



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"MATRICES ALEATORIAS CON BANDA
DILUIDA: EL CASO NO HERMITIANO"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

MARISOL HERNÁNDEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ

No. de CVU: 1135839

NOVIEMBRE DE 2024

©2024 - Marisol Hernández Sánchez.

Derechos reservados

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi más profundo agradecimiento a mis padres, Carlos y Julia. Su inquebrantable confianza y apoyo han sido pilares fundamentales en cada una de mis decisiones. Sin su amor incondicional y constante, este trabajo no habría sido posible.

A mis hermanos, Carlos y Manuel, les agradezco por enseñarme, inspirarme y motivarme. Su paciencia y la felicidad que me han brindado han sido invaluableles.

Al Dr. José Antonio Méndez Bermúdez, mi asesor, le expreso mi más sincero agradecimiento por brindarme la oportunidad de trabajar bajo su guía. Su confianza, consejos y apoyo han sido fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

Al instituto de Física "Ing. Luis Rivera Terrazas", gracias por permitirme ser parte de su prestigioso programa de Maestría en Ciencias (Física).

Al comité de sinodales, el Dr. Felipe Rodríguez, la Dra. Ana Lilia González y la Dra. Zoraida Lazcano, les agradezco por sus acertados comentarios y sugerencias en la revisión de este trabajo.

A mis amigos y compañeros de Maestría, Gabriela Tapia y Amaury Durán, les agradezco sinceramente por su amistad, apoyo y compañerismo a lo largo de este viaje académico. Sus palabras de aliento, su disposición para colaborar y compartir ideas, y los momentos de compañerismo han sido esenciales para superar los desafíos y disfrutar de esta experiencia.

Quiero hacer una mención especial a Gabriela Tapia por su inquebrantable apoyo y su constante motivación. Gaby, tu entusiasmo y dedicación han sido una fuente de inspiración, y tu ayuda inestimable en los momentos más difíciles. Gracias por ser una amiga y compañera excepcional.

A CONAHCYT, le agradezco otorgarme el apoyo económico necesario para cursar la maestría. Su respaldo ha sido fundamental en mi camino académico.

Y finalmente, se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Eje IV. Modelo de Investigación abierta y compartida. Objetivo 13. Formar recursos humanos que

impacten positivamente el contexto social y científico como consecuencia de su accionar en una comunidad para lograr una educación desarrolladora de la transformación. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2021-2025.

*Dedicado con todo mi amor y gratitud a mis padres Carlos y Julia,
con respeto y cariño a mis hermanos Carlos y Manuel,
gracias por el amor incondicional que me han brindado.*

Matrices aleatorias con banda diluida: el caso no hermitiano

Resumen

En esta tesis, introducimos el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas con banda diluida (nHdBRM) como el conjunto de matrices reales no simétricas $N \times N$ cuyas entradas son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza uno si $|i-j| < b$ y cero en caso contrario, además los elementos no diagonales de la matriz dentro del ancho de banda b se fijan aleatoriamente en cero, de modo que la escasez α se define como la fracción de los $N(b-1)/2$ elementos independientes no nulos fuera de la diagonal de la matriz. Mediante un estudio numérico detallado demostramos que las propiedades espectrales del ensamble nHdBRM escalan con el parámetro $x = \gamma[(b\alpha)^2/N]^\delta$, donde $\gamma, \delta \sim 1$. Además, la longitud de localización normalizada β de las funciones propias sigue una ley de escala simple: $\beta = x/(1+x)$. También revisamos las propiedades espectrales del ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida.

Diluted banded random matrices: non-Hermitian case

Abstract

In this thesis, we introduce the non-Hermitian diluted banded random matrix (nHdBRM) ensemble as the set of $N \times N$ real non-symmetric matrices whose entries are independent Gaussian random variables with zero mean and variance one if $|i - j| < b$ and zero otherwise, moreover off-diagonal matrix elements within the bandwidth b are randomly set to zero such that the sparsity α is defined as the fraction of the $N(b - 1)/2$ independent non-vanishing off-diagonal matrix elements. By means of a detailed numerical study, we demonstrate that the spectral properties of the nHdBRM ensemble scale with the parameter $x = \gamma[(b\alpha)^2/N]^\delta$, where $\gamma, \delta \sim 1$. Moreover, the normalized localization length β of the eigenfunctions follows a simple scaling law: $\beta = x/(1 + x)$. We also review the spectral properties of the Hermitian diluted banded random matrix ensemble.

Publicaciones

Los resultados de esta tesis fueron publicados en el siguiente artículo:

- M. Hernández-Sánchez, G. Tapia-Labra, y J. A. Méndez-Bermúdez. Non-Hermitian diluted banded random matrices: Scaling of eigenfunction and spectral properties. *Phys. Rev. E*, 110:044124, Oct 2024.

En el anexo, al final de este trabajo, se incluye la portada del artículo anteriormente mencionado.

Participación en eventos

Se tuvieron las siguientes participaciones en eventos:

- Non-Hermitian diluted banded random matrices: Scaling of eigenfunction and spectral properties, M. Hernández Sánchez, J. A. Méndez Bermúdez, Meeting on Complex Systems & Stochastic Processes, Guadalajara, México (2024).
- Non-Hermitian diluted banded random matrices: Scaling of eigenfunction and spectral properties, M. Hernández Sánchez, J. A. Méndez Bermúdez, Random Matrix Theory and its Application, Cuernavaca, México (2024).

Índice de contenidos

Índice de contenidos	XI
Índice de figuras	XIII
1 Introducción	1
2 Antecedentes	4
2.1. La teoría de matrices aleatorias	4
2.1.1. Propiedades de autofunciones	5
2.1.2. Propiedades espectrales	6
2.2. Ensamble de matrices aleatorias de banda	8
2.2.1. Propiedades espectrales y de autofunciones del BRM	9
2.2.2. Parámetro universal de escalamiento para el BRM	12
3 Ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida	15
3.1. Definición del modelo HdBRM	15
3.2. Longitud de localización entrópica escalada del HdBRM	17
3.3. Escalamiento de la función longitud de localización entrópica escalada del HdBRM	18
3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM	20
4 Ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida	24
4.1. Definición del modelo nHdBRM	24
4.2. Longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM	25
4.3. Escalamiento de la longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM	25
4.4. Razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares	28
4.5. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del nHdBRM	30
5 Conclusiones	33
	XI

ÍNDICE DE CONTENIDOS

XII

Bibliografía

36

Índice de figuras

2.1. Esquemas de los vecinos de λ_i	7
2.2. Ejemplo del desdoblamiento de energía de una matriz del ensamble de matrices diagonales.	8
2.3. Visualización de las matrices de banda.	9
2.4. Ejemplo de las distribuciones de las diferencias de niveles consecutivos para una matriz de tamaño 1000×1000	10
2.5. ζ como función de b y x	11
2.6. Cantidades espectrales y de autofunciones promedio normalizadas como función de b y x	14
3.1. Visualización de las matrices de banda diluida.	16
3.2. Longitud de localización entrópica para el HdBRM.	19
3.3. Promedios estadísticos normalizados de las cantidades espectrales y de autofunciones como función de x y x^* para el HdBRM.	21
3.4. Correlación entre las cantidades espectrales y de autofunciones para el HdBRM.	22
4.1. Longitud de localización entrópica para el nHdbRM.	27
4.2. Promedios estadísticos normalizados de las cantidades espectrales y de autofunciones como función de x y x^* para el nHdbRM.	29
4.3. Correlación entre las cantidades espectrales y de autofunciones para el nHdbRM.	32

Introducción

Los modelos de matrices aleatorias (RM, por sus siglas en inglés) desempeñan un papel crucial para describir las propiedades estadísticas de sistemas complejos y procesos relacionados [1]: desde los ensambles de matrices gaussianas originales de Wigner y Dyson [2] (modelos de RM que son capaces de reproducir la estadística de los niveles de energía de núcleos de átomos pesados, sistemas caóticos cuantizados, sistemas desordenados y redes aleatorias [1]) hasta ensambles más recientes y elaborados, por ejemplo, aquellos que son relevantes para el problema de la localización de muchos cuerpos [3], mostrando así el gran avance de los modelos de RM.

Incluso desde los primeros años de la modelación con matrices aleatorias, el mismo Wigner se dio cuenta de la necesidad de perfeccionar los ensambles gaussianos para incorporar propiedades de sistemas físicos realistas. En este sentido, Wigner introdujo el hoy conocido modelo de RM con banda de Wigner [4, 5] (ver también las Refs. [1, 6–13]); un modelo que incorpora una banda efectiva y una diagonal creciente. En particular, el ancho de banda de este modelo, que cuantifica el rango de las interacciones, ha sido la principal base de otros modelos de RM propuestos para aplicaciones específicas. Como ejemplos podemos mencionar: el ensamble de matrices aleatorias con banda (BRM) [14–30] (introducido con el propósito de emular alambres desordenados cuasi-unidimensionales), el modelo de RM con banda decreciente como ley de potencia [31, 32] (utilizado para simular la transición metal-aislante de Anderson), los ensambles embebidos [33–35] (que toman en cuenta las complejas interacciones entre muchos cuerpos en núcleos complejos y en sistemas de muchos cuerpos), RM diseñados como modelos de sistemas caóticos cuantizados [36, 37] (donde el ancho y forma de la banda se obtienen mediante argumentos semiclásicos [7, 38]), entre muchos otros. Esta clase de modelos (véase también las referencias [1, 39–52]), aunque están lejos de ser exhaustivos, indican la gran variedad de modelos de RM con banda

disponibles para abordar un buen número de aplicaciones diferentes.

Además, también existen numerosas investigaciones sobre modelos de RM diluidos, en las cuales una fracción de sus elementos son cero. Ejemplos de estas investigaciones se encuentran en las referencias [53–66]. Sin embargo, hasta ahora son escasos los modelos de matrices aleatorias diluidas que incluyen un ancho de banda efectivo, es decir, modelos de RM de banda diluidos. Entre estos pocos modelos se encuentran: el modelo de RM diluido con banda de Wigner [49, 50], el modelo de RM diluido con banda decreciente según una ley de potencia [47, 51], el modelo de RM diluido con banda en bloques [48], y el ensamble Hermítico diluido BRM [67].

No obstante, la mayoría de las investigaciones mencionadas anteriormente se centran únicamente en modelos de RM hermitianos, aun cuando los ensambles de RM gaussianos no hermíticos fueron introducidos por Ginibre [68] en la década de los 60. La importancia de los modelos de RM no hermitianos se encuentra en que estos tienen aplicaciones directas en la física no hermítica, más conocida como mecánica cuántica no hermítica (ver por ejemplo [69, 70]), que es un campo relativamente nuevo de la física teórica y cambia la forma convencional del entendimiento de la mecánica cuántica, ya que explora las propiedades matemáticas de los operadores hamiltonianos no hermíticos (estos hamiltonianos pueden surgir en sistemas como sistemas cuánticos abiertos y sistemas ópticos no lineales, ver por ejemplo [71, 72]).

Es relevante mencionar que existen algunos estudios relacionados con modelos de RM no hermíticos diluidos, ver por ejemplo [73–83], así como estudios sobre modelos de RM no hermíticos con banda, ver por ejemplo [83, 84]. Pero no hemos encontrado investigaciones relacionadas en la combinación de estos dos modelos. Además, creemos que es necesario realizar estudios más detallados sobre los modelos de matrices aleatorias no hermitianas de banda.

Por lo que, con el objetivo de cerrar la brecha entre los modelos BRM diluidos y los hamiltonianos no hermitianos, en este trabajo introducimos y estudiamos un nuevo modelo de RM: el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas con banda diluida (nHdBRM, por sus siglas en inglés). Específicamente, mediante un exhaustivo análisis numérico buscamos y encontramos el escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones a través de la *longitud de localización entrópica escalada*, en otras palabras, identificamos un parámetro que relaciona los atributos del modelo (tamaño de la matriz, ancho de banda y escasez) de una forma no trivial y escala las propiedades de autovalores (la relación de las diferencias de los niveles próximos y los siguientes más próximos, r_C , y la relación de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares, r_{SV}) y de autofunciones (la longitud de localización entrópica escalada, β , y la razón de participación inversa, IPR).

La importancia de estudiar la ley de escalamiento (o parámetro de escalamiento) de un sistema radica en que, al encontrarla, nos permite entender que el comportamiento

del sistema se repite a diferentes escalas. Por ejemplo, si queremos estudiar cierta propiedad del BRM, podemos utilizar el *parámetro universal de escalamiento* (detallado en la sección 2.2.2 del Capítulo 2) para obtener la misma información eligiendo adecuadamente la combinación de los parámetros, banda b y tamaño de matriz N , de matrices de tamaño relativamente pequeño (por ejemplo, $N = 250, 500, 1000$), en lugar de usar matrices de gran tamaño (por ejemplo, $N = 10000, 50000, 100000$). De esta forma, se reduce drásticamente el tiempo de cálculo computacional. Otra manera más sencilla de definir el escalamiento es, como la reducción del número de variables en un problema mediante el uso de una invariancia bajo el cambio de escala. De esta forma, si conocemos la combinación adecuada de parámetros que se escalan, es posible realizar una predicción en las cantidades que se miden.

Los análisis numéricos de las propiedades espectrales y de autofunciones presentados en los capítulos siguientes se realizaron mediante programas computacionales desarrollados en **Fortran 90**. Estos programas generan matrices aleatorias con las características específicas de los modelos BRM, HdBRM y nHdBRM, las cuales se diagonalizan numéricamente mediante subrutinas de *LAPACK*. Este proceso permite obtener los autovalores λ_i y las autofunciones *derechas*, Ψ^i ($i = 1 \dots N$), esenciales para estudiar las propiedades discutidas en este trabajo.

Esta Tesis se estructura de la siguiente forma. En el Capítulo 2 presentamos un breve repaso de los modelos y de las cantidades más conocidas de la teoría de matrices aleatorias. Principalmente, nos enfocamos en estudiar y replicar resultados relacionados con las propiedades de autovalores y de autovectores del ensamble de matrices aleatorias de banda, poniendo especial atención al *parámetro universal de escalamiento* reportado en [14]. Más adelante, en el capítulo 3 replicamos el estudio del escalamiento de la longitud de localización entrópica normalizada de la referencia [67], y analizamos el escalamiento de las propiedades de autovalores y de autofunciones restantes (IPR, $r_{\mathbb{C}}$ y la razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores propios, $r_{\mathbb{R}}$) del modelo de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida no reportadas en dicho estudio. Posteriormente, en el Capítulo 4 describimos el escalamiento de las propiedades de autovalores y autovectores del modelo central de la tesis: el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida. Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos las conclusiones de la tesis.

Antecedentes

En este capítulo, presentamos brevemente los ensambles de matrices más conocidos de la teoría de matrices aleatorias, los cuales se utilizan como referencia en esta tesis. Además, introducimos las cantidades espectrales y de autofunciones más comunes que se estudian en estos ensambles de matrices. En particular, describimos el ensamble de matrices de banda y replicamos algunos resultados relacionados con el *parámetro universal de escalamiento* de los promedios estadísticos de las propiedades espectrales y de las autofunciones.

2.1. La teoría de matrices aleatorias

La teoría de matrices aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) apareció por primera vez en 1930 a través de la matemática estadística, pero no fue hasta 1970 que se le encontró una aplicación exitosa en física. Los primeros trabajos comenzaron con Wigner y Dyson, que inicialmente propusieron a la RMT como una forma de describir la estadística de niveles excitados de núcleos complejos [1, 2]. Sin embargo, esta teoría ha sido sumamente explorada en otras áreas más allá de la física nuclear. Por ejemplo, ha sido utilizada en: emulaciones de interacciones en redes biológicas globales [85], investigaciones de patrón de movilidad humana [86], problemas de detección de radares [87], etc. Sin duda, la RMT ha sido tan importante en las últimas décadas que ahora forma parte fundamental de la física teórica formativa.

El objetivo fundamental de la RMT es analizar las propiedades espectrales y de las autofunciones de ensambles de matrices cuyas entradas están determinadas por densidades de probabilidad conocidas. Entre estos ensambles, que se utilizan como referencia en esta tesis, se destacan principalmente los siguientes:

- **Ensamble de Poisson (PE, por sus siglas en inglés):** Consiste en un conjunto de matrices diagonales reales cuyas entradas son variables aleatorias gaussianas independientes.
- **Ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE, por sus siglas en inglés):** Este ensamble está compuesto por matrices reales y simétricas (esto es, matrices A que satisfacen $A^T = A$) cuyas entradas son variables aleatorias gaussianas independientes.
- **Ensamble Real de Ginibre (RGE, por sus siglas en inglés):** Comprende matrices reales no simétricas. Al igual que en el GOE, sus entradas son variables aleatorias gaussianas independientes.

Es importante mencionar que, en esta tesis, las variables aleatorias gaussianas independientes para estos ensambles tienen media 0 y varianza 1 para las entradas fuera de la diagonal, mientras que las entradas diagonales tienen media 0 y varianza 2.

Por otro lado, las principales propiedades espectrales y de autofunciones que se estudian de ensambles de la RMT, y que usaremos para estudiar el modelo central de la tesis, son presentadas en las subsecciones siguientes.

2.1.1. Propiedades de autofunciones

Para caracterizar las propiedades de autofunciones se usa comúnmente la llamada *entropía de Shannon*, S . Esta es una herramienta esencial para cuantificar la complejidad de los vectores propios de matrices aleatorias, así como de Hamiltonianos correspondientes a sistemas desordenados y cuánticos caóticos. Esta cantidad proporciona información cuantitativa del número de componentes principales presentes en un vector propio dentro de una base específica. Para un vector propio normalizado Ψ^i (esto es, $\sum_{m=1}^n |\Psi_m^i|^2 = 1$), la entropía de Shannon representa la medida de incertidumbre o información promedio contenida en dicho vector. La expresión para esta cantidad es [88]

$$S_i = - \sum_{m=1}^N (\Psi_m^i)^2 \ln(\Psi_m^i)^2, \quad (2.1)$$

donde m etiqueta a la m -ésima función propia obtenida de la diagonalización de una matriz de tamaño $N \times N$ perteneciente a un ensamble de RMT.

Además, otra cantidad con la que se puede caracterizar a las funciones propias es la *razón de participación inversa* (IPR por sus siglas en inglés), al igual que la entropía de Shannon, es una herramienta usada para analizar la estructura de los vectores

propios en una base dada. La IPR para la i -ésima función propia se define como [89]

$$\text{IPR}_i = \left[\sum_{m=1}^N |\Psi_m^i|^4 \right]^{-1}. \quad (2.2)$$

2.1.2. Propiedades espectrales

En cuanto a las propiedades espectrales, una de las formas más comunes de estudiar la estadística de los valores propios (también llamado espectro de energía) es calcular la *distribución de diferencias de niveles energéticos consecutivos*, $P(s)$. Esta función de distribución ha sido utilizada para distinguir la integrabilidad o caoticidad de sistemas cuánticos.

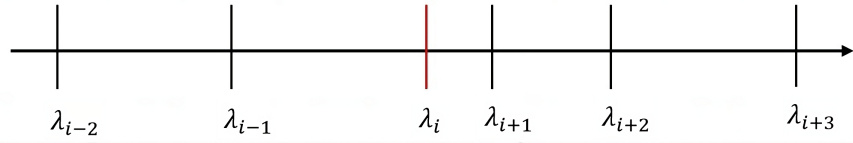
Entonces, sea un espectro real (esto es, los valores propios que resultan de la diagonalización de matrices reales y simétricas, por ejemplo, matrices pertenecientes al PE o al GOE) y ordenado, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_i$, la *diferencia del nivel consecutivo* para el i -ésimo valor propio (en la Figura 2.1a presentamos un ejemplo de los niveles consecutivos para λ_i) se define como

$$s_i = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\Delta}, \quad (2.3)$$

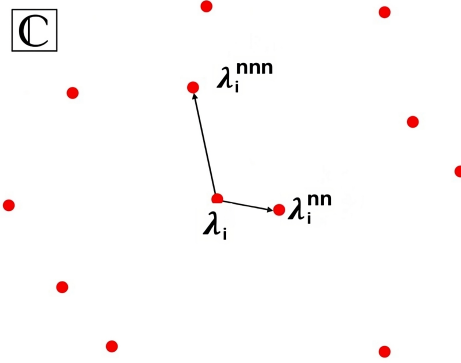
donde Δ es el espaciamiento promedio que normaliza al espectro. Δ se obtiene mediante el siguiente análisis: Al tener un espectro real y ordenado, es posible graficar N (el número del valor propio resultante de la diagonalización de una matriz de tamaño $N \times N$) en función de λ (valor numérico del valor propio). En particular, para este tipo de gráficos se ha notado que en cierto intervalo $[c, d]$, la curva que forman los autovalores se puede aproximar a una línea recta (como se muestra en la Figura 2.2a), este comportamiento indica una densidad constante de estados energéticos, por lo que Δ es el valor de la pendiente de esta línea, y se calcula usando la fórmula

$$\Delta = \frac{\lambda_d - \lambda_c}{d - c}. \quad (2.4)$$

El proceso de normalizar el espectro usando el valor Δ se le conoce como *desdoblamiento del espectro*. Entonces, para comprender mejor el cálculo de Δ , en la Figura 2.2a presentamos un ejemplo de desdoblamiento para una matriz diagonal de tamaño 1000×1000 perteneciente al PE. En este gráfico, se muestra que la curva que forman los autovalores en el intervalo $[250, 750]$ es una línea recta. Por lo que al dividir el espectro por $\Delta = (\lambda_{3N/4} - \lambda_{N/4}) / 500$, obtenemos el espectro normalizado o desdoblado, presentado en la Figura 2.2b.



(a) Esquema de los vecinos de λ_i para un espectro real. En este ejemplo, para λ_i , λ_{i+1} es el *nivel más próximo* (λ_i^{nn}) y λ_{i+2} es el *siguiente nivel más próximo* (λ_i^{nnn}). Cabe resaltar que no necesariamente los niveles consecutivos son los valores propios más cercanos a λ_i .



(b) Esquema de los vecinos de λ_i para un espectro complejo.

Figura 2.1: Esquemas de los vecinos de λ_i .

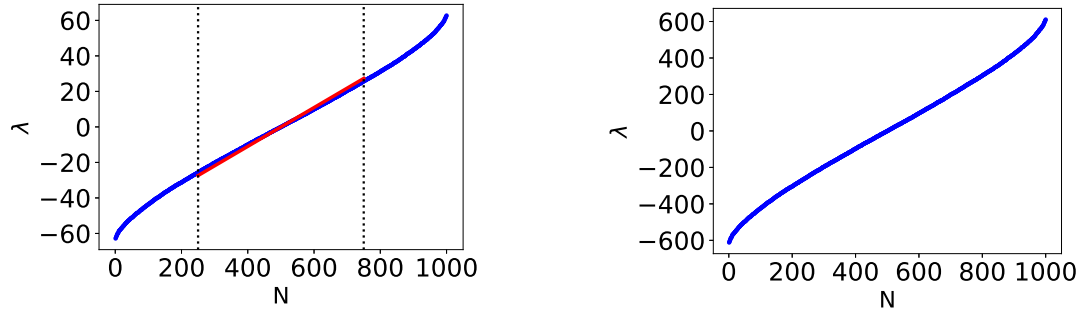
Sin embargo, existe otra alternativa para estudiar un espectro real y ordenado, y es *la razón de las diferencias de niveles consecutivos*, $r_{\mathbb{R}}$, que para el i -ésimo valor propio se define como [90]

$$r_{\mathbb{R}}^i = \frac{\min(\lambda_{i+1} - \lambda_i, \lambda_i - \lambda_{i-1})}{\max(\lambda_{i+1} - \lambda_i, \lambda_i - \lambda_{i-1})}. \quad (2.5)$$

La principal ventaja de $r_{\mathbb{R}}$ es que no requiere un desdoblamiento, ya que los cocientes de diferencias de niveles consecutivos son independientes de la densidad local de estados energéticos. Por lo que esta cantidad permite un cálculo más simple en comparación con $P(s)$.

Por otro lado, para estudiar un espectro complejo, se puede usar *la razón de las diferencias de los niveles próximos y los siguientes más próximos*, $r_{\mathbb{C}}$, cuya expresión para el i -ésimo valor propio es [91]

$$r_{\mathbb{C}}^i = \frac{|\lambda_i^{\text{nn}} - \lambda_i|}{|\lambda_i^{\text{nnn}} - \lambda_i|}; \quad (2.6)$$



(a) Espectro de energía de una matriz de tamaño 1000×1000 y $b = 1$. La línea roja sólida representa la recta de ajuste para los valores propios dentro del intervalo delimitado por las rectas verticales punteadas en negro $N = 250$ y $N = 750$.

(b) Espectro de energía normalizado con Δ [ver la ecuación (2.4)] de una matriz de tamaño 1000×1000 y $b = 1$.

Figura 2.2: Desdoblamiento de energía de una matriz diagonal de tamaño 1000×1000 .

donde λ_i^{nn} y λ_i^{nnn} son, respectivamente, el nivel próximo y el siguiente nivel más próximo de λ_i en \mathbb{C} . Esta cantidad tampoco necesita un desdoblamiento energético y puede ser calculada tanto para un espectro complejo como para uno puramente real. En las Figuras 2.1a y 2.1b presentamos un ejemplo de λ_i^{nn} y λ_i^{nnn} para λ_i de un espectro real y de un espectro complejo, respectivamente.

2.2. Ensamble de matrices aleatorias de banda

Con la intención de dar más realismo a las aplicaciones físicas que surgen de los ensambles de RMT, como el GOE, el RGE y el PE, fue necesario refinar o mejorar la estructura de los ensambles de matrices aleatorias. Debido a esto, se introdujo el ensamble de matrices aleatorias de banda (BRM, por sus siglas en inglés), que es el modelo base usado para imitar el comportamiento de alambres desordenados cuasi unidimensionales [14–30].

El BRM se define como un conjunto de matrices reales y simétricas de tamaño $N \times N$, cuyas entradas a_{ij} son variables aleatorias Gaussianas independientes con media cero y varianza $1 + \delta_{i,j}$ si $|i - j| < b$, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Aquí, el término *ancho de banda*, b , se refiere al número de elementos no nulos por fila de la matriz. Con esta definición, cuando $b = 1$ se recupera el ensamble de matrices diagonales (PE), por otro lado, si $b = N$ se recupera el GOE. Para visualizar y tener una mejor idea del concepto de banda, en la Figura 2.3 presentamos un conjunto de 6 valores de banda para una matriz de tamaño 1000×1000 ; la región azul representa

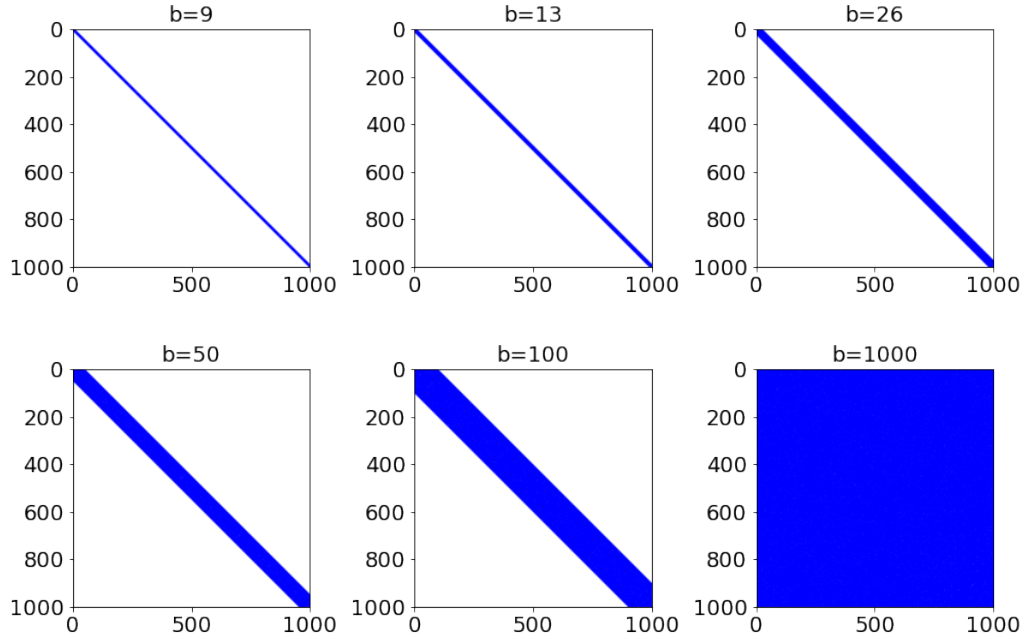


Figura 2.3: Representación comparativa de seis valores distintos de banda b para una matriz de tamaño 1000×1000 , mostrando cómo varía la estructura de la matriz en función de los diferentes valores de b .

los elementos no nulos de la matriz.

2.2.1. Propiedades espectrales y de autofunciones del BRM

Ahora, como parte de la revisión de antecedentes, presentamos a continuación algunos resultados relacionados con las propiedades espectrales y de autofunciones para el BRM.

En primer lugar, para el BRM, la propiedad espectral $P(s)$ se ha caracterizado en la literatura mediante la distribución de Brody, dada por la ecuación [92]

$$P(s) = (\zeta + 1)a_\zeta s^\zeta \exp(-a_\zeta s^{\zeta+1}), \quad a_\zeta = \left[\Gamma\left(\frac{\zeta + 2}{\zeta + 1}\right) \right]^{\zeta+1}, \quad (2.7)$$

donde ζ es conocido como *el parámetro de Brody* y depende del ancho de banda, b . Por lo que en el límite, cuando $b = N$ (esto es, matrices pertenecientes al GOE) se tiene que $\zeta = 1$, y la distribución de Brody se reduce a

$$P_{\text{DWD}}(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right), \quad (2.8)$$

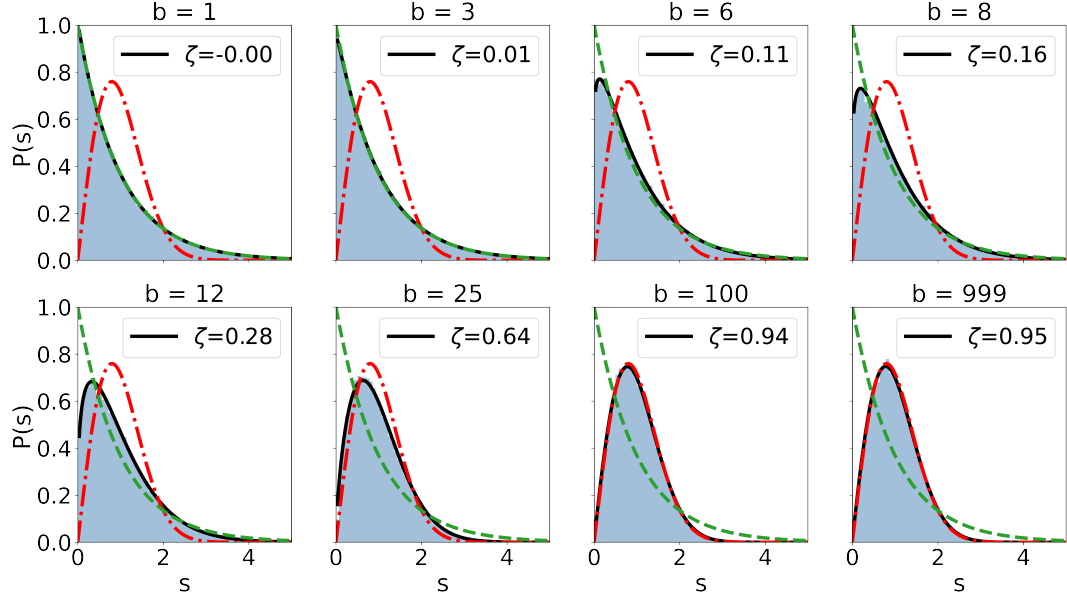


Figura 2.4: Distribución de las diferencias de niveles consecutivos para 8 valores de banda para una matriz de tamaño 1000×1000 . La línea sólida negra representa el ajuste numérico hecho con la distribución de Brody [ver ec.(2.7)], y ζ el parámetro de Brody obtenido para cada histograma. Las líneas punteadas verde y roja son las distribuciones de Poisson y Wigner-Dyson, respectivamente. Cada histograma se construyó utilizando 5×10^5 datos.

a esta expresión se le conoce como la distribución de Wigner-Dyson [2], y corresponde a un régimen caótico. Por otro lado, cuando $b = 1$ (es decir, cuando se tienen matrices pertenecientes al PE) entonces $\zeta = 0$, y la distribución (2.7) toma la forma de la *distribución de Poisson*

$$P_{\text{DP}}(s) = \exp(-s), \quad (2.9)$$

esta distribución corresponde a regímenes de funciones propias localizadas y, por lo tanto, a un espectro de energía completamente descorrelacionado.

En general, para cualquier histograma de diferencias de niveles consecutivos del BRM, es posible determinar el parámetro ζ de la ecuación (2.7) mediante un ajuste numérico. Un ejemplo de este ajuste se muestra en la Figura 2.4, en la cual presentamos las distribuciones que forman los histogramas de las diferencias de niveles consecutivos para 8 valores diferentes de banda de un ensamble de matrices de tamaño 1000×1000 perteneciente al BRM (considerando únicamente los valores propios en el intervalo $[N/4, 3N/4]$, ya que es la región que se utilizó para normalizar el espectro), donde la línea negra sólida representa el ajuste hecho con la ecuación (2.7) a los histogramas para obtener ζ . Asimismo, en esta figura se aprecia claramente la transición que ocurre en las distribuciones a medida que el valor de b aumenta, pasando

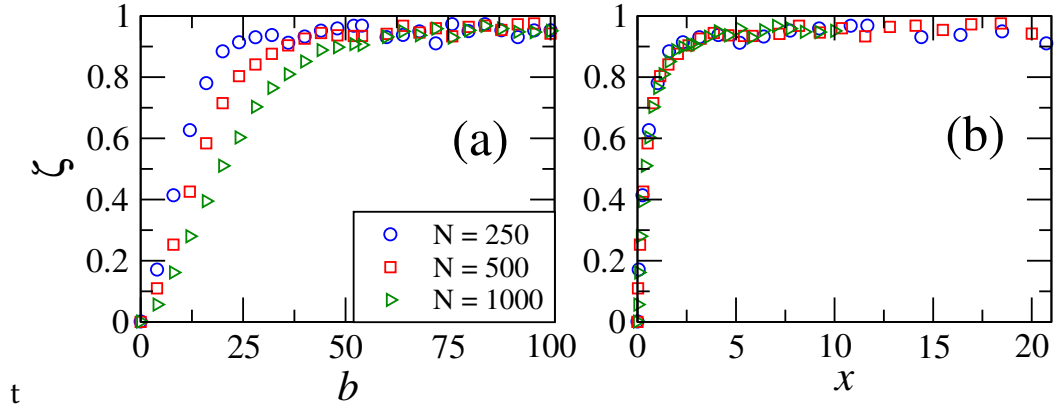


Figura 2.5: (a) Parámetro de Brody, ζ , en función del ancho de banda, b . (b) ζ como función del parámetro universal, x . Cada ζ fue calculado para un ensamble de 100 matrices de $N \times N$, con $N = 1000, 500, 250$.

de un régimen no caótico (descrito por la distribución de Poisson, y representada con una línea roja discontinua) a uno caótico (descrito por la distribución de Wigner-Dyson, y representada por una línea verde discontinua).

Por lo anteriormente presentado, para el BRM podemos calcular ζ como función de b para ensambles de diferentes tamaños de matrices. Por ello, en la Figura 2.5(a) mostramos el parámetro de Brody en función del valor de la banda para 3 ensambles de matrices de tamaño $N \times N$, con $N = 1000, 500$ y 250 . Se puede observar cómo para cada valor de N el comportamiento de parámetro de Brody es similar, simplemente las curvas se desplazan hacia la derecha conforme el valor N aumenta.

Por otro lado, con la finalidad de realizar una comparación con el parámetro de Brody vs. b , construimos los gráficos de los promedios estadísticos de cada una de las propiedades espectrales y de autofunciones restantes (S , IPR, $r_{\mathbb{C}}$ y $r_{\mathbb{R}}$) como función del ancho de banda b para 3 ensambles de matrices de tamaño $N \times N$, con $N = 1000, 500$ y 250 . Además, convenientemente realizamos una normalización a los promedios estadísticos de las propiedades, tomando como referencia los valores reportados de los casos límite del BRM (PE y GOE), de la siguiente forma

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{\langle S \rangle}{S_{\text{GOE}}}, \quad (2.10)$$

$$\langle \overline{\text{IPR}} \rangle = \frac{\langle \text{IPR} \rangle - \text{IPR}_{\text{PE}}}{\text{IPR}_{\text{GOE}} - \text{IPR}_{\text{PE}}}, \quad (2.11)$$

$$\langle \bar{r}_{\mathbb{C}} \rangle = \frac{\langle r_{\mathbb{C}} \rangle - r_{\text{CPE}}}{r_{\text{CGOE}} - r_{\text{CPE}}}, \quad (2.12)$$

$$\langle \bar{r}_{\mathbb{R}} \rangle = \frac{\langle r_{\mathbb{R}} \rangle - r_{\mathbb{RPE}}}{r_{\mathbb{RGOE}} - r_{\mathbb{RPE}}}, \quad (2.13)$$

donde $S_{\text{GOE}} \approx \ln(N/2.07)$, $\text{IPR}_{\text{PE}} = 1$, $\text{IPR}_{\text{GOE}} \approx N/3$ [89], $r_{\text{CPE}} \approx 0.5$ [79], $r_{\text{CGOE}} \approx 0.5688$ [79], $r_{\mathbb{RPE}} \approx 0.38$ [90], $r_{\mathbb{RGOE}} \approx 0.5359$ [90]. De esta forma, todas estas propiedades toman valores en el intervalo $[0, 1]$.

Entonces, en las Figuras 2.6(a)-2.6(d) presentamos, respectivamente, las cantidades promedio normalizadas $\langle \bar{S} \rangle$, $\langle \bar{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \bar{r}_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle \bar{r}_{\mathbb{R}} \rangle$ como función del parámetro b (para los promedios $\langle r_{\mathbb{R}} \rangle$ y $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ solo se ha usado la mitad del espectro, los valores propios que se localizan entre $N/4$ y $3N/4$, pero estadísticamente se ha observado que los promedios no varían significativamente si usamos o no el espectro completo). Observamos que las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. b (donde X representa S , IPR , $r_{\mathbb{C}}$ o $r_{\mathbb{R}}$) tienen un comportamiento funcional similar (estas se desplazan hacia la izquierda conforme N disminuye) a las de las curvas ζ vs b , ver Figura 2.5.

2.2.2. Parámetro universal de escalamiento para el BRM

El escalamiento de las propiedades espectrales y de funciones propias para el BRM fue reportado en la referencia [14]; fue encontrado mediante un análisis numérico y años después se demostró matemáticamente, véase también las referencias [19, 21–23]. Se demostró que estas propiedades están determinadas por la razón

$$x = \frac{b^2}{N}, \quad b^2 \gg N, \quad (2.14)$$

específicamente se encontró que las propiedades de las funciones propias del modelo BRM, caracterizadas por la *longitud de localización escalada* β (ver la ecuación (3.4) definida más adelante) se escalan como función

$$\beta = \frac{\Gamma x}{1 + \Gamma x}, \quad (2.15)$$

con $\Gamma \sim 1$. Es relevante mencionar que se ha comprobado la validez del escalamiento descrito por la ecuación (2.15) cuando el parámetro de escala x se define adecuadamente, aplicándose tanto al modelo del rotor pateado [24, 93, 94] (un sistema cuántico-caótico con matriz hamiltoniana aleatoria) como al modelo unidimensional de Anderson y al modelo de Lloyd [95].

La ecuación (2.14) es conocida en la literatura como el *parámetro universal de escalamiento* del BRM, e implica que existe una combinación infinita de valores N y b para un solo valor fijo de la ecuación (2.14). Por lo que para verificar esta idea, en

la Figura 2.5(b) presentamos el parámetro de Brody ζ cómo función del parámetro universal x y también en las Figuras 2.6(e)-2.6(h) presentamos las cantidades promedio normalizadas $\langle \bar{X} \rangle$ como función de x y observamos como todas las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. x y ζ vs. x colapsan en una sola, comprobando así claramente la validez de la ecuación (2.14).

En conclusión, dado que estudiar la propiedad espectral $P(s)$ puede ser un proceso laborioso y complejo (como se mostró para el modelo BRM), usaremos únicamente la cantidad $r_{\mathbb{R}}$ para estudiar los espectros reales y ordenados del modelo central de esta tesis.

Hasta ahora, hemos logrado estudiar y replicar exitosamente los resultados relacionados con el análisis de escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del BRM previamente publicados en la literatura [2, 14, 66, 78, 89–92]. Este proceso no solo nos ha permitido validar y calibrar nuestros programas computacionales, asegurando la precisión de los resultados que presentaremos en el próximo capítulo, sino que también nos ha proporcionado un entendimiento más profundo de la razón b^2/N . Este entendimiento es esencial para aplicar dicha razón, junto con las cantidades espectrales y de autofunciones (específicamente S , IPR y $r_{\mathbb{C}}$) introducidas en este capítulo, en los siguientes modelos presentados en esta tesis, que serán discutidos en los siguientes capítulos.

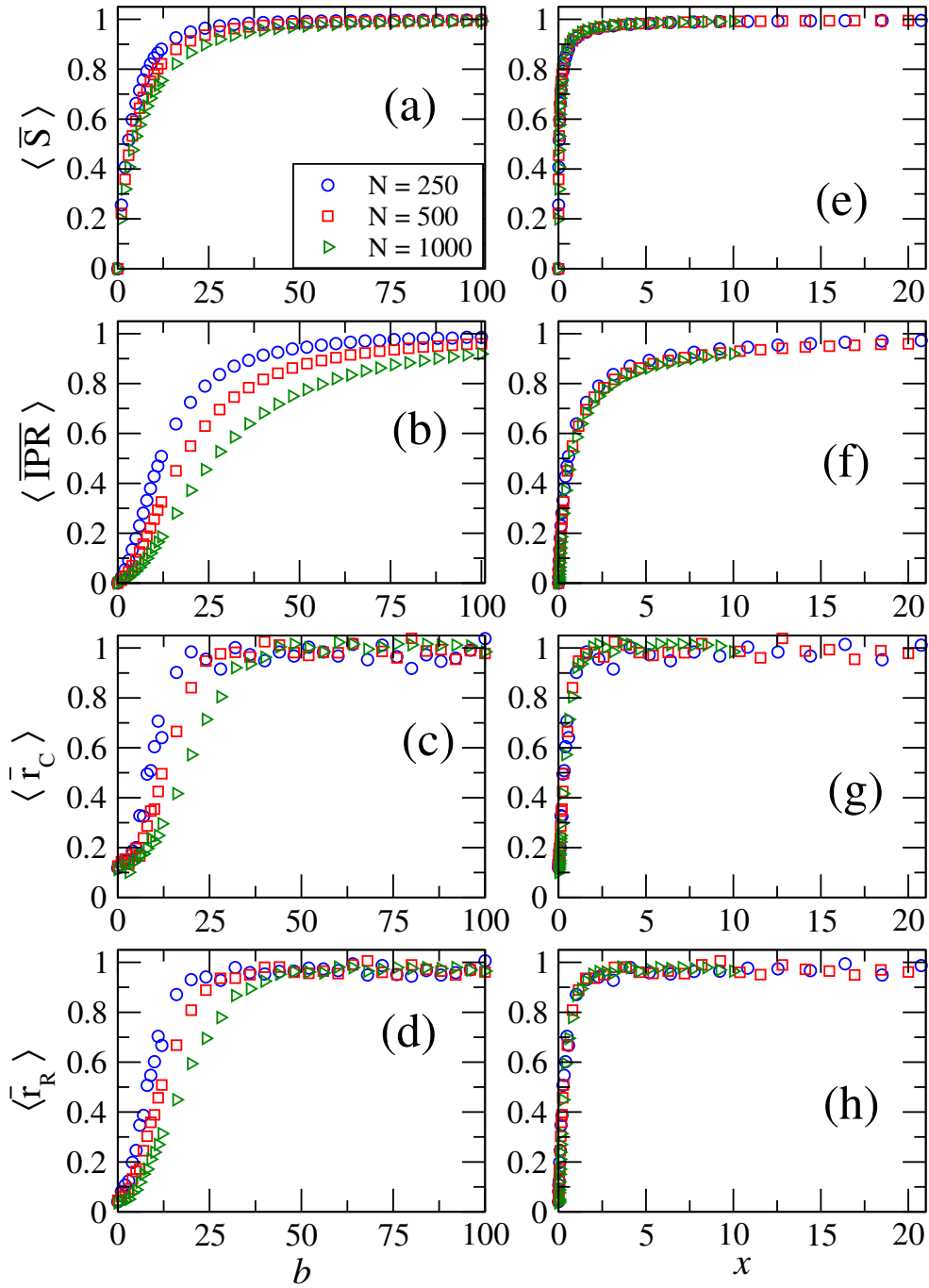


Figura 2.6: (a) $\langle \bar{S} \rangle$, (b) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (c) $\langle \bar{r}_C \rangle$ y (d) $\langle \bar{r}_R \rangle$ en función del ancho de banda b para el ensamble de matrices aleatorias de banda. (e) $\langle \bar{S} \rangle$, (f) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (g) $\langle \bar{r}_C \rangle$ y (h) $\langle \bar{r}_R \rangle$ en función del parámetro universal x . En cada gráfico se usó un ensamble de 100 matrices de tamaño $N \times N$, con $N = 1000, 500, 250$.

Ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida

En este capítulo introducimos un nuevo modelo, el ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida (HdBRM, por sus siglas en inglés), que es un refinamiento del modelo BRM. Específicamente, estudiamos y replicamos los resultados del escalamiento de la longitud de localización normalizada entrópica reportados en [67]. Como complemento a nuestra investigación principal, exploramos el escalamiento de otras propiedades estadísticas promedio normalizadas ($\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \bar{r}_C \rangle$ y $\langle \bar{r}_R \rangle$). Esta exploración fue motivada por la falta de registros del escalamiento de estas cantidades en la literatura.

3.1. Definición del modelo HdBRM

El modelo HdBRM se define incorporando la *escasez*, representada por el parámetro α , en el modelo BRM de la siguiente manera: Partiendo del modelo BRM hacemos cero aleatoriamente algunos elementos de la banda b fuera de la diagonal (un ejemplo de esto es la ecuación (3.1)), de esta forma α denota el porcentaje de elementos no nulos en la banda [67] y fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

De acuerdo a esta definición, se obtienen matrices aleatorias diagonales cuando $\alpha = 0$, mientras que se recupera el modelo BRM para $\alpha = 1$. En consecuencia, los límites del modelo HdBRM coinciden con los del BRM: el modelo PE para $b = 1$ o $\alpha = 0$ y el modelo GOE para $b = N$ con $\alpha = 1$.

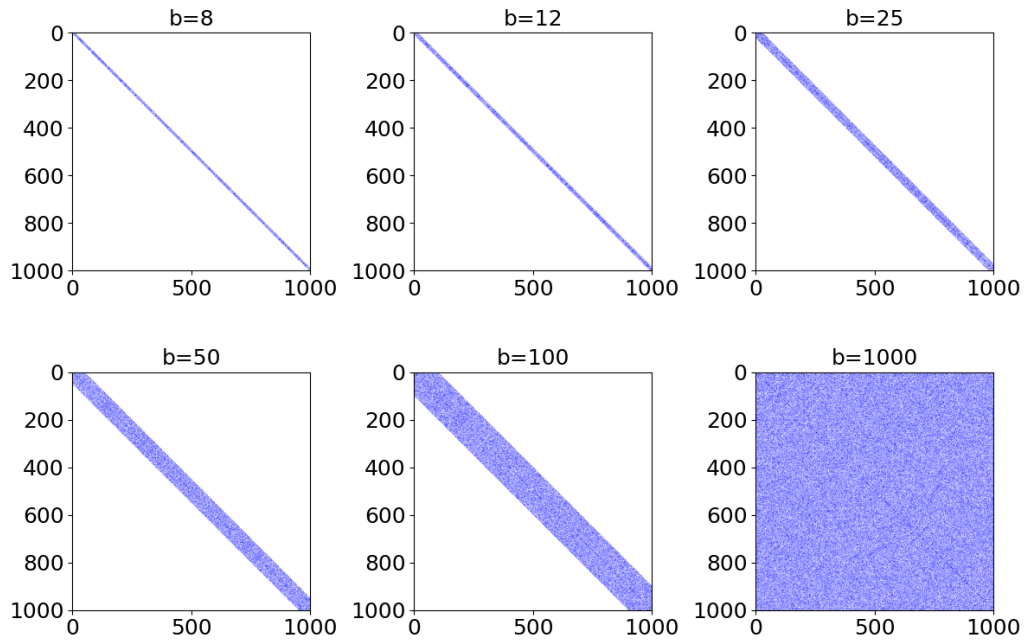


Figura 3.1: Representación comparativa de seis valores distintos de banda b para una matriz de tamaño 1000×1000 con $\alpha = 0.4$, mostrando la influencia de α en la estructura de la matriz para diferentes valores de b .

Con el fin de complementar esta definición, en la Figura 3.1 mostramos una visualización de un conjunto de 6 valores de banda de una matriz de tamaño 1000×1000 con $\alpha = 0.4$; la región azul representa los elementos no nulos de la matriz. Si esta figura la comparamos con la Figura 2.3, observamos que la *escasez* α implica una

menor saturación de color y, por lo tanto, una menor concentración de elementos no nulos.

3.2. Longitud de localización entrópica escalada del HdBRM

Previamente, para el análisis de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM, inspirados en trabajos de análisis de escalamiento del modelo BRM [14–17, 19, 21, 24, 26, 28], los autores de la referencia [67] propusieron estudiarlas en función del parámetro

$$x = b_{\text{eff}}^2/N, \quad b_{\text{eff}} \equiv \alpha b, \quad (3.2)$$

donde el *ancho de banda efectivo*, b_{eff} , del modelo HdBRM es, en analogía con el ancho de banda b del BRM, el número promedio de elementos diferentes de cero por cada fila de las matrices del ensamble.

Entonces, para estudiar las cantidades de este modelo, específicamente la entropía de Shannon, recurrimos a la llamada *longitud de localización entrópica*, tal como lo hicieron los autores en [67]. Esta se define mediante la expresión [94]

$$\ell_N = N \exp[-(S_{\text{GOE}} - \langle S \rangle)], \quad (3.3)$$

donde $S_{\text{GOE}} \approx \ln(N/2.07)$. Bajo esta definición, cuando $\alpha = 0$ o $b = 1$, los vectores propios del HdBRM tienen una única componente no nula con magnitud unitaria, lo que resulta en $\langle S \rangle = 0$ y una longitud de localización ℓ_N constante, cercana a 1. Por otro lado, al considerar $\alpha = 1$ y $b = N$, se restablece el comportamiento del GOE y $\langle S \rangle$ alcanza el valor de S_{GOE} ; esto indica que los vectores propios caóticos del HdBRM se distribuyen entre los N estados base disponibles, resultando en una longitud de localización ℓ_N que es aproximadamente igual a N .

En particular, el escalamiento de ℓ_N fue estudiado en [67] a través de la *longitud de localización entrópica escalada*

$$\beta = \ell_N/N, \quad (3.4)$$

que toma valores en el rango $(0, 1]$. Esta cantidad varía de cero, para estados completamente localizados, a uno, para estados completamente extendidos, esto nos permite relacionar, cuantitativamente, las propiedades estadísticas de los espectros con la estructura caótica de las funciones propias [94].

Por consiguiente, en la Figura 3.2(a) presentamos numéricamente β como función del parámetro x (ver ecuación (3.2)) para un ensamble de matrices aleatorias hermíticas

3.3. Escalamiento de la función longitud de localización entrópica escalada del HdBRM

de banda diluida. Observamos que las curvas de β vs. x tienen una forma funcional similar a las curvas del modelo BRM (Figura 2.6(a) que corresponden a $\alpha = 1$). Adicionalmente, presentamos en la Figura 3.2(b) el logaritmo de $\beta/(1 - \beta)$ como función de $\ln(x)$. Cabe destacar que en esta representación logarítmica, se observa que en ciertas regiones, las curvas muestran un comportamiento lineal, lo cual resultó ser muy útil para determinar el escalamiento del modelo HdBRM [67].

3.3. Escalamiento de la función longitud de localización entrópica escalada del HdBRM

Así pues, estudios numéricos mostraron que las propiedades de funciones propias, específicamente β , para el modelo HdBRM escalan como [67]

$$\beta = \frac{x^*}{1 + x^*}, \quad (3.5)$$

con

$$x^* = \gamma x^\delta, \quad (3.6)$$

donde x es la expresión (3.2), γ y δ son valores cercanos a uno que dependen de α . La deducción de este escalamiento se basa en la observación de que las curvas de $\ln[\beta/(1 - \beta)]$ vs. $\ln(x)$ en el rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ de la Figura 3.2(b) tienen un comportamiento de líneas rectas, como se mencionó anteriormente. Además, estas líneas rectas tienen una pendiente que varía según el parámetro α . Esto sugiere que la ley de escalamiento de estas curvas puede ser caracterizada por

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = \gamma x^\delta, \quad (3.7)$$

que permite escribir la *función de escalamiento* siguiente

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = x^*; \quad x^* = \gamma x^\delta, \quad (3.8)$$

la cual es equivalente a la ecuación (3.5).

Por lo que, para obtener el comportamiento de los parámetros γ y δ de la ecuación (3.6) en función de α , realizamos ajustes lineales de las curvas $\ln[\beta/(1 - \beta)]$ vs. $\ln(x)$ para valores de α en el rango de $(0, 1]$ con un paso de 0.05 (observar, por ejemplo, el ajuste marcado por líneas sólidas verdes en el recuadro de la Figura 3.2(b), el cual se aplica a las curvas asociadas a $\alpha = 0.6, 0.8$ y 1). Como resultado, en el recuadro superior de la Figura 3.2(c), mostramos la variación de la potencia δ respecto a la

3.3. Escalamiento de la función longitud de localización entrópica escalada del HdBRM

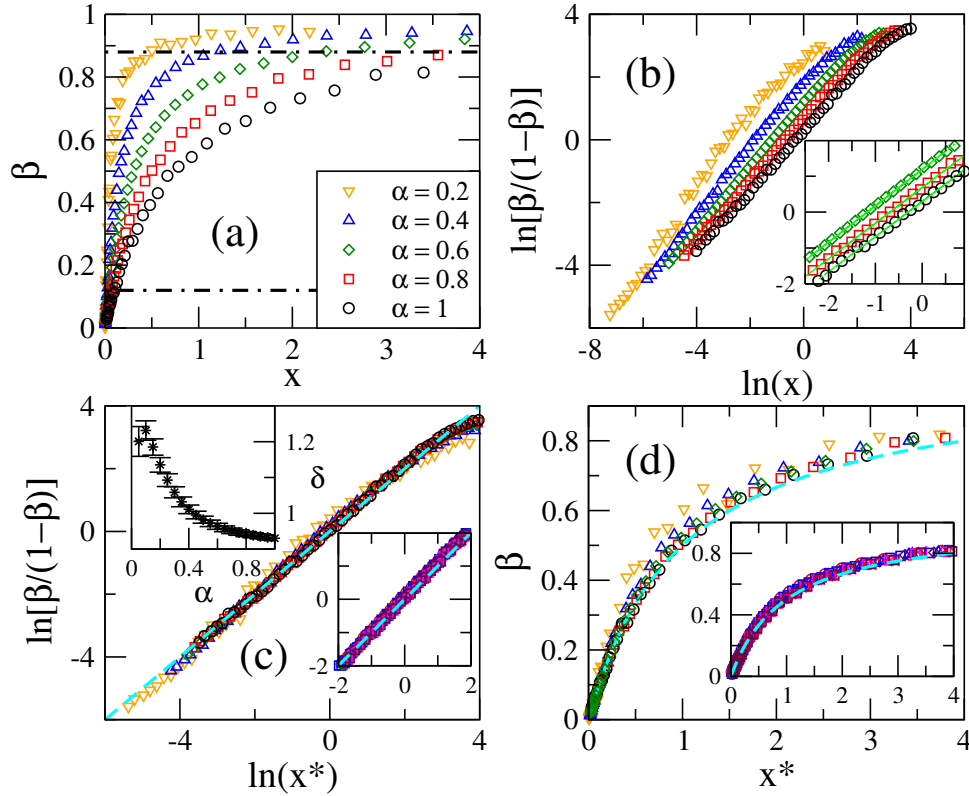


Figura 3.2: (a) Longitud de localización escalada de las autofunciones β en función de $x = b_{\text{eff}}^2/N$, $b_{\text{eff}} = \alpha b$, para el ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida. Se emplean varias combinaciones de (b, N) . Las líneas negras discontinuas en $\beta \approx 0.12$ y $\beta \approx 0.88$ se muestran como referencia, para mejor entendimiento consultar el texto. (b) Logaritmo de $\beta/(1-\beta)$ como función de $\ln(x)$. Recuadro: Ampliación en el rango $\ln[\beta/(1-\beta)] = [-2, 2]$ incluyendo datos para $\alpha = 0.6, 0.8$ y 1 . Las líneas discontinuas verdes son ajustes de los datos con la ecuación (3.7). (c) Logaritmo de $\beta/(1-\beta)$ como función de $\ln(x^*)$ [ver Ec. (3.8)]. Recuadro superior: Potencia δ , resultante de los ajustes de las curvas $\ln[\beta/(1-\beta)]$ v. $\ln(x)$ en el rango $\ln[\beta/(1-\beta)] = [-2, 2]$ con la Ec. (3.7), como función de α . Recuadro inferior: Ampliación del rango $\ln[\beta/(1-\beta)] = [-2, 2]$ que incluye curvas para $\alpha \in [0.5, 1]$ en pasos de 0.05 . Las líneas color cian discontinuas en el panel principal y en el recuadro inferior son la Ec. (3.8). (d) β en función de x^* . Recuadro: Datos para $\alpha \in [0.5, 1]$ en pasos de 0.05 . Las líneas color cian discontinuas en el panel principal y en el recuadro son la Ec. (3.5).

escasez α . Se observa cómo δ tiene una disminución no lineal a medida que α aumenta, esto a partir de $\alpha = 0.1$.

Finalmente, en la Figura 3.2 (c) presentamos nuevamente los datos para $\ln[\beta/(1-\beta)]$ pero ahora como función de $\ln(x^*)$, confirmando la validez del escalamiento de la ecuación (3.8). Observamos que el colapso de las curvas cuando se usa la ecuación (3.8)

3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM

es excelente en el rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ para $\alpha \geq 0.5$, como se muestra en el recuadro inferior de la Figura 3.2(c), este rango corresponde a los valores de $\beta \approx [0.12, 0.88]$, cuyos límites son presentados como líneas negras discontinuas en el gráfico de la Figura 3.2(a). Asimismo, en la Figura 3.2(d) mostramos el comportamiento de β como función de x^* , nuevamente observamos cómo las curvas colapsan en una sola, incluso, este escalamiento se extiende más allá del rango $\beta \approx [0.12, 0.88]$ donde se ha demostrado la validez de la ecuación (3.7). Nuevamente, el colapso de los datos numéricos utilizando la ecuación (3.5) es notablemente bueno para $\alpha \geq 0.5$, como se muestra en el recuadro de la Figura 3.2(d). Es importante mencionar que todos los datos de la Figura 3.2 fueron reportados en [67].

3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM

Ahora, para complementar el estudio de las propiedades espectrales y de autofunciones del modelo HdBRM, analizamos el escalamiento de estas propiedades a través de los promedios estadísticos normalizados: $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_{\mathbb{C}}} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\mathbb{R}}} \rangle$, ver ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), respectivamente. Esto con el fin de comparar estas cantidades con β .

En las Figuras 3.3(a)-3.3(c) presentamos los promedios estadísticos normalizados $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_{\mathbb{C}}} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\mathbb{R}}} \rangle$, respectivamente, como función de x para el HdBRM. Observamos que el comportamiento de las curvas $\langle \overline{X} \rangle$ vs. x presentadas en las Figuras 3.3(a)-3.3(c) es similar al de las curvas β vs. x de la Figura 3.2(a). Las curvas de $\langle \overline{X} \rangle$ vs. x muestran formas funcionales similares aunque claramente afectadas por la escasez α , esto es, para un x fijo, cuanto menor sea el valor de α mayor será el valor de $\langle \overline{X} \rangle$. Aquí, X representa IPR, $r_{\mathbb{C}}$ y $r_{\mathbb{R}}$. Dada esta similitud, nosotros formulamos la hipótesis de que el parámetro x^* de la ecuación (3.5) que escala a β también debe escalar a las cantidades $\langle \overline{X} \rangle$, o en otras palabras, los mismos valores δ y γ que resultan del ajuste de las curvas β vs. x con la ecuación (3.8), y que son usados en las curvas escaladas β vs. x^* , se pueden usar en el escalamiento de $\langle \overline{X} \rangle$ vs. x^* . Para verificar esta conjetura, en las Figuras 3.3(d)-3.3(f) presentamos nuevamente los datos de $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_{\mathbb{C}}} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\mathbb{R}}} \rangle$, respectivamente, pero ahora como función de x^* . Debido a que las curvas $\langle \overline{X} \rangle$ vs. x^* colapsan en una sola, principalmente para $\alpha \geq 0.5$ (ver recuadros de las Figuras 3.3(d)-3.3(f)), podemos concluir que x^* escala a $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_{\mathbb{C}}} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\mathbb{R}}} \rangle$ tan bien como lo hace con β . De igual forma, en la Figura 3.3 podemos observar otro comportamiento interesante: las curvas espectrales $\langle \overline{r_{\mathbb{C}}} \rangle$ vs. x^* y $\langle \overline{r_{\mathbb{R}}} \rangle$ vs. x^* están por encima de la curva resultante de la ecuación (3.5) (representada como líneas discontinuas de color cian en los recuadros). Esto indica que las propiedades espectrales del modelo HdBRM convergen más rápidamente al límite GOE que las propiedades de las autofunciones.

3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM

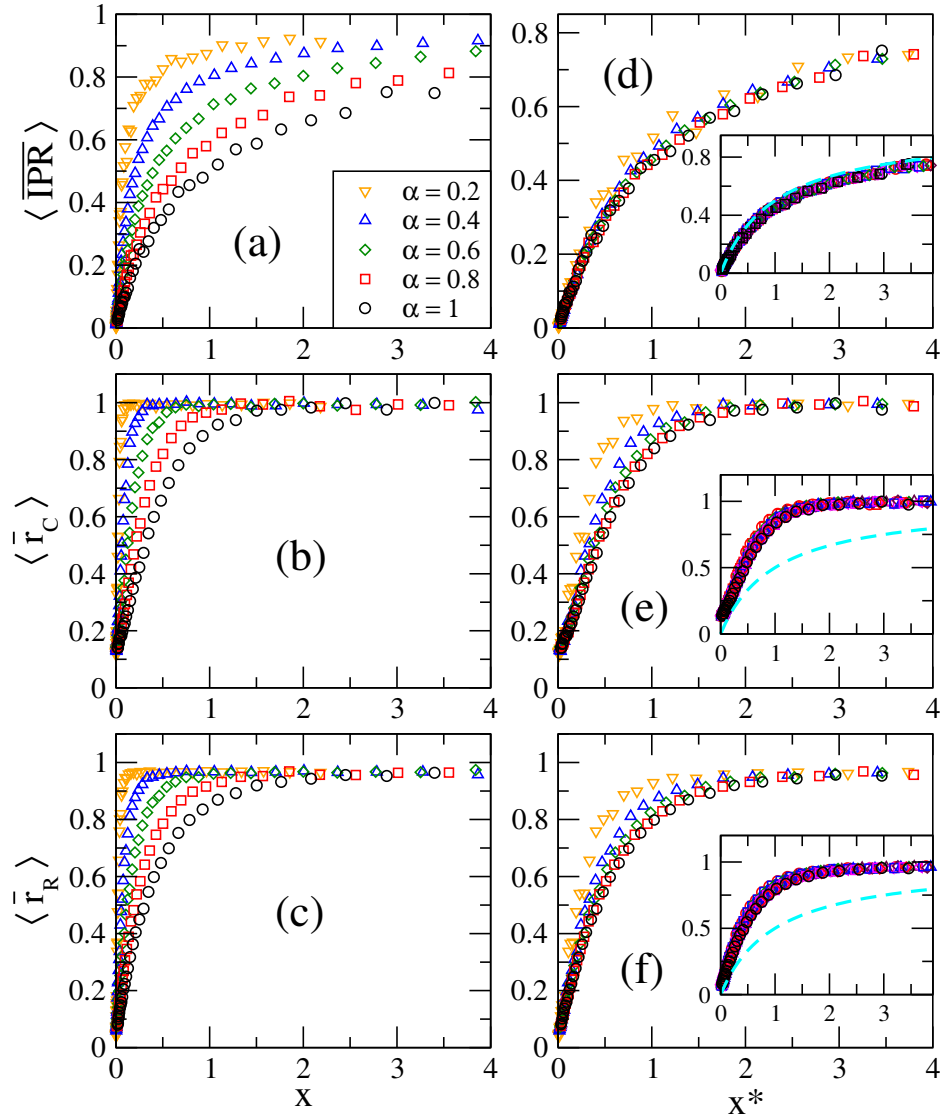


Figura 3.3: (a) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (b) $\langle \bar{r}_C \rangle$ y (c) $\langle \bar{r}_R \rangle$ en función de x para el ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida. (d) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (e) $\langle \bar{r}_C \rangle$ y (f) $\langle \bar{r}_R \rangle$ en función de x^* . Los recuadros (d-f) corresponden a los datos numéricos para $\alpha \in [0.5, 1]$ con un paso de 0.05. Las líneas discontinuas color cian son la ecuación (3.5).

Además, sorprendentemente, $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$ sigue aproximadamente la misma ley de escala que β :

$$\langle \overline{\text{IPR}} \rangle \approx \frac{x^*}{1 + x^*}, \quad (3.9)$$

como se observa en el recuadro de la Figura 3.3(d).

3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM

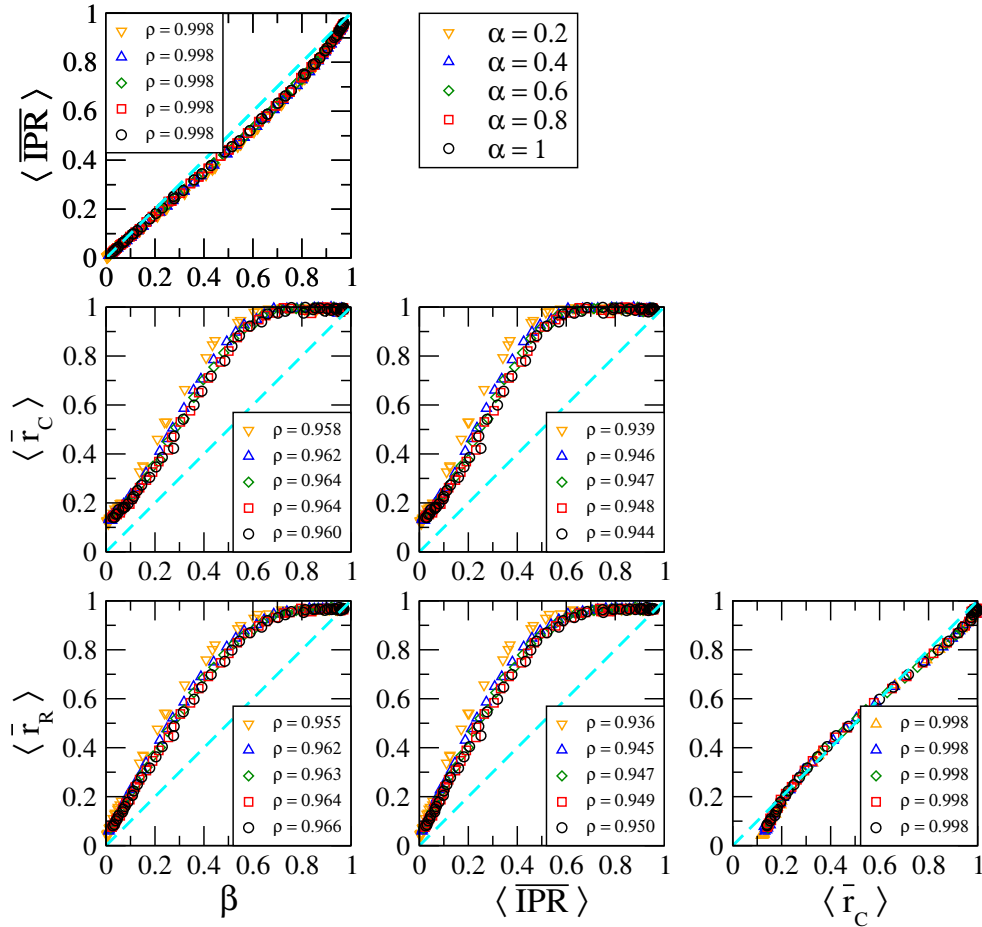


Figura 3.4: Gráficos de dispersión entre β , $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r}_C \rangle$, y $\langle \overline{r}_R \rangle$ para el ensemble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida. Los coeficientes de correlación de Pearson son reportados en el panel correspondiente.

Por último, al examinar detenidamente las Figuras 3.2 y 3.3, resulta evidente que existe una alta correlación entre todas estas cantidades (β , $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r}_C \rangle$, y $\langle \overline{r}_R \rangle$). Esta correlación significativa se destaca en la Figura 3.4, donde se muestran los gráficos de dispersión entre estas variables para el ensemble HdBRM, considerando valores distintos de α . Para cuantificar la correlación entre estas cantidades, hemos calculado, para cada curva, el coeficiente de correlación de Pearson, ρ , y resulta ser cercano a uno en todos los casos. Estos valores son reportados en los paneles de los subgráficos correspondientes de la Figura 3.4.

En resumen, hemos logrado replicar exitosamente los resultados previamente publicados en la literatura [48, 67], y adicionalmente hemos probado numéricamente que los promedios estadísticos normalizados $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r}_C \rangle$ y $\langle \overline{r}_R \rangle$ se escalan con el

3.4. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del HdBRM

mismo parámetro x^* con el que escala β (siendo estos hallazgos originales de esta tesis).

Ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida

En este capítulo, introducimos y analizamos el escalamiento de la longitud de localización entrópica escalada β y, al igual que en el capítulo anterior, estudiamos el escalamiento de los promedios estadísticos normalizados de otras propiedades espectrales y de autofunciones ($\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$ y $\langle \overline{\text{r}_C} \rangle$) en un nuevo modelo: el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida. Simultáneamente, presentamos y examinamos el escalamiento de una nueva propiedad espectral: la razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares ($\langle \overline{\text{r}_{\text{SV}}} \rangle$) [96]. Esta cantidad representa una nueva alternativa para estudiar los valores propios de matrices no hermíticas, ampliando así nuestro entendimiento sobre su comportamiento y propiedades.

4.1. Definición del modelo nHdBRM

Inspirados por posibles aplicaciones en física no hermítica, introducimos el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida (nHdBRM, por sus siglas en inglés), siendo este una versión no hermítica del modelo HdBRM. Este modelo lo definimos como un conjunto de matrices reales y no simétricas (matrices \mathbf{nH}) de tamaño $N \times N$, cuyas entradas a_{ij} son variables aleatorias Gaussianas independientes con media cero y varianza $1 + \delta_{i,j}$ si $|i - j| < b$, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario, además, algunos de los elementos no diagonales de la matriz pertenecientes al ancho de banda, b , se fijan aleatoriamente en cero de forma que la escasez, α , se define como la fracción de $N(b - 1)/2$ elementos diferentes de cero fuera de la diagonal. De acuerdo a esta

definición, obtenemos el ensamble de matrices diagonales (PE) para $\alpha = 0$, mientras que el ensamble real de Ginibre (RGE) lo recuperamos para $\alpha = 1$ y $b = N$.

4.2. Longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM

Entonces, para el análisis de las propiedades espectrales y de autofunciones del nHdBRM, inspirados en trabajos de análisis de escalamiento del modelo BRM [14–17, 19, 21, 24, 26, 28] y el modelo (HdBRM) [67], proponemos estudiarlas en función del parámetro $x = b_{\text{eff}}^2/N$ (ver la ecuación (3.2)).

Y nuevamente, para estudiar el escalamiento de la entropía, hacemos uso de la llamada *longitud de localización entrópica* que, para este modelo, se define como [94]

$$\ell_N = N \exp[-(S_{\text{RGE}} - \langle S \rangle)] , \quad (4.1)$$

donde $S_{\text{RGE}} \approx \ln(N/1.56)$ [79], que se utiliza aquí como referencia, es el promedio de la entropía de las funciones propias del RGE. Con esta definición para S , cuando $\alpha = 0$ o $b = 1$, las matrices \mathbf{nH} se convierten en matrices aleatorias reales y diagonales (esto es, matrices pertenecientes al PE) y las correspondientes autofunciones solo tienen una componente no nula y de magnitud uno; así $\langle S \rangle = 0$ y $\ell_N = 1$. Por el contrario, cuando $\alpha = 1$ y $b = N$ recuperamos el RGE y $\langle S \rangle = S_{\text{RGE}}$ por lo que las autofunciones completamente caóticas se extienden sobre los N estados base disponibles y $\ell_N \approx N$.

Aquí, al igual que en los estudios de los modelos BRM y HdBRM, buscaremos el escalamiento de la longitud de localización entrópica del nHdBRM a través de la *longitud de localización escalada*

$$\beta = \frac{\ell_N}{N} , \quad (4.2)$$

que toma valores en el rango $(0, 1]$. La razón principal de usar esta normalización es que, como se mencionó anteriormente en la sección 3.2, nos permite relacionar cuantitativamente las propiedades estadísticas de los espectros con la estructura caótica de las funciones propias.

4.3. Escalamiento de la longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM

En la Figura 4.1(a) graficamos β como función de $x = b_{\text{eff}}^2/N$, con $b_{\text{eff}} = \alpha b$, para el ensamble de matrices \mathbf{nH} caracterizadas por la escasez α . Se observa que las curvas

4.3. Escalamiento de la longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM

de β vs. x muestran formas funcionales similares, sin embargo, están claramente afectadas por la escasez α . Es decir, para una x fija, cuanto menor sea α mayor será el valor β . Este panorama es equivalente al del modelo reportado en la referencia [67], y el cual fue presentado en el capítulo 3. Además, en la Figura 4.1(b) el logaritmo de $\beta/(1-\beta)$ como función de $\ln(x)$ también es presentado. La cantidad $\beta/(1-\beta)$ fue muy útil en el estudio del escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del modelo BRM [14, 19] porque $\beta/(1-\beta) \propto x$, que es equivalente al escalamiento descrito por la ecuación (2.15), esto implica que una curva de $\ln[\beta/(1-\beta)]$ vs. $\ln(x)$ es una recta con pendiente unitaria. Aunque esta afirmación era válida para el modelo BRM en una amplia gama de parámetros (es decir, para $\ln[\beta/(1-\beta)] < 2$), no es posible aplicarla al modelo nHdBRM; véase la Figura 4.1(b). De hecho, en esta figura observamos que las gráficas de $\ln[\beta/(1-\beta)]$ vs. $\ln(x)$ son líneas rectas (en un amplio rango de x) con una pendiente que depende (ligera, pero perceptiblemente) de la escasez α . En consecuencia, ponemos a prueba la ley de escala (análogamente al análisis hecho por los autores de la referencia [67] para el modelo HdBRM)

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \gamma x^\delta, \quad (4.3)$$

que es equivalente a

$$\beta = \frac{\gamma x^\delta}{1 + \gamma x^\delta}. \quad (4.4)$$

donde γ y δ dependen de α .

La ecuación (4.3) describe adecuadamente nuestros datos, especialmente dentro del rango $\ln[\beta/(1-\beta)] = [-2, 2]$, como se ilustra en el recuadro de la Figura 4.1(b), donde presentamos los datos numéricos para $\alpha = 0.6, 0.8$ y 1 . Además, hemos incluido ajustes (representados por líneas verdes discontinuas) utilizando la ecuación (4.3). Es importante destacar que el intervalo $\ln[\beta/(1-\beta)] = [-2, 2]$ abarca un rango significativo de valores de β (aproximadamente $\beta \approx [0.12, 0.88]$), cuyos límites están marcados con líneas negras horizontales discontinuas en la Figura 4.1(a). También observamos que la potencia δ , derivada de los ajustes de los datos utilizando la ecuación (4.3), es aproximadamente igual a uno para todos los niveles de escasez considerados en este estudio; véase el recuadro superior de la Figura 4.1(c).

Por lo tanto, a partir del análisis del comportamiento de los datos de las Figuras 4.1(a) y 4.1(b), podemos escribir una *función universal de escalamiento* para la longitud de localización entrópica escalada β del modelo nHdBRM como

$$\frac{\beta}{1-\beta} = x^*, \quad x^* \equiv \gamma x^\delta. \quad (4.5)$$

4.3. Escalamiento de la longitud de localización entrópica escalada del nHdBRM

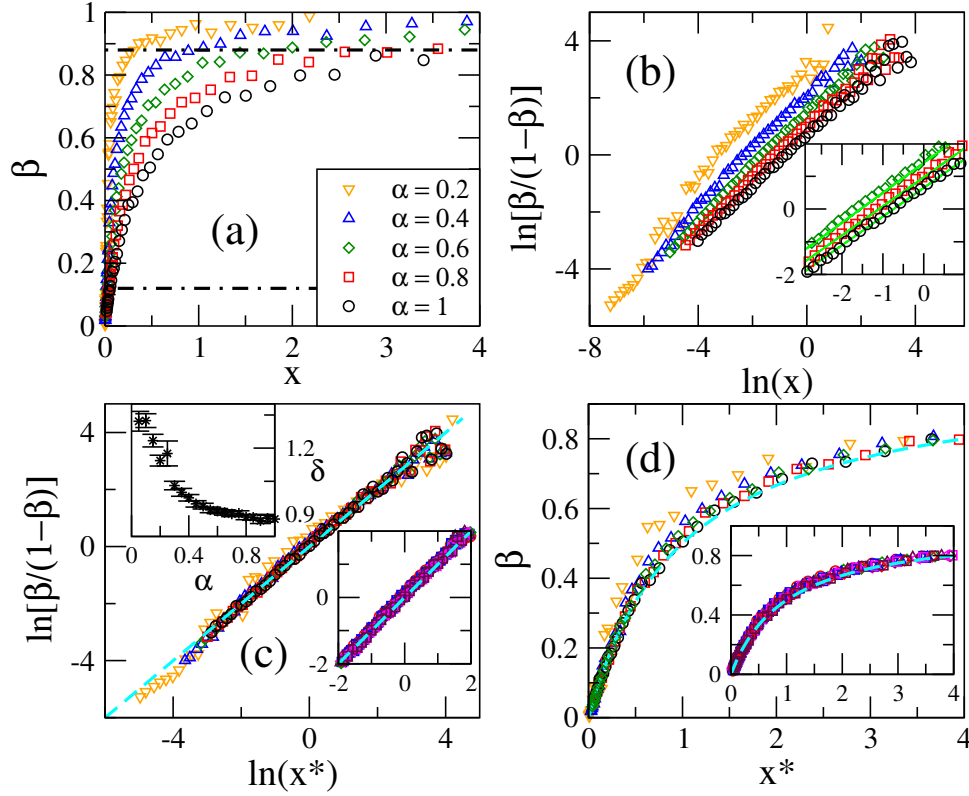


Figura 4.1: (a) Longitud de localización escalada de las autofunciones β en función de $x = b_{\text{eff}}^2/N$, $b_{\text{eff}} = \alpha b$, para el ensamble de matrices aleatorias no hermíticas caracterizadas por la escasez α . Se emplean varias combinaciones de (b, N) . Las líneas negras discontinuas en $\beta \approx 0.12$ y $\beta \approx 0.88$ se muestran como referencia, para mejor entendimiento consultar el texto. (b) Logaritmo de $\beta/(1 - \beta)$ como función de $\ln(x)$. Recuadro: Ampliación en el rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ incluyendo datos para $\alpha = 0.6, 0.8$ y 1 . Las líneas discontinuas verdes son ajustes de los datos con la ecuación (4.3). (c) Logaritmo de $\beta/(1 - \beta)$ como función de $\ln(x^*)$ [ver Ec. (4.5)]. Recuadro superior: Potencia δ , resultante de los ajustes de las curvas $\ln[\beta/(1 - \beta)]$ vs. $\ln(x)$ en el rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ con la Ec. (4.3), como función de α . Recuadro inferior: Ampliación del rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ que incluye curvas para $\alpha \in [0.5, 1]$ en pasos de 0.5 . Las líneas color cian discontinuas en el panel principal y en el recuadro inferior son la Ec. (4.5). (d) β en función de x^* . Recuadro: Datos para $\alpha \in [0.5, 1]$ en pasos de 0.05 . Las líneas color cian discontinuas en el panel principal y en el recuadro son la ecuación (4.6).

Entonces, para validar la ecuación (4.5), en la Figura 4.1(c) presentamos nuevamente los datos para $\ln[\beta/(1 - \beta)]$ mostrados en la Figura 4.1(b), pero ahora como función de $\ln(x^*)$. En esta se observa que las curvas para diferentes valores de α caen por encima de la ecuación (4.5) para un amplio rango de la variable x^* . Específicamente, el colapso de los datos numéricos en la parte superior de la ecuación (4.5) es excelente

en el rango $\ln[\beta/(1 - \beta)] = [-2, 2]$ para $\alpha \geq 0.5$, como se muestra en el recuadro inferior de la Figura 4.1(c).

Por último, reescribimos la ecuación (4.5) en la equivalente, pero explícita, función de escalamiento para β :

$$\beta = \frac{x^*}{1 + x^*}. \quad (4.6)$$

Y en la Figura 4.1(d) confirmamos la validez de la ecuación (4.6). Es importante destacar que el escalamiento universal descrito por la ecuación (4.6) se extiende más allá del rango $\beta \approx [0.12, 0.88]$, para el cual la ecuación (4.3) ha demostrado ser válida, véase el panel general de la Figura 4.1(d). Además, se nota un notable colapso de los datos numéricos en la parte superior de la ecuación (4.6), especialmente para valores de $\alpha \geq 0.5$, lo cual se evidencia en el recuadro de la Figura 4.1(d).

Ahora, previo a analizar el escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones restantes del nHdBRM, introducimos en la siguiente sección una nueva cantidad espectral para caracterizar matrices no hermíticas.

4.4. Razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares

Recientemente, la estadística de valores singulares (SVS) ha sido presentada como una herramienta de RMT capaz de caracterizar el espectro de ensambles de matrices aleatorias no hermíticas [96], así como para identificar la transición de deslocalización en sistemas de muchos cuerpos no hermitianos [97] y modelos de redes dirigidas [82]. Entonces, también utilizamos SVS en esta tesis para caracterizar las propiedades espectrales del modelo nHdBRM. Este método consiste en: dada una matriz no hermítica \mathbf{nH} , se introduce una matriz *Hermitizada*

$$\tilde{H} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{nH} \\ \mathbf{nH}^\dagger & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}^2 = \begin{bmatrix} (\mathbf{nH})(\mathbf{nH})^\dagger & 0 \\ 0 & (\mathbf{nH})^\dagger(\mathbf{nH}) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Por ende, los valores singulares (SV) de \tilde{H} son los valores propios de $\sqrt{(\mathbf{nH})(\mathbf{nH})^\dagger}$ y $\sqrt{(\mathbf{nH})^\dagger(\mathbf{nH})}$, y coinciden con los valores singulares de \mathbf{nH} . Por tanto, la estadística de valores singulares de matrices no hermíticas \mathbf{nH} se reduce a la de las correspondientes matrices hermíticas \tilde{H} . Entonces, caracterizamos las propiedades espectrales de la siguiente forma: Dados los valores singulares reales ordenados de la matriz no hermítica \mathbf{nH} , $s_1 > s_2 > \dots > s_N$, calculamos la razón de las diferencias de los niveles consecutivos de valores singulares r_{SV} , donde la razón i -ésima está dada

4.4. Razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares

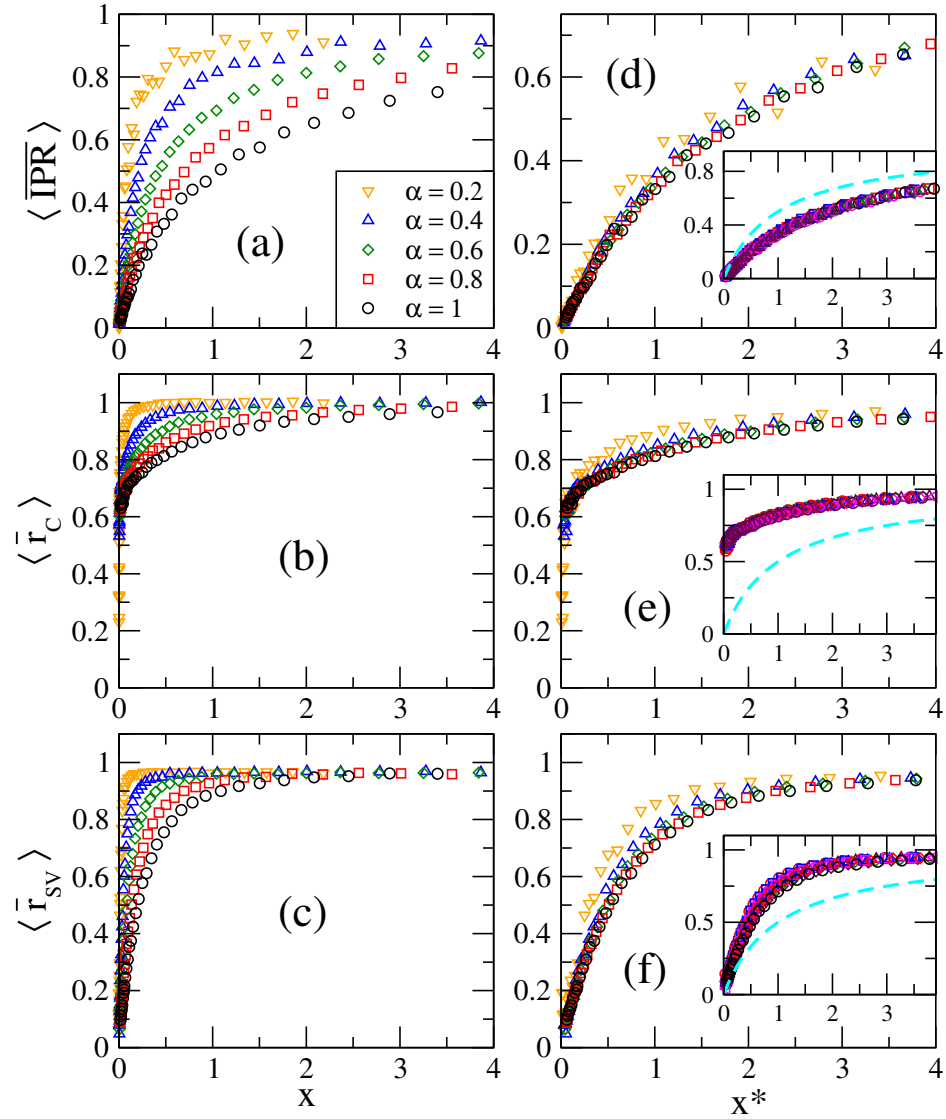


Figura 4.2: (a) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (b) $\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ y (c) $\langle \bar{r}_{\text{SV}} \rangle$ en función de x para el ensamble de matrices aleatorias no hermiticas de banda diluida. (d) $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, (e) $\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ y (f) $\langle \bar{r}_{\text{SV}} \rangle$ en función de x^* . Los recuadros (d-f) corresponden a los datos numéricos para $\alpha \in [0.5, 1]$ con un paso de 0.05. Las líneas discontinuas color cian son la ecuación (4.6).

por [96]

$$r_{\text{SV}}^i = \frac{\min(s_{i+1} - s_i, s_i - s_{i-1})}{\max(s_{i+1} - s_i, s_i - s_{i-1})}. \quad (4.8)$$

cuyo significado es análogo al de la expresión (2.5).

4.5. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del nHdBRM

Ahora, para complementar el análisis de las propiedades espectrales y de autofunciones del modelo nHdBRM, estudiamos el escalamiento de estas propiedades a través de los promedios estadísticos de la razón inversa de participación ($\langle \text{IPR} \rangle$), de la razón de las diferencias de los niveles próximos y los siguientes más próximos ($\langle r_C \rangle$), y de la razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares ($\langle r_{\text{SV}} \rangle$), ver ecuaciones (2.2), (2.6) y (4.8). Además, normalizamos convenientemente estos promedios; usando como referencia los casos límite del modelo nHdBRM (PE y RGE), de la siguiente manera:

$$\langle \overline{\text{IPR}} \rangle = \frac{\langle \text{IPR} \rangle - \text{IPR}_{\text{PE}}}{\text{IPR}_{\text{RGE}} - \text{IPR}_{\text{PE}}}, \quad (4.9)$$

$$\langle \overline{r_C} \rangle = \frac{\langle r_C \rangle - r_{\text{CPE}}}{r_{\text{CRGE}} - r_{\text{CPE}}}, \quad (4.10)$$

y

$$\langle \overline{r_{\text{SV}}} \rangle = \frac{\langle r_{\text{SV}} \rangle - r_{\text{SVPE}}}{r_{\text{SVRGE}} - r_{\text{SVPE}}}, \quad (4.11)$$

donde $\text{IPR}_{\text{PE}} = 1$, $\text{IPR}_{\text{RGE}} \approx N/2.04$ [80], $r_{\text{CPE}} \approx 0.5$ [66], $r_{\text{CRGE}} \approx 0.737$ [79], $r_{\text{SVPE}} \approx 0.38$ [90] y $r_{\text{SVRGE}} \approx 0.5359$ [90]. De esta forma todos ellos toman valores en el intervalo $[0, 1]$, esto con el fin de hacer una comparación directa con β .

En las Figuras 4.2(a)-4.2(c) graficamos los promedios estadísticos normalizados $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\text{SV}}} \rangle$, respectivamente, como función de x para el nHdBRM caracterizado por la escasez α . El panorama mostrado en las Figuras 4.2(a)-4.2(c) para $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\text{SV}}} \rangle$ es equiparable al que se observa para β en la Figura 4.1(a): Las curvas de $\langle \overline{Z} \rangle$ vs. x muestran formas funcionales similares aunque claramente afectadas por la escasez α . Aquí, Z representa IPR , r_C y r_{SV} . Además, para un x fijo, cuanto menor sea el valor de α mayor será el valor de $\langle \overline{Z} \rangle$. Estas observaciones nos permiten suponer, tal cual como lo hicimos con el modelo HdBRM, que el parámetro de escala x^* de β también puede servir como parámetro de escala de $\langle \overline{Z} \rangle$ (esto es, los mismos valores δ y γ que resultan del ajuste de las curvas β vs. x con la ecuación (4.5) y que son usados en las curvas escaladas β vs. x^* , se pueden usar en el escalamiento de $\langle \overline{Z} \rangle$ vs. x^*).

Para verificar esta hipótesis, en las Figuras 4.2(d)-4.2(f), graficamos nuevamente $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$ y $\langle \overline{r_{\text{SV}}} \rangle$, respectivamente, pero ahora como función de x^* . Y efectivamente, dado que las curvas $\langle \overline{Z} \rangle$ vs. x^* caen una sobre otra, principalmente para $\alpha \geq 0.5$, véanse los recuadros correspondientes, concluimos que efectivamente x^* escala las

4.5. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del nHdBRM

cantidades $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$ y $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$ correctamente tal como lo hace con β . Asimismo, en la Figura 4.2 observamos que las curvas $\langle \overline{r_C} \rangle$ vs. x^* y $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$ vs. x^* están por arriba de la curva color cian correspondiente a la ecuación (4.6). Esto significa que las propiedades espectrales en función de x^* del modelo nHdBRM se aproximan más rápido al límite RGE que las propiedades de autofunciones. También observamos que las curvas $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$ vs. x^* , al estar por debajo de la ecuación (4.6), tardan más en llegar al límite RGE que las curvas β vs. x^* .

Por último, de las Figuras 4.1 y 4.2 resulta evidente que existe una alta correlación entre todas estas cantidades (β , $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$, y $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$), al igual que en el modelo HdBRM. Por lo tanto, en la Figura 4.3 presentamos gráficos de dispersión entre β , $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$ y $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$ para el nHdBRM considerando valores distintos de α . Para cuantificar la correlación entre estas cantidades, hemos calculado, para cada curva, los coeficientes de correlación de Pearson, ρ , y resulta ser cercano a uno en todos los casos. Estos valores son reportados en los paneles de los subgráficos correspondientes de la Figura 4.3. Notablemente, observamos menores correlaciones entre las propiedades de autofunciones (esto es, β vs. $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$) y cantidades espectrales (esto es, $\langle \overline{r_C} \rangle$ vs. $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$) del modelo nHdBRM en comparación con las cantidades del modelo HdBRM.

4.5. Escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del nHdBRM

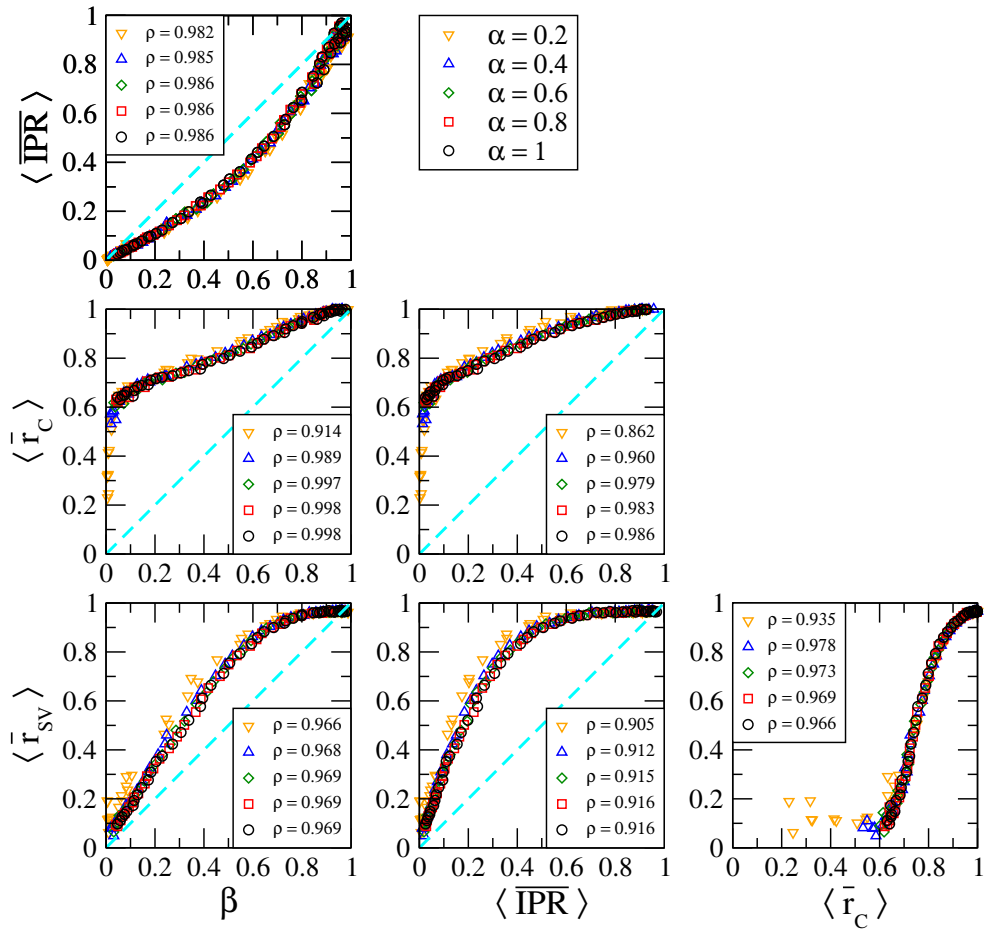


Figura 4.3: Gráficos de dispersión entre β , $\langle \overline{IPR} \rangle$, $\langle \overline{r_C} \rangle$, y $\langle \overline{r_{SV}} \rangle$ para el ensemble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida. Los coeficientes de correlación de Pearson son reportados en el panel correspondiente.

Conclusiones

En esta tesis, se realizó un estudio numérico del escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del ensamble de matrices aleatorias no hermíticas de banda diluida (nHdBRM). En general demostramos que la longitud de localización escalada (β) y los promedios estadísticos normalizados relacionados con: la razón de participación inversa ($\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$), la razón de las diferencias de los niveles próximos y los siguientes más próximos de valores propios ($\langle \bar{r}_{\mathbb{C}} \rangle$) y la razón de las diferencias de niveles consecutivos de valores singulares ($\langle \bar{r}_{\text{SV}} \rangle$), escalan con el mismo parámetro.

En primer lugar, estudiamos las propiedades espectrales y de autofunciones del modelo de matrices aleatorias de banda (BRM). Para ello se verificaron los resultados reportados en las referencias [14–30], donde se demuestran que los promedios estadísticos de las propiedades espectrales ($\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{\mathbb{R}} \rangle$) y de autofunciones ($\langle S \rangle$ y $\langle \text{IPR} \rangle$) dependen únicamente de la razón b^2/N (ver Figura 2.6), siendo la banda b el número de elementos diferentes de cero por fila de la matriz y N el tamaño de la matriz. Esta razón es conocida como el *parámetro universal de escalamiento* del BRM. Todo esto se realizó con dos objetivos: primero, comprender a detalle este parámetro para poder utilizarlo en el modelo nHdBRM; y segundo, calibrar los programas computacionales para garantizar la veracidad de nuestros resultados.

Después, realizamos un estudio a detalle del escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del ensamble de matrices aleatorias hermíticas de banda diluida (HdBRM) [67]; ver Capítulo 3. Específicamente, replicamos los resultados previamente publicados en [67] relacionados con β del HdBRM; ver Figura 3.2. Y mediante extensas simulaciones numéricas, también demostramos que x^* funciona bien como parámetro de escalamiento de los promedios estadísticos normalizados de las propiedades espectrales ($\langle \bar{r}_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle \bar{r}_{\mathbb{R}} \rangle$) y de la otra propiedad de autofunciones ($\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$); ver Figura 3.3. Así mismo, para el modelo HdBRM encontramos que $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$

sigue la misma ley de escalamiento como lo hace β , ver la ecuación 3.9 y la Figura 3.3 (d). Adicionalmente, encontramos que todas estas cantidades (β , $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ y $\langle \bar{r}_{\text{R}} \rangle$) están altamente correlacionadas; ver Figura 3.4.

Posteriormente, se realizó un estudio numérico del escalamiento de las propiedades espectrales y de autofunciones del ensamble de matrices aleatorias no hermiticas de banda diluida (nHdBRM), y demostramos que la longitud de localización escalada β de las funciones propias escala, al igual que el modelo HdBRM en [67], con el parámetro $x^*(N, b, \alpha) = \gamma(\alpha)[b_{\text{eff}}^2/N]^{\delta(\alpha)}$ como $\beta = x^*/(1 + x^*)$; ver Figura 4.1. Aquí, $b_{\text{eff}} \equiv \alpha b$ es la *banda efectiva* y representa el número promedio de elementos diferente de cero por fila de la matriz, α es la escasez, N es el tamaño de la matriz y $\gamma, \delta \sim 1$ son los *parámetros de escalamiento*. Por lo que se puede escribir explícitamente a β como

$$\beta(N, b, \alpha) = \frac{\gamma [(\alpha b)^2/N]^{\delta}}{1 + \gamma [(\alpha b)^2/N]^{\delta}}. \quad (5.1)$$

Además, para el modelo nHdBRM, podemos afirmar lo mismo que para el modelo HdBRM: el parámetro x^* es altamente efectivo como parámetro de escalamiento de $\langle \overline{\text{IPR}} \rangle$, $\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ y $\langle \bar{r}_{\text{SV}} \rangle$ (ver Figura 4.2). Una diferencia a resaltar entre los modelos es que existe una mejor correlación entre cantidades espectrales ($\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ vs. $\langle \bar{r}_{\text{R}} \rangle$) del modelo HdBRM en comparación con las cantidades ($\langle \bar{r}_{\text{C}} \rangle$ vs. $\langle \bar{r}_{\text{SV}} \rangle$) del modelo nHdBRM.

Finalmente, nos gustaría mencionar que ambas leyes de escalamiento (3.9) y (4.6) pueden ser escritas en la forma *independiente del modelo* (para más información consultar las referencias [19, 95]):

$$\frac{1}{d(N, b, \alpha)} = \frac{1}{d(\infty, b, \alpha)} + \frac{1}{d(N, N, 1)}. \quad (5.2)$$

En donde, $d(N, b, \alpha) \equiv \exp[\langle S(N, b, \alpha) \rangle]$ y $d(N, N, 1) = \exp[S_{\text{RGE}}(N)]$ (la entropía de referencia) para el escalamiento (4.6), mientras que $d(N, b, \alpha) \equiv \langle \text{IPR}(N, b, \alpha) \rangle$ y $d(N, N, 1) = \text{IPR}_{\text{GOE}}$ para el escalamiento (3.9).

De acuerdo con las motivaciones originales que estimularon la introducción del ensamble BRM en la Ref.[14], el ensamble nHdBRM con $\alpha = 1$ puede servir como un modelo de referencia para hamiltonianos con banda no hermitianos correspondientes a sistemas caóticos cuantizados, tales como el rotor pateado no hermitiano [98], o los alambres de tipo enlace fuerte no hermitianos [99].

Dado que los modelos de matrices aleatorias diluidas pueden utilizarse como modelos nulos para redes aleatorias (es decir, las matrices de adyacencia de redes complejas son, en general, matrices aleatorias diluidas), creemos que el modelo nHdBRM puede utilizarse para modelar redes aleatorias. Ejemplos específicos son (i) grafos geométricos aleatorios dirigidos (dRGGs) y (ii) redes multicapa aleatorias dirigidas (dRMNs).

Ambos modelos de red producen matrices de adyacencia no hermitianas diluidas y con banda que pueden identificarse directamente como matrices del modelo nHdBMR: Por un lado, dado un dRGG compuesto por N vértices distribuidos aleatoriamente en el plano, ya que se establece una conexión dirigida entre dos vértices si su distancia es menor que el radio de conexión L , la matriz de adyacencia no hermitiana correspondiente de tamaño N tendrá una banda diluida de tamaño $b \approx L$ y una escasez $\alpha \approx \langle k \rangle / L$, siendo $\langle k \rangle$ el grado promedio de capa del dRGG; ver por ejemplo [80]. Por otro lado, dado un dRMN compuesto por M capas con L vértices cada una, la matriz de adyacencia no hermitiana correspondiente de tamaño $N = M \times L$ tendrá una banda diluida de tamaño $b = L$ y una escasez $\alpha \approx \langle k \rangle / L$, siendo $\langle k \rangle$ el grado promedio de una capa del dRMN; ver por ejemplo [48]. Para ambos modelos de red, el conocimiento de β podría utilizarse para predecir o diseñar (por ejemplo, ajustar) las propiedades de transporte de las redes, ya que $\beta \sim 0$ y $\beta \sim 1$ corresponden a regímenes de transporte aislante y conductor, respectivamente.

Esperamos que nuestros resultados puedan motivar una aproximación teórica del modelo nHdBMR.

Bibliografía

- [1] G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco, editors. *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*. Oxford University Press, New York, 2011.
- [2] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [3] V. E. Kravtsov, I. M. Khaymovich, E. Cuevas, and M. Amini. A random matrix model with localization and ergodic transitions. *New J. Phys.*, 17:122002, dec 2015.
- [4] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. Math.*, 62:548–564, 1955.
- [5] E. P. Wigner. *Ann. math.* 65:203, 1957.
- [6] M. Wilkinson, M. Feingold, and D. M. Leitner. Localization and spectral statistics in a banded random matrix ensemble. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:175, 1991.
- [7] M. Wilkinson, M. Feingold, and D. M. Leitner. Spectral statistics in semiclassical random-matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 66:986–989, 1991.
- [8] M. Feingold, A. Gioletta, F. M. Izrailev, and L. Molinari. Two parameter scaling in the wigner ensemble. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2936–2939, 1993.
- [9] G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri, and F. M. Izrailev. Band-random-matrix model for quantum localization in conservative systems. *Phys. Rev. E*, 48:R1613–R1616, 1993.
- [10] G. Casati, B.V. Chirikov, I. Guarneri, and F. M. Izrailev. Quantum ergodicity and localization in conservative systems: the wigner band random matrix model. *Phys. Lett. A*, 223:430–435, 1996.
- [11] M. Feingold. Localization in strongly chaotic systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:3603, 1997.
- [12] W. Wang. Perturbative and nonperturbative parts of eigenstates and local spectral density of states: The wigner-band random-matrix model. *Phys. Rev. E*, 61:952–955, 2000.
- [13] W. Wang. Approach to energy eigenvalues and eigenfunctions from nonperturbative regions of eigenfunctions. *Phys. Rev. E*, 63:036215, 2001.
- [14] G. Casati, L. Molinari, and F. M. Izrailev. Scaling properties of band random matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1851–1854, 1990.

-
- [15] S. N. Evangelou and E. N. Economou. Eigenvector statistics and multifractal scaling of band random matrices. *Phys. Lett. A*, 151:345–348, 1990.
- [16] Y. F. Fyodorov and A. D. Mirlin. Scaling properties of localization in random band matrices: A σ -model approach. *Phys. Rev. Lett.*, 67:2405–2409, 1991.
- [17] G. Casati, F. M. Izrailev, and L. Molinari. Scaling properties of the eigenvalue spacing distribution for band random matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:4755–4762, 1991.
- [18] L. V. Bogachev, S. A. Molchanov, and L. A. Pastur. On the level density of random band matrices. *Mathematical Notes*, 50:6:1232, 1991.
- [19] Y. F. Fyodorov and A. D. Mirlin. Analytical derivation of the scaling law for the inverse participation ratio in quasi-one-dimensional disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1093–1096, 1992.
- [20] S. A. Molchanov, L. A. Pastur, and A. M. Khorunzhii. Limiting eigenvalue distribution for band random matrices. *Theor. Math. Phys.*, 90:2:108, 1992.
- [21] A. D. Mirlin and Y. F. Fyodorov. The statistics of eigenvector components of random band matrices: Analytical results. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L551, 1993.
- [22] Y. F. Fyodorov and A. D. Mirlin. Level-to-level fluctuations of the inverse participation ratio in finite quasi 1d disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 71:412–415, 1993.
- [23] Y. F. Fyodorov and A. D. Mirlin. Statistical properties of eigenfunctions of random quasi 1d one-particle hamiltonians. *Int. J. Mod. Phys. B*, 8:3795–3842, 1994.
- [24] F. M. Izrailev. Scaling properties of spectra and eigenfunctions for quantum dynamical and disordered systems. *Chaos Solitons Fractals*, 5:1219–1234, 1995.
- [25] T. Kottos, A. Politi, F. M. Izrailev, and S. Ruffo. Scaling properties of lyapunov spectra for the band random matrix model. *Phys. Rev. E*, 53:R5553–R5556, 1996.
- [26] G. Casati, I. Guarneri, and G. Maspero. Landauer and thouless conductance: A band random matrix approach. *J. Phys. I (France)*, 7:729–736, 1997.
- [27] T. Kottos, A. Politi, and F. M. Izrailev. Finite-size corrections to lyapunov spectra for band random matrices. *J. Phys.: Condens. Matter*, 10:5965–5976, 1998.
- [28] T. Kottos, F. M. Izrailev, and A. Politi. Finite-length lyapunov exponents and conductance for quasi-1d disordered solids. *Physica D*, 131:155–169, 1999.
- [29] P. Shukla. Eigenvalue correlations for banded matrices. *Physica E*, 9:548–553, 2001.
- [30] W. Wang. Localization in band random matrix models with and without increasing diagonal elements. *Phys. Rev. E*, 65:066207, 2002.
- [31] A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, F.-M. Dittes, J. Quezada, and T. H. Seligman. Transition from localized to extended eigenstates in the ensemble of power-law random banded matrices. *Phys. Rev. E*, 54:3221–3230, 1996.
- [32] F. Evers and A. D. Mirlin. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1355–1417, 2008.
- [33] K. K. Mon and J. B. French. Statistical properties of many-particle spectra. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 95:90–111, 1975.




-
- [34] L. Benet and H. A. Weidenmüller. Review of the k -body embedded ensembles of gaussian random matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36:3569–3593, 2003.
- [35] V. K. B. Kota. *Embedded random matrix ensembles in quantum physics*, volume 884 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, London, 2014.
- [36] D. Cohen and T. Kottos. Parametric dependent hamiltonians, wave functions, random matrix theory, and quantal-classical correspondence. *Phys. Rev. E*, 63:036203, 2001.
- [37] D. Cohen and E. J. Heller. Unification of perturbation theory, random matrix theory, and semiclassical considerations in the study of parametrically dependent eigenstates. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2841–2844, 2000.
- [38] M. Feingold and A. Peres. Distribution of matrix elements of chaotic systems. *Phys. Rev. A*, 34:591–595, 1986.
- [39] D. L. Shepelyansky. Coherent propagation of two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2607–2610, 1994.
- [40] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin. Statistical properties of random banded matrices with strongly fluctuating diagonal elements. *Phys. Rev. B*, 52:R11580–R11583, 1995.
- [41] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin. Analytical results for random band matrices with preferential basis. *Europhys. Lett.*, 32:385–390, 1995.
- [42] P. G. Silvestrov. Summing graphs for random band matrices. *Phys. Rev. E*, 55:6419–6432, 1997.
- [43] M. Disertori, H. Pinson, and T. Spencer. Density of states for random band matrices. *Commun. Math. Phys.*, 232:83–124, 2002.
- [44] A. Khorunzhy and W. Kirsch. On asymptotic expansions and scales of spectral universality in band random matrix ensembles. *Commun. Math. Phys.*, 231:223–255, 2002.
- [45] J. Schenker. Eigenvector localization for random band matrices with power law band width. *Commun. Math. Phys.*, 290:1065–1097, 2009.
- [46] S. Sodin. The spectral edge of some random band matrices. *Annals of Math.*, 172:2223–2251, 2010.
- [47] X. Cao, A. Rosso, J.-P. Bouchaud, and P. LeDoussal. Genuine localization transition in a long-range hopping model. *Phys. Rev. E*, 95:062118, 2017.
- [48] J. A. Mendez-Bermudez, G. Ferraz de Arruda, F. A. Rodrigues, and Y. Moreno. Scaling properties of multilayer random networks. *Phys. Rev. E*, 96:012307, 2017.
- [49] T. Prosen and M. Robnik. Energy level statistics and localization in sparsed banded random matrix ensemble. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26:1105–1114, 1993.
- [50] Y. V. Fyodorov, O. A. Chubykalo, F. M. Izrailev, and G. Casati. Wigner random banded matrices with sparse structure: Local spectral density of states. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1603–1606, 1996.

-
- [51] J. A. Mendez-Bermudez, F. A. Rodrigues, and D. A. Vega-Oliveros. Multifractality in random networks with long-range spatial correlations. to be submitted.
- [52] X. Cao. Disordered statistical physics in low dimensions. extremes, glass transition, and localization, 2017. preprint.
- [53] G. J. Rodgers and A. J. Bray. Density of states of a sparse random matrix. *Phys. Rev. B*, 37:3557–3562, 1988.
- [54] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin. On the density of states of sparse random matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:2219–2223, 1991.
- [55] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin. Localization in ensemble of sparse random matrices. *Physical Review Letters*, 67:2049–2052, 1991.
- [56] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov. Universality of level correlation function of sparse random matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:2273–2286, 1991.
- [57] S. N. Evangelou and E. N. Economou. Spectral density singularities, level statistics, and localization in a sparse random matrix ensemble. *Physical Review Letters*, 68:361–364, 1992.
- [58] S. N. Evangelou. A numerical study of sparse random matrices. *J. Stat. Phys.*, 69:361–383, 1992.
- [59] A. D. Jackson, C. Mejia-Monasterio, T. Rupp, M. Saltzer, and T. Wilke. Spectral ergodicity and normal modes in ensembles of sparse matrices. *Nucl. Phys. A*, 687:405–434, 2001.
- [60] O. Khorunzhy, M. Shcherbina, and V. Vengerovsky. Eigenvalue distribution of large weighted random graphs. *J. Math. Phys.*, 45:1648–1672, 2004.
- [61] R. Kühn. Spectra of sparse random matrices. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:295002, 2008.
- [62] S. Sodin. The tracy-widom law for some sparse random matrices. *J. Stat. Phys.*, 136:834–841, 2009.
- [63] G. Semerjian and L. F. Cugliandolo. Sparse random matrices: the eigenvalue spectrum revisited. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:4837–4851, 2002.
- [64] L. Erdős, A. Knowles, H.-T. Yau, and J. Yin. Spectral statistics of erdős-rényi graphs i: Local semicircle law. *Ann. Probab.*, 41:2279–2375, 2013.
- [65] L. Erdős, A. Knowles, H.-T. Yau, and J. Yin. Spectral statistics of erdős-rényi graphs ii: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues. *Commun. Math. Phys.*, 314:587–640, 2012.
- [66] J. A. Mendez-Bermudez, A. Alcazar-Lopez, A. J. Martinez-Mendoza, F. A. Rodrigues, and T. K. DM. Peron. Universality in the spectral and eigenfunction properties of random networks. *Phys. Rev. E*, 91:032122, 2015.
- [67] J. A. Mendez-Bermudez, G. Ferraz de Arruda, F. A. Rodrigues, and Y. Moreno. Diluted banded random matrices: Scaling behavior of eigenfunction and spectral properties. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 50:495205, 2017.

-
- [68] J. Ginibre. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6:440–449, 1965.
- [69] C. M. Bender. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, 70:947–1018, 2007.
- [70] N. Moiseyev. *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [71] Demetrios N. Christodoulides, Ramy El-Ganainy, Ulf Peschel, and Stefan Rotter. Parity-time symmetry in optics and photonics. *New Journal of Physics*, 2016. Focus issue.
- [72] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides. Non-hermitian physics and pt symmetry. *Nature Phys*, 14:11–19, 2018.
- [73] J. F. Capraux, J. Erhel, and M. Sadkane. Spectral portrait for non-hermitian large sparse matrices. *Computing*, 53:301–310, 1994.
- [74] T. Rogers and I. Perez-Castillo. Cavity approach to the spectral density of non-hermitian sparse matrices. *Physical Review E*, 79:012101, 2009.
- [75] I. Neri and F. L. Metz. Spectra of sparse non-hermitian random matrices: An analytical solution. *Physical Review Letters*, 109:030602, 2012.
- [76] F. L. Metz, I. Neri, and T. Rogers. Spectral theory of sparse non-hermitian random matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52:434003, 2019.
- [77] A. Basak and M. Rudelson. The circular law for sparse non-hermitian matrices. *Annals of Probability*, 47:2359–2416, 2019.
- [78] R. Aguilar-Sánchez, J. A. Méndez-Bermúdez, F. A. Rodrigues, and J. M. Sigarreta. Topological versus spectral properties of random geometric graphs. *Phys. Rev. E*, 102:042306, 2020.
- [79] T. Peron, B. M. F. de Resende, F. A. Rodrigues, L. da F. Costa, and J. A. Mendez-Bermudez. Spacing ratio characterization of the spectra of directed random networks. *Phys. Rev. E*, 102:062305, 2020.
- [80] K. Peralta-Martinez and J. A. Mendez-Bermudez. Directed random geometric graphs: structural and spectral properties. *Journal of Physics: Complexity*, 4:015002, 2023.
- [81] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, and J. M. Sigarreta. Topological and spectral properties of random digraphs. *Phys. Rev. E*, 109:064306, Jun 2024.
- [82] J. A. Mendez-Bermudez and R. Aguilar-Sanchez. Singular-value statistics of directed random graphs, 2024. preprint.
- [83] G. Dubach and Y. Peled. On words of non-hermitian random matrices. *Annals of Probability*, 49:1886–1916, 2021.
- [84] I. Jana. Clt for non-hermitian random band matrices with variance profiles. *Journal of Statistical Physics*, 187:13, 2022.
- [85] F. Luo, J. Zhong, Y. Yang, R. H. Scheuermann, and J. Zhou. Application of random matrix theory to biological networks. *Physics Letters A.*, 357(6):420–423, SEP 25 2006.

-
- [86] Xu Zan-Xin, Wang Yue, Si Hong-Bo, and Feng Zhen-Ming. Analysis of urban human mobility behavior based on random matrix theory. *Acta Physica Sinica*, 60(4), APR 2011.
- [87] F. Pascal and A. Kammoun. Robust random matrix theory and applications to radar detection. *TRAITEMENT DU SIGNAL*, 33(2-3):321–349, 2016.
- [88] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.
- [89] V. Oganesyanyan and D. A. Huse. Localization of interacting fermions at high temperature. *Physical Review B*, 75(15):155111, 2007.
- [90] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Physical Review Letters*, 110(8):084101, 2013.
- [91] S. C. Srivastava, A. Lakshminarayan, S. Tomsovic, and A. Bäcker. Ordered level spacing probability densities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(10):105001, 2013.
- [92] T. A. Brody. A statistical measure for the repulsion of energy levels. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 7(12):482–484, 1973.
- [93] G. Casati, I. Guarneri, F. M. Izrailev, and R. Scharf. Scaling behavior of localization in quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:5–8, 1990.
- [94] F. M. Izrailev. Simple models of quantum chaos: Spectrum and eigenfunctions. *Phys. Rep.*, 196:299–392, 1990.
- [95] G. Casati, I. Guarneri, F. M. Izrailev, S. Fishman, and L. Molinari. Scaling of the information length in 1d tight-binding models. *J. Phys.: Condens. Matter*, 4:149–156, 1992.
- [96] K. Kawabata, Z. Xiao, T. Ohtsuki, and R. Shindou. Singular-value statistics of non-hermitian random matrices and open quantum systems. *PRX Quantum*, 4:040312, Oct 2023.
- [97] F. Roccati, F. Balducci, R. Shir, and A. Chenu. Diagnosing non-hermitian many-body localization and quantum chaos via singular value decomposition. *Phys. Rev. B*, 109:L140201, Apr 2024.
- [98] Wen-Lei Zhao and H. Zhang. Dynamical stability in a non-hermitian kicked rotor model. *Symmetry*, 15:113, 12 2022.
- [99] G. Marinello and M. Pato. Random non-hermitian tight-binding models. *Journal of Physics: Conference Series*, 738:012040, 08 2016.

Anexo

Non-Hermitian diluted banded random matrices: Scaling of eigenfunction and spectral propertiesM. Hernández-Sánchez ¹, G. Tapia-Labra ¹ and J. A. Méndez-Bermúdez ^{1,2}¹*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72570, Mexico*²*Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Honduras*

(Received 21 May 2024; accepted 25 September 2024; published 17 October 2024)

Here we introduce the non-Hermitian diluted banded random matrix (nHdBRM) ensemble as the set of $N \times N$ real nonsymmetric matrices whose entries are independent Gaussian random variables with zero mean and variance one if $|i - j| < b$ and zero otherwise, moreover off-diagonal matrix elements within the bandwidth b are randomly set to zero such that the sparsity α is defined as the fraction of the $N(b - 1)/2$ independent nonvanishing off-diagonal matrix elements. By means of a detailed numerical study we demonstrate that the eigenfunction and spectral properties of the nHdBRM ensemble scale with the parameter $x = \gamma[(b\alpha)^2/N]^\delta$, where $\gamma, \delta \sim 1$. Moreover, the normalized localization length β of the eigenfunctions follows a simple scaling law: $\beta = x/(1 + x)$. For comparison purposes, we also report eigenfunction and spectral properties of the Hermitian diluted banded random matrix ensemble.

DOI: [10.1103/PhysRevE.110.044124](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.044124)**I. INTRODUCTION**

Random matrix (RM) models play a crucial role in the description of complex systems and complex processes [1]. Originating from the Gaussian Hermitian RM ensembles introduced by Wigner and Dyson [2], RM models have served to reproduce the statistical properties of energy levels of diverse complex systems, such as heavy nuclei, quantized chaotic systems, disordered systems, and random networks [1]. In fact, RM models are not limited to describe the spectra of complex systems but also provide insights into a wide range of matrix-related quantities. In recent years, there has been a remarkable expansion of RM models to incorporate more sophisticated ensembles alongside the development of novel frameworks. Take, for instance, the problem of many-body localization [3], which exemplifies the advancement of RM models.

Even at the early years of RM modeling, Wigner himself foresaw the need for refinements to the original Gaussian ensembles, recognizing that they lacked certain properties exhibited by realistic physical systems such as a finite interaction range and a mean-field component. To address this, he proposed the so-called Wigner-banded RM model [4,5] (see also Refs. [1,6–13]), incorporating elements like a bandwidth and an increasing diagonal. Indeed, the bandwidth, which measures the range of interactions, became the cornerstone for a variety of RM models emerging with distinct applications: The power-law banded RM model [14,15], for instance, lies at the heart of simulating the Anderson metal-insulator transition, while the banded random matrix (BRM) model [16–32] serves to mimic the behavior of quasi-one-dimensional disordered wires. The intricacies of many-body interactions in complex nuclei and many-body systems are also skillfully tackled through the embedded ensembles [33–35]. Additionally, system-specific RM models [36,37], tailored around banded Hamiltonian matrices corresponding to quantized chaotic systems, have also been proposed.

These illustrations (see also Refs. [1,38–51]), while far from exhaustive, indicate the wide variety of BRM models available to address a good number of different applications.

In addition, the analysis of diluted RM models has attracted significant interest as well, see, for example, Refs. [52–65]. In this context, we can mention the following models that include both sparsity and an effective bandwidth, i.e., diluted BRM models: the Wigner-banded RM model with sparsity [46,47], diluted power-law RM models [48,49], a diluted block-banded RM model [50], and the Hermitian diluted BRM ensemble [66].

It is important to stress that most of the studies mentioned above focus on Hermitian RM models even though the Gaussian non-Hermitian RM ensembles were introduced already in the sixties by Ginibre [67]. This is relevant because non-Hermitian RM models may find direct applications in non-Hermitian physics, also known as non-Hermitian quantum mechanics (see, e.g., Refs. [68,69]), which is a relatively new field of theoretical physics that challenges the conventional understanding of quantum mechanics by exploring the mathematical properties of non-Hermitian Hamiltonian operators. Indeed, non-Hermitian Hamiltonians can arise in systems such as open quantum systems, optical systems, and nonlinear systems, see, e.g., Refs. [70,71].

Remarkably, there exist several studies on diluted non-Hermitian RM ensembles, see, e.g., Refs. [72–82], as well as a few papers on non-Hermitian banded RM models, see, e.g., Refs. [82,83]. However, we believe that more detailed studies of non-Hermitian banded RM models are still needed. Moreover, since diluted RM models can be used as null models for random networks (i.e., the adjacency matrices of complex networks are, in general, diluted random matrices), we believe that non-Hermitian banded RM ensembles may be used to model the adjacency matrices of certain types of directed random networks; that is, those having banded adjacency matrices.