



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de los frentes de onda, rayos de luz y cáustica asociada con la refracción de un frente de onda plano por una lente conoesférica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

José Israel Galindo Rodríguez

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Mtro. Israel Julián Macías

Puebla Pue.

25 de marzo de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de los frentes de onda, rayos de luz y cáustica asociada con la refracción de un frente de onda plano por una lente conoesférica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

José Israel Galindo Rodríguez

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Mtro. Israel Julián Macías

Puebla Pue.

25 de marzo de 2022

Título: Estudio de los frentes de onda, rayos de luz y cáustica asociada con la refracción de un frente de onda plano por una lente conoesférica

Estudiante: JOSÉ ISRAEL GALINDO RODRÍGUEZ

COMITÉ

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Presidente

Dr. Luis M. Arroyo Carrasco
Secretario

Dra. Marcela M. Méndez Otero
Vocal

Dra. M. del Rosario Pastrana Sánchez
Suplente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Mtro. Israel Julián Macías
Asesores

Dedicado a mis padres *José Israel Galindo Ramos* y *María Verónica Rodríguez Melchor* porque todo esto es gracias a ellos.

A mi hermana *Alejandra Galindo Rodríguez* por llenar de alegrías
nuestra infancia.

A todos aquellos seres queridos, familiares, amigos y conocidos que
me han brindado su apoyo y calor.

A mis asesores *Gilberto Silva Ortigoza* e *Israel Julián Macías* por su
orientación y apoyo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	3
2.1. La ecuación eikonal	3
2.2. Ley de reflexión y refracción	6
2.3. Cálculo de la cáustica	8
3. Frentes de onda, rayos de luz y cáustica asociados con la refracción de un frente de onda plano por una lente cono esférica	11
3.1. La lente plano esférica y la lente axicón	11
3.1.1. La lente plano esférica	11
3.1.2. Lente axicón	13
3.2. La lente cono esférica	15
3.3. Un ejemplo particular de la lente cono esférica	19
3.4. Propiedades de la región cáustica de la lente cono esférica	21

Resumen

El objetivo del presente trabajo es introducir una lente cuyas caras son una superficie cónica y una superficie esférica. Iluminamos esta lente con un frente de onda plano y calculamos los frentes de onda, rayos de luz y cáustica refractados. Encontramos que la región cáustica tiene dos ramas que pueden ser, virtuales, reales, o una parte real y otra virtual, dependiendo de los parámetros que caracterizan a la lente. Además, presentamos un ejemplo particular donde una de las ramas de la región cáustica está constituida por dos segmentos de línea, una parte es real y otra es virtual. La segunda rama es una superficie de dos dimensiones con una singularidad degenerada de tipo cúspide tal que su curvatura Gaussiana es diferente de cero. *Es importante remarcar que para este ejemplo, las dos ramas de la cáustica están desconectadas.* Debido a esta propiedad y el resultado obtenido por Berry y Balazs sobre la relación entre la aceleración de un haz de tipo Airy y la curvatura de su cáustica correspondiente, creemos que usando este elemento óptico se puede generar un haz escalar acelerado en la región donde la cáustica es una superficie de revolución, y al mismo tiempo un haz óptico escalar con propiedades similares al haz Bessel de orden cero en la región donde la cáustica real es un segmento de línea a lo largo del eje óptico.

Capítulo 1

Introducción

Las lentes más usadas en la manufactura de sistemas ópticos tienen forma cónica y simetría de revolución. Cuando una lente de este tipo es iluminada con un frente de onda plano evolucionando a lo largo de su eje de simetría, la cáustica se compone de dos ramas, un segmento de línea recta sobre el eje de simetría y una superficie de revolución con una singularidad degenerada de tipo cúspide. En 1954 McLeod introdujo una lente nueva que denominó axición [1]. Desde entonces, este elemento óptico ha sido estudiado y usado en diferentes aplicaciones debido a la propiedad de generar una línea focal cuando es iluminada con un frente de onda plano evolucionando a lo largo de su eje de simetría [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Esto es, la lente axición produce una región cáustica que tiene solo una rama, la cual es invariante bajo traslaciones a lo largo de la dirección de evolución del frente de onda plano incidente.

Por otro lado, en las últimas tres décadas los haces adifraccionales han sido el objeto un amplio estudio. Estos haces son soluciones a la ecuación escalar de onda en el espacio vacío, y sus patrones de intensidad son invariantes bajo traslaciones a lo largo de su dirección de propagación [12, 13]. Esta propiedad implica que en el límite de óptica geométrica este tipo de haz está caracterizado por una familia de frentes de onda planos, una familia de rayos de luz y una cáustica invariante bajo traslaciones a lo largo de la dirección de propagación [14]. Es importante remarcar que la cáustica determinada por un haz adifraccional tiene una sola rama. Esta propiedad explica por qué la lente axición ha sido usada para la generación experimental de este tipo de haces [12, 13, 15]. En 1979 Berry y Balazs [16] mostraron que la ecuación de Schrödinger en una dimensión para la partícula libre admite una solución en la forma de una función de Airy tal que su densidad de probabilidad se propaga en el espacio vacío sin distorsión y con aceleración constante. Ellos remarcaron que ambas propiedades tienen un origen clásico; es decir, la propiedad de no distorsión de este paquete de Airy está determinada por una familia de órbitas representadas por una parábola en espacio fase tal que bajo el movimiento clásico se traslada rigidamente y *la aceleración del paquete está relacionada a la curvatura de la cáustica*, envolvente de la familia de trayectorias en el espacio tiempo. Usando el hecho de que la ecuación de onda escalar paraxial en el espacio vacío se puede escribir como una ecuación de Schrödinger en el vacío, en el 2007 Siviloglou, *et al.* [17, 18], introdujeron una nueva familia de haces de luz paraxiales, los haces Airy ópticos, los cuales se aceleran transversalmente conforme se propagan. Este tipo de haces tienen aplicaciones importantes y por lo tanto, han sido objetivo de investigación [19, 20, 21, 22].

La principal motivación del presente trabajo es iniciar una búsqueda de elementos ópticos que produzcan una región cáustica con una sola rama. Para este fin, recordemos que cuando una lente plano esférica es iluminada con un frente de onda plano evolucionando a lo largo de su eje de simetría y llega a la superficie plana el frente de onda plano es transmitido y refractado en la superficie esférica produciendo una cáustica real o virtual con dos ramas que comparten una

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

región común en el espacio. Ya que en particular una lente plano esférica puede ser considerada como la composición de una lente axicón y una lente conoesférica, y debido a las características de la cáustica producida por la lente axicón y la lente plano esférica, creemos que es importante investigar las propiedades geométricas de la lente conoesférica.

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es introducir una lente cuyas caras son una superficie cónica y una superficie esférica. Iluminamos esta lente con un frente de onda plano y calculamos los frentes de onda, rayos de luz y cáustica refractados. Encontramos que la cáustica tiene dos ramas, que pueden ser: virtuales, reales, o una parte virtual y la otra real, dependiendo de los índices de refracción de la lente, del medio óptico donde la lente está ubicada y del ángulo de apertura de la superficie cónica. Además, presentamos un ejemplo donde una rama de la región cáustica está constituida por dos segmentos de línea, una parte de esta cáustica es real y la otra virtual. La segunda rama de la cáustica es una superficie de dos dimensiones con una singularidad degenerada de tipo cúspide tal que su curvatura de Gauss asociada es diferente de cero y tiende a infinito en la singularidad. Es importante destacar que para este ejemplo, las dos ramas de la cáustica están desconectadas. Debido a esta propiedad, los resultados obtenidos por Berry y Balazs de que la aceleración del paquete de Airy esta relacionada con la curvatura de la cáustica [16, 23], y la investigación sobre las propiedades de la línea focal producida por la lente axicon [12], creemos que usando la lente conoesférica se puede generar un haz óptico escalar acelerado en la región donde la cáustica es una superficie de revolución, y al mismo tiempo un haz óptico escalar con propiedades similares al haz Bessel de orden cero en la región donde la cáustica es un segmento de línea a lo largo del eje óptico.

Para este fin, en el capítulo 2 presentamos una deducción de la ecuación eikonal, a partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, además se presenta una deducción de las leyes de reflexión y refracción a partir de una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación eikonal. En el capítulo 3 se presentan los resultados originales de nuestro trabajo, más específicamente: primero presentamos una revisión de la refracción de un frente de onda plano por una lente plano esférica y la lente axicón. Esto es, suponemos que se tiene un frente de onda plano evolucionando a lo largo de la dirección \hat{z} , y es refractado por una lente plano esférica. De esta manera, calculamos los frentes de onda, rayos de luz y cáustica. Enfatizamos que la región cáustica tiene dos ramas que comparten una región común y que pueden ser virtuales o reales, dependiendo de los valores de los índices de refracción de los medios ópticos que son separados por la interfaz esférica. Además, en este capítulo, también obtenemos resultados análogos para la lente axicón. Finalmente, estudiamos la refracción de un frente de onda plano evolucionando a lo largo del eje z por la lente conoesférica, y obtenemos expresiones para los frentes de onda, rayos de luz refractados y la región cáustica, la cual tiene dos ramas. Presentamos un ejemplo particular de una lente conoesférica tal que su región cáustica asociada tiene tres componentes, una es virtual, y las otras dos son reales. La cáustica virtual es un segmento de línea a lo largo del eje z y las dos ramas reales de la cáustica son, un segmento de línea a lo largo del eje óptico y una superficie de revolución a lo largo del eje z , la cual tiene una singularidad de tipo cúspide. Finalmente, presentamos un análisis de las propiedades generales de la región cáustica producida por la lente conoesférica cuando es iluminada con un frente de onda plano evolucionando a lo largo de la dirección \hat{z} . Se establecen las condiciones para obtener las siguientes regiones cáusticas: virtual, real, o una parte virtual y la otra real. Además, se muestra que la curvatura media y la curvatura Gaussiana de la región cáustica que corresponde a una superficie de revolución alrededor del eje z con una singularidad de tipo cúspide son diferentes de cero y no están bien definidas en la singularidad. Por último, presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. La ecuación eikonal

La teoría clásica que describe satisfactoriamente la propagación de la luz en un medio viene dada por las ecuaciones de Maxwell [24]. Es decir,

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

En este trabajo nos restringimos al caso de un medio lineal, homogéneo e isótropo, donde se cumplen las siguientes relaciones materiales

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.5)$$

En las regiones donde no hay fuentes; es decir, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ y $\rho = 0$, las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.9)$$

Además consideraremos campos armónicos, es decir,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS
2.1. LA ECUACIÓN EIKONAL

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 son vectores complejos que dependen de la posición. Sustituyendo (2.10) y (2.11) en las ecuaciones (2.6)-(2.9) se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 + ik_0 \epsilon \mathbf{E}_0 = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 - ik_0 \mu \mathbf{H}_0 = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}_0) = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0) = 0, \quad (2.15)$$

donde se han utilizado las relaciones materiales (2.5) y $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío.

Un cálculo directo muestra que unas soluciones a las ecuaciones de Maxwell en un medio óptico con índice de refracción constante $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, es una onda plana propagándose en la dirección del vector unitario \hat{k} , es decir,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e} e^{ik_0 n(\hat{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h} e^{ik_0 n(\hat{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.17)$$

donde \mathbf{e} y \mathbf{h} son vectores constantes en general complejos, son soluciones a las ecuaciones (2.12)-(2.15) sí y solo sí $\mathbf{e} \cdot \hat{k} = 0$, $\mathbf{h} \cdot \hat{k} = 0$ y $\mathbf{h} = \sqrt{\epsilon/\mu}(\hat{k} \times \mathbf{e})$. Uno esperaría que esta solución represente el campo electromagnético cuando las fuentes se encuentran en el infinito. Por lo tanto, esperamos que los campos producidos a una distancia grande, comparada con λ_0 , pero finita de las fuentes esté dada por una generalización de la onda plana.

Una generalización natural de los campos de una onda plana se obtiene cuando

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})}. \quad (2.19)$$

donde $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ es el “camino óptico” y es una función escalar de la posición. En este caso, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de la posición, en general complejas. Usando las identidades vectoriales

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f), \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f), \quad (2.21)$$

donde f es un campo escalar y \mathbf{A} es un campo vectorial dependientes de la posición. Usando estas identidades y las ecuaciones (2.18) y (2.19) un cálculo directo muestra que

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} [\nabla \times \mathbf{h} + ik_0 \nabla \mathcal{S} \times \mathbf{h}], \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} [(\nabla \times \mathbf{e}) + ik_0 \nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e}], \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}_0) = e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} [\epsilon \nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon ik_0 \mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{S}], \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} [\mu \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla \mu + \mu ik_0 \mathbf{h} \cdot \nabla \mathcal{S}]. \quad (2.25)$$

Otro cálculo muestra que sustituyendo (2.22)-(2.25) en las ecuaciones de Maxwell (2.12)-(2.15) se obtiene

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = -\frac{\nabla \times \mathbf{h}}{ik_0}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = -\frac{\nabla \times \mathbf{e}}{ik_0}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{S} = -\frac{1}{\epsilon ik_0} (\epsilon \nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla \epsilon), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \mathcal{S} = -\frac{1}{\mu ik_0} (\mu \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla \mu). \quad (2.29)$$

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS
2.1. LA ECUACIÓN EIKONAL

Ahora estamos interesados en una solución a las ecuaciones de Maxwell tal que el valor absoluto de cada una de las funciones que multiplican al factor $1/k_0$ en el lado izquierdo de las ecuaciones (2.26)-(2.29) sea muy pequeña comparada con el valor de k_0 . En esta aproximación se sigue que

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = 0, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{S} = 0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \mathcal{S} = 0. \quad (2.33)$$

Despejando \mathbf{h} de (2.31) y sustituyendo en (2.30), se obtiene

$$\frac{1}{\mu} [\nabla \mathcal{S} (\nabla \mathcal{S} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e} (\nabla \mathcal{S} \cdot \nabla \mathcal{S})] + \epsilon \mathbf{e} = 0. \quad (2.34)$$

Usando la ecuación (2.32) y el hecho de que \mathbf{e} en general es distinto de cero obtenemos la denominada ecuación eikonal. Es decir,

$$\nabla \mathcal{S} \cdot \nabla \mathcal{S} = n^2, \quad (2.35)$$

donde $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción. Usando coordenadas cartesianas rectangulares esta ecuación se puede escribir en la siguiente forma

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (2.36)$$

La función \mathcal{S} es llamada la eikonal. En conclusión, estos resultados implican que en el límite en el que la longitud de onda es muy pequeña comparada con la distancia entre las fuentes y la región donde estamos interesados en determinar el campo electromagnético, denominada aproximación geométrica, el campo electromagnético esencialmente está determinado por la ecuación eikonal (2.36). Por definición, las superficies $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \text{constante}$, son los denominados frentes de onda geométricos y las trayectorias perpendiculares a tales superficies son los denominados rayos de luz, los cuales en cada uno de sus puntos $\nabla \mathcal{S}$ es su vector tangente.

Utilizando las definiciones de los promedios temporales de las densidades de energía eléctrica y magnética, de las ecuaciones (2.18) y (2.19) se sigue que

$$\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*, \quad (2.37)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*. \quad (2.38)$$

Además, de las ecuaciones (2.30), (2.31), (2.37) y (2.38) se encuentra que

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle = \frac{1}{16\pi} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{h}^* \times \nabla \mathcal{S}). \quad (2.39)$$

Por lo tanto, *dentro de la aproximación de la óptica geométrica, el promedio temporal de las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.*

Por otra parte, usando las ecuaciones (2.18), (2.19) y la definición del promedio temporal del vector de Poynting, se encuentra que

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathcal{R}(\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*). \quad (2.40)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (2.31), (2.32), (2.37), (2.40) y la relación de Maxwell $\epsilon\mu = n^2$, se encuentra que

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n^2} \langle w \rangle \nabla \mathcal{S}, \quad (2.41)$$

donde $\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle$. Esto significa que en la aproximación de la óptica geométrica la energía asociada con el campo electromagnético dado por las ecuaciones (2.18) y (2.19) se propaga a lo largo de los rayos de luz. Es decir, en cada punto del espacio se propaga en la dirección dada por $\nabla \mathcal{S}$.

2.2. Ley de reflexión y refracción

Suponemos que el espacio es llenado con dos medios ópticos con índices de refracción constante n_1 y n_2 , los cuales están separados por una superficie que localmente está dada por $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + f(x, y)\hat{z}$. En el medio con índice de refracción n_1 colocamos una fuente puntual en un punto cuyo vector de posición denotaremos por \mathbf{s} . Por lo tanto, la longitud de camino óptico, Φ , desde la fuente puntual, \mathbf{s} , a un punto arbitrario $\mathbf{X} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$, ubicado en el medio óptico con índice de refracción n_2 , está dado por

$$\Phi(\mathbf{X}, x, y) = n_1|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}| + n_2|\mathbf{X} - \mathbf{r}(x, y)|. \quad (2.42)$$

Oberve que para valores fijos de x y y la ecuación (2.42) es una solución a la ecuación eikonal en el medio óptico con índice de refracción n_2 . Esto significa que $\Phi(\mathbf{X}, x, y)$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación eikonal. Para ver el significado físico asociado con esta familia de soluciones, estudiemos sus frentes de onda asociados. Es decir, todas las superficies tales que tales que $\Phi(\mathbf{X}, x, y) = \mathcal{C}$, donde \mathcal{C} es una constante, esto es

$$|\mathbf{X} - \mathbf{r}(x, y)| = \frac{\mathcal{C}}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|, \quad (2.43)$$

$$\gamma \equiv \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.44)$$

Para valores fijos de x y y la ecuación (2.43) describe una familia de esferas en el punto de la superficie refractante, $\mathbf{r}(x, y)$ y radio $\frac{\mathcal{C}}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|$. Esto significa que cada rayo emitido por la fuente puntual, al llegar a la superficie refractante, se transforma en una nueva fuente de luz puntual, tal que sus frentes de onda esféricos están dados por (2.43). En otras palabras, cada rayo que es emitido por la fuente de luz puntual, al llegar a la superficie refractante tiene la posibilidad de tomar cualquier dirección de propagación. Por lo tanto, usando solamente la información de la familia biparamétrica de soluciones (2.42), no es posible determinar la dirección del rayo refractado. Para obtener tal dirección se recurre al principio de Huygens. Esto es, se supone que el frente de onda refractado está dado por la envolvente [25] de los frentes de onda (2.43). Por definición, la envolvente está dada por todos los puntos \mathbf{X} que satisfacen (2.43) y las siguientes dos condiciones sobre Φ :

$$\Phi_x = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_x = 0, \quad (2.45)$$

$$\Phi_y = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_y = 0, \quad (2.46)$$

donde $\Phi_x, \Phi_y, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ denotan las derivadas parciales de Φ y \mathbf{r} con respecto a x y y respectivamente, además

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (2.47)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{r}}{|\mathbf{X} - \mathbf{r}|}. \quad (2.48)$$

Esto es, $\hat{\mathbf{I}}$ proporciona la dirección del rayo incidente y $\hat{\mathbf{R}}$ denota la dirección del rayo refractado. Si $\hat{\mathbf{N}}$ denota el vector normal unitario a la superficie refractante, se cumplen las siguientes relaciones

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_x = 0, \quad (2.49)$$

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_y = 0, \quad (2.50)$$

debido a que \mathbf{r}_x y \mathbf{r}_y son vectores tangentes a la superficie refractante. Por lo tanto, en nuestro trabajo estudiamos únicamente casos donde $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ y $\hat{\mathbf{N}}$ son vectores linealmente independientes.

Esto significa que cualquier vector en el medio óptico con índice de refracción n_2 puede ser escrito como una combinación lineal de ellos. De las ecuaciones (2.45) y (2.46) se concluye que

$$\hat{\mathbf{R}} - \gamma \hat{\mathbf{I}} = \Omega \hat{\mathbf{N}}, \quad (2.51)$$

donde la función Ω es determinada a partir de la condición $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$, es decir

$$\Omega^2 + 2\Omega\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \gamma^2 - 1 = 0, \quad (2.52)$$

que es una ecuación de segundo grado en Ω con soluciones

$$\Omega_{(\pm)} = -\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm \sqrt{1 - \gamma^2 [1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]}. \quad (2.53)$$

Por lo tanto, se concluye que las condiciones (2.45) y (2.46) sobre la familia biparamétrica de soluciones (2.42) de la ecuación eikonal determina dos direcciones de propagación, las cuales corresponden a las leyes de refracción y reflexión en su forma vectorial.

La ley de refracción está dada por la ecuación (2.51) con Ω dado por la ecuación (2.53) con el signo positivo. Esto es,

$$\hat{\mathbf{R}} = \gamma \hat{\mathbf{I}} + \Omega \hat{\mathbf{N}}, \quad (2.54)$$

$$\Omega = -\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \sqrt{1 - \gamma^2 [1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]}. \quad (2.55)$$

Observe que cuando $n_1 = n_2$, entonces $\gamma = 1$, $\Omega = 0$, y $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}}$, esto es, el rayo es transmitido sin cambiar su dirección el cual es un resultado bien conocido.

La ley de reflexión está dada por la ecuación (2.51) con Ω dado por la ecuación (2.53) con el signo negativo y tomando $n_1 = n_2$. Esto es,

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{I}}. \quad (2.56)$$

Recordemos que la envolvente de los frentes de onda (2.43) está dada por todos los puntos \mathbf{X} que satisfacen las ecuaciones (2.43), (2.45) y (2.46). Las ecuaciones (2.45) y (2.46) determinan dos direcciones de propagación: una corresponde a la dirección de los rayos refractados dada por la ecuación (2.54) y la otra corresponde a la dirección del rayo reflejado (2.56). Por lo tanto, la envolvente de los frentes de onda (2.43) tiene dos ramas, una correspondiente a los frentes de onda refractados y la otra a los frentes de onda reflejados. Usando las ecuaciones (2.43), (2.48) y (2.54) un cálculo directo muestra que la evolución de los rayos de luz y frentes de onda refractados está dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + l \left(\gamma \hat{\mathbf{I}} + \Omega \hat{\mathbf{N}} \right), \quad (2.57)$$

donde

$$l = \frac{\mathcal{C}}{n_2} - \gamma |\mathbf{r} - \mathbf{s}|. \quad (2.58)$$

La ecuación (2.57) describe la evolución de los rayos de luz refractados tomando a x y y como constantes y variando l . Sustituyendo la ecuación (2.58) en (2.57) se obtienen los frentes de onda refractados tomando a \mathcal{C} como constante y variando a x y y .

Mientras que usando las ecuaciones (2.43), (2.48) y (2.56) describen la evolución de los rayos de luz y los frentes de onda reflejados, dados por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + l \left(\hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{I}} \right) \quad (2.59)$$

$$l = \frac{\mathcal{C}}{n_1} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}|. \quad (2.60)$$

La ecuación (2.59) describe la evolución de los rayos de luz reflejados tomando a x y y como constantes y variando l . Sustituyendo la ecuación (2.60) en (2.59) se obtienen los frentes de onda reflejados tomando a \mathcal{C} como constante y variando a x y y .

2.3. Cálculo de la cáustica

Desde un punto de vista matemático las ecuaciones (2.57) y (2.59) describen mapeos entre dos subconjuntos de \mathcal{R}^3 , donde, (x, y, l) son coordenadas locales del espacio dominio y (X, Y, Z) , con $\mathbf{X} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$, son coordenadas locales del espacio imagen. Por definición, la región focal asociada con los rayos de luz refractados o reflejados es el conjunto cáustico determinado por los mapeos (2.57) y (2.59) respectivamente. El conjunto de puntos en el espacio dominio donde los mapeos (2.57) y (2.59) no son localmente uno a uno, por definición, son sus conjuntos críticos y las imágenes de estos conjuntos críticos ante los mapeos son sus conjuntos cáusticos. Los conjuntos críticos de estos mapeos están determinados por la condición

$$J = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial l} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.61)$$

Usando las ecuaciones (2.57) y (2.59) un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial l} = \hat{\mathbf{R}}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + l \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + l \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y}. \quad (2.64)$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (2.61) se encuentra que

$$J = l^2 H_2 + l H_1 + H_0 = 0 \quad (2.65)$$

donde

$$H_2(x, y) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right), \quad (2.66)$$

$$H_1(x, y) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right], \quad (2.67)$$

$$H_0(x, y) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right). \quad (2.68)$$

Si $H_2 \neq 0$, el conjunto crítico tiene dos ramas dadas por

$$l_{\pm}(x, y) = \frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2}. \quad (2.69)$$

En este caso, el conjunto cáustico el cual se obtiene al sustituir la ecuación (2.69) en (2.57), también tiene dos ramas dadas por

$$\mathbf{X}_{\pm}(x, y) = \mathbf{r}(x, y) + \left(\frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \right) \hat{\mathbf{R}}(x, y). \quad (2.70)$$

Sin embargo, si $H_2 = 0$ y $H_1 \neq 0$, el conjunto crítico tiene una sola rama dada por

$$l_c = -\frac{H_0}{H_1}, \quad (2.71)$$

y el conjunto cáustico se obtiene al sustituir (2.71) en (2.57) y está dado por

$$\mathbf{X}_c(x, y) = \mathbf{r}(x, y) - \left(\frac{H_0}{H_1}\right) \hat{\mathbf{R}}(x, y). \quad (2.72)$$

Las propiedades geométricas de los tres campos escalares, H_2 , H_1 y H_0 han sido discutidas en [26]. En particular, H_2 es proporcional a $\Omega^2 K$, donde Ω está dado por la ecuación (2.55) y K es la curvatura de Gauss de la superficie refractante. Un cálculo directo muestra que $K = 0$ para la superficie cónica de la lente axicón, entonces $H_2 = 0$ y así, en este caso, la región cáustica tiene solo una rama. Por otro lado, para una interfaz esférica refractante $K \neq 0$, entonces, $H_2 \neq 0$, y por lo tanto, la región cáustica tiene dos ramas.

Capítulo 3

Frentes de onda, rayos de luz y cáustica asociados con la refracción de un frente de onda plano por una lente cono esférica

3.1. La lente plano esférica y la lente axicón

En esta sección hacemos una revisión a los frentes de onda, rayos de luz y la cáustica asociados con la refracción de un frente de onda plano por una lente plano esférica y una lente axicón. Suponemos que el espacio es llenado con dos medios ópticos con índices de refracción constantes, n_1 y n_2 , los cuales están separados por una interfaz localmente dada por un campo vectorial $\mathbf{r}(\rho, \phi)$, entonces un frente de onda plano evolucionando en la dirección \hat{z} , en el medio óptico con índice de refracción n_1 , es refractado por la interfaz en la dirección $\hat{\mathbf{R}}$. Así, usando la ley de refracción y el frente de onda plano de referencia $\mathbf{s} = \rho(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$, un cálculo directo muestra que los frentes de onda y rayos de luz refractados, están dados por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + l\hat{\mathbf{R}}, \quad (3.1)$$

$$l = \frac{\mathcal{C}}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}|, \quad (3.2)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \gamma\hat{z} + \Omega\hat{\mathbf{N}}, \quad (3.3)$$

$$\Omega = -\gamma(\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \sqrt{1 - \gamma^2 [1 - (\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]}, \quad (3.4)$$

donde \mathcal{C} es un parámetro real, $\hat{\mathbf{N}}$ es el vector unitario normal a la interfaz y $\gamma \equiv n_1/n_2$.

3.1.1. La lente plano esférica

Suponemos que tenemos una lente plano esférica con índice de refracción n en el espacio libre. Usando coordenadas polares ρ y ϕ , para este caso particular se tiene

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho^2}\hat{z}, \quad (3.5)$$

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad (3.6)$$

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.1. LA LENTE PLANO ESFÉRICA Y LA LENTE AXICÓN**

donde $0 \leq \rho \leq a$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, donde a es el radio de la superficie esférica. Usando las ecuaciones (3.5) y (3.6) un cálculo directo muestra que

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{a} \left(\rho \hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho^2} \hat{z} \right). \quad (3.7)$$

Los frentes de onda planos evolucionando en la dirección \hat{z} llegan a la superficie plana de la lente esférica y son transmitidos sin refracción hasta llegar a la superficie esférica donde son refractados. Por lo tanto, usando las ecuaciones (3.1)-(3.4) y (3.5)-(3.7), un cálculo directo muestra que los frentes de onda y rayos de luz refractados pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\mathbf{X} = \left[\frac{a^2 + l(\sqrt{a^2 - \gamma^2 \rho^2} - \gamma \sqrt{a^2 - \rho^2})}{a^2} \right] \rho \hat{\rho} + \left[\frac{a^2 \sqrt{a^2 - \rho^2} + l(\gamma \rho^2 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \sqrt{a^2 - \gamma^2 \rho^2})}{a^2} \right] \hat{z}, \quad (3.8)$$

donde

$$l = \frac{c}{n_2} - \gamma \sqrt{a^2 - \rho^2}. \quad (3.9)$$

Es importante remarcar que la ecuación (3.8) es correcta para $a^2 - \gamma^2 \rho^2 \geq 0$. Esto es, $0 \leq \rho \leq \rho_m$, donde $\rho_m = a/\gamma$ si $\gamma > 1$ y $\rho_m = a$ si $\gamma < 1$.

Finalmente, otro cálculo directo muestra que las dos ramas de la región cáustica asociada con los rayos refractados por la lente plano esférica pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}_- = \frac{\gamma^2 \rho^3}{a^2} \hat{\rho} + \frac{\gamma [(a^2 - \gamma^2 \rho^2)^{3/2} + \gamma (a^2 - \rho^2)^{3/2}]}{a^2 (\gamma^2 - 1)} \hat{z}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{X}_+ = \frac{\gamma (\sqrt{a^2 - \gamma^2 \rho^2} + \gamma \sqrt{a^2 - \rho^2})}{\gamma^2 - 1} \hat{z}. \quad (3.11)$$

Observe que \mathbf{X}_- corresponde a una superficie de revolución alrededor del eje z con una singularidad degenerada de tipo cúspide, mientras que \mathbf{X}_+ corresponde a un segmento de línea a lo largo del eje de simetría; es decir, sobre el eje óptico del sistema. Ya que ρ debe ser tal que $a^2 - \gamma^2 \rho^2 > 0$ y $a^2 - \rho^2 > 0$, entonces para $\gamma > 1$ ambas ramas de la cáustica son reales y virtuales para $\gamma < 1$. Ahora, consideremos el caso $\gamma > 1$, así $0 \leq \rho \leq \rho_m = a/\gamma$, y los componentes z de las dos ramas de la cáustica son tales que

$$\frac{a\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \leq Z_-(\rho) \leq \frac{a\gamma}{\gamma - 1}, \quad (3.12)$$

$$\frac{a\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \leq Z_+(\rho) \leq \frac{a\gamma}{\gamma - 1}. \quad (3.13)$$

De estos resultados se sigue que para $\gamma > 1$ la línea cáustica (3.11) está siempre dentro de la otra rama de la cáustica, la superficie de revolución (3.10). En la figura (3.1), en el plano $y = 0$, mostramos el caso particular $n_1 = 1.5$ y $n_2 = 1$; esto es, una lente plano esférica en un medio con índice de refracción $n_1 = 1.5$. En (a) se presentan: algunos frentes de onda incidentes y rayos de luz marginales incidentes (Verde), la lente (Negro), los frentes de onda y rayos de luz marginales correspondientes (Azul) y las dos ramas de la región cáustica (Rojo), en (b) se presentan: algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente (Negro), los rayos de luz refractados (Azul) y las dos ramas de la región cáustica (Rojo).

**CAPÍTULO 3. FRENTES DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.1. LA LENTE PLANO ESFÉRICA Y LA LENTE AXICÓN**

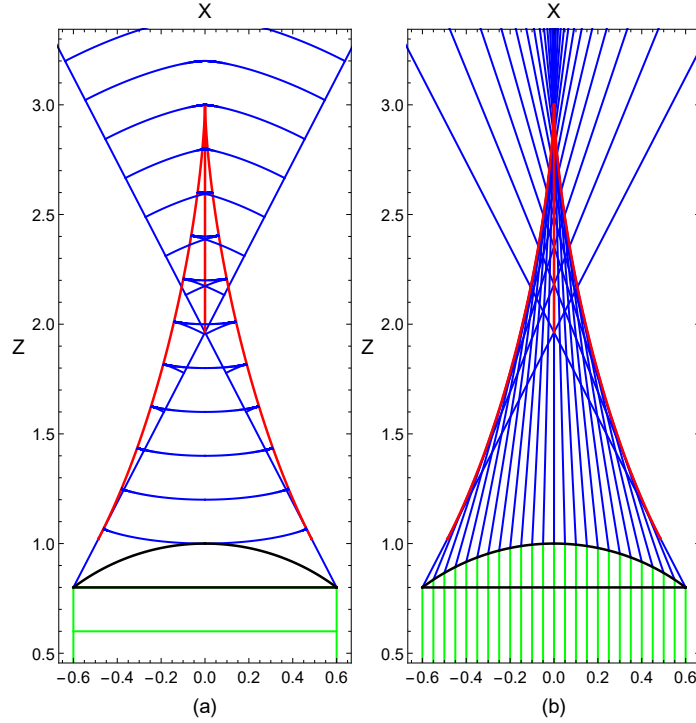


Figura 3.1: Aquí se presenta en el plano $y = 0$: (a) algunos frentes de onda incidentes y los rayos de luz marginales (Verde), la lente plano esférica (Negro), algunos frentes de onda refractados y los rayos de luz refractados marginales (Azul) y las dos ramas de la cáustica (Rojo), (b) algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente plano esférica (Negro), algunos rayos de luz refractados (Azul) y las dos ramas de la cáustica (Rojo). Para obtener estos gráficos se utilizó (3.8), (3.10) y (3.11) con $a = 1\text{cm}$ y $\gamma = 1.5$.

3.1.2. Lente axicón

Ahora suponemos que tenemos la lente axicón con índice de refracción n en el espacio libre. Usando coordenadas polares ρ y ϕ , para este caso particular se tiene

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + (a - \rho) \cot \alpha \hat{z}, \quad (3.14)$$

donde $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, con a siendo el radio de la cara plana. Usando las ecuaciones (3.6) y (3.14) un cálculo directo muestra que

$$\hat{\mathbf{N}} = \cos \alpha \hat{\rho} + \sin \alpha \hat{z}. \quad (3.15)$$

De las ecuaciones (3.1)-(3.4), (3.6), (3.14) y (3.15), un cálculo directo muestra que los frentes de onda y rayos de luz refractados cuando un frente de onda plano se propaga en la dirección \hat{z} puede ser escrito de la siguiente manera

$$\mathbf{X} = \left[\rho + l \cos \alpha \left(\sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha} - \gamma \sin \alpha \right) \right] \hat{\rho} + \left\{ (a - \rho) \cot \alpha + l \left[\gamma + \sin \alpha \left(\sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha} - \gamma \sin \alpha \right) \right] \right\} \hat{z}, \quad (3.16)$$

donde

$$l = \frac{c}{n_2} - \gamma(a - \rho) \cot \alpha. \quad (3.17)$$

**CAPÍTULO 3. FRENTES DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.1. LA LENTE PLANO ESFÉRICA Y LA LENTE AXICÓN**

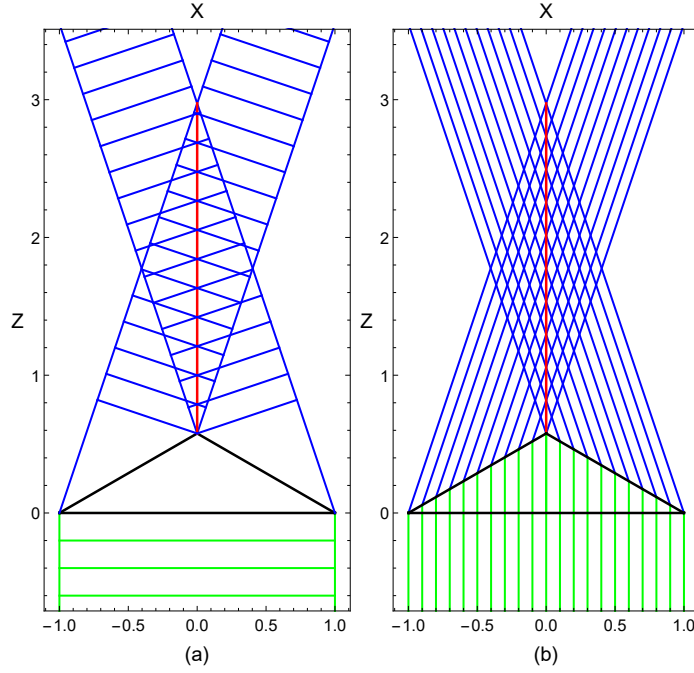


Figura 3.2: Aquí se presenta en el plano $y = 0$: (a) algunos frentes de onda incidentes y los rayos de luz incidentes marginales (Verde), la lente axicón (Negro), algunos frentes de onda refractados y los rayos de luz refractados marginales (Azul) y la cáustica (Rojo), (b) algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente axicón (Negro), algunos rayos de luz refractados (Azul) y la cáustica (Rojo). Para obtener estos gráficos se utilizó (3.16) y (3.18) con $a = 1\text{cm}$, $\alpha = \pi/3$ y $\gamma = 1.5$.

Es importante remarcar que la ecuación (3.16) es correcta para $1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha \geq 0$. Esto es, $\arccos(1/\gamma) \leq \alpha \leq \pi/2$. Cuando $\alpha = \pi/2$ la lente axicón se reduce a un disco plano.

Finalmente, otro cálculo directo muestra que la cáustica, asociada con los rayos de luz refractados por la lente axicón, tiene una sola rama, que puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}_c = \left[(a - \rho) \cot \alpha + \frac{\rho(\Omega + \gamma \csc \alpha) \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha}}{\gamma \cos \alpha \Omega + \cot \alpha (\gamma^2 - 1)} \right] \hat{z}, \quad (3.18)$$

donde

$$\Omega = \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha} - \gamma \sin \alpha. \quad (3.19)$$

Observe que \mathbf{X}_c corresponde a un segmento de línea a lo largo del eje de simetría del sistema óptico y es tal que su componente z en $\rho = 0$ y $\rho = a$ se reduce a

$$Z_0 = (\mathbf{X}_c \cdot \hat{z}) \Big|_{\rho=0} = a \cot \alpha, \quad (3.20)$$

$$Z_a = (\mathbf{X}_c \cdot \hat{z}) \Big|_{\rho=a} = a \left(\frac{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha} \cot \alpha + \sec \alpha - \gamma^2 \cos \alpha}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha} + \gamma^2 \cos \alpha \cot \alpha - \csc \alpha} \right). \quad (3.21)$$

Por lo tanto, cuando ρ va de cero a a , la cáustica empieza en el vértice de la superficie cónica de la lente axicón $(0, 0, a \cot \alpha)$ y termina en el punto $(0, 0, Z_a)$. Para $0 < \gamma < 1$ y $0 < \alpha < \pi/2$, $1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha > 0$ entonces a partir de la ecuación (3.21) tenemos que, en este caso, $Z_a < Z_0$ y así, la cáustica es virtual; en particular cuando γ tiende hacia cero y α a $\pi/2$ esta es una línea semi-infinita a lo largo del eje z negativo. Este caso corresponde a una lente axicón con índice de refracción n_1

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**
3.2. LA LENTE CONOESFÉRICA

en un medio óptico con índice de refracción $n_2 > n_1$, así los rayos de luz refractados dejando la superficie cónica de la lente son divergentes y forman una línea cáustica virtual. Cuando $\gamma > 1$, $n_1 > n_2$, los rayos de luz refractados convergen y forman una línea cáustica real. En este caso, para un valor dado de α , tal que, $1 - \gamma^2 \cos^2 \alpha > 0$, cuando γ se aproxima a la unidad, entonces Z_a tiende a infinito. En la figura 3.2 se presenta en el plano $y = 0$, el caso cuando $a = 1\text{cm}$, $\alpha = \pi/3$, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$, $\gamma = 1.5$, $Z_0 = 1/\sqrt{3}\text{cm}$ y $Z_a = 2.97309\text{cm}$. En (a) se muestran algunos frentes de onda incidentes, los rayos de luz incidentes marginales (Verde), la lente (Negro), algunos frentes de onda y rayos de luz marginales refractados (Azul) y la línea cáustica (Rojo). En (b) se presentan algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente (Negro), los rayos de luz refractados (Azul) y la línea cáustica (Rojo).

3.2. La lente conoesférica

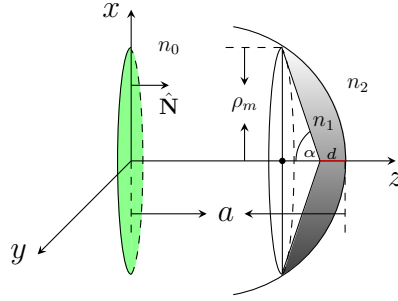


Figura 3.3: Aquí se representa un frente de onda plano incidente y la lente conoesférica con sus parámetros correspondientes. La primera superficie es un cono dado por (3.22) y la segunda superficie es esférica y está dada por (3.24), a es el radio de la superficie esférica y α es el ángulo de apertura de la superficie cónica. La región en negro corresponde a la lente conoesférica.

En esta sección calculamos la refracción de un frente de onda plano por una lente conoesférica. Esto es, suponemos que cierta región del espacio libre es llenado con tres medios ópticos con índices de refracción n_0 , n_1 , n_2 respectivamente. La interfaz entre el primero y segundo medio es una superficie cónica y es construida de la siguiente manera: empezamos con una porción de una superficie esférica de radio a , dada paramétricamente por $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho^2}\hat{z}$, donde $0 \leq \rho \leq \rho_m < a$, entonces dados a y ρ_m obtenemos la expresión para la superficie cónica que interseca la superficie esférica en los puntos $\mathbf{r}(\rho_m, \phi) = \rho_m\hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho_m^2}\hat{z}$ y tiene vértice en el punto $(0, 0, a - d)$, donde d es otro parámetro tal que $0 \leq d \leq a - \sqrt{a^2 - \rho_m^2}$. Así, finalmente obtenemos que la interfaz cónica puede ser expresada de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_1 = \rho\hat{\rho} + (a - d - \rho \cot \alpha)\hat{z}, \quad (3.22)$$

$$\cot \alpha = \frac{a - d - \sqrt{a^2 - \rho_m^2}}{\rho_m}. \quad (3.23)$$

Esto es, estamos suponiendo que los parámetros que determinan la interfaz cónica son a , ρ_m y d . En particular cuando $d = 0$, el vértice del cono está en el punto de la esfera $(0, 0, a)$ y cuando $d = a - \sqrt{a^2 - \rho_m^2}$, $\cot \alpha = 0$, entonces $\alpha = \pi/2$, y así la interfaz cónica se reduce a un disco plano con centro en el punto $(0, 0, \sqrt{a^2 - \rho_m^2})$ dado por $\mathbf{r}_1 = \rho\hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho_m^2}\hat{z}$. La interfaz entre el segundo y tercer medio óptico es la superficie esférica dada por

$$\mathbf{r}_2 = \rho_s\hat{\rho}_s + \sqrt{a^2 - \rho_s^2}\hat{z}, \quad (3.24)$$

$$\hat{\rho}_s = \cos \phi_s\hat{x} + \sin \phi_s\hat{y}, \quad (3.25)$$

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.2. LA LENTE CONOESFÉRICA**

donde $\rho_s = \rho_s(\rho)$ y $\phi_s = \phi_s(\rho)$. En la figura 3, ilustramos la región del espacio con los tres medios ópticos con índices de refracción n_0 , n_1 y n_2 ; la interfaz cónica (3.22) está separando los medios ópticos con índices de refracción n_0 y n_1 y la superficie esférica (3.24) está separando los medios ópticos con índices n_1 y n_2 . Además, hemos incluido los parámetros que caracterizan las dos superficies de la lente cono esférica.

Ahora, siguiendo el procedimiento usado en la sección 2.2, calculamos la refracción del frente de onda plano incidente por la interfaz cónica de la lente dado por \mathbf{r}_1 . En este caso, un cálculo directo muestra que los rayos de luz y frentes de onda refractados por la primera superficie pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\mathbf{X}_1 = (\rho + \Omega_1 l_1 \cos \alpha) \hat{\rho} + [a - d - \rho \cot \alpha + l_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha)] \hat{z},$$

donde

$$\Omega_1 = \sqrt{1 - \gamma_0^2 \cos^2 \alpha} - \gamma_0 \sin \alpha, \quad (3.26)$$

$$l_1 = \frac{C_1}{n_1} - \gamma_0 (a - d - \rho \cot \alpha). \quad (3.27)$$

Es importante remarcar que para valores fijos de ρ y ϕ , el parámetro C_1 etiqueta los puntos de un rayo de luz refractado particular, mientras que para valores fijos del parámetro C_1 , \mathbf{X}_1 describe un frente de onda refractado particular. Observe que los puntos en el rayo de luz refractado también son etiquetados por el parámetro l_1 . Ahora tomamos los rayos de luz refractados que llegan a la interfaz esférica dada por \mathbf{r}_2 . Para determinar la relación entre los dos conjuntos de coordenadas (ρ, ϕ) y (ρ_s, ϕ_s) , a partir de las ecuaciones (3.24) y (3.26) obtenemos la parametrización de la superficie esférica de la lente \mathbf{r}_2 en términos de las coordenadas polares (ρ, ϕ) que parametrizan los puntos en la superficie cónica de la lente \mathbf{r}_1 . Para ser más específicos, seguimos los rayos de luz refractados por la primera superficie de la lente, entonces cuando los rayos de luz llegan a la segunda superficie de la lente obtenemos la siguiente relación $\mathbf{X}_1 = \mathbf{r}_2$, que determina la relación que estábamos buscando. Esta condición es equivalente a

$$(\rho + l_1 \Omega_1 \cos \alpha) \cos \phi = \rho_s \cos \phi_s, \quad (3.28)$$

$$(\rho + l_1 \Omega_1 \cos \alpha) \sin \phi = \rho_s \sin \phi_s, \quad (3.29)$$

$$a - d - \rho \cot \alpha + l_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) = \sqrt{a^2 - \rho_s^2}. \quad (3.30)$$

Esto es,

$$\phi_s = \phi, \quad (3.31)$$

$$l_1 = \frac{\sqrt{a^2 - \rho_s^2} + \rho \cot \alpha - a + d}{\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha}, \quad (3.32)$$

y

$$A\rho_s^2 + B\rho_s + C = 0, \quad (3.33)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\sec^2 \alpha (\gamma_0^2 + 2\gamma_0 \Omega_1 \sin \alpha + \Omega_1^2)}{\Omega_1^2}, \\ B &= \frac{2(\Omega_1 + \gamma_0 \csc \alpha) [\rho \sec \alpha (\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha) - (a - d)\Omega_1] \tan \alpha}{\Omega_1^2}, \\ C &= \frac{((2a - d)\Omega_1 - \rho \sec \alpha (\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha))(d\Omega_1 + \rho \sec \alpha (\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha))}{\Omega_1^2}, \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LALENTE CONOESFÉRICA**
3.2. LALENTE CONOESFÉRICA

con $\gamma_0 \equiv n_0/n_1$. Por lo tanto, las dos soluciones para ρ_s están explícitamente dadas por

$$\rho_{\pm} = \frac{(\Omega_1 + \gamma_0 \csc \alpha)[\rho(\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha) - (a - d)\Omega_1 \cos \alpha] \sin \alpha \pm \cos^2 \alpha \sqrt{\Delta}}{\gamma_0^2 + 2\gamma_0\Omega_1 \sin \alpha + \Omega_1^2}, \quad (3.34)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta = & (\Omega_1 + \gamma_0 \csc \alpha)^2 [\rho(\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha) \sec \alpha - (a - d)\Omega_1]^2 \tan^2 \alpha \\ & - \sec^2 \alpha [d\Omega_1 + \rho(\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha) \sec \alpha] \\ & \times [(d - 2a)\Omega_1 + \rho(\gamma_0 + \Omega_1 \csc \alpha) \sec \alpha] (\gamma_0^2 + 2\gamma_0\Omega_1 \sin \alpha + \Omega_1^2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Hasta este momento hemos calculado la refracción del frente de onda plano incidente, evolucionando a lo largo del eje z por la superficie cónica de la lente y se ha obtenido la parametrización de la superficie esférica en términos de las coordenadas polares (ρ, ϕ) , que etiquetan los puntos en la superficie cónica de la lente. Así, la parametrización de la superficie esférica que tenemos que usar para calcular la segunda refracción de los rayos de luz está dada por

$$\mathbf{r}_2 = \rho_s \hat{\rho} + \sqrt{a^2 - \rho_s^2} \hat{z}, \quad (3.36)$$

donde ρ_s está dado por (3.34).

Por lo tanto, los rayos de luz y frentes de onda refractados por la segunda superficie de la lente (3.36) pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{r}_2 + \left[\frac{C_2}{n_2} - \gamma_0 \gamma_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}| - \gamma_1 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \right] \hat{\mathbf{R}}_2, \quad (3.37)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_2 = \gamma_1 \hat{\mathbf{I}}_2 + \Omega_2 \hat{\mathbf{N}}_2, \quad (3.38)$$

$$\Omega_2 = -\gamma_1 (\hat{\mathbf{I}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2) + \sqrt{1 - \gamma_1^2 [1 - (\hat{\mathbf{I}}_2 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2)^2]}, \quad (3.39)$$

donde

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = \Omega_1 \cos \alpha \hat{\rho} + (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) \hat{z}, \quad (3.40)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_2 = \frac{\rho_s}{a} \hat{\rho}_s + \frac{\sqrt{a^2 - \rho_s^2}}{a} \hat{z}. \quad (3.41)$$

Usando las ecuaciones (3.38)-(3.41) un cálculo directo muestra que

$$\hat{\mathbf{R}}_2 = \left(\gamma_1 \Omega_1 \cos \alpha + \frac{\Omega_2 \rho_s}{a} \right) \hat{\rho} + \left(\gamma_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) + \frac{\Omega_2 \sqrt{a^2 - \rho_s^2}}{a} \right) \hat{z}, \quad (3.42)$$

$$\Omega_2 = -\frac{\gamma_1 \rho_s \Omega_1 \cos \alpha}{a} - \frac{\gamma_1 \sqrt{a^2 - \rho_s^2} (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha)}{a} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{a}, \quad (3.43)$$

$$\Delta_2 = a^2 - \gamma_1^2 \left(a^2 - \left(\rho_s \Omega_1 \cos \alpha + \sqrt{a^2 - \rho_s^2} (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) \right)^2 \right). \quad (3.44)$$

Ya que $\mathbf{s} = \rho \hat{\rho}$, finalmente usando las ecuaciones (3.22), (3.36) y (3.42) otro cálculo muestra que la ecuación (3.37) puede ser escrita de la siguiente manera

$$\mathbf{X}_2 = \left[\rho_s + l_2 \left(\gamma_1 \Omega_1 \cos \alpha + \frac{\Omega_2 \rho_s}{a} \right) \right] \hat{\rho} + \left[\sqrt{a^2 - \rho_s^2} \left(1 + \frac{l_2 \Omega_2}{a} \right) + l_2 \gamma_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) \right] \hat{z}, \quad (3.45)$$

donde

$$l_2 = \frac{C_2}{n_2} - \gamma_0 \gamma_1 (a - d - \rho \cot \alpha) - \gamma_1 \sqrt{(\rho_s - \rho)^2 + \left(\sqrt{a^2 - \rho_s^2} - a + d + \rho \cot \alpha \right)^2}. \quad (3.46)$$

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**
3.2. LA LENTE CONOESFÉRICA

En conclusión, la ecuación (3.45) provee ambos, los rayos de luz y los frentes de onda refractados por la lente cono esférica. Puesto que (3.45) describe un mapeo entre los dos subconjuntos de \mathcal{R}^3 , donde (ρ, ϕ, l_2) son coordenadas locales en el espacio dominio y (X_2, Y_2, Z_2) , con $\mathbf{X}_2 = X_2\hat{x} + Y_2\hat{y} + Z_2\hat{z}$, son coordenadas locales en el espacio imagen. Entonces, el conjunto crítico asociado con este mapeo es calculado a partir de la siguiente condición

$$J \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \phi} \right) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial l_2} \times \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \rho} \right] = 0. \quad (3.47)$$

Con

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \phi} = D\hat{\phi}, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial l_2} = E\hat{\rho} + F\hat{z}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \rho} = G\hat{\rho} + H\hat{z}, \quad (3.50)$$

donde

$$D = \rho_s + l_2 \left(\gamma_1 \Omega_1 \cos \alpha + \frac{\Omega_2 \rho_s}{a} \right), \quad (3.51)$$

$$E = \gamma_1 \Omega_1 \cos \alpha + \frac{\Omega_2 \rho_s}{a}, \quad (3.52)$$

$$F = \frac{\Omega_2 \sqrt{a^2 - \rho_s^2}}{a} + \gamma_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha), \quad (3.53)$$

$$G = \rho'_s + l_2 \frac{(\Omega_2 \rho_s)'}{a}, \quad (3.54)$$

$$H = \left[\sqrt{a^2 - \rho_s^2} \left(1 + \frac{l_2 \Omega_2}{a} \right) \right]', \quad (3.55)$$

la notación primada denota la derivada con respecto a la coordenada ρ . Por lo tanto, el conjunto crítico del mapeo (3.45) está determinado por la condición

$$J = D(FG - EH) = 0, \quad (3.56)$$

la cual implica que las dos ramas del conjunto crítico están dadas por $D = 0$ y $FG = EH$. Esto es,

$$l_2 = l_{21} = \frac{-a\rho_s}{a\gamma_1\Omega_1\cos\alpha + \Omega_2\rho_s}, \quad (3.57)$$

$$l_2 = l_{22} = \frac{a[E(\sqrt{a^2 - \rho_s^2})' - F\rho'_s]}{F(\Omega_2\rho_s)' - E(\Omega_2\sqrt{a^2 - \rho_s^2})'}. \quad (3.58)$$

Para determinar las dos ramas de la región cáustica sustituimos (3.57) y (3.58) en (3.45). Así, obtenemos

$$\mathbf{X}_{c21} = \left[\sqrt{a^2 - \rho_s^2} \left(1 + \frac{l_{21}\Omega_2}{a} \right) + l_{21}\gamma_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) \right] \hat{z}, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{c22} &= \left[\rho_s + l_{22} \left(\gamma_1 \Omega_1 \cos \alpha + \frac{\Omega_2 \rho_s}{a} \right) \right] \hat{\rho} \\ &+ \left[\sqrt{a^2 - \rho_s^2} \left(1 + \frac{l_{22}\Omega_2}{a} \right) + l_{22}\gamma_1 (\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha) \right] \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Oberseve que \mathbf{X}_{c21} describe un segmento de línea a lo largo del eje z y \mathbf{X}_{c22} describe una superficie de revolución alrededor del eje z .

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.3. UN EJEMPLO PARTICULAR DE LA LENTE CONOESFÉRICA**

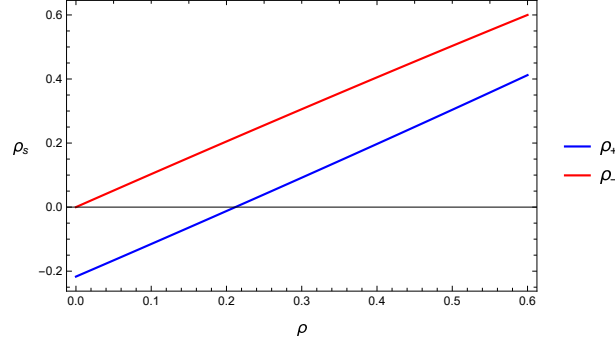


Figura 3.4: Aquí se grafica $\rho_s = \rho_{\pm}$ dada por (3.34) con $a = 1 \text{ cm}$, $d = 0 \text{ cm}$, $\cot \alpha = 1/3$, $\gamma_0 = 2/3$.

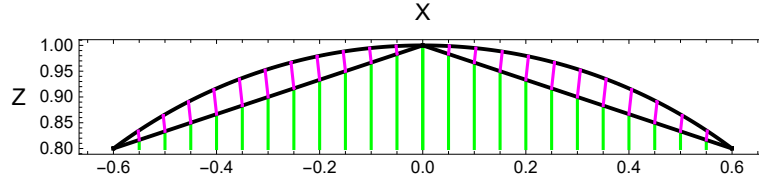


Figura 3.5: En este gráfico se presentan algunos rayos de luz incidentes (Verde), la superficie cónica (Negro), los rayos de luz refractados dentro de la lente (Magenta) y la superficie esférica (Negro). Para obtener este gráfico se usaron las ecuaciones (3.22),(3.24) y (3.61) para $a = 1 \text{ cm}$, $d = 0 \text{ cm}$, $\cot \alpha = 1/3$, $\gamma_0 = 2/3$.

3.3. Un ejemplo particular de la lente cono esférica

En esta sección aplicamos los resultados generales a una lente cono esférica particular caracterizada por $a = 1 \text{ cm}$, $\rho_m = 3/5 \text{ cm}$, $\gamma_0 = 2/3$, $\gamma_1 = 3/2$ y así $0 \text{ cm} \leq d \leq 1/5 \text{ cm}$. Esto es, para cada valor de d estamos suponiendo que tenemos una lente cono esférica con índice de refracción $n_1 = 3/2$ en el espacio libre ($n_0 = 1$ y $n_2 = 1$). Usando estos valores particulares y la ecuación (3.34) con $d = 0 \text{ cm}$, $1/10 \text{ cm}$, $1/5 \text{ cm}$ encontramos que la expresión correcta para ρ_s está dada por $\rho = \rho_-$. En la figura 3.4 presentamos las gráficas de ρ_s cuando $d = 0 \text{ cm}$. Por lo tanto, los rayos de luz refractados dentro de la lente están dados por

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{r}_1 + \sigma(\mathbf{X}_{1-} - \mathbf{r}_1), \quad (3.61)$$

donde $0 \leq \sigma \leq 1$,

$$\mathbf{X}_{1-} = (\rho + \Omega_1 \cos \alpha)\hat{\rho} + [a - d - \rho \cot \alpha + l_\rho(\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha)]\hat{z}, \quad (3.62)$$

y

$$l_\rho = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2} + \rho \cot \alpha - a + d}{\gamma_0 + \Omega_1 \sin \alpha}. \quad (3.63)$$

Así, usando las ecuaciones (3.61)-(3.63) con $d = 0 \text{ cm}$, en la figura 3.5 presentamos en el plano $y = 0$: algunos de los rayos de luz incidentes (Verde), la lente cono esférica (Negro) y los rayos de luz refractados dentro de la lente (Magenta). En figura 3.6 presentamos en el plano $y = 0$: (a) algunos frentes de onda incidentes y rayos de luz incidentes marginales (Verde), la lente cono esférica (Negro), los frentes de onda refractados (Azul) dejando la lente y las ramas de la cáustica (Rojo). En (b) se presentan algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente cono esférica (Negro), los rayos de luz refractados (Azul) dejando la lente y las ramas de la cáustica (Rojo). A partir de estos

**CAPÍTULO 3. FRENTES DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA
3.3. UN EJEMPLO PARTICULAR DE LA LENTE CONOESFÉRICA**

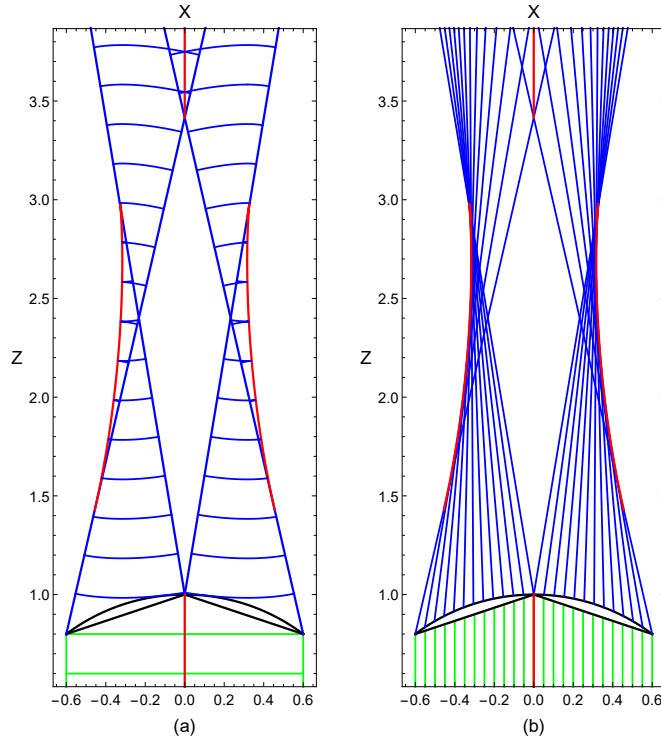


Figura 3.6: Aquí se presentan en el plano $y = 0$: (a) algunos frentes de onda plano incidentes y los rayos de luz incidentes marginales (Verde), la lente cono esférica (Negro), algunos frentes de onda refractados y los rayos de luz refractados marginales (Azul) y las dos ramas de la cáustica (Rojo), (b) algunos rayos de luz incidentes (Verde), la lente cono esférica (Negro), algunos rayos de luz refractados (Azul) y las dos ramas de la cáustica (Rojo). Para obtener estos gráficos se utilizaron las ecuaciones (3.22), (3.36), (3.45), (3.59) y (3.60), con $a = 1 \text{ cm}$, $d = 0 \text{ cm}$, $\cot \alpha = 1/3$, $\gamma_0 = 2/3$ y $\gamma_1 = 3/2$.

gráficos es claro que la cáustica, para este caso, tiene tres ramas, dos de ellas son reales y una virtual. La rama virtual de la cáustica está detrás de la lente y las ramas reales están enfrente de la lente, y como se puede ver están desconectadas. Una de las ramas reales corresponde a un segmento de línea a lo largo del eje z , que es similar a la cáustica generada por la lente axicón. La segunda rama real de la cáustica es una superficie de revolución alrededor del eje z con una singularidad del tipo cúspide. Finalmente, usando las ecuaciones (3.22), (3.36), (3.45), (3.59) y (3.60) en la figura 3.7 presentamos (a) la lente cono esférica (Gris), algunos frentes de onda (Azul) dejando la lente y las ramas de la cáustica (Rojo), en (b) se presenta la lente cono esférica (Gris), algunos rayos de luz refractados (Azul) dejando la lente y las ramas de la cáustica (Rojo). En estos gráficos se muestran las dos ramas de la cáustica, que corresponden a un segmento de línea a lo largo del eje z y una superficie de revolución alrededor del eje z con una singularidad del tipo cúspide.

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**
3.4. PROPIEDADES DE LA REGIÓN CÁUSTICA DE LA LENTE CONOESFÉRICA

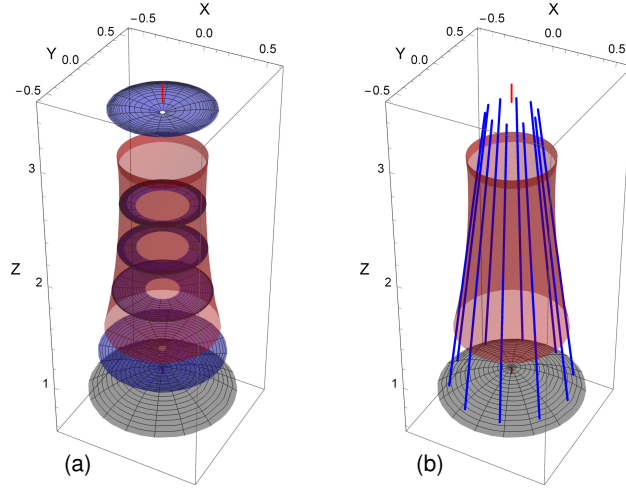


Figura 3.7: En este gráfico se presentan: (a) la lente cono esférica (Gris), algunos frentes de onda refractados dejando la lente (Azul) y las ramas de la cáustica (Rojo). (b) la lente cono esférica (Gris), algunos rayos de luz refractados dejando la lente (Azul) y las ramas de la cáustica (Rojo). Para obtener estos gráficos se utilizaron las ecuaciones (3.22), (3.24), (3.45), (3.59) y (3.60) para $a = 1 \text{ cm}$, $d = 0 \text{ cm}$, $\cot \alpha = 1/3$, $\gamma_0 = 2/3$ y $\gamma_1 = 3/2$.

3.4. Propiedades de la región cáustica de la lente cono esférica

Si $n_0 < n_1$ y $n_1 > n_2$; esto es, $\gamma_0 = n_0/n_1 < 1$ y $\gamma_1 = n_1/n_2 > 1$, los rayos de luz evolucionando a lo largo de la dirección \hat{z} en el medio óptico con índice de refracción n_0 son refractados por la interfaz cónica (3.22) y después ellos divergen y experimentan una segunda refracción en la superficie esférica (3.36), para $\gamma_1 > 1$ entonces los rayos de luz refractados dejando la superficie esférica de la lente cono esférica se deflectan hacia el eje z positivo y así la región cáustica tiene una parte virtual y una parte real, que pueden estar desconectadas. En el caso general, dependiendo de los valores de γ_0 , γ_1 y α , la región cáustica asociada con la refracción de un frente de onda plano evolucionando a lo largo de la dirección \hat{z} por una lente cono esférica puede ser: virtual, real o una parte real y la otra virtual. La condición para cada caso está dada por:

$$(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) \geq 0, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_m, \text{ cáustica virtual.} \quad (3.64)$$

$$(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) \leq 0, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_m, \text{ cáustica real,} \quad (3.65)$$

$$(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0, \text{ para } 0 \leq \rho_c \leq \rho_m \text{ cáustica real y virtual.} \quad (3.66)$$

La lente plano esférica se obtiene de la lente cono esférica cuando α tiende a $\pi/2$. De la ecuación (3.42) un cálculo directo muestra que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \hat{\mathbf{R}}_2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - \gamma_1^2 \rho^2} - \gamma_1 \sqrt{a^2 - \rho^2}}{a^2} \right) \rho \hat{\rho} + \left(\frac{\gamma_1 \rho^2 + \sqrt{a^2 - \rho^2} \sqrt{a^2 - \gamma_1^2 \rho^2}}{a^2} \right) \hat{z}, \quad (3.67)$$

que da la dirección de los rayos de luz refractados por la interfaz esférica con centro en el origen de coordenadas, radio a , separando los dos medios ópticos con índices de refracción n_1 y n_2 ; esto es, $\gamma_1 = n_1/n_2$. De la ecuación (3.67) tenemos que

$$\hat{\rho} \cdot \left(\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \hat{\mathbf{R}}_2 \right) \geq 0, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_m, \text{ y } \gamma_1 < 1, \text{ cáustica virtual,} \quad (3.68)$$

**CAPÍTULO 3. FRENTES DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**
3.4. PROPIEDADES DE LA REGIÓN CÁUSTICA DE LA LENTE CONOESFÉRICA

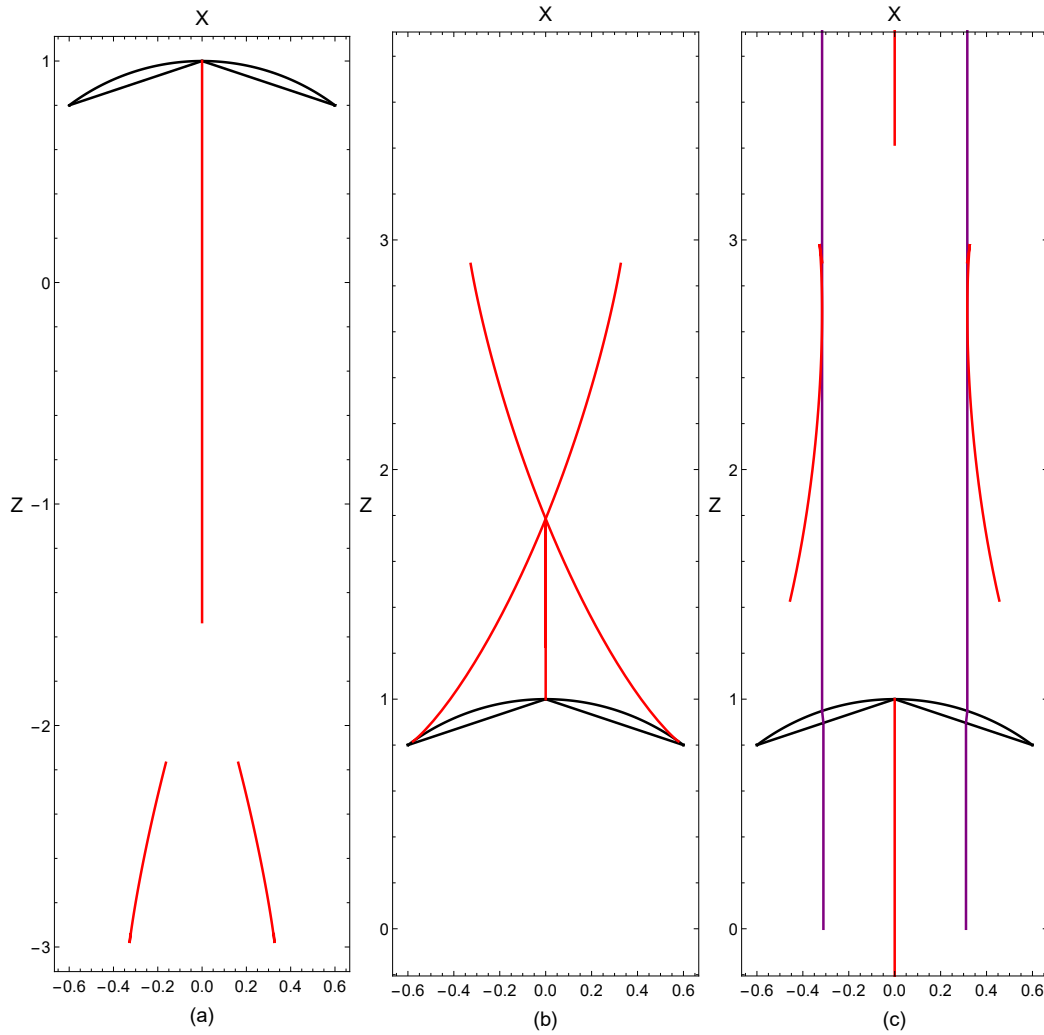


Figura 3.8: Aquí se presentan en el plano $y = 0$, tres lentes cono esféricas (Negro) tales que sus regiones cáusticas correspondientes (Rojo) son: (a) cáustica virtual $\gamma_0 = 2/3$, $\gamma_1 = 3/4$; (b) la cáustica real $\gamma_0 = 4/3$, $\gamma_1 = 3/2$ y (c) una parte es virtual y la otra es real. Para obtener estos gráficos se utilizaron las ecuaciones (3.22), (3.24), (3.45), (3.59) y (3.60) para $\gamma_0 = 2/3$, $\gamma_1 = 3/2$ para $a = 1 \text{ cm}$, $d = 0 \text{ cm}$, $\cot \alpha = 1/3$.

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**
3.4. PROPIEDADES DE LA REGIÓN CÁUSTICA DE LA LENTE CONOESFÉRICA

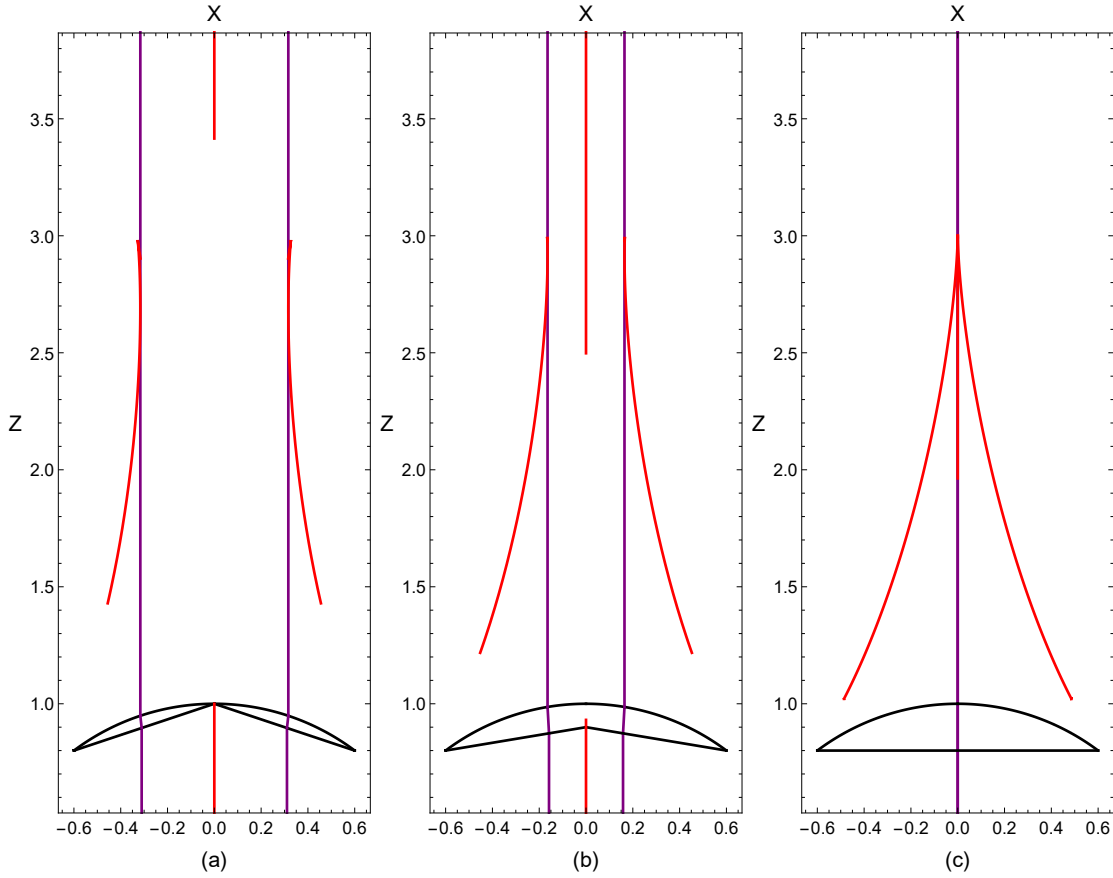


Figura 3.9: Aquí se presentan en el plano $y = 0$, las dos lentes conoesféricas y la lente plano esférica (Negro) tales que sus regiones cáusticas correspondientes (Rojo) y rayos de luz (Púrpura) dados por la condición $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$ son: (a) una cáustica virtual, una cáustica real y los dos rayos de luz para $d = 0$ cm, $\cot \alpha = 1/3$ y $\rho_c = 0.310499$ cm, (b) una cáustica virtual, una cáustica real y los dos rayos de luz para $d = 1/10$ cm, $\cot \alpha = 1/6$ y $\rho_c = 0.158154$ cm, (c) las dos ramas reales de la cáustica y un rayo de luz para $d = 1/5$ cm, $\cot \alpha = \pi/2$ y $\rho_c = 0$ cm con $a = 1$ cm, $\gamma_0 = 2/3$ y $\gamma_1 = 3/2$. Para obtener estos gráficos se utilizaron las ecuaciones (3.22), (3.24), (3.45), (3.59) y (3.60).

**CAPÍTULO 3. FRENTES DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**

3.4. PROPIEDADES DE LA REGIÓN CÁUSTICA DE LA LENTE CONOESFÉRICA

$$\hat{\rho} \cdot \left(\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \hat{\mathbf{R}}_2 \right) \leq 0, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_m, \text{ y } \gamma_1 > 1, \text{ cáustica real.} \quad (3.69)$$

Además, de las ecuaciones (3.26), (3.34), (3.43), (3.59) y (3.60) otro cálculo directo muestra que en el límite $\alpha \rightarrow \pi/2$, las dos ramas de la cáustica de la lente cono esférica se reducen a las de la lente plano esférica dada por las ecuaciones (3.10) y (3.11). Esto es;

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \mathbf{X}_{c21} = \left\{ \frac{\gamma_1 \left(\sqrt{a^2 - \gamma^2 \rho^2} + \gamma_1 \sqrt{a^2 - \rho^2} \right)}{\gamma_1^2 - 1} \right\} \hat{z}, \quad (3.70)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \mathbf{X}_{c22} = \frac{\gamma_1^2 \rho^3}{a^2} \hat{\rho} + \left\{ \frac{\gamma_1 \left[(a^2 - \gamma_1^2 \rho^2)^{3/2} + \gamma_1 (a^2 - \rho^2)^{3/2} \right]}{a^2 (\gamma_1^2 - 1)} \right\} \hat{z}. \quad (3.71)$$

De estas ecuaciones es claro que para $\gamma_1 > 1$ ambas ramas de la cáustica son reales y la línea cáustica (3.70) está dentro de la otra rama de la región cáustica, una superficie de revolución con una singularidad degenerada de tipo cúspide; mientras que para $\gamma_1 < 1$ ambas ramas de la cáustica son virtuales.

Para la lente cono esférica, esto es, $0 < \alpha < \pi/2$, dependiendo de los valores de γ_0 , γ_1 y α la región cáustica puede ser virtual, real o una parte real y la otra virtual. En este tercer caso, la parte virtual de la cáustica está determinada por los valores de ρ tales que $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) > 0$, la parte real por los valores de ρ tales que $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) < 0$ y debe de existir un valor de $\rho = \rho_c$ tal que $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$. Por lo tanto, en este tercer caso, los rayos de luz que evolucionan a lo largo de la dirección \hat{z} después de ser refractados por la lente cono esférica pueden ser clasificados en tres subconjuntos: divergentes (dan lugar a la parte virtual de la cáustica), convergentes (dan lugar a la parte real de la cáustica) y aquellos que forman un cilindro determinado por los rayos de luz que dejan la lente cono esférica evolucionando en la dirección de \hat{z} , que están determinados por la condición $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$. Además, de las ecuaciones, (3.59) y (3.60) se encuentra que las dos partes reales de la cáustica están totalmente desconectadas si $|\mathbf{X}_{c21}(\rho) - \mathbf{X}_{c22}(\tilde{\rho}) \cdot \hat{z}| \neq 0$ para $0 \leq \rho \leq \rho_m$ y $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_m$. Observe que cuando $\alpha \rightarrow \pi/2$, la lente cono esférica se transforma en la lente plano esférica y la superficie cilíndrica se reduce a una línea a lo largo del eje z , mientras que la región cáustica es real o virtual. Para clarificar estas propiedades en la figura 3.8, en el plano $y = 0$, se presenta un ejemplo particular de cada caso: (a) cáustica virtual $\gamma_0 = 2/3$, $\gamma_1 = 3/4$; (b) cáustica real $\gamma_0 = 4/3$, $\gamma_1 = 3/2$ y (c) una parte de la cáustica es virtual y la otra real $\gamma_0 = 2/3$, $\gamma_1 = 3/2$. Y en la figura 3.9, en el plano $y = 0$, se muestran: (a) la lente cono esférica (Negro), las dos ramas de la región cáustica (Rojo) y los dos rayos de luz (Púrpura) que dejan la lente en la dirección de \hat{z} , determinados por la condición $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$. En este caso las dos partes reales de la cáustica están totalmente desconectadas; esto es, satisfacen la condición $|\mathbf{X}_{c21}(\rho) - \mathbf{X}_{c22}(\tilde{\rho}) \cdot \hat{z}| \neq 0$ para $0 \leq \rho \leq \rho_m$ y $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_m$, (b) la lente cono esférica (Negro), las dos ramas de la cáustica (Rojo) y los dos rayos de luz (Púrpura) dados por la condición $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$; en este caso la línea cáustica tiene una parte virtual y una real, mientras que la superficie de revolución alrededor del eje z tiene una singularidad de tipo cúspide, las dos partes reales de la cáustica comparten una región en común; esto es, satisfacen la condición $|\mathbf{X}_{c21}(\rho) - \mathbf{X}_{c22}(\tilde{\rho}) \cdot \hat{z}| \geq 0$ para $0 \leq \rho \leq \rho_m$ y $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_m$, (c) la lente plano esférica (Negro), las dos ramas de la cáustica (Rojo) y el rayo de luz (Púrpura) determinados por la condición $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{R}}_2) = 0$, en este caso, esto es equivalente a $\rho = 0$ y así la superficie cilíndrica se reduce a una línea a lo largo del eje z . Además, en este último caso, las dos ramas de la cáustica comparten una región en común; esto es, satisfacen la condición $|\mathbf{X}_{c21}(\rho) - \mathbf{X}_{c22}(\tilde{\rho}) \cdot \hat{z}| = 0$ para $0 \leq \rho \leq \rho_m$ y $0 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_m$.

Finalmente, remarcamos que de acuerdo al resultado obtenido por Berry y Balazs [16] y debido a que la curvatura de la cáustica que corresponde a la superficie de revolución a lo largo del eje z es diferente de cero, el haz correspondiente a la refracción de un frente de onda plano por una lente cono esférica debe ser un haz acelerado. Mientras que, de acuerdo con los estudios realizados

**CAPÍTULO 3. FRENTE DE ONDA, RAYOS DE LUZ Y CÁUSTICA
REFRACTADOS POR LA LENTE CONOESFÉRICA**

3.4. PROPIEDADES DE LA REGIÓN CÁUSTICA DE LA LENTE CONOESFÉRICA

para la lente axicón en su región cáustica, segmento de línea recta, se debe de obtener un haz de tipo Bessel de orden cero. Usando las fórmulas para las curvaturas media (H) y de Gauss (K) para una superficie arbitraria [27] se encuentra que las curvaturas para la parte de la cáustica dada por la ecuación (3.60), son diferentes de cero, y tienden a infinito en la singularidad de tipo cúspide. Además, cuando $\alpha \rightarrow \pi/2$ se reducen a las curvaturas correspondientes a la lente plano esférica dada por la ecuación (3.71), en este caso, el comportamiento de las curvaturas en la singularidad de tipo cúspide, esto es, alrededor de $\rho = 0$, están dadas por

$$K \approx -\frac{a^2(\gamma_1 - 1)^2}{3\gamma_1^4\rho^4}, \quad H \approx \frac{a^2(\gamma_1^2 - 1)}{2\gamma_1^2|\gamma_1^2 - 1|\rho^3}. \quad (3.72)$$

Conclusiones

En este trabajo hemos introducido la lente conoesférica; esto es, una lente cuyas caras son una superficie cónica y una superficie esférica. Iluminamos esta lente con un frente de onda plano y calculamos su cáustica, frentes de onda y rayos de luz refractados. Encontramos que la cáustica tiene dos ramas, que pueden ser reales, virtuales, o una parte virtual y otra real, dependiendo de los parámetros γ_0 , γ_1 and α . Hemos presentado un ejemplo particular tal que la primera rama de la región cáustica está constituida por dos segmentos de una línea, una parte de esta cáustica es real y la otra virtual. La segunda rama es una superficie con una singularidad de tipo cúspide tal que su curvatura Gaussiana es diferente de cero. Es importante remarcar que las dos ramas de la cáustica están desconectadas, ver figura 3.6, debido a esta propiedad y los resultados obtenidos por Berry y Balazs, sobre la relación entre la aceleración de un haz de Airy y la curvatura de su cáustica correspondiente, creemos que usando este elemento óptico podemos generar un haz óptico escalar acelerado en la región donde la cáustica es una superficie de revolución y al mismo tiempo un haz óptico escalar con propiedades similares a las de un haz Bessel de orden cero en la región donde la cáustica real es un segmento de línea a lo largo del eje óptico. Es decir, este elemento óptico puede ser usado para generar un haz óptico escalar tal que en una región es acelerado y en otra se comporta como un haz Bessel de orden cero.

Los resultados presentados en este trabajo son válidos cuando los rayos de luz refractados experimentan solamente una refracción en cada superficie de la lente conoesférica. Además, el frente de onda plano incidente puede ser producido por una fuente puntual de luz localizada en el infinito sobre el eje óptico, si la fuente de luz puntual se encuentra localizada a una distancia finita de la superficie cónica de la lente y la superficie esférica es reemplazada por una superficie parabólica, hiperbólica o elíptica se obtendrán resultados análogos a los presentados en este trabajo. Sin embargo, bajo pequeñas perturbaciones en la posición de la fuente puntual de luz fuera del eje óptico, la región cáustica de la lente conoesférica presentada no es estable, en particular la línea cáustica se despliega en una superficie de dos dimensiones tal que su sección transversal tiene cuatro singularidades de tipo cúspide y por lo tanto es estable ante pequeños desplazamientos de la fuente puntual.

Los resultados obtenidos en esta tesis han sido publicados en la referencia [28].

Bibliografía

- [1] J. H. McLeod, *The Axicon: A New Type of Optical Element*, J. Opt. Soc. Am. **44** (1954) 592-597.
- [2] J. H. McLeod, *Axicons and Their Uses*, J. Opt. Soc. Am. **50** (1960) 166-169.
- [3] J. L. Rayces, *Formation of axicon images*, J. Opt. Soc. Am. **48** (1958) 576-578.
- [4] S. A. Juárez-Reyes, M. Marciano-Melchor, M. Marcelino-Aranda, P. Ortega-Vidals, E. Román-Hernández, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, R. Suárez-Xique, G. F. Torres del Castillo, and M. Velázquez-Quesada, *Wavefronts, caustic, ronchigram, and null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens*, J. Opt. Soc. Am. A **31** (2014) 448-459.
- [5] Z. Ding, H. Ren, Y. Zhao, J. S. Nelson, and Z. Chen, *High-resolution optical coherence tomography over a large depth range with an axicon lens*, Opt. Lett. **27** (2002) 243-245.
- [6] A. Burvall, K. Kołacz, Z. Jaroszewicz, and A. T. Friberg, *Simple lens axicon*, Appl. Opt. **43** (2004) 4838-4844.
- [7] I. Golub, *Fresnel axicon*, Opt. Lett. **31** (2006) 1890-1892.
- [8] S. Cabrini, C. Liberale, D. Cojoc, A. Carpentiero, M. Prasciolu, S. Mora, V. Degiorgio, F. De Angelis, E. Di Fabrizio, *Axicon lens on optical fiber forming optical tweezers, made by focused ion beam milling*, Microelectron. Eng. **83** (2006) 804-807.
- [9] P. A. Bélanger and M. Rioux, *Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam*, Appl. Opt. **17** (1978) 1080-1088.
- [10] T. Tanaka and S. Yamamoto, *Comparison of aberration between axicon and lens*, Opt. Commun. **184** (2000) 113-118.
- [11] C. Zheng, T. C. Petersen, H. Kirmse, W. Neumann, M. J. Morgan and J. Etheridge, *Axicon lens for electrons using a magnetic vortex: the efficient generation of a Bessel beam*, Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 174801.
- [12] D. McGloin and K. Dholakia, *Bessel beams: diffraction in a new light*, Contemp. Phys. **46** (2005) 15-28.
- [13] J. Durnin, *Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory*, J. Opt. Soc. Am. A **4** (1987) 651-654.
- [14] O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, I. Julián-Macías, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza and C. T. Sosa-Sánchez, *Wavefronts and caustic associated with Durnin's beams*, Journal of Optics, **19** (2016) 015603.
- [15] J. Durnin, J. J. Miceli, Jr., and J. H. Eberly, *Diffraction-free beams*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1499-1501.

- [16] M.V. Berry and N.L. Balazs, *Nonspreading wave packets*, Am. J. Phys. **47** (1979) 264-267.
- [17] G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides, *Accelerating finite energy Airy beams*, Opt. Lett. **32** (2007) 979-981.
- [18] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu and D. N. Christodoulides, *Observation of Accelerating Airy Beams*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 213901.
- [19] M. A. Bandres, *Accelerating beams*, Opt. Lett. **34** (2009) 3791-3793.
- [20] I. Kaminer, M. Segev and D. N. Christodoulides, *Self-Accelerating Self-Trapped Optical Beams*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 213903.
- [21] M. A. Bandres, I. Kaminer, M. S. Mills, B.M. Rodríguez-Lara, E. Greenfield, M. Segev and D. N. Christodoulides, *Accelerating Optical Beams*, Optics and Photonics News, **24** (2013) 30-37.
- [22] M. A. Alonso and M. A. Bandres, *Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors. II: Three dimensions*, Optics Express, **22** (2014) 14738-14749.
- [23] E. Espíndola-Ramos, G. Silva-Ortigoza, C. T. Sosa-Sánchez, I. Julián-Macías, A. González-Juárez, O. de J. Cabrera-Rosas, P. Ortega-Vidals, C. Rickenstorff-Parrao and R. Silva-Ortigoza, *Classical characterization of quantum waves: comparison between the caustic and the zeros of the Madelung-Bohm potential*, JOSA A, **38** (2021) 303-312.
- [24] Born, M., and Wolf, E. *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [25] J. Castro-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, M. Marcelino-Aranda, P. OrtegaVidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza and R. Suárez-Xique, *The refraction and reflection laws from a complete integral of the eikonal equation and Huygens' principle*, J. Opt. 17 015601 (2015)
- [26] O. de J. Cabrera-Rosas, P. Ortega-Vidals, S. A. Juárez-Reyes and G. Silva-Ortigoza, *Curvatures of the refracted wavefronts and Ronchigrams for a plano arbitrary lens*, JOSA A, **33** (2016) 1760-1768.
- [27] J. Oprea, *Differential Geometry and Its Applications* (Pearson, 1987).
- [28] J. I. Galindo-Rodríguez and G. Silva-Ortigoza, *Wavefronts, light rays and caustic associated with the refraction of a plane wavefront by a conospherical lens*, Journal of Optics, **23** (2021) 125605.