CRITERIOS DE METRIZABILIDAD DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

JESÚS DÍAZ REYES

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

A mi padre,
Etelberto Díaz Soto,
y a mi abuela,
Eusebia Reyes Cortez.

Gracias a mi madre y hermanos, quienes ocupan un gran lugar en mi mente y son factor importante en este logro; en especial Gerardo, a quien le debo todo lo bueno en mí. Dedico el presente trabajo a mi padre y a mi abuela; desafortunadamente ya no están entre nosotros, pero siempre vivirán en mis pensamientos a través de sus innumerables consejos.

Este párrafo es para agradecer a todas las personas que me han brindado su amistad a lo largo de mi trayecto por la facultad de matemáticas; en especial a Yoanna Arenas Martínez, que ha estado en los buenos, malos, y pésimos momentos de mi vida.

Agradezco ampliamente al profesor Oleg Okunev por dirigir mi trabajo de tesis, y en general por toda su ayuda. Gracias a los profesores Manuel Ibarra Contreras (mi gurú), Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo y Fernando Sánchez Texis, quienes han revisado y mejorado considerablemente la presentación final de este escrito.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por todo el apoyo económico que me otorgó, sin el cual hubiera sido imposible obtener este grado académico.

Felicito a mi conciencia, fiel amante del conocimiento.

Jesús Díaz Reyes
Julio, 2014

Introducción

Desde 1906 cuando M. Fréchet introdujo el concepto abstracto de métrica, la teoría de los espacios métricos ha sido ineludible y objeto de exhaustivas investigaciones, las cuales han manifestado el prodigioso y sorprendente poder que posee. Su importancia inicial, en parte, fue reconocida como una interesante generalización de la teoría de espacios normados, dando como resultado aplicaciones en el Análisis Funcional, y, posteriormente, en otras ramas de las matemáticas.

Para el caso de la Topología General, los espacios métricos tienen cualidades de mucha utilidad; por ejemplo, en cualquier espacio métrico podemos encontrar las siguientes propiedades: todo subespacio es nuevamente un espacio métrico, el producto de una cantidad numerable es un espacio métrico, la propiedad de ser compacto equivale a ser numerablemente compacto, y ser separable es equivalente a tener una base numerable. Aunado a las propiedades mencionadas, los espacios métricos son claramente más asequibles a nuestra intuición geométrica, y, como resultado, los podemos manipular con mayor facilidad. Por estas razones, o quizá sólo por el gusto de hacer matemáticas, hallar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable ha sido un problema fundamental, lo cual, abre brecha a la aparición de *criterios de metrizabilidad de espacios topológicos*.

El presente trabajo tiene como objetivo, primeramente, mostrar de la manera más clara y precisa los criterios fundamentales de metrizabilidad de espacios topológicos; nos referimos a todos los criterios de metrizabilidad que un estudiante de topología debería tener en mente. Una vez que se tengan claras las construcciones y técnicas empleadas en los criterios clásicos, pasaremos a estudiar algunas clases de espacios métricos generalizados. Para los espacios métricos generalizados no hay una definición precisa, pero entenderemos que son espacios topológicos "parecidos" a un espacio métrico; parecidos en el sentido de que poseen muchas de las propiedades de utilidad que caracterizan a los espacios métricos. Al presentar algunas clases de espacios métricos generalizados, nuestro único fin será proporcionar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de este tipo sea metrizable. Para concluir nuestra exposición, analizaremos, como un extra decoroso, todo lo referente a la conjetura planteada por F. B. Jones en 1937 *¿todo espacio normal y de Moore es metrizable?* El problema que se mantuvo abierto cerca de cincuenta años y cuya solución es de las más inesperadas e intrigantes en Topología General.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Aquí se encuentran las definiciones y los teoremas de Topología General y Teoría de Conjuntos que son la base para poder desarrollar la temática principal; la mayoría de los resultados no tienen una demostración salvo aquellos que son poco comunes. También, se da a conocer la notación que se empleará a lo largo del trabajo.

Es fundamental saber que en todos los espacios en que no especifiquemos qué axioma de separabilidad se está suponiendo, deberá ser tomado como un espacio completamente regular. Cuando tenemos un subconjunto de un espacio topológico, $Y \subseteq X$, se asume que Y tiene la topología heredada de X.

En cuestión de la notación, $X \in \mathscr{T}_i$ significa que el espacio X satisface el axioma de separación $\mathscr{T}_i$.

Se ha dividido en tres partes: la Sección 1.1 para lo relativo a la Teoría de Conjuntos, la Sección 1.2 respecto a Topología General, y la Sección 1.3 donde encontraremos espacios y propiedades que se dan en términos de familias de cubiertas.

1.1. Nociones de Teoría de conjuntos

Esta breve sección es con el fin de dejar plasmados aquellos resultados en teoría de conjuntos que nos serán de utilidad a lo largo de nuestra exposición.

Como veremos, no daremos demostraciones de lo presentado aquí, pues estamos seguros que casi en cualquier libro de teoría de conjuntos podría ser consultada toda propiedad relativa a esta sección; en nuestro caso, usaremos ampliamente [7].

Los axiomas específicos con los que trabajaremos son los de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección, denotados por *ZFC*, cuyos enunciados pueden ser consultados en el Apéndice A de [7].

A lo largo de la historia del Axioma de Elección han surgido varios enunciados equivalentes a él; haremos uso de uno de ellos, conocido como el Lema de Tukey-Teichmüller.

Definición 1.1. *Sea $\mathscr{F}$ una familia de conjuntos. Se dice que $\mathscr{F}$ es una* ***familia de carácter finito*** *si para cada conjunto A, se tiene que $A \in \mathscr{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A pertenece a $\mathscr{F}$.*

El siguiente teorema es el Lema de Tukey-Teichmüller, el cual, es equivalente al Axioma de Elección (ver [7], Teorema 8.8).

***Teorema* 1.2.** *Toda familia de carácter finito tiene un elemento $\subseteq$-maximal.*

Ahora, queremos enfatizar algunas de las propiedades que tienen que ver con la cardinalidad de conjuntos, así como declarar algunas de las notaciones que emplearemos.

Para todo conjunto A, denotaremos por $|A|$ y $\mathscr{P}(A)$ la *cardinalidad* y el *conjunto potencia* de A respectivamente.

Usaremos la letra ω para referirnos a los números naturales. Es común denotar por $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales, por sus características, dicho conjunto también es llamado la *línea real* o el *continuo*. Resulta que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la de $\mathscr{P}(\omega)$, esto puede consultarse en [7], Teorema 7.36.

***Teorema* 1.3.** $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)| = \left|2^{\aleph_0}\right|$.

Enunciaremos el célebre teorema de Cantor, la importancia de este, es que siempre que tengamos un conjunto, ya sea finito o infinito, siempre podremos construir otro conjunto de mayor cardinalidad; su demostración puede ser consultada en [7], Teorema 7.26.

***Teorema* 1.4** (de Cantor)**.** *Para todo conjunto A,* $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Lo que resta de está sección es con el fin de introducir los conceptos y resultados que serán de utilidad en la Sección 3.4. Lo que se presenta será a grandes rasgos y sin su debida formalidad, si se requiere mayor información se recomienda consultar [11].

Definición 1.5. *Una teoría (pensemos en ZFC o en ZFC+[*$2^{\aleph_0} = \aleph_1$*] etcétera) es* ***consistente*** *si es libre de contradicciones.*

Puesto que la matemática que conocemos está basada en ZFC, es natural preguntarse sobre la consistencia de los axiomas de ZFC. El matemático K. Gödel, probó que es imposible demostrar la consistencia de ZFC dentro de ZFC. Por ello siempre diremos, *si ZFC es consistente, entonces...*

Definición 1.6. *Un enunciado* φ *es* ***independiente*** *de ZFC si se tiene que tanto ZFC+*φ *como ZFC+*$\neg\varphi$ *son consistentes.*

Resulta que la matemática (ZFC) esta llena de estos enunciados, tanto consistentes como independientes de ZFC. Veamos un ejemplo de ello.

Del Teorema de Cantor y el Teorema 1.3, $|\omega| < |\mathscr{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$. Una pregunta natural es:

¿Existirá un subconjunto de numeros reales P tal que $|\omega| < |P| < |\mathbb{R}|$?

Hipótesis del Continuo (CH): No existe un número cardinal κ tal que

$$\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}.$$

Equivalentemente, CH nos dice que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. La hipótesis del Continuo fue formulada por el matemático G. Cantor a finales del siglo XIX, quien dedicó gran parte de su vida a demostrar CH y murió sin haberlo logrado. Fue hasta el año de 1939 cuando K. Gödel demostró que CH es consistente con ZFC, es decir, usando los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el Axioma de Elección, no se puede demostrar que CH sea falsa. En 1963, P. Cohen demostró que $\neg$CH es consistente con ZFC, y por lo tanto, resulta que CH independiente de ZFC.

Es momento de hablar del Axioma de Martin; tal enunciado fue introducido por D. Martin y R. Solovay en el año 1970. Para poderlo formular son necesarias algunas definiciones.

Definición 1.7. *Una relación $\leq$ en un conjunto $\mathbb{P}$ es un orden parcial si es reflexiva y transitiva. A la pareja $(\mathbb{P}, \leq)$ le llamamos **conjunto parcialmente ordenado**.*

Para referirnos a un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ sólo usaremos la letra $\mathbb{P}$ si no da lugar a confusión. Ahora, dado un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$, es común llamar a los elementos de $\mathbb{P}$ *condiciones*; además, diremos que una condición p *extiende* a una condición q siempre que $p \leq q$.

Definición 1.8. *Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado.*

(a) *Dos condiciones p, q son **compatibles** si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.*

(b) *Dos elementos en $\mathbb{P}$ son **incompatibles** si no son compatibles.*

(c) *Diremos que $A \subseteq \mathbb{P}$ es una **anticadena** si cualesquiera dos elementos en A son incompatibles.*

(d) *Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es **denso** si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.*

Definición 1.9. *Decimos que un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ satisface la **condición de la cadena contable** si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.*

Es una cuestión histórica por la que hemos llamado condición de la cadena contable a una propiedad que realmente tiene que ver con anticadenas. Esperamos que en el contexto siempre quede clara la propiedad a la que nos referimos.

Definición 1.10. *Sean $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathscr{D}$ una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$. Decimos que $F \subseteq \mathbb{P}$ es un **filtro** si cumple:*

$(\cdot)$ *para cualesquiera $p \in \mathbb{P}$ y $q \in F$, si $q \leq p$ entonces $p \in F$;*

($\cdot\cdot$) *si* $p,q \in F$ *existe* $r \in F$ *tal que* $r \leq p$ *y* $r \leq q$.

Además, diremos que F *es un* ***filtro*** $\mathscr{D}$***-genérico*** *si* $D \cap F \neq \emptyset$ *para cada* $D \in \mathscr{D}$.

Veamos una consecuencia inmediata de las definiciones que hemos dado. El Lema de Rasiowa-Sikorski.

Lema 1.11. *Si* $(\mathbb{P}, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado, y* $\mathscr{D}$ *es una familia a lo más numerable de conjuntos densos en* $\mathbb{P}$*, entonces existe un filtro* $\mathscr{D}$*-genérico en* $\mathbb{P}$.

Demostración. Denotemos $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, ...\}$. Recursivamente definimos una sucesión de puntos en $\mathbb{P}$; tomamos $p_0 = p$ (donde p es cualquier condición) y para cada $n > 0$ se elige $p_n \in D_n$ con $p_n \leq p_{n-1}$. Demostremos que el conjunto

$$G = \{x \in \mathbb{P} \mid p_n \leq x \text{ para algún } n \in \omega\}$$

es un filtro $\mathscr{D}$-genérico. Para esto es suficiente ver que G satisface las condiciones ($\cdot$) y ($\cdot\cdot$) de la Definición 1.10 ya que claramente $G \cap D_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. ($\cdot$) es inmediata; ahora, dados $x, y \in G$ existen $n, m \in \omega$ tal que $p_n \leq x$ y $p_m \leq y$ (sin pérdida de generalidad supongamos que $n < m$) entonces $p_m \leq p_n$, y con esto, $p_m \leq x$ y $p_m \leq y$, por lo cual G también satisface la condición ($\cdot\cdot$). Se concluye que G es $\mathscr{D}$-genérico. †

Sin más preámbulo, presentamos el Axioma de Martin.

Axioma de Martin (MA): Si $\mathbb{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado que satisface la condición de la cadena contable y $\mathscr{D}$ es una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| < 2^{\aleph_0}$, entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

Consideremos el siguiente enunciado:

MA(κ): Si κ es un cardinal infinito y $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que satisface la condición de la cadena contable y $\mathscr{D}$ es una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

Ahora, observemos que por Lema 1.11, ZFC+CH implica MA, en otras palabras, MA es un teorema de ZFC+CH. Por ello, cuando hablemos del Axioma de Martin, nos conviene suponer $\neg$CH ya que de lo contrario no generamos nada nuevo. De hecho, nos referiremos a MA como el enunciado: para todo $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$, MA($\kappa$).

Visto lo anterior, nos podríamos preguntar si en ZFC+$\neg$CH hay una demostración, quizá parecida a la del Lema 1.11, para MA. El siguiente teorema nos muestra que no. Su demostración pude ser consultada en [16], Teorema 1.

***Teorema* 1.12.** *Si ZFC es consistente, entonces ZFC+$\neg$CH+MA es consistente.*

1.2. Resultados básicos en topología

En este apartado se darán los resultados, que por decirlo de algún modo, pueden consultarse en cualquier libro de topología general; es por ello que en su mayoría no encontraremos las pruebas de lo afirmado. Pero tiene el propósito de, por un lado recordar las definiciones y resultados clásicos de topología, y por otro, proporcionar una lectura sin tener que estar consultado un libro de topología general. Por supuesto, siempre indicaremos al menos una referencia donde es posible encontrar una demostración del resultado en cuestión.

Recordemos que un espacio topológico X se dice **normal**, o $X \in \mathscr{T}_4$, si $X \in \mathscr{T}_1$ y para cualesquiera par de conjuntos cerrados y ajenos A y B, es posible encontrar dos conjuntos abiertos y ajenos U y V, tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Proponemos una condición suficiente para que un espacio sea normal, una demostración puede ser consultada en [4], Lema 1.5.15.

Lema 1.13. *Sea $X \in \mathscr{T}_1$. Si para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ y todo conjunto abierto $W \subseteq X$ tal que $F \subseteq W$ existe una sucesión $\{W_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos de X con $F \subseteq \bigcup_{n\in\omega} W_n$ y $\overline{W}_n \subseteq W$, entonces X es normal.*

Una condición necesaria y suficiente para que un espacio sea normal es el famoso Lema de Urysohn. La demostración puede ser consultada en [4], Teorema 1.5.11.

***Teorema* 1.14.** *Sea X un espacio normal. Para cualesquiera A, B, conjuntos cerrados y ajenos en X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Enunciamos dos consecuencias del Lema de Urysohn. Antes, dado un espacio topológico X, recordemos que $G \subseteq X$ es un **conjunto** G_δ en X si existe una familia numerable $\{G_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos en X tal que $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Análogamente, F es un **conjunto** F_σ en X si existe una familia numerable $\{F_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos cerrados en X tal que $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Claramente si A es un conjunto G_δ en X, $X \setminus A$ es un conjunto F_σ en X.

Corolario 1.15. *Un conjunto cerrado F en un espacio normal X es conjunto G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $F = f^{-1}(\{0\})$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Escribamos $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde cada U_n es un conjunto abierto en X. Notemos que para cada número natural n, del Lema de Urysohn y dado que $F \cap (X \setminus U_n) = \emptyset$, podemos hallar una función $f_n : X \to [0,1]$ tal que f_n es continua, $f_n(F) = 0$, y $f_n(X \setminus U_n) \subseteq \{1\}$. Dado $x \in X$, definimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f_n(x).$$

Observemos que f es una función tal que $f : X \to [0,1]$, además, la serie dada converge uniformemente a f y cada f_n es continua, de esto se sigue f es una función continua. Claramente $F \subseteq f^{-1}(\{0\})$, y también $f^{-1}(\{0\}) \subseteq F$ pues si un punto $x \notin F$ tenemos que $f(x) \neq 0$; por lo tanto $F = f^{-1}(\{0\})$.

($\Leftarrow$) Sea $f : X \to [0,1]$ una función continua tal que $F = f^{-1}(\{0\})$. El conjunto F es G_δ pues

$$F = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\omega} [0, \tfrac{1}{2^n})\right) = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2^n})\right).$$

†

La prueba del siguiente resultado es totalmente análoga a la del Corolario 1.15.

Corolario 1.16. *Un conjunto abierto A de un espacio normal X es un conjunto F_σ si y sólo si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}((0,1])$.*

Un subconjunto D de un espacio topológico X se dice **denso** en X siempre que $\overline{D} = X$. Para la demostración del siguiente teorema ver el Teorema 3.10.20 en [4].

***Teorema* 1.17.** *Si A es denso en X, entonces para todo conjunto abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.*

Un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto denso y numerable. Por otro lado, un conjunto lo llamamos **segundo numerable** si tiene una base numerable.

Decimos que un espacio topológico es **metrizable** siempre que existe una métrica que genere la topología del espacio. Cuando digamos un *espacio métrico*, nos referimos a un espacio topológico metrizable.

En cuestión de hablar de espacios metrizables requerimos de los siguientes resultados.

***Teorema* 1.18.** *Para un espacio metrizable X las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *X es segundo numerable.*

(ii) *X es separable.*

La demostración del teorema anterior la podemos encontrar en [4], como el Corolario 4.1.16. Otro resultado de importancia es el siguiente teorema, una prueba puede ser consultada en [18], Teorema 22.3.

***Teorema* 1.19.** *El producto de una cantidad a lo más numerable de espacios métricos es un espacio metrizable.*

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [4], Teorema 4.2.8.

***Teorema* 1.20.** *Un espacio compacto es metrizable si y sólo si es un espacio segundo numerable.*

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [4], Teorema 4.1.10.

***Teorema* 1.21.** *Para todo espacio métrico (X,d) y todo $A \subseteq X$, la función $\rho_A : X \to [0,\infty)$, donde $\rho_A(x) = d(x,A)$, es continua.*

Será necesaria la siguiente caracterización para funciones continuas. Dados una función f y un conjunto A, se denotará por $f|_A$ a la función f restringida al conjunto A.

Lema 1.22. *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continua si y sólo todo $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $f|_U$ es continua.*

Una demostración del lema anterior puede ser consultada en [4], como el Corolario 2.1.12.

Recordemos que un espacio Hausdorff donde toda cubierta abierta y numerable de él tiene una subcubierta finita, es llamado **espacio numerablemente compacto**. Nos interesa la siguiente propiedad (Teorema 3.10.3 en [4]).

***Teorema* 1.23.** *X es un espacio numerablemente compacto si y sólo si todo subconjunto infinito y numerable en X tiene un punto límite.*

Un espacio topológico X es llamado **pseudocompacto** si X es Tychonoff y toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada. Haremos uso del siguiente resultado (Teorema 3.10.20 en [4]).

***Teorema* 1.24.** *Todo espacio numerablemente compacto y Tychonoff es pseudocompacto.*

Para concluir este apartado, introducimos la siguiente clase de espacios topológicos.

Definición 1.25. *Dado un espacio topológico X.*

(i) *La **diagonal** de X es el conjunto $\{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$; la denotaremos por la letra Δ_X.*

(ii) *Se dice que X tiene **diagonal** G_δ, si Δ_X es un subconjunto G_δ en $X \times X$.*

El siguiente resultado es sencillo, pero será de mucha utilidad; la demostración puede ser consultada en [18], Teorema 13.7.

Proposición 1.26. *Dado un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *X es Hausdorff.*

(b) Δ_X *es un conjunto cerrado en* $X \times X$.

La clase de los espacios con diagonal G_δ será estudiada ampliamente en la Sección 3.1.

1.3. Propiedades y definiciones del tipo cubierta

Como el título indica, esta sección será dedicada a ver todo lo necesario a espacios que se definen mediante familias de conjuntos de un espacio topológico dado; así como los resultados que se necesitarán para los capítulos siguientes. Cabe restar que muchas definiciones y consecuencias, específicamente a partir de la Definición 1.44, serán usados hasta la Sección 3.2.

De ahora en adelante usaremos continuamente la siguiente notación: para cada colección $\mathscr{U}$ de subconjuntos de X, sea

$$\mathscr{U}|_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathscr{U}\}.$$

Comencemos desde lo más básico posible. Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 1.27. *Sea* $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ *una familia de subconjuntos de un conjunto* X. *La* ***estrella*** *de* $U \subseteq X$ *con respecto de* $\mathscr{A}$, *es el conjunto* $\bigcup\{A_s \in \mathscr{A} \mid A_s \cap U \neq \emptyset\}$ *y lo denotamos por* $st(U, \mathscr{A})$.

Para el caso de la estrella de un conjunto de la forma $\{x\}$, sólo escribiremos $st(x, \mathscr{A})$.

Definición 1.28. *Sean* $\mathscr{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ *y* $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *dos cubiertas para un conjunto* X.

(i) $\mathscr{V}$ *es un* ***refinamiento*** *de* $\mathscr{U}$ *si para todo* $\beta \in B$, *existe* $\alpha \in A$ *tal que* $V_\beta \subseteq U_\alpha$. *En este caso diremos que* $\mathscr{V}$ ***refina*** *a* $\mathscr{U}$.

(ii) *$\mathscr{V}$ es un* ***refinamiento con estrellas*** *de $\mathscr{U}$ si para todo $\beta \in B$, existe $\alpha \in A$ tal que $st(V_\beta, \mathscr{V}) \subseteq U_\alpha$.*

Introducimos una operación $\wedge$ entre cubiertas.

Definición 1.29. *Sean $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ dos cubiertas para un espacio X, definimos la cubierta $\mathscr{U} \wedge \mathscr{V}$ para el espacio X como sigue.*

$$\mathscr{U} \wedge \mathscr{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathscr{U} \, y V \in \mathscr{V}\}.$$

La siguiente propiedad es inmediata de la definición anterior.

Proposición 1.30. *$\mathscr{U} \wedge \mathscr{V}$ es un refinamiento común de $\mathscr{U}$ y de $\mathscr{V}$, en otras palabras, $\mathscr{U} \wedge \mathscr{V}$ refina tanto a $\mathscr{U}$ como a $\mathscr{V}$.*

Si además suponemos que las familias $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ son cubiertas abiertas, entonces $\mathscr{U} \wedge \mathscr{V}$ también es una cubierta abierta.

Note que si existe una sucesión de cubiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ para un conjunto X, siempre podemos asumir que para cada n, $\mathscr{U}_{n+1}$ refina a $\mathscr{U}_n$. Si esto no fuera el caso, basta tomar una sucesión $\{\mathscr{U}_n^*\}_{n\in\omega}$ de la siguiente forma

$$\mathscr{U}_n^* = \begin{cases} \mathscr{U}_0 & \text{si } n = 0, \\ \bigwedge_{i\leq n} \mathscr{U}_i & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

La operación definida anteriormente será usada en los capítulos posteriores.

Definición 1.31. *Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es* ***localmente finita*** *si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $|\{s \in S \mid U \cap A_s \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. En caso que $|\{s \in S \mid U \cap A_s \neq \emptyset\}| \leq 1$ decimos que $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia* ***discreta****.*

Note que toda familia discreta es una familia localmente finita. Una de las propiedades de nuestro interés para familias localmente finitas es la siguiente (Teorema 1.1.11 en [4]).

***Teorema* 1.32.** *Si $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia localmente finita entonces $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.*

La siguiente definición generaliza los conceptos de familia localmente finita y de familia discreta.

Definición 1.33. *Una familia de subconjuntos de un espacio topológico es llamada* ***σ-localmente finita*** *(**σ-discreta**) si puede ser representada como la unión numerable de familias localmente finitas (discretas).*

Claramente toda familia que es σ-discreta, es una familia σ-localmente finita. También, toda familia localmente finita es una familia σ-localmente finita, y toda familia discreta es una familia σ-discreta.

Ahora es posible definir una de las clases de mayor relevancia en topología general.

Definición 1.34. *Diremos que X es* ***paracompacto*** *si $X \in \mathscr{T}_2$ y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y localmente finito.*

La clase de los espacios metrizables queda contenida en la de los espacios paracompactos. Ver Teorema 5.1.3 en [4].

***Teorema* 1.35.** *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Para el caso de espacios normales, hablamos de separar dos conjuntos cerrados y ajenos; una pregunta inmediata es si la normalidad nos garantiza poder separar una cantidad numerable de conjuntos cerrados. Con rumbo a esta idea, tenemos la siguiente clase de espacios topológicos.

Definición 1.36. *Un espacio topológico $X \in \mathscr{T}_1$ se dice* ***normal por colecciones*** *si para toda familia discreta $\{F_s\}_{s\in S}$ de conjuntos cerrados en X, existe una familia discreta $\{U_s\}_{s\in S}$ de conjuntos abiertos en X tal que para todo $s \in S$, $F_s \subseteq U_s$.*

Si X es normal por colecciones, X es normal. Debido a que si tomamos dos conjuntos cerrados ajenos, digamos F y G, la familia $\{F,G\}$ es discreta, así, existe una familia discreta de conjuntos abiertos $\{U,V\}$, y por lo tanto ajena, que cumple que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

Lo dicho anteriormente puede generalizarse de la siguiente forma, Teorema 5.1.17 en [4].

***Teorema* 1.37.** *X es normal por colecciones si y sólo si para toda familia discreta de conjuntos cerrados $\{F_s\}_{s\in S}$ de X, existe una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de conjuntos abiertos en X, ajenos dos a dos, y tal que $F_s \subseteq U_s$.*

Para especificar de manera más precisa la ubicación de los espacios paracompactos y los espacios que son normales por colecciones, tenemos el siguiente teorema. Una prueba puede ser consultada en [4], Teorema 5.1.18.

***Teorema* 1.38.** *Todo espacio paracompacto es normal por colecciones.*

Resumimos los resultados enunciados en el siguiente diagrama.

Paracompacto $\Longrightarrow$ Normal por colecciones $\Longrightarrow$ Normal

Pasamos a ver dos tipos de espacios topológicos que pertenecen a la clase de los espacios normales.

Definición 1.39. *Un espacio topológico X se dice* ***perfectamente normal*** *si X es normal y todo conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ.*

Equivalentemente podemos decir que un espacio topológico es perfectamente normal si el espacio es normal y todo conjunto abierto en él es un conjunto F_σ. Claramente todo espacio métrico es perfectamente normal pues dado un conjunto G cerrado en X,

$$G = \bigcap_{n\in\omega} \{x \in X \mid d(x,F) < \tfrac{1}{n+1}\}.$$

Definición 1.40. *Un espacio X se dice* ***hereditariamente normal*** *si todo subespacio de X es normal.*

También, comúnmente, a los espacios que son hereditariamente normales se les llaman **completamente normal**. Veamos una caracterización para espacios hereditariamente normales. Una demostración de tal hecho puede ser consultada en [4], Teorema 2.1.7.

***Teorema* 1.41.** *Para $X \in \mathscr{T}_1$ son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(i) *X es hereditariamente normal.*

(ii) *Todo subconjunto abierto* $Y \subseteq X$ *es normal.*

(iii) *Si* $A, B \subseteq X$ *cumplen que* $\overline{A} \cap B = \emptyset$ *y* $A \cap \overline{B} = \emptyset$*, entonces existen dos conjuntos abiertos* $U, V \subseteq X$ *con la propiedad de que* $A \subseteq U$*,* $B \subseteq V$ *y* $U \cap V = \emptyset$*.*

Como consecuencia del Corolario 1.16 y del inciso (ii) en el Teorema 1.41, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.42. *Todo espacio perfectamente normal es hereditariamente normal.*

Recordemos la siguiente clase de espacios topológicos.

Definición 1.43. *Una familia numerable de cubiertas abiertas de un espacio X,* $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$*, es llamada un* ***desarrollo*** *para el espacio X, si para todo* $x \in X$ *y toda vecindad U de x existe un número natural i tal que* $st(x, \mathscr{W}_i) \subseteq U$*. Cuando X es un espacio regular y posee un desarrollo, decimos que X es un* ***espacio de Moore****.*

En otras palabras, una sucesión $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo para X si el conjunto $\{st(x, \mathscr{W}_n) \mid n \in \omega\}$ forma una base local de x.

Lo que resta del capítulo es con el fin de revisar algunas propiedades de espacios topológicos que son poco conocidos, tales espacios y propiedades serán fundamentales para el desarrollo de la Sección 3.2.

Daremos lugar a algunas clases de espacios que serán puramente auxiliares, por ello mismo, algunos de los teoremas, proposiciones y demás no se demostraran aquí pues se sale del objetivo de este trabajo.

Definición 1.44. *Sean* $\mathscr{U}$ *y* $\mathscr{V}$ *dos familias de subconjuntos de* X*. Decimos que* $\mathscr{V}$ *es* ***acolchonada*** *en* $\mathscr{U}$ *si existe una función* $T : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$*, tal que cualquier subfamilia* $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}$ *cumple que* $\overline{\bigcup\{W \mid W \in \mathscr{W}\}} \subseteq \bigcup\{T(W) \mid W \in \mathscr{W}\}$*.*

$\mathscr{V}$ *es* ***σ-acolchonada*** *en* $\mathscr{U}$*, si* $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{V}_n$*, donde cada* $\mathscr{V}_n$ *es acolchonada en* $\mathscr{U}$*.*

En el caso que $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ y $\mathscr{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$, donde $T(V_\alpha) = U_\alpha$, decimos que $\mathscr{V}$ es acolchonada en $\mathscr{U}$ si $\overline{\bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in A'\}} \subseteq \bigcup\{U_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ para todo $A' \subseteq A$.

El fin de dar el concepto de cubierta acolchonada es que en los espacios regulares, la propiedad de paracompacidad queda perfectamente caracterizada en términos de estas cubiertas, dando como resultado opciones alternas cuando queramos probar que un espacio topológico sea paracompacto.

Lema 1.45. *Sea X un espacio regular. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *X es paracompacto.*

(ii) *Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento acolchonado.*

(iii) *Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que es σ-acolchonado.*

La demostración del lema anterior puede consultarse en el Teorema 2.3 en [2].

Pasamos a otra clase de espacios topológicos que generaliza a los espacios paracompactos.

Definición 1.46. *Un espacio X es* ***subparacompacto*** *si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento σ-discreto y cerrado.*

Demos una caracterización para espacios subparacompactos, que ocuparemos repetidamente para referirnos a esta clase de espacios. La demostración la podemos encontrar en Teorema 3.1, en [2].

Teorema **1.47.** *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) *X es subparacompacto.*

(2) *Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento σ-acolchonado.*

(3) *Para toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X, existe una sucesión $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de refinamientos abiertos de $\mathscr{U}$, tal que para cada $x \in X$ existe $m \in \omega$ de forma que $|\{V \in \mathscr{V}_m \mid x \in V\}| = 1$.*

Se observa que del inciso (ii) del Lema 1.45 y el inciso (2) del Teorema 1.47, todo espacio paracompacto es un espacio subparacompacto.

Pasamos con otra clase de espacios, los espacios submetacompactos. Tales espacios generalizan a los espacios subparacompactos.

Definición 1.48. *Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta para un espacio topológico X.*

(i) *Decimos que $\mathscr{U}$ tiene un **θ-refinamiento** si existe una sucesión $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de refinamientos abiertos de $\mathscr{U}$, con la propiedad de que para cada $x \in X$ existe $n \in \omega$ tal que $|\{V_n \in \mathscr{V}_n \mid x \in V_n\}| < \aleph_0$. En este caso se dice que la familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ es un θ-refinamiento de $\mathscr{U}$.*

(ii) *Un espacio X es **submetacompacto** si cada cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X tiene un θ-refinamiento.*

A veces a los espacios submetacompactos también se les llaman espacios **θ-refinables**.

De acuerdo con el inciso (iii) del Lema 1.45 y el inciso (3) del Teorema 1.47, todo espacio subparacompacto es un espacio submetacompacto.

De lo visto anteriormente, se tiene el siguiente diagrama.

$$\textbf{Paracompacto} \Longrightarrow \textbf{Subparacompacto} \Longrightarrow \textbf{Submetacompacto}$$

Continuando, la clase de los espacios submetacompactos, al igual que los espacios compactos, es hereditaria a subconjuntos cerrados.

***Teorema* 1.49.** *Sea X un espacio submetacompacto. Si $Y \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces Y es un espacio submetacompacto.*

Demostración. Demos una cubierta $\mathscr{V}_Y$ de Y por conjuntos abiertos en Y. Para cada $V \in \mathscr{V}_Y$ existe un conjunto abierto U_V en X tal que $U_V \cap Y = V$, formamos la familia $\mathscr{V} = \{U_V \mid V \in \mathscr{V}_Y\}$. Sea $\mathscr{U} = \mathscr{V} \cup \{X \setminus Y\}$. Note que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta para X, por lo cual existe $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ un θ-refinamiento de $\mathscr{U}$. Fijemos nuestra atención en la familia $\{\mathscr{V}_n|_Y\}_{n\in\omega}$. Es claro que cada $\mathscr{V}_n|_Y$ es una cubierta abierta de Y y refina a $\mathscr{V}_Y$. Ahora, dado $y \in Y$ existe $n \in \omega$ tal que $|\{V \in \mathscr{V}_n \mid y \in V\}| < \aleph_0$ pero $|\{V \in \mathscr{V}_n \mid y \in V\}| = |\{V \in \mathscr{V}_n|_Y \mid y \in V\}|$. Por lo tanto $\{\mathscr{V}_n|_Y\}_{n\in\omega}$ es un θ-refinamiento de $\mathscr{V}_Y$, por lo cual Y es submetacompacto. †

Cambiando de tema, pasemos a analizar otra clase de espacios.

Definición 1.50. *Un espacio topológico X tiene **diagonal** G^*_δ si existe una sucesión $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\omega}$ formada por cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{G}_n)}$.*

Recordemos que en general para un espacio Hausdorff X, si $\mathscr{B}_x$ es una base local de un punto $x \in X$, entonces $\bigcap_{B\in\mathscr{B}_x} \overline{B} = \{x\}$. Por lo tanto, si X es un espacio de Moore, donde $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo para el espacio X, entonces todo punto $x \in X$ cumple que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{W}_n)} = \{x\}$, es decir, X es un espacio con diagonal G^*_δ. Por lo tanto todo espacio de Moore tiene diagonal G^*_δ.

Nuestro objetivo ahora es probar el siguiente hecho: en espacios submetacompactos tener diagonal G_δ equivale a tener diagonal G^*_δ. Veamos un posible camino de como llegar a este resultado.

Lema 1.51. *Sea Y un subespacio submetacompacto de un espacio X. Dada una cubierta $\mathscr{U}$ de Y por conjuntos abiertos en X, existe una familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas de Y por conjuntos abiertos en X con las siguientes propiedades:*

(*a*) *$\{\mathscr{V}_n|_Y\}_{n\in\omega}$ es un θ-refinamiento de $\mathscr{U}|_Y$ y*

(*b*) *si $V \in \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{V}_n$, existe $U \in \mathscr{U}$ con $\overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Por la regularidad de X, para cada $y \in Y$ existe un conjunto abierto W_y en X tal que $y \in W_y \subseteq \overline{W_y} \subseteq U$ para algún $U \in \mathscr{U}$. Sea $\mathscr{W} = \{W_y \mid y \in Y\}$ y note que $\mathscr{W}$ refina a $\mathscr{U}$. Puesto que Y es submetacompacto, existe $\{\mathscr{V}'_n\}_{n\in\omega}$ un θ-refinamiento de $\mathscr{W}|_Y$. Tomemos $n \in \omega$ arbitrario; cada $V'_n \in \mathscr{V}'_n$ cumple que $V'_n \subseteq W_{y'}$ para algún $y' \in Y$, y es posible encontrar un conjunto abierto $\widehat{V}_n$ en X con $\widehat{V}_n \cap Y = V'_n$. Definiendo $V_n = \widehat{V}_n \cap W_{y'}$ formamos la cubierta $\mathscr{V}_n = \{V_n\}$. Por lo tanto tenemos construida la familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$.

Para cada $V_n \in \mathscr{V}_n$, $V_n \cap Y = (\widehat{V}_n \cap W_{y'}) \cap Y = V'_n$, es decir, $\{\mathscr{V}_n|_Y\}_{n\in\omega} = \{\mathscr{V}'{}_n\}_{n\in\omega}$ y por lo que $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ satisface la condición (a). Ahora, si $V \in \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{V}_n$, entonces $\overline{V} = \overline{\widehat{V}_n \cap W_{y'}} \subseteq \overline{W_{y'}} \subseteq U$. Por lo tanto $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ satisface la condición (b). †

La siguiente proposición equivale al Lema 2.12 en [6].

Proposición 1.52. *Sean Y un subespacio submetacompacto de un espacio X y para cada $n \in \omega$, $\mathscr{U}_n$ una colección de conjuntos abiertos en X que cubren a Y. Entonces existe una familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas de Y por conjuntos abiertos en X tal que para cada punto $y \in Y$,*

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(y,\mathscr{V}_n)} = \bigcap_{n\in\omega} st(y,\mathscr{V}_n) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} st(y,\mathscr{U}_n).$$

Demostración. Primeramente, para cada $m \in \omega$, construyamos recursivamente una sucesión $\{\mathscr{V}_{mn} \mid n \in \omega\}$ de cubiertas de Y por conjuntos abiertos en X, con las siguientes propiedades:

(i) $\{\mathscr{V}_{mn}|_Y\}_{n\in\omega}$ es un θ-refinamiento de cada $\mathscr{V}_{ij}|_Y$ con $i < m$ y $j < m$, y de cada $\mathscr{U}_k|_Y$ para $k \leq m$ y

(ii) si $V \in \bigcup_{n,m\in\omega} \mathscr{V}_{mn}$, para $i, j < m$ existe $W \in \mathscr{V}_{ij}$ tal que $\overline{V} \subseteq W$; también, si $k \leq m$, existe $U \in \mathscr{U}_k$ con $\overline{V} \subseteq U$.

Dado $m \in \omega$, supongamos que tenemos construida la familia $\{\mathscr{V}_{kn} \mid k < m \text{ y } n \in \omega\}$ tal que cada $\mathscr{V}_{kn}$ cumple las condiciones (i) y (ii). Construyamos la sucesión $\{\mathscr{V}_{mn}\}_{n\in\omega}$ de forma que cumpla (i) y (ii). Para ello definamos $\mathscr{U}'_{mm} = \bigwedge_{k\leq m} \mathscr{U}_k \wedge \bigwedge_{i,j<m} \mathscr{V}_{ij}$. Para la cubierta $\mathscr{U}'$, existe una sucesión $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ que satisface las condiciones (a) y (b) del Lema 1.51. Es claro que $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ satisface lo requerido y se tiene hecha la construcción.

Procediendo con la prueba, supongamos $x \in \bigcap_{i,j\in\omega} \overline{st(y,\mathscr{V}_{ij})}$ con $y \in Y$. Fijemos i y j, sea $m > \max\{i, j\}$. De la condición (i), existe un $n \in \omega$ tal que y está sólo en una cantidad finita de elementos de $\mathscr{V}_{mn}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{st(y,\mathscr{V}_{mn})} &= \bigcup\left\{\overline{V} \mid y \in V \text{ y } V \in \mathscr{V}_{mn}\right\}, \text{ de la condición } (ii),\\ &\subseteq \bigcup\{W \mid y \in W \text{ con } W \in \mathscr{V}_{ij}\}\\ &= st(y,\mathscr{V}_{ij}).\end{aligned}$$

Entonces para $i,j \in \omega$, $x \in st(y,\mathscr{V}_{ij})$. Por lo tanto

$$\bigcap_{i,j\in\omega} \overline{st(y,\mathscr{V}_{ij})} = \bigcap_{i,j\in\omega} st(y,\mathscr{V}_{ij}).$$

Del inciso (ii), es claro que $\bigcap_{i,j\in\omega} st(y,\mathscr{V}_{ij}) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} st(y,\mathscr{U}_n)$. Cambiando de numeración a $\{\mathscr{V}_{mn} \mid n,m \in \omega\}$, obtenemos la familia de cubiertas $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ requerida. †

Tenemos todos los elementos necesarios para dar una demostración del objetivo planteado anteriormente. La prueba puede ser consultada en [6], Teorema 2.11.

***Teorema* 1.53.** *Sea X un espacio submetacompacto. X tiene diagonal G_δ^* si y sólo si tiene diagonal G_δ.*

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente de la Proposición 1.52 en cuyo enunciado hay que tomar $Y = X$. †

Corolario 1.54. *Sea X un espacio subparacompacto. X tiene diagonal G_δ^* si y sólo si tiene diagonal G_δ.*

Demostración. Usando el Teorema 1.53, el resultado es inmediato del hecho que todo espacio subparacompacto es submetacompacto. †

La siguiente definición y el teorema posterior son puramente auxiliares.

Definición 1.55. *Un espacio X se dice **débilmente** $[\omega_1,\infty)^r$**-refinable** si para toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X, de cardinalidad regular y no numerable, existe un refinamiento abierto que puede ser expresado como $\bigcup\{\mathscr{G}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ donde $|A| < |\mathscr{U}|$, además, si $x \in X$, existe $\beta \in A$ de modo que $0 < |\{G \in \mathscr{G}_\beta \mid x \in G\}| < |\mathscr{U}|$.*

***Teorema* 1.56.** *Si X es numerablemente compacto y débilmente $[\omega_1,\infty)^r$-refinable, entonces X es compacto.*

La demostración del teorema anterior puede consultarse en [2], Teorema 9.2.

Observemos que si tomamos un espacio submetacompacto X, claramente X satisface la definición anterior, es decir, X es débilmente $[\omega_1,\infty)^r$-refinable. Este hecho y el Teorema 1.56 tienen como consecuencia que:

Corolario 1.57. *Si X es numerablemente compacto y submetacompacto, entonces X es compacto.*

Capítulo 2

Teoremas clásicos de metrización

El propósito de este capítulo es presentar los criterios clásicos de metrización de espacios topológicos, por mencionar algunos, los criterios hechos por Nagata-Smirnov, Bing, Moore entre otros.

Hemos divido el capítulo en dos partes; la Sección 2.1 para mostrar algunas de las propiedades de los espacios metrizables, y la Sección 2.2 que contiene los teoremas de metrización.

2.1. Definiciones y resultados previos

En este breve apartado se presentarán los preliminares de la siguiente sección. En general, podemos decir que es con el propósito de estudiar algunas de las propiedades que poseen los espacios metrizables, siendo estas un punto de partida para muchos de los criterios de metrización pertenecientes a la siguiente sección.

Un resultado primordial en la teoría de metrización de espacios topológicos, ahora conocido como *El Teorema de Stone*, corresponde al Teorema 4.4.1 en [4]; también, una demostración detallada puede ser consultada en [15], Teorema 2.1.1.

***Teorema* 2.1** (de Stone)**.** *Toda cubierta abierta de un espacio metrizable tiene un refinamiento abierto que es localmente finito y σ-discreto.*

Inmediatamente veremos la riqueza, o bien, las consecuencias del Teorema de Stone, prueba de ello es el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Todo espacio metrizable tiene una base que es σ-discreta.*

Demostración. Sea d una métrica para el espacio metrizable X. Para cada $n \in \omega$, demos $\mathscr{B}_n$ un refinamiento abierto σ-discreto de la cubierta $\left\{B(x, \frac{1}{n+1}) \mid x \in X\right\}$, esto está garantizado por el Teorema (de Stone) 2.1. Claramente $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{B}_n$ es un refinamiento abierto σ-discreto. Para ver que $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{B}_n$ es una base para X fijamos $B(x,\varepsilon)$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Considerando $\mathscr{B}_{2(m+1)}$; es posible hallar $B \in \mathscr{B}_{2(m+1)}$ de forma que $x \in B \subseteq B(y, \frac{1}{2(m+1)})$ para algún $y \in X$. La prueba se concluye si mostramos que $B \subseteq B(x,\varepsilon)$, pero, es inmediata ya que dado $z \in B$ se tiene que

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)} < \varepsilon.$$

†

Inmediatamente de la Definición 1.33, toda familia σ-discreta es σ-localmente finita; por lo que el Teorema 2.2 asevera el siguiente resultado.

Corolario 2.3. *Todo espacio metrizable tiene una base σ-localmente finita.*

La siguiente proposición nos suministra una condición suficiente para que un espacio sea perfectamente normal.

Proposición 2.4. *Todo espacio regular que posee una base σ-localmente finita es perfectamente normal.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{B}_n$, donde cada $\mathscr{B}_n$ es una familia localmente finita, una base para un espacio regular X. Tomemos un conjunto abierto $W \subseteq X$ arbitrario. Puesto que X es regular,

($\star$) para cada $x \in X$ existen $i(x) \in \omega$ y $U(x) \in \mathscr{B}_{i(x)}$ tales que $x \in U(x) \subseteq \overline{U(x)} \subseteq W$.

Para cada n sea $W_n = \bigcup\{U(x) \mid i(x) = n\}$, tenemos definida una sucesión de conjuntos abiertos $\{W_n\}_{n\in\omega}$ tal que cada $W_n \subseteq \mathscr{B}_n$. De la afirmación $(\star)$, es claro que $W = \bigcup_{n\in\omega} W_n$ y, por el Teorema 1.32, $\overline{W_n} \subseteq W$. X es normal debido al Lema 1.13; como $W = \bigcup_{n\in\omega} \overline{W}_n$ se sigue que X es perfectamente normal. †

Recordemos que los espacios metrizables cumplen la siguiente propiedad (Corolario 4.1.11 en [4]).

Proposición 2.5. *Para todo conjunto A en un espacio métrico (X,d) se cumple que*

$$\overline{A} = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}.$$

El siguiente lema nos proporciona condiciones necesarias para que un espacio topológico sea metrizable (Lema 4.4.6 en [4]).

Lema 2.6. *Sea $X \in \mathscr{T}_0$. Dada $\{d_n\}_{n\in\omega}$ una familia de pseudométricas sobre el conjunto X acotadas por 1, de forma que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) *d_n es una función continua en $X \times X$ para cada $n \in \omega$.*

(ii) *Para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado no vacío $A \subseteq X$ tal que $x \notin A$, existe un $i \in \omega$ con $d_i(x,A) > 0$.*

Entonces el espacio X es metrizable y la función d definida por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x,y)$$

es una métrica que genera la topología de X.

Demostración. Verifiquemos que la función d es una métrica en X.

$(\cdot)$ Es inmediato que $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$. Ahora, afirmamos que si $d(x,y) = 0$, entonces $x = y$. Tomemos $x \neq y$, puesto que $X \in \mathscr{T}_0$ se tiene que $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $x \notin \overline{\{y\}}$. De la condición (ii), existe $j \in \omega$ tal que $d_j(x, \overline{\{y\}}) > 0$. Note que

$$d_j(x,y) = d_j(x,\{y\}) \geq d_j(x,\overline{\{y\}}) > 0,$$

de donde $d(x,y) > 0$. Por lo tanto $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

$(\cdot\cdot)$ No es difícil observar que $d(x,y) = d(y,x)$ para cualesquiera $x,y \in X$.

$(\therefore)$ Se afirma que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cualesquiera $x,y,z \in X$. La afirmación se sigue de las siguientes desigualdades, siempre que $x,y,z \in X$,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x,y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} [d_i(x,z) + d_i(z,y)] = d(x,z) + d(z,y).$$

De $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ y $(\therefore)$ obtenemos que d es una métrica en X. Para terminar, se comprobará que la métrica d genera la topología de X. Probemos que ambos espacios tienen los mismos conjuntos cerrados, por la Proposición 2.5, es suficiente verificar que

$(\star)$ $d(x,A) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$.

(a) Demostremos que si $d(x,A) = 0$, entonces $x \in \overline{A}$. En efecto, tomamos $x \notin \overline{A}$, por la propiedad (ii), existe $j \in \omega$ tal que $d_j(x,\overline{A}) = r > 0$. Para cualquier $a \in \overline{A}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x,a) \geq \frac{r}{2^j},$$

es decir, $\frac{r}{2^j} \leq d(x,\overline{A})$. Por lo tanto $d(x,A) \geq d(x,\overline{A}) > 0$.

(b) Supongamos que $x \in \overline{A}$. De la condición (i) y del Teorema 1.21, la función $f_d : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$, $f_d(x) = d(x,A)$ define una función continua. Se cumple que si $x \in \overline{A}$, entonces $f_d(x) \in f_d(\overline{A}) \subseteq \overline{f_d(A)} = \{0\}$, es decir, $d(x,A) = 0$.

De (a) y (b) se tiene probada la afirmación $(\star)$, y por lo tanto, la conclusión del lema. †

Recordemos que los espacios de Moore, son espacios regulares que poseen un desarrollo (Definición 1.43).

Definición 2.7. *Una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ de un espacio topológico X es llamada un* ***desarrollo fuerte*** *para el espacio X, si para todo $x \in X$ y cualquier vecindad U de x, es posible hallar una vecindad V del punto x y un número natural i tal que $st(V,\mathscr{W}_i) \subseteq U$.*

Sin dificultad alguna, podemos apreciar que todo espacio que tenga un desarrollo fuerte, posee también un desarrollo. Es decir, todo espacio regular que poseen un desarrollo fuerte es un espacio de Moore.

2.2. Criterios de metrizabilidad

El trabajo previo es suficiente para comenzar con la parte medular de este trabajo, mostrar algunos *criterios de metrizabilidad de espacios topológicos*, también llamados *criterios de metrización de espacios topológicos*. En este capítulo sólo se presentarán algunos criterios considerados como clásicos, los que todo estudiante de topología debe tener en mente.

Existe más de una forma para presentar estos teoremas con el fin de optimizar las demostraciones, en nuestro caso, el sendero a seguir es como se hace en [4].

Damos paso al primer criterio de metrización llamado **Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov**, probado por J. Nagata y por J. Smirnov en 1950 y 1951 respectivamente. La prueba es tomada de [4], Teorema 4.4.7.

***Teorema* 2.8** (de Metrización de Nagata-Smirnov). *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base que es σ-localmente finita.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es un espacio metrizable, el Corolario 2.3 afirma que X tiene una base σ-localmente finita.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que X es un espacio regular que tiene una base $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\omega}\mathscr{B}_n$, donde $\mathscr{B}_n = \{U_s\}_{s\in S_n}$ es una familia localmente finita. De la Proposición 2.4, X es perfectamente normal, es decir, cada conjunto abierto en X es un conjunto F_σ. Como consecuencia del Corolario 1.16, para cada número natural n y cada $s \in S_n$, existe una función continua $f_s : X \to [0,1]$ tal que $U_s = f_s^{-1}((0,1])$. La familia $\{W_s\}_{s\in S_n}$, donde $W_s = (U_s \times X) \cup (X \times U_s)$, es localmente finita en el espacio $X \times X$. Note que si $(x,y) \notin W_s$, entonces $x \notin U_s$ y $y \notin U_s$, por lo que $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$; del Lema 1.22, para cada número natural n,

$$g_n(x,y) = \sum_{s\in S_n} |f_s(x) - f_s(y)|$$

define una función continua $g_n : X \times X \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \omega$, la función

$$d_n(x,y) = \text{mín}\{1, g_n(x,y)\}$$

es una pseudométrica en X acotada por 1. Note que la familia $\{d_n\}_{n\in\omega}$ satisface la condición (*i*) del Lema 2.6. Afirmamos que (*ii*) también se cumple. En efecto, para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado no vacío $A \subseteq X$ tal que $x \notin A$, existe $U_s \in \mathscr{B}_i$ (para algún i y algún $s \in S_i$) de forma que $x \in U$ y $A \subseteq (X \setminus U_s)$; como $f_s(x) > 0$ y $f_s(A) = \{0\}$, y note que $d_i(x,a) \geq f_s(x)$ para cada $a \in A$, tenemos que $d_i(x,A) \geq f_s(x) > 0$. Con esto se tiene probada la afirmación. Por lo tanto X satisface las condiciones (*i*) y (*ii*) del Lema 2.6, de donde X es metrizable. †

El Teorema de metrización de Nagata-Smirnov y el Teorema 2.2 nos obsequian una demostración para el siguiente criterio de metrización: **Teorema de metrización de Bing**. Éste fue probado por R. Bing en el año de 1951 de forma independiente a los trabajos de J. Nagata y J. Smirnov.

***Teorema* 2.9** (de Metrización de Bing)**.** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-discreta.*

Es el momento de hablar de otro teorema de metrización, al igual que el Teorema 2.9, probado por R. Bing en el año de 1951; nos referiremos a este resultado como **Criterio de metrización de Bing**. La demostración que presentamos fue obtenida de [4], Teorema 5.4.1.

***Teorema* 2.10** (Criterio de metrización de Bing)**.** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es un espacio de Moore y normal por colecciones.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es un espacio metrizable, X es paracompacto (Teorema 1.35), por ello X es normal por colecciones (Teorema 1.38). Para percatarse que X es un espacio de Moore, basta definir $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ donde $\mathscr{W}_n = \{B(x, \frac{1}{2^n}) \mid x \in X\}$; es claro que la familia $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo para X.

($\Leftarrow$) Sea $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ un desarrollo para el espacio X. Probemos la siguiente propiedad:

($\star$) Toda cubierta abierta para X tiene un refinamiento abierto que es σ-localmente finito.

Dada una cubierta abierta de X, digamos $\{U_s\}_{s\in S}$, se elige una relación $<$ que bien ordene al conjunto S. Definimos

$$F_{s,i} = X \setminus \left[st(X \setminus U_s, \mathscr{W}_i) \cup \bigcup_{s'<s} U_{s'} \right] \subseteq U_s.$$

$\{F_{s,i} \mid s \in S, i \in \omega\}$ es una familia formada por conjuntos cerrados, veamos que ella cubre al espacio X. Efectivamente, dado cualquier $x \in X$, es suficiente considerar a $s(x)$ como el elemento más pequeño en S tal que $x \in U_{s(x)}$, así, $x \notin \bigcup_{s'<s(x)} U_{s'}$; y un número natural $i(x)$ tal que $st(x, \mathscr{W}_{i(x)}) \subseteq U_{s(x)}$. De este modo, $x \notin st(X \setminus U_{s(x)}, \mathscr{W}_{i(x)})$. Por lo tanto $x \in F_{s(x),i(x)}$.

Para cada $i \in \omega$, afirmamos que $\mathscr{F}_i = \{F_{s,i}\}_{s\in S}$ es una familia discreta. Para ello, elegimos un punto $x \in X$ arbitrario. Consideremos la vecindad del punto en cuestión, $U(x) = U_{s(x)} \cap st(x, \mathscr{W}_i)$ donde $s(x)$ es elegido como en el párrafo anterior. Es claro que si $t > s(x)$, $U(x) \cap F_{t,i} = \emptyset$; y si $t < s(x)$, no es posible que exista algún $z \in U(x) \cap F_{t,i}$. Por lo tanto, $U(x)$ intersecta a lo más un elemento de la familia $\mathscr{F}_i$, a saber, $F_{s(x),i}$. Se tiene que $\mathscr{F}_i$ es una familia discreta.

Puesto que X es normal por colecciones, para cada familia $\mathscr{F}_i$ es posible encontrar una familia discreta y abierta $\{U_{s,i}\}_{s\in S}$ tal que $F_{s,i} \subseteq U_{s,i} \subseteq U_s$. Por lo tanto, $\bigcup\{U_{s,i} \mid i \in \omega, s \in S\}$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\{U_s\}_{s\in S}$. Así, se tiene probada la afirmación $(\star)$.

Ahora, de $(\star)$, cada cubierta $\mathscr{W}_n$ tiene un refinamiento abierto $\mathscr{B}_n$ que es σ-localmente finito. Entonces la familia $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{B}_n$ (claramente σ-localmente finita) es una base para el espacio X, pues de lo contrario sería posible encontrar un punto y una vecindad, $x \in U$ de forma que si $B \in \mathscr{B}$, entonces $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Pero siempre existe $i \in \omega$ tal que $st(x, \mathscr{W}_i) \subseteq U$, que en particular nos dice que podemos encontrar $B_i \in \mathscr{B}_i$ tal que $x \in B_i \subseteq U$ (ya que $\mathscr{B}_i$ cubre a X), lo cual no es posible.

Entonces X posee una base σ-localmente finita, por lo que del Teorema 2.8 (de Metrización de Nagata-Smirnov), X es metrizable. †

Sean X un conjunto, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$, y $x \in X$. Usaremos la siguiente notación:

$$st^2(x, \mathscr{A}) = st(st(x, \mathscr{A}), \mathscr{A}).$$

En seguida presentaremos el **Criterio de metrización de Moore**, que tiene una larga historia. La siguiente formulación y demostración fueron publicados por A. H. Stone en 1960 y por A. V. Arhangel'skiĭ en 1961, quienes introducen el concepto de desarrollo fuerte (Definición 2.7). De una forma ligeramente diferente el Teorema fue demostrado por L. R. Moore en el año de 1935, y de forma independiente por Morita en 1951.

Nuestra prueba fue extraída de [6], Teorema 1.4; o bien, otra prueba similar puede consultarse en [4], Teorema 5.4.2.

***Teorema* 2.11** (de Metrización de Moore). *Un espacio $X \in \mathscr{T}_0$ es metrizable si y sólo si X tiene un desarrollo fuerte.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Definimos una familia de cubiertas abiertas $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ de X, donde cada $W_n \in \mathscr{W}_n$ tiene diámetro menor que $1/2^n$. Ahora, tomemos un punto $x \in X$ y U un conjunto abierto en X que tenga a x. Para $\varepsilon > 0$, tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U$, es posible encontrar $n_0 \in \omega$ de forma que $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Definiendo $V = B(x, \frac{1}{2^{n_0+1}})$, se prueba que $st(V, \mathscr{W}_{n_0+1}) \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo fuerte para X. Podemos además suponer que $\mathscr{W}_{n+1}$ refina a $\mathscr{W}_n$ para cada $n \in \omega$, debido a que si esto no ocurre se reemplaza $\mathscr{W}_n$ por $\mathscr{W}'_n = \{\bigcap_{i<n} W_i \mid W_i \in \mathscr{W}_i\}$. Veamos que la familia $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ satisface que para todo $x \in X$, el conjunto $\{st^2(x,\mathscr{W}_n) \mid n \in \omega\}$ es una base local del punto x. En efecto, tomemos $x \in U$ arbitrarios, entonces existen un conjunto abierto V_0 y $n_0 \in \omega$ tales que $x \in V_0$ y $st(V_0, \mathscr{W}_{n_0}) \subseteq U$; como $x \in V_0$, nuevamente es posible encontrar un conjunto abierto V_1 y $n_1 \in \omega$ de forma que $x \in V_1$ y $st(V_1, \mathscr{W}_{n_1}) \subseteq V_0$. Entonces, si tomamos $n = max\{n_0, n_1\}$ se sigue que $st^2(x, \mathscr{W}_n) \subseteq U$. Del hecho que $\overline{st(x,\mathscr{W}_n)} \subseteq st^2(x,\mathscr{W}_n)$, se obtiene que $X \in \mathscr{T}_1$ y es regular, por lo tanto es un espacio de Moore.

Para concluir, verifiquemos que X es normal por colecciones. Suponga que $\mathscr{F}$ es una familia discreta de conjuntos cerrados en X. Para cada $F \in \mathscr{F}$ y $x \in F$, sea $n_x \in \omega$ tal que $st^2(x, \mathscr{W}_{n_x})$ no intersecta ningún elemento de $\mathscr{F}$ salvo F. Entonces si $x \in F_1$ y $y \in F_2$ donde $F_1 \neq F_2$, tenemos que $st(x,\mathscr{W}_{n_x}) \cap st(y, \mathscr{W}_{n_y}) = \emptyset$. Definamos entonces $U_F = \bigcup_{x\in F} st(x, \mathscr{W}_{n_x})$. De lo anterior, $F \subseteq U_F$, y la familia $\{U_F \mid F \in \mathscr{F}\}$ es ajena por pares; del Teorema 1.37, X es normal por colecciones, y así el Teorema 2.10 (Criterio de metrización de Bing) nos garantiza que X es metrizable. †

El siguiente criterio de metrización, históricamente demostrado por Alexandroff y Urysohn en 1923, es el **Teorema de metrización de Alexandroff-Urysohn**, cuya demostración puede consultarse en [6], Teorema 1.5 o en [4], Teorema 5.4.9. La demostración, como veremos, se puede obtener como corolario del Teorema 2.11 (de Metrización de Moore); cabe resaltar, que la prueba de Alexandroff y Urysohn del año 1923 se hizo de forma independiente.

***Teorema* 2.12** (de Metrización de Alexandroff-Urysohn). *X es metrizable si y sólo si $X \in \mathscr{T}_0$ y posee un desarrollo $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ tal que para cualesquiera $W_1, W_2 \in \mathscr{W}_{n+1}$, con $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, se tiene que $W_1 \cup W_2$ está contenida en algún elemento de $\mathscr{W}_n$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es metrizable, damos $\mathscr{W}_n = \left\{B(x, \frac{1}{2^n}) \mid x \in X\right\}$. Claramente $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo, y dados $W_1, W_2 \in \mathscr{W}_{n+1}$, tal que existe algún $x \in W_1 \cap W_2$, se prueba que $W_1 \cup W_2 \subseteq B(x, \frac{1}{2^n})$; note que $B(x, \frac{1}{2^n}) \in \mathscr{W}_n$.

($\Leftarrow$) Si $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ satisface las condiciones del Teorema, probaremos que $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo fuerte para X. Note que $st^2(x, \mathscr{W}_{n+1}) \subseteq st(x, \mathscr{W}_n)$. Ahora, demos $x \in U$ con $x \in X$ y U un conjunto abierto; por la hipótesis, existe $n_0 \in \omega$ tal que $st(x, \mathscr{W}_{n_0}) \subseteq U$, y si definimos $V = st(x, \mathscr{W}_{n_0+1})$, obtenemos que $st(V, \mathscr{W}_{n_0+1})$, que es igual a $st^2(x, \mathscr{W}_{n_0+1})$, está contenida en $st(x, \mathscr{W}_{n_0})$, y por lo tanto en U. Así, del Teorema 2.11 (de Metrización de Moore) se sigue que X es metrizable. †

Para concluir esta sección y el capítulo, se presenta el último de los que hemos llamados Teoremas clásicos de metrización. El resultado es llamado por algunos autores **Teorema de Alexandroff-Urysohn**; se obtiene como una aplicación del Teorema de metrización de Alexandroff-Urysohn.

Corolario 2.13 (Teorema de Alexandroff-Urysohn). *X es metrizable si y sólo si $X \in \mathscr{T}_0$ y tiene un desarrollo $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ tal que para cada n, $\mathscr{W}_{n+1}$ es un refinamiento con estrellas (ver Definición 1.28) de $\mathscr{W}_n$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es metrizable, la familia $\mathscr{W}_n = \left\{B(x, \frac{1}{2^n}) \mid x \in X\right\}$ cumple lo requerido.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ cumple las condiciones del Teorema. Si tomamos $W_1, W_2 \in \mathscr{W}_{n+1}$, con $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, por la hipótesis existe $W \in \mathscr{W}_n$ tal que $st(W_1, \mathscr{W}_{n+1}) \subseteq W$, entonces $W_1 \subseteq W$ y $W_2 \subseteq W$, de donde $W_1 \cup W_2 \subseteq W$. Del Teorema 2.12 (de Metrización de Alexandroff-Urysohn) se sigue que X es metrizable. †

Capítulo 3

Espacios métricos generalizados y la NMSC de Jones

Los espacios métricos generalizados no tienen una definición específica, pero entiéndase que son espacios topológicos que poseen muchas de las propiedades que caracterizan a los espacios metrizables; por ejemplo, en cualquier espacio métrico: todo subespacio es nuevamente un espacio métrico, el producto de una cantidad numerable es un espacio métrico, la propiedad de ser compacto equivale a ser numerablemente compacto, y ser separable es equivalente a tener una base numerable.

Estudiaremos a los espacios topológicos con diagonal G_δ, p-espacios, espacios $w\Delta$, y espacios estratificados. El único fin de analizar estas clases, es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de este tipo sea metrizable. Las primeras dos secciones son destinadas para ello.

La Sección 3.3 es con el propósito de dar un ejemplo de un espacio pseudocompacto con diagonal G_δ que no es metrizable.

Para finalizar, el la Sección 3.4 se expone todo lo referente a la conjetura planteada por F. B. Jones en el año 1937

¿Todo espacio normal de Moore es metrizable?

Problema que se mantuvo abierto cerca de cincuenta años.

3.1. Espacios con diagonal G_δ

La primer clase que abordaremos es la de los espacios con diagonal G_δ, introducida en la Sección 1.2, Definición 1.25. Todas las características que presentaremos son con la finalidad de obtener condiciones necesarias y suficientes para que un espacio con diagonal G_δ sea metrizable.

El primer criterio de metrización de este capítulo fue publicado por Šneĭder en el año de 1945. La prueba que presentamos es como la sugiere el Ejercicio 4.2.B en [4], otra prueba puede hallarse en [8], Corolario 3.4.

***Teorema* 3.1** (de Metrización de Šneĭder)**.** *Sea X un espacio compacto. X es metrizable si y sólo si X tiene diagonal G_δ.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea X es un espacio metrizable. Por el Teorema 1.19 y la Proposición 1.26, se sigue que $X \times X$ es un espacio perfectamente normal y que Δ_X es un conjunto cerrado en $X \times X$; entonces Δ_X es un conjunto G_δ en $X \times X$, es decir, X tiene diagonal G_δ.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que X tiene diagonal G_δ. Por el hecho que X es un espacio compacto y Hausdorff, tenemos que $X \times X$ es un espacio compacto y Hausdorff, y por lo tanto un espacio normal. Del Corolario 1.15, existe una función continua $f : X \times X \to [0,1]$ con $\Delta_X = f^{-1}(\{0\})$. Se define $d : X \times X \to [0,\infty)$ tal que para todo elemento $(x,y) \in X \times X$

$$d(x,y) = \sup_{z \in X}\{|f(x,z) - f(y,z)|\}.$$

Veamos que (X,d) es un espacio métrico. Sean $x,y,w \in X$, las condiciones $d(x,y) = d(y,x)$ y $d(x,x) = 0$ claramente se satisfacen. Ahora, si $d(x,y) = 0$, entonces para todo punto en X, en particular para y, $f(x,y) - f(y,y) = 0$; pero como $\Delta_X = f^{-1}(\{0\})$, se tiene que $f(x,y) = 0$, de donde $(x,y) \in \Delta_X$, y por lo tanto, $x = y$. Finalmente,

$$\begin{aligned} d(x,w) + d(w,y) &= \sup_{z \in X}\{|f(x,z) - f(w,z)|\} + \sup_{z \in X}\{|f(w,z) - f(y,z)|\} \\ &\geq \sup_{z \in X}\{|f(x,z) - f(w,z)| + |f(w,z) - f(y,z)|\} \\ &\geq \sup_{z \in X}\{|f(x,z) + f(y,z)|\} = d(x,z). \end{aligned}$$

La demostración termina si la topología generada por la métrica d es igual a la topología de partida en X. Para esto tomamos la función identidad $i : X \to (X,d)$ y probaremos que es un homeomorfismo.

i es continua. En efecto, para $x_0 \in X$, consideremos $B(x_0,\varepsilon)$ y demos una función auxiliar $\rho_{x_0} : X \to [0,\infty)$ tal que $\rho_{x_0}(x) = d(x_0,x)$. Del Teorema 1.21, ρ_{x_0} define una función continua. Como $i^{-1}(B(x_0,\varepsilon)) = B(x_0,\varepsilon)$, buscamos que $B(x,\varepsilon)$ sea un conjunto abierto en X. Lo cual es cierto debido a que $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0,x) < \varepsilon\} = \rho_{x_0}^{-1}([0,\varepsilon))$.

Notamos, puesto que X es un espacio compacto y (X,d) es Hausdorff, que la función i es cerrada, y obviamente, biyectiva. Con lo dicho anteriormente, i es homeomorfismo, y así la métrica d genera la topología inicial en X, por tanto X es metrizable. †

Veamos algunos aspectos interesantes en torno al Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder). Consideremos a un espacio compacto X tal que $X \times X$ es perfectamente normal, entonces claramente X tiene diagonal G_δ, y, por el Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder), X es metrizable. Expresamos lo anterior en el siguiente teorema.

***Teorema* 3.2.** *Sea X un espacio compacto. X es metrizable si y sólo si $X \times X$ es perfectamente normal.*

Recordemos que todo espacio perfectamente normal es hereditariamente normal (Corolario 1.42), lo cual nos lleva a la siguiente cuestión

¿Todo espacio compacto X con la propiedad de que $X \times X$ hereditariamente normal es metrizable?

La pregunta anterior es planteada por Katětov en su artículo publicado en 1948 ([10]), donde él menciona que no sabe la respuesta a la cuestión; sin embargo, en su articulo prueba que en un espacio compacto X, si pedimos que $X \times X \times X$ sea hereditariamente normal, queda garantizado que X es metrizable. Nos ocuparemos de mostrar dicho resultado siguiendo la prueba que él mismo expone. Antes, es necesario el siguiente lema que corresponde al Teorema 1 en [10].

Lema 3.3. *Sean X, Y dos espacios topológicos con la propiedad de que $X \times Y$ es hereditariamente normal. Se cumple que X es perfectamente normal o todos los subconjuntos numerables de Y son cerrados.*

Demostración. Hagamos la prueba por contradicción. Supongamos que existe un conjunto cerrado $G \subseteq X$ que no es G_δ y un conjunto $N \subseteq Y$, numerable, tal que $y \in \overline{N} \setminus N$. Definamos,

$$A = G \times N \text{ y } B = (X \setminus G) \times \{y\}.$$

Como $\overline{A} = G \times \overline{N}$ y $\overline{B} = (\overline{X \setminus G}) \times \{y\}$, tenemos que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$; del inciso (iii) en el Teorema 1.41, garantizamos la existencia de un conjunto abierto U tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Si $N = \{y_i\}_{i \in \omega}$, para cada y_i definimos el conjunto $U_i = \{x \in X \mid (x, y_i) \in U\}$. Cada U_i es un conjunto abierto en X, además, $G \subseteq U_i$, por lo que $G \subsetneq \bigcap_{i \in \omega} U_i$. Entonces es posible tomar $c \in (\bigcap_{i \in \omega} U_i) \setminus G$; $(c, y_i) \in U$ para todo $i \in \omega$, por lo tanto $(c, y) \in \overline{G} \cap B$, lo cual no es posible. †

***Teorema* 3.4** (de Metrización de Katětov). *Sea X un espacio compacto. X es metrizable si y sólo si el producto $X \times X \times X$ es hereditariamente normal.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es metrizable, también lo es $X \times X \times X$ (Teorema 1.19), y por ende el producto es hereditariamente normal.

($\Leftarrow$) Notemos que el caso interesante es cuando X es infinito (pues todo conjunto finito es metrizable, Teorema 1.20). Ahora, veamos a $X \times X \times X$ como $(X \times X) \times X$. Del Lema 3.3, $(X \times X)$ es perfectamente normal o todo subconjunto numerable de X es cerrado. Lo segundo no puede pasar, ya que si $\{x_n\}_{n \in \omega} \subseteq X$ es un conjunto numerable e infinito, podemos encontrar conjuntos abiertos U_k tal que $x_k \in U_k \subseteq X \setminus \{x_n\}_{n \neq k}$, lo cual no es posible debido a que X es compacto (Teorema 1.23). Por lo tanto $X \times X$ es perfectamente normal, por lo que el Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder) asegura que X es metrizable. †

En cuanto a la pregunta de Katětov, podemos comentar que Nyikos en 1977 ([13]), bajo MA+¬CH, da un ejemplo de un espacio compacto X con $X \times X$

hereditariamente normal que no es metrizable. En pocas palabras, Nyikos demuestra que dentro de ZFC no es posible probar que todo espacio compacto con cuadrado hereditariamente normal es metrizable.

El Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder) nos garantiza que espacios topológicos compactos con diagonal G_δ son espacios metrizables

¿qué tanto podemos debilitar la condición de compacidad?

Como primer acercamiento a esta cuestión, podremos garantizar que los espacios topológicos numerablemente compactos y con diagonal G_δ son metrizables. Nos ocuparemos en mostrar a fondo este hecho.

Definición 3.5. *Una colección de cubiertas abiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ de un espacio X es una **sucesión diagonal** G_δ para X si para cada punto $x \in X$ se satisface que $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n)$.*

La prueba del siguiente lema fue elaborada como en el Teorema 2.2 en [6].

Lema 3.6. *Un espacio X tiene diagonal G_δ si y sólo si tiene una sucesión diagonal G_δ.*

Demostración. Partiendo de que X tiene una diagonal G_δ. Escribamos entonces $\Delta_X = \bigcap_{n\in\omega} V_n$ con cada V_n un conjunto abierto en $X \times X$. Para cada $x \in X$ y cada $n \in \omega$, elegimos un conjunto abierto $U(x,n)$ en X de manera que $U(x,n) \times U(x,n) \subseteq V_n$. Sea $\mathscr{U}_n = \{U(x,n) \mid x \in X\}$. Afirmamos que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n)$. Supongamos que no, entonces es posible encontrar, para algún $x_0 \in X$, $y \in \bigcap_{n\in\omega} st(x_0,\mathscr{U}_n)$ con $x_0 \neq y$. Para cada $n \in \omega$ elegimos z_n tal que $\{x_0,y\} \in U(n,z_n)$, lo que implica que para cada $n \in \omega$, $(x_0,y) \in U(n,z_n) \times U(n,z_n) \subseteq V_n$, es decir, $(x_0,y) \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$, y esto no es posible.

Si $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión diagonal G_δ para X, definamos para cada n, $V_n = \bigcup_{U\in\mathscr{U}_n}(U \times U)$. Es claro que $\Delta_X \subseteq \bigcap_{n\in\omega} V_n$, y si tomamos un punto $(x,y) \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$, entonces para cada $n \in \omega$ existe $U_n \in \mathscr{U}_n$ tal que $(x,y) \in U_n \times U_n$, es decir, para cada $n \in \omega$, $y \in st(x,\mathscr{U}_n)$, por lo que $y \in \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n)$ y entonces $y = x$, en otras palabras $(x,y) \in \Delta_X$. Por lo tanto $\Delta_X = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. †

Presentamos el siguiente criterio de metrización, publicado por Chaber en el año de 1976. La demostración es obtenida como en el Teorema 2.14 en [6].

***Teorema* 3.7** (de Metrización de Chaber). *Sea X un espacio numerablemente compacto. X es metrizable si y sólo si X tiene diagonal G_δ.*

Demostración. Si X es metrizable, la afirmación es obvia. Supongamos que X tiene diagonal G_δ. Del Lema 3.6 podemos dar una sucesión diagonal G_δ para X, digamos $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$. Si X es un espacio de Lindelöf, entonces X es compacto, y del Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder) se tendría lo deseado. Supongamos entonces que existe una cubierta abierta $\mathscr{V}$ de X que no tiene subcubiertas numerables. Recursivamente, para cada $\alpha < \omega_1$, se escogen un punto $x_\alpha \in X$ y un número entero $m(\alpha) \in \omega$ con las siguientes propiedades:

(1) $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$;

(2) $\mathscr{V}$ no tiene subcubierta numerable para $X \setminus \bigcup_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$.

Para $\alpha = 0$, escogemos cualquier punto $x_0 \in X$. Si no existiera $m(0) \in \omega$ tal que se cumpla la condición (2), entonces para cada $n \in \omega$ podríamos encontrar $\mathscr{V}_n \subseteq \mathscr{V}$ numerable y que cubre a $X \setminus st(x_0, \mathscr{U}_n)$. La familia $\bigcup_{n<\omega} \mathscr{V}_n$ es numerable y cubre al conjunto $\bigcup_{n<\omega}(X \setminus st(x_0, \mathscr{U}_n))$. Como

$$\bigcup_{n<\omega}(X \setminus st(x_0, \mathscr{U}_n)) = X \setminus \bigcap_{n<\omega} st(x_0, \mathscr{U}_n) = X \setminus \{x_0\},$$

estaríamos encontrando una subcubierta numerable de $\mathscr{V}$ para X. Por lo tanto podemos encontrar $m(0) \in \omega$ que satisfaga la condición (2).

Supongamos que para $\beta < \alpha$, tenemos construidos $\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ y $\{m(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ que satisfacen las condiciones (1) y (2). Para escoger x_α y $m(\alpha)$, primero demostraremos lo siguiente:

($\star$) $\mathscr{V}$ no tiene subcubierta numerable para $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$.

Supongamos que la afirmación ($\star$) es falsa, es decir, existe $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}$ numerable y que cubre $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$. Entonces $\{st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)}) : \beta < \alpha\} \cup \mathscr{W}$ es una cubierta numerable para X y, puesto que X es numerablemente compacto, existe una subcubierta finita $\mathscr{F}$ para X. Sea δ el ordinal más grande, menor que α, tal que $st(x_\delta, \mathscr{U}_{m(\delta)}) \in \mathscr{F}$, entonces $\mathscr{W}$ cubre $X \setminus \bigcup_{\beta\leq\delta} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$. Esto entra en contradicción con (2), y por lo tanto ($\star$) queda probado.

Elegimos $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$, si no existiera $m(\alpha) \in \omega$ que satisfaga (2), para cada $n \in \omega$ tomamos una subcubierta numerable $\mathscr{V}_n \subseteq \mathscr{V}$ para $X \setminus \bigcup_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_n)$. Note que la familia $\bigcup_{n<\omega} \mathscr{V}_n$ es numerable y cubre al conjunto $\bigcup_{n<\omega}(X \setminus \bigcup_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_n))$. Haciendo los siguientes cálculos

$$
\begin{aligned}
& \bigcup_{n<\omega}\Big(X \setminus \bigcup_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_n)\Big) \\
= & \bigcup_{n<\omega}\Big(X \setminus \Big[\bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta \mathscr{U}_n) \cup st(x_\alpha, \mathscr{U}_n)\Big]\Big) \\
= & \Big[\bigcup_{n<\omega}\Big(X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_n)\Big)\Big] \cap \Big[X \setminus \bigcap_{n\in\omega} st(x_\alpha, \mathscr{U}_n)\Big] \\
= & \Big[\bigcup_{n<\omega}\Big(X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_n)\Big)\Big] \cap [X \setminus \{x_\alpha\}]
\end{aligned}
$$

se tiene que $\bigcup_{n<\omega} \mathscr{V}_n$ debe cubrir a $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathscr{U}_{m(\beta)})$, esto no es posible debido a la afirmación $(\star)$. Ahora la construcción está completa.

Para concluir: tenemos construida una función $m : \omega_1 \to \omega$, por lo que $\omega_1 = \bigcup_{n\in\omega} m^{-1}(n)$ y entonces debe existir $n_0 \in \omega$ tal que $|m^{-1}(n_0)| > \aleph_0$. Sea $A = m^{-1}(n_0)$. Notar que el conjunto $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es no numerable, además, de la condición (1), para cada $U \in \mathscr{U}_{n_0}$ se tiene que $|\{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap U| \leq 1$, por lo que $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es un subconjunto discreto y cerrado en X. Esto contradice a que X sea numerablemente compacto. †

Al igual que en el Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder), en el Teorema 3.4 (de Metrización de Katětov) podemos debilitar la condición de compacidad por la de compacidad numerable.

Corolario 3.8. *Sea X numerablemente compacto. X es metrizable si y sólo si $X \times X \times X$ es hereditariamente normal.*

Demostración. Si $X \times X \times X$ es hereditariamente normal, $X \times X$ es perfectamente normal o todo subconjunto numerable de X es cerrado. Al igual que en el Teorema 3.4 (de Metrización de Katětov), X es finito o es posible construir un conjunto numerable que no sea cerrado; por ello $X \times X$ es perfectamente normal. Por el Teorema 3.7 (de Metrización de Chaber), X es metrizable. †

3.2. p-espacios, espacios $w\Delta$ y espacios estratificados

Ahora es el turno de hablar de las tres clases de espacios que forman el título de esta sección. Se abarcaran estas tres clases juntas debido a que los criterios de metrización que mostraremos dependen indispensablemente de cada clase. Recordamos que en esta parte serán ocupados ampliamente los resultados que hemos introducido en la Sección 1.3.

Comenzamos con un tratado detallado de los espacios estratificados.

Definición 3.9. *Sea $\mathscr{F}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados en un espacio topológico (X,τ). Diremos que X es **semi-estratificado** si existe una función $G : \omega \times \mathscr{F} \to \tau$ con las siguientes propiedades:*

(a) *para todo $n \in \omega$, $H \subseteq G(n,H)$;*

(b) *$H = \bigcap_{n\in\omega} G(n,H)$ y*

(c) *para cada $n \in \omega$, $H \subseteq K$ implica que $G(n,H) \subseteq G(n,K)$.*

Si además

(d) *$H = \bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)}$, entonces decimos que X es **estratificado**.*

Observemos que en la definición anterior, podemos adicionar la condición:

(e) $G(n+1,H) \subseteq G(n,H)$, *para cada* $n \in \omega$;

si no fuera el caso, definimos $G'(n,H) = \bigcap_{i\leq n} G(i,H)$, así, claramente G' cumple las condiciones (a), (b), (c) y (e). Para la condición (d), es claro que $H \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{G'(n,H)}$, pero también

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{G'(n,H)} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \left(\bigcap_{i\leq n} \overline{G(n,H)} \right) = \bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)} = H.$$

De la condición (b), se obtiene que la clase de los espacios semi-estratificados está contenida en la de los espacios perfectamente normales.

También, si (X,d) es un espacio métrico, es suficiente considerar a

$$G(n,H) = \{x \in X \mid d(x,H) < \tfrac{1}{2^n}\},$$

para percatarse que X es un espacio estratificado.

Por último, notemos que todo espacio de Moore es semi-estratificado. En efecto, si X tiene un desarrollo $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$, basta tomar $G(n,H) = st(H,\mathscr{U}_n)$. Evidentemente G cumple las condiciones (a) y (c) de la Definición 3.9. Para la condición (b) se necesita argumentar un poco más. Si $x \in \bigcap_{n\in\omega} G(n,H)$, para todo n tenemos que $x \in st(H,\mathscr{U}_n)$, luego, existe $U_n \in \mathscr{U}_n$ tal que $x \in U_n$ y existe $y_n \in U_n \cap H$; entonces $y_n \in st(x,\mathscr{U}_n)$ para cada $n \in \omega$, puesto que $\{st(x,\mathscr{U}_n) \mid n \in \omega\}$ forma una base para x, se sigue que $x \in \overline{\{y_n\}}_{n\in\omega} \subseteq \overline{H} = H$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} G(n,H) \subseteq H$, y G cumple la condición (b).

Se tiene el siguiente diagrama.

Moore $\Longrightarrow$ Semi-estratificado $\Longrightarrow$ Perfectamente normal

Cuando pensamos en los conjuntos cerrados de un espacio topológico, pensamos en conjuntos abiertos a la vez. Por ello no es complicado pensar a los espacios estratificados como sigue.

Proposición 3.10. *Un espacio topológico (X,τ) es estratificado si y sólo existe una función $W : \omega \times \tau \to \tau$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *para todo $n \in \omega$, $\overline{W(n,U)} \subseteq U$;*

(ii) *$U = \bigcup_{n\in\omega} W(n,U)$ y*

(iii) *para cada $n \in \omega$, $U \subseteq V$ implica que $W(n,U) \subseteq W(n,V)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea G una función que satisfaga las propiedades (a)-(e) de la Definición 3.9. Para cada $(n,U) \in \omega \times \tau$, denotemos $H = X \setminus U$ y definamos $W(n,U) = X \setminus \overline{G(n,H)}$. Mostremos que W satisface (*i*), (*ii*), (*iii*).

Condición (i). Es claro que $\overline{W(n,U)} \subseteq \overline{X \setminus G(n,H)}$. Ahora, como $G(n,H)$ es un conjunto abierto, se tiene que $\overline{X \setminus G(n,H)} = X \setminus G(n,H)$ y, de la condición (a), $X \setminus G(n,H) \subseteq X \setminus H$, pero note que $X \setminus H = U$. Por lo tanto $\overline{W(n,U)} \subseteq U$.

Condición (ii). Observemos que

$$\bigcup_{n\in\omega} W(n,U) = \bigcup_{n\in\omega} X \setminus \overline{G(n,H)} = X \setminus \Big(\bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)} \Big),$$

de la condición (d), lo anterior es igual a $X \setminus H$ y que es igual a U. Por lo tanto $U = \bigcup_{n\in\omega} W(n,U)$.

Condición (iii). Sea $n \in \omega$. Supongamos que $U \subseteq V$, luego $X \setminus V \subseteq H$; de la condición ($c$), $G(n,X \setminus V) \subseteq G(n,H)$, de donde $X \setminus \overline{G(n,H)} \subseteq X \setminus \overline{G(n,X \setminus V)}$, es decir, $W(n,U) \subseteq W(n,V)$.

Por lo tanto la función W es la requerida; además, de la condición (e), obtenemos que $W(n,U) \subseteq W(n+1,U)$.

($\Leftarrow$) Sea W que satisface (i), (ii) y (iii). Para cada $n \in \omega$ y cada subconjunto cerrado H, denotemos $U = X \setminus H$ y definimos $G(n,H) = X \setminus \overline{W(n,U)}$. Es suficiente ver que G cumple (a), (c) y (d).

Inciso (a). Dado $n \in \omega$, de (i), $\overline{W(n,U)} \subseteq U$, luego $H \subseteq X \setminus \overline{W(n,U)}$, y $X \setminus \overline{W(n,U)} = G(n,H)$.

Inciso (c). Análogo a la prueba de (iii).

Inciso (d). Es claro que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{X \setminus W(n,U)} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)}$. Para probar que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{X \setminus W(n,U)}$ note que como $W(n,U)$ es un conjunto abierto, la contención se sigue del hecho que

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{X \setminus W(n,U)} = \bigcap_{n\in\omega} X \setminus W(n,U) = X \setminus \bigcup_{n\in\omega} W(n,U) = X \setminus U.$$

†

La Proposición 3.10 nos da condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea estratificados. La siguiente proposición es una caracterización para espacios semi-estratificados(Teorema 5.8 en [6]).

Proposición 3.11. *Un espacio topológico (X,τ) es semi-estratificado si y sólo si existe una función $g : \omega \times X \to \tau$ con las siguientes características:*

($\cdot$) $\bigcap_{n\in\omega} g(n,x) = \{x\}$;

($\cdot\cdot$) *si para todo* $n \in \omega$, $y \in g(n,x_n)$, *entonces* $x_n \to y$.

Más aún, si X *es estratificado podemos obtener*

($\therefore$) *si* $y \notin H$, *donde* H *es un conjunto cerrado, entonces existe* $n_0 \in \omega$ *tal que* $y \notin \overline{\bigcup\{g(n_0,x) \mid x \in H\}}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Para cada $(n,x) \in \omega \times X$, sea $g(n,x) = G(n,\{x\})$, donde G satisface la Definición 3.9. Mostremos que la función g satisface lo requerido. Por el momento, es claro que g satisface ($\cdot$).

g satisface ($\cdot\cdot$). Supongamos que $y \in g(n,x_n)$ para cada n, pero que $x_n \nrightarrow y$. Entonces existe $A \subseteq \omega$, infinito, tal que $y \notin \overline{\{x_n \mid n \in A\}}$. De la condición (b), $y \notin G(m_0,\overline{\{x_n \mid n \in A\}})$ para algún $m_0 \in \omega$. Escojamos $n \in A$, con $n \geq m_0$. De la condición (e), $y \notin G(n,\overline{\{x_n \mid n \in A\}})$; pero $y \in g(n,x_n)$, $g(n,x_n) = G(n,\{x_n\})$ y, de la condición (c), $G(n,\{x_n\}) \subseteq G(n,\overline{\{x_n \mid n \in A\}})$, lo cual es una contradicción.

Finalmente comprobemos que g cumple ($\therefore$). Asumimos que y no pertenece a un conjunto cerrado H. De la condición (d), $y \notin \overline{G(m,H)}$ para algún $m \in \omega$. Pero de (c), $\bigcup_{x\in H} G(n,\{x\}) \subseteq G(n,H)$, lo cual implica que $y \notin \overline{\bigcup\{g(n,x) \mid x \in H\}}$.

($\Leftarrow$) Es natural definir $G(n,H) = \bigcup_{x\in H} g(n,x)$ para cada $n \in \omega$ y cada subconjunto cerrado H en X. Veamos que G cumple lo requerido en la Definición 3.9. Claramente se tienen las condiciones (a) y (c). Para (b), si tomamos un punto $y \in \bigcap_{n\in\omega} G(n,H)$, entonces para todo $n \in \omega$ existe $x_n \in H$ tal que $y \in g(n,x_n)$. De ($\cdot\cdot$), $x_n \to y$ y puesto que H es un conjunto cerrado, se tiene que $y \in H$. Por lo que $\bigcap_{n\in\omega} G(n,H) \subseteq H$, y es claro que $H \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G(n,H)$. De la condición ($\therefore$), es inmediato que G cumple (d), y se tiene la prueba completa. †

Como ya habíamos mencionado, todo espacio métrico es un espacio estratificado. El siguiente teorema muestra que, al igual que en los espacios métricos, las clases de los espacios estratificados y semi-estratificados son hereditarias y se conservan bajo productos numerables. (Teorema 5.10 y Teorema 5.7 en [6] respectivamente).

***Teorema* 3.12.** *Las clases de los espacios estratificados y semi-estratificados son hereditarias y cerradas bajo productos a lo más numerables.*

Demostración. Para ver que las clases son hereditarias, basta restringir la función g introducida en la Proposición 3.11 al subespacio en cuestión.

Ahora, demos una colección de espacios topológicos estratificados (semi-estratificados) $\{X_i\}_{i\in\omega}$. Denote $X = \prod_{n\in\omega} X_n$. Para cada $i \in \omega$, es posible encontrar $g_i : \omega \times X_i \to \tau_i$ que satisface las condiciones de la Proposición 3.11. Sean $n \in \omega$ y $x = \{x_n\} \in \prod_{n\in\omega} X_n$, definimos $g : \omega \times X \to \tau$ como

$$g(n,x) = \prod_{i\leq n} g(n,x_i) \times \prod_{i>n} X_i.$$

Sin problemas g satisface las condiciones $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ de la Proposición 3.11. Resta verificar que g satisface $(\therefore)$. Para ello tomemos un conjunto cerrado H en X y un punto $y = \{y_n\} \notin H$, luego $y \in U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times \prod_{k>n} X_k \subseteq X \setminus H$, donde cada U_i es un conjunto abierto en X_i. Para cada $i \in \{1,2,...,n\}$ denotemos $H_i = X_i \setminus U_i$. Como $y_i \notin H_i$, existe $m_i \in \omega$ tal que $y_i \notin \overline{\bigcup_{x\in H_i} g_i(m_i,x)}$. Tomemos $m = \text{máx}\{m_1,m_2,...,m_n\}$. No olvidemos que podemos suponer que $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$, por lo que $y_i \notin \overline{\bigcup_{x\in H_i} g_i(m,x)}$. Para cada $i \in \omega$, denotemos

$$V_i = X \setminus \overline{\bigcup_{x\in H_i} g_i(m,x)};$$

es inmediato que $V_i \subseteq U_i$. Entonces $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \times \prod_{k>n} X_k$ es un conjunto abierto que tiene a y y cuya intersección con $\bigcup\{g(m,x) \mid x \in H\}$ es vacía. $\dagger$

Se desea ubicar en dónde viven los espacios estratificados. El siguiente teorema nos da una parte de la solución (Teorema 5.7 en [6]).

***Teorema* 3.13.** *Todo espacio estratificado es paracompacto.*

Demostración. Sean $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de un espacio estratificado X y W una función que cumple las condiciones de la Proposición 3.10. Fijamos $n \in \omega$ y formemos la familia $\mathscr{F}_n = \{W(n_0,U) \mid U \in \mathscr{U}\}$. La colección $\mathscr{F}_n$ tiene la siguiente característica: cada vez que tomemos $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$; para cada $U' \in \mathscr{U}'$ se tiene que $W(n_0,U') \subseteq W(n_0,\bigcup\mathscr{U}')$, entonces

$$\overline{\bigcup\{W(n_0,U') \mid U' \in \mathscr{U}'\}} \subseteq \overline{W(n_0,\bigcup\mathscr{U}')},$$

pero $\overline{W(n_0,\bigcup\mathscr{U}')} \subseteq \bigcup\mathscr{U}'$, por lo tanto se cumple que

$$\overline{\bigcup\{W(n_0,U') \mid U' \in \mathscr{U}'\}} \subseteq \bigcup\mathscr{U}'.$$

Lo anterior significa que $\mathscr{F}_n$ es acolchonada en $\mathscr{U}$. Si $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\omega}\mathscr{F}_n$, entonces es claro que $\mathscr{F}$ es un refinamiento σ-acolchonado de $\mathscr{U}$, lo cual, del Teorema 1.45, equivale a que X sea paracompacto. †

El teorema anterior deja ubicada a la clase de espacios estratificados. Ahora, hagamos lo mismo para los espacios semi-estratificados. Para ello es el siguiente teorema (Teorema 5.11 en [6]).

***Teorema* 3.14.** *Si X es semi-estratificado, entonces X es subparacompacto y tiene diagonal G^*_δ.*

Demostración. Basta probar que X es subparacompacto pues si X es semi-estratificado y subparacompacto, del Teorema 3.12 $X\times X$ es semi-estratificado, entonces $X\times X$ es perfectamente normal, y así, X tiene diagonal G_δ. Ahora, si X es subparacompacto con diagonal G_δ, entonces X tiene diagonal G^*_δ (Corolario 1.54).

Demostremos que X es un espacio subparacompacto, es decir, se probará que toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento σ-discreto y cerrado. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X bien ordenada por la relación $<$. Puesto que X es semi-estratificado, tomamos una función g que satisface las condiciones $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ de la Proposición 3.11. Para cada $U \in \mathscr{U}$ y $n \in \omega$, sea

$$U_n = U \setminus \left[\left(\bigcup\{U' \in \mathscr{U} \mid U' < U\}\right) \cup \left(\bigcup\{g(n,y) \mid y \notin U\}\right)\right].$$

Denotemos por $\mathscr{F}_n = \{U_n \mid U \in \mathscr{U}\}$. Sea $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\omega}\mathscr{F}_n$. Veamos que $\mathscr{F}$ cubre a X. Fijemos $x \in X$ y sea $U(x)$ el $<$-primer elemento de $\mathscr{U}$ que contiene a x. Si para cada $n \in \omega$ existiera $y_n \in X \setminus U(x)$ tal que $x \in g(n,y_n)$, de la condición $(\cdot\cdot)$, $y_n \to x$, lo cual no es posible. Por lo tanto, podemos decir que existe $m \in \omega$ tal que $x \notin \bigcup\{g(m,y) \mid y \in X \setminus U(x)\}$. Lo dicho anteriormente significa que $x \in U(x)_m$, y por lo tanto $\mathscr{F}$ cubre a X. Además, es claro que $\mathscr{F}$ refina a $\mathscr{U}$.

Completemos la prueba mostrando que cada $\mathscr{F}_n$ es una familia discreta. Fijemos n y demos $x \in X$. Sea $U(x)$ como en el párrafo anterior. Si $U(x) < U$, entonces $U(x) \cap U_n = \emptyset$. También, siempre que $U < U(x)$, se tiene que $g(n,x) \cap U_n = \emptyset$. Entonces $g(n,x) \cap U(x)$, vecindad de x, intersecta en a lo más un elemento de $\mathscr{F}_n$, a saber, $U(x)_n$. Por lo tanto, $\mathscr{F}_n$ es una familia discreta. †

Tenemos los siguientes diagramas.

Metrizable $\Longrightarrow$ Estratificado $\Longrightarrow$ Paracompacto

Metrizable $\Longrightarrow$ Semi-estratificado $\Longrightarrow$ Subparacompacto

Aquí termina el análisis de la clase de los espacios estratificados. Ahora, pasamos a las clases de los espacios $w\Delta$ y p-espacios. Nos interesa ampliamente mostrar que en todo espacio submetacompacto, las definiciones $w\Delta$ y p-espacios son equivalentes.

Definición 3.15. *Decimos que un espacio topológico X es un **espacio** $w\Delta$ si existe una familia $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas abiertas de X tal que para todo $x \in X$, si $x_n \in st(x,\mathscr{G}_n)$ para cada $n \in \omega$, entonces la sucesión $\{x_n \mid n \in \omega\}$ tiene un punto límite en X.*

El punto límite referido en la definición anterior no necesariamente tiene que ser el mismo x. Analicemos el caso cuando x es el punto límite de la sucesión $\{x_n \mid n \in \omega\}$; entonces el conjunto $\{st(x,\mathscr{G}_n) \mid n \in \omega\}$ formará una base local para x (dado cualquier punto $x \in X$ y cualquier conjunto abierto U tal que $x \in U$, no es posible que para todo $n \in \omega$ exista $x_n \in st(x,\mathscr{G}_n) \setminus U$), lo cual diría que la familia $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\omega}$ forma un desarrollo para X.

El párrafo anterior nos dice que los espacios que poseen un desarrollo son espacios $w\Delta$. También, todos los espacios numerablemente compactos son espacios $w\Delta$, basta tomar $\mathscr{G}_n = \{X\}$ ya que toda sucesión en un espacio numerablemente compacto tiene un punto límite (Teorema 1.23).

Se tiene el siguiente diagrama.

Moore $\Longrightarrow$ espacio $w\Delta \Longleftarrow$ Numerablemente compacto

Lo que nos interesa en esta parte es caracterizar los espacios de Moore en términos de espacios $w\Delta$. Para ello es necesario el siguiente resultado, Lema 3.2 en [6].

Lema 3.16. *Supongamos que $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de conjuntos abiertos tal que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n$, y que siempre que $x_n \in U_n$, la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ tiene un punto límite. Entonces $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es una base para el conjunto $\bigcap_{n\in\omega} U_n$, es decir, todo conjunto abierto que contenga a $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ contiene algún U_n.*

Demostración. Supongamos que $\{U_n\}_{n\in\omega}$ satisface las hipótesis del lema pero no la conclusión. Entonces podemos encontrar un conjunto abierto V que contenga a $\bigcap_{n\in\omega} U_n$, y puntos $x_n \in U_n \setminus V$ para cada n. Puesto que $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es decreciente, cualquier punto límite de la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ debe pertenecer a $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n$, lo cual no es posible ya que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n \subseteq V$. Por lo que la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ no tiene puntos límites, y esto es una contradicción. †

Con el teorema siguiente, dejamos caracterizados a los espacios de Moore (Teorema 3.3 en [6]).

***Teorema* 3.17.** *X es un espacio de Moore si y sólo si es un espacio $w\Delta$ con diagonal G^*_δ.*

Demostración. Ya hemos mencionado que un espacio que posee un desarrollo tiene diagonal G^*_δ y además es un espacio $w\Delta$. Ahora, si X es un espacio $w\Delta$ con diagonal G^*_δ, de la Proposición 1.30, es posible hallar una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ que cumple la Definición 3.15 y la Definición 1.50. Además, podemos suponer que $\mathscr{U}_{n+1}$ refina a $\mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$.

Dado $x \in X$; la familia $\{st(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de conjuntos abiertos, y $\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{U}_n)} = \{x\}$. Del Lema 3.16, $\{st(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\omega}$ es una base para el conjunto $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n) = \{x\}$, es decir, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ es un desarrollo para X. †

Es el turno de los p-espacios, tal clase fue introducida por A. Arhangel'skiĭ en [1].

Definición 3.18. *Un espacio topológico X es un* ***p-espacio*** *si existe una familia $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas de X por conjuntos abiertos en βX, tal que cada $x \in X$ cumple que $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n) \subseteq X$.*

La demostración del siguiente teorema se encuentra detalladamente en [3], Teorema 3.2.

***Teorema* 3.19.** *La clase de los p-espacios contiene a todos los espacios que son:*

(a) métricos y

(b) localmente compactos.

La necesidad de introducir a los p-espacios es que podremos identificarlos con los espacios $w\Delta$ siempre y cuando el espacio ambiente sea submetacompacto. Se demostrará este hecho, la prueba la hemos dividido en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 3.20. *Sea X submetacompacto. Si X es un p-espacio, entonces X es un espacio $w\Delta$.*

Demostración. Sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión que satisface la Definición 3.18 y además $\mathscr{U}_{n+1}$ refina a $\mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$. De la Proposición 1.52, existe una familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas de X por conjuntos abiertos en βX tal que si $x \in X$, implica que $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n) = \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n)}$, además

$$\overline{st(x,\mathscr{V}_n)} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n) \subseteq X.$$

Afirmamos que $\{\mathscr{V}_n|_X\}_{n\in\omega}$ cumple la Definición 3.15. En efecto, denotemos

$$C_x = \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n|_X)}^X$$

Se tienen las siguientes propiedades.

(1) Se cumple que:

$$C_x = \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n)} \text{ y } \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n) = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n|_X),$$

y por lo tanto, $C_x = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n|_X)$. Las igualdades anteriores no presentan dificultad alguna, basta tener presente que $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n) \subseteq X$.

(2) C_x es un conjunto compacto en X. Es consecuencia de que el subconjunto $\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n)} \subseteq X$ es cerrado en βX.

(3) El conjunto $\{st(x,\mathscr{V}_n|_X) \mid n\in\omega\}$ es una base para C_x. Esto es consecuencia de que, del Lema 3.16, $\{st(x,\mathscr{V}_n) \mid n\in\omega\}$ forma una base para el conjunto $\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n)}$, y del hecho que $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n) = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n|_X)$.

Ahora, sea $x_n \in st(x,\mathscr{V}_n|_X)$ para cada n. Si $\{x_n \mid n\in\omega\}$ no tuviera puntos límites, en particular, a cada $z\in C_x$ le podemos asociar una vecindad, U_z de z tal que $U_z \cap \{x_n \mid n\in\omega\} \setminus \{z\} = \emptyset$. Del inciso (2), tenemos que $C_x \subseteq \bigcup_{i=0}^{i=k} U_{z_i}$ con $z_i \in C_x$. Luego, del inciso (3), existe $n_0\in\omega$ con la propiedad de que $st(x,\mathscr{V}_{n_0}) \subseteq \bigcup_{i=0}^{i=k} U_{z_i}$, lo cual no es posible debido a que $st(x,\mathscr{V}_{n_0})$ contiene una cantidad infinita de puntos del conjunto $\{x_n \mid n\in\omega\}$. Por lo tanto la familia $\{\mathscr{V}_n|_X\}_{n\in\omega}$ cumple la Definición 3.15, es decir, X es un espacio $w\Delta$. †

Proposición 3.21. *Sea X submetacompacto. Si X es un espacio $w\Delta$, entonces X es un p-espacio.*

Demostración. Sean X un espacio $w\Delta$ y $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión que satisface la Definición 3.15. De la Proposición 1.52, podemos encontrar una familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$ de cubiertas abiertas de X tal que si $x\in X$, entonces

$$\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n) = \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{V}_n)} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{U}_n), \tag{3.1}$$

y además, supongamos que $\mathscr{V}_{n+1}$ refina a $\mathscr{V}_n$. Para cada $n\in\omega$, denotemos

$$C_x = \bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{V}_n).$$

Por la Ecuación 3.1, podemos aplicar el Lema 3.16 a la familia $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\omega}$; se obtiene la siguiente propiedad:

$(\cdot)$ La familia $\{st(x,\mathscr{V}_n) \mid n \in \omega\}$ es una base para el conjunto C_x.

Por otro lado, de acuerdo con el Teorema 1.49, C_x es submetacompacto, y claramente es numerablemente compacto, por lo tanto, el Corolario 1.57 establece que:

$(\cdot\cdot)$ C_x es compacto.

Continuando con la prueba, para cada $V \in \mathscr{V}_n$, W_V es un conjunto abierto en βX tal que $W_V \cap X = V$. Sea $\mathscr{W}_n = \{W_V \mid V \in \mathscr{V}_n\}$. Probemos que la familia $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in\omega}$ satisface la Definición 3.18. Claramente cada $\mathscr{W}_n$ cubre al conjunto X. Resta ver que para cada $x \in X$, $\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathscr{W}_n) \subseteq X$, más aún, demostremos que para todo $x \in X$

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{W}_n)}^{\beta X} \subseteq C_x.$$

Supongamos lo contrario, es decir, que podemos encontrar $x \in X$ y $y \in \beta X$ tales que $y \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{W}_n)}^{\beta X}$ pero $y \notin C_x$. Del inciso $(\cdot\cdot)$, C_x es un conjunto cerrado en βX y, puesto que βX es normal, existe un conjunto abierto W en βX tal que $y \in W$ y $\overline{W}^{\beta X} \cap C_x = \emptyset$. Del inciso $(\cdot)$, existe $m \in \omega$ tal que $\overline{W}^{\beta X} \cap st(x,\mathscr{V}_m) = \emptyset$, de donde $W \cap \overline{st(x,\mathscr{V}_m)}^{\beta X} = \emptyset$. Pero del Teorema 1.17,

$$\overline{st(x,\mathscr{W}_m)}^{\beta X} = \overline{st(x,\mathscr{W}_m) \cap X}^{\beta X} = \overline{st(x,\mathscr{V}_m)}^{\beta X},$$

lo cual diría que $y \notin \overline{st(x,\mathscr{W}_n)}^{\beta X}$, que es una contradicción. Lo anterior prueba que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{st(x,\mathscr{W}_n)}^{\beta X} \subseteq C_x$. Por lo tanto X es un p-espacio. †

Lo probado en las Proposiciones 3.20 y 3.21 tiene como consecuencia lo siguiente (Teorema 3.19 en [6]).

***Teorema* 3.22.** *Para un espacio submetacompacto X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es un p-espacio;*

(2) *X es un espacio $w\Delta$.*

Con el Teorema 3.22 hemos cumplido uno de los principales objetivos planteados. Antes de pasar a los teoremas de metrización pertenecientes a esta sección, es necesario el siguiente lema.

Lema 3.23. *Un espacio topológico X es de Moore si y sólo si X es semi-estratificado y es un espacio $w\Delta$ o un p-espacio.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es de Moore, X es semi-estratificado y es un espacio $w\Delta$.

($\Leftarrow$) Si X es semi-estratificado, entonces X es subparacompacto y tiene diagonal G^*_δ (Teorema 3.14), luego X es submetacompacto con diagonal G^*_δ. En espacios submetacompactos p-espacio equivale a ser un espacio $w\Delta$ (Teorema 3.22), entonces X es un un espacio $w\Delta$ con diagonal G^*_δ, por lo que X es un espacio de Moore (Teorema 3.17). †

Con lo anterior tenemos todos los elementos necesarios para dar el siguiente criterio de metrización (Corolario 5.12 en [6]).

***Teorema* 3.24.** *Un espacio X es metrizable si y sólo si X es estratificado y es un espacio $w\Delta$ o un p-espacio.*

Demostración. La parte "sólo si" es obvia. Ahora, si X es estratificado y es un espacio $w\Delta$ o un p-espacio, del Lema 3.23, X es un espacio de Moore y estratificado, entonces X es un espacio de Moore y paracompacto (Teorema 3.13); por el Teorema 1.38, X es un espacio de Moore y normal por colecciones, por lo tanto, el Criterio de metrización de Bing (Teorema 2.10) asegura que X es metrizable. †

Veamos la riqueza del Teorema 3.24.

Corolario 3.25. *Sea X es un espacio localmente compacto. X es metrizable si y sólo si X es estratificado.*

Demostración. Si X es estratificado y localmente compacto, entonces el Teorema 3.19 dice que X es estratificado y es un p-espacio, por lo que X es metrizable. †

Corolario 3.26. *Sea X es un espacio numerablemente compacto. X es metrizable si y sólo si X es estratificado.*

Demostración. Si X es estratificado y numerablemente compacto, entonces X es un espacio estratificado y $w\Delta$, luego X es metrizable. †

Es inmediato que

Corolario 3.27. *Un espacio X es metrizable si y sólo si X es estratificado y un espacio $w\Delta$.*

Corolario 3.28. *Un espacio X es metrizable si y sólo si X es estratificado y un p-espacio.*

3.3. Espacio de Mrówka

Como se vio en el Teorema 3.1 (de Metrización de Šneĭder) y en el Teorema 3.7 (de Metrización de Chaber), los espacios compactos y los espacios numerablemente compactos que poseen diagonal G_δ son metrizables. Queremos ampliar nuestros horizontes; sabemos que todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto (Teorema 1.24), por ello, desearíamos que un espacio pseudocompacto con diagonal G_δ sea metrizable. Pero no, y para convencernos daremos un ejemplo de un espacio pseudocompacto con diagonal G_δ que no es metrizable.

Recordemos que para un conjunto A y un número cardinal κ

$$[A]^\kappa = \{B \subseteq A \mid |B| = \kappa\} \text{ y } [A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A \mid |B| < \kappa\}.$$

Definición 3.29. *Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$. $\mathscr{A}$ es* ***casi ajena*** *si $\mathscr{A}$ es infinita y para todo $A, B \in \mathscr{A}$ diferentes, $|A \cap B| < \aleph_0$.*

¿Existirán estas familias?

Proposición 3.30. *Existe una familia casi ajena y de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (aquí $\mathfrak{c}$ denota la cardinalidad de los números reales).*

Demostración. Es suficiente construir la familia $\mathscr{A}$ en $[\mathbb{Q}]^{\aleph_0}$. Para todo número $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, escogemos una sucesión inyectiva A_r en $\mathbb{Q}$ convergente a r. Definamos la familia $\mathscr{A} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, $\mathscr{A} \subseteq [\mathbb{Q}]^{\aleph_0}$, y es claro que $\mathscr{A}$ es casi ajena. †

Una vez demostrada la existencia de familias casi ajenas, nos preguntamos si podremos encontrar una familia casi ajena maximal con respecto a la relación $\subseteq$.

***Teorema* 3.31.** *Toda familia casi ajena está contenida en una familia casi ajena maximal.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{\mathscr{B} \subseteq [\omega]^{\aleph_0} \mid \mathscr{B}$ es una familia casi ajena$\}$. Por la Proposición 3.30 $\mathscr{F} \neq \emptyset$, y es claro que $\mathscr{F}$ es una familia de carácter finito (ver Definición 1.1); por el Teorema 1.2, $\mathscr{F}$ tiene un elemento $\subseteq$-maximal. †

Para referirnos a las familias casi ajenas maximales usaremos la sigla **MAD** (maximal almost disjoint).

A lo largo de esta sección usaremos la siguiente notación: para dos conjuntos A y F

$$B(A,F) = \{A\} \cup (A \setminus F).$$

Dada una familia casi ajena $\mathscr{A}$, definimos el espacio topológico $\Psi(\mathscr{A})$ como sigue:

$\Psi(\mathscr{A}) = (\omega \cup \mathscr{A}, \tau_{\mathscr{B}})$, donde $\tau_{\mathscr{B}}$ es la topología generada por la base

$$\mathscr{B} = \{\{n\} \mid n \in \omega\} \cup \{B(A,F) \mid A \in \mathscr{A} \text{ y } F \in [\omega]^{<\aleph_0}\}.$$

Vemos algunas propiedades del espacio topológico $\Psi(\mathscr{A})$, a menudo llamado **espacio de Mrówka**, debido a su creador S. Mrówka en [12].

Proposición 3.32. *Sea $\mathscr{A}$ una familia casi ajena. Se tienen las siguientes propiedades:*

(*a*) $\Psi(\mathscr{A})$ *no es segundo numerable y*

(*b*) ω *es un subconjunto denso en* $\Psi(\mathscr{A})$*, es decir,* $\Psi(\mathscr{A})$ *es un espacio separable.*

Demostración. Para la parte (a) basta notar que para cada $A \in \mathscr{A}$, $B(A,F)$ es un conjunto abierto en $\Psi(\mathscr{A})$ tal que $B(A,F) \cap \mathscr{A} = \{A\}$, es decir, $\mathscr{A}$ es un subespacio no numerable y discreto en el espacio de Mrówka. La parte (b) se sigue de que cualquier conjunto abierto en $\Psi(\mathscr{A})$ tiene intersección no vacía con ω, en otras palabras, ω es un subconjunto denso en en el espacio de Mrówka. †

Corolario 3.33. *Si $\mathscr{A}$ es una familia casi ajena, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ no es un espacio metrizable.*

Demostración. $\Psi(\mathscr{A})$ no puede ser metrizable ya que tal espacio es separable y, el Teorema 1.18 diría entonces que $\Psi(\mathscr{A})$ es segundo numerable contradiciendo lo probado en la Proposición 3.32. †

Pasemos a ver que $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio pseudocompacto, lo cual requiere algunos resultados previos.

La siguiente proposición caracteriza a las familias casi ajenas maximales.

Proposición 3.34. *La familia $\mathscr{A}$ es MAD si y sólo si para todo $B \in [\omega]^{\aleph_0}$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $|B \cap A| = \aleph_0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe $B \in [\omega]^{\aleph_0}$ tal que para todo $A \in \mathscr{A}$, $|B \cap A| < \aleph_0$; entonces la familia $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cup \{B\}$ es casi ajena y esto contradice la maximalidad de $\mathscr{A}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una familia casi ajena $\mathscr{A}'$ tal que $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{A}'$. Tomamos $B \in \mathscr{A}' \setminus \mathscr{A}$; para tal B existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $|B \cap A| = \aleph_0$, entonces $\mathscr{A}'$ no es casi ajena. Por lo tanto $\mathscr{A}$ es MAD. †

Corolario 3.35. *Sea $\mathscr{A}$ una familia MAD. Se cumple que para todo $B \in [\omega]^{\aleph_0}$ existe $C \subseteq B$ tal que $|C| = \aleph_0$ y C forma una sucesión convergente en $\Psi(\mathscr{A})$.*

Demostración. Dado $B \in [\omega]^{\aleph_0}$, de la Proposición 3.34, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $|B \cap A| = \aleph_0$. El conjunto $C = B \cap A$ satisface lo requerido, de hecho, C converge a A. †

***Teorema* 3.36.** *Si $\mathscr{A}$ es una familia MAD, $\Psi(\mathscr{A})$ es pseudocompacto.*

Demostración. Demos una función $f : \Psi(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ continua. Queremos probar que f es acotada, como ω es un subconjunto denso de $\Psi(\mathscr{A})$, basta garantizar que $f|_\omega$ es acotada.

Suponga que $f|_\omega$ no es acotada; entonces para cada $n \in \omega$ se puede elegir $a_n \in \omega$ de modo que $|f(a_n)| > n$. Sea $D = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Note que $D \in [\omega]^{\aleph_0}$ y, del Corolario 3.35, el conjunto D tiene un punto límite en $\Psi(\mathscr{A})$, digamos x_0. Puesto que f es continua, existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq [f(x_0)-1, f(x_0)+1]$; lo cual implica que $|U \cap D| < \aleph_0$, que no es posible ya que x_0 es punto límite de D. †

Nos ocuparemos ahora en probar que el espacio de Mrówka tiene diagonal G_δ, lo cual, necesitará introducir algunos conceptos y resultados.

Definición 3.37. *Decimos que un espacio topológico es F_σ-**discreto** si lo podemos representar como unión numerable de conjuntos cerrados y discretos.*

Se verificarán dos propiedades particulares que tiene los espacios F_σ-discreto.

Proposición 3.38. *Si X, Y son espacios F_σ-discretos, entonces el espacio $X \times Y$ es nuevamente F_σ-discreto.*

Demostración. Sean X y Y como en la hipótesis del teorema. Entonces $X = \bigcup_{n\in\omega} G_n$ y $Y = \bigcup_{m\in\omega} H_m$ donde cada G_n y cada H_m son conjuntos cerrados y discretos en X y Y respectivamente. Si definimos $F_{n,m} = G_n \times H_n$, notemos que $X \times Y = \bigcup_{n,m\in\omega} F_{n,m}$ y además cada $F_{n,m}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$, más aún, siempre que $(x,y) \in F_{n,m}$, existen dos conjuntos abiertos U y V en X y Y respectivamente tales que $\{x\} = U \cap G_n$ y $\{y\} = V \cap H_m$. Con esto, $(U \times V) \cap F_{n,m} = \{(x,y)\}$, así, cada $F_{n,m}$ es discreto; por lo tanto $X \times Y$ es F_σ-discreto. †

Proposición 3.39. *Dado un espacio F_σ-discreto X, para todo $A \subseteq X$, A es un conjunto G_δ.*

Demostración. Basta demostrar que todo conjunto en X es F_σ. Sea $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ donde con cada F_n un conjunto cerrado discreto. Tomamos un conjunto arbitrario $A \subseteq X$. Se cumple que

$$A = \bigcup_{n\in\omega}(A \cap F_n).$$

$A \cap F_n$ es un conjunto cerrado en F_n, pues F_n es un conjunto discreto; y es cerrado en X, porque F_n es cerrado en X. Se sigue que A es un conjunto F_σ en X. †

Corolario 3.40. *Todo espacio F_σ-discreto tiene diagonal G_δ.*

Demostración. Sea X un espacio F_σ-discreto, entonces, de la Proposición 3.38 y la Proposición 3.39, $X \times X$ es un espacio F_σ-discreto y por ende su diagonal es un conjunto G_δ. †

Con lo anterior se prueba lo siguiente.

***Teorema* 3.41.** *El espacio de Mrówka tiene diagonal G_δ.*

Demostración. El Corolario 3.40 nos indica que es suficiente verificar que $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio F_σ-discreto, lo cual es cierto pues

$$\Psi(\mathscr{A}) = \left(\bigcup_{n\in\omega}\{n\}\right) \cup \mathscr{A}$$

donde $\mathscr{A}$ es un conjunto discreto y cerrado. †

Concluimos que **si $\mathscr{A}$ es una familia MAD, entonces $\Psi(\mathscr{A})$ es un espacio pseudocompacto con diagonal G_δ; sin embargo $\Psi(\mathscr{A})$ no es metrizable**.

3.4. La NMSC de Jones

En su artículo del año 1937 ([9]) F. Jones plantea el siguiente cuestión:

¿Todo espacio normal de Moore es metrizable?

En esta sección pretendemos relatar los hechos más sobresalientes a la pregunta planteada por Jones, que como veremos, tuvieron que pasar mas de 40 años para llegar a la solución. Tal solución se dio de la manera más inesperada y causó controversia entre muchos de los matemáticos de la época.

Como primer acercamiento hacia la solución, Jones, demuestra que bajo la hipótesis $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable. Probemos el resultado de Jones.

Definición 3.42. *Dada una familia $\mathscr{Y}$ de subconjuntos de un espacio X, decimos que:*

(1) *$\mathscr{Y}$ **preserva cerraduras** si cualquier colección $\mathscr{Y}' \subseteq \mathscr{Y}$ cumple que $\overline{\bigcup \mathscr{Y}'}$ $= \bigcup\{\overline{Y'} \mid Y' \in \mathscr{Y}'\}$ y*

(2) *$\mathscr{Y}$ es **separable** si para cualesquiera dos conjuntos $A, B \in \mathscr{Y}$ diferentes, existen conjuntos abiertos y ajenos U, V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Pasamos al primer resultado que corresponde al Teorema 1.4 en [17].

***Teorema* 3.43.** *En un espacio normal, toda familia discreta y numerable es separable.*

Demostración. Escogemos una familia $\mathscr{Y} = \{Y_n\}_{n\in\omega}$ discreta. Probemos la siguiente afirmación.

($\star$) Para cada $n \in \omega$ existen U_n y U'_n conjuntos abiertos y ajenos con $Y_n \subseteq U_n$ y $\bigcup_{n'\neq n} Y_{n'} \subseteq U'_n$.

Sea $n \in \omega$ arbitrario. Puesto que la familia $\mathscr{Y}$ es discreta, a cada $x \in \overline{Y}_n$ le asignamos una vecindad U_x de x tal que $U_x \cap \bigcup_{n'\neq n} Y_{n'} = \emptyset$, entonces si $U = \bigcup_{x\in\overline{Y}} U_x$ se tiene que $\overline{Y} \subseteq U$ y $U \cap \bigcup_{n'\neq n} Y_{n'} = \emptyset$; aún más, como el espacio ambiente es normal, podemos garantizar que $\overline{Y} \subseteq U$ y $\overline{U} \cap \bigcup_{n'\neq n} Y_{n'} = \emptyset$ lo cual prueba ($\star$).

Sea $V_n = U_n \cap \bigcap_{k<n} U'_k$. Vemos algunas propiedades de la sucesión $\{V_n\}_{n\in\omega}$.

($\cdot$) $Y_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Pues $Y_n \subseteq U_n$, y para cada $k < n$ se tiene que

$$Y_n \subseteq \bigcup_{n'\neq k} Y_{n'} \subseteq U'_k,$$

es decir, también se cumple que $Y_n \subseteq \bigcap_{k<n} U'_k$.

$(\cdot\cdot)$ $V_n \cap V_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Ya que si existe $z \in V_n \cap V_m$ (sin pérdida de generalidad supongamos que $n < m$) entonces $z \in U_n$ y $z \in \bigcap_{k<m} U'_k$, en particular, $z \in U_n$ y $z \in U'_n$ que contradice la afirmación $(\star)$.

De $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ la sucesión $\{V_n\}_{n\in\omega}$ forma una separación para la familia $\mathscr{Y}$, es decir, $\mathscr{Y}$ es una familia separable. †

El siguiente teorema es conocido como *Lema de Jones*, el cual puede ser consultado en [17], Teorema 2.1.

***Teorema* 3.44** (Lema de Jones). $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ *implica que todo espacio normal y separable no contiene subespacios que sean cerrados, discretos y no numerables.*

Demostración. Sea X un espacio normal y separable. Hagamos la prueba por contradicción. Entonces supongamos que X tiene un subespacio S de cardinalidad no numerable, cerrado y discreto. Observemos que todo $A \subseteq S$ es un conjunto cerrado en X ya que $X \setminus A = (X \setminus S) \cup \bigcup_{x \in S\setminus A} U_x$, donde U_x es un conjunto abierto que tiene a x y $U_x \cap S = \{x\}$, cuya existencia es garantizada por ser S un subespacio discreto de X.

Dado que X es separable, es posible encontrar un conjunto denso y numerable $D \subseteq X$. Ahora, puesto que X es normal, para todo conjunto $A \subseteq S$ no vacío existe un conjunto abierto U_A en X tal que $A \subseteq U_A$ y $\overline{U}_A \cap (S \setminus A) = \emptyset$, así, con los conjuntos U_A, definamos la función f como sigue:

$$f : \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(D), \text{ tal que } f(A) = U_A \cap D \text{ y } f(\emptyset) = \emptyset.$$

Probemos que la función f es inyectiva. Tomamos $A, B \in \mathscr{P}(S)$ tales que $A \neq B$ y vamos a demostrar que $f(A) \neq f(B)$. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ la afirmación es obvia, por ello, supongamos que A y B no son vacíos. Como

$$\emptyset \neq A \setminus B = A \cap (S \setminus B) \subseteq U_A \cap (X \setminus \overline{U}_B)$$

entonces $U_A \cap (X \setminus \overline{U}_B)$ es un conjunto abierto y no vacío, de donde $U_A \cap (X \setminus \overline{U}_B) \cap D \neq \emptyset$. Sea $x \in U_A \cap (X \setminus \overline{U}_B) \cap D$. Se cumple que $x \in U_A \cap D$ y $x \notin \overline{U}_B$, es decir, $x \in U_A \cap D$ y $x \notin U_B \cap D$, por lo que $x \in f(A)$ y $x \notin f(B)$ y por tanto $f(A) \neq f(B)$.

Ahora, dado que f es inyectiva, obtenemos que $|\mathscr{P}(S)| \leq |\mathscr{P}(D)|$, se sigue que

$$2^{\aleph_1} \leq |\mathscr{P}(S)| \leq |\mathscr{P}(D)| = |\mathscr{P}(\omega)| = 2^{\aleph_0},$$

que contradice el hecho que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. †

Proposición 3.45. *Bajo* $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$*, todo espacio normal y separable es normal por colecciones.*

Demostración. Sean X un espacio normal y separable y $\mathscr{F} = \{F_t\}_{t \in T}$ una familia discreta de conjuntos cerrados en X. Deseamos probar que la familia $\mathscr{F}$ es separable.

Afirmamos que T es un conjunto numerable. En efecto, si suponemos que T no es numerable, eligiendo $x_t \in F_t$ se tiene que cualquier $x \in X$ no es punto límite del conjunto $\{x_t\}_{t \in T}$; pues como la familia $\mathscr{F}$ es discreta, existe una vecindad U de x que a lo más contiene un punto x_t, note que entonces $x \neq x_t$, y luego, es posible encontrar una vecindad V con $x \in V$ y $x_t \notin V$, por lo que, $x \in U \cap V$ y $(U \cap V) \cap \{x_t\}_{t \in T} = \emptyset$; por lo tanto x no es punto límite de $\{x_t\}_{t \in T}$. Entonces $\{x_t\}_{t \in T}$ es un conjunto cerrado, no numerable y discreto (pues la familia $\mathscr{F}$ es discreta), pero esto contradice al Teorema 3.44.

Ahora, de la afirmación anterior T debe ser numerable, y en este caso, la familia $\mathscr{F}$ es separable por el Teorema 3.43. †

Combinando la Proposición 3.45 y el *Criterio de metrización de Bing* (Teorema 2.10), obtenemos el siguiente resultado que fue probado por Jones en [9], Teorema 5.

***Teorema* 3.46.** *Si* $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$*, entonces todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable.*

Jones, en el mismo artículo, menciona que ha intentado, sin éxito, demostrar que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Aunado a esto, escribe que resulta otra pregunta interesante

¿Todo espacio normal y de Moore es metrizable?

Para referirnos a la pregunta planteada por Jones usaremos la siguiente sigla

NMSC: Todo espacio de Moore y normal es metrizable.

El motivo de la abreviación es por las palabras en inglés *normal Moore space conjecture*.

Este problema se volvió uno de los más estudiados y controversiales en Topología General, ya que como veremos ¬NMSC es consistente con los axiomas de ZFC, y sin embargo, no es posible demostrar la consistencia de ZFC+NMSC.

En cuanto a la hipótesis $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, ahora sabemos que es un caso particular de la hipótesis del continuo: Si suponemos CH, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y, por el Teorema de Cantor 1.4, $\aleph_1 < 2^{\aleph_1}$, de donde $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Con esto, sabemos el porqué Jones no tuvo éxito en probar la desigualdad.

Con el Teorema 3.46, Jones da solución a un caso particular de la NMSC, a saber, que bajo ZFC+CH todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable, y por lo tanto, el enunciado: Todo espacio de Moore, normal y separable, es consistente con ZFC.

Continuando con nuestros propósitos, daremos un ejemplo que resolverá en parte la NMSC.

Recordemos el siguiente espacio. Dado $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Denotamos por L_1 la recta $y = 0$ y sea $L_2 = L \setminus L_1$. Para todo $p \in L$ y $\varepsilon > 0$ sea $B(p,\varepsilon)$ el conjunto de todos los puntos en L que están dentro de la bola con centro en p y de radio ε, y definimos

$$U(p,\varepsilon) = \begin{cases} B((x,\varepsilon),\varepsilon) \cup \{p\} & \text{si } p = (x,0) \in L_1; \\ B(p,\varepsilon) & \text{si } p \in L_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

El **plano de Niemytzki** (también algunas veces llamado **plano de Moore**) es el conjunto L con la topología generada por la base $\{U(p,\varepsilon) \mid p \in L, \varepsilon > 0\}$.

De los Ejemplos 1.3.9, 1.4.5 y 1.5.10 en [4]; el plano de Niemytzki es un espacio de Tychonoff, separable, L_1 es un subespacio discreto de L y todo subconjunto de L_1 es cerrado en L.

Definición 3.47. *Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se denomina **Q-conjunto** si todo $A \subseteq X$ es un conjunto F_σ en A.*

Claramente, $X \subseteq \mathbb{R}$ es un Q-conjunto si y sólo si todo $A \subseteq X$ es un conjunto G_δ en A.

Sea B un conjunto no numerable de números reales. $M(B)$, es el **plano de Moore** derivado de B, es decir,

$$M(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x,0) \mid x \in B\}.$$

Nunca hay que perder de vista la notación para referirnos a las vecindades en el plano de Moore, y por supuesto también cuando hablemos del espacio $M(B)$, dicha notación son de acuerdo a la Ecuación 3.2, y además siempre consideramos a B no numerable.

Proposición 3.48. *Si $M(B)$ es normal entonces B es un Q-conjunto.*

Demostración. Hagamos la prueba por contradicción, es decir, supongamos que $M(B)$ es normal y B no es un Q-conjunto para llegar a una contradicción. Puesto que B no es un Q-conjunto, existe $A \subseteq B$ tal que A no es G_δ. Por la normalidad de $M(B)$, para los conjuntos A y $B \setminus A$, existe un conjunto abierto U en $M(B)$ tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Para cada $n \in \omega$ definimos $U_n = U \cap \{(x,y) \in M(B) \mid y = \frac{1}{n+1}\}$ y con estos conjuntos definimos $A_n = \pi_1(U_n)$ para cada número natural n (aquí π representa la función proyección).

Note que cada A_n es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Tenemos las siguientes propiedades:

($\cdot$) $A \subseteq (\bigcup_{n \geq j} A_n) \cap B$ para cada $j \in \omega$. En efecto. Demos $j \in \omega$ y $a \in A$ arbitrarios; denotemos $a_0 = (a, 0)$, entonces es posible encontrar $n_0 \in \omega$ tal que $a_0 \in U(a_0, \frac{1}{n_0+1}) \subseteq U$ y $n_0 \geq j$. Entonces $(a, \frac{1}{n_0+1}) \in U_{n_0}$ y, por lo tanto, $a \in A_{n_0}$.

($\cdot\cdot$) $A \neq (\bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{n \geq j} A_n) \cap B$. Esto se debe a que A no es un conjunto G_δ.

($\therefore$) Si $p_0 \in [(\bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{n \geq j} A_n) \cap B] \setminus A$, entonces $p_0 \in \overline{U}$. Si pasara lo contrario, encontraríamos un conjunto abierto del punto p_0 tal que $U(p_0, \frac{1}{n_0+1}) \cap U = \emptyset$; pero como $p_0 \in A_n$ para algún $n \geq n_0$ entonces $(p_0, \frac{1}{n+1}) \in U_{n_0}$ y también se tendría que $(p_0, \frac{1}{n+1}) \in U(p_0, \frac{1}{n_0+1})$ lo cual no es posible ya que $U(p_0, \frac{1}{n_0+1}) \cap U = \emptyset$.

Por el inciso $(\because)$ el punto $p_0 \in \overline{U}$ y $p_0 \in (B \setminus A)$ que es una contradicción por el hecho de suponer que $M(B)$ era normal. †

Nuestro interés, en este momento, es demostrar que si B es un Q-conjunto no numerable, entonces $M(B)$ resultará un espacio normal; con ese fin introduciremos los siguientes dos lemas.

Lema 3.49. *$M(B)$ es un espacio normal si y sólo si para todo conjunto $A \subseteq B$ existe un conjunto abierto U en $M(B)$ tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap (B \setminus A) = \emptyset$.*

Demostración. Si $M(B)$ es un espacio normal, la afirmación es consecuencia inmediata de que A y $B \setminus A$ son conjuntos cerrados y ajenos en $M(B)$.

Ahora supongamos que podemos separar cualquier subconjunto de B y demostremos que $M(B)$ es un espacio normal. Para ello damos cualesquiera conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H, G en L. Concentremos nuestra atención cuando $H \cap B \neq \emptyset$ y $G \cap B \neq \emptyset$, ya que en los demás casos la prueba sería análoga a demostrar que $\mathbb{R}^2$ (con su topología usual) es normal. Dicho lo anterior, de nuestra hipótesis, es posible encontrar dos conjuntos abiertos U, V tales que $H \cap B \subseteq U$, $G \cap B \subseteq V$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$, además, $\overline{U} \cap G = \emptyset$ y $\overline{V} \cap H = \emptyset$. Si $H \cap (M(B) \setminus U) = \emptyset$ o $G \cap (M(B) \setminus V) = \emptyset$ tendríamos lo deseado, así que supongamos lo contrario. Ahora, puesto que $H \cap (M(B) \setminus U)$ y $G \cap (M(B) \setminus V)$ son conjuntos cerrados, ajenos y están contenidos en $M(B) \setminus B$, se encuentran U_1, V_1 conjuntos abiertos y ajenos tales que $H \cap (L \setminus U) \subseteq U_1'$ y $G \cap (L \setminus V) \subseteq V_1'$. Es suficiente definir $U_1 = U_1' \cap (M(B) \setminus \overline{V})$ y $V_1 = V_1' \cap (M(B) \setminus \overline{U})$ para que los conjuntos $U \cup U_1$ y $V \cup V_1$ separen a los conjuntos H y G. Por lo tanto $M(B)$ es normal. †

El siguiente lema es extraído de [17], Teorema 1.1.

Lema 3.50. *Sea $\mathscr{Y}$ una familia de subconjuntos de un espacio X. Si $\mathscr{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathscr{U}_n$ es una cubierta abierta de $\mathscr{Y}$ tal que cada $\mathscr{U}_n$ preserva cerraduras, y la cerradura de cada elemento de $\mathscr{U}$ intersecta a lo más un elemento de $\mathscr{Y}$, entonces $\mathscr{Y}$ es separable.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$ y cada $Y \in \mathscr{Y}$, se definen dos conjuntos:

$$U_{Y,n} = \bigcup \{U \in \mathscr{U}_n \mid U \cap Y \neq \emptyset\} \text{ y}$$
$$U'_{Y,n} = \bigcup \{U \in \mathscr{U}_n \mid U \cap Y' \neq \emptyset \text{ para algún } Y' \in \mathscr{Y} \text{ con } Y' \neq Y\}.$$

Entonces, cada $Y \in \mathscr{Y}$ define un conjunto abierto

$$V_Y = \bigcup_{n \in \omega} (U_{Y,n} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} \overline{U'}_{Y,j}).$$

Veamos que para $Y \in \mathscr{Y}$, $Y \subseteq V_Y$. Siempre que escojamos un punto $y \in Y$, existe un $U_k \in \mathscr{U}_k$ que tiene al punto y, entonces, se tiene que $U_k \cap Y \neq \emptyset$ por lo que $y \in U_{Y,k}$. Ahora, si $y \in \bigcup_{j=0}^{k} \overline{U'}_{Y,j}$ tenemos que $y \in \overline{U'}_{Y,j}$ para algún $j \in \{0,1,...,k\}$, en otras palabras, $y \in \overline{U}_j \in \mathscr{U}_j$ tal que $U_j \cap Y' \neq \emptyset$ y $Y' \neq Y$ (aquí se hizo uso de que $\mathscr{U}_j$ preserva cerraduras); entonces $\overline{U}_j \cap Y' \neq \emptyset$, y como también $\overline{U}_j \cap Y \neq \emptyset$ (y es un punto común) se llega a una contradicción. Por lo tanto $y \in V_y$ y se tiene lo requerido.

Para finalizar mostraremos que si $G, H \in \mathscr{Y}$ con $G \neq H$, entonces $V_G \cap V_H = \emptyset$. Supongamos que existe un punto $z \in V_G \cap V_H$. Es posible encontrar $k \in \omega$ tal que $z \in U_{G,k}$, luego, $z \in U_k^0$ con $U_k^0 \cap G \neq \emptyset$ para algún $U_k^0 \in \mathscr{U}_k$. Por otro lado, como $z \notin \bigcup_{j=0}^{l} \overline{U'}_{H,l}$ para algún $l \in \omega$ (sin pérdida de generalidad asumimos que $k \leq l$) entonces $z \notin \overline{U}_k$ para todo $U_k \in \mathscr{U}_k$ que cumpla que $U_k \cap Y \neq \emptyset$ con $Y \neq H$; pero $G \neq H$ y $U_k^0 \cap G \neq \emptyset$, lo cual implica que $z \notin \overline{U_k^0}$ que contradice el hecho que $z \in U_k^0$. †

Proposición 3.51. *Si B es un Q-conjunto no numerable, entonces $M(B)$ es un espacio normal.*

Demostración. Del Lema 3.49, es suficiente verificar que los conjuntos $Y \subseteq B$ y $B \setminus Y$ se pueden separar. Puesto que B es Q-conjunto, existen conjuntos cerrados de números reales $\{F_n\}_{n\in\omega}$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ tales que $Y = B \cap \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y $B \setminus Y = B \cap \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Para cada n, dado que $Y \cap G_n = \emptyset$, hay una distancia positiva, digamos d_y, de cada punto en Y al conjunto G_n. Dado $\varepsilon > 0$, formamos la familia $\{U(p,\varepsilon) \mid p \in B \cap G_n\}$. Si se toma $\delta_y = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + d_y^2}$, cada elemento de la familia $\{U(y,\delta_y) \mid y \in Y\}$ es ajeno con $U(p,\varepsilon)$ para cualquier $p \in B \cap G_n$.

Sea $U_n = \bigcup\{U(p,\varepsilon) \mid p \in B \cap G_n\}$. Entonces $B \cap G_n \subseteq U_n$ y $\overline{U}_n \cap Y = \emptyset$. Análogamente, para cada n construimos un conjunto abierto V_n tal que $B \cap F_n \subseteq V_n$ y $\overline{V}_n \cap (B \setminus Y) = \emptyset$. Note entonces que las familias $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{U}_n$, donde

$$\mathscr{U}_n = \begin{cases} \{U_{\frac{n}{2}}\} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{V_{\frac{n-1}{2}}\} & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

y $\mathscr{Y} = \{Y, B \setminus Y\}$ cumplen los requisitos del Lema 3.49. Se tiene que $\mathscr{Y}$ es una familia separable, lo cual, como habíamos dicho, garantiza que $M(B)$ es un espacio normal. †

Escribiremos la Proposición 3.48 y la Proposición 3.51 en un sólo enunciado.

***Teorema* 3.52.** *$M(B)$ es un espacio normal si y sólo si B es un Q-conjunto no numerable.*

No será difícil convencernos de que el espacio $M(B)$ es un espacio de Moore; tal espacio es regular (más aún de Tychonoff, Ejemplo 1.4.5 en [4]), y si tomamos la sucesión $\mathscr{U} = \{\mathscr{U}_n\}_{n\in\omega}$ donde $\mathscr{U}_n = \{U(p, \frac{1}{2^{n+1}}) \mid p \in M(B)\}$, $\mathscr{U}$ es un desarrollo para $M(B)$. Ahora, $M(B)$ es un espacio separable ($D = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap M(B)$ es un subconjunto denso y numerable) y no satisface el segundo axioma de numerabilidad (pues B se ha tomado no numerable), debido al Teorema 1.18, $M(B)$ no es un espacio metrizable.

El párrafo anterior nos da una parte hacia la solución de la NMSC, ya que si encontramos un Q-conjunto no numerable B, el espacio $M(B)$ es un espacio de Moore, normal y no metrizable. La conjetura sería falsa.

Respecto a construir un Q-conjunto no numerable, nos enfrentaremos al siguiente problema. Notar que todos los subconjuntos F_σ, en un espacio segundo numerable, son a lo más $2^{\aleph_0}$; ahora, si tenemos un Q-conjunto de cardinalidad κ, tal conjunto, tiene 2^κ subconjuntos, pero como todo subconjunto de un Q-conjunto es F_σ, se tiene que $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, bajo CH sólo podemos tener Q-conjuntos de cardinalidad a lo más $\aleph_0$.

Ocupemos el Axioma de Martin, introducido en la Página 5. Una prueba del siguiente Teorema la podemos encontrar en [16], Teorema 12; el resultado fue originalmente demostrado por J. Silver.

***Teorema* 3.53.** *Supongamos* $ZFC + MA + \neg CH$*. Si* $X \subseteq \mathbb{R}$ *y* $|X| < 2^{\aleph_0}$*, entonces* X *es un Q-conjunto.*

Por lo tanto, en ZFC+MA+¬CH cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\aleph_0 < |B| < 2^{\aleph_0}$ es un Q-conjunto no numerable. Del Teorema 1.12, concluimos que ¬NMSC, y en particular la negación del enunciado: *“Todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable”*, es consistente con ZFC. Expresaremos concisamente los resultados obtenidos hasta este punto.

***Teorema* 3.54.** *Si* ZFC *es consistente, entonces* $ZFC + \neg NMSC$ *es consistente.*

***Teorema* 3.55.** *Sea* φ *la afirmación “Todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable”. Si* ZFC *es consistente, entonces* $ZFC + \varphi$ *y* $ZFC + \neg\varphi$ *son consistentes, es decir,* φ *es independiente de* ZFC*.*

Como vemos, el Teorema 3.54 proporciona una parte a la solución de la NMSC: no es posible probar NMSC dentro de ZFC. En esta parte comienza la controversia de la NMSC que en gran parte, como veremos, se debe a lo publicado por P. Nyikos en [14].

Nyikos utiliza una afirmación, la cual no escribiremos pues se sale de los propósitos del trabajo, abreviada por la sigla **PMEA**(Product Measure Extension Axiom). La definición de PMEA puede consultarse en [14], Definición 4. El siguiente teorema puede consultarse en [14], Corolario 1.

***Teorema* 3.56.** *Bajo PMEA todo espacio de Moore y normal es metrizable.*

Gran sorpresa, ya que si PMEA es consistente, entonces NMSC será consistente, y por lo tanto independiente de ZFC, de acuerdo con el Teorema 3.54 y el Teorema 3.56. Triste, y desafortunadamente para muchos, para construir un modelo de ZFC+PMEA es necesario suponer la existencia de al menos un número cardinal fuertemente compacto (Teorema 3.4 en [5]). Note que todo cardinal fuertemente compacto es un cardinal fuertemente inaccesible. Este fue el punto donde surgieron varias especulaciones sobre la NMSC, ya que la solución podía darse de las siguientes formas:

(1) si ZFC es consistente, ZFC+NMSC es consistente,

(2) en ZFC, dar un ejemplo “real” de un espacio de Moore y normal que no sea metrizable.

La solución esperada era la opción (1), sin embargo, la gran sorpresa se da con W. G. Fleissner en el año de 1982, quién da la inesperada solución. Él prueba lo siguiente.

***Teorema* 3.57.** *NMSC implica la existencia de un modelo interno de ZFC con un cardinal medible.*

Una demostración del Teorema 3.57 puede ser consultada en [5], Teorema 8.2. Dar la definición de *modelo interno* y de *cardinal medible* queda fuera de tema de nuestro trabajo, pero nos quedamos con las consecuencias que trajo el Teorema de Fleissner; por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, no podemos demostrar la existencia de modelo interno de ZFC, por lo que **la consistencia ZFC+NMSC no se puede demostrar**.

Conclusiones

La presente tesis está desarrollada en el área de Topología General, particularmente, tiene el fin de proporcionar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable, lo que se le llama *criterios de metrizabilidad de espacios topológicos*.

Se presentaron las pruebas de los teoremas clásicos de metrización; como lo son los criterios de: Nagata-Smirnov (Teorema 2.8), Bing (Teorema 2.10 y Teorema 2.9), Moore (Teorema 2.11), y Alexandroff-Urysohn (Teorema 2.12 y Teorema 2.13).

Se estudiaron las siguientes clases de espacios métricos generalizados: los espacios con diagonal G_δ, espacios $w\Delta$, p-espacios, y los espacios estratificados. En estas clases se logro dar los criterios de metrización que corresponden a los Teoremas 3.1, 3.4, 3.7, 3.8, y 3.24.

Finalmente, hemos dado un esquema sobre la solución de la conjetura planteada por F. Jones *¿todo espacio normal de Moore es metrizable?* cuyo problema se mantuvo abierto cerca de cincuenta años.

Resta decir que se han escrito detalladamente todas las demostraciones presentadas, siendo este un medio más accesible a los criterios de metrización de espacios topológicos.

Bibliografía

[1] Arhangel'skiĭ A., *On a class of spaces containing all metric spaces and all locally compact spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) vol 92, pp. 1-39, 1970.

[2] Burke D., *Covering properties*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunnen and J. Vaughan, eds., North-Holland, Amsterdam, ISBN 0444 86580 2, pp. 347-422, 1984.

[3] Díaz, J; Ibarra M., *Introducción a los espacios emplumados*, Topología y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos BUAP, ISBN 978 698 595 265 2, pp. 45-88, 2013.

[4] Engelking R.,*General topology*, Heldermann Verlag Berlin, ISBN 3 88538 006 4, 1989.

[5] Fleissner W., *The normal Moore space conjecture and large cardinals*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunnen and J. Vaughan, eds., North-Holland, Amsterdam, ISBN 0444 86580 2, pp. 733-780, 1984.

[6] Gruenhage G., *Generalized metric spaces*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunnen and J. Vaughan, eds., North-Holland, Amsterdam, ISBN 0444 86580 2, pp. 423-501, 1984.

[7] Hernandez F., *Teoría de conjuntos, una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN 970-32-1392-8, 2003.

[8] Ibarra M; Martínez A., *Metrización de espacios topológicos compactos*, Topología y sus Aplicaciones 1, Textos Científicos BUAP, ISBN 978 607 487 388 7, pp. 85-97, 2012.

[9] Jones F., *Concerning normal and completely normal spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, pp. 671-677, 1937.

[10] Katětov M., *Complete normality of cartesian products*, Fund. Math., 35, pp. 271-274, 1948.

[11] Kunen K., *Set theory. An introduction to independence proofs*, North Holland, ISBN 0 444 86839 9, 1980.

[12] Mrówka S., *On completely regular spaces* , Fund. Math., 41, pp. 105–106, 1954.

[13] Nyikos P., *A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal*, Topology Proc., 2, pp. 359-363, 1977.

[14] Nyikos P., *A provisional solution to the normal Moore space problem*, Proc. Amer. Math. Soc., 78, pp. 429-435, 1980.

[15] Romero O., *Metrización de espacios topológicos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 1993.

[16] Rudin M., *Martin's axiom*, Handbook of Mathematical Logic, J. Barwise, ed., North-Holland Pub. Co., IBSN 0 7204 2285 X, pp. 491-502, 1977.

[17] Tall F., *Normality versus collectionwise normality*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunnen and J. Vaughan, eds., North-Holland, Amsterdam, ISBN 0444 86580 2, pp. 685-732, 1984.

[18] Willard S.,*General topology*, Dover Publications, ISBN 0 486 43479 6, Inc., 2004.

Índice alfabético