



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Ciclos en Hipergrafos

Que para obtener el grado de:
Maestría en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Fernanda López Montes

Director de tesis:
Dr. Carlos Guillén Galván

Noviembre, 2022

*Dedicada a mis padres
y hermanos con mucho cariño*

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mis padres Fernando y Teresa, por todo el amor y el apoyo que me han brindado a lo largo de la vida, por todas sus enseñanzas que me han servido a mejorar mi formación académica. A mis hermanos Andrea, Emiliano y Jorge que son parte importante en mi vida, ya que sus consejos y ánimos fueron de gran ayuda durante la realización de la tesis. Agradezco a Dios por permitirme llegar a esta etapa.

A mis amigos que siempre han estado a mi lado apoyándome, brindando su confianza y por regalarme un poco de su valioso tiempo.

A mi director de tesis, Dr. Carlos Guillén Galván, por apoyarme en todo momento, por su tiempo dedicado a la elaboración y revisión de la tesis, sin su dirección esto no habría sido posible.

A los miembros del jurado: Dr. Agustín Contreras Carreto, Dr. Juan

Alberto Escamilla Reyna, Dr. César Bautista Ramos y Dr. Rafael Lemuz López, por sus valiosas observaciones y correcciones para este trabajo.

Finalmente, agradezco a CONACYT por el apoyo brindado para realizar mis estudios de posgrado y así culminar otra etapa más en mi vida académica.

Introducción

Los hipergrafos son sistemas de conjuntos finitos y forman, probablemente, el concepto más general en las matemáticas discretas. Fue a principios de la década de 1960 que los hipergrafos se convirtieron en una teoría. Por lo tanto, la teoría de los hipergrafos es una teoría reciente. Originalmente, desarrollado en Francia por Claude Berge en 1960, es una generalización de la teoría de grafos. Ésta teoría nos ayuda a modelar redes, redes biológicas, estructura de datos y situaciones prácticas en diferentes ciencias en un entorno mucho más general que los grafos. Además, ayudan a encontrar soluciones óptimas para muchos nuevos problemas de optimización.

Como extensión de los grafos se obtienen resultados sobre árboles, camino, ciclo, etc, de hipergrafos. En particular, el concepto de aciclicidad de un grafo se ha extendido a varias nociones diferentes de aciclicidad en hipergrafos, en orden creciente de generalidad:

γ -aciclicidad, β -aciclicidad, y α -aciclicidad,

Estas nociones han despertado gran interés en muchos campos, por ejemplo en el campo computacional existen muchos problemas que son NP-completos, esto es, se desconocen algoritmos tratables que los resuelvan, sin embargo si éste satisface la condición de aciclicidad se tienen algoritmos de tiempo polinomial. Por ejemplo, en el área de bases de datos, Beeri et al. [1] introduce una clase especial de esquemas de bases de datos, llamados *aciclicos*. Fagin [7] demuestra que esta clase goza de una propiedad deseable en el área de las bases de datos, de donde la clase de esquemas de bases de datos aciclicas

es una clase importante natural, ya que esta puede ser caracterizada en un número de caminos, cada uno correspondiendo a una propiedad deseable de esquemas de bases de datos o a una propiedad natural teórico gráfica. Se ha visto en el área de bases de datos que existen varios fenómenos patológicos indeseables que pueden surgir en los esquemas de bases de datos generales pero no para esquemas de bases de datos acíclicas [1]. Para esquemas acíclicos existen algoritmos eficientes, esto es de tiempo polinomial, para resolver problemas que son NP-completos en el caso irrestricto [13].

El estudio de propiedades de aciclicidad en hipergrafos cae en clases de equivalencia, las cuales corresponden naturalmente a “grados de aciclicidad” en hipergrafos.

A diferencia de la situación de los grafos ordinarios no dirigidos, hay una serie de definiciones naturales no equivalentes de aciclicidad para los hipergrafos. Es conveniente hablar de "grados de aciclicidad", en lugar de simplemente "tipos de aciclicidad", ya que existe un orden lineal de las fuerzas de los tipos de aciclicidad que se consideran; la más débil (menos restrictiva) es la noción α -aciclicidad. [7]

El contenido de la tesis es el siguiente. En el capítulo 1 se establecen los conceptos básicos de la teoría de grafos como lo son: camino, ciclo, ciclo hamiltoniano, grafos conexos, árbol, punto de articulación, junto con la notación necesaria y algunos ejemplos, que son de utilidad para el desarrollo del trabajo.

En el capítulo 2 se introduce algunas propiedades y conceptos básicos de la teoría de hipergrafos; los diferentes tipos de subhipergrafos, el conjunto de articulación, árbol adjunto, camino, ciclo conceptos que son generalizaciones de los grafos los cuales nos ayudará para el desarrollo del capítulo 3.

En el capítulo 3 se representa las definiciones de aciclicidad de los hipergrafos como lo es α -aciclicidad, Berge-aciclicidad, β -aciclicidad, γ -aciclicidad así como algunas equivalencias. En este mismo capítulo se presentan las relaciones entre varios grados de aciclicidad.

Índice general

Índice de figuras

\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{Q}	Conjunto de los números racionales.
\mathbb{I}	Conjunto de los números irracionales.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
G	Grafo.
$V(G)$	Conjunto de vértices del grafo G .
$E(G)$	Conjunto de aristas del grafo G .
P	Camino.
$N(v)$	Conjunto de vecinos de un vértice.
$N[v]$	$N(v) \cup \{v\}$.
K_n	Grafo completo de n vértices.
$ G $	Orden de G .
$\ G\ $	Número de aristas de G .
$d(v)$	Grado del vértice v .
$d(x, y)$	Distancia entre los vértices x a y .
P_k	Camino de longitud k de G .
C_k	Ciclo de longitud k .
$\delta(G)$	Grado mínimo de G .
$\Delta(G)$	Grado máximo de G .
H	Hipergrafo.
$V(H)$	Conjunto de vértices del hipergrafo H .
$E(H)$	Conjunto de aristas del hipergrafo H .
$d(H)$	Diámetro del hipergrafo H . xv
$r(H)$	Rango de H .
$cr(H)$	Co-rango de H .

CAPÍTULO 1

Preliminares

La teoría de grafos es un área importante de las matemáticas. El inicio de ésta teoría tuvo lugar en 1736, en un artículo de Leonhard Euler. El trabajo surgió de un problema conocido como el problema de los puentes Königsberg. Más tarde, los grafos aparecieron en ingeniería eléctrica, química, entre otras. Hoy en día, la teoría de grafos es una de las ramas más desarrolladas de la álgebra moderna con amplias aplicaciones a problemas combinatorios y a problemas algebraicos clásicos. En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos, como son, de grafo, subgrafo, subgrafo inducido, camino, ciclo, árbol, entre otros. Nos basamos principalmente en [5].

1.1. Grafos

Con los símbolos \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} y \mathbb{R} denotamos los conjuntos de los números enteros, números enteros no negativos, números racionales, números irracionales y números reales, respectivamente. Con $[A]^k$ denotamos el conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos, por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, entonces $[A]^0 = \{\emptyset\}$, $[A]^1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $[A]^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $[A]^3 = \{A\}$ y $[A]^k = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3\}$.

Definición 1.1. Un *grafo simple* G es un par (V, E) de conjuntos donde los elementos de V son llamados vértices o nodos del grafo y los elementos de E son llamados aristas o líneas del grafo, tal que $E \subseteq [V]^2$.

Es común representar un grafo dibujando un punto para cada vértice y unir dos de ellos por una línea si los dos vértices correspondientes forman una arista. Las aristas no necesariamente tienen que ser líneas rectas, pueden ser arcos o segmentos curvos. El conjunto de vértices de un grafo G lo denotaremos por $V(G)$, y su conjunto de aristas como $E(G)$. Una arista $\{v_1, v_2\}$ usualmente es escrita como v_1v_2 .

Ejemplo 1.1. Sea G el grafo de la figura 1.1, el par $G = (V, E)$ está compuesto por los conjuntos $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$.

Un vértice v es incidente con una arista e si $v \in e$; entonces e es una arista en v . Los dos vértices incidentes con una arista son sus vértices extremos o extremos, y una arista une sus extremos.

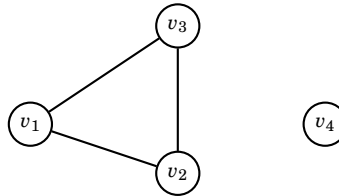


Figura 1.1: Grafo simple $G = (V, E)$.

Definición 1.2. Sea G un grafo; dos vértices v_1, v_2 en $V(G)$ son *adyacentes* o *vecinos*, si v_1v_2 es una arista de $E(G)$ y dos aristas distintas son *adyacentes* si tienen un vértice en común.

Todos los vecinos de un vértice v dado se denominan vecindad de v . La vecindad de v se denota por $N(v)$. Por ejemplo, en la figura 1.1, $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$. Si todas las parejas de vértices en $V(G)$ son adyacentes, entonces G es *completo*. Un grafo completo de n vértices se denota por K^n ; un K^3 se llama un triángulo.

El *orden* de un grafo G es su número de vértices, denotado por $|G|$; y su número de aristas es denotado por $\|G\|$. Sea $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Si $G \cap G' = \emptyset$, entonces G y G' son *disjuntos*. Si G y G' son disjuntos, denotamos por $G * G'$ el grafo obtenido de $G \cup G'$ al unir todos los vértices de G con todos los vértices de G' . Por ejemplo, $K^2 * K^3 = K^5$. El complemento \overline{G} de G es el grafo sobre V con el conjunto de aristas $[V]^2 \setminus E$.

Definición 1.3. Un grafo $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* del grafo $G = (V, E)$ si y solo si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, y se denota por $G' \subseteq G$.

Ejemplo 1.2. Sean G_1, G_2 y G_3 grafos como se muestran en la figura 1.2. Afirmamos que $G_2 \subseteq G_3$, ya que $V''(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $V'(G_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ por tanto $V'(G_2) \subseteq V''(G_3)$, además $E''(G_3) = \{v_2v_4, v_3v_4, v_1v_3, v_1v_5, v_5v_4\}$ y $E'(G_2) = \{v_1v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$ por tanto $E'(G_2) \subseteq E''(G_3)$. Observe que también $G_2 \subseteq G_1$.

Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $v_1v_2 \in E$ con $v_1, v_2 \in V'$, entonces G' es un *subgrafo inducido* de G . Decimos que V' induce o expande G' en G , y escribimos $G' := [V']$. Un subgrafo no es inducido si falta al menos una arista de G con ambos extremos en V' .

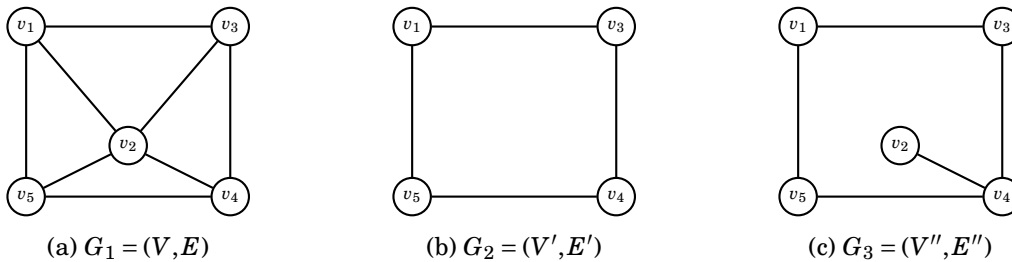


Figura 1.2: G_3 es subgrafo de G_1 y también de G_2 .

Notemos que en la figura 1.2, G_2 es un subgrafo inducido de G_1 , pero G_3 no lo es; ya que $v_2v_5 \in E(G_1)$ con $v_2, v_5 \in V''(G_3)$ pero $v_2v_5 \notin E''(G_3)$. Si $U \subseteq V$ es cualquier conjunto de vértices, entonces $G[U]$ es el grafo sobre U cuyas aristas son precisamente las aristas de G con ambos extremos en U .

Definición 1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo, y $v \in V$ un vértice, decimos que el número de aristas incidentes con v es el *grado del vértice*, denotado por $d(v)$. Un vértice de grado 0 se llama *aislado*, en la figura 1.1 el vértice v_4 es aislado.

El número $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$ es el *grado mínimo* de G ; el número $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$ su *grado máximo*. Si todos los vértices de G tienen el mismo grado k , entonces G es k -regular o regular. Un grafo se llama *cúbico* si es 3-regular.

Definición 1.5. Sea $r \geq 2$ un entero. Un grafo $G = (V, E)$ es llamado r -partito si V admite una partición en r clases tal que cada arista tiene sus extremos en diferentes clases, es decir, dos vértices en la misma clase no son adyacentes.

Un grafo G que es “2-partito”, por lo general se le llama *bipartito*. Un grafo r -partito en el cual cada par de vértices en diferentes clases son adyacentes se llama *completo*.



Figura 1.3: Grafo bipartito completo, $K_{3,3} = K_3^2$.

Los grafos que son r -partito completos para toda r se les llaman grafos *multipartitos completos*. El grafo r -partito completo $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$ es denotado por K_{n_1, \dots, n_r} ; si $n_1 = \dots = n_r =: s$ abreviamos esto a K_s^r . Por lo tanto, K_s^r es el grafo r -partito completo en el que cada clase contiene exactamente s vértices. Los grafos de la forma $K_{1,n}$ se llaman *estrellas*; el vértice en la clase del singular de $K_{1,n}$ es el *centro* de la estrella. En la figura 1.3 tenemos un ejemplo de un bipartito completo.

Una idea que surge de forma natural cuando se estudia un grafo es la de camino.

Definición 1.6. Considérese un grafo $G = (V, E)$. Un *camino* P en G que va de los vértice w_0 a w_k es de la forma:

$$P = w_0w_1 \cup w_1w_2 \cup \dots \cup w_{k-2}w_{k-1} \cup w_{k-1}w_k.$$

donde $w_0, w_1, \dots, w_k \in V$ y $w_0w_1, w_1w_2, \dots, w_{k-2}w_{k-1}, w_{k-1}w_k \in E$.

También es importante notar que en la definición de camino no se prohíbe repetir vértices o aristas. Los vértices w_0 y w_k están ligados por P y son llamados sus extremos, los vértices w_1, \dots, w_{k-1} son los vértices interiores de P . Si el camino inicia y termina en el mismo vértice, es decir $w_0 = w_k$ decimos que es un *camino cerrado*. El número de aristas de un camino es su *longitud*, y el camino de longitud k es denotado por P_k . Notar que k puede ser cero, por tanto, $P_0 = K_1$. En ocasiones, para denotar un camino P daremos únicamente la secuencia de sus vértices, es decir, $P = v_0v_1, \dots, v_k$ y decimos que P es un camino desde v_0 a v_k , o bien, para $0 \leq i \leq j \leq k$ escribiremos la notación $v_iPv_j := v_i, \dots, v_j$.

Definición 1.7. Un *camino simple* es aquel que no tiene tres de sus aristas diferentes

compartiendo un mismo vértice, es decir, no repite vértices en su trayecto.

Definición 1.8. Un *camino elemental* es aquel que nunca pasa más de una vez por un mismo vértice.

Definición 1.9. Sea G un grafo, un *ciclo* en G es un camino cerrado y simple.

La *longitud* de un ciclo es el número de aristas (o vértices) y el ciclo de longitud k es llamado k -*ciclo*, denotado por C_k . Una vez más, un 3-ciclo se conoce como un triángulo. Un ciclo de longitud par es un ciclo par, y un ciclo de longitud impar es un ciclo impar. Una arista que une dos vértices de un ciclo pero que no es en sí misma una arista del ciclo es un *cuerda* de ese ciclo. Por lo tanto, un ciclo inducido en G , un ciclo en G que forma un subgrafo inducido, es uno que no tiene cuerdas.

Definición 1.10. Un *pseudo-ciclo* es una cadena $\mu = (v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n)$ cuyos dos extremos son el mismo vértice y cuyas aristas no son necesariamente distintas.

En la figura 1.4 podemos observar que un pseudo-ciclo del grafo G es la siguiente cadena $\mu = (v_2v_3, v_3v_6, v_6v_4, v_4v_3, v_3v_2)$.

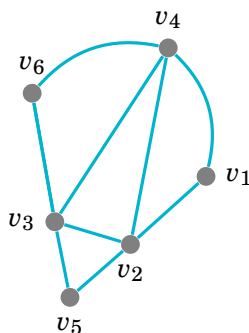


Figura 1.4: Grafo G .

Una de las familias de grafos más importantes es la de los grafos conexos.

Definición 1.11. Un grafo G no vacío es *conexo* si cualquier par de vértices están unidos por al menos un camino en G .

Un grafo que no es conexo se dice que es *disconexo*, éste se forma por varias particiones conexas, a dichas particiones se les denomina *componentes conexas*.

Ejemplo 1.3. En la figura 1.5 claramente el grafo G_1 es conexo ya que para cualquier par de vértices que tomemos existe un camino que los une y el grafo G_2 es disconexo con

dos componentes conexas.

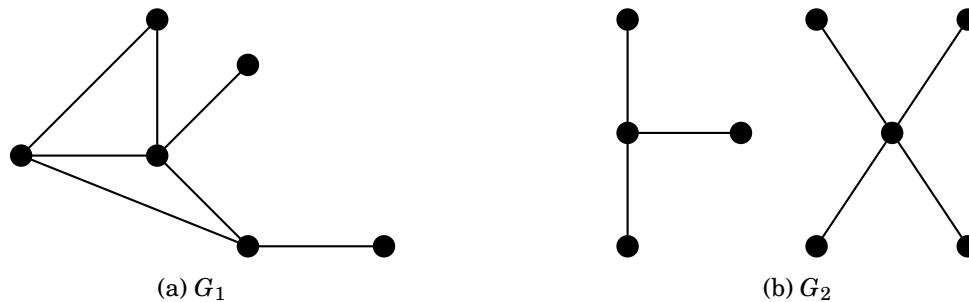


Figura 1.5: El grafo G_1 es conexo, y G_2 no lo es.

Los problemas propuestos por Hamilton en su juego icosiano dieron lugar a conceptos en la teoría de grafos, que finalmente se convirtieron en un tema de estudio popular entre los matemáticos. Uno de estos problemas consiste en encontrar caminos que pasen por varios puntos, una sola vez, empezando y terminando en un mismo lugar. La parte de la teoría de grafos que resuelve este problema es la teoría de los ciclos Hamiltonianos. Si no exigimos coincidencia de los extremos del camino obtenemos una variante de este problema, que podemos resolver con lo que se conoce como caminos hamiltonianos.

Decimos que un ciclo es hamiltoniano si contiene a todos los vértices del grafo y, análogamente, un camino es hamiltoniano si pasa por todos los vértices del grafo. Si un grafo contiene un ciclo hamiltoniano, entonces se llama grafo hamiltoniano. El problema de reconocer grafos hamiltonianos es muy difícil. Hasta el momento no existen criterios para la caracterización de grafos hamiltonianos.

Definición 1.12. Un *circuito* es un camino cerrado que repite vértices pero no repite aristas. Un circuito es llamado *Euleriano* si no repite aristas y además contiene a todas las del grafo.

Se considera que los árboles tienen su origen en 1857 cuando el matemático inglés Arthur Cayley los utilizó para contar un cierto tipo de estructuras químicas. Los árboles son importantes para la comprensión de la estructura de los grafos y desde su origen ha demostrado tener un gran número de aplicaciones en áreas como la química molecular y las ciencias de la computación, en donde se utilizan para el diseño de algoritmos y estructuras de datos, respectivamente.

Definición 1.13. Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico. La unión disjunta de ellos se denomina *bosque*.

Un bosque puede ser visto como un grafo cuyas componentes son árboles, en la figura 1.5 podemos ver que el grafo G_1 es un árbol y G_2 es un bosque. En un árbol los vértices de grado 1 son sus *hojas*, los otros son sus *vértices internos*.

Definición 1.14. Un *árbol con raíz* o *árbol enraizado* es un árbol en el cual un vértice en particular se designa como *raíz*.

Los árboles con raíz se representan de forma tal que el vértice raíz se coloca encima de los restantes, los cuales se sitúan por niveles según su distancia a la raíz.

Sea G un grafo. Un subgrafo conexo maximal de G es una componente de G . Las componentes son subgrafos inducidos, y su conjunto de vértices particiona V .

Definición 1.15. Un vértice $v \in V$ en un grafo G no dirigido se llama *punto de articulación* si al eliminar el vértice y todas las aristas incidentes a v hace que el grafo sea desconexo.

En el grafo G_1 de la figura 1.6 (a) el vértice v_2 es un punto de articulación ya que al eliminar v_2 y todas las aristas incidentes a él, es decir, v_1v_2, v_2v_6, v_2v_3 no existe un camino de los vértices v_3, v_4 y v_6 a los vértices v_5 y v_1 , lo que implica que el grafo G_1 se divide en 2 componentes; uno formado por los vértices v_5 y v_1 y otro formado por los vértices v_3, v_6 y v_4 como se puede observar en la figura 1.6 (b).



Figura 1.6: v_2 punto de articulación en G_1

Definición 1.16. Un *bloque* de un grafo G es un subgrafo conexo maximal sin puntos de articulación.

En el grafo G_1 que aparece en la figura 1.6 podemos observar que el subgrafo inducido por $\{v_1, v_5\}$ es un bloque, pues no tiene punto de articulación. De igual forma el subgrafo inducido por el conjunto $\{v_3, v_6, v_4\}$ forma otro bloque. En cambio el subgrafo inducido por $\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$ no es un bloque pues contiene el vértice v_2 el cual es un punto de articulación del conjunto.

Definición 1.17. Sea G un grafo. Los vértices de $L(G)$ son las aristas de G y dos vértices de $L(G)$ son unidos por una arista si y sólo si las aristas correspondientes de G son adyacentes en G . El grafo $L(G)$ se llama *grafo línea*.

Ejemplo 1.4. En la figura 1.7 en el inciso (a) se muestra un grafo G y en el inciso (c) su grafo línea $L(G)$. Cada vértice del grafo línea es una arista del grafo G , es decir, el vértice E del grafo línea $L(G)$ corresponde a la arista entre los vértices v_1 y v_2 de G .

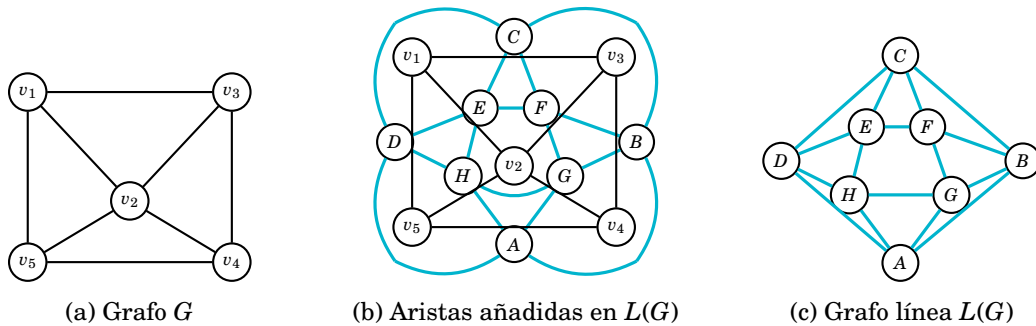


Figura 1.7: Grafo línea.

CAPÍTULO 2

Hipergrafos

En las últimas décadas, la teoría de hipergrafos ha demostrado ser de gran interés en aplicaciones a problemas del mundo real, son una generalización de los grafos, por lo que muchas de las definiciones de los grafos se llevan literalmente a los hipergrafos. En este capítulo presentamos nociones básicas sobre hipergrafos.

Definición 2.1. Un *hipergrafo* H es un par $H = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E una familia de subconjuntos de V , llamado *hiperaristas*. Denotaremos a V por $V(H)$ y a E por $E(H)$.

Como bien se menciona un hipergrafo es una generalización de un grafo cuyas aristas en este caso son llamadas hiperaristas las cuales pueden relacionar cualquier cantidad de vértices a diferencia de un grafo que sólo relaciona un máximo de dos vértices. Un hipergrafo cuya hiperarista tiene aridad 2 (cada hiperarista contiene solo dos vértices) es un grafo.

El *orden del hipergrafo* $H = (V, E)$ es la cardinalidad de V , esto es, $|V| = n$; y su *tamaño* es la cardinalidad de E , es decir, $|E| = m$. Por definición, el *hipergrafo vacío*, es el hipergrafo tal que $V = \emptyset; E = \emptyset$. Dos vértices en un hipergrafo son adyacentes si existe una hiperarista que contenga a ambos vértices. En particular, si $\{v\}$ es una hiperarista entonces v es adyacente a sí mismo. Dos hiperaristas en un hipergrafo son incidentes si

su intersección es no vacía.

Sea $(e_j)_{j \in J}, J \subseteq I$ (I es un conjunto finito de índices) una subfamilia de hiperaristas de $E = (e_i)_{i \in I}$, denotamos el conjunto de vértices que pertenecen a $\bigcup_{j \in J} e_j$ por $V(\bigcup_{j \in J} e_j)$, pero denotaremos por e a $V(e)$.

Si

$$\bigcup_{i \in I} e_i = V$$

el hipergrafo no tiene *vértice aislado*, donde un vértice v está aislado si

$$v \in V \setminus \bigcup_{i \in I} e_i$$

Una hiperarista $e \in E$ tal que $|e| = 1$ es un *bucle*.

Sea (V, E) un hipergrafo. Su reducción (V, E') se obtiene quitando de E cada hiperarista que sea un subconjunto propio de otra hiperarista. Un hipergrafo se reduce si es igual a su reducción, es decir, si ninguna hiperarista está incluida en otra.

La *reducción de un hipergrafo* es el proceso que hace simple un hipergrafo, es decir,

$$\text{si } e_i \subseteq e_j, i \neq j \text{ se elimina } e_i$$

en este caso se dice que el hipergrafo es *reducido*. Un hipergrafo simple no tiene hiperaristas repetidas.

A continuación, presentamos y definimos los siguientes tipos de subhipergrafos.

Definición 2.2. Sea H un hipergrafo y sea X un subconjunto de $V(H)$. El *conjunto de hiperaristas parciales inducido por X en H* es $E' = \{e' | e' = e \cap X, e \in E\} - \{\emptyset\}$. E' es llamado un conjunto vértice–generado.

Sea $H = (V, E)$ un hipergrafo :

- Dado un subconjunto $V' \subseteq V$, el *subhipergrafo H'* es el hipergrafo

$$H' = (V', E' = (e_j)_{j \in J}) \text{ tal que para toda } e_j \in E' : e_j \subseteq V';$$

- El *subhipergrafo inducido* $H(V')$ del hipergrafo H donde $V' \subseteq V$ es el hipergrafo $H(V') = (V', E')$ tal que E' esta definido como:

$$E' = \{e_i \cap V' \neq \emptyset \mid e_i \in E \text{ y, } e_i, \text{ es un bucle o } |e_i \cap V'| \geq 2\}.$$

- Dado un subconjunto $V' \subseteq V$, un *hipergrafo parcial* generado por $J \subseteq I, H'$ de H es un hipergrafo

$$H' = (V', (e_j)_{j \in J})$$

donde $\bigcup_{j \in J} e_j \subseteq V'$. Notar que puede suceder $V' = V$.

La *estrella* $H(v)$ centrada en v es la familia de hiperaristas $(e_j)_{j \in J}$ que contiene a v ; $d(v) = |J|$ es el grado de v excepto para un bucle $\{v\}$ donde el grado $d(v) = 2$. Si cada vértice tiene el mismo grado, decimos que el hipergrafo es *regular* o k -regular, $d(v) = k$. Si la familia de hiperaristas es un conjunto, es decir, si $i \neq j$ si y solo si $e_i \neq e_j$, decimos que H no tiene hiperaristas repetidas. El *rango* $r(H)$ de H es la cardinalidad máxima de una hiperarista en el hipergrafo: $r(H) = \max_{i \in I} |e_i|$, la cardinalidad mínima de una hiperarista es el *co-rango* $cr(H)$ de H : $cr(H) = \min_{i \in I} |e_i|$. Si $r(H) = cr(H) = k$ entonces el hipergrafo es k -uniforme o *uniforme*.

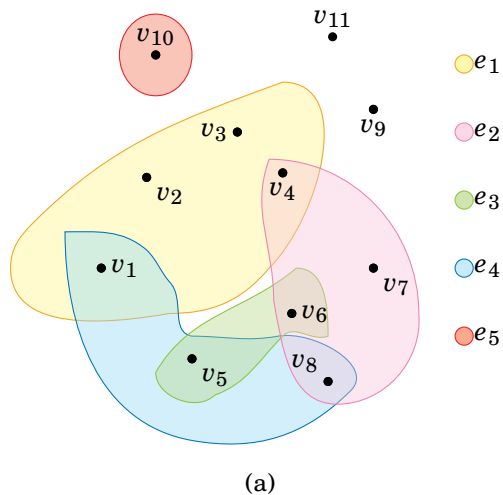
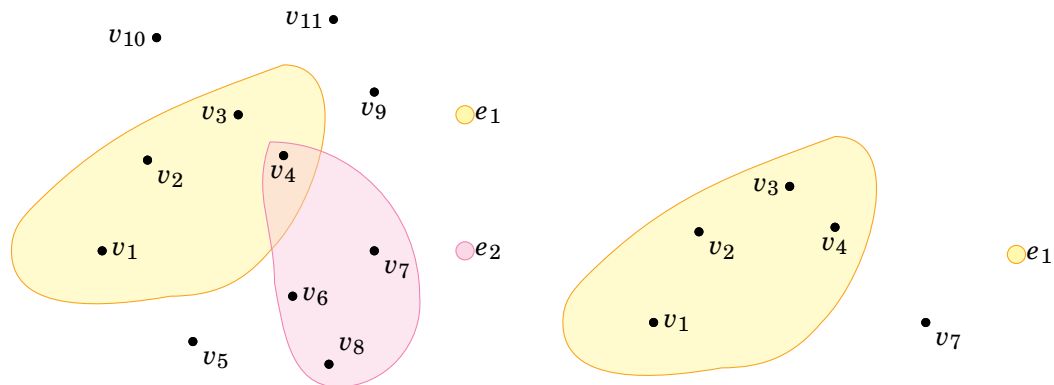
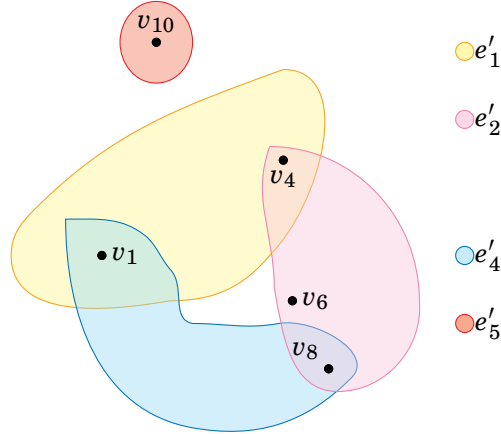


Figura 2.1: Hipergrafo $H = (V, E)$.

Ejemplo 2.1. El hipergrafo H de la figura 2.1 es de orden 11 y tamaño 5, tiene 1 bucle e_5 ; 2 vértices aislados v_9, v_{11} . El rango $r(H) = 4$, el co-rango $cr(H) = 1$. El grado de v_8 es 2. Se puede observar que $H' = (V, \{e_1, e_2\})$ es un hipergrafo parcial generado por $J = \{1, 2\}$, como se muestra en la figura 2.2 (a). Ahora, sea $V' = \{v_1, v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$; $E' = \{e'_1, e'_2, e'_4, e'_5\}$ con $e'_1 = e_1 \cap V' = \{v_1, v_4\}$, $e'_2 = e_2 \cap V' = \{v_4, v_6, v_8\}$, $e'_4 = e_4 \cap V' = \{v_1, v_8\}$, $e'_5 = e_5 \cap V' = \{v_{10}\}$ entonces $H = (V', E')$ es un subhipergrafo inducido del hipergrafo $H = (V, E)$, que se muestra en la figura 2.2 (c). Notar que e_3 no es una hiperarista para este subhipergrafo inducido. Como se muestra en la figura 2.2 (b) $H'' = (V'', E'')$ es un subhipergrafo de H donde $V'' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ y $E'' = \{e_1\}$ con v_7 como vértice aislado.



(a) Un hipergrafo parcial H' del hipergrafo 2.1. (b) Un subhipergrafo H'' del hipergrafo 2.1.



(c) Un subhipergrafo inducido $H = (V', E')$ del hipergrafo 2.1.

Figura 2.2: Ejemplo de un hipergrafo, un subhipergrafo y un subhipergrafo inducido de H figura 2.1.

Definición 2.3. Sea H un hipergrafo. Un camino P en H desde v_0 a v_k , es una secuencia alternada de vértice–hiperarista:

$$v_0 = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_s, e_s, v_{s+1} = v_k$$

tal que

- $v_1, v_2, \dots, v_s, v_{s+1}$ son vértices distintos con la posibilidad de que $v_1 = v_{s+1}$;
- e_1, e_2, \dots, e_s son hiperaristas distintas;
- $v_i, v_{i+1} \in e_i$ para $i = 1, 2, \dots, s$.

El entero s es la *longitud* del camino P . Note que si hay un camino de v_0 a v_k también hay un camino de v_k a v_0 . En este caso decimos que P *conecta* a v_0 y v_k . Los hipergrafos conectados se definen de manera análoga a los grafos conectados utilizando la existencia de caminos entre cada par de vértices. Un hipergrafo es *conectado* si para cualquier par de vértices, existe un camino que conecta estos dos vértices; en otro caso no está conectado el cual podemos decir que está *desconectado*.

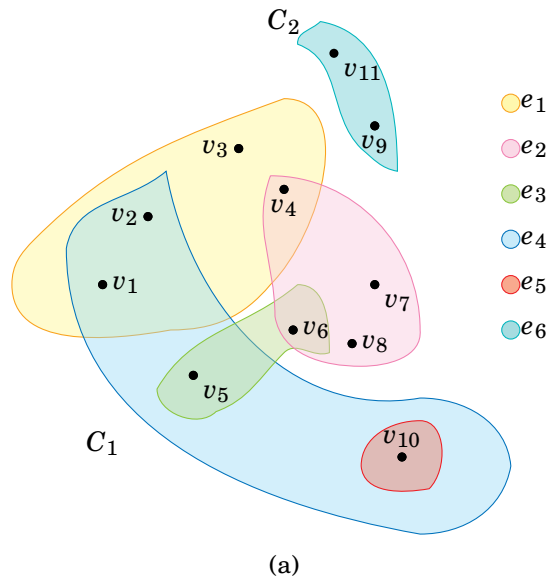


Figura 2.3: Hipergrafo $H = (V, E)$.

La *distancia* $d(v_0, v_k)$ entre dos vértices v_0 y v_k es la longitud mínima de un camino que conecta v_0 y v_k , si no existe un camino de v_0 a v_k (o de v_k a v_0) definimos $d(v_0, v_k) =$

∞ . Sea H un hipergrafo, una *componente conectada* es un conjunto máximo de vértices $X \subseteq V(H)$ tal que para todo $v_0, v_k \in X, d(v_0, v_k) \neq \infty$. El *diámetro* $d(H)$ de H está definido por

$$d(H) = \max\{d(v_0, v_k) \mid v_0, v_k \in V\}.$$

Ejemplo 2.2. El hipergrafo H de la figura 2.3 se puede observar que tiene dos componentes conectadas, C_1, C_2 . $P = v_{10}, e_4, v_5, e_3, v_6, e_2, v_4, e_1, v_3$ es un camino de v_{10} a v_3 , $P' = v_{10}, e_4, v_1, e_1, v_3$ es también un camino de v_{10} a v_3 y la distancia $d(v_{10}, v_3) = 2$ es la longitud de P' . Notemos que la distancia $d(v_{10}, v_3)$ es también la longitud del camino $P'' = v_{10}, e_4, v_2, e_1, v_3$.

Definición 2.4. Sea H un hipergrafo. Un *ciclo* de H es una secuencia de hiperaristas $(e_{p1}, e_{p2}, \dots, e_{pk})$ que satisface las siguientes condiciones:

- $e_{p1} = e_{pk}$
- para todo $2 \leq i \leq k - 2$ y $e \in E(H)$ arbitrario,

$$((e_{pi-1} \cap e_{pi}) \cup (e_{pi} \cap e_{pi+1}) \cup (e_{pi+1} \cap e_{pi+2})) \setminus e \neq \emptyset.$$

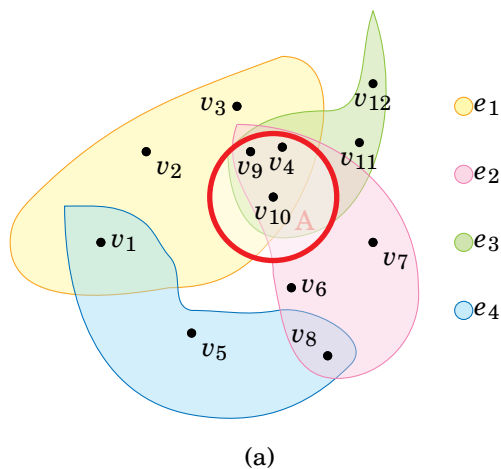


Figura 2.4: El conjunto A es un conjunto de articulación.

El hipergrafo H de la figura 2.4 con la secuencia (e_1, e_3, e_2, e_4) de hiperaristas forman un ciclo de H , ya que si tomamos $e_2 \in E(H)$ se sigue que $(e_1 \cap e_3) \cup (e_3 \cap e_2) \cup (e_2 \cap e_4) \setminus e_2 \neq \emptyset$.

Definición 2.5. Sea H un hipergrafo. Un subconjunto A de $V(H)$ es un *conjunto de articulación* si se verifican las siguientes dos propiedades:

- existen dos hiperaristas e_1 y e_2 tal que $A = e_1 \cap e_2$;
- el subhipergrafo inducido $H(V \setminus A)$ es no conectado.

El conjunto de articulación en un hipergrafo juega el mismo papel que el punto de articulación en un grafo. Podemos generalizar esta noción a un hipergrafo no conectado: el subhipergrafo inducido $H(V \setminus A)$ tiene más componentes conectadas que H . En la figura 2.4 se encuentra un ejemplo de conjunto de articulación, el cual se puede observar que dicho conjunto es el conjunto A formado por los vértices v_9, v_4, v_{10} .

Definición 2.6. Un *árbol adjunto* de un hipergrafo H es, si existe, un árbol enraizado $T = (E, J)$ cuyos nodos son las hiperaristas de $E(H)$ y tal que si un vértice $v \in V$ pertenece a dos hiperaristas e_i y e_j , está contenido en todos los nodos del único camino de T que conecta e_i con e_j .

Así, el conjunto de vértices del árbol que contienen a v induce un subárbol conectado de T . La figura 2.5 presenta un árbol adjunto del hipergrafo dado en la figura 2.6.

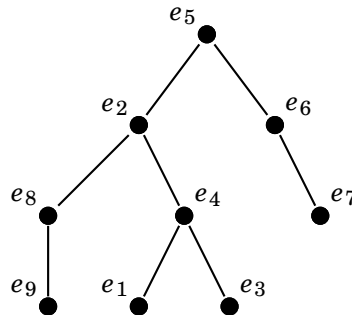


Figura 2.5: Árbol adjunto del hipergrafo 2.6.

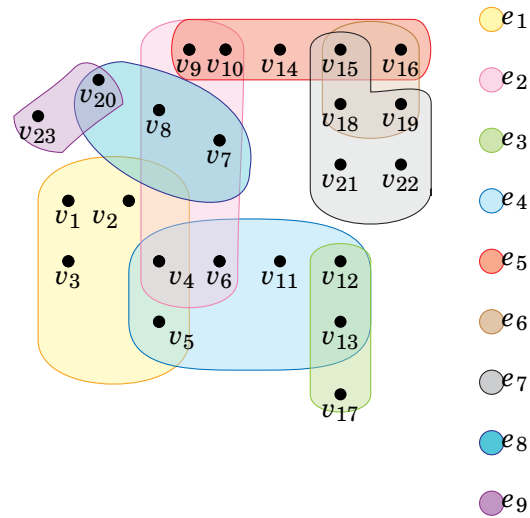
Un árbol adjunto T de un hipergrafo H tiene *ramas disjuntas* si las hiperaristas de H que pertenecen a diferentes ramas de T son disjuntas.

Definición 2.7. H satisface la propiedad *intersección recorrida* si existe un ordenamiento σ sobre las hiperaristas tal que para cada $2 \leq \sigma(i) \leq |E|$, existe $\sigma(i_0) < \sigma(i)$ tal que:

$$e_{\sigma(i)} \cap \left(\bigcup_{\sigma(j) < \sigma(i)} e_{\sigma(j)} \right) \subseteq e_{\sigma(i_0)}.$$

La intersección de una hiperarista con las que la preceden en el ordenamiento está contenida en una de estas hiperaristas. El hipergrafo de la figura 2.6 satisface la propiedad intersección recorrida. Con el ordenamiento $\sigma = (e_2, e_3, e_1, e_8, e_5, e_4, e_6)$ la intersección

de una hiperarista con las que le preceden en el ordenamiento está contenida en una de ellas.



(a)

Figura 2.6: Hipergrafo $H = (V, E)$.

Definición 2.8. Sea H un hipergrafo tal que $E(H) \neq \emptyset$. El *grafo-línea* (o grafo representativo, también grafo intersección) de H es el grafo $L(H) = (V', E')$ tal que

- (1) $V' := E(H)$
- (2) $\{i, j\} \in E'$ ($i \neq j$) si y sólo si $e_i \cap e_j \neq \emptyset$ donde $e_j, e_i \in E$.

En la figura 2.7 se muestra el grafo representativo del hipergrafo de la figura 2.6. Los vértices del grafo línea son las hiperaristas de H y hay una arista entre dos vértices si su intersección es no vacío. $L(H)$ representa las intersecciones en H .

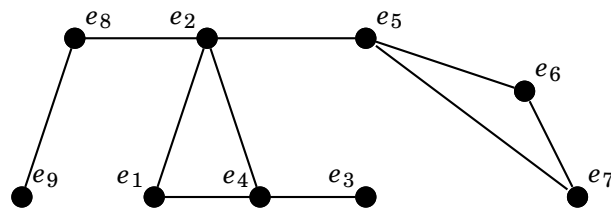
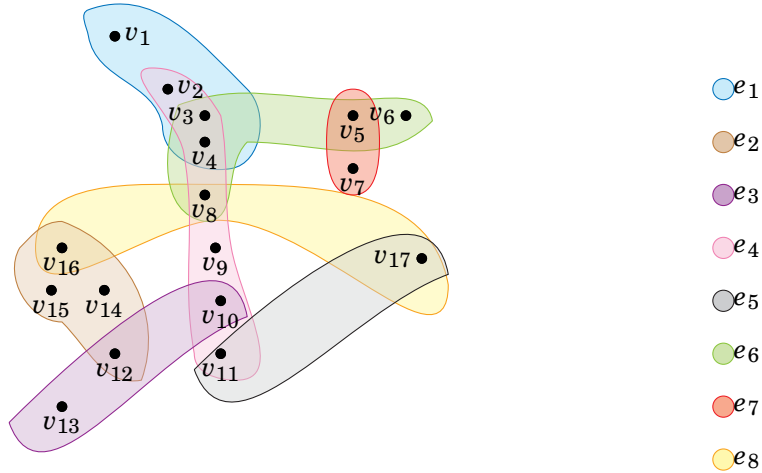


Figura 2.7: Grafo línea del hipergrafo de la fig 2.6

Definición 2.9. Sea $L(H) = (V', E')$ el grafo línea de H . Un grafo $G = (V', A)$ es un *intergrafo* de H , si $A \subset E'$ y para todo $e_i, e_j \in V'$ tal que $e_i \cap e_j \neq \emptyset$ existe un camino $(e_i = e_{u_1}, e_{u_2}, \dots, e_{u_p} = e_j)$ tal que para todo $1 \leq k < p$ se cumple que $e_i \cap e_j \subset e_{u_k} \cap e_{u_{k+1}}$.

El conjunto de intergrafos de H se denotará por $\ell(H)$.



(a)

Figura 2.8: Hipergrafo $H = (V, E)$.

Ejemplo 2.3. Notemos que el grafo línea del hipergrafo H de la figura 2.8 es $L(H) = (V', E')$, donde $V' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, v_9\}$ y $E' = \{e_1e_6, e_1e_4, e_4e_6, e_6e_7, e_4e_5, e_4e_8, e_5e_8, e_3e_4, e_3e_2, e_2e_8, e_6e_8\}$. Afirmamos que $G = (V', A)$ con $A = E' \setminus \{e_1e_6\} \subset E'$ de la figura 2.9 es un intergrafo de H . En efecto, primero notemos que los pares $e_i, e_j \in E$ que cumplen $e_i \cap e_j \neq \emptyset$ son los siguientes: $(e_1, e_4), (e_1, e_6), (e_2, e_3), (e_2, e_8), (e_3, e_4), (e_4, e_5), (e_4, e_6), (e_4, e_8), (e_5, e_8), (e_6, e_7), (e_6, e_8)$. Queremos ver que para cada uno de estos pares se cumple que existe un camino $(e_i = e_{u_1}, e_{u_2}, \dots, e_{u_p} = e_j)$ tal que para todo $1 \leq k < p$ se cumple que $e_i \cap e_j \subset e_{u_k} \cap e_{u_{k+1}}$. Analicemos cada caso:

- (1) Claramente, un camino que une a e_1 con e_6 es (e_1, e_4, e_6) además, observe que

$$e_1 \cap e_6 = \{v_3, v_4\} \subset \{v_2, v_3, v_4\} = e_1 \cap e_4$$

$$e_1 \cap e_6 = \{v_3, v_4\} \subset \{v_3, v_4, v_8\} = e_4 \cap e_6.$$

Lo cual cumple con la condición.

- (2) Para e_1 y e_4 el camino (e_1, e_4) cumple trivialmente la condición. Los demás casos son análogos.

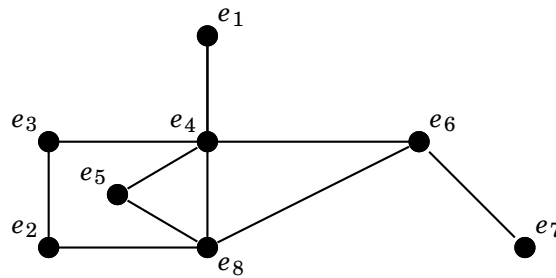


Figura 2.9: Un intergrafo $G = (V', A)$ del hipergrafo H de la fig 2.8.

Definición 2.10. Un intergrafo $G = (E, A)$ de H es *minimal* si para todo $A' \subsetneq A, G = (E, A')$ no es un intergrafo de H .

El conjunto de intergrafos minimales de H se denotará por $\ell_m(H)$.

La condición de los intergrafos minimales es similar a la de un árbol adjunto. Los intergrafos minimales de un hipergrafo satisfacen una propiedad relacionada con su número de aristas.

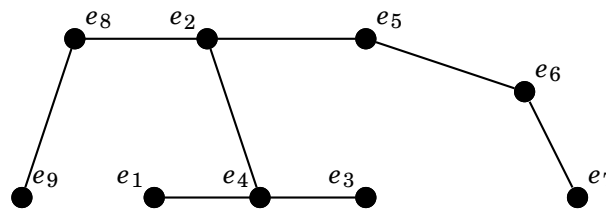


Figura 2.10: Un intergrafo minimal del hipergrafo de la fig 2.6.

En los hipergrafos existen diferentes definiciones de un ciclo, y por consiguiente, diferentes nociones no equivalentes de aciclicidad. La noción de ciclicidad ha sido estudiada particularmente en la teoría de base de datos relacional donde se han elaborado varias definiciones de aciclicidad como α -aciclicidad, β -aciclicidad y γ -aciclicidad.

Recordemos del capítulo 2 las siguientes definiciones:

- (1) Sea X un subconjunto de $V(H)$. El conjunto de hiperaristas parciales generado por X en H es $E' = \{e' | e' = e \cap X, e \in E(H)\} - \{\emptyset\}$.
- (2) El conjunto de hiperaristas parciales generadas desde H por algún conjunto X , es un *conjunto vértice generado de hiperaristas parciales*.
- (3) Sea E un conjunto conectado de hiperaristas y $e', e'' \in E$, $A = e' \cap e''$ es un *conjunto de articulación* de E , si

$$\{e - A : e \in E\} - \{\emptyset\}$$

es un conjunto no conectado de hiperaristas parciales.

Ejemplo 3.1. Sea H el hipergrafo con $V(H) = \{a, b, c, d, g, h, i\}$ y $E(H) = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = \{a, b, c\}$, $e_2 = \{b, c, d, h, i\}$, $e_3 = \{g, h, i\}$. Si $X = \{b, c, g, h, i\}$, entonces las hiperaristas del conjunto de hiperaristas parciales generado por X es construido de la siguiente manera:

- $e'_1 = e_1 \cap X = \{b, c\}$,
- $e'_2 = e_2 \cap X = \{b, c, h, i\}$,
- $e'_3 = e_3 \cap X = \{g, h, i\}$.

Como $e'_1 \subset e'_2$, entonces el conjunto de hiperaristas parciales de H generado por X es

$$E' = \{e'_2, e'_3\}.$$

En la figura 3.1 se muestra el hipergrafo H y el conjunto E' .

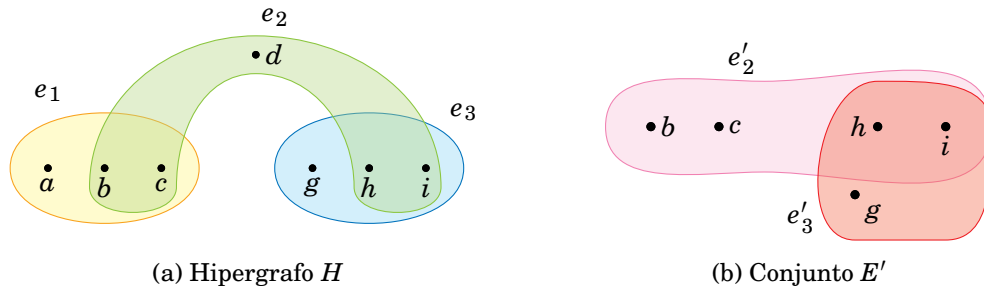


Figura 3.1: Un conjunto de hiperaristas parciales de H generado por X .

3.1. α -aciclicidad

De acuerdo a Fagin [7] la siguiente definición es estrictamente menos restrictiva y es una mejor generalización de la definición usual de aciclicidad en grafos ordinarios.

Definición 3.1. ▪ Un bloque de un hipergrafo reducido es un conjunto de hiperaristas parciales conectadas y generadas por vértices sin conjunto de articulación.

- Un conjunto es trivial si contiene menos de dos miembros.
- Un hipergrafo reducido es α -acíclico si todos sus bloques son triviales; de lo contrario, es α -cíclico.
- Se dice que un hipergrafo es acíclico o α -acíclico precisamente si su reducción lo es.

Ejemplo 3.2. En la figura 3.2 se muestra un bloque. Sean $A_1 = e_1 \cap e_2 = \{a\}$, $A_2 = e_1 \cap e_3 = \{c\}$ y $A_3 = e_2 \cap e_3 = \{i\}$, entonces los conjuntos

- $E_1 = \{e_1 - A_1, e_2 - A_1, e_3 - A_1\} - \{\emptyset\} = \{bc, ij, idc\}$,
- $E_2 = \{e_1 - A_2, e_2 - A_2, e_3 - A_2\} - \{\emptyset\} = \{ab, ija, id\}$ y
- $E_3 = \{e_1 - A_3, e_2 - A_3, e_3 - A_3\} - \{\emptyset\} = \{abc, ja, dc\}$,

son conjuntos conectados de hiperaristas parciales (ver figura 3.3).

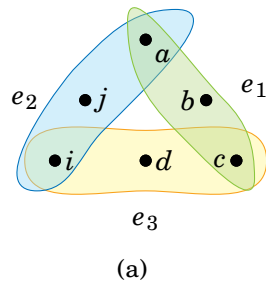


Figura 3.2: Bloque.

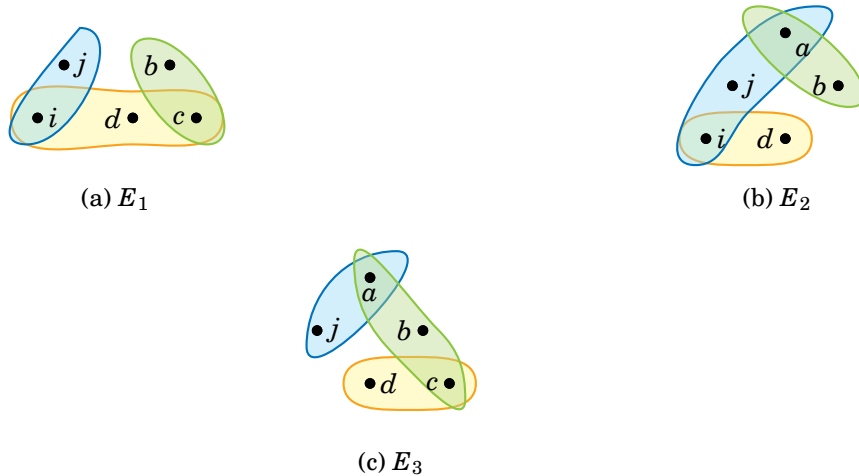
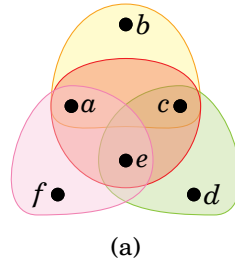


Figura 3.3: Conjunto de hiperaristas parciales E_1, E_2 y E_3 .

Ejemplo 3.3. El hipergrafo H de la figura 3.4 es α -acíclico, la hiperarista $e_1 = \{a, c, e\}$ es un conjunto de articulación ($A = e_1 \cap e_1$) de H . Los bloques de H (hiperaristas parciales vértice generadas sin conjuntos de articulación) son $\{b\}$, $\{d\}$ y $\{f\}$. El subconjunto de hiperaristas $\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f, a\}\}$ de H no es vértice generado (no contiene la hiperarista $\{a, c, e\}$). Observe que el bloque de la figura 3.2 es un bloque no trivial del hipergrafo H .

Figura 3.4: Hipergrafo α -acíclico.

Definición 3.2. Sea (V, E) un hipergrafo, $\mathcal{F} \subseteq E$ y $\mathcal{M} \subseteq V$ tal que

$$\mathcal{M} = \bigcup_{e \in \mathcal{F}} e.$$

Decimos que \mathcal{F} es cerrado si para cada arista E del hipergrafo existe una hiperarista $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$E \cap \mathcal{M} \subseteq F.$$

Ejemplo 3.4. Sea H el hipergrafo de la figura 3.5, el conjunto $\mathcal{F} = \{G, H, I\}$ es un conjunto cerrado de hiperaristas de H . Aquí $\mathcal{M} = G \cup H \cup I$, para las hiperaristas J, K, L y M , las hiperaristas G, H e I son tales que $J \cap \mathcal{M} \subseteq G$, $K \cap \mathcal{M} \subseteq H$, $L \cap \mathcal{M} \subseteq I$ y $M \cap \mathcal{M} \subseteq I$. El conjunto de aristas $\{L, M\}$ no es un conjunto cerrado de H , la intersección de I con $L \cup M$ no está contenida en L ni en M .

Observe que todo conjunto cerrado de hiperaristas (completas) es siempre un conjunto de hiperaristas parciales generado por vértices. También todo conjunto de aristas en un grafo ordinario es cerrado ya que si \mathcal{F} es un conjunto de aristas del grafo y \mathcal{M} es el conjunto de vértices de todas las aristas de \mathcal{F} . Si E es una arista del grafo, entonces

$$E \cap \mathcal{M} = \emptyset, E \cap \mathcal{M} = \{x\} \text{ o } E \cap \mathcal{M} = \{x, y\}.$$

En cualquier caso $E \cap \mathcal{M}$ está contenido en una arista de \mathcal{F} .

Más adelante se hará uso del siguiente resultado que caracteriza los hipergrafos α -acíclicos en términos de conjuntos de articulación.

Teorema 3.1. [7] Un hipergrafo es α -acíclico si y solo si todo conjunto cerrado conectado

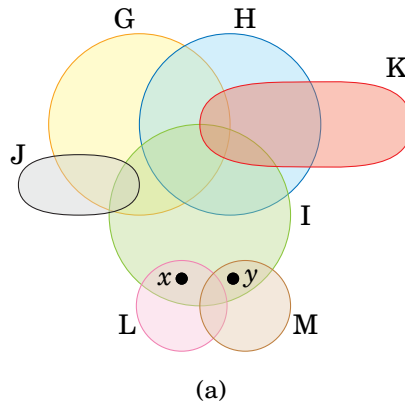


Figura 3.5: Hipergrafo H .

no trivial de hiperaristas completas tiene un conjunto de articulación.

En el siguiente ejemplo, se verifica la α -aciclicidad del hipergrafo H de la figura 3.4.

Ejemplo 3.5. Todos los conjuntos conectados no triviales de hiperaristas completas son:

- $\mathcal{F}_1 = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\{a, b, c\}, \{a, e, f\}\}$, $\mathcal{F}_3 = \{\{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$,
 $\mathcal{F}_4 = \{\{c, d, e\}, \{a, e, f\}\}$, $\mathcal{F}_5 = \{\{c, d, e\}, \{a, c, e\}\}$, $\mathcal{F}_6 = \{\{a, e, f\}, \{a, c, e\}\}$
- $\mathcal{F}_7 = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, e, f\}\}$, $\mathcal{F}_8 = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, c, e\}\}$
 $\mathcal{F}_9 = \{\{a, b, c\}, \{a, c, e\}, \{a, e, f\}\}$, $\mathcal{F}_{10} = \{\{c, d, e\}, \{a, e, f\}, \{a, c, e\}\}$
- $\mathcal{F}_{11} = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, c, e\}, \{a, e, f\}\}$

Para cada uno de los conjuntos de arriba tenemos:

- $\mathcal{M}_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{M}_2 = \{a, b, c, e, f\}$, $\mathcal{M}_3 = \{a, b, c, e\}$, $\mathcal{M}_4 = \{a, c, d, e, f\}$,
 $\mathcal{M}_5 = \{a, c, d, e\}$, $\mathcal{M}_6 = \{a, c, e, f\}$,
- $\mathcal{M}_7 = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{M}_8 = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{M}_9 = \{a, b, c, e, f\}$, $\mathcal{M}_{10} = \{a, c, d, e, f\}$,
- $\mathcal{M}_{11} = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Si E es una hiperarista del hipergrafo H , se tienen las siguientes posibilidades.

- $\bigcup_{e \in E} e \cap \mathcal{M}_1 = \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, e\}, \{a, c, e\}$. Como $\{a, e\}$ no está contenido en ninguna hiperarista de \mathcal{F}_1 , entonces \mathcal{F}_1 no es cerrado.

- $E \cap \mathcal{M}_2 = \{a, b, c\}, \{c, e\}, \{a, e, f\}, \{a, c, e\}$. Como $\{c, e\}$ no está contenido en ninguna hiperarista de \mathcal{F}_2 , entonces \mathcal{F}_2 no es cerrado.
- $E \cap \mathcal{M}_3 = \{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \{a, e\}, \{c, e\}, \{a, c, e\}$. Todas las hiperaristas anteriores están contenidas en alguna hiperarista de \mathcal{F}_3 , entonces \mathcal{F}_3 es cerrado.
- $E \cap \mathcal{M}_4$. Aquí tenemos que si $E = \{a, c, e\}$ entonces $E \cap \mathcal{M}_4 = \{a, c, e\}$ y esta hiperarista no está contenida en ninguna hiperarista de \mathcal{F}_4 . Por lo tanto \mathcal{F}_4 no es cerrado.

Se puede observar de lo anterior que todos los conjuntos \mathcal{F}_i que contengan la hiperarista $\{a, c, e\}$ son cerrados ya que todas las posibles intersecciones con los respectivos \mathcal{M}_i están contenidas en dicha hiperarista. Entonces los conjuntos no triviales cerrados de hiperaristas completas de H son:

$$\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{11}.$$

El conjunto $\{a, c, e\}$ es un conjunto de articulación de todos los conjuntos cerrados de arriba, por el teorema 3.1 H es un hipergrafo α -acíclico.

3.2. Berge-aciclicidad

El siguiente concepto de aciclicidad se debe a Berge [2]

Definición 3.3. . Un ciclo Berge en un hipergrafo H es una secuencia

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1}$$

tal que

- (i) v_1, \dots, v_m son vértices distintos de H ;
- (ii) S_1, \dots, S_m son hiperaristas distintas de H , y $S_{m+1} = S_1$;
- (iii) $m \geq 2$; y
- (iv) $v_i \in S_i \cap S_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m$).

Definición 3.4. Un hipergrafo es Berge-cíclico si tiene un Berge-ciclo, de otra manera es Berge-acíclico.

Ejemplo 3.6. Sea H el hipergrafo con $V(H) = \{a, b, c, d\}$ y $E(H) = \{S_1, S_2, S_3\}$, $S_1 = \{a, b, c\} = S_3$ y $S_2 = \{b, c, d\}$, la secuencia

$$S_1, c, S_2, b, S_3$$

se tienen las condiciones:

- (i) a, b, c, d son vértices distintos de H ;
- (ii) S_1, S_2 son hiperaristas distintas de H , y $S_3 = S_1$;
- (iii) $m \geq 2$, $m = 2$; y
- (iv) $c \in S_1 \cap S_2$, $b \in S_2 \cap S_3$.

Ver figura 3.6. De este ejemplo se observa que si algún par de hiperaristas de un hipergrafo tienen dos a más vértices en común, entonces el hipergrafo es Berge-cíclico.

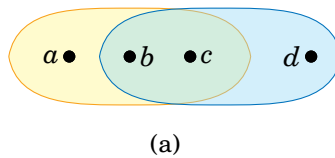


Figura 3.6: Hipergrafo Berge-cíclico.

Ejemplo 3.7. Sea H el hipergrafo con $V(H) = \{a, b, c, d\}$ y $E(H) = \{S_1, S_2, S_3\}$, $S_1 = \{a, b, c\} = S_3$ y $S_2 = \{c, d\}$, aquí la única posibilidad de una secuencia de la forma S_1, v_1, S_2, v_2, S_3 es con la condición $v_1 = v_2 = c$, de donde se incumple (i) de la definición, en consecuencia H es Berge-acíclico. Ver figura 3.7.

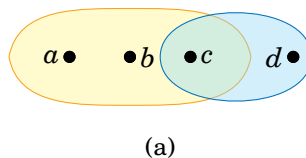


Figura 3.7: Hipergrafo Berge-acíclico.

Ejemplo 3.8. Sea H el hipergrafo con $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E(H) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, $S_1 = \{a, b, c\} = S_4$, $S_2 = \{c, d, e\}$, $S_3 = \{e, f, a\}$, la secuencia

$$S_1, c, S_2, e, S_3, a, S_4$$

cumple las condiciones:

- (i) a, b, c, d, e, f son vértices distintos de H ;
- (ii) S_1, S_2, S_3 son hiperaristas distintas de H , y $S_4 = S_1$;
- (iii) $m \geq 2$, $m = 3$; y
- (iv) $c \in S_1 \cap S_2$, $e \in S_2 \cap S_3$ y $a \in S_3 \cap S_4$.

Ver figura 3.8

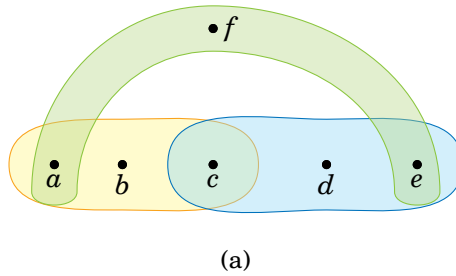


Figura 3.8: Hipergrafo Berge-cíclico H .

3.3. β -aciclicidad

En esta sección se dan varias definiciones para otro grado de aciclicidad, llamado β -aciclicidad. Para esto, recordemos que un subconjunto de las hiperaristas de un hipergrafo H (no necesariamente propio) es un subhipergrafo de H .

Definición 3.5. (β -aciclicidad). Un hipergrafo H es β -acíclico si y solo si todo subhipergrafo de H es α -acíclico.

Sea S_1, \dots, S_m, S_{m+1} una secuencia de conjuntos, donde S_1, \dots, S_m son distintos y $S_1 = S_{m+1}$, decimos que S_i y S_{i+1} son vecinos ($1 \leq i \leq m$) en particular S_1 y S_{m+1} son vecinos.

Definición 3.6. (ciclo puro). Una secuencia

$$S_1, \dots, S_m, S_{m+1},$$

es un ciclo puro si cumple:

- (i) $m \geq 3$ y
- (ii) si $i \neq j$, entonces $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ si y solo si S_i y S_j son vecinos.

De esta definición se sigue que un par es precisamente no disjunto si es un par de vecinos. Si $m = 3$, se asume que

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset,$$

en el caso $m \geq 4$, la suposición

$$S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m = \emptyset$$

es innecesaria ya que esta es consecuencia de las anteriores suposiciones.

Ejemplo 3.9. La secuencia

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_1$$

de las hiperaristas mostradas en la figura 3.9 es un ciclo puro.

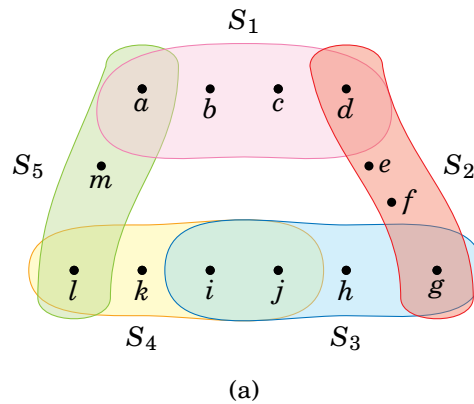


Figura 3.9: Ciclo puro con 5 hiperaristas.

Aparentemente los ciclos puros son más naturales y no tienen controversias, sin embargo, Kahn [12] da varias definiciones de aciclicidad para hipergrafos en las que un ciclo

puro resulta ser un hipergrafo acíclico.

Definición 3.7. (β -ciclo). Un β -ciclo en un hipergrafo H es una secuencia

$$S_1, \dots, S_m, S_{m+1}$$

de hiperaristas de H tales que

- (i) si $X = S_1 \cap \dots \cap S_m$ y
- (ii) $S'_i = S_i - X$ para $1 \leq i \leq m$

entonces la secuencia

$$S'_1, \dots, S'_m, S'_{m+1}$$

es un ciclo puro.

Ejemplo 3.10. El hipergrafo de la figura 3.9 es un β -ciclo. Aquí es claro que $X = \emptyset$ y $S'_i = S_i$ para $1 \leq i \leq 6$. De hecho, todo ciclo puro es un β -ciclo.

Definición 3.8. (β -ciclo débil). Un β -ciclo débil en un hipergrafo H es una secuencia

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1},$$

tal que

- (i) v_1, \dots, v_m son vértices distintos de H ;
- (ii) S_1, \dots, S_m son hiperaristas distintas de H , y $S_{m+1} = S_1$;
- (iii) $m \geq 3$; y
- (iv) Si $v_i \in S_i \cap S_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m$) y $v_i \notin S_j$ para $j \neq i, i+1$.

Se sigue directamente de las definiciones que todo β -ciclo es un β -ciclo débil, sin embargo el recíproco no necesariamente se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11. Sean $S_1 = \{v_1, v_4, y\}$, $S_2 = \{v_1, v_2\}$, $S_3 = \{v_2, v_3, y\}$ y $S_4 = \{v_3, v_4, y\}$. La secuencia

$$S_1, v_1, S_2, v_2, S_3, v_3, S_4, v_4, S_1$$

es un β -ciclo débil que no es un β -ciclo, ya que la secuencia

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_1$$

no es un ciclo puro, $S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$ y S_1 y S_3 no son vecinos. Ver figura 3.10.

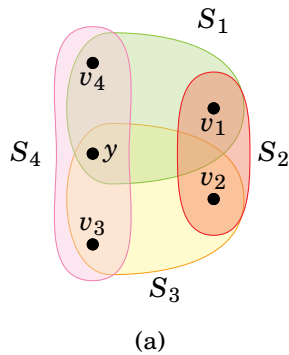


Figura 3.10: β -ciclo débil.

Definición 3.9. (ciclo Graham). Una secuencia de hiperaristas

$$S_1, \dots, S_m, S_{m+1},$$

es un ciclo Graham si se cumplen:

- (i) $m \geq 3$,
- (ii) S_1, \dots, S_m , son distintas,
- (iii) $S_1 = S_{m+1}$,
- (iv) si $\Delta_i = S_i \cap S_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m$), $\Delta_i \neq \emptyset$ y
- (v) si $i \neq j$, Δ_i y Δ_j son incomparables.

La secuencia de hiperaristas que se muestra en la figura 3.9 es un ciclo Graham.

En el ciclo que se muestra en la figura 3.10, tenemos otro ciclo Graham ya que los conjuntos:

$$\Delta_1 = \{v_1\}, \Delta_2 = \{v_2\}, \Delta_3 = \{v_3, y\}, \Delta_4 = \{v_4, y\}$$

son incomparables.

El siguiente teorema establece la equivalencia de 5 definiciones del concepto de hipergrafo β -cíclico.

Teorema 3.2. Las siguientes proposiciones son equivalentes entre sí:

- i.* Un hipergrafo es β -cíclico si tiene un β -ciclo.
- ii.* Un hipergrafo es β -cíclico si algún subhipergrafo es α -cíclico.
- iii.* Un hipergrafo es β -cíclico si algún conjunto, conectado reducido no trivial, de hiperaristas no tiene puntos de articulación.
- iv.* Un hipergrafo es β -cíclico si éste tiene un β -ciclo débil.
- v.* Un hipergrafo es β -cíclico si éste tiene un ciclo Graham.

En *iii* se puede reemplazar “conjunto, conectado reducido no trivial reducido de hiperaristas” (lo que significa “conjunto conectado, reducido de hiperaristas con al menos dos hiperaristas”) por “conjunto conectado, reducido de al menos tres hiperaristas”.

Demostración. Se demuestra primero la equivalencia entre *iii* y *ii*, luego el ciclo de implicaciones:

$$iii \Rightarrow iv \Rightarrow v \Rightarrow i \Rightarrow iii.$$

(*iii* \Rightarrow *ii*) Supongamos \mathcal{H} un hipergrafo que tiene un conjunto \mathcal{A} , conectado reducido no trivial, de hiperaristas sin puntos de articulación, por el teorema 3.1 \mathcal{A} es un hipergrafo α -cíclico .

(ii \Rightarrow iii) Supongamos que \mathcal{H} tiene un subhipergrafo que es α -cíclico. Sea \mathcal{H}' la reducción de \mathcal{H} . Entonces \mathcal{H}' es un subhipergrafo reducido de \mathcal{H} α -cíclico, de donde \mathcal{H}' tiene un conjunto \mathcal{S} no trivial conectado de hiperaristas sin conjunto de articulación. \mathcal{S} es reducido porque \mathcal{H}' lo es. Por lo tanto \mathcal{H} es β -cíclico con la definición iii.

(iii \Rightarrow iv) Supongamos \mathcal{H} un hipergrafo que tiene un conjunto \mathcal{A} , conectado reducido no trivial, de hiperaristas sin puntos de articulación, de la observación este tiene un conjunto \mathcal{T} conectado reducido y sin conjunto de articulación con al menos tres hiperaristas. Entonces se pueden encontrar dos hiperaristas V y W en \mathcal{T} tal que el número de vértices en $Q = V \cap W$ es tan grande como sea posible. Como \mathcal{T} es conectado, existe algún par de hiperaristas en \mathcal{T} con intersección no vacía, así que Q es no vacío. Como \mathcal{T} es reducido, Q es subconjunto propio de V y W . Puesto que \mathcal{T} no tiene conjuntos de articulación el resultado de remover Q de todas las hiperaristas de \mathcal{T} deja un conjunto conectado de hiperaristas parciales. En consecuencia existe una secuencia

$$S_1, \dots, S_k$$

de hiperaristas distintas de \mathcal{T} tales que:

- (a) $S_1 = V$,
- (b) $S_k = W$,
- (c) $(S_i \cap S_{i+1}) - Q$ no es vacío para $1 \leq i < k$.

Se elige la secuencia S_1, \dots, S_k de tal manera que k sea tan pequeña como sea posible. Por (c) para cada $1 \leq i < k$, existe $v_i \in (S_i \cap S_{i+1}) - Q$. Si j no es i ni $i+1$, entonces v_i no está en S_j , de lo contrario la secuencia S_1, \dots, S_k puede ser acortada y mantenerse las propiedades (a)–(c) lo cual contradice la minimalidad de k . Entonces se puede encontrar m con $3 \leq m \leq k$ tal que S_1 y S_m contienen un vértice x tal que no está en S_j para $1 < j < m$, entonces

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, x, S_1$$

es un β -ciclo débil.

Por otra parte, $Q \not\subseteq S_1 \cap S_2$ de lo contrario $Q \subseteq S_1 \cap S_2$, entonces $S_1 \cap S_2$ debería tener estrictamente más vértices que Q , ya que $S_1 \cap S_2 - Q$ es no vacío por (c). Sin embargo esto podría contradecir la maximalidad de Q .

Como $Q \not\subseteq S_1 \cap S_2$, elegimos $x \in Q - (S_1 \cap S_2)$. Ahora $x \in S_1$ ya que $Q \subseteq V = S_1$. Así, como $x \notin S_1 \cap S_2$, se sigue que $x \notin S_2$. Sea m minimal tal que $3 \leq m \leq k$ y $x \in S_m$, tal m existe ya que $x \in S_k$ porque $v \in Q \subseteq W = S_k$. Entonces S_1 y S_m contienen el vértice x el cual no está en S_j para $1 < j < m$.

(iv \Rightarrow v) Supongamos que \mathcal{H} tiene un β -ciclo débil, se sigue directamente de la definición que todo ciclo débil es un ciclo de Graham.

(v \Rightarrow i) Suponer que \mathcal{H} tiene un ciclo de Graham, veamos que \mathcal{H} tiene un β -ciclo. Sea $\mathcal{L} = (S_1, \dots, S_m, S_{m+1})$ un ciclo minimal de Graham, esto es, un ciclo de Graham con m , el número de hiperaristas tan pequeño como sea posible. Veamos que \mathcal{L} es un β -ciclo. Para esto, sea $X = S_1 \cap \dots \cap S_m$ y sea $S'_i = S_i - X$ para $1 \leq i \leq m+1$. Se debe probar que

$$\mathcal{L}' = (S'_1, \dots, S'_m, S'_{m+1})$$

es un ciclo puro.

Sean $\Delta_i = S_i \cap S_{i+1}$ y $\Delta'_i = S'_i \cap S'_{i+1}$ para $1 \leq i \leq m$. Cada Δ'_i es no vacío, de lo contrario $\Delta_i \subseteq \Delta_j$ para cada j , y en particular para algún $j \neq i$, lo cual contradice que \mathcal{L} sea un ciclo de Graham. Como cada Δ'_i es no vacío, se ha demostrado que cada par de vecinos en \mathcal{L}' es no disjunto. Por construcción se sabe que

$$S'_1 \cap \dots \cap S'_m = \emptyset.$$

Para demostrar que \mathcal{L}' es un ciclo puro sólo se necesita demostrar que los no vecinos son disjuntos. Para esto supongamos lo contrario, esto es, existen p y q tales que S'_p y S'_q son no vecinos con $x \in S'_p \cap S'_q$. Por construcción de \mathcal{L}' se sabe que $x \notin S'_r$ para algún r . Intercambiando los roles de S'_p y S'_q , si es necesario, se puede suponer que se procede en el sentido de las agujas del reloj sobre \mathcal{L}' de S'_p a S'_q , en el camino se encuentra S'_r . (El sentido de las agujas del reloj es de S'_1 a S'_2 de S'_2 a S'_3 ... de S'_m a S'_1 de ...).

Se consideran las siguientes condiciones sobre el par de índices (s, j) :

- (a) S'_s y S'_j son distintos y no vecinos, y
- (b) existe $w \in S'_s \cap S'_j$ tal que w no está en algún S'_k que está sobre el camino en el sentido de las agujas del reloj de S'_s a S'_j . Estas condiciones se pueden cumplir

haciendo que w, s, j y k sean, respectivamente v, p, q y r .

Ahora sean s y j tales que (a) y (b) se satisfagan, y tal que la trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj desde S'_s a S'_j es lo más corto posible. Haciendo un cambio cíclico de los subíndices, si es necesario, podemos suponer que $s = 1$. Por lo tanto, $1 < j < m$, y el vértice $w \in S'_1 \cap S'_j$, pero $w \notin S'_k$ para algún k , con $1 < k < j$. Además, $j \geq 3$, ya que S'_1 y S'_j no son vecinos. Ahora se muestra que para cada p con $1 < p < j$, necesariamente $w \notin S'_p$. Para esto suponer que $w \in S'_p$ y $1 < p < j$. Hay dos casos, dependiendo de si $p < k$ o $k < p$, Suponga que $p < k$; El otro caso es similar. Entonces hay un vértice (a saber, w) en S'_p , y S'_j pero no está en S'_k , y también S'_k está en el sentido de las agujas del reloj desde S'_p , hasta S'_j . Dado que el camino en el sentido de las agujas del reloj de S'_p a S'_j es más corto que el camino en el sentido de las agujas del reloj de S'_1 a S'_j esto contradice la suposición de minimalidad en la elección de s y j . Por tanto, $w \notin S'_p$ siempre que $1 < p < j$.

Ahora se demuestra que

$$S_1, \dots, S_j, S_1$$

es un ciclo de Graham.

Para esto, sean Δ_i y Δ'_i sea como antes ($1 < i < j$) sea $\Delta = S_j \cap S_1$ y $\Delta' = S'_j \cap S'_1$. Se sabe que Δ_i y Δ_j son incomparables a pares cuando $i \neq j$, ya que S_1, \dots, S_m, S_1 es un ciclo de Graham y $j < m$. Además, Δ y cada Δ_i son no vacíos. Por lo tanto, para mostrar que es un ciclo de Graham, solo se necesita mostrar que Δ es incomparable con cada una de las Δ_i . Ahora Δ contiene w , que no está en ninguna de las Δ_i , Por lo tanto, $\Delta \not\subseteq \Delta_i$, ($1 \leq i < j$). Entonces, para mostrar que S_1, \dots, S_j, S_1 es un ciclo de Graham, solo necesitamos demostrar que

$$\Delta_i \not\subseteq \Delta, (1 \leq i < j).$$

Supongamos que no. Entonces existe $1 \leq n < j$ tal que

$$\Delta_n \subseteq \Delta.$$

Luego, como $\Delta'_n = \Delta_n - X$ y $\Delta' = \Delta - X$ se sigue que

$$\Delta'_n \subseteq \Delta'.$$

Sea x un elemento arbitrario de Δ'_n , entonces $x \in \Delta'$. Se afirma que

$$x \in S'_i \text{ para } 1 \leq i \leq j$$

suponer lo contrario. Se encuentra t ($1 \leq t \leq j$) tal que $x \notin S'_t$. Como $x \in \Delta'_n$ y $x \in \Delta'$, se sabe que t no es cualquiera de 1 , n , $n+1$, o j . Hay dos casos, dependiendo si $t < n$ o $n+1 < t$. Suponer $t < n$; el otro caso es similar. Entonces

- (a) S'_1 y S'_n , son distintos y no vecinos, y
- (b) $x \in S'_1 \cap S'_n - S'_t$ y S'_t está sobre el camino en sentido de las manecillas del reloj que va de S'_1 a S'_n .

Pero el camino en el sentido de las manecillas del reloj de S'_1 a S'_n es estrictamente más corto que el camino en el sentido de las manecillas del reloj de S'_1 a S'_j . Esto contradice la suposición de minimalidad en nuestra elección de s y j . Esto prueba que $x \in S'_i$ para $1 \leq i \leq j$. Como $S'_i \subseteq S_i$ se sigue que $x \in S_i$ para $1 \leq i \leq j$. Entonces

$$x \in \Delta_i \text{ para } 1 \leq i < j.$$

Como x es un elemento arbitrario de Δ'_n , se tiene que $\Delta'_n \subseteq \Delta_i$ para $1 \leq i < j$. Luego $\Delta_n \subseteq \Delta_i$ para $1 \leq i < j$, ya que los únicos vértices en Δ_n que no están en Δ'_n son vértices de X que están en cada S_i .

Sea a arbitrario tal que $1 \leq a < j$ y $a \neq n$. Existe tal a , ya que $j > 3$. Dado que $\Delta_n \subseteq \Delta_a$, esto contradice el hecho de que las Δ_i son incomparables por pares. Esta contradicción establece la afirmación de que

$$S_1, \dots, S_j, S_1$$

es un ciclo de Graham. Pero este ciclo es un ciclo de Graham más corto que nuestro ciclo de Graham supuestamente más pequeño

$$S_1, \dots, S_m, S_1.$$

Esta contradicción muestra que el ciclo de Graham más pequeño es de hecho un β -ciclo, que se lo que se quería mostrar.

($i \Rightarrow iii$) Suponer \mathcal{H} tiene un β -ciclo:

$$S_1, \dots, S_m, S_{m+1},$$

donde ≥ 3 . El conjunto $\{S_1, \dots, S_m\}$ de hiperaristas es claramente un conjunto de hiperaristas reducido, no trivial, conectado sin conjunto de articulación.

■

3.4. γ -aciclicidad

Se inicia esta sección con la definición de γ -ciclo para después definir γ -aciclicidad, posteriormente se presenta un resultado que establece equivalencias con la γ -ciclicidad.

Definición 3.10. Un γ -ciclo en un hipergrafo \mathcal{H} es una secuencia

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1}$$

tal que

- (i) v_1, \dots, v_m son vértices distintos de \mathcal{H} ;
- (ii) S_1, S_2, \dots, S_m son hiperaristas distintas de \mathcal{H} y $S_{m+1} = S_1$;
- (iii) $m \geq 3$;
- (iv) $v_i \in S_i \cap S_{i+1}$ ($1 \leq i \leq m$); y
- (v) si $1 \leq i < m$ entonces v_i no está en S_j excepto en S_i y S_{i+1} .

La única diferencia entre un γ -ciclo y un β -ciclo débil es que $1 \leq i < m$ en (v) es reemplazado por $1 \leq i \leq m$ en la definición de β -ciclo débil. En consecuencia todo β -ciclo débil es un γ -ciclo. La única diferencia entre un γ -ciclo y un ciclo de Berge es “3” es reemplazando en (iii) por “2” y (v) es omitido.

Un γ -ciclo es de tamaño m si consta de m hiperaristas distintas. El siguiente teorema establece equivalencias con la γ -ciclicidad.

Definición 3.11. Un γ -ciclo débil es una secuencia

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1}$$

que satisface de (i) a (iv) de la definición de γ -ciclo y en lugar de (v) se satisface

$$(v') \text{ Si } i = 1 \text{ o } i = 2 \text{ entonces } v_i \text{ no está en } S_j \text{ excepto en } S_i \text{ y } S_{i+1}.$$

Teorema 3.3. Las siguientes proposiciones son equivalentes a γ -ciclicidad en un hipergrafo \mathcal{H} .

- (1) El hipergrafo \mathcal{H} tiene un γ -ciclo.
- (2) El hipergrafo \mathcal{H} tiene un γ -ciclo débil.
- (3) El hipergrafo \mathcal{H} tiene un γ -ciclo de tamaño 3 o tiene un ciclo puro.
- (4) El hipergrafo \mathcal{H} tiene un par E, F de hiperaristas no disjuntas incomparables tales que en el hipergrafo que resulte de remover $E \cap F$ de todas las hiperaristas, que están a la izquierda de E es conectado con las que están a la izquierda de F .

Demostración. Para esto, se demuestra la siguiente cadena

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

(1) \Rightarrow (2) Suponer que \mathcal{H} tiene un γ -ciclo, es claro que éste ciclo satisface (v').

(2) \Rightarrow (3) Sea \mathcal{H} un hipergrafo que tiene un γ -ciclo débil. Veamos que \mathcal{H} tiene un γ -ciclo de tamaño 3 o tiene un ciclo puro. Sea

$$\mathcal{C} = (S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1})$$

un γ -ciclo débil en \mathcal{H} donde m es lo más pequeño posible. Si $m = 3$ se tiene demostrado lo que queremos, ya que un γ -ciclo débil de tamaño 3 es claramente un γ -ciclo de tamaño 3. Suponer $m \geq 4$, veamos que \mathcal{C} es un ciclo puro. Se sabe que las hiperaristas vecinas en este ciclo se intersectan, entonces hay que demostrar que las no vecinas no se intersectan.

Veamos que S_1 no se intersecta con sus no vecinos, para esto supongamos que si lo hace. Sea $k, 3 \leq k < m$ tan pequeña como sea posible tal que $S_1 \cap S_k \neq \emptyset$. Sea

$x \in S_1 \cap S_k$, entonces

$$(S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_{k-1}, v_{k-1}, S_k, x, S_1)$$

es un γ -ciclo débil más pequeño que \mathcal{C} , lo cual es una contradicción.

Ahora se demuestra que S_2 no tiene intersección con sus no vecinos. Para esto, suponer que

$$x \in S_1 \cap S_k, 4 \leq k \leq m.$$

Hay dos casos:

Caso 1. $x \in S_3$. Se sabe que $x \notin S_1$, ya que S_1 no intersecciona a su no vecino S_3 . Sea r lo más grande posible tal que $x \in S_r$. Es fácil ver que

$$S_1, v_1, S_2, x, S_r, v_r, \dots, S_m, v_m, S_1,$$

es un γ -ciclo débil más pequeño que \mathcal{C} , contradicción.

Caso 2. $x \notin S_3$. Sea r tan pequeño como sea posible tal que $v \in S_r$. Se sigue fácilmente que

$$S_r, v, S_2, v_2, S_3, v_3, \dots, S_r,$$

es un γ -ciclo débil más pequeño que \mathcal{C} , contradicción.

Se ha demostrado que ni S_1 ni S_2 tienen intersección con sus no vecinos. Ahora supongamos que encontramos j tan pequeño como sea posible tal que S_j tiene intersección con un no vecino S_k , digamos que $x \in S_j \cap S_k$. Entonces $3 \leq j$, y $j+1 \leq k \leq m$. Es fácil ver que

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_j, x, S_k, \dots, S_{m+1}$$

es un γ -ciclo débil más pequeño que \mathcal{C} , contradicción.

(3) \Rightarrow (4) Supongamos que \mathcal{H} tiene un γ -ciclo de tamaño 3 o tiene un ciclo puro. Si \mathcal{H} tiene un γ -ciclo \mathcal{C} de tamaño 3, suponer

$$\mathcal{C} = (S_1, v_1, S_2, v_2, S_3, v_3, S_1).$$

Se verifica fácilmente que en \mathcal{H} el par $E = S_1, F = S_3$ son hiperaristas no disjuntas incomparables tales que en el hipergrafo que resulte de remover $S_1 \cap S_3$ de todas

las hiperaristas, que están a la izquierda de S_1 es conectado con las que están a la izquierda de S_3 . Ahora suponer que \mathcal{H} tiene un ciclo puro, entonces eligiendo E y F como hiperaristas vecinas en este ciclo puro se cumple la conclusión de (4).

(4) \Rightarrow (1) Suponer que \mathcal{H} cumple las condiciones de la proposición (4), veamos que \mathcal{H} tiene un γ -ciclo. Sean E y F como en la proposición (4) y $Q = E \cap F$, existe una secuencia S_1, S_2, \dots, S_m tal que

$$(i) S_1 = E,$$

$$(ii) S_m = F \text{ y}$$

$$(iii) S_i \cap S_{i+1} - Q \neq \emptyset \text{ y } 1 \leq i \leq m.$$

Suponer que se han elegido los S_i tal que cumplen (i)–(iii) de arriba y m tan pequeño como sea posible. Si $m = 2$, entonces por (ii), $S_2 = F$ y así $S_1 \cap S_2 = Q$, lo cual contradice (iii) cuando $i = 1$. Ahora para $m \geq 3$, por (iii) se puede encontrar un vértice

$$v_i \in S_i \cap S_{i+1} - Q, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Sean $S_m = E$ y v_m un vértice en $E \cap F$. Veamos que

$$\mathcal{C} = (S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1}),$$

es un γ -ciclo. El vértice v_1 no está en cualquiera de las hiperaristas S_3, \dots, S_{m-1} por la minimalidad de m , entonces si $v_i \in S_i$ donde $1 \leq i \leq m-1$, entonces la secuencia $S_1, S_i, S_{i+1}, \dots, S_m$ puede ser usada en lugar de la secuencia S_1, S_2, \dots, S_m . Luego, $v_1 \notin S_m = F$ ya que $v_1 \in E = S_1$ pero $v_1 \notin Q = E \cap F$. Así $v_1 \in S_1 \cap S_2 - S_j$, $j \neq 1, 2$. Similarmente $v_i \in S_i \cap S_{i+1} - S_j$, $j \neq i, i+1$ y $1 \leq i \leq m-1$. Todos los vértices v_1, \dots, v_{m-1} son distintos. Como $v_m \in Q$ y $v_i \notin Q$ para $1 \leq i \leq m$ se tiene que v_m es distinto de cualquiera de los vértices v_1, \dots, v_{m-1} . Por tanto los vértices

$$v_1, \dots, v_m$$

son todos distintos. Por la minimalidad de m , las hiperaristas S_1, \dots, S_m son todas distintas. Con esto se concluye que

$$S_1, v_1, S_2, v_2, \dots, S_m, v_m, S_{m+1}$$

es un γ -ciclo.



3.5. Relaciones entre varios grados de aciclicidad

El siguiente teorema establece las relaciones entre los distintos grados de aciclicidad estudiados en las secciones anteriores.

Teorema 3.4. Se cumple la siguiente cadena de implicaciones.

Aciclicidad de Berge \Rightarrow γ -aciclicidad \Rightarrow β -aciclicidad \Rightarrow α -aciclicidad.

La recíproca de cualquiera de las implicaciones es falsa.

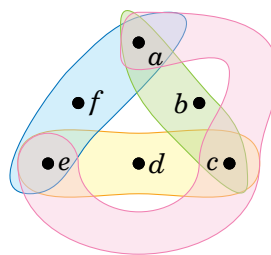
Demostración. Cada hipergrafo α -cíclico es β -cíclico, ya que un hipergrafo es β -cíclico, si y solo si algún subhipergrafo (incluido todo el hipergrafo en sí) es α -cíclico. Además es claro que todo β ciclo débil es un γ -ciclo y cada γ -ciclo es un ciclo de Berge. De esto se sigue

Aciclicidad de Berge \Rightarrow γ -aciclicidad \Rightarrow β -aciclicidad \Rightarrow α -aciclicidad.

Ahora se muestra que ninguna de las implicaciones inversas se cumple. El hipergrafo \mathcal{H} con hiperaristas

$$A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}, C = \{e, f, a\}, D = \{a, c, e\}$$

ver figura 3.11, es α -aciclico y β -cíclico ya que el subhipergrafo de \mathcal{H} con hiperaristas $\{a, b, c\}, \{c, d, e\}$ y $\{e, f, a\}$ es α -cíclico.



(a)

Figura 3.11: α -aciclico, pero no es β -aciclico.

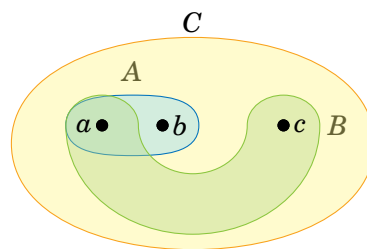
El hipergrafo \mathcal{H}' con hiperaristas

$$A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, b, c\},$$

es β -acíclico, sin embargo éste es γ -cíclico porque

$$\{a, c\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a\}, \{a, c\}$$

es un γ -ciclo, ver figura 3.12.



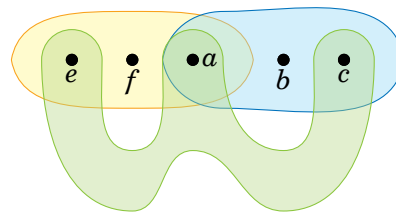
(a)

Figura 3.12: β -acíclico, pero no es γ -acíclico.

El hipergrafo \mathcal{H}'' con hiperaristas

$$A = \{a, b, c\}, B = \{a, e, f\}, C = \{a, c, e\}$$

es β -acíclico y γ -cíclico, ver 3.13.



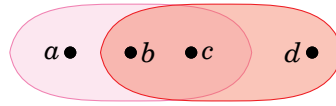
(a)

Figura 3.13: Hipergrafo H.

Finalmente el hipergrafo \mathcal{H}''' con hiperaristas

$$A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$$

es γ -acíclico y es un ciclo de Berge, ver figura 3.14.



(a)

Figura 3.14: γ -acíclico, pero no es Berge-acíclico.

■

Conclusiones

En el caso de la aciclicidad en grafos generalmente muchos problemas subyacentes conducen a procesos algorítmicos eficientes, cuando se trata de la aciclicidad en hipergrafos, aunque la noción es más complicada, (de hecho hemos analizado principalmente tres grados de aciclicidad), también encontramos diversos problemas relacionados con el cómputo eficiente sobre estructuras hiperacíclicas, como es el caso de algunas esquemas de bases de datos.

En los problemas de satisfactibilidad que se derivan de estructuras hiperacíclicas, analizando el ancho hiperárboreo de los tres tipos de aciclicidad podemos inferir que el ancho acotado conduce también al cómputo eficiente.

En la dirección de la eficiencia algorítmica, podemos considerar como estudio futuro la generalización de los resultados conocidos de eficiencia en árboles para ser conducidos a la estructura hiperárboorea en los tres niveles tratados en este documento a través de las nociones de α -aciclicidad, β -aciclicidad y γ -aciclicidad.

Otra futura investigación, es la construcción de algoritmos explícitos para los resultados de eficiencia obtenidas en las diversas estructuras hiperacíclicas.

Bibliografia

- [1] Beerli Catriel, et al. *On the Desirability of Acyclic Database Schemes*. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol 30, No 3, July 1983. App 479-513.
- [2] Berge, C. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, New York, 1976.
- [3] Bretto A., *Hypergraph Theory An Introduction*, Springer, ISBN 978-3-319-00079-4 (2013).
- [4] Courcelle B. and Engelfriet J., *Graph structure and monadic second-order logic: A language-theoretic approach*, Cambridge University Press, Encyclopedia of mathematics and its applications; 138, ISBN 978-0-521-8983 (2012).
- [5] Diestel R., *Graph Theory*, Springer, fifth edition, ISBN 978-3-662-53621-6 (2017).
- [6] Duris D., *Some characterizations of γ γ β -acyclicity of hypergraphs*, Information Processing Letters, 112(16): 617-620(2012).
- [7] Fagin Ronald, *Degrees of Acyclicity for Hypergraphs and Relational Database Schemes*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol 30, No 3, July 1983, pop 514-550.
- [8] Flum J. and Grohe M. *Parameterized Complexity Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, ISBN-103-540-29952-1 (2006).

-
- [9] Gottlob G. and Pichler R. *Hypergraphs in Model Checking: Acyclicity and Hypertree-Width versus Clique-width*. SIAM Journal on Computing, 33(2):351-378,2004.
- [10] Huang Hao, Ma Jie, *On tight cycles in hypergraphs*, arXiv: 1711.07442v2 11 Dec 2017.
- [11] Jégou P and Ndojh Ndiaye S. *On the notion of cycles in hypergraphs*. Discrete Mathematics, 309(23): 6535-6543,2009.
- [12] Kahn, J., Kleitman, D., and Linial, W. Private communication, Aug. 1982
- [13] Yannakakis, M. *Algorithms for acyclic database schemes*. In Proc 7th Int. Conf. on Very Large Databases (Cannes France, Mar. 29-31, 1982), pp. 82-94.