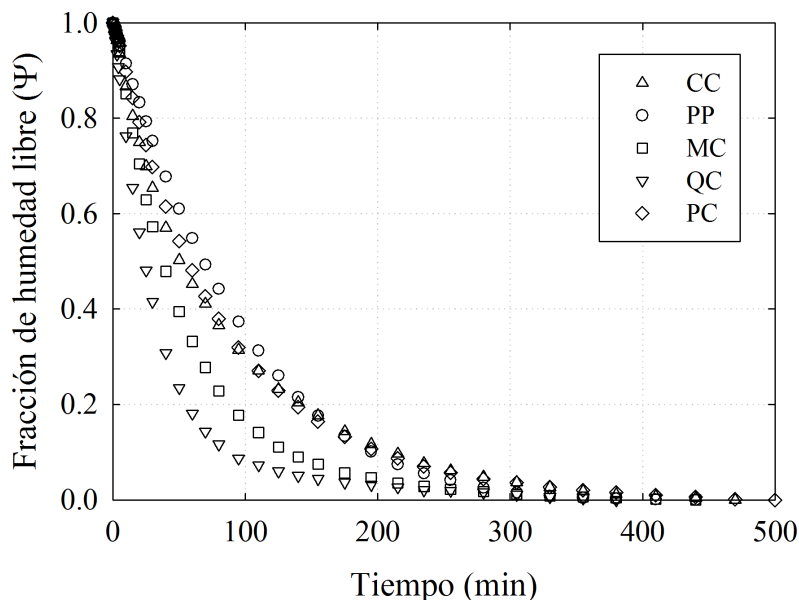


Figura 3.1. Curvas de secado de los sistemas modelo. Cilindro completo (CC), placa plana (PP), medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).

Con los datos obtenidos de la fracción de humedad libre calculada se determinó la velocidad de secado (Figura 3.2). Todas las curvas de velocidad de secado mostradas exhiben un periodo de precalentamiento hasta una fracción de humedad libre aproximada de 0.9 (línea punteada). De allí, se observa una disminución de la velocidad de secado característica de un periodo de velocidad decreciente en un proceso controlado por difusión. Como era de esperarse, la geometría de mayor área superficial muestra tiempos de secado más cortos, por lo tanto, el producto con geometría de cuarto de cilindro tuvo una mayor velocidad de secado, mientras que las placas planas circulares muestran una velocidad de secado menor.

3.2. DETERMINACIÓN DEL ENCOGIMIENTO MEDIANTE MEDICIÓN DIRECTA

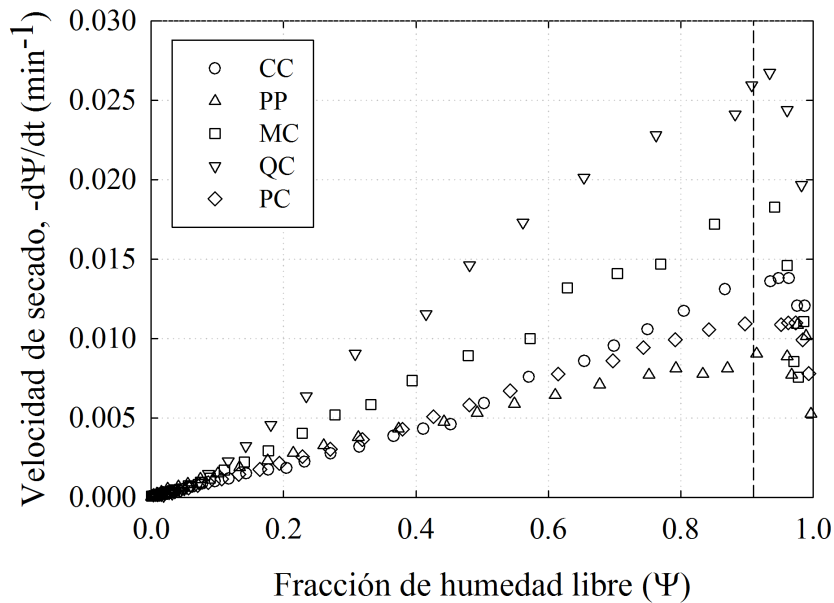


Figura 3.2. Curvas de velocidad de secado. Cilindro completo (CC), placa plana (PP), medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).

3.2. Determinación del encogimiento mediante medición directa

3.2.1. Encogimiento de cilindros completos y placas circulares

Se cuantificó el encogimiento en función del contenido de humedad de los productos con geometrías de cilindro completo y placas circulares a partir de la medición del diámetro (d), la longitud (l) y el cálculo del volumen (V). Utilizando la Ecuación (2.58) del modelo propuesto por Ruiz-López & García-Alvarado (2007) fue posible describir la evolución del encogimiento en función del contenido de humedad, cuyos parámetros de regresión y sus intervalos de confianza al 95 % se muestran en las Tablas 3.1 y 3.2 para cilindros completos y placas circulares, respectivamente.

3.2. DETERMINACIÓN DEL ENCOGIMIENTO MEDIANTE MEDICIÓN DIRECTA

Tabla 3.1. Parámetros de regresión para el modelo de encogimiento del producto en función del contenido de humedad para cilindros completos.

Propiedad	Parámetro	Valor	IC	R ²
Diámetro	ϕ	0.505	0.466/0.543	0.972
	m	0.573	0.479/0.668	
Longitud	ϕ	0.872	0.853/0.893	0.905
	m	0.822	0.543/1.101	
Volumen	ϕ	0.189	0.113/0.264	0.958
	m	0.679	0.540/0.818	

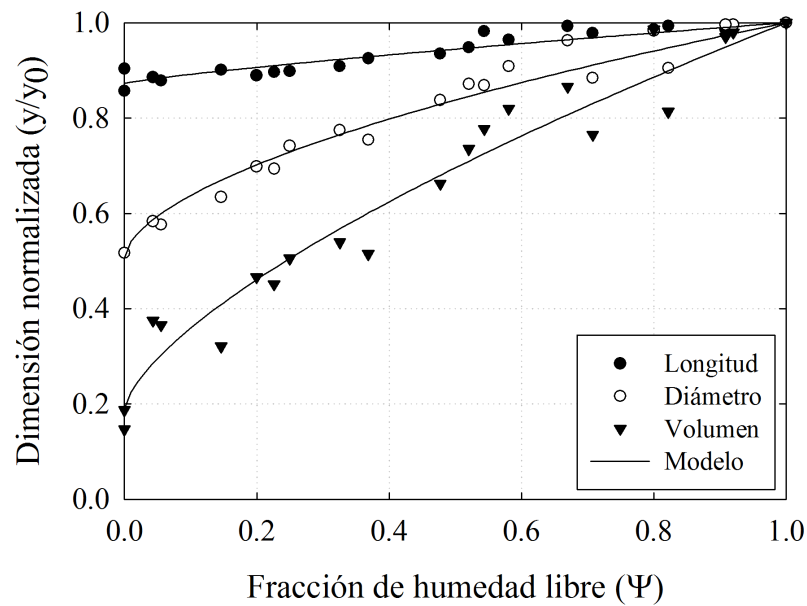


Figura 3.3. Características de encogimiento de los cilindros de gel como función del contenido de humedad.

En las Figuras 3.3 y 3.4 se aprecia el ajuste del modelo a los datos experimentales. Cabe señalar que el encogimiento es mayor a lo largo de las dimensiones que inicialmente tenían un menor tamaño, es decir, el diámetro se redujo en un 50 % en el caso de los cilindros, mientras que la longitud se redujo en un 13 % de su tamaño inicial. Por el contrario, la longitud en las placas se redujo en un 63 % y el diámetro en un 18 %,

3.2. DETERMINACIÓN DEL ENCOGIMIENTO MEDIANTE MEDICIÓN DIRECTA

concordando con lo reportado por Ortiz-García-Carrasco *et al.* (2015) durante el secado convectivo de prismas cuadrangulares de papa.

De forma general, la mayoría de los autores que evalúan el encogimiento durante el proceso de secado de alimentos, lo reportan como una función lineal respecto al contenido de humedad (Corzo & Bracho, 2004; Ochoa *et al.*, 2002; Ratti, 1994); sin embargo, Panyawong & Devahastin (2007) reportaron que existe una relación casi similar a una función de segundo orden entre el volumen y el contenido de humedad.

Tabla 3.2. Parámetros de regresión para el modelo de encogimiento del producto en función del contenido de humedad para placas circulares.

Propiedad	Parámetro	Valor	IC	R ²
Diámetro	ϕ	0.820	0.808/0.832	0.977
	m	0.980	0.848/1.112	
Longitud	ϕ	0.378	0.320/0.436	0.952
	m	0.902	0.735/1.069	
Volumen	ϕ	0.265	0.221/0.310	0.979
	m	1.194	1.042/1.347	

3.3. DETERMINACIÓN DE DEFORMACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE IMAGEN

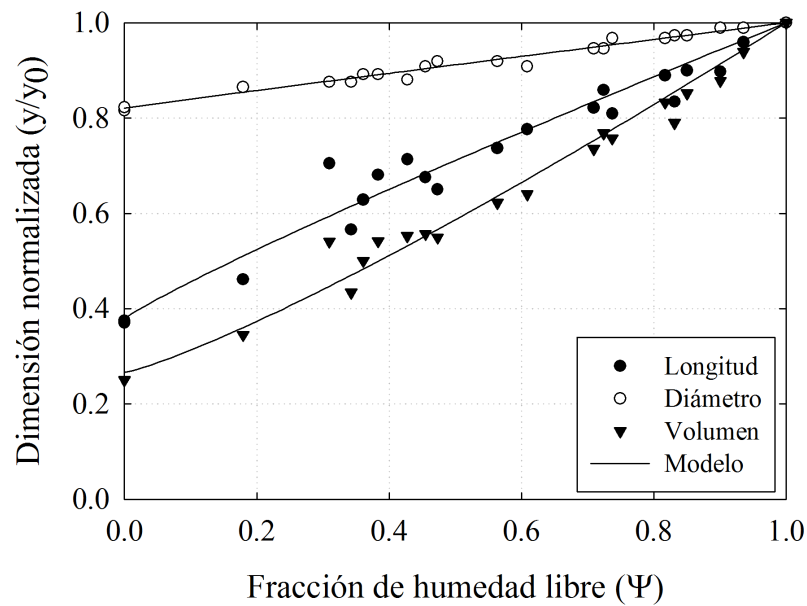


Figura 3.4. Características de encogimiento de las placas circulares de gel como función del contenido de humedad.

3.3. Determinación de deformación mediante el análisis de imagen

Por medio del análisis de imagen se obtuvieron los contornos promedio de los productos con geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular para cada intervalo del contenido de humedad. Los contornos promedio adquiridos se reportan como un mapa de seguimiento que muestra la evolución del encogimiento y deformación del producto en función del tiempo (Figuras 3.5-3.7) para los productos de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular, respectivamente, donde los números en el interior de cada contorno indican el contenido de humedad expresado como fracción de humedad libre y el tiempo transcurrido de secado en minutos.

Se aprecia de forma general que al inicio del proceso de secado el producto reduce sus

3.3. DETERMINACIÓN DE DEFORMACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE IMAGEN

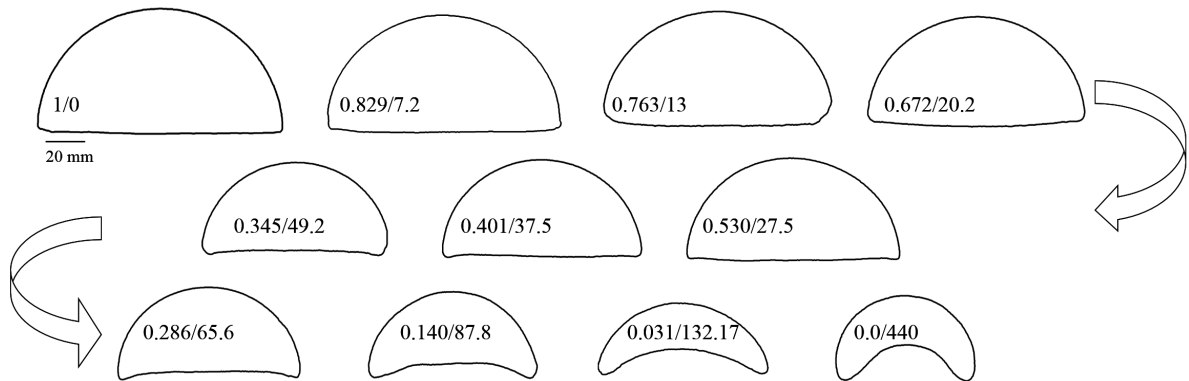


Figura 3.5. Mapa de encogimiento-deformación para los medios cilindros. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).

dimensiones a medida que pierde agua; sin embargo, se observa que cuando el producto alcanza una fracción de humedad libre cercana a 0.4, la estructura del gel colapsa dando lugar a la deformación.

El mayor grado de encogimiento se presenta principalmente en los costados del producto mientras que en los vértices de las geometrías tanto el encogimiento como la deformación son mínimos; ocurre lo que Mayor *et al.* (2011) denominaron “efecto esquina”, es decir, se vuelven más pronunciadas las esquinas o puntas de las geometrías.

3.3. DETERMINACIÓN DE DEFORMACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE IMAGEN



Figura 3.6. Mapa de encogimiento-deformación para los cuartos de cilindro. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).

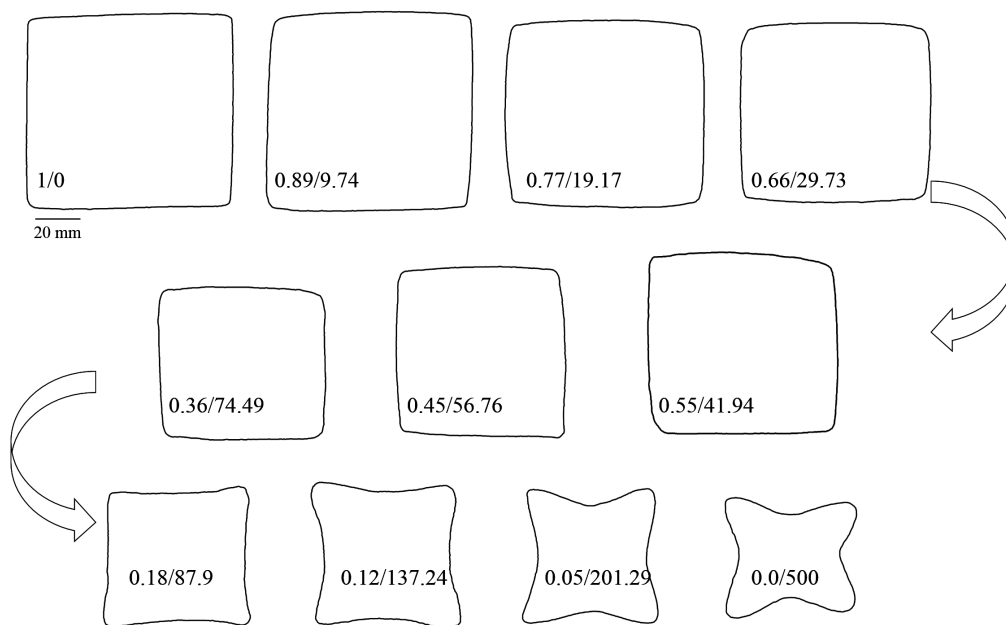


Figura 3.7. Mapa de encogimiento-deformación para los prismas cuadrangulares. Los números representan la fracción de humedad libre alcanzada en el producto/tiempo de secado transcurrido (min).

3.4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE FORMA MEDIANTE ANÁLISIS DE IMAGEN

El contorno de la geometría de prisma cuadrangular representativo del producto seco se utilizó para la simulación del proceso de secado.

3.4. Determinación de parámetros de forma mediante análisis de imagen

A partir del análisis de imagen realizado se pudieron cuantificar las dimensiones normalizadas de los sistemas modelo: perímetro y área de sección transversal, cuyos valores fueron utilizados para estimar el área específica de cada geometría.

Las dimensiones iniciales de cada geometría arrojaron valores distintos a los esperados, mostrados en la Tabla 2.2, si se considera que el producto tendría las dimensiones del tubo utilizado para los productos de medio cilindro y cuarto de cilindro, así como el tamaño de la abertura de las cuchillas del cortador utilizado para obtener los prismas cuadrangulares.

Los valores obtenidos del perímetro, área de sección transversal y área específica iniciales se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Valores de las dimensiones iniciales de los sistemas de estudio.

Geometría	Perímetro (mm)	Área de sección transversal (mm²)	Área específica (mm⁻¹)
Medio cilindro	32.77	63.63	0.515
Cuarto de cilindro	22.19	29.63	0.749
Prisma cuadrangular	35.64	80.89	0.441

Con la finalidad de determinar el efecto del contenido de humedad sobre el encogimiento y la deformación de los sistemas de estudio, se ajustó el modelo que describe los

3.4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE FORMA MEDIANTE ANÁLISIS DE IMAGEN

factores de forma: la Ecuación (2.58) para el perímetro y área de sección transversal y la Ecuación (2.59) para el área específica. Los parámetros que permiten un mejor ajuste del modelo se muestran en las Tablas 3.4 a 3.6, para las geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular, respectivamente.

Tabla 3.4. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en medios cilindros.

Respuesta	Parámetro	Valor	IC 95%	R ²
Perímetro	ϕ_p	0.678	0.652/0.704	0.873
	m_p	1.261	1.010/1.512	
Área de sección transversal	ϕ_A	0.265	0.211/0.319	0.913
	m_A	1.042	0.866/1.218	
Área específica	ϕ_a	1.465	1.295/1.635	0.859
	m_a	1.455	1.015/1.894	
	k	4.586	2.776/6.397	

Tabla 3.5. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en cuartos de cilindro.

Respuesta	Parámetro	Valor	IC 95%	R ²
Perímetro	ϕ_p	0.652	0.619/0.685	0.878
	m_p	0.745	0.593/0.898	
Área de sección transversal	ϕ_A	0.296	0.232/0.361	0.894
	m_A	0.638	0.517/0.759	
Área específica	ϕ_a	1.090	1.004/1.176	0.925
	m_a	0.912	0.730/1.093	
	k	4.001	3.076/4.925	

3.4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE FORMA MEDIANTE ANÁLISIS DE IMAGEN

Tabla 3.6. Parámetros de regresión de los modelos de encogimiento en prismas cuadrangulares.

Respuesta	Parámetro	Valor	IC 95%	R ²
Perímetro	ϕ_p	0.668	0.645/0.690	0.928
	m_p	0.854	0.714/0.993	
Área de sección transversal	ϕ_A	0.287	0.248/0.326	0.960
	m_A	0.718	0.629/0.806	
Área específica	ϕ_a	1.179	1.101/1.257	0.952
	m_a	0.985	0.832/1.138	
	k	4.002	3.244/4.760	

Se puede apreciar en la representación gráfica de la evolución del perímetro específico (Figura 3.8) que éste denota un comportamiento cóncavo en las geometrías de cuarto de cilindro y prisma cuadrangular, caso contrario a la geometría de medio cilindro que muestra un comportamiento convexo; por otra parte las geometrías de cuarto de cilindro y prisma rectangular presentan una tendencia cóncava en el progreso del área de sección transversal específica (Figura 3.9); sin embargo, los sistemas modelo de estudio con forma de medio cilindro tienen una tendencia lineal, la geometría que exhibe un mejor ajuste a los datos experimentales es la de prisma cuadrangular ($R^2 \geq 0.93$).

De acuerdo a los parámetros de regresión lineal obtenidos el perímetro se reduce entre el 30 y 35 % y el área de sección transversal reduce su tamaño aproximadamente un 70 % en la terna de geometrías. Balaban & Pigott (1988) establecieron que el músculo de pescado reduce su tamaño aproximadamente en 50 %, por otra parte Gumeta-Chávez *et al.* (2011) destacaron que la reducción del área proyectada en muestras de agave cortadas transversalmente fue aproximadamente del 77 %. De forma similar Yadollahinia *et al.* (2009) reportaron un encogimiento aproximado del 60, 65 y 50 % en rebanadas de papa secadas a 80, 70 y 60 °C, respectivamente.

3.4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE FORMA MEDIANTE ANÁLISIS DE IMAGEN

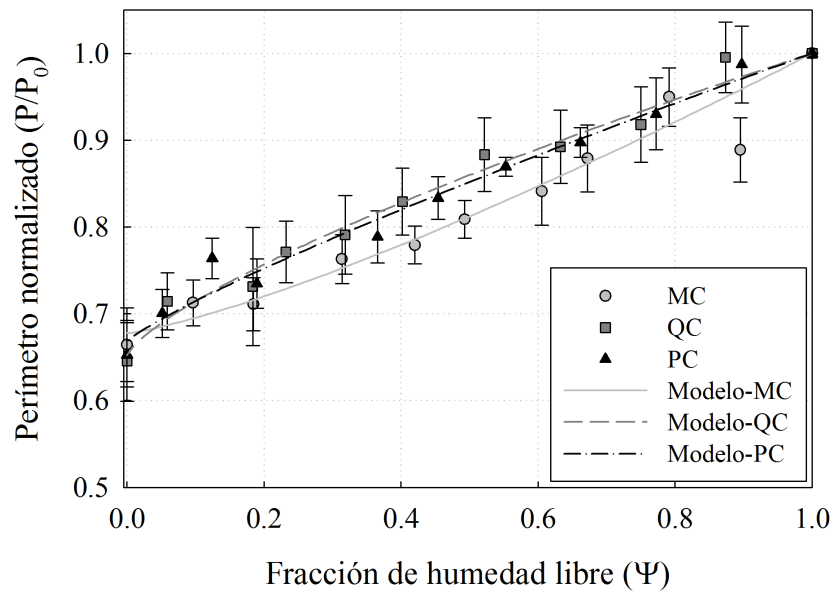


Figura 3.8. Evolución del perímetro de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).

3.4. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE FORMA MEDIANTE ANÁLISIS DE IMAGEN

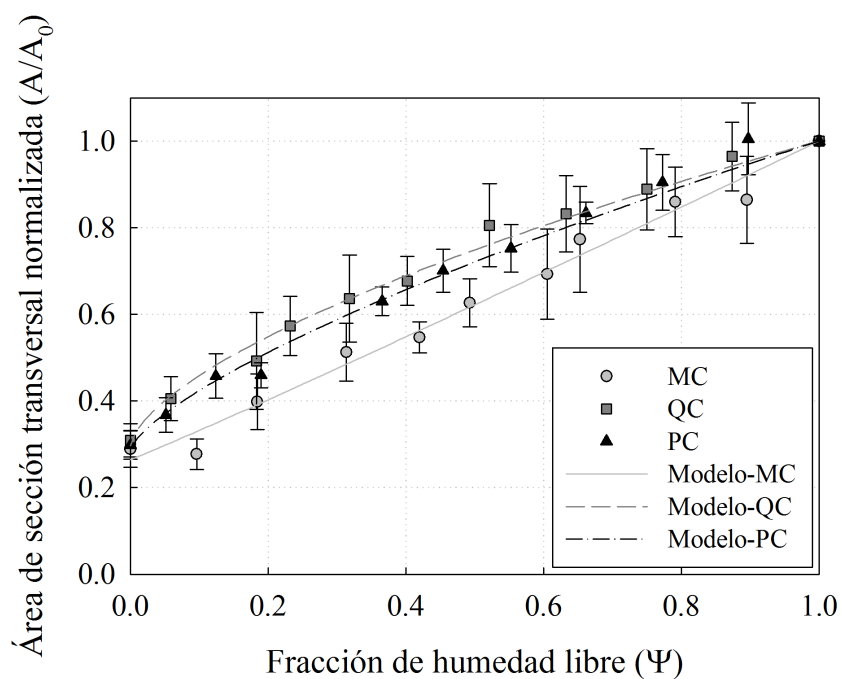


Figura 3.9. Evolución del área de sección transversal de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

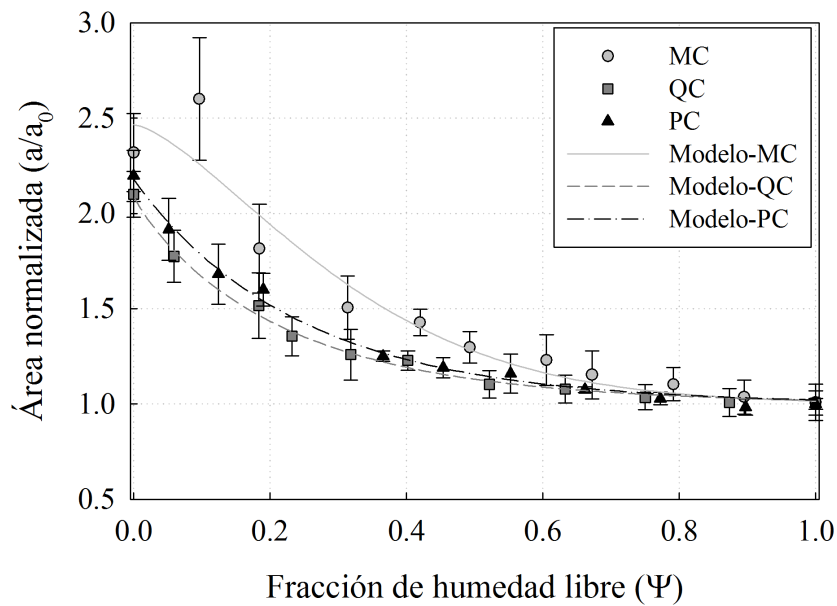


Figura 3.10. Evolución del área específica de los sistemas de estudio como función del contenido de humedad. Medio cilindro (MC), cuarto de cilindro (QC) y prisma cuadrangular (PC).

3.5. Determinación de la difusividad efectiva del agua en el producto

3.5.1. Método de pendientes

Los datos de las cinéticas de secado de cilindros completos y placas circulares se utilizaron para calcular el valor de la difusividad efectiva de agua en el producto como función del contenido de humedad considerando su reducción de tamaño. Estos datos se ajustaron al siguiente modelo:

$$D = [1 - \exp(-k_1(1 - \psi)^{n_1})][1 - \exp(-k_2\psi^{n_2})] \quad (3.1)$$

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

Los parámetros de regresión no lineal calculados se muestran en Tabla 3.7, donde se logra apreciar un buen ajuste en ambas geometrías ($R^2 > 0.80$).

Se observa que conforme la fracción de humedad libre disminuye los valores de difusividad aumentan alcanzando un valor máximo en $\Psi \approx 0.6$ y $\Psi \approx 0.8$ en cilindros completos y placas circulares, respectivamente, seguido de la disminución de ambos valores (Figura 3.11). La fase inicial se conoce como periodo de precalentamiento del producto, donde la migración del agua es alta debido al rápido aumento de la temperatura del mismo (Thuwapanichayanan *et al.*, 2008). Esta fase es seguida por un periodo estacionario donde la energía proveniente del aire se emplea en el proceso de evaporación del agua. La tercera fase consta en la desaceleración de la movilidad del agua, que es ocasionada por el colapso de la estructura celular que ha perdido agua; Ruiz-López *et al.* (2012) y Ortiz-García-Carrasco *et al.* (2015) reportaron un comportamiento similar para prismas cuadrangulares de papa 50 – 80 °C y rebanadas de chayote 40 – 70 °C, estableciendo que los valores de (D) cambian no solo por variación del contenido de humedad, sino también por los cambios en las dimensiones del producto (Karathanos *et al.*, 1990).

De forma simultánea los valores de difusividad se promediaron obteniéndose coeficientes de difusividad promedio de $4.982 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ para los sistemas de cilindro completo y $4.034 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ para las geometrías de placas circulares; datos comparables con los reportados en literatura para productos como castañas ($1.76 \times 10^{-10} - 3.33 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$) a 50 °C (Delgado *et al.*, 2014) y litchi ($4.832 \times 10^{-10} - 9.940 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$) entre 50 – 80 °C (Janjai *et al.*, 2010), por mencionar algunos.

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

Tabla 3.7. Parámetros de regresión para el modelo de la difusividad del agua.

Geometría	Parámetro	Valor	IC 95%	R ²
Cilindro completo	k_1	9.718	2.063/17.373	0.884
	n_1	1.285	0.957/1.614	
	$k_2 \times 10^{10}$	7.568	6.574/8.563	
	n_2	0.266	0.189/0.344	
Placa circular	k_1	10.271	-0.674/21.216	0.795
	n_1	1.068	0.703/1.433	
	$k_2 \times 10^{10}$	5.997	4.960/7.035	
	n_2	0.328	0.203/0.453	

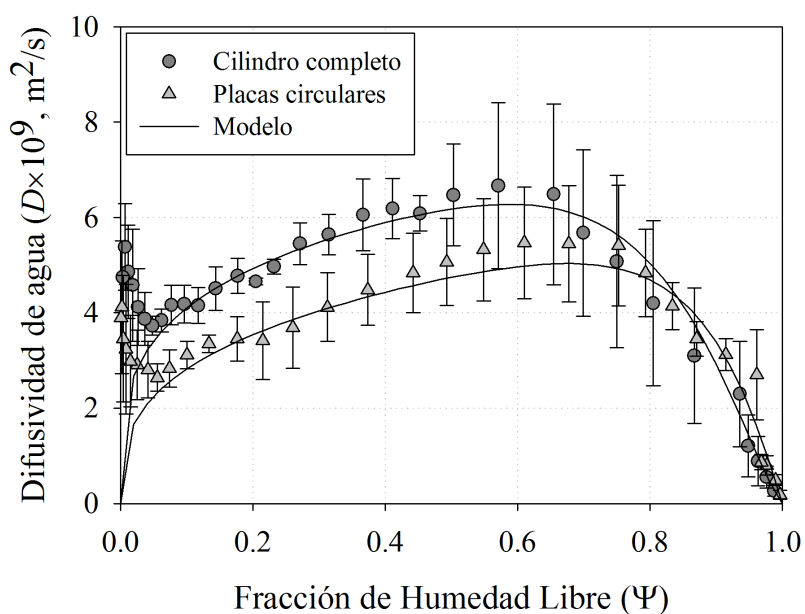


Figura 3.11. Difusividad de agua como función del contenido de humedad durante el secado de los sistemas de estudio.

3.5.2. Modelo

Los datos experimentales obtenidos del secado de cilindros completos y placas circulares se utilizaron para estimar el coeficiente de difusividad a partir de la simulación del proceso de secado bajo los supuestos siguientes, los modelos A, B y C consideran

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

que tanto el transporte de masa como el encogimiento son unidireccionales en dirección radial utilizando el modelo analítico para su solución; sin embargo, la forma de obtener el valor del coeficiente de difusividad varía en cada uno, de tal manera que en el modelo A el coeficiente de difusividad se obtiene por medio de una regresión no lineal, en el modelo B por el método de pendientes y en el modelo C por medio de la integración numérica de los datos del modelo B obteniendo como resultado un valor promedio; en cambio, los modelos del D al G se resuelven a partir de la solución numérica considerando que el transporte de masa es bidireccional, es decir, en dirección radial-axial y los valores del coeficiente de difusividad se obtienen por regresión no lineal; la variación entre ellos radica en que los modelos D y E consideran que el encogimiento al igual que el transporte de masa es bidireccional; mientras, en el modelo F se considera al encogimiento despreciable; en cambio, el modelo G considera un encogimiento promedio del producto. Estos supuestos se muestran en la Tabla 3.8.

Los parámetros obtenidos del coeficiente de difusividad efectiva de agua para los sistemas modelo con geometrías de cilindro completo y placa plana se enlistan en la Tabla 3.9, así como la diferencia relativa porcentual que existe entre el modelo D que considera tanto transporte de masa como encogimiento del producto con los demás modelos y la diferencia relativa entre una geometría y otra. Los valores experimentales y los predichos se graficaron en función del tiempo (Figuras 3.12 y 3.13) para ambas geometrías. Se observa que los modelos A y D exhiben un mejor ajuste a los datos experimentales ($R^2 > 0.98$); de igual forma los modelos los modelos C y E muestran un ajuste adecuado a diferencia de los modelos F y G, que arrojan un valor sobreestimado del coeficiente de difusividad al no considerar el encogimiento del producto o un encogimiento promedio.

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

Tabla 3.8. Consideraciones para la solución numérica del modelo de transferencia de masa (TM).

Modelo	Dirección del TM	Dirección del encogimiento	Método de solución del modelo	Método de obtención del valor D
A	Radial	$r = f(\psi)$	Analítico	Regresión No Lineal
B				Pendientes
C				Promedio temporal por integración numérica de los datos obtenidos con el modelo B
D	Radial-Axial	$r, z = f(\psi)$	Numérico	Regresión No Lineal
E				
F		$r = R_0$ $z = L_0$		
G		$\bar{r} = \int_0^1 r(\psi) d\psi / \int_0^1 d\psi$ $\bar{z} = \int_0^1 L(\psi) d\psi / \int_0^1 d\psi$		

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

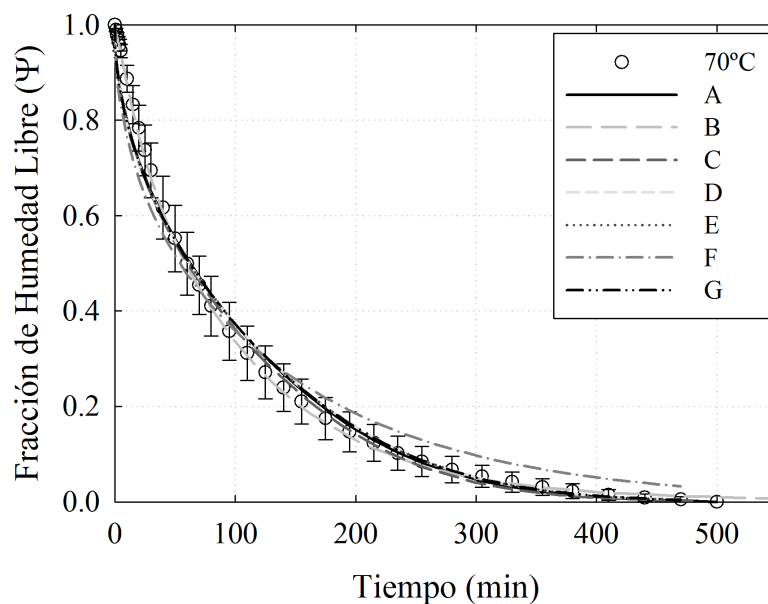


Figura 3.12. Curvas de secado experimentales y simuladas de cilindro completo.

Tabla 3.9. Valores de difusividad efectiva de agua en los sistemas de estudio con geometrías de cilindro completo (CC) y placa plana (PP).

Modelo	$D \times 10^{10}$ (m^2/s)		R^2		Diferencia Relativa (%)		
	CC	PP	CC	PP	CC	PP	CC vs. PP
A	4.847	4.171	0.979	0.984	3.469	6.730	94.003
B	-	-	-	-	-	-	-
C	4.983	4.034	-	-	6.373	3.242	49.121
D	4.684	3.908	0.978	0.982	-	-	16.576
E	4.693	3.919	0.978	0.982	0.188	0.289	53.923
F	6.708	7.248	0.963	0.959	43.205	85.485	97.861
G	3.154	1.940	0.978	0.982	32.667	50.343	54.112

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

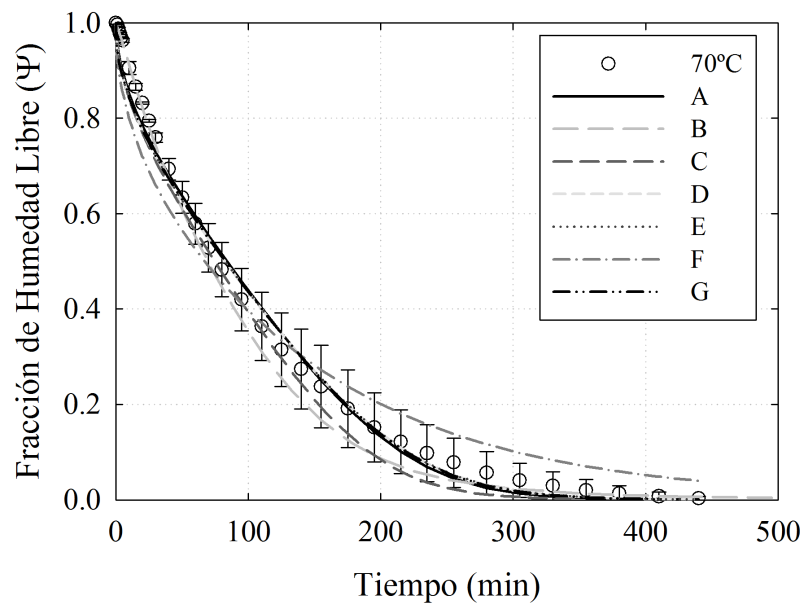


Figura 3.13. Curvas de secado experimentales y simuladas de placa circular.

3.5.3. Simulación del proceso de secado

La simulación del proceso de secado de los sistemas modelo con geometrías de prisma cuadrangular se realizó con el software Matlab R2014a; para ello se generó el contorno del producto fresco aplicando una malla irregular de elementos triangulares (Figura 3.14a).

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

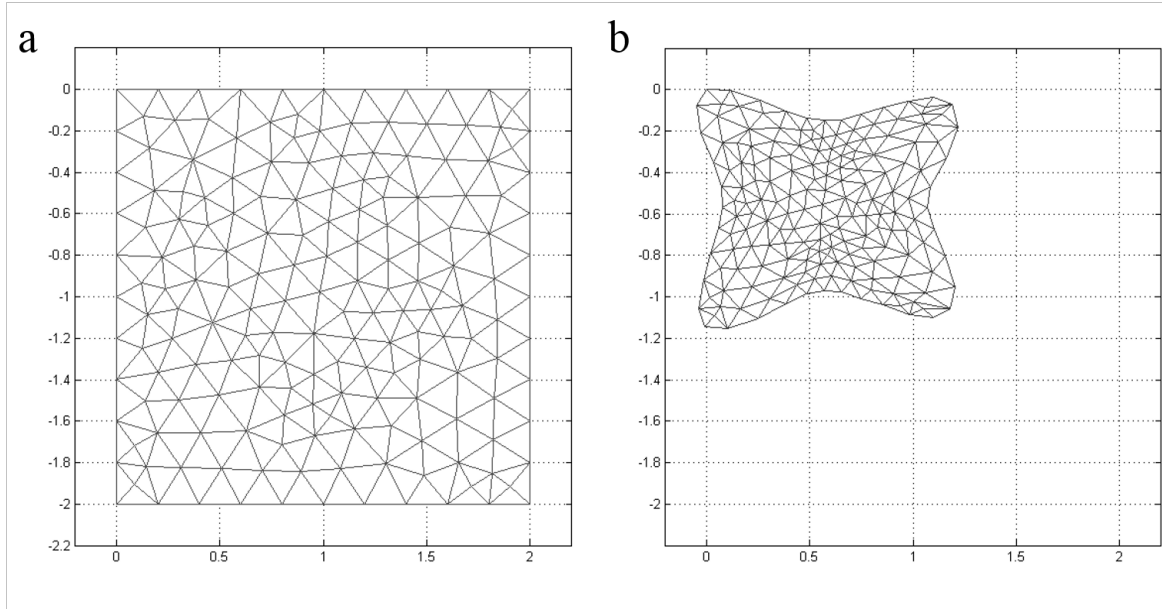


Figura 3.14. Malla al inicio del proceso de simulación (a), malla deformada finalizada la simulación(b).

La Figura 3.14b se generó a partir del contorno final obtenido del seguimiento del proceso de secado. Fue posible determinar la distribución final de la malla calculando las distancias finales entre los vértices, es decir, el desplazamiento de los nodos que conforman la malla, tomando como puntos de referencia las esquinas del producto.

Previamente, a partir de un diseño de caras centradas, se estimaron los parámetros de la Ecuación (2.44), tomando como límites $-6 \leq k \leq -4$ y $0.85 \leq n \leq 0.95$ como se muestra en la Figura (3.15); se determinó que $k = -5$ y $n = 0.90$ permiten una adecuada reproducción de los datos experimentales del área de sección transversal ($R^2 > 0.96$) (Figura 3.16).

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

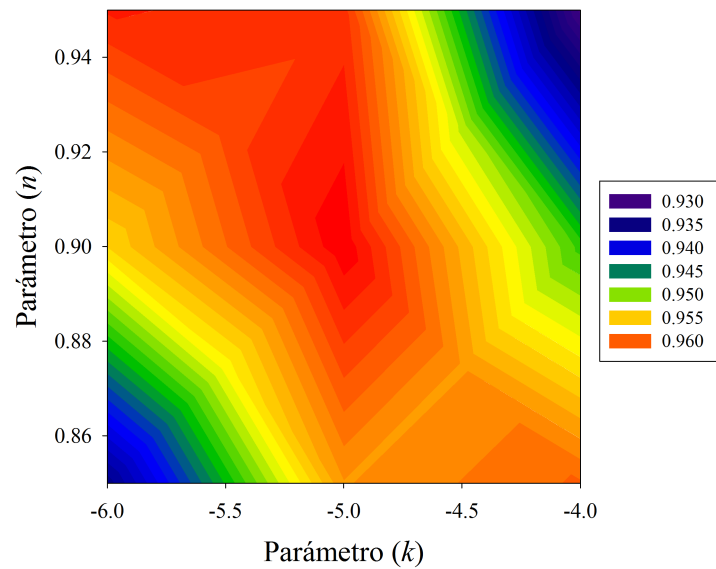


Figura 3.15. Gráfica de contorno.

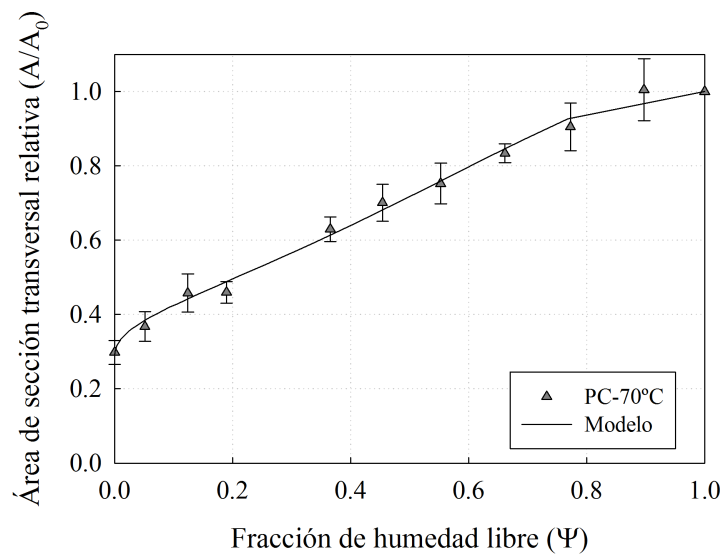


Figura 3.16. Comparación entre el modelo de encogimiento-deformación (resuelto con $k = -5$ y $n = 0.9$) y los datos experimentales de prisma cuadrangular de agar.

El modelo que ajusta los datos simulados a los experimentales es un modelo que incluye de forma simultánea el encogimiento y la deformación del producto con los

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

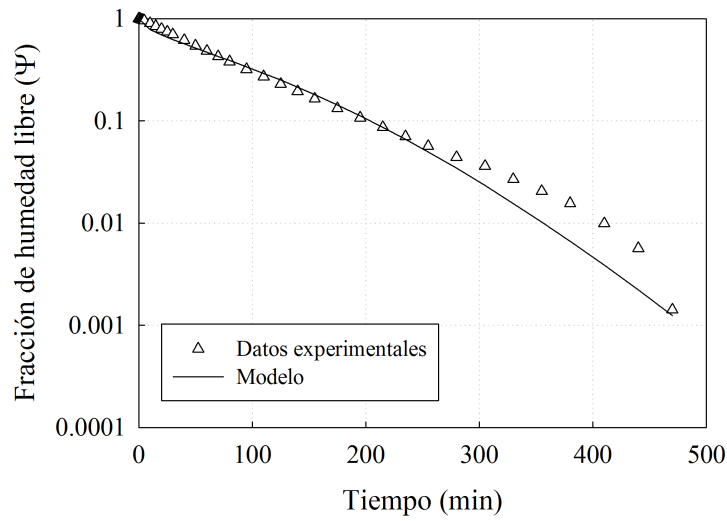


Figura 3.17. Datos experimentales (puntos) y simulados (línea) de las cinéticas de secado de prismas cuadrangulares de agar.

valores de k y n obtenidos previamente. Se estimó la difusividad del agua en los sistemas modelo con geometría de prisma cuadrangular, logrando un buen ajuste de los datos simulados con los datos experimentales ($R^2 > 0.98$) representados en la Figura 3.17.

De forma paralela se obtuvo el valor del coeficiente de difusividad para el sistema modelo de estudio, siendo de $4.1543 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$, con sus intervalos de confianza entre 3.8352×10^{-10} y $4.4733 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$.

Los perfiles de humedad y la evolución del encogimiento y deformación en los cortes transversales de tiras de agar simulados se muestran en la Figura 3.18; donde el número inferior en cada figura representa la fracción de humedad libre (Ψ)/ tiempo de secado adimensional (τ)/ área de sección transversal normalizada (A/A_0).

3.5. DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA DEL AGUA EN EL PRODUCTO

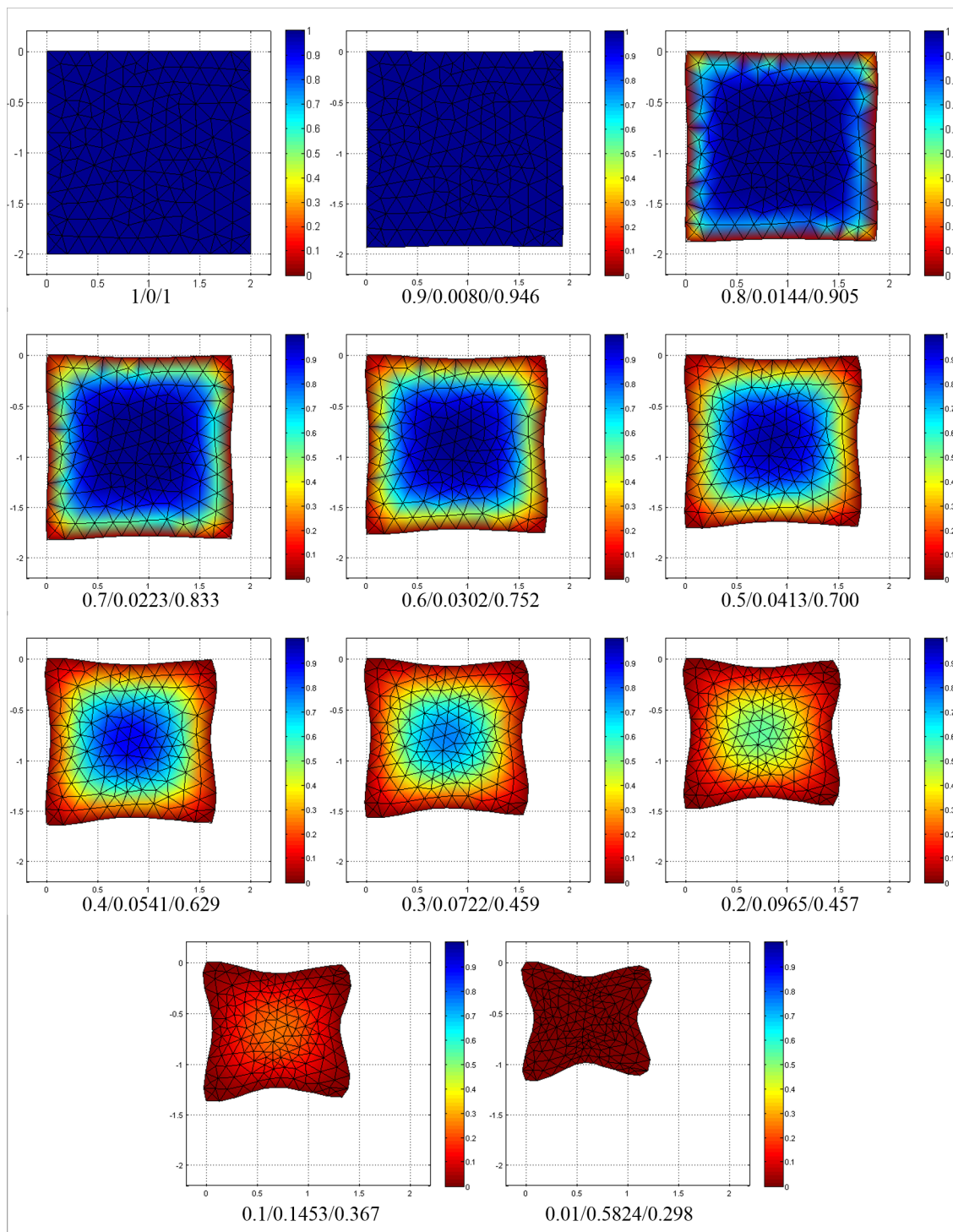


Figura 3.18. Perfiles predichos de humedad en prismas cuadrangulares de agar. El número inferior de cada gráfica representa la fracción de humedad libre (Ψ)/ tiempo de secado adimensional (τ)/ área de sección transversal normalizada (A/A_0).

4. Conclusiones

Se logró determinar la evolución del proceso de secado de sistemas modelo con geometrías de cilindro completo, placa plana circular, medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular a temperatura de 70° . Los experimentos de secado presentaron las siguientes características: la velocidad de secado es mayor en las geometrías de cuartos de cilindro ya que el área específica por donde se elimina el agua también es mayor, se observa que al inicio del proceso los productos con geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular solo reducen su tamaño ya que puede distinguirse la forma inicial del producto; sin embargo, cuando el producto alcanza una fracción de humedad libre aproximada de 0.5, el producto pierde su forma original dando lugar a la deformación.

Fue posible modelar el encogimiento de los sistemas modelo con geometrías de cilindro completo y placa plana circular por medio de los parámetros de tamaño (longitud, diámetro y volumen), de igual forma se determinaron y modelaron los factores de forma (área de sección transversal, perímetro y área específica) en las geometrías de medio cilindro, cuarto de cilindro y prisma cuadrangular.

Con base en ello se pudo estimar la difusividad efectiva de los sistemas de estudio considerando el encogimiento y encogimiento-deformación, concluyendo que tienen una influencia significativa en la estimación de propiedades de transporte de masa como lo

es el coeficiente de difusividad.

La presente investigación servirá como fundamento para ampliar el estudio y la determinación del comportamiento de productos con geometrías no convencionales que sean sometidos al proceso de secado convectivo, con la finalidad de determinar las propiedades de transporte de masa o calor; mediante las técnicas de análisis de imagen que permiten la correcta estimación del encogimiento y la deformación del producto a lo largo del proceso de secado.

Bibliografía

- Achanta, S., & Okos, M.R. 2000. *Quality changes during drying of food polymers*. Science Publishers.
- Aguilera, J.M. 1992. Generation of engineered structures in gels. *Physical Chemistry of Foods*, 391–393.
- Amiryousefi, M.R., Mohebbi, M., & Khodaiyan, F. 2014. Applying an intelligent model and sensitivity analysis to inspect mass transfer kinetics, shrinkage and crust color changes of deep-fat fried ostrich meat cubes. *Meat Science*, **96**, 172–178.
- Aprajeeta, J., Gopirajah, R., & Anandharamakrishnan, C. 2015. Shrinkage and porosity effect on heat and mass transfer during potato drying. *Journal of Food Engineering*, **144**, 119–128.
- Aversa, M., Curcio, S., Calabro, V., & Iorio, G. 2007. An analysis of the transport phenomena occurring during food drying process. *Journal of Food Engineering*, **78**, 922–932.
- Bacelos, M.S., & Almeida, P.I.F. 2011. Model of drying kinetic of potatoes taking into account shrinkage. *Procedia Food Science*, **1**, 713–721.
- Baker, C.G.J. 1997. *Industrial Drying of Foods*. Wantage, UK.: Chapman & Hall.
- Balaban, M., & Pigott, G.M. 1988. Mathematical model of simultaneous heat and mass transfer in food with dimensional changes and variable transport parameters.

- Journal of Food Science*, **53**, 935–939.
- Banerjee, S., & Bhattacharya, S. 2012. Food Gels: Gelling Process and New Applications. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, **52**(4), 334–346.
- Bern, Marshall, & Plassmann, Paul. 2000a. *Mesh Generation*. 1a. edn. Elsevier Science B.V. Chap. 6, pages 296–299.
- Bern, Marshall, & Plassmann, Paul. 2000b. *Mesh Generation*. 1a edn. Elsevier Science B.V. Chap. 6, pages 299–316.
- Boudhrioua, N., Bonazzi, C., & Daudin, J.D. 2003. Estimation of moisture diffusivity in gelatin-starch gels using time-dependent concentration-distance curves at constant temperature. *Food Chemistry*, **82**, 139–149.
- Campos-Mendiola, R., Hernández-Sánchez, H., Chanona-Pérez, J.J., Alamilla-Beltrán, L., Jiménez-Aparicio, A., Fito, P., & Gutiérrez-López, G.F. 2007. Non-isotropic shrinkage and interfaces during convective drying of potato slabs within the frame of the systematic approach to food engineering systems (SAFES) methodology. *Journal of Food Engineering*, **83**, 285–292.
- Corzo, O., & Bracho, N. 2004. Shrinkage of osmoosmotic dehydrated sardine sheets at changing moisture contents. *Journal of Food Engineering*, **65**, 333–339.
- Curcio, S., & Aversa, M. 2014. Influence of shrinkage on convective drying of fresh vegetables: A theoretical model. *Journal of Food Engineering*, **123**, 36–49.
- da Silva, W.P., de Farias-Aires, J.E., de Castro, D.S., da Silva-e Silva, C.M.D. Pereira, & Gomes, J.P. 2014. Numerical description of guava osmotic dehydration including shrinkage and variable effect mass diffusivity. *LWT–Food Science and Technology*, **59**, 859–866.
- Díaz-Morcillo, A. 2000. *Métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados median-*

- te el método de los elementos finitos*. Ph.D. thesis, Universidad Politécnica de Valencia.
- de Lima, A. G. B., Queiroz, M. R., & Nebra, S. A. 2002. Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solid with ellipsoidal configuration. *Chemical Engineering Journal*, **86**, 85–93.
- Delgado, T., Pereira, J.A., Baptista, P., Casal, S., & Ramalhosa, E. 2014. Shell's influence on drying kinetics, color and volumetric shrinkage of *Castanea sativa* Mill. fruits. *Food Reserch International*, **55**, 426–435.
- Dissa, A.O., Desmorieux, H., Bathiebo, J., & Koulidiati, J. 2008. Convective drying characteristics of Amelie mango (*Mangifera Indica* L. cv. Amelie) with correction for shrinkage. *Journal of Food Engineering*, **88**, 429–437.
- Escobar-Sánchez, J.M. 2011. *Aplicaciones de la generación de mallas*.
- Fellows, P.J. 2000. *Tecnología del Procesado de los Alimentos: Principios y Práctica*. 2a. edn. España: Acribia, S.A.
- Fito-Maupoey, P.J., Andrés-Grau, A.M., Albors-Sorolla, A.M., & Barat-Baviera, J.M. 2001. *Introducción al secado de alimentos por aire caliente*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Geankoplis, C. J. 1998. *Procesos de transporte y operaciones unitarias*. México: CECSA.
- Gumeta-Chávez, C., Chanona-Pérez, J.J., Mendoza-Pérez, J.A., Terrés-Rojas, E., Garibay-Febles, V., & Gutiérrez-López, G.F. 2011. Shrinkage and Deformation of *Agave atrovirens* Karw Tissue during Convective Drying: Influence of Structural Arrangements. *Drying Technology*, **29**, 612–623.
- Hayakawa, K.I., & Furuta, T. 1988. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publication. Chap. Thermodynamically interactive heat and mass transfer coupled with shrinkage and chemical reaction.

- Heldman, D.R., & Lund, D.B. 2007. *Handbook of Food Engineering*. Boca Raton: CRC.
- Janjai, S., Mahayothee, B., Lamlert, N., Bala, B. K., Precoppe, M., Nagle, M., & Müller, J. 2010. Diffusivity, shrinkage and simulated drying of litchi fruit (*Litchi Chinensis Sonn*). *Journal of Food Engineering*, **96**, 214–221.
- Karathanos, V.T., Villalobos, G., & Saravacos, G.D. 1990. Comparison of Two Methods of Estimation of the effective Moisture Diffusivity from Drying Data. *Journal of Food Science*, **55**(1), 218–231.
- Khalloufi, S., Almeida-Rivera, C., & Bongers, P. 2009. A theoretical model and its experimental validation to predict the porosity as a function of shrinkage and collapse phenomena during drying. *Food Reserch International*, **42**, 1122–1130.
- Khalloufi, S., Almeida-Rivera, C., Janssen, J., & Bongers, P. 2012. Pseudo-linearity of the shirinkage coefficient and sensitivity study of collapse and shrinkage functions. *Food Reserch International*, **48**, 808–819.
- Lahrech, K., Safouane, A., & Peryrelasse, J. 2005. Sol state formation and melting of agar gels rheological study. *Physica A*, **358**, 205–211.
- Mavriplis, D. J. 1995. *Unstructured Mesh Generation and Adaptivity*. USRA.
- Mayor, L., & Sereno, A.M. 2004. Modeling shinkage during convective drying of food materials: a review. *Journal of Food Engineering*, **61**, 373–386.
- Mayor, L., Moreira, R., & Sereno, A.M. 2011. Shrinkage, density, porosity and shape changes during dehydration of pumpkin (*Cucurbita pepo* L.) fruits. *Journal of Food Engineering*, 29–37.
- Mizuno, N., Ogawa, T., & Adachi, S. 2013. Shrinkage and tensile stress of sheet-like and cylindrical pastas with various moisture contents. *Food Bioscience*, **2**, 10–14.
- Monzón, C.C. 2006. *Influencia del método de secado en parámetros de calidad relacionados con la estructrua y el color de manzana y fresa deshidratadas*. Ph.D. thesis,

Universidad Politécnica de Valencia.

- Mujumdar, A.S., & Huang, L.X. 2007. Global R&D needs in drying. *Drying Technology*, **25**, 647–658.
- Nicoletti, R. 2013. Comparison between a meshless method and the finite difference method for solving the Reynolds equation in finite bearings. *Journal of Tribology*, **153**(4), 044501–044501–9.
- Nonhebel, G., & Moss, A.A.H. 2002. *El Secado de los Sólidos en la Industria Química*. Barcelona: Reverté.
- Ochoa, M.R., Kessler, A.G., Pirone, B.N., Marquez, C.A., & Michelis, A. De. 2002. Volume and area shrinkage of whole sour cherry fruits (*Prunus cerasus*) during dehydration. *Drying Technology*, **20**, 147–156.
- Ortiz-García-Carrasco, B., Yañez-Mota, E., Pacheco-Aguirre, F.M., Ruiz-Espinosa, H., García-Alvarado, M.A., Cortés-Zavaleta, O., & Ruiz-López, I.I. 2015. Drying of shrinkable food products: Appraisal of deformation behavior and moisture diffusivity estimation under isotropic shrinkage. *Journal of Food Engineering*, **144**, 138–147.
- Pacheco-Aguirre, F.M., García-Alvarado, M.A., Corona-Jiménez, E., Ruiz-Espinosa, H., Cortés-Zavaleta, O., & Ruiz-López, I.I. 2015. Drying modeling in products undergoing simultaneous size reduction and shape change: Appraisal of deformation effect on water diffusivity. *Journal of Food Engineering*, **164**, 30–39.
- Panyawong, S., & Devahastin, S. 2007. Determination of deformation of a food product undergoing different drying methods and conditions via evolution of a shape factor. *Journal of Food Engineering*, **78**, 151–161.
- Patankar, S. 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.

- Pavón-Melendez, G., Hernández, J.A., Salgado, M.A., & García-Alvarado, M.A. 2002. Dimensionless analysis of the simultaneous heat and mass transfer in food drying. *Journal of Food Engineering*, **51**, 347–353.
- Perry, R. H., & Maloney, D. W. 2002. *Manual del Ingeniero Químico*. Vol. IV. México: McGraw-Hill.
- Ratti, C. 1994. Shrinkage during drying of foodstuffs. *Journal of Food Engineering*, **23**, 91–105.
- Ratti, C. 2009. *Advances in Food Dehydration*. Boca Raton: CRC Press.
- Ruiz-López, I.I., & García-Alvarado, M.A. 2007. Analytical solution for food-drying kinetics considering shrinkage and variable diffusivity. *Journal of Food Engineering*, **79**, 208–216.
- Ruiz-López, I.I., Ruiz-Espinosa, H., Arellanes-Lozada, P., Bárcenas-Pozos, M.E., & García-Alvarado, M.A. 2012. Analytical model for variable moisture diffusivity Estimation and drying simulation of shrinkable food products. *Journal of Food Engineering*, **108**, 427–435.
- Sabarez, H.T. 2012. Computational modeling of the transport phenomena occurring during convective drying of prunes. *Journal of Food Engineering*, **111**(2), 279–288.
- Sabarez, H.T. 2015. *Modeling Food Processing Operation*. Elsevier. Chap. 4 Modeling of drying processes for food materials, pages 104–112.
- Sokhansanj, S., & Jayas, D.S. 2006. *Drying of Foodsuffs*. 3a. edn. Taylor & Francis Group. Chap. 21, pages 522–537.
- Souraki, B.A., Ghavami, M., & Tondro, H. 2014. Correction of moisture and sucrose effect diffusivities for shrinkage during osmotic dehydration of apple in sucrose solution. *Food and Bioproducts Processing*, **92**, 1–8.

- Thuwapanichayanan, R., Prachayawarakorn, S., & Soponronnarit, S. 2008. Modeling of Diffusion with Shrinkage and Quality Investigation of Banana Foam Mat Drying. *Drying Technology*, **26**, 1326–1333.
- Togrul, H. 2005. Simple modeling of infrared drying of fresh apple slice. *Journal of Food Engineering*, **71**, 311–323.
- Viquez-Cano, M.Z. 2008. *Un sistema para la generación de mallas estructuradas armónicas*. Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Yadollahinia, A., & Jahangiri, M. 2009. Shrinkage of potato slice during drying. *Journal of Food Engineering*, **94**, 52–58.
- Yadollahinia, A., Latifi, A., & Mahdavi, R. 2009. New method for determination of potato slice shrinkage during drying. *Computers and Electronics in Agriculture*, **65**, 268–274.
- Zhang, L., Nishizu, T., Kishigami, H., Kato, A., & Goto, K. 2013. Measurement of internal shrinkage distribution in spaghetti during drying by X-ray CT. *Food Reserch International*, **51**, 180–187.