Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Representación de Penrose para las soluciones de las Ecuaciones de Maxwell

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias

por

Marco César Mendoza Marcos

Asesorado por

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
20 de febrero de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Representación de Penrose para las soluciones de las Ecuaciones de Maxwell

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Marco César Mendoza Marcos

Asesorado por

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
20 de febrero de 2023

Título: Representación de Penrose para las soluciones de las Ecuaciones de Maxwell
Estudiante: MARCO CÉSAR MENDOZA MARCOS

COMITÉ

Dra. Iraís Rubalcava García
Presidente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Secretario

Dra. Patricia Domínguez Soto
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Asesor

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Existen diversas ecuaciones de la física-matemática cuyas soluciones son funciones que pueden expresarse a través de lo que se llama una representación integral. En general, se puede establecer una representación integral de alguna función $f(\lambda)$ si es posible escribir

$$f(\lambda) = \int_C K(\lambda, \lambda')g(\lambda')d\lambda', \tag{1.1}$$

donde el argumento λ de la función juega el papel de un parámetro en el integrando. La función $K(\lambda, \lambda')$ que depende del parámetro λ y de la variable de integración λ', es el kernel de la representación integral y $g(\lambda)$ la función de peso [1]. Algunos ejemplos de funciones con representación integral son las funciones de Bessel, las funciones asociadas de Legendre, la función gamma, etc.

El presente trabajo de tesis parte de una representación integral para las soluciones de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes introducida por Roger Penrose en 1969 en un artículo titulado «Solutions of the Zero-Rest-Mass Equations» [2]; de manera general se presentan las soluciones a las ecuaciones del campo sin masa de espín s (que también son soluciones a la ecuación de onda) a través de cierta fórmula integral de una función compleja. Este resultado se menciona también en [3-5] como parte de una teoría más amplia desarrollada por el mismo Penrose, la teoría de tuistores, la cual fue propuesta como un nuevo marco geométrico dentro de la fisica cuyo propósito fue la unificación de la relatividad general y la teoría cuántica. En la teoría de tuistores, la representación integral de Penrose surge de manera natural para representar campos sin masa, sin embargo, el presente trabajo de tesis tiene como objetivo general la deducción de esta representación usando métodos matemáticos más elementales.

El capítulo 2 comienza con una revisión de las soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, posteriormente se da un resumen sobre los potenciales electromagnéticos de Debye que sirven para conocer soluciones de las mismas ecuaciones y finalmente, dado que el interés es expresar estas soluciones como integrales de funciones complejas, se presentan algunas definiciones y teoremas que involucran este tipo de integrales.

En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones de Maxwell escritas en cierto sistema de coordenadas para introducir de forma más natural la fórmula de Penrose para sus soluciones, así como una deducción de esta; asimismo, se dan algunos ejemplos de soluciones que pueden obtenerse a través de la fórmula: los campos de una onda plana, carga puntual, dipolo eléctrico y un haz Bessel adifraccional.

El cuarto y último capítulo se dedica al estudio de las representaciones integrales de las soluciones de las ecuaciones de Laplace y de onda, introducidas por E.T. Whittaker. Ambas ecuaciones provienen de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para campos estáticos y campos más generales, respectivamente. Además se presentan algunas relaciones entre funciones especiales que surgen de este estudio. Así esta revisión complementa y enriquece al capítulo 3 para finalizar con las conclusiones de esta tesis.

Capítulo 2

Temas preliminares

En este capítulo se presentará una revisión breve y concisa de algunos temas que son relevantes para el desarrollo del trabajo de tesis. Dado que se está buscando tener una representación a las soluciones de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, es natural empezar la revisión sobre estas soluciones y algunas propiedades que cumplen.

2.1. Ecuaciones de Maxwell sin fuentes

Las ecuaciones de Maxwell son las leyes que gobiernan los fenómenos eléctricos y magnéticos, todo lo que hay que saber sobre la teoría clásica del electromagnetismo está contenido en este conjunto de cuatro ecuaciones. James Clerk Maxwel, en una serie de artículos publicados entre los años 1850 y 1870, logró unificar en una sola teoría lo que se conocía sobre estos fenómenos. Fue así que se conocieron importantes consecuencias para el desarrollo la física en ese tiempo, como la existencia de campos generados por cargas en movimiento que pueden dejar las fuentes y viajar en el espacio libre con velocidad c, estos campos son ondas que representan el transporte de energía entre puntos del espacio [6, 7].

Las ecuaciones de Maxwell en una región del espacio sin fuentes, i.e., donde no hay cargas ni corrientes, en unidades cgs son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad & \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad & \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Soluciones del sistema (2.1) pueden ser encontradas desacoplando las ecuaciones. Siguiendo este procedimiento, se llega a que cada componente de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisface la ecuación de onda en tres dimensiones

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considerando la ecuación para $\vec{E}$ (para $\vec{B}$ es completamente análogo), algunas soluciones son ondas planas monocromáticas transversales de frecuencia ω. Matemáticamente, una onda plana de este tipo se puede expresar como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right), \tag{2.3}$$

con ω la frecuencia angular constante, $\vec{k}$ el vector de onda constante cuya norma $|k| \equiv k = \frac{\omega}{c}$ se llama número de onda, y el vector constante $\vec{E_0}$ contiene la información de la polarización de la onda.

Los campos eléctrico y magnético son transversales en este caso; es decir, son perpendiculares a la dirección de propagación, condición que se sigue de las ecuaciones (2.1) y que está dada por

$$\vec{k} \cdot \vec{E_0} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{E_0} = \frac{\omega}{c} \vec{B_0}. \tag{2.4}$$

Sin embargo, la solución más general de (2.2) no es una onda plana monocromática, sino una superposición de ondas planas de diferentes frecuencias que se propagan en todas las direcciones [7], esta superposición se puede expresar mediante una integral de Fourier

$$\vec{E} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{g}(\vec{k}) \cos\Big(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k}) t\Big) d^3k, \tag{2.5}$$

donde se introdujo el factor $1/(2\pi)^{3/2}$ en conformidad con la integral de Fourier, la función $\vec{g}(\vec{k})$ describe la amplitud de las diferentes ondas en la superposición lineal y la integral se efectúa sobre todos los valores posibles de $\vec{k}$.

Por ejemplo, el caso de una carga puntual, cuyo campo eléctrico tiene una magnitud que varia únicamente con el inverso del cuadrado de la distancia radial y no depende del tiempo, se puede analizar mediante una superposición de ondas en diferentes direcciones que interfieren entre ellas de tal manera que la perturbación en cada punto del espacio sólo depende de las coordenadas espaciales y no del tiempo. Más aún, cualquier campo electromagnético que sea solución de (2.1) que no dependa del tiempo, puede analizarse de esta manera [8].

Una característica importante de los campos electromagnéticos es la existencia de un potencial escalar eléctrico φ y un potencial vectorial magnético $\vec{A}$, a partir de los cuales se pueden conocer todas las componentes de los campos. En el marco de la relatividad especial, estos potenciales se unifican en un sólo objeto conocido como cuadripotencial electromagnético A_μ, con el cual se conocen todas las componentes del tensor electromagnético (objeto que contiene toda la información de los campos). Por otra parte, existe un objeto llamado *potencial de Debye* H, una sola función compleja que genera todas las componentes de los campos soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. A continuación se presenta un resumen con las propiedades que tiene el potencial H.

2.2. Potencial de Debye

En relatividad especial, las ecuaciones de Maxwell se escriben en forma covariante como

$$\begin{aligned} \partial_\nu f^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\mu \\ \partial_\nu * f^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

con ∂_ν el operador derivada parcial con respecto a las coordenadas cartesianas en espacio-tiempo plano $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, $f^{\mu\nu}$ las componentes del tensor electromagnético, $\vec{E} = (f^{01}, f^{02}, f^{03})$, $\vec{B} = (f^{23}, f^{31}, f^{12})$, j^μ son las componentes de la cuadricorriente eléctrica y $*f^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma}/2$.

En el formalismo espinorial, pensado sencillamente como un marco geométrico para describir cantidades físicas, los campos de espín s, se describen mediante objetos de $2s$ índices llamados *espinores*. Por otro lado los campos de espín entero pueden representarse también mediante tensores y a partir de ellos construir su *equivalente espinorial*. El caso del campo electromagnético $s = 1$ tiene equivalente espinorial cuyas componentes independientes están dadas por [9]

$$F_{AB} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{R}\dot{S}}\sigma^{\mu}_{\ A\dot{R}}\sigma^{\nu}_{\ B\dot{S}}f_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

donde $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$ es el símbolo de Levi-Civita de dos índices y las $\sigma^{\mu}_{\ A\dot{B}}$ son escalares complejos llamados *símbolos de conexión* o *símbolos de Infeld-van der Waerden*, los cuales permiten establecer la conexión entre objetos espinoriales y tensoriales cuando el espín s es entero. Los índices $A, B, \ldots$ toman los valores $0, 1$. La elección de los símbolos de conexión en este trabajo de tesis es

$$\begin{aligned} \left(\sigma^{0}_{\ A\dot{B}}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\sigma^{1}_{\ A\dot{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \left(\sigma^{2}_{\ A\dot{B}}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\sigma^{3}_{\ A\dot{B}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando las ecuaciones (2.7), los símbolos de conexión (2.8) y el hecho de que $\vec{E} = (f^{01}, f^{02}, f^{03})$, $\vec{B} = (f^{23}, f^{31}, f^{12})$, se tiene que las componentes espinoriales del campo electromagnético son

$$\begin{aligned} F_{00} &= f^{12} + if^{03} - f^{02} + if^{31} \\ &= B_z + iE_z - E_y + iB_y \\ F_{01} = F_{10} &= f^{01} - if^{23} \\ &= E_x - iB_x \\ F_{11} &= f^{12} + if^{03} + f^{02} - if^{31} \\ &= B_z + iE_z + E_y - iB_y. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes escritas en el formalismo espinorial son [9]

$$\epsilon^{RA}\frac{\partial}{\partial x^{R\dot{C}}}F_{AB} = 0, \tag{2.10}$$

donde ϵ^{AB} es el símbolo de Levi-Civita de dos índices y $x_{A\dot{B}} \equiv \sigma^{\mu}_{\ A\dot{B}}x_{\mu}$, coordenadas en notación bi-espinorial.

Las ecuaciones de Maxwell (2.10) implican la existencia de una función compleja H llamada *potencial de Debye*, tal que

$$F_{AB} = \frac{\partial}{\partial x^{A\dot{0}}}\frac{\partial H}{\partial x^{B\dot{0}}}, \tag{2.11}$$

a su vez, H satisface la ecuación de onda $(\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2)H = 0$. De manera que cualquier solución a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes se puede expresar de la forma (2.11) a partir de una sola función compleja H que satisfaga la ecuación de onda, a diferencia de lo que ocurre con las soluciones $f_{\mu\nu}$ obtenidas a partir del cuadripotencial A_μ, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, donde se necesitan conocer cuatro funciones reales para obtener todas las componentes del tensor electromagnético. La discusión sobre la existencia de H no se abordará en este trabajo; para una discusión más amplia, se pueden consultar las fuentes [9, 10].

De manera más general, un campo sin masa de espín s se puede representar mediante un espinor de $2s$ índices totalmente simétrico, $\phi_{AB\cdots L}$, el cual satisface las ecuaciones del campo libre,

$$\partial^{A}_{\dot{R}}\phi_{AB\cdots L} = 0. \tag{2.12}$$

Este campo a su vez puede expresarse en términos de un potencial de Debye H, como por ejemplo

$$\phi_{AB\cdots L} = \frac{\partial}{\partial x^{A\dot{0}}} \frac{\partial}{\partial x^{B\dot{0}}} \cdots \frac{\partial H}{\partial x^{L\dot{0}}}, \tag{2.13}$$

donde H satisface la ecuación de onda.

El hecho de que sea posible encontrar todas las componentes del campo electromagnético a partir de una sola función compleja será importante en la deducción de la fórmula de Penrose, la conexión viene en el hecho de que se requiere una sola función a integrar en el plano complejo para obtener las componentes del campo. De manera que también es relevante contar con alguna forma de evaluar ese tipo de integrales, por ello a continuación se hará una revisita a algunos teoremas y definiciones que involucran las integrales en cuestión.

2.3. Evaluación de integrales de contorno

Considérese una función compleja f de variable compleja λ. La integral de una función de este tipo se define en términos de los valores $f(\lambda)$ a lo largo de un contorno dado C en el plano complejo, este contorno en general va de un punto $\lambda = \lambda_1$ a $\lambda = \lambda_2$, por lo que la integral es una integral de línea y su valor depende del contorno C y de la función f. En el caso en que C es un contorno cerrado, la integral de f a lo largo de C se denota por

$$\oint_C f(\lambda) d\lambda, \tag{2.14}$$

para la evaluación de integrales de este tipo se tienen los siguientes teoremas [11, 12]:

Teorema 2.3.1 (Cauchy-Goursat)**.** *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado simple y sobre los puntos de C, entonces*

$$\oint_C f(\lambda) d\lambda = 0. \tag{2.15}$$

Teorema 2.3.2 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea f analítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente. Si λ_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda. \tag{2.16}$$

Para enunciar el siguiente teorema, es necesario comentar algunos aspectos sobre funciones complejas de variable compleja.

Sea una función f analítica en un dominio abierto del plano complejo D y sea $\lambda_0 \in D$. Si existe un número complejo a_0 tal que $f(\lambda_0) = a_0$, entonces λ_0 es un *punto regular* de $f(\lambda)$. En cambio, si $f(\lambda_0)$ no tiene un valor finito, λ_0 es un *punto singular aislado* de $f(\lambda)$.

Cuando λ_0 es un punto singular aislado, por el Teorema de Laurent, $f(\lambda)$ tiene un desarrollo en serie de potencias negativas y positivas en D alrededor de λ_0, i.e.,

$$f(\lambda) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n \tag{2.17}$$

con los coeficientes a_n dados por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \tag{2.18}$$

con C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivamente que encierre a λ_0. El coeficiente a_{-1} de $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ se llama residuo de $f(\lambda)$ en λ_0 y se denota por

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda), \tag{2.19}$$

de manera que

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\lambda)d\lambda. \tag{2.20}$$

En el caso del desarrollo en serie de $f(\lambda)$, la porción correspondiente a las potencias negativas de $\lambda-\lambda_0$ se llama la *parte principal* de f en λ_0. Si la parte principal de f en λ_0 contiene un número finito de términos no nulos, i.e. existe un entero positivo m tal que $a_{-m}\neq 0$ y $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \cdots = 0$. De tal forma que el desarrollo en serie de $f(\lambda)$ toma la forma

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_0)^n + \frac{a_{-1}}{\lambda-\lambda_0} + \frac{a_{-2}}{(\lambda-\lambda_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(\lambda-\lambda_0)^m} \tag{2.21}$$

en el dominio D. En este caso, el punto singular aislado λ_0 se llama *polo de orden* m. Un polo de orden $m=1$ se llama *polo simple*.

Ahora sí es posible, enunciar dos teoremas importantes para la evaluación de integrales de contorno:

Teorema 2.3.3. *Sea una función $f(\lambda)$ y un entero positivo m tal que la función*

$$\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m f(\lambda) \tag{2.22}$$

es analítica en λ_0 y $\phi(\lambda_0)\neq 0$. Entonces f tiene un polo de orden m en λ_0 y su residuo ahí está dado por

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda) = \frac{1}{(m-1)!}\phi^{(m-1)}(\lambda_0), \tag{2.23}$$

si $m>1$. En el caso $m=1$, la fórmula se reduce simplemente a $\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_0} f(\lambda) = \phi(\lambda_0)$.

Teorema 2.3.4 (Teorema de los Residuos)**.** *Sea C un contorno cerrado simple y una función f analítica dentro y sobre C, excepto por un número finito de puntos singulares aislados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\lambda)d\lambda = \sum_k \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} f(\lambda). \tag{2.24}$$

La utilidad de estos teoremas se aprovechará en el siguiente capítulo, donde se presentará la fórmula integral de Penrose, una deducción de la misma y algunos ejemplos de campos que tienen esta representación.

Capítulo 3

Representación integral de Penrose

3.1. Ecuaciones de Maxwell en coordenadas nulas

La representación integral de Penrose para las soluciones a las ecuaciones de Maxwell es directamente comprobable cuando las ecuaciones de Maxwell se escriben en un sistema de coordenadas que se llamarán *coordenadas nulas*.

Sean (ct, x, y, z) coordenadas cartesianas del espacio-tiempo de Minkowski, se definen las coordenadas nulas $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$ mediante las siguientes relaciones

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x) & v = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x) \\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + iz) & \bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - iz), \end{array} \tag{3.1}$$

de manera que el intervalo espacio-temporal entre dos eventos infinitesimalmente separados está dado por $ds^2 = 2dudv - 2d\zeta d\bar{\zeta}$.

Para una función $f = f(ct, x, y, z)$, sus derivadas parciales en las coordenadas (3.1) están relacionadas con las parciales en coordenadas cartesianas mediante

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell sin fuentes pueden ser reducidas a dos expresiones mediante la introducción de la unidad imaginaria i:

$$\nabla \cdot (\vec{E} + i\vec{B}) = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla \times (\vec{E} + i\vec{B}) = \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + i\vec{B}). \tag{3.4}$$

La componente x en (3.4) es

$$\frac{\partial(E_z + iB_z)}{\partial y} - \frac{\partial(E_y + iB_y)}{\partial z} = \frac{i}{c}\frac{\partial(E_x + iB_x)}{\partial t}, \tag{3.5}$$

usando (3.2), se tiene que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial u}(E_x + iB_x) + \frac{\partial}{\partial v}(E_x + iB_x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(B_z - iE_z - E_y - iB_y) + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(B_z - iE_z + E_y + iB_y). \quad (3.6)$$

Ahora, la ecuación (3.3) en coordenadas nulas es

$$\frac{\partial}{\partial u}(E_x + iB_x) - \frac{\partial}{\partial v}(E_x + iB_x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(B_z - iE_z - E_y - iB_y) - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(B_z - iE_z + E_y + iB_y). \quad (3.7)$$

Sumando (3.6) y (3.7) y tomando complejo conjugado, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial u}(E_x - iB_x) = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(B_z + iE_z - E_y + iB_y), \quad (3.8)$$

y restándolas, después de conjugación compleja

$$\frac{\partial}{\partial v}(E_x - iB_x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(B_z + iE_z + E_y - iB_y). \quad (3.9)$$

Haciendo $\phi_0 \equiv B_z + iE_z - E_y + iB_y$, $\phi_1 \equiv E_x - iB_x$ y $\phi_2 \equiv B_z + iE_z + E_y - iB_y$, estas últimas dos ecuaciones se pueden escribir como

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial u} = \frac{\partial \phi_0}{\partial \bar{\zeta}} \quad (3.10)$$

y

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial v} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta}. \quad (3.11)$$

De manera análoga, tomando las componentes y y z en la ecuación (3.4), después de cambiar a coordenadas nulas se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(E_x + iB_x) - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(E_x + iB_x) = \frac{\partial}{\partial u}(B_z - iE_z + E_y + iB_y) - \frac{\partial}{\partial v}(B_z - iE_z - E_y - iB_y) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(E_x + iB_x) - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(E_x + iB_x) = \frac{\partial}{\partial u}(B_z - iE_z + E_y + iB_y) + \frac{\partial}{\partial v}(B_z - iE_z - E_y - iB_y), \quad (3.13)$$

sumándolas, restándolas, y tomando complejos conjugados, se llega a las respectivas ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(E_x - iB_x) = \frac{\partial}{\partial u}(B_z + iE_z + E_y - iB_y) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(E_x - iB_x) = \frac{\partial}{\partial v}(B_z + iE_z - E_y + iB_y), \quad (3.15)$$

que, usando las definiciones ya dadas para las cantidades entre paréntesis, se pueden escribir como

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial u} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\zeta}} \quad (3.16)$$

y

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial v} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta}, \quad (3.17)$$

respectivamente.

Las ecuaciones (3.10), (3.11), (3.16) y (3.17) se pueden condensar en el siguiente arreglo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial u} &= \frac{\partial \phi_r}{\partial \bar{\zeta}} \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial v} &= \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial \zeta} \quad r = 0, 1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde ϕ_0, ϕ_1 y ϕ_2 son tres cantidades complejas que contienen las seis componentes reales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Estas cantidades coinciden perfectamente con las componentes espinoriales del campo electromagnético (2.9), $\phi_0 = F_{00}$, $\phi_1 = F_{01} = F_{10}$ y $\phi_2 = F_{11}$.

3.2. La integral de contorno

Las ecuaciones (3.18) aparecen en [2] de manera general para cualquier campo sin masa de espín s y $r = 0, \ldots, 2s-1$. Considerando la siguiente notación:

$$\phi_0 = \phi_{000\ldots0}, \quad \phi_1 = \phi_{100\ldots0}, \quad \phi_2 = \phi_{110\ldots0}, \quad \ldots, \phi_{2s} = \phi_{111\ldots1}, \tag{3.19}$$

se puede ver que la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x_{A\dot{R}}} \phi_{AB\ldots L} = 0, \tag{3.20}$$

con $x_{0\dot{0}} = v$, $x_{0\dot{1}} = -\bar{\zeta}$, $x_{1\dot{0}} = -\zeta$, $x_{1\dot{1}} = u$, se puede llevar a la forma (3.18). Si se elige por ejemplo $\dot{R} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_{0\dot{0}}} \phi_{0B\ldots L} + \frac{\partial}{\partial x_{1\dot{0}}} \phi_{1B\ldots L} = 0, \tag{3.21}$$

de manera que si r índices de $\phi_{AB\ldots L}$ son 1, se tiene

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial v} = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial \zeta} \quad r = 0, \cdots, 2s-1 \tag{3.22}$$

y eligiendo $\dot{R} = 1$ se obtiene

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial u} \quad r = 0, \cdots, 2s-1 \tag{3.23}$$

La ecuación (3.20) es la ecuación espinorial de Dirac-Fierz para un campo sin masa de espín s. Para $s = \frac{1}{2}$, esta es la ecuación de Weyl y describe neutrinos sin masa; para $s = 1$ estas son las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.10), mientras que para $s = 2$ se tienen las ecuaciones de Einstein linealizadas [2, 9].

De acuerdo con Penrose, es posible generar una amplia clase de soluciones a la ecuación para el campo sin masa de espín $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ a través de la integral de contorno

$$\phi_r = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^r f(\lambda, u + \lambda\bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) d\lambda, \tag{3.24}$$

para $r = 0, \ldots, 2s$ y con f una función analítica con singularidades dentro del contorno de integración.

En efecto, llamando $\alpha_1 \equiv u + \lambda\bar{\zeta}$ y por lo tanto su parcial con respecto a u vale 1, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_r}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^r \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^r \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\zeta}} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} f(\lambda, u + \lambda\bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) d\lambda\right) = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial u},
\end{aligned}$$

y análogamente, llamando $\alpha_2 \equiv \zeta + \lambda v$ por lo que su parcial con respecto a ζ vale 1,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_r}{\partial v} &= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^r \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^r \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial v} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\lambda \\
&= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{r+1} f(\lambda, u + \lambda\bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) d\lambda\right) = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial \zeta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (3.24) satisface las ecuaciones (3.22, 3.23). Estas ecuaciones, además implican

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}\right\}\phi_r = 0, \quad r = 0, \cdots, 2s, \tag{3.25}$$

la cual es la ecuación de onda en coordenadas nulas. Es directo ver que ϕ_r satisface también esta ecuación y por lo tanto se espera que las soluciones a la ecuación de onda tengan la forma (3.24).

En consecuencia, ϕ_r, con $s = 1$ representa soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes o a la ecuación de onda, para cualquier función f que tenga singularidades dentro del contorno de integración. Más aún, f no es única, pues si se añade cualquier función analítica dentro del contorno, se obtiene la misma ϕ_r, por el teorema (2.3.1).

3.3. Deducción de la fórmula de Penrose

Ya se vio que la integral (3.24) satisface las ecuaciones (3.22,3.23). De manera que se espera que una expresión de este tipo guarde cierta generalidad para representar soluciones de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes o de la ecuación de onda. Una deducción de la fórmula de Penrose puede darse considerando que una solución simple de la ecuación de onda, es la onda plana elemental, dada por la función escalar

$$H = H_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \tag{3.26}$$

con H_0 la amplitud de la onda, constante en las coordenadas espacio-temporales, $\vec{k}$ el vector de propagación de la onda fijo y ω la frecuencia angular, la cual es la misma para cualquier punto de observación en el espacio-tiempo.

Como la amplitud de la onda H_0 es constante, sólo la fase de la onda se expresará en términos de coordenadas nulas como sigue

$$\begin{aligned}
\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t &= k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t \\
&= k_1\left(\frac{u - v}{\sqrt{2}}\right) + k_2\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\sqrt{2}}\right) + k_3 i\left(\frac{\bar{\zeta} - \zeta}{\sqrt{2}}\right) - \omega\left(\frac{u + v}{\sqrt{2}c}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(k_1 - k_0)\left(u + \frac{k_2 + ik_3}{k_1 - k_0}\bar{\zeta}\right) + (k_2 - ik_3)\left(\zeta - \frac{k_1 + k_0}{k_2 - ik_3}v\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(k_1 - k_0)\left(u + \frac{k_2 + ik_3}{k_1 - k_0}\bar{\zeta}\right) + (k_2 - ik_3)\left(\zeta + \frac{k_2 + ik_3}{k_1 - k_0}v\right)\right\},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde se usó que el vector de onda es luxoide i.e. $k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_0^2=0$ y que $k_0=\frac{\omega}{c}$. Entonces (3.26), se expresa como

$$H=H_0\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda_0\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda_0 v\right)\right]\right\}, \tag{3.28}$$

con $\lambda_0\equiv\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}$.

Usando la fórmula integral de Cauchy (2.3.2), se puede ver que

$$H=\frac{1}{2\pi i}\oint H_0\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right]\right\}d\lambda, \tag{3.29}$$

donde el contorno de integración encierra al polo simple λ_0. Esta es una expresión de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda,u+\lambda\bar{\zeta},\zeta+\lambda v)d\lambda$$

con f una función analítica con polo simple λ_0 dentro del contorno de integración.

Ahora, por el teorema de Fourier, es posible expresar cualquier solución a la ecuación de onda por medio de una suporposición lineal de ondas planas; la solución más general es una superposición de ondas planas que se propagan en todas las direcciones. De manera que si ya se sabe que una onda plana tiene la expresión (3.29), la solución más general a la ecuación de onda está dada por

$$\begin{aligned}H'(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int g(\vec{k})d^3k\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{\lambda-\lambda_0(\vec{k})}H_0\\ &\times \cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right]\right\}d\lambda\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{5/2}i}\oint\left(\int g(\vec{k})\frac{1}{\lambda-\lambda_0(\vec{k})}\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right]\right\}d^3k\right)d\lambda,\end{aligned} \tag{3.30}$$

con $\lambda_0(\vec{k})=\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}$. La dependencia de H' en $\vec{r}$ y t es a través de las coordenadas $(u,v,\zeta,\bar{\zeta})$. La amplitud de la onda plana H_0 fue absorbida en la definición de $g(\vec{k})$, que es a su vez la función de amplitud para cada onda individual y que está dada por la transformada espacial de $H'(\vec{r},t)$ evualuada en $t=0$, i.e.,

$$g(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int H(\vec{r},0)\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)d^3r, \tag{3.31}$$

con $\vec{r}$ dado en coordenadas $(u,v,\zeta,\bar{\zeta})$.

La integral

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int g(\vec{k})\frac{1}{\lambda-\lambda_0(\vec{k})}\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right]\right\}d^3k \tag{3.32}$$

es entonces una función de la forma $f(\lambda,u+\lambda\bar{\zeta},\zeta+\lambda v)$, con un polo simple por cada valor que toma $\vec{k}$ (o sus componentes) en la integración, pues cada polo está dado por $\lambda_0(\vec{k})=\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}$, esto junto con la condición que cumple el vector de onda, $k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_0^2=0$, define un mapeo (similar al de la proyección estereográfica) de cada vector $\vec{k}$ a un punto sobre el plano complejo. De manera que la función que resulta de la integral sobre todos los valores de $\vec{k}$ tiene infinitos polos simples distribuidos en el plano complejo, alguno podría incluso estar en el punto del infinito. Este es el caso más general y entonces la elección del contorno de integración en (3.30) se complica ya que no existe lugar para él, ¡cada punto del plano complejo es un polo de la función! por lo que si se eligiera un contorno arbitrario, sobre él (no sólo dentro) siempre existirían singularidades y habría que buscar otro que las abarque y así sucesivamente sin lograr que algún contorno no tenga singularidades sobre él mismo. Entonces para poder elegir un contorno de manera adecuada y que H' tenga una expresión de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda, u+\lambda\bar{\zeta}, \zeta+\lambda v)d\lambda,$$

los polos de la función dada por la integral (3.32) deben estar distribuidos en una región finita del plano, para lograr esto se debe escoger cuidadosamente la región de integración o la función de amplitud $g(\vec{k})$.

Una manera escoger la región de integración es superponer ondas planas cuyo vector de propagación yazca sobre una superficie. Por ejemplo sobre un cono, dado por el valor constante de la coordenada latitudinal del sistema de coordenadas esféricas, $\theta = \theta_0$; este es el caso de la superposición para un haz Bessel adifraccional [13]; el cono que contiene los vectores $\vec{k}$ define una circunferencia de radio $k\mathrm{sen}\,\theta_0$, que bajo la proyección estereográfica corresponde a singularidades sobre un círculo del plano complejo y es posible elegir como contorno otro círculo de radio mayor.

Para escoger la función de amplitud, se puede considerar la siguiente situación en una dimensión [7]: en $t = 0$, $H'(x, 0)$ representa un tren de ondas finito de longitud Δx y la $g(k)$ correspondiente es una función tipo campana con ancho Δk, centrada alrededor de un número de onda k', el cual es dominante en la onda $H'(x, 0)$. Si Δx y Δk se definen como las desviaciones estándar de los valores medios de x y k se tiene la siguiente relación

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}, \tag{3.33}$$

que para la mayoría de pulsos o paquetes de onda que no se cortan abruptamente, el producto yace cerca del valor mínimo. Esto significa que trenes de onda cortos con pocas longitudes de onda presentes tienen una distribución grande de números de onda de ondas monocromáticas y por el contrario, trenes de onda grandes son casi monocromáticos. Por lo tanto, para tener una función $g(k)$ con una distribución de números de onda Δk finita, se deben considerar las soluciones $H'(x, t)$ que en $t = 0$ representen un tren de ondas finito que no se corte abruptamente. De este modo, regresando a la superposición en tres dimensiones (3.32), cada vector $\vec{k}$ del tren de ondas finito es mapeado a una singularidad, generando una distrubución finita de singularidades en el plano complejo, las cuales pueden ser encerradas con un contorno que las abarque de manera que no haya alguna sobre él.

Por lo tanto, las soluciones de trenes de onda finitos con vectores de onda $\vec{k}$ distribuidos en una región finita del espacio cumplen con

$$H' = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda, u+\lambda\bar{\zeta}, \zeta+\lambda v)d\lambda, \tag{3.34}$$

con $(\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2)H' = 0$. Esta función que es en general compleja, puede usarse como potencial de Debye para obtener las componentes espinoriales del campo electromagnético a través de (2.11). Considerando que $x^{0\dot{0}} = u,\ x^{0\dot{1}} = \zeta,\ x^{1\dot{0}} = \bar{\zeta},\ x^{1\dot{1}} = v$, y llamando $\alpha_1 \equiv u + \lambda\bar{\zeta}$

$$\begin{aligned}
\phi_0 = F_{00} &= \frac{\partial^2}{\partial {x^{0\dot{0}}}^2} H' = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial^2 f}{\partial {\alpha_1}^2} d\lambda
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 = F_{10} &= \frac{\partial}{\partial x^{1\dot{0}}}\frac{\partial}{\partial x^{0\dot{0}}} H' = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial f}{\partial u} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\zeta}} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial {\alpha_1}^2} d\lambda
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 = F_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial {x^{1\dot{0}}}^2} H' = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\zeta}^2} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\zeta}}\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\zeta}} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial {\alpha_1}^2} d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Estas expresiones ya se parecen a la fórmula de Penrose, con las potencias de λ correspondientes. La función que resulta de derivar dos veces la f con respecto a su argumento α_1 puede depender de los mismos argumentos, de manera que esta derivada se puede escribir como la función $F(\lambda,\ u + \lambda\bar{\zeta},\ \zeta + \lambda v)$, la cual al provenir de una función que no es analítica en todos los puntos dentro del contorno, también tendrá singularidades dentro del mismo, asegurando que la integración dará una solución no trivial. Finalmente, las componentes ϕ_r se pueden expresar como

$$\phi_r = \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^r F(\lambda, u + \lambda\bar{\zeta}, \zeta + \lambda v) d\lambda, \tag{3.38}$$

Para campos conocidos que son solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (y en general para cualquier espín s) se puede encontrar una F que satisfaga (3.38), como ejemplos se presentarán los campos de una carga puntual, el de un dipolo, el de una onda plana y el de un haz adifraccional de Bessel. Más aún, se pueden obtener superposiciones de estos campos en la forma (3.38) mediante la superposición de las respectivas f's. Sin embargo, como menciona Penrose en su artículo [2], si se toma una superposición lineal demasiado extensa de las f's, este procedimiento puede fallar, como ya se vio, pues la distribución de las singularidades de la nueva función puede no dejar espacio para escoger el contorno; por lo tanto, la solución más general no se puede expresar en la forma (3.24), aún así esta fórmula guarda cierta generalidad para expresar soluciones "finitas" a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

3.4. Ejemplos

En esta sección se revisarán ejemplos de campos soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes que tienen representación integral de Penrose

3.4.1. Onda plana

Basándose en la expresión que ya se tiene para la onda plana, se puede ver que este campo tiene representación integral de Penrose con la función

$$f(\lambda, u+\lambda\bar{\zeta}, \zeta+\lambda v) = \frac{1}{\lambda-\lambda_0}(B_z+iE_z-E_y+iB_y)\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right]\right\}, \tag{3.39}$$

con $\lambda_0 = \frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}$. Para probar que esta f es consistente, se deben recuperar las componentes ϕ_0, ϕ_1 y ϕ_2 después de hacer las integrales correspondientes. Para ϕ_0 ya es directo. Para ϕ_1:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda \frac{1}{\lambda-\lambda_0}(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z})\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left((k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right)\right\}d\lambda \\
&= \frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z})\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left((k_1-k_0)\left(u+\lambda_0\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda_0 v\right)\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Calculando el producto

$$\begin{aligned}
\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z}) &= \frac{1}{k_1-k_0}((k_2B_{0z}-k_3E_{0z})+i(k_2E_{0z}-k_3E_{0y}) \\
&\quad +i(k_2B_{0y}+k_3B_{0z})-(k_2E_{0y}+k_3E_{0z})) \\
&= \frac{1}{k_1-k_0}\left(-\frac{\omega}{c}E_{0x}+i\frac{\omega}{c}B_{0x}+i(-k_1B_{0x})-(-k_1E_{0x})\right) \\
&= \frac{1}{k_1-k_0}(iB_{0x}-E_{0x})(k_0-k_1) \\
&= E_{0x}-iB_{0x},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde se usó que $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ y $\vec{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}$.

Ahora para ϕ_2:

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^2 \frac{1}{\lambda-\lambda_0}(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z})\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left((k_1-k_0)\left(u+\lambda\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda v\right)\right)\right\}d\lambda \\
&= \left(\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}\right)^2(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z})\cos\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left((k_1-k_0)\left(u+\lambda_0\bar{\zeta}\right)+(k_2-ik_3)\left(\zeta+\lambda_0 v\right)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Se necesita calcular el producto

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}\right)^2(B_{0z}+iE_{0z}-E_{0y}+iB_{0z}) = \left(\frac{k_2+ik_3}{k_1-k_0}\right)(E_{0x}-iB_{0x}) \\
&= \frac{1}{k_1-k_0}\left(k_2E_{0x}+ik_3E_{0x}-ik_2B_{0x}+k_3B_{0x}\right) \\
&= \frac{1}{k_1-k_0}\left[\left(k_1E_{0y}-\frac{\omega}{c}B_{0z}\right)+i\left(k_1E_{0z}+\frac{\omega}{c}B_{0y}\right)-i\left(k_1B_{0y}+\frac{\omega}{c}E_{0z}\right)+\left(k_1B_{0z}-\frac{\omega}{c}E_{0y}\right)\right] \\
&= \frac{k_1-\frac{\omega}{c}}{k_1-k_0}(E_{0y}+B_{0z}+iE_{0z}-iB_{0y}) \\
&= E_{0y}+B_{0z}+iE_{0z}-iB_{0y},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde nuevamente se usaron $k_0 = \frac{\omega}{c}$ y $\vec{k}\times\vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}$.

Por lo tanto, (3.39) es una función que genera las solución de onda plana de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

Estado de polarización

Para ver cómo se refleja el estado de polarización de la onda en la fórmula de Penrose, considérense dos ondas con la misma fase y misma magnitud de amplitud propagándose en la dirección $\vec{k} = k\hat{z}$. Las ondas son

$$\vec{E_1} = E_0 \cos\left(kz - \omega t\right)\hat{x} \tag{3.44}$$

$$\vec{E_2} = E_0 \left(\cos\left(kz - \omega t\right)\hat{x} - \text{ sen }\left(kz - \omega t\right)\hat{y}\right), \tag{3.45}$$

la onda $\vec{E_1}$ está polarizada linealmente en la dirección $\hat{x}$, mientras que la onda $\vec{E_2}$ está polarizada circularmente.

La expresión correspondiente para las componentes ϕ_r de (3.44) es

$$\phi_r = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\lambda^r}{\lambda + i} iE_0 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(-(u + \lambda\bar{\zeta}) - i(\zeta + \lambda v))\right) d\lambda, \tag{3.46}$$

mientras que para (3.45) se encuentra

$$\phi_r = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\lambda^r}{\lambda + i} iE_0 e^{-i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(-(u+\lambda\bar{\zeta}) - i(\zeta + \lambda v))\right)} d\lambda. \tag{3.47}$$

Nótese que para ambas ondas, sin importar el estado de polarización, el polo es el mismo. En general, será en el residuo de la función en el polo donde se refleje el tipo de polarización de la onda. Si las ondas estuviesen desfasadas, esa fase se vería como una constante multiplicativa en la función a integrar.

3.4.2. Carga puntual

El campo de una carga puntual está dado por la Ley de Coulomb en unidades cgs:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} \tag{3.48}$$

y $\vec{B} = 0$. Este campo es solución a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.1), por lo tanto tiene representación integral de Penrose.

Considérese la identidad [8]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{x + iy \operatorname{sen}\psi - iz\cos\psi}. \tag{3.49}$$

Tomando el gradiente con respecto a las coordenadas (x, y, z) se tiene

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{i} + i\operatorname{sen}\psi\hat{j} - i\cos\psi\hat{k}}{(x + iy\operatorname{sen}\psi - iz\cos\psi)^2} d\psi. \tag{3.50}$$

Por lo que se tiene para la componente ϕ_0

$$\begin{aligned}\phi_0 = iE_z - iE_y = \frac{iq}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-i\cos\psi}{(x + iy\operatorname{sen}\psi - iz\cos\psi)^2} d\psi - \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(i\operatorname{sen}\psi}{x + iy\operatorname{sen}\psi - iz\cos\psi)^2} \\ = \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\psi}}{(x + iy\operatorname{sen}\psi - iz\cos\psi)^2}.\end{aligned}$$

Introduciendo la variable compleja $\lambda \equiv e^{i\theta}$, por lo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda-\lambda^{-1}}{2i}$ y $\cos\theta = \frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2}$, la integral de $[0, 2\pi]$ se convierte en una integral sobre un círculo de radio 1 en el plano complejo,

$$\phi_0 = \frac{q}{2\pi i}\oint \frac{d\lambda}{\left[x\lambda + y\left(\frac{\lambda^2-1}{2}\right) - iz\left(\frac{\lambda^2-1}{2}\right)\right]^2}, \tag{3.51}$$

que en coordenadas $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$ es

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{2q}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^2} d\lambda. \tag{3.52}$$

Para ϕ_0 la integral de Penrose tiene un término λ^0, de manera que la f que recupera las componentes espinoriales ϕ_p del campo eléctrico de una carga puntual en el origen es

$$f(\lambda, u+\lambda\bar{\zeta}, \zeta+\lambda v) = \frac{2q}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^2}. \tag{3.53}$$

El polinomio del denominador tiene las raíces $\lambda_1 = \frac{y+iz}{r+x}$ y $\lambda_2 = -\frac{y+iz}{r-x}$ que en coordenadas esféricas dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, son $\lambda_1 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$ y $\lambda_2 = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$. Como el contorno de integración es un círculo de radio 1, para puntos (r, θ, φ) tales que $\theta \in [0, \pi/2)$, el contorno encerrará sólo a λ_1, mientras que para puntos tales que $\theta \in (\pi/2, pi]$, el contorno encerrará sólo a λ_2; en ambos casos las integrales pueden evaluarse mediante el teorema de los residuos (2.3.3), por ejemplo si el contorno encierra a λ_1

$$\begin{aligned}
\phi_p &= \frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^p \frac{2q}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^2} d\lambda \\
&= \frac{2q}{2\pi i}\oint \frac{\lambda^p}{\left[\bar{\zeta}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\right]^2} \\
&= 2q\left(\frac{\lambda^p}{\bar{\zeta}^2(\lambda-\lambda_2)^2}\right)'\Bigg|_{\lambda=\lambda_1} \\
&= \frac{q(y+iz)^{p-1}(r^2-x^2)}{2r^3}\left\{(p-2)(r+x)^{-p} + p(r+x)^{1-p}(r-x)^{-1}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Enceerrando el otro polo se obtiene el negativo de ϕ_p.

Usando esta formula para los diferentes valores de p, se tiene

- $p = 0, \quad \phi_0 = q\dfrac{iz-y}{r^3} = iE_z - E_y$
- $p = 1, \quad \phi_1 = q\dfrac{x}{r^2} = E_x$
- $p = 2, \quad \phi_2 = q\dfrac{iz+y}{r^3} = iE_z + E_y.$

Por lo tanto la función (3.53) recupera perfectamente las componentes del campo producido por una carga puntual estática q.

La función (3.53) es analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos λ_1 y λ_2, los cuales dependen de las coordenadas del punto donde se mide el campo, de manera que la elección de la posición del contorno también depende de estas coordenadas.

3.4.3. Dipolo eléctrico

A partir del campo de una carga puntual dado por la Ley de Coulomb (3.48), es posible obtener el campo de un dipolo eléctrico: sistema que consta de dos cargas opuestas de la misma magnitud q, separadas por una distancia d, suficientemente pequeña comparada con la distancia de observación del campo r. El campo se obtiene haciendo actuar el operador $(-\vec{p}\cdot\nabla)$ sobre la función $\vec{r}/r^3$, donde $\vec{p}$ es el vector de momento dipolar dado por $\vec{p} = q\vec{d}$, con $\vec{d}$ un vector que va de la carga negativa a la positiva cuya norma es la distancia d y ∇ en coordenadas cartesianas (x, y, z). En efecto, tomando componentes en notación de índices

$$\begin{aligned} -p_j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{r^3}\right) &= -p_j \left\{ \delta^i_j \frac{1}{r^3} + x^i \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2x^k \delta^k_j}{r^5} \right\} \\ &= 3\frac{p_j x^j}{r^5} x^i - \frac{p_i}{r^3}. \end{aligned}$$

Estas son las componentes del campo de un dipolo $\vec{p}$ en el origen a una distancia $r \gg d$ [7]

$$\vec{E} = \frac{3\hat{r}(\vec{p}\cdot\hat{r}) - \vec{p}}{r^3}. \tag{3.55}$$

Este campo es estático y junto con $\vec{B} = 0$, define un campo electromagnético que satisface las ecuaciones (2.1), por lo tanto tiene representación integral de Penrose.

Por lo tanto, si la función (3.53) representa el campo de una carga puntual a través de la integral (3.24), se puede obtener a partir de ella, directamente aplicando el operador $(-\vec{p}\cdot\nabla)$ en las coordenadas adecuadas, una función que representa el campo de un dipolo a través de (3.24). El operador gradiente en coordenadas $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$ es

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right)\hat{j} + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right)\hat{k}, \tag{3.56}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_{0_{dipolo}} = (-\vec{p}\cdot\nabla)\phi_{0_{carga}} &= (-\vec{p}\cdot\nabla)\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{2}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint (-\vec{p}\cdot\nabla)\left(\frac{2}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^2}\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(2\sqrt{2})\left[(ip_z - p_y)\lambda^2 - 2p_x\lambda + (p_y + ip_z)\right]}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^3} d\lambda. \end{aligned}$$

Nótese que el factor q ya no aparece pues está contenido en la definición de $\vec{p}$. Dado que la componente ϕ_0 tiene el factor λ^0, la f correspondiente a la representación integral de Penrose del campo de un dipolo es

$$f(\lambda, u+\lambda\bar{\zeta}, \zeta+\lambda v) = \frac{(2\sqrt{2})\left[(ip_z - p_y)\lambda^2 - 2p_x\lambda + (p_y + ip_z)\right]}{\left[\lambda(u+\lambda\bar{\zeta}) - (\zeta+\lambda v)\right]^3}. \tag{3.57}$$

Esta función al igual que (3.53) tiene las singularidades dadas por los ceros del denominador $\lambda_1 = \frac{y+iz}{r+x}$ y $\lambda_2 = -\frac{y+iz}{r-x}$ que en coordenadas esféricas dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, son $\lambda_1 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$ y $\lambda_2 = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$, de manera que si el contorno es un círculo de radio 1 sólo encerrará a uno de los polos, dependiendo del punto de observación, el polo λ_1 se tiene cuando $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ y λ_2 cuando $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

3.4.4. Haz Bessel adifraccional

Esta sección está basada en los resultados de la tesis [13].

Ya se mencionó anteriormente que existe un campo que resulta de la superposición de ondas planas cuyos vectores de propagación yacen sobre la superficie de un cono dado por el valor constante $\theta = \theta_0$ de las coordenadas latitudinal del sistema de coordenadas esféricas. Esta superposición se puede expresar en notación compleja como

$$\Psi_D(\vec{r},t) = \int_{-\pi}^{\pi} O(\varphi) e^{i[k_0(-z\ \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi + y\ \operatorname{sen}\theta_0\ \operatorname{sen}\varphi + x\cos\theta_0) + g(\varphi) - \omega t]} d\varphi, \tag{3.58}$$

ahí es claro que el vector $\vec{k}$ está parametrizado por θ y φ, con $\theta = \theta_0$. Después de factorizar algunos términos esta integral se puede escribir como

$$\Psi_D(\vec{r},t) = e^{i(k_x x - \omega t)} \int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi) e^{ik_t(-z\cos\varphi + y\ \operatorname{sen}\varphi)} d\varphi, \tag{3.59}$$

donde $k_x = k_0 \cos\theta_0$, $k_t = k_0\ \operatorname{sen}\theta_0$ y $A(\varphi) = O(\varphi)e^{ig(\varphi)}$ denominado espectro angular. Este tipo de soluciones a la ecuación escalar de onda, introducidas por J. Durnin en 1986, corresponden a campos ópticos cuyo perfil de intensidad transversal al eje de propagación permanece invariante. En el caso en que la función $A(\varphi) = [1/(2\pi)]e^{im(\varphi-\pi/2)}$ con m un número entero, el campo que resulta se llama haz Bessel adifraccional de orden m y tiene la expresión

$$\Psi_{Bessel}(\vec{r},t) = \frac{e^{i(k_x x - \omega t)}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\varphi-\pi/2)} e^{ik_t(-z\cos\varphi + y\ \operatorname{sen}\varphi)} d\varphi. \tag{3.60}$$

Este campo tiene representación integral de Penrose. Para llegar a ella primero hay que reescribir los términos que dependen de las coordenadas (x, y, z, ct) en coordenadas nulas $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$

$$\begin{aligned}
&-k_t z\cos\varphi + k_t y\ \operatorname{sen}\varphi + k_x x - \omega t \\
&= k_t\left(\frac{\bar{\zeta}-\zeta}{i\sqrt{2}}\right)\cos\varphi + k_t\left(\frac{\bar{\zeta}+\zeta}{\sqrt{2}}\right)\ \operatorname{sen}\varphi + k_x\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) - \omega\left(\frac{u+v}{c\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{u\left(k_x - \frac{\omega}{c}\right) - v\left(k_x - \frac{\omega}{c}\right) + \zeta k_t(i\cos\varphi + \ \operatorname{sen}\varphi) + \bar{\zeta}k_t(-i\cos\varphi + \ \operatorname{sen}\varphi)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_x - \frac{\omega}{c}\right)\left[u - \left(\frac{ik_t}{k_x - \frac{\omega}{c}}\right)e^{i\varphi}\bar{\zeta} + \left(\frac{ik_t}{k_x - \frac{\omega}{c}}\right)e^{-i\varphi}\zeta - \left(\frac{k_x + \frac{\omega}{c}}{k_x - \frac{\omega}{c}}\right)v\right].
\end{aligned}$$

Ahora, definiendo la variable compleja $\lambda \equiv \frac{-ik_t}{k_x - \omega/c}e^{i\varphi}$, por lo que $d\lambda = \frac{k_t}{k_x-\omega/c}e^{i\varphi}d\varphi$ y usando que el cuadrivector de onda $(\vec{k}, \omega/c)$ es luxoide i.e. $k_t^2 + k_x^2 = \omega^2/c^2$, se tiene que todo es igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_x - \frac{\omega}{c}\right)\left[u + \lambda\bar{\zeta} + \left(\frac{k_t^2}{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right)\lambda^{-1}\left(\zeta - \left(\frac{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}{k_t^2}\right)\lambda v\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(k_x - \frac{\omega}{c}\right)\left[u + \lambda\bar{\zeta} - \lambda^{-1}(\zeta + \lambda v)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el haz Bessel adifraccional se expresa como la integral de contorno

$$\Psi_{Bessel}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi i}\left(i\frac{k_x - \omega/c}{k_t}\right)^m e^{-im(\pi/2)} \oint e^{\frac{i(k_x-\omega/c)}{\sqrt{2}}\left\{(u+\lambda\bar{\zeta}) - \lambda^{-1}(\zeta+\lambda v)\right\}} \lambda^{m-1} d\lambda, \tag{3.61}$$

la cual claramente es una expresión de la forma (3.24). Este ejemplo ilustra correctamente cómo debe ser la elección de la superposición de ondas planas para tener soluciones que tengan representación de Penrose.

Con los ejemplos ya vistos se concluye este capítulo. Lo siguiente es ver otras representaciones integrales que pueden relacionarse con lo visto hasta aquí.

Capítulo 4

Representaciones integrales de Whittaker

En un artículo publicado por E.T. Whittaker en 1903 [8], se encuentra que las ecuaciones de Laplace y de onda tienen soluciones generales dadas a través de representaciones integrales. Dado que las ecuaciones de Maxwell sin fuentes implican tanto la ecuación de Laplace, para campos estáticos y la ecuación de onda, para campos más generales, el estudio de las soluciones dadas por Whittaker es relevante y complementario a la representación de Penrose.

4.1. Ecuación de Laplace

En [8] aparece que la solución general de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{4.1}$$

está dada por

$$\Phi=\int_0^{2\pi} f(z+ix\cos\psi+iy\,\operatorname{sen}\psi,\psi)d\psi, \tag{4.2}$$

donde f es una función arbitraria de los argumentos $z+ix\cos\psi+iy\,\operatorname{sen}\psi$, que se llamará en adelante *argumento de Whittaker*, y ψ.

Por ejemplo, el caso más simple del potencial newtoniano de una partícula de masa m, satisface la ecuación de Laplace. Si la partícula se encuentra en el punto (a,b,c), el potencial en cualquier punto (x,y,z) es

$$\frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{(z+ix\cos\psi+iy\,\operatorname{sen}\psi)-(c+ia\cos\psi+ib\,\operatorname{sen}\psi)}, \tag{4.3}$$

que como función de (x,y,z) es una expresión del tipo (4.2).

Para los detalles de la deducción se puede ir directamente al artículo. En esta sección se presentarán sólo los resultados importantes que serán de utilidad para desarrollar otros resultados interesantes, como las representaciones de Whittaker de las soluciones a la ecuación de Laplace en diferentes sistemas de coordenadas y algunas relaciones entre funciones especiales.

4.1.1. Coordenadas esféricas

En el caso particular de la soluciones separables de la ecuación de Laplace en coordendas esféricas (r, θ, φ), relacionadas con las coordendas cartesianas (x, y, z) por

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{4.4}$$

las soluciones separables independientes son

$$\Phi_1(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{4.5}$$

y

$$\Phi_2(r, \theta, \varphi) = r^{-n-1} Y_n^m(\theta, \varphi), \tag{4.6}$$

donde $Y_n^m(\theta, \phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$, con n y m enteros son los armónicos esféricos. Algunos armónicos esféricos son

$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}$
$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{-i\varphi}$
$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{i\varphi}$

Tabla 4.1: Armónicos esféricos con $n = 0, 1$; $-n \leq m \leq n$

Considerando que las funciones asociadas de Legendre tienen representación integral

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\cos\psi)^n \cos m\psi d\psi, \tag{4.7}$$

la solución separable Φ_1 se puede expresar como

$$\Phi_1(r, \theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)^n e^{im\psi} d\psi, \tag{4.8}$$

la cual claramente tiene la forma (4.2), tal y como aparece en [8]. En ese artículo no se encuentra la expresión para el caso de la solución Φ_2, sin embargo se propone que su representación integral sea

$$\Phi_2(r, \theta, \varphi) = r^{-n-1} Y_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z+ix\cos\psi+iy \operatorname{sen}\psi)^{-n-1} e^{im\psi} d\psi, \tag{4.9}$$

análogamente al caso de la Φ_1. Si se eligen por ejemplo $n = 0, m = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)^{-1} d\psi \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\lambda}{\left(\frac{ix+y}{2}\right)\lambda^2 + z\lambda + \left(\frac{ix-y}{2}\right)} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\lambda}{\left(\frac{y+ix}{2}\right)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)},
\end{aligned}$$

donde se introdujo la variable compleja $\lambda \equiv e^{i\psi}$, por lo que ahora la integral es sobre un círculo de radio $R = 1$ en el plano complejo, que encierra a alguno de los polos simples de la función, λ_1

o λ_2, los cuales se pueden conocer obteniendo las raíces del denominador, usando fórmula general se encuentra que las raíces son $\lambda_1 = r - z/ix + y$ y $\lambda_2 = -r - z/ix + y$. Si el contorno encierra por ejemplo a λ_1, se puede evaluar la integral usando el teorema (2.3.2), de manera que todo es igual a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\left(\frac{ix+y}{2}\right)}\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_2}\right]_{\lambda=\lambda_1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{r},\end{aligned}$$

lo cual es $r^{-1}Y_0^0$. Si el contorno encierra a λ_2, es claro que la integral vale

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\left(\frac{ix+y}{2}\right)}\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_1}\right]_{\lambda=\lambda_2}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{r},\end{aligned}$$

que es el negativo de la solución anterior.

Siguiendo un procedimiento similar, se encontró que la fórmula (4.9), funciona para los casos $n = 1, m = 0$

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos\psi + iy\ \mathrm{sen}\,\psi)^{-2}d\psi\\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda d\lambda}{\left[\left(\frac{ix+y}{2}\right)\lambda^2 + z\lambda + \left(\frac{ix-y}{2}\right)\right]^2}\\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda d\lambda}{\left(\frac{y+ix}{2}\right)^2(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2}\\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{\left(\frac{ix+y}{2}\right)^2}\left[\frac{\lambda}{(\lambda-\lambda_2)^2}\right]'_{\lambda=\lambda_1}\\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r^3},\end{aligned}$$

que es $r^{-2}Y_1^0$; y para $n = 1, m = 1$

$$\begin{aligned}&-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos\psi + iy\ \mathrm{sen}\,\psi)^{-2}e^{i\psi}d\psi\\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda^2 d\lambda}{\left(\left(\frac{ix+y}{2}\right)\lambda^2 + z\lambda + \left(\frac{ix-y}{2}\right)\right)^2}\\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda^2 d\lambda}{\left(\frac{y+ix}{2}\right)^2(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2}\\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{\left(\frac{ix+y}{2}\right)^2}\left[\frac{\lambda^2}{(\lambda-\lambda_2)^2}\right]'_{\lambda=\lambda_1}\\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{(x+iy)}{r^3},\end{aligned}$$

que es $r^{-2}Y_1^1$.

En los últimos dos ejemplos, al igual que en el primero, se usó un contorno que encierra solamente al polo doble λ_1 y la evaluación se hizo calculando el residuo de la función en el polo, usando el teorema (2.3.3). En el caso de elegir un contorno que encierre solamente al polo doble λ_2, en ambos ejemplos, la integral vale el negativo de lo que ya se obtuvo.

Por lo tanto, la solucion separable Φ_2 tiene la representación integral de Whittaker (4.9). Nótese que esta representación difiere de la (4.8) en que el exponente del argumento de Whittaker $(-n-1)$, es el mismo que el del término radial en la solución, pero no coincide con ser el subíndice del armónico esférico.

4.1.2. Coordenadas cilíndricas

En el sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), cuya relación con las coordendas cartesianas (x, y, z) está dada por las fórmulas

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi, \quad z = z, \tag{4.10}$$

la ecuación de Laplace admite la solución separable

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = J_m(k\rho)e^{im\varphi}e^{kz}, \tag{4.11}$$

donde $J_m(k\rho)$ son funciones de Bessel de primera clase con k constante y m entero. Esta solución tiene representación integral en la forma (4.2).

Las funciones de Bessel de primera clase con m entero, tienen representación integral

$$J_m(k\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k\rho \operatorname{sen}\psi - m\psi)}d\psi, \tag{4.12}$$

tras algunas transformaciones, se encuentra que (4.11) tiene la forma (4.2)

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = J_m(k\rho)e^{im\varphi}e^{kz} = \frac{i^m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[k(z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)]e^{im\psi}d\psi. \tag{4.13}$$

Las ecuaciones (4.13) y (4.8) pueden ser fácilmente relacionadas, obteniendo así una relación entre funciones especiales pues

$$\begin{aligned}
i^{-m}J_m(k\rho)e^{im\varphi}e^{kz} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp[k(z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)]e^{im\psi}d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k(z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi))^n\right\} e^{im\psi}d\psi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)^n e^{im\psi}d\psi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k^n r^n Y_n^m(\theta, \varphi),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se omitieron los factores de normalización que aparecen en (4.8) para conservar la convención de que $J_0(0) = 1$, como se verá en breve. De manera que se tienen las funciones de Bessel expresadas como el producto de un término exponencial de la coordenada z por una serie infinita de términos radiales por funciones asociadas de Legendre

$$J_m(kr \operatorname{sen}\theta) = i^m e^{-kr\cos\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(kr)^n P_n^m(\cos\theta), \tag{4.14}$$

aquí r y θ son las coordenadas radial y latitudinal de las coordenadas esféricas. De aquí se sigue que

$$J_0(kr \operatorname{sen}\theta) = e^{-kr\cos\theta}\left\{P_0^0(\cos\theta) + krP_1^0(\cos\theta) + \frac{1}{2}(kr)^2P_2^0(\cos\theta) + \cdots\right\}, \tag{4.15}$$

por lo que la función de Bessel de orden cero evaluada en $r = 0$

$$J_0(0) = P_0^0 = 1, \tag{4.16}$$

consistente con la convención elegida.

4.1.3. Coordenadas esferoidales

Se considera el caso de la solución separable de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales "alargadas" [1], (α, β, φ) que están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) a través de la transformación

$$x = a \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos\varphi, \quad y = a \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = a\cosh\alpha\cos\beta, \tag{4.17}$$

con a constante. Las soluciones separables son [14]

$$\Phi(\alpha, \beta, \varphi) = P_n^m(\cosh\alpha)P_n^m(\cos\beta)e^{im\varphi}. \tag{4.18}$$

Para encontrar la representación integral de Whittaker de (4.18), se consideró lo que ya se sabe: la representación de una solución separable de la ecuación de Laplace que involucra funciones asociadas de Legendre, tiene una función $(z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi)^n e^{im\psi}$, lo cual ya se vio en (4.8) y (4.9). Por lo que se propone que esta misma función recupere la soluciones en coordenadas esferoidales alargadas.

Escribiendo el argumento de Whittaker en coordenadas esferoidales alargadas, se tiene

$$\begin{aligned} z + ix\cos\psi + iy \operatorname{sen}\psi &= a\cosh\alpha\cos\beta + ia \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos\varphi\cos\psi + iya \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \\ &= a\cosh\alpha\cos\beta + ia \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos(\varphi - \psi), \end{aligned}$$

entonces la representación integral de Whittaker para las soluciones separables en estas coordenadas se propone como

$$\Phi(\alpha, \beta, \varphi) = P_n^m(\cosh\alpha)P_n^m(\cos\beta)e^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi a^n}\int_0^{2\pi}(a\cosh\alpha\cos\beta + ia \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos(\varphi - \psi))^n e^{im\psi}d\psi, \tag{4.19}$$

Se encuentra que en efecto, esta fórmula se cumple; por ejemplo eligiendo $m = 0$ y $n = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}(a\cosh\alpha\cos\beta + ia \operatorname{senh}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos(\varphi - \psi))\,d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\cosh\alpha\cos\beta\int_0^{2\pi}d\psi \\ &= \cosh\alpha\cos\beta \\ &= P_1^0(\cosh\alpha)P_1^0(\cos\beta). \end{aligned}$$

[1] del ingles *prolate spheroidal coordinates*

Ahora para $m = n = 1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}(a\cosh\alpha\cos\beta + ia\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\cos(\varphi-\psi))\,e^{i\psi}d\psi\\
&= \frac{i}{2\pi}\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\left\{\cos\varphi\int_0^{2\pi}\cos\psi e^{i\psi}d\psi + \ \operatorname{sen}\varphi\int_0^{2\pi}\ \operatorname{sen}\psi e^{i\psi}d\psi\right\}\\
&= \frac{i}{2\pi}\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\left\{\cos\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\psi d\psi + i\ \operatorname{sen}\varphi\int_0^{2\pi}\ \operatorname{sen}^2\psi d\psi\right\}\\
&= \frac{i}{2\pi}\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\left\{\cos\varphi(\pi) + i\ \operatorname{sen}\varphi(\pi)\right\}\\
&= \frac{i}{2}\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\ e^{i\varphi}\\
&= \frac{1}{2}(1-\cosh^2\alpha)^{1/2}(1-\cos^2\beta)^{1/2}e^{i\varphi}\\
&= \frac{1}{2}P_1^1(\cosh\alpha)P_1^1(\cos\beta)e^{i\varphi}.
\end{aligned}
$$

Como último ejemplo se elige $m = 1$ y $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{2\pi}(a\cosh\alpha\cos\beta + ia\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\cos(\varphi-\psi))^2\,e^{i\psi}d\psi\\
&= \frac{1}{2\pi}(-\ \operatorname{senh}^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\beta)\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi-\psi)e^{i\psi}d\psi + \frac{i}{\pi}\cosh\alpha\cos\beta\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\psi)e^{i\psi}d\psi\\
&= \frac{i}{\pi}\cosh\alpha\cos\beta\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\left\{\cos\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\psi d\psi + i\ \operatorname{sen}\varphi\int_0^{2\pi}\ \operatorname{sen}^2\psi d\psi\right\}\\
&= \frac{i}{\pi}\cosh\alpha\cos\beta\ \operatorname{senh}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\left\{\pi e^{i\varphi}\right\}\\
&= \cosh\alpha(1-\cosh^2\alpha)^{1/2}\cos\beta(1-\cos^2\beta)^{1/2}e^{i\varphi}\\
&= P_2^1(\cosh\alpha)P_2^1(\cos\beta)e^{i\varphi}.
\end{aligned}
$$

De manera que para las soluciones en coordenadas esferoidales alargadas de la ecuación de Laplace se tiene que

$$
\Phi(\alpha,\beta,\varphi) = P_n^m(\cosh\alpha)P_n^m(\cos\beta)e^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi a^n}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos\psi + iy\ \operatorname{sen}\psi)^n e^{im\psi}d\psi, \qquad (4.20)
$$

por lo que es posible establecer una relación entre esta solución y (4.13) análoga a (4.14)

$$
\begin{aligned}
i^{-m}J_m(k\rho)e^{im\varphi}e^{kz} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[k(z + ix\cos\psi + iy\ \operatorname{sen}\psi)]e^{im\psi}d\psi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k(z + ix\cos\psi + iy\ \operatorname{sen}\psi))^n\right\}e^{im\psi}d\psi\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z + ix\cos\psi + iy\ \operatorname{sen}\psi)^n e^{im\psi}d\psi\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k^n a^n P_n^m(\cosh\alpha)P_n^m(\cos\beta)e^{im\varphi}.
\end{aligned}
$$

Como $\rho = a\,\mathrm{senh}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$, definiendo $\eta \equiv\ \mathrm{senh}\,\alpha$ y $\xi \equiv\ \mathrm{sen}\,\beta$, se tiene finalmente

$$J_m(ka\ \eta\ \xi) = i^m e^{-k\sqrt{(1+\eta^2)(1-\xi^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^n a^n P_n^m\left(\sqrt{1+\eta^2}\right) P_n^m\left(\sqrt{1-\xi^2}\right), \tag{4.21}$$

con k y a constantes, cuyas unidades son $1/$*longitud* y *longitud* respectivamente, de manera que la relación es consistente en unidades.

Ahora se considera el caso de las coordenadas esferoidales "achatadas" [2], (α, β, φ) que están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) a través de la transformación

$$x = a\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos\varphi, \quad y = a\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\ \mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = a\ \mathrm{senh}\,\alpha\cos\beta, \tag{4.22}$$

con a constante. En este caso las soluciones separables están dadas por

$$\Phi(\alpha, \beta, \varphi) = P_n^m(i\ \mathrm{senh}\,\alpha) P_n^m(\cos\beta) e^{im\varphi}. \tag{4.23}$$

Siguiendo un procedimiento análogo para el caso de las coordenadas esferoidales alargadas, las soluciones (4.23) tienen la representación integral

$$\Phi(\alpha, \beta, \varphi) = P_n^m(i\ \mathrm{senh}, \alpha) P_n^m(\cos\beta) e^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} \left(a\ \mathrm{senh}\,\alpha\cos\beta + ia\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos(\varphi-\psi)\right)^n e^{im\psi} d\psi. \tag{4.24}$$

Por ejemplo, escogiendo $m = 1$, $n = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \left(a\ \mathrm{senh}\,\alpha\cos\beta + ia\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos(\varphi-\psi)\right) e^{i\psi} d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} i\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta \left(\cos\varphi \int_0^{2\pi} \cos\psi e^{i\psi} d\psi +\ \mathrm{sen}\,\varphi \int_0^{2\pi}\ \mathrm{sen}\,\psi e^{i\psi} d\psi\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} i\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta \left(\cos\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\psi d\psi + i\ \mathrm{sen}\,\varphi \int_0^{2\pi}\ \mathrm{sen}\,\psi d\psi\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} i\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta \left(\cos\varphi(\pi) + i\ \mathrm{sen}\,\varphi(\pi)\right) \\
&= \frac{1}{2} i\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta e^{i\varphi} \\
&= \frac{1}{2} i(1+\ \mathrm{senh}^2\alpha)^{1/2}(1-\cos^2\beta)^{1/2} e^{i\varphi} \\
&= P_1^1(i\ \mathrm{senh}\,\alpha) P_1^1(\cos\beta) e^{i\varphi}.
\end{aligned}$$

Y para $m = 1$, $n = 2$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} (a\ \mathrm{senh}\,\alpha\cos\beta + ia\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\beta\cos(\varphi-\psi))^2 e^{i\psi} d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi a^2} \left((-a^2\cosh^2\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi-\psi) e^{i\psi} d\psi + 2ia^2\ \mathrm{senh}\,\alpha\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos\beta \int_0^{2\pi} \cos(\varphi-\psi) e^{i\psi} d\psi\right) \\
&= \frac{i}{\pi}\ \mathrm{senh}\,\alpha\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos\beta \left(\cos\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\psi d\psi + i\ \mathrm{sen}\,\varphi \int_0^{2\pi}\ \mathrm{sen}^2\psi d\psi\right) \\
&= \frac{i}{\pi}\ \mathrm{senh}\,\alpha\cosh\alpha\ \mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\ (\pi) e^{i\varphi} \\
&= i\ \mathrm{senh}\,\alpha(1+\ \mathrm{senh}^2\alpha)^{1/2}\cos\beta(1-\cos^2\beta)^{1/2} e^{1\varphi} \\
&= P_2^1(i\ \mathrm{senh}\,\alpha) P_2^1(\cos\beta) e^{i\varphi}.
\end{aligned}$$

[2]del ingles *oblate spheroidal coordinates*

4.1.4. Coordenadas toroidales

Otro sistema de coordenadas en que las soluciones de la ecuación de Laplace tienen conexión con las funciones asociadas de Legendre es el sistema de coordenadas toroidales (α, β, φ), cuya relación con las coordenadas cartesianas (x, y, z) está dada por

$$x = \frac{a \operatorname{senh} \alpha \cos \varphi}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\cosh \alpha - \cos \beta} \quad z = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}. \tag{4.25}$$

En estas coordenadas, la ecuación de Laplace admite soluciones separables dadas por [14]

$$\Phi(\alpha, \beta, \varphi) = \sqrt{2 \cosh \alpha - 2 \cos \beta} P^m_{n-1/2}(\cosh \alpha) e^{in\beta} e^{im\phi}. \tag{4.26}$$

Si $\Phi(\alpha, \beta, \varphi)$ es una solución a la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales la cual involucra funciones asociadas de Legendre, es natural proponer (después de los ejemplos ya vistos) que estas soluciones tengan la representación integral

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta, \varphi) &= \frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} (z + ix \cos \psi + iy \operatorname{sen} \psi)^n e^{im\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\cosh \alpha - \cos \beta} (\operatorname{sen} \beta + i \operatorname{senh} \alpha \cos \varphi \cos \psi + i \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) \right\}^n e^{im\psi} d\psi. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Usando esta fórmula para $n = 1$, $m = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\cosh \alpha - \cos \beta} (\operatorname{sen} \beta + i \operatorname{senh} \alpha \cos \varphi \cos \psi + i \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) \right\} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \int_0^{2\pi} d\psi \\ &= \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \\ &= (\cosh \alpha - \cos \beta)^{-1} P^0_0(\cosh \alpha) \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

el término de la penúltima igualdad es la coordenada z que en coordenadas esféricas es $r \cos \theta = r P^0_1(\cos \theta)$, por lo tanto es solución de la ecuación de Laplace.
Eligiendo $n = 1$, $m = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\cosh \alpha - \cos \beta} (\operatorname{sen} \beta + i \operatorname{senh} \alpha \cos \varphi \cos \psi + i \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) \right\} e^{i\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{i \operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \left(\cos \varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi + i \operatorname{sen} \varphi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \psi d\psi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{i \operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} e^{i\varphi} (\pi) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh \alpha - \cos \beta)^{-1} (1 - \cosh^2 \alpha)^{1/2} e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{2} (\cosh \alpha - \cos \beta)^{-1} P^1_1(\cosh \alpha) e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

esta solución corresponde a $\frac{i}{2}(x + iy)$ que en coordenadas esféricas es $\frac{i}{2} r (1 - \cos^2 \theta)^{1/2} e^{i\varphi} = -\frac{i}{2} r P^1_1(\cos \theta) e^{i\varphi}$, que es solución de la ecuación de Laplace.

Como último ejemplo se eligen $n = 2$, $m = 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{\cosh\alpha-\cos\beta}(\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{senh}\alpha\cos\varphi\cos\psi + i\operatorname{senh}\alpha\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi)\right\}^2 d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\cosh\alpha-\cos\beta)^2}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{senh}^2\alpha\cos^2\varphi\cos^2\psi - \operatorname{senh}^2\alpha\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi)d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\cosh\alpha-\cos\beta)^2}\left(\operatorname{sen}^2\beta\int_0^{2\pi}d\psi - \operatorname{senh}^2\alpha\cos^2\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\psi d\psi - \operatorname{senh}^2\alpha\operatorname{sen}^2\varphi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\psi d\psi\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\cosh\alpha-\cos\beta)^2}\big(\operatorname{sen}^2\beta(2\pi) - \operatorname{senh}^2\alpha\cos^2\varphi(\pi) - \operatorname{senh}^2\alpha\operatorname{sen}^2\varphi(\pi)\big) \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\alpha}{(\cosh\alpha-\cos\beta)^2} \\
&= (\cosh\alpha-\cos\beta)^{-2}\operatorname{sen}^2\beta + \frac{i}{2}(\cosh\alpha-\cos\beta)^{-2}(1-\cosh^2\alpha)^{1/2} \\
&= (\cosh\alpha-\cos\beta)^{-2}P_0^0(\cosh\alpha)\operatorname{sen}^2\beta - \frac{i}{2}(\cosh\alpha-\cos\beta)^{-2}P_1^1(\cosh\alpha).
\end{aligned}
$$

Esta solución corresponde a $z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, o en coordenadas esféricas $\frac{1}{2}r^2(3\cos^2\theta - 1) = r^2P_2^0(\cos\theta)$, que es solución de la ecuación de Laplace.

Por lo tanto, la fórmula (4.27) recupera soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales y aunque estas no corresponden completamente a las soluciones separables (4.26) siguen satisfaciendo la ecuación de Laplace y están en términos de funciones asociadas de Legendre. La dificultad parece radicar en el hecho de que para llegar a la expresión (4.26) hubo que introducir el factor $\sqrt{2\cosh\alpha - 2\cos\beta}$ para conservar la separabilidad y este factor no aparece en el argumento de Whittaker cuando se escribe en coordenadas toroidales.

4.2. Ecuación de onda

Como ya se mencionó anteriormente, el caso más general de campos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell sin fuentes es equivalente a campos que satisfacen la ecuación de onda. En [8] se encuentra que la solución más general de esta ecuación

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \kappa^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \tag{4.28}$$

con κ constante, está dada por la doble integral

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\operatorname{sen}\chi\cos\psi + y\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\psi + z\cos\chi + \frac{t}{\kappa}, \chi, \psi\right)d\chi d\psi, \tag{4.29}$$

donde f es una función arbitraria de los tres argumentos

$$x\operatorname{sen}\chi\cos\psi + y\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\psi + z\cos\chi + \frac{t}{\kappa},\ \chi \text{ y } \psi.$$

Este resultado se puede interpretar, y así lo hace el autor, como una superposición de ondas planas que se propagan en una dirección cuyos cosenos directores son $\operatorname{sen}\chi\cos\psi$, $\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\psi$ y $\cos\chi$. Los ángulos χ y ψ se integran sobre el dominio de una esfera, de manera que se tienen ondas planas en todas las direcciones de propagación posibles. Este resultado es conforme con lo que ya se había comentado durante la deducción de la fórmula de Penrose, de manera que la solución más general de la ecuación de onda está dada por una integral doble y sólo en el caso de tomar trenes de onda finitos o una cantidad finita de vectores de propagación, la solución está dada por una sola integral, como el caso de la fórmula de Penrose.

En el caso en que Θ sea una solución de la ecuación (4.28) de la forma $\Theta = \Phi e^{it}$, con Φ siendo una función sólo de x, y, z, se tiene

$$e^{it}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)=\kappa^2(i)^2e^{it}\Phi, \tag{4.30}$$

entonces Φ satisface la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\kappa^2\Phi=0. \tag{4.31}$$

Para encontrar la forma que adopta (4.29) en este caso, nótese que para conservar la separabilidad de Θ en la variable t, Φ debe ser de la forma

$$\Phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi,\chi,\psi)d\chi d\psi \tag{4.32}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Helmholtz (4.31), se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi,\chi,\psi)d\chi d\psi\\
&\quad +\kappa^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi,\chi,\psi)d\chi d\psi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{sen}^2\chi\cos^2\psi\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\ \mathrm{sen}^2\chi\ \mathrm{sen}^2\psi\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\cos^2\chi\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\kappa^2 f\right)d\chi d\psi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\kappa^2 f(\alpha,\chi,\psi)\right)d\chi d\psi,
\end{aligned}$$

con $\alpha \equiv x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi$. Esta ecuación se satisface si se impone que f satisfaga

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\kappa^2 f(\alpha,\chi,\psi)=0, \tag{4.33}$$

una solución particular de esta ecuación es $f = e^{i\kappa\alpha}g(\chi,\psi)$. Por lo tanto, regresando a la expresión (4.32), se tiene

$$\Phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\exp[i\kappa(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi)]g(\chi,\psi)d\chi d\psi \tag{4.34}$$

donde g es una función arbitraria, periódica en χ y ψ.

La ecuación de onda (4.28) con $\kappa = 1/c$ en coordenadas esféricas (r, θ, φ) admite soluciones separables dadas por

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=j_l(kr)Y_l^m(\theta,\varphi)e^{ikct}, \tag{4.35}$$

donde j_l son funciones de Bessel esféricas de primera especie, con k constante real, l y m enteros. Estas soluciones pueden usarse para expresar otras soluciones por superposición. Un ejemplo se encuentra en [15], donde

$$\exp ik(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi+y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi+z\cos\chi+ct)=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}i^l e^{ikct}j_l(kr)Y_l^m(\theta,\varphi)Y^{*m}_{\ l}(\chi,\psi). \tag{4.36}$$

Multiplicando ambos lados por $Y_{l'}^{m'}(\chi,\psi)\,\mathrm{sen}\,\chi$ e integrando en χ y ψ, por la ortogonalidad de los armónicos esféricos, se tiene

$$j_l(kr)Y_{lm}(\theta,\varphi)e^{ikct} = \frac{1}{4\pi i^l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\exp[ik(x\ \mathrm{sen}\,\chi\cos\psi + y\ \mathrm{sen}\,\chi\ \mathrm{sen}\,\psi + z\cos\chi + ct)]Y_l^m(\chi,\psi)\ \mathrm{sen}\,\chi\, d\chi d\psi, \tag{4.37}$$

que claramente es una expresión de la forma (4.34). De manera que esa es la representación integral de Whittaker para las soluciones separables de la ecuación de onda en coordenadas esféricas.

Con esto concluye este capítulo para pasar a la última sección donde se presentarán las conclusiones de este trabajo de tesis.

Capítulo 5

Conclusiones

Recapitulando, se dedujo la representación integral de Penrose para soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes a partir de una superposición de ondas planas que se propagan en todas las direcciones, esto como se sabe, corresponde a la solución más general y de acuerdo con Whittaker, estas soluciones pueden representarse mediante una integral doble. Sin embargo, para deducir la fórmula de Penrose que está dada no por una integral doble sino una integral de contorno en el plano complejo, se tuvo que hacer la consideración de no superponer ondas en todas las direcciones sino en un conjunto finito de ellas, lo que físicamente corresponde a trenes de onda finitos. Para estas soluciones la fórmula de Penrose funciona, como ya se vio en la deducción y en algunos ejemplos. Por lo tanto, la solución más general de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes no puede ser representada mediante la fórmula de Penrose, pero esta sirve para representar soluciones estáticas, lo que equivale a soluciones de la ecuación de Laplace que de acuerdo con Whittaker pueden representarse mediante una sola integral; y soluciones no estáticas que sean trenes de onda finitos.

El caso de la integral doble de Whittaker puede corresponder con un caso especial (pero difícil de tratar) de la fórmula de Penrose, donde la integral de contorno se extiende sobre todo el plano complejo, lo cual es equivalente a integrar sobre la esfera de Riemann, llevando la integral de contorno a una integral sobre la superficie de una esfera; i.e. una integral tal y como la de Whittaker.

Finalmente, las representaciones integrales de las soluciones a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, ya sea la de Penrose o las de Whittaker guardan aspectos interesantes pues a través de ellas es posible obtener relaciones entre soluciones, como los ejemplos de las relaciones entre funciones especiales que sin pasar a través de las integrales probablemente serían difíciles de identificar.

Bibliografía

[1] P. Dennery y A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2012).

[2] R. Penrose, «Solutions of the Zero-Rest-Mass Equations», Journal of Mathematical Physics **10**, 38-39 (1969).

[3] R. Penrose y M. MacCallum, «Twistor theory: An approach to the quantisation of fields and space-time», Physics Reports **6**, 241-315 (1973).

[4] R. Penrose, «Twistor quantisation and curved space-time», Int. J. Theor. Phys., 1: 61-99(May 1968)., `10.1007/BF00668831` (1968).

[5] R. O. Wells, «Complex manifolds and mathematical physics», Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **1**, 296-336 (1979).

[6] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter*, The Feynman Lectures on Physics (Basic Books, 2011).

[7] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics; 2nd ed.* (Wiley, New York, NY, 1975).

[8] E. T. Whittaker, «On the partial differential equations of mathematical physics», Mathematische Annalen **57**, 333-355 (1903).

[9] G. Torres del Castillo, «De la ecuación de Dirac a los espinores», Revista Mexicana de Física **33**, 115-137 (1987).

[10] R. Penrose, «Zero Rest-Mass Fields Including Gravitation: Asymptotic Behaviour», Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **284**, 159-203 (1965).

[11] J. W. Brown y R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, Eighth (McGraw-Hill Higher Education, Boston, MA, 2009).

[12] R. Silverman, *Introductory Complex Analysis*, Dover books on elementary and intermediate mathematics (Dover Publications, 1972).

[13] I. J. Macías, «Estudio de las propiedades de haces escalares y vectoriales estructurados», Tesis doct. (2022).

[14] N. Lebedev y R. Silverman, *Special Functions and Their Applications*, Dover Books on Mathematics (Dover Publications, 1972).

[15] G. Torres del Castillo, «A generating function for the spherical harmonics in p dimensions», Revista Mexicana de Física **59**, 248 (2013).