



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**IDONEIDAD EPISTÉMICA DEL CONTENIDO EDUCATIVO
DE PROPORCIONALIDAD EN LIBROS DE TEXTO: UNA
PROPUESTA DE DISEÑO DE TAREAS**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. KAROL MAYRENI MARTÍNEZ MELÉNDEZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIZZET MORALES GARCIA

PUEBLA, PUE.

FEBRERO 2026



Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C:

LIC. KAROL MAYRENI MARTÍNEZ MELÉNDEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 27 de octubre de 2025, con la tesis titulada:

“IDONEIDAD EPISTÉMICA DEL CONTENIDO EDUCATIVO DE PROPORCIONALIDAD EN LIBROS DE TEXTO: UNA PROPUESTA DE DISEÑO DE TAREAS”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

Atentamente
H. Puebla de Z., 10 de febrero de 2026.


Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.



AGRADECIMIENTOS A SECIHTI

Agradezco y expreso mi gratitud a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo brindado por medio de una beca que me ha permitido concretar mis estudios de posgrado y la culminación de esta tesis de maestría.

No. CVU 1340134

AGRADECIMIENTOS

Quisiera dar gracias a Dios por todo lo que me ha dado, a mi mamá Juana y mi tía Ofelia por siempre apoyarme, a mi hermanita Brenda por todos sus consejos, a mi papá Ismael por estar conmigo y permitirme ser su hija, a Jonathan por animarme y alentarme a superarme profesionalmente.

Agradezco a mi directora, Dra. Lizzet Morales Garcia por compartirme su conocimiento, asimismo por todo el apoyo, comprensión, paciencia y motivación que recibí para poder lograr esta investigación. Expreso mi gratitud a la Dra. Estela, al Dr. José Antonio, al Dr. Jhonatan y al Mtro. Francisco por las observaciones y recomendaciones durante el desarrollo de este estudio.

Muchas gracias.

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo general diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria. En ese sentido, se tomaron como elementos teóricos y metodológicos dentro del EOS (Enfoque Ontosemiótico) tales como la configuración y la idoneidad epistémica, el modelo teórico de Burgos et al. (2024) y la GALT-Proporcionalidad. Como parte de la metodología se revisaron los planes de estudios vigentes (2024-2025) titulado Programa de Estudios para la Educación Secundaria: Programa sintético de la fase 6 por parte de la SEP (2024a), donde se identificaron los contenidos y procesos de desarrollo de aprendizajes correspondientes al tema de proporcionalidad. Luego, para el diseño de tareas se contempló un modelo teórico visto desde el EOS que involucra los objetos primarios de la configuración epistémica y los elementos de Malaspina (2017), en donde el análisis de estos objetos y elementos permitieron identificar el estado de las tareas. Además, se consideró utilizar los indicadores de idoneidad epistémica (GALT-Proporcionalidad) que ayuda a valorar contenidos exclusivos de proporcionalidad. En línea con lo anterior, se halló que las tareas originales no proponen el planteamiento de nuevas tareas por parte de los estudiantes, así como la discusión y la argumentación. Por otro lado, las tareas de las lecciones analizadas tienden a centrarse en el significado aritmético asociado a la proporcionalidad. Por lo cual, considerando la valoración y el análisis se diseñaron nuevas tareas.

Palabras claves: Diseño de tareas, Proporcionalidad, Idoneidad epistémica, GALT-Proporcionalidad.

ABSTRACT

The overall objective of this research was to design tasks considering the assessment of the epistemic suitability of the treatment of proportionality in Mexican secondary school textbooks. In this regard, theoretical and methodological elements within the OSA (Ontosemiotic Approach) were taken into account, such as configuration and epistemic suitability, the theoretical model of Burgos et al. (2024), and GALT-Proportionality. As part of the methodology, the current curricula (2024-2025) entitled Study Program for Secondary Education: Synthetic Program for Phase 6 by the SEP (2024a) were reviewed, where the contents and learning development processes corresponding to the topic of proportionality were identified. Then, for the design of tasks, a theoretical model was considered from the EOS perspective that involves the primary objects of the epistemic configuration and the elements of Malaspina (2017), where the analysis of these objects and elements allowed the status of the tasks to be identified. In addition, the use of epistemic suitability indicators (GALT-Proportionality) was considered, which helps to assess content exclusive to proportionality. In line with the above, it was found that the original tasks did not encourage students to propose new tasks or engage in discussion and argumentation. On the other hand, the tasks in the lessons analyzed tended to focus on the arithmetic meaning associated with proportionality. Therefore, based on the assessment and analysis, new tasks were designed.

Keywords: Task design, Proportionality, Epistemic suitability, GALT-Proportionality.

INTRODUCCIÓN GENERAL

Los libros de texto son tomados en cuenta como el medio principal por parte de profesores para llevar a cabo el plan escolar. Además, las investigaciones acerca de libros de texto han logrado un avance contemplando temas tales como el papel en la enseñanza-aprendizaje, el uso por parte de los profesores, entre otros (Burgos et al., 2020b). Por otro lado, el análisis de libros de texto permite diferentes oportunidades de investigación (Castillo et al., 2022b).

En ese sentido, una lección de un libro de texto es posible percibirlo como un proceso de enseñanza que posibilita utilizar herramientas del Enfoque Ontosemiótico para la valoración de la idoneidad didáctica de tal proceso (Castillo et al., 2022c). Por otra parte, la creación de problemas tiene un papel esencial en el aprendizaje de las matemáticas dado que incitan la creatividad y da apertura a reflexiones o consideraciones de carácter didáctico (Malaspina, 2021).

En específico, el contenido matemático de proporcionalidad es importante en los programas de estudios de primaria y secundaria, puesto que este usualmente no recibe un tratamiento apropiado en los libros de texto. La mayor parte reconoce una marcada influencia del aprendizaje memorístico de rutinas, la cual contribuye a obstaculizar la argumentación acerca de las condiciones que facilitan emplear procedimientos como la regla de tres al solucionar un problema-situación, dificultando el desarrollo apropiado de un razonamiento proporcional (Castillo y Burgos, 2022b).

En atención a este contenido, de acuerdo con (Secretaría de Educación Pública de Baja California Sur, 2019) la prueba nacional Planea Secundaria 2019 correspondiente al tercer grado, evaluó tres ejes temáticos, en el eje *manejo de la información* se incluyeron siete reactivos en la unidad de análisis Proporcionalidad y funciones. En particular, el estado de Baja California Sur reportó que el total de las instituciones que participaron el 57.14% obtuvieron alrededor del 0% y el 40% de soluciones acertadas, mientras que el 42.86% de las instituciones lograron obtener entre un 41% y el 100% de respuesta correctas. En la prueba participaron:

Secundarias generales. El 71.42% de escuelas obtuvieron entre el 0% y el 40% de respuestas correctas, mientras que el 28.58% se posicionó entre el 41% y el 100% de soluciones acertadas.

Secundarias técnicas. El 57.14% de escuelas alcanzaron entre el 0% y el 40% de respuestas correctas, mientras que el 42.86% logró entre el 41% y el 100%.

Telesecundarias. El 71.42% de escuelas consiguieron entre el 0% y el 40% de aciertos, mientras que el 28.57% lograron entre el 41% y el 100%.

Secundarias particulares. El 42.85 de escuelas reportaron que alcanzaron entre el 0% y el 40%, mientras que el 57.15% lograron entre el 41% y el 100%.

Estos resultados muestran que más de la mitad de los estudiantes de las secundarias presentaron dificultades en la prueba, evidenciando el bajo desempeño obtenido en este contenido.

Esta investigación tuvo como objetivo general diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria. La investigación está organizada en cinco capítulos.

En el capítulo 1, se realizó una revisión de literatura para conocer el estado actual de las investigaciones acerca del análisis de tareas de proporcionalidad en libros de texto. Con ello, se estableció la problemática, y posteriormente se planteó el problema, la pregunta y el objetivo de investigación. En el capítulo 2, se presentó EOS como el enfoque teórico que sustenta la investigación, específicamente se describe la idoneidad epistémica, la configuración epistémica, indicadores de idoneidad epistémica propuestos en la GALT-Proporcionalidad (Castillo y Burgos, 2022b) y el modelo teórico de Burgos et al. (2024). En el capítulo 3, se describió la metodología utilizada, como parte de ella se realizó una revisión a los planes de estudio, la identificación de las tareas en los libros de texto y la descripción sobre el proceso de valoración de la idoneidad epistémica. En el capítulo 4, se abordó el análisis y los resultados obtenidos, en donde se presentó la valoración epistémica, el proceso y propuesta de diseño de las tareas. Por último, en el capítulo 5 se presentaron las conclusiones, así como las principales implicaciones que deja esta investigación

Índice

CAPÍTULO 1	1
Problemática, problema y objetivo de investigación.....	1
Introducción.....	1
1.1 Revisión de literatura.....	1
1.1.1 Criterios de inclusión y exclusión	1
1.1.2 Gráficos de los artículos identificados	8
1.1.3 Tendencias en las investigaciones identificadas.....	10
1.1.4 Investigaciones sobre análisis e intervención formativa	15
1.1.5 Investigaciones sobre propuestas teóricas	17
1.1.6 Investigaciones sobre idoneidad didáctica	18
1.1.7 Investigaciones sobre análisis de contenido y didáctico	19
1.2 Planteamiento del problema	20
1.2.1 Pregunta general	21
1.2.2 Preguntas específicas.....	21
1.3 Objetivos de investigación	21
1.3.1 Objetivo general	21
1.3.2 Objetivos específicos.....	22
1.4 Justificación.....	22
1.5 Viabilidad	23
CAPÍTULO 2	24
Marco teórico.....	24
2.1 Enfoque Ontosemiótico	24
2.1.1 Significado de objeto y práctica matemática.....	24
2.1.2 Idoneidad didáctica.....	27
2.1.3 Configuración epistémica.....	30
2.1.4 Componentes e indicadores de idoneidad epistémica	32
2.2 Modelo para la creación de problemas	43
2.2.1 Tarea	47
CAPÍTULO 3. Metodología	49
3.1 Revisión de planes y programas de estudio SEP (2024-2025).....	49

3.2 Identificación de tareas	50
3.3 Proceso de diseño de tareas	51
CAPÍTULO 4. Análisis y resultados	53
4.1 Libro Saberes y pensamiento científico primer grado.....	54
4.1.1 Identificación de objetos primarios y elementos de Malaspina.....	57
4.1.2 Valoración de la idoneidad epistémica.....	64
4.1.3 Diseño de las tareas del libro de primer grado	68
4.2 Libro segundo grado pensamiento y saberes científicos	98
4.2.1 Identificación de objetos primarios y elementos de Malaspina.....	98
4.2.2 Valoración de la idoneidad epistémica.....	103
4.2.3 Diseño de las tareas del libro de segundo grado.....	108
4.3 Libro tercer grado saberes y pensamiento científico	122
4.3.1 Identificación de los objetos primarios y elementos de Malaspina	123
4.3.2 Valoración de la idoneidad epistémica.....	129
4.3.3 Diseño de las tareas del libro de tercer grado.....	134
CAPÍTULO 5. Conclusiones y reflexiones	147
Referencias	154
Anexos.....	160

Índice de tablas

Tabla 1	Criterios de inclusión o exclusión de artículos de investigación.....	2
Tabla 2	Investigaciones sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto.....	5
Tabla 3	Descripción de cada categoría encontrada en las investigaciones sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto.....	11
Tabla 4	Categorías identificadas en las investigaciones del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto	12
Tabla 5	Componentes e indicadores generales de idoneidad epistémica	32
Tabla 6	Extracto de contenidos y procesos de desarrollo de aprendizajes del campo formativos en relación con la proporcionalidad	50
Tabla 7	Contenido de proporcionalidad en el libro saberes y pensamiento científico	50
Tabla 8	Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)	57
Tabla 9	Identificación de indicadores en T1.....	64
Tabla 10	Indicadores considerados en T1	75
Tabla 11	Indicadores considerados en T2	80
Tabla 12	Indicadores considerados en T3	87
Tabla 13	Indicadores considerados en T4	92
Tabla 14	Indicadores considerados en T5	97
Tabla 15	Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)	99
Tabla 16	Identificación de indicadores en el libro de segundo grado	104
Tabla 17	Indicadores considerados en T6	113
Tabla 18	Indicadores considerados en T7	117
Tabla 19	Indicadores considerados en T8	122
Tabla 20	Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)	123
Tabla 21	Identificación de indicadores en el libro de tercer grado.....	129
Tabla 22	Indicadores considerados en T9	137
Tabla 23	Indicadores considerados en T10	139
Tabla 24	Indicadores considerados en T11	143
Tabla 25	Indicadores considerados en T12	146

CAPÍTULO 1

Problemática, problema y objetivo de investigación

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Martínez-Meléndez, K. M., Morales-García, L., y Juárez-López, J. A. (2025). Revisión sistemática acerca de la proporcionalidad en libros de texto. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 17(1), 3–16. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i1.177>

Introducción

En este capítulo se presenta una revisión de literatura en el que se muestran las principales tendencias de las investigaciones que involucran el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto de matemáticas. Con lo anterior, se plantea el problema, la pregunta y los objetivos de investigación.

1.1 Revisión de literatura

A continuación, se muestran los criterios de inclusión y exclusión que guiaron la búsqueda de artículos, a partir de ello se identificaron las tendencias de investigación. Asimismo, se presenta una revisión de las investigaciones identificadas, es decir, se analizó y sintetizó la principal información que se encontró en cada artículo.

1.1.1 Criterios de inclusión y exclusión

La revisión sistemática es eficiente en numerosos elementos críticos, puesto que consigue facilitar un resumen de la situación del conocimiento de un campo, y con ello distinguir futuras tendencias de investigación, afrontar preguntas que no lograban ser contestadas en estudios particulares, reconocer problemas en investigaciones iniciales que necesitan ser perfeccionadas y crear o evaluar teorías del por qué o el cómo suceden hechos o acontecimientos que generan interés (Matthew et al., 2021).

La declaración PRISMA 2020 se creó esencialmente para revisiones sistemáticas de investigaciones que conciernen al área de la salud, no obstante, los ítems de la lista de verificación y el diagrama de flujo del PRISMA 2020 son adaptables en intervenciones educativas o sociales.

Tener noción del PRISMA 2020 es beneficioso y práctico en el momento de organizar y efectuar revisiones sistemáticas para avalar que se logre conseguir toda la información, se integra una lista de verificación para resúmenes estructurados de revisiones sistemáticas que aparecen en congresos y revistas (Matthew et al., 2021).

En línea con lo anterior, Matthew et al. (2021) establece que la lista de verificación para resúmenes estructurados está constituida por:

Título: Se identifica el artículo, memoria o informe como una revisión sistemática.

Antecedentes: Se aborda los objetivos o preguntas.

Métodos: Se define los criterios de elegibilidad, así como las referencias, es decir, las bases de datos o revistas que se usaron para su obtención, métodos empleados para evaluar el posible sesgo de las investigaciones, métodos recurridos para la síntesis de resultados.

Resultados: El número de estudios incluidos y un resumen de resultados.

Discusión: Resumen de las limitaciones de lo obtenido y un análisis general de los resultados.

Otros: Puntualizar la financiación y el registro del estudio.

En esta investigación se realizó una revisión sistemática del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto utilizando la declaración PRISMA 2020. Para evitar un posible sesgo de las investigaciones se incluyeron únicamente artículos científicos, puesto que están sometidos a una revisión por pares o arbitraje que avalan su calidad. Para la búsqueda y selección de artículos de investigación se siguieron las siguientes fases: identificación, selección, elegibilidad e inclusión. Lo anterior, considerando los siguientes criterios de inclusión y exclusión de artículos (Tabla 1).

Tabla 1

Criterios de inclusión o exclusión de artículos de investigación

Inclusión	Exclusión
El artículo está en acceso libre	Es un acta de congreso o capítulo de libro.

El artículo fue publicado en el periodo de tiempo de 2015 – 2023	El foco principal no es el análisis del tratamiento de la proporcionalidad en un libro de texto de matemáticas.
Proporcionalidad y/o libros de texto aparecen como palabras clave.	El foco principal no es la proporcionalidad.

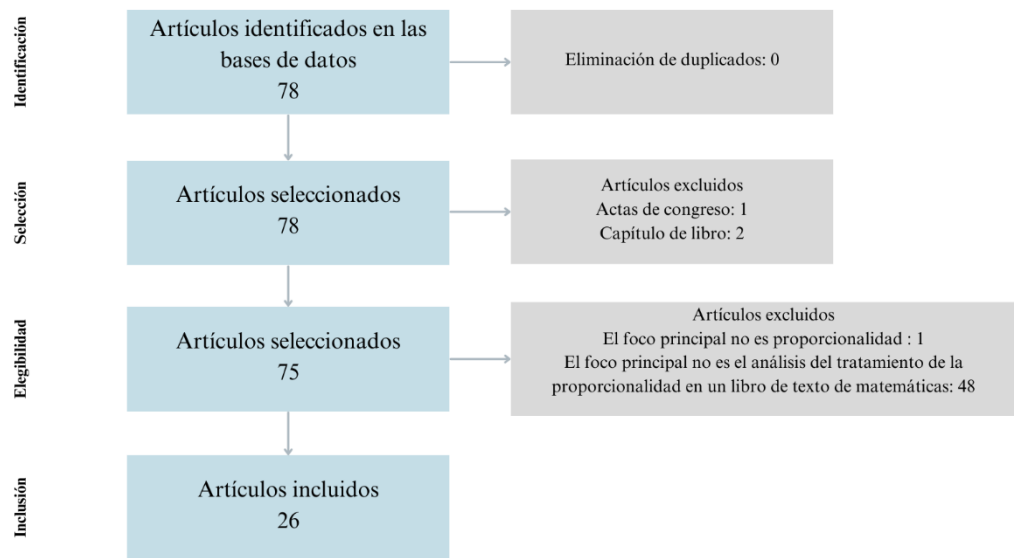
Nota. Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 4).

El objetivo de la revisión sistemática es responder las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el objetivo de las investigaciones? ¿Qué elementos teóricos y metodológicos se utilizan? ¿Qué contenidos o conceptos matemáticos sobre proporcionalidad se han abordado? ¿Cuál es el nivel educativo en el que se centran las investigaciones?

A continuación, en la Figura 1 se describe cada fase de la revisión sistemática.

Figura 1

Proceso de búsqueda, revisión, selección e inclusión de los artículos de investigación



Nota. Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 5).

A continuación, se presentan las actividades realizadas en cada fase.

Identificación. En esta fase se realizó una *búsqueda* de artículos de investigación publicados de 2010 a 2023 en bases de datos como ERIC (9), EBSCO (1), SciELO (11), SpringerLink (11) y Taylor & Francis (3), repositorios como FUNES (3), Google Académico (22), ResearchGate (9), números temáticos del EOS (8), Dialnet (1) y la búsqueda directa en revistas de Educación Matemática como por ejemplo Avances de Investigación en Educación Matemática, EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, Educational Studies in Mathematics y Revista de Ensino de Ciências e Matemática. En cada caso se utilizaron las siguientes palabras clave: *proporcionalidad, libros de texto, Enfoque Ontosemiótico (EOS) y formación de profesores, proportionality, textbooks, Ontosemiotic Approach and teacher education*. Con lo anterior, se identificaron un total de 78 artículos de investigación.

Selección. En esta fase se revisó que no hubiera investigaciones duplicadas de los cuales no se encontraron, posteriormente después de la lectura del título, el resumen y las palabras clave, se eliminaron actas de congreso (1), capítulos de libro (2).

Elegibilidad. En esta fase, después de haber leído detalladamente cada uno de los artículos se descartaron aquellos dónde, el foco de interés no era exclusivamente el tratamiento del concepto de proporcionalidad (1) y el foco principal no es el análisis del tratamiento de la proporcionalidad en un libro de texto de matemáticas (48) por lo cual en esta fase se excluyeron un total de 49 artículos.

Inclusión. Se incluyeron al final 26 artículos de investigación como parte de los antecedentes, los cuales se organizaron en un archivo de Excel, donde a cada investigación se les asignó un código de identificación, título, objetivo, año, revista, concepto o contenido, palabras clave, nivel educativo, elementos teóricos y metodológicos, número de lecciones analizadas y país (Figura 2).

Figura 2

Tabla de Excel con información de las investigaciones incluidas

Código	Título	Año	Revista	Número	Contenido	Palabras clave	Nivel educativo
A1	Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad: implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria	2020	AIEM	SI	Proporcionalidad	Proporcionalidad; significados pragmáticos; configuración ontosemiótica; diseño curricular; niveles de algebraización.	Primaria 3 ciclo, secundaria 1
A4	Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico	2020	Bolema	SI	Proporcionalidad	Análisis didáctico. Libro de texto. Enfoque ontosemiótico. Idoneidad didáctica.	Sexto curso de primaria
A5	Análisis didáctico en la formación de se describe el diseño e implementación de una experiencia	2023	Revista	No	Proporcionalidad	Formación de	Primaria

Nota. Obtenido de Martínez-Meléndez et al (2025, p. 6).

En la Tabla 2 se presentan las investigaciones organizadas por año, así como el código asignado. Por ejemplo, A4 se entenderá como Artículo 4 que hace referencia al estudio de Burgos y Godino (2020a).

Tabla 2

Investigaciones sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto

Código	Referencia de la investigación
A1	Martínez, S., Muñoz, J. y Oller, A. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. <i>Avances de Investigación en Educación Matemática</i> , (8), 95-115.
A2	Aroza, C., Godino, J. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. <i>Avances en Investigación e Innovación – Revista de Educación Secundaria</i> , 6(1), 1-29.
A3	Martínez, S., Muñoz, J., Oller, A. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. <i>Revista</i>

- Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 95-122.
<https://doi.org/10.12802/relime.17.2014>
- A4 Burgos, M. y Godino, J. (2020a). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad: Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 1-20.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- A5 Burgos, M., Castillo, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40-68. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- A6 Burgos, M. & Godino, J. (2020b). Semiotic conflicts in the learning of proportionality: Analysis of a teaching experience in primary education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), 1-18.
<https://doi.org/10.29333/iejme/7943>
- A7 Burgos, M. & Godino, J. (2020c). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problema. *Mathematics Education Research Journal*, (34), 269-291.
<https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9>
- A8 Ibáñez, C. y Martínez, S. (2020). Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4.º de ESO. *SUMA*, (95), 51-58.
- A9 Burgos, M. & Godino, J. (2021a). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (20), 367-389.
<https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0>
- A10 Luque, K. y Ibarra, S. (2021). El papel de las pruebas escritas en la evaluación de los aprendizajes sobre el tema de proporcionalidad. *SahuarUS*, 5(1), 64-80.
- A11 Burgos, M. & Godino, J. (2021b). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of students' solutions to proportionality tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43, 347-376.
<https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>

- A12 Castillo, M., Burgos, M. & Godino, J. (2021). Prospective high school mathematics teachers' assessment of the epistemic suitability of a proportionality textbook lesson. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 23(4), 169-206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
- A13 Vega, B. (2021). La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto. *Revista De Educación Matemática*, Número especial, 1-13.
- A14 Burgos, M. & Castillo, M. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: The case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(4), 165-191.
- A15 Burgos, M. y Castillo, M. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de libro de texto sobre proporcionalidad por parte de maestros en formación. *Revemop*, 4, 1-25. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>
- A16 Castillo, M. & Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analyzing textbooks lessons. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), 1-16. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
- A17 Castillo, M. y Burgos, M. (2022b). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 555-579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>
- A18 Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, 34(2), 39-71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>
- A19 Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022b). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-19. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
- A20 Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022c). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, 1-19. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787esp>

- A21 Azzahra, N., Herman, T., & Dasari, D. (2022). Analysis of inverse proportion in mathematics textbook based on praxeological theory. *Jurnal analisa*, 8(2), 152-167.
- A22 Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2023a). Análisis didáctico en la formación de maestros basado en las herramientas del enfoque ontosemiótico. El caso de lecciones de proporcionalidad. *Revista Interuniversitaria de Formación de Formación del Profesorado*, 98(37.2), 11-34.
<https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99050>
- A23 Castillo, M. y Burgos, M. (2023). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, 17(2), 171-199. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.24089>
- A24 Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia*, 37(1), 254-277.
<http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14>
- A25 Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2023b). Análisis de lecciones de libros de texto basado en las herramientas del enfoque ontosemiótico: Una experiencia con maestros en formación. *Revista Paradigma*, XLIV, 34-58.
- A26 Burgos, M. & Castillo, M. (2023). Competence of analysis and reflection on the management of textbook lessons by pre-Service teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 23(1), 1-17. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7274>

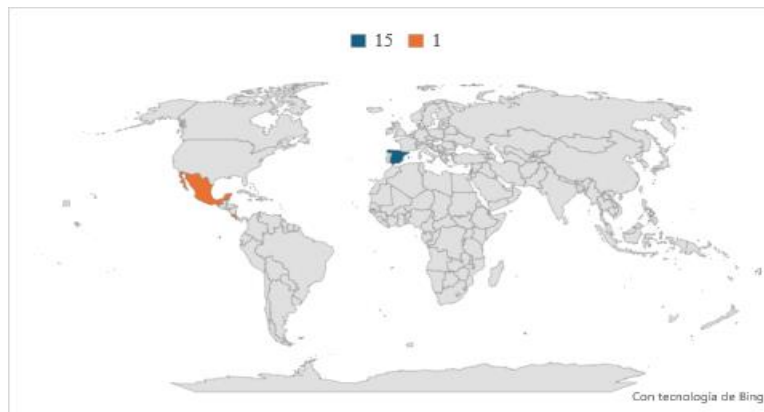
Nota. Elaboración propia.

1.1.2 Gráficos de los artículos identificados

Para la síntesis de resultados se presenta en la Figura 3 un mapa donde se muestra la procedencia de donde fueron realizadas las investigaciones. Así como en la Figura 4 un gráfico de barras donde se observa las investigaciones que se han realizado del tratamiento de la proporcionalidad. Además, en la Figura 5 se muestra una nube con las palabras claves de los artículos que se incluyeron.

Figura 3

Investigaciones que se han realizado del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto



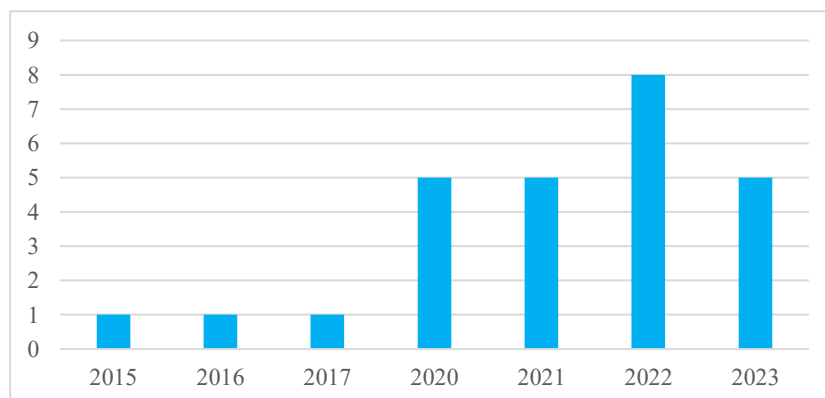
Nota 1. La figura muestra solamente 16 investigaciones de las 26 que se incluyeron, dado que solamente se muestra aquellas investigaciones que especificaba el país donde fue aplicado el estudio o el país de origen del libro a analizar.

Nota 2. Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 7).

En la Figura 3, se observa que la mayoría de las investigaciones se realizaron en España, con un total de 15 artículos específicamente del grupo de investigadores de Burgos y Castillo. Mientras que, en México y Costa Rica se identificó solamente una estudio realizado.

Figura 4

Años de publicación de investigaciones sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto



Fuente: Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 8).

Figura 5



Fuente: Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 8).

1.1.3 Tendencias en las investigaciones identificadas

establecieron categorías que informan sobre las distintas líneas de investigación. La Tabla 3 contiene la descripción de cada categoría.

Tabla 3

Descripción de cada categoría encontrada en las investigaciones sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto

Categoría	Descripción	Número de artículos
Análisis e intervención formativa	La característica principal que posee esta categoría es que se encuentran artículos donde se aborda una intervención o acción formativa en profesores en formación ya sea en Educación Primaria o Secundaria.	13
Propuestas teóricas	Se encuentran artículos que tienen como objetivo presentar una propuesta, una metodología, un modelo o una guía para el análisis de tareas, a partir de elementos teóricos como ingeniería o idoneidad didáctica.	3
Ideoneidad didáctica	Se incluyen las investigaciones que utilizan indicadores de idoneidad didáctica para la valoración de tareas. Considerando elementos teóricos como la configuración epistémica.	5
Análisis de contenido y didáctico	Se encuentran investigaciones que tratan el análisis de tareas de proporcionalidad, como, por ejemplo, el análisis de contenido donde interesó la estructura conceptual, fenomenología y sistemas de representación, así como el uso de praxeologías y clasificaciones de acuerdo con el contenido y análisis didáctico.	5

Nota. Obtenido de Martínez-Meléndez et al. (2025, p. 10).

Se evidencia que la tendencia de las investigaciones pertenece al *Análisis e intervención formativa* con un total de 16 artículos, siendo más de la mitad de los artículos incluidos en esta investigación.

En la Tabla 4 se muestra la categoría, el código y objetivo de cada artículo.

Tabla 4

Categorías identificadas en las investigaciones del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto

Categoría	Código	Objetivo
Análisis e intervención formativa	A22	Describir el diseño e implementación de una práctica o experiencia con estudiantes, específicamente en el desarrollo de la competencia de análisis y una acción formativa mediante el análisis de libros de texto.
	A14	Se describe el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa, enfocado al desarrollo de la competencia reflexiva mediante el análisis de la idoneidad didáctica sobre proporcionalidad directa.
	A15	Diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros maestros de primaria enfocada a la identificación de dificultades de aprendizaje mediante el análisis de libros de texto de proporcionalidad.
	A16	Describe y analiza la implementación de una acción formativa que tiene como finalidad promover competencia reflexiva en futuros docentes mediante del análisis de la idoneidad didáctica en libros de texto.
	A23	Se describe el diseño e implementación de una acción formativa con futuros maestros, orientada a promover su competencia reflexiva y establecer relación con los conocimientos del contenido de proporcionalidad. Se propone a los estudiantes el análisis de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre proporcionalidad.
	A6	Analizar el resultado de una experiencia diseñada e implementada para estimar las dificultades epistémicas y cognitivos que se hallaron en el estudio de proporcionalidad.

	A9	Analizar, promover, y evaluar el desarrollo profesional de futuros profesores de matemáticas en conocimientos pedagógicos y matemáticos relacionados con el razonamiento proporcional.
	A7	Promover y evaluar la competencia de los futuros profesores para el análisis cognitivo de las soluciones de los estudiantes a tareas de proporcionalidad.
	A24	Describimos el diseño, implementación y resultados de un programa formativo de una acción formativa orientada a desarrollar la competencia de los futuros maestros en el análisis de las dificultades que aparecen en la resolución de las tareas de proporcionalidad.
	A25	Describir y analizar una acción formativa con futuros docentes, orientada a desarrollar la competencia para elaborar problemas de proporcionalidad de acuerdo con el cambio de un problema inicial y la creación a partir de un requisito didáctico-matemático
	A12	Se describe mediante un estudio de caso, el diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa para desarrollar en futuros maestros su competencia para el análisis didáctico de una lección de libro de texto, la identificación de defectos y la toma de decisiones para su avance y su uso.
	A26	Se describe y analiza una acción formativa con futuros profesores, orientada a desarrollar su competencia de análisis de idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto de matemáticas.
	A4	Se propone un modelo para la categorización de los significados de la proporcionalidad de acuerdo con los niveles de algebrización conforme el grado de generalidad de los objetos involucrados, lenguajes y algoritmos matemáticos que se usaron con los objetos.
	A18	Informar a los futuros profesores una metodología para analizar la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto de matemáticas.
Propuestas teóricas	A20	Creación de una guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas empleando la teoría de la idoneidad didáctica y la distinción de sus componentes, subcomponentes e indicadores.

Idoneidad didáctica	A5	Análisis de lecciones es un medio para que los profesores en formación identifiquen las dificultades de aprendizaje de los objetos involucrados en el contenido matemático que es proporcionalidad.
	A17	Se describen y analizan las reflexiones que realizan profesores en formación acerca del grado de adaptación de una lección de libro de texto de proporcionalidad, su utilización y la modificación para incrementar la idoneidad didáctica del proceso instruccional llevado a cabo.
	A19	Elaborar indicadores de idoneidad didáctica de proporcionalidad, que sirvan de apoyo para el análisis y valoración de lecciones de libros de texto, y como recurso para la reflexión de los profesores sobre procesos de instrucción.
	A10	Describir el grado de representatividad de los elementos del significado evaluado sobre la proporcionalidad, que se manifiestan en las pruebas escritas propuestas por profesores de secundaria, con respecto a los restantes significados institucionales.
	A2	Se describe el diseño e implementación de una experiencia con estudiantes del Grado de Educación Primaria, centrada en el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica por medio del análisis de lecciones de libros de texto. Analizar la calidad de los libros según su capacidad para ayudar al alumnado a lograr los objetivos de aprendizaje, supone un primer análisis profundo que contemple la secuencia de prácticas operativas, discursivas y normativas que propone el autor para el desarrollo del contenido matemático y cómo se contemplan y gestionan los conocimientos previos requeridos.
Análisis de contenido y didáctico	A8	Identificar posibles carencias en los procesos de enseñanza-aprendizaje que pudieran proceder del uso literal de los libros de texto, para que los profesores en formación puedan estar conscientes de las carencias y procuren solucionar al llevar a cabo de dichas carencias e intentar solventarlas al implementar propuestas de enseñanza de la proporcionalidad.

- A1 Análisis del tratamiento obtenido por la PC en distintos libros de textos españoles durante la etapa de Educación Secundaria Obligatoria y mediante las últimas leyes educativas vigentes.
 - A3 Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta y magnitudes que se presentan en libros de texto españoles. El análisis pretende caracterizar la enseñanza que se lleva a cabo, identificando posibles carencias que proporcionen posibles mejoras en la enseñanza de la proporcionalidad.
 - A13 Se describe una experiencia de iniciación a la investigación y la innovación educativa realizada en el marco del Máster de Profesorado de Educación Secundaria, centrada en el análisis de una experiencia de enseñanza sobre la proporcionalidad, realizada durante la fase de prácticas por el primer autor y aplicando como herramienta teórica de apoyo para la reflexión la noción de idoneidad didáctica.
 - A21 Analizar los libros de texto sobre la proporción inversa, que es uno de los materiales esenciales en matemáticas en términos de teoría praxeológica.
-

1.1.4 Investigaciones sobre análisis e intervención formativa

En este apartado se presentan los antecedentes acerca de las investigaciones del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto, específicamente los estudios que tratan sobre intervenciones o acciones formativas.

En Burgos y Godino (2020b) se hace mención que los profesores acostumbran a recurrir al uso de la regla de tres en situaciones de proporcionalidad, sin considerar su propiedad, sin generar el desarrollo del entendimiento conceptual, esto se ve consolidado por la perspectiva que se da a la proporcionalidad en los libros de texto.

Además, se ha evidenciado que los profesores en formación mejoran su competencia para entender el desempeño de los alumnos, por lo cual tomaron conciencia sobre las distintas estrategias de soluciones, se destaca que las competencias de los profesores para considerar adecuadamente las

dificultades de las tareas son por causa de los conceptos matemáticos que se genera parte del plan educativo, los conocimientos previos y el contexto de la tarea (Burgos y Godino, 2020).

Es necesario diseñar e implementar acciones formativas que permitan caracterizar y fomentar el desarrollo del conocimiento y capacidades profesionales de los profesores (Burgos y Godino, 2021). En específico, los futuros profesores se enfrentan a interpretar soluciones de los estudiantes de primaria cuando solucionan tareas de proporcionalidad, la preparación del profesor necesita tener en consideración el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemático acerca de la proporcionalidad en el momento de diseñar e implementar las acciones formativas específicas (Burgos y Godino, 2022b).

En particular, cuando los docentes novatos emplean materiales curriculares para la planeación de procesos instruccionales, usualmente ignoran las debilidades del contenido matemático de los textos, no efectúan modificaciones en los recursos. Además, analizar los libros de texto se sustentan en sus principios y tienden a tener un punto de vista intuitivo y holístico para relacionarse con los recursos en lugar de una perspectiva analítica (Castillo et al., 2021).

Asimismo, Burgos y Castillo (2022b) mencionan que los libros de texto no están exentos de contener errores en el contenido, se considera que un docente competente tenga una perspectiva crítica que permita identificar carencias que se encuentren en el proceso instruccional propuesto en el libro de texto, por lo cual la formación de docentes necesita tener en cuenta el desarrollo de competencias didácticas con relación al análisis de libros de texto conforme al diseño e implementación de intervenciones formativas que integren herramientas de análisis específicos.

Algunos docentes encuentran dificultades al analizar los libros de texto, dado que no identifican las carencias del contenido matemático o cuando las logran identificar no realizan modificaciones adecuadas que alteren su sentido, los docentes deben aprender a juzgar un conocimiento matemático como adecuada por ser significativa y no solo porque el libro de texto lo contenga, es decir, que utilice de forma competente el libro de texto como guía para el diseño instruccional (Burgos et al., 2023a; Burgos et al., 2023b; Castillo y Burgos, 2023).

La mayoría de los profesores identifican los libros de texto como el conocimiento institucional que se necesita enseñar y aprender (Burgos y Castillo, 2023).

Por otro lado, para desarrollar la competencia reflexiva se necesita adoptar marcos conceptuales y metodológicos, en la competencia del análisis didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico, en este marco, se distingue la importancia de diseñar e implementar acciones formativas para fomentar la competencia de análisis de idoneidad didáctica (Burgos y Godino, 2020).

Por medio de procesos reflexivos los profesores impiden actuar precipitadamente y accede a prever los posibles problemas que se manifiesten en los procesos de enseñanzas y aprendizaje, obteniendo competencia en la resolución de situaciones difíciles. La reflexión es un componente fundamental de la profesionalización, lo cual, conlleva la reconstrucción del conocimiento y la experiencia (Castillo y Burgos, 2022).

Además, los estudios acerca de la creación de problemas matemáticos con la finalidad didáctica mencionan la relación con las competencias docentes y señalan la relevancia de incluir la creación de problemas en los planes de formación de profesores (Burgos y Chaverri, 2023).

1.1.5 Investigaciones sobre propuestas teóricas

En este apartado se presentan los antecedentes acerca de las investigaciones del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto, específicamente los estudios que tratan sobre propuestas teóricas.

Burgos y Godino (2020a) propusieron un modelo para la categorización de los significados en relación al sistemas de prácticas operativas y discursivas implicadas en la resolución de problemas de la proporcionalidad de acuerdo con el nivel de algebrización utilizando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, en este modelo se trata la interpretación del significado en relación con el sistema de prácticas operativas a la resolución de los problemas y el nivel de algebrización en el que se encuentre.

Castillo et al. (2022a) plantearon una metodología para el análisis de la idoneidad didáctica de lecciones de un libro de texto, para ello diseñaron e implementaron una intervención formativa con futuros docentes de secundaria, en el cual el análisis se centró en cómo los docentes aplican la herramienta para valorar la lección y proponer mejoras. Además, en este análisis se atendieron las facetas cognitiva-afectiva e instruccional-ecológica.

Castillo et al. (2022c) propusieron una guía para el análisis de libros de texto de matemáticas utilizando elementos teóricos de la idoneidad didáctica, es decir, se propuso una guía el cual está

conformado por componentes y sus respectivos subcomponentes e indicadores (GALT-Matemáticas).

Por otra parte, en estudios recientes se ha propuesto un modelo para la caracterización de los significados de la proporcionalidad (Burgos y Godino, 2020), una guía para el docente que permita contar con pautas para analizar la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto (Castillo et al., 2022c) y el diseño de intervenciones formativas enfocadas promover en futuros docentes la competencia de análisis de idoneidad didáctica utilizando como recurso una lección de proporcionalidad de un libro de texto y como un recurso metodológico la GALT- Proporcionalidad (Castillo et al., 2022a).

1.1.6 Investigaciones sobre idoneidad didáctica

En este apartado se presentan los antecedentes acerca de las investigaciones del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto, específicamente los estudios que tratan sobre idoneidad didáctica.

Aroza et al. (2016) analizaron una experiencia de enseñanza acerca de la proporcionalidad a través de la idoneidad didáctica, en esta investigación se valoró la idoneidad didáctica y se identificó las propuestas para el rediseño de la experiencia, para ello se requirió sintetizar los conocimientos didáctico-matemático que surgieron en la investigación de la proporcionalidad.

Burgos et al. (2020) realizaron un análisis acerca de una lección del tema de proporcionalidad para caracterizar la idoneidad de las trayectorias didácticas e incrementar la idoneidad, para ello se desarrolló un método para el análisis aplicando herramientas propias del Enfoque Ontosemiótico tales como la configuración didáctica.

Luque y Ibarra (2021) en su investigación describieron el grado de representatividad de los componentes del significado de la proporcionalidad que se evidencian en pruebas propuestas por docentes de secundaria referentes a los significados institucionales, del cual el grado de representatividad de los componentes del significado evaluado es insuficiente con respecto al currículum.

Castillo y Burgos (2022b) analizaron las reflexiones que realizaron futuros docentes acerca del grado de conveniencia de un libro de texto de proporcionalidad y las modificaciones para incrementar la idoneidad didáctica del proceso instruccional. Castillo et al. (2022b) establecieron

una pauta de indicadores de idoneidad didáctica específicamente de proporcionalidad que pueden servir para la valoración de libros de texto y como una herramienta para la reflexión de los docentes para el proceso instruccional, partiendo del GALT-Matemáticas.

1.1.7 Investigaciones sobre análisis de contenido y didáctico

A continuación, se muestran investigaciones donde abordan otras perspectivas teóricas para el análisis del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto, tal como el análisis de contenido.

Se han llevado a cabo investigaciones con otras perspectivas teóricas distintas al Enfoque Ontosemiótico (EOS). Martínez et al. (2015) analizó el tratamiento de la proporcionalidad compuesta en diferentes libros de texto de España utilizando el análisis de contenido por Rico y otros para analizar los significados del contenido de las matemáticas en los cuales distinguen tres componentes de análisis las cuales son la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación. Asimismo, Martínez et al. (2017) realizó un análisis a priori del contenido textual de la proporcionalidad compuesta mediante la clasificación de problemas de acuerdo con su contexto, estructura, posición, el papel en la lección y la tipología de magnitudes, con el fin de caracterizar la enseñanza que se instruye y detectar deficiencias para mejorar.

Ibáñez y Martínez (2020) analizaron el tratamiento de la proporcionalidad aritmética en libros de texto de cuarto grado de España para identificar las deficiencias en los procesos de enseñanza-aprendizaje que surja del uso de los libros de texto, para que los profesores sean capaces de intentar resolver las carencias al llevarlas a cabo para ello, el análisis se llevó a cabo con el elemento teórico de la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación. Vega (2021) analizó si los estudiantes reconocen situaciones en donde pueda o no modelizarse a partir de la proporcionalidad, para ello se analizó un libro de octavo grado que el autor consideró representativo para la resolución de situaciones de proporcionalidad con la transposición didáctica.

Por último, Azzahra et al. (2022) analizó seis tareas de proporción inversa de un libro de escolar electrónico de matemáticas de acuerdo con la teoría praxeológica, en donde se reportó que la proporción inversa ya se muestra de forma contextual, sin embargo algunos ejemplos no concuerdan con el desarrollo cognitivo de los alumnos, además que no permite que los alumnos escojan como resolver casos de proporción inversa, es decir, no permite que los alumnos argumenten las operaciones matemáticas que realizan y en algunos casos no se encuentran situaciones en donde los alumnos puedan concluir acerca de los resultados obtenidos.

1.2 Planteamiento del problema

El análisis de libros de texto ha aumentado su relevancia dado que ese medio forma parte de un reflejo de lo que se utiliza en el salón de clases y evidentemente su uso es incuestionable, logrando convertirse en un objeto de estudio en Educación Matemática. El análisis de libros de texto posibilita distintas oportunidades de investigación. Aunado a lo anterior, las guías escolares son el origen cercano que refleja la experiencia práctica de los profesores por lo cual, el análisis y la evaluación del dominio o idoneidad tiene que ser un elemento en los planes de formación de docentes en matemáticas (Castillo et al., 2022b).

Asimismo, Burgos et al. (2020b) mencionaron que se han realizado relevantes progresos en las investigaciones sobre los libros de texto de matemáticas en los últimos años, comprendiendo temas como el papel de los libros en la enseñanza-aprendizaje, uso de los libros por parte de los docentes y estudiantes entre otros, siendo el libro de texto el medio principal que consideran los profesores para la implementación del plan escolar.

En el contexto de la Educación Básica en México, específicamente en Educación Secundaria, en 2023 la Secretaría de Educación Pública (SEP) puso en funcionamiento una nueva reforma educativa y con ello se distribuyeron nuevos libros de texto. Con lo anterior, surge el interés de analizar el tratamiento de la proporcionalidad, que de acuerdo con Burgos y Godino (2020b) es un tema de suma importancia en el plan escolar dado que se presenta desde la Educación Primaria y Secundaria, lo cual justifica la pertinencia de investigaciones acerca de este tema.

De acuerdo con la revisión sistemática, se identificaron cuatro categorías en la investigación en Educación Matemática sobre el tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto, análisis e intervención formativa (Burgos y Castillo, 2022a; Burgos y Castillo, 2022b; Burgos y Castillo, 2023; Burgos y Chaverri, 2023; Burgos y Godino, 2020b; Burgos y Godino, 2020c; Burgos y Godino, 2021a; Burgos et al., 2023a; Burgos et al., 2023b; Castillo et al., 2021; Castillo y Burgos, 2022a; Castillo y Burgos, 2023), propuestas teóricas (Burgos y Godino, 2020a; Castillo et al., 2022a; Castillo et al., 2022c), idoneidad didáctica (Aroza et al., 2016; Burgos et al., 2020; Castillo et al., 2022b; Castillo y Burgos, 2022b; Luque y Ibarra, 2021) y análisis de contenido y didáctico (Azzahra et al., 2022; Ibáñez y Martínez, 2020; Martínez et al., 2015; Martínez et al., 2017; Vega, 2021).

Esta investigación se desarrollará en la categoría de *idoneidad didáctica* específicamente el interés se centra en la idoneidad epistémica. Además, el motivo por el que se considera la creación de problemas es debido a que el contenido de los libros de textos usualmente no tiene un tratamiento adecuado (Castillo et al., 2022a). Para Burgos y Chaverri (2023) la creación de problemas en Educación Matemática es una herramienta de investigación y enseñanza, en el cual el estudiante construye interpretaciones propias de situaciones específicas con base a su experiencia personal matemática y que las construye en términos de problemas significativos. Entendiendo para un problema la palabra significativo como cualidades tales como simplicidad, claridad, utilidad, novedad, exigencia cognitiva que necesitan ser reconocidas por quien lo esté creando. Por lo cual, la creación de problemas se vuelve una oportunidad para la interpretación y análisis de la realidad. Por lo cual se propone un diseño que considere la idoneidad epistémica de las tareas que se encuentran en los libros de textos actuales.

1.2.1 Pregunta general

¿Cómo diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria?

1.2.2 Preguntas específicas

- ¿Cuál es la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en tareas que se encuentran en los libros de texto Saberes y pensamiento científico de la Educación Secundaria en México?
- ¿Cómo diseñar tareas de proporcionalidad a través del análisis de los libros de texto Saberes y pensamiento científico y el modelo teórico de Burgos et al. (2024)?

1.3 Objetivos de investigación

1.3.1 Objetivo general

Diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria.

1.3.2 *Objetivos específicos*

- Valorar la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en tareas propuestas en los libros de texto Saberes y Pensamiento Científico de la Educación Secundaria en México.
- Diseñar tareas de proporcionalidad a través de la valoración de la idoneidad epistémica y el modelo teórico de Burgos et al. (2024).

1.4 Justificación

Burgos et al. (2020) mencionaron que el análisis de libros de texto es de relevancia tanto en la práctica de enseñanza como en las investigaciones en Educación Matemática. Los libros de texto persisten como el material curricular utilizado de forma preferencial por docentes, definiendo en gran parte lo que ocurre en el salón de clases y ejerciendo como intermediario en el aprendizaje de los estudiantes. Por lo cual, lo anterior justifica la importancia que ha obtenido el análisis de libros de texto en la investigación educativa (Castillo et al., 2022b).

Dado que una lección de un libro de texto se puede entender como un proceso de instrucción planeado por parte de los autores del libro, se pueden utilizar herramientas del análisis didáctico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para efectuar un análisis sistemático que posibilite valorar la idoneidad didáctica de tal proceso instruccional, identificar posibles dificultades y reconocer potenciales cambios para mejorarlos procesos de enseñanza y aprendizaje en sus diferentes dimensiones (Castillo et al., 2022b).

De acuerdo con Castillo et al. (2022b) la idoneidad didáctica se comprende como el grado en que un proceso de instrucción concentra ciertas particularidades que concede calificarlo como adecuado, siendo el primordial criterio la adaptación entre los significados construidos del alumno y los significados institucionales, contemplando la influencia del entorno. Por lo que, esto conlleva a una estructuración de criterios relativos a las facetas que actúan en un proceso de instrucción, las cuales son: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

Se contempla que un proceso de instrucción matemática contiene mayor idoneidad epistémica en la cantidad en que los significados institucionales aplicados o pretendidos interpretan bien a un significado de referencia, dicho significado será relativo al nivel educativo al que pertenezca,

tomando en cuenta los distintos tipos de problemas y contextos que se utilicen en el contenido objeto de enseñanza y las prácticas operativas y discursivas que se necesiten.

Dado lo anterior se considera de relevancia realizar un estudio el que se analice la idoneidad didáctica específicamente en la faceta epistémica (idoneidad epistémica) de los libros de texto Saberes y Pensamiento Científico de Educación Secundaria en México propuestos para el ciclo 2023-2024, acerca del contenido matemático de Proporcionalidad.

Además de Castillo y Burgos (2022b) mencionan que el contenido matemático de la Proporcionalidad es de importancia en los programas de estudios de primaria y secundaria, puesto que este contenido usualmente no recibe un tratamiento apropiado en los libros de texto. La mayor parte reconoce una marcada influencia del aprendizaje memorístico de rutinas, la cual contribuye a obstaculizar la argumentación acerca de las condiciones que facilitan emplear procedimientos como la regla de tres al solucionar un problema-situación, dificultando el desarrollo apropiado de un razonamiento proporcional.

1.5 Viabilidad

El presente estudio se realizó en un periodo de enero de 2024 a octubre de 2025, el análisis de la información y el diseño de tareas se llevó a cabo de enero a junio de 2025. Los recursos monetarios serán obtuvieron de la beca proporcionada. Además, se contó con acceso a los libros de texto que se analizaron y a distintas bases de datos de revistas.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que fundamentan esta investigación. En primer momento, se discuten algunas herramientas, ideas y fundamentos para entender y estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico-EOS (Godino, 2024) específicamente se abordan el significado de un objeto matemático, práctica matemática, idoneidad didáctica, configuración epistémica, criterios e indicadores de idoneidad epistémica como elementos teóricos que sustentan esta investigación. Posteriormente se expone el Modelo teórico de Burgos et al. (2024) como una guía para la creación y/o diseño de tareas. Finalmente, se discute qué se entiende por tarea y cómo se utilizará en la investigación.

2.1 Enfoque Ontosemiótico

De acuerdo con Godino (2022) el Enfoque Ontosemiótico (EOS) se define “como un sistema teórico modular, abierto e inclusivo que trata de proporcionar principios y herramientas metodológicas para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (p. 2). Es decir, es un sistema teórico articulado que engloba herramientas y elementos teóricos para abordar problemas del tipo epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos relacionados con la Educación Matemática.

2.1.1 Significado de objeto y práctica matemática

Dentro del sistema teórico del EOS el término objeto matemático es entendido como alguna entidad material o inmaterial que interfiere en la práctica matemática, favoreciendo su realización. Se refiere a un uso metafórico de la palabra, dado que un concepto matemático se entiende como una entidad abstracta y no algo material tal como un libro (Godino et al., 2020).

Desde este mismo punto de vista, Godino y Batanero (1994) definieron el término objeto matemático desde la perspectiva del EOS como una entidad que se presenta gradualmente en el sistema de prácticas socialmente compartidas, vinculadas a la resolución de problemas matemáticos.

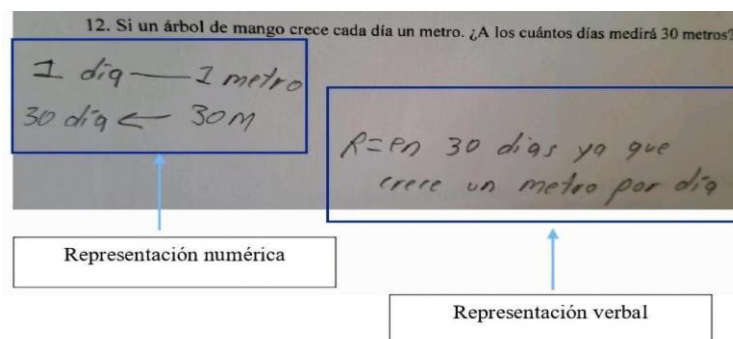
En esta investigación el objeto matemático a estudiar es la proporcionalidad que se entiende como una entidad abstracta: “una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales” (Block et al., 2015, p. 19). Es decir, la proporcionalidad se entiende como una relación entre dos conjuntos dado que una magnitud constante que multiplica una magnitud que se encuentre en alguno de los conjuntos obteniendo como resultado la magnitud que esté relacionada con ella.

En línea con lo anterior, Godino et al. (2007) mencionan que práctica matemática es “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarse a otros contextos y problemas” (p. 2). Es decir, en este punto se entiende que un objeto matemático es el concepto o ideal matemático que se aborda y la práctica matemática es aquella representación verbal, gráfica o pictórica que realiza algún sujeto para solucionar problemas matemáticos y asimismo transmitir a otros la solución encontrada.

A su vez, un sistema de prácticas “está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 339). En la Figura 6, se presenta un ejemplo de un problema matemático que aparenta una posible solución (si se toma en consideración la parte matemática y no la parte realista de la solución, es decir, responder de forma correcta matemáticamente, pero situacionalmente incorrecta) realizando un procedimiento (regla de tres), en donde podemos ejemplificar el sistema de prácticas.

Figura 6

Ejemplo de sistemas de prácticas en un problema verbal.



Fuente: Obtenido de Martínez-Meléndez (2023, p. 50).

En Godino y Batanero (1994) se distinguen dos tipos de prácticas asociadas a un área temática de problemas, la institucional “está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de institución” (p.337). Es decir, las prácticas institucionales son aquellas utilizadas para resolver un problema en cuestión que están dentro de una institución que puede ser un libro de texto o inclusive una escuela. Mientras que, las personales “está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas” (p. 339). Es decir, las prácticas personales son aquellas representaciones verbales, gesticuladas, etc., propias que aparecen cuando se hace el intento por resolver un problema en cuestión.

Por otro lado, dado que las prácticas pueden ser distintas en las diferentes instituciones (donde una institución está compuesta por los sujetos que estén involucrados en algún tipo de situaciones problemáticas), el objeto es relativo con relación a las prácticas, a lo cual se comprenden dos tipos de significados: institucional y personal (Godino y Batanero, 1994).

Visto que en el EOS se puede distinguir entre dos tipos de significados (el personal y el institucional); para Godino et al. (2007) un significado personal e institucional de un objeto matemático se comprende como un sistema de prácticas en el que el objeto es decisivo para su realización, es decir, un significado personal es aquel sistema de prácticas que lleva a cabo una persona (todo lo que se realiza cuando se resuelve un problema matemático) y un significado institucional es aquel que son empleadas en el núcleo de una institución (puede ser un libro de texto dado que se entiende que es un proceso de instrucción dado que se lleva a cabo una serie configuraciones didácticas como la idoneidad epistémica que se discute más adelante).

Además, Godino y Batanero (1994) puntualizan que un objeto institucional “es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de prácticas institucionales, los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de objeto institucional” (p.338). Por otro lado, Godino y Batanero (1994) especificaron que un objeto personal “es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de prácticas personales asociadas a un campo de problemas” (p. 339). En la Figura 7, se ejemplifica un significado institucional en relación con la proporcionalidad. Teniendo en cuenta que un libro de texto puede ser una institución y el significado institucional de un objeto matemático en este caso proporcionalidad son aquellas

prácticas que aparecen durante la resolución de un problema matemático. Es decir, se considera que la resolución de la situación problema presentada en la Figura 7 involucra prácticas institucionales o personales.

Figura 7

Ejemplo de significado institucional de un objeto.

Registro y tabulación de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales

Cuando se habla de tres manzanas, dos perros, diez monedas o medio kilo de huevo, se hace referencia a cantidades, es decir, su principal característica es que se pueden medir, contar y comparar; a esto se le conoce como *razón entre dos cantidades*.

Una razón es la comparación de dos cantidades, mientras que la proporción lo es entre dos razones, ambas relacionadas con un número constante llamado *valor unitario*. En el caso de las relaciones, éstas pueden ser o no proporcionales; esto en relación con la forma en la que se incrementa cada uno de los valores. Cuando se calculan varias proporciones conviene registrar los resultados en una tabla.

Una razón es la comparación de dos cantidades, para ello se usa la división con su cociente. La razón entre a y b se puede escribir de tres maneras:

$$\frac{a}{b}, a:b, a \text{ a } b$$

Las tres formas se leen " a es a b ". El término a se llama *antecedente*, b , *consecuente*, y el resultado k , *cociente*:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{antecedente} \quad b \rightarrow \text{consecuente} \quad = k \rightarrow \text{cociente}$$

Una fracción relaciona números, mientras que una razón compara magnitudes, es decir, elementos formados por un valor numérico y una unidad (kilogramos, metros o litros, por ejemplo). Por tanto, ambos tipos de expresiones no siempre son sinónimos.

Fracciones	Razones
Un medio	100 (valor numérico) centímetros (unidad) son a 1 metro (000)
$\frac{1}{2}$	100 centímetros
	1 metro

En una razón el segundo componente (b) puede ser cero. Por ejemplo, una tienda vende bolsas de dulces que contienen doce caramelos: cuatro rojos, cuatro verdes y cuatro azules; pero una bolsa con seis rojos y seis verdes; en ella la razón de caramelos azules es de 12:0, es decir, de doce a cero. Una fracción no puede ser de la forma $\frac{a}{0}$, porque la división entre cero no está definida.

Una proporción es una igualdad entre dos o más razones relacionadas por una constante:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

También se puede escribir de la forma $a:b = c:d$, donde:

Términos medios b y d

$$a:b = c:d$$

Términos extremos a y c

Se lee " a es a b como c es a d ".

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios, por ejemplo:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \text{ con } a = 2, b = 4, c = 3, d = 6:$$

$$a \times d = 2 \times 6 = 12$$

$$b \times c = 4 \times 3 = 12$$

Las cantidades serán proporcionales si las razones son iguales a un valor constante k . Por ejemplo, el cociente de todas las distancias recorridas d entre el tiempo transcurrido t debe ser igual a k :

$$\frac{d}{t} = k$$

Las cantidades serán no proporcionales si existe alguna razón para la cual se obtiene un valor distinto al resto.

$$d \div t \neq k$$

La constante de proporcionalidad también se conoce como *valor unitario* y es el que relaciona ambas cantidades, por ejemplo, si 1 kg de manzanas cuesta \$20, 3 kg costarán \$60; el valor unitario es \$20.

Ejemplo 1. Proporcionalidad directa

En la central de abasto, dos trabajadores llenan un camión con capacidad de 3500 kg, con sacos de maíz de 50 kg, en 8 horas. Determinar:

- La masa de 2, 3, 4 y 5 sacos.
- La cantidad de sacos con la cual se llenará el camión.

Fuente: Obtenido de SEP (2024b, pp.160-161).

2.1.2 Idoneidad didáctica

El constructo Idoneidad didáctica (Malet et al., 2021) es uno de los más utilizados en las investigaciones desarrolladas desde el EOS, de acuerdo con Godino (2013) la noción de idoneidad didáctica es un elemento teórico que contiene herramientas que posibilita el camino de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, es decir, en el que se instauran normas y referentes para el aprendizaje y enseñanza. Obteniendo:

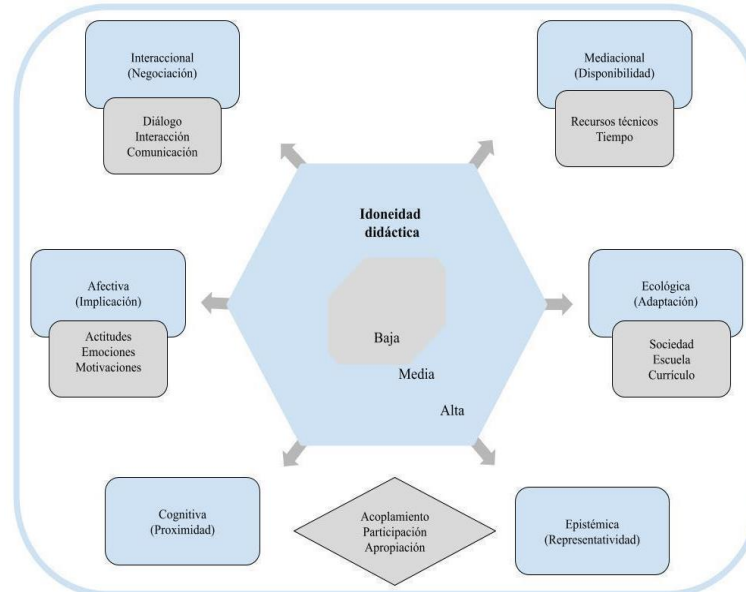
una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Consideramos que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. (p.115)

En Godino (2024) definen a la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como el “grado en que dicho proceso reúne ciertas características que permitan calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles” (pp. 274-275).

Es decir, idoneidad didáctica según Godino et al. (2007) se define como “la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica” (pp. 14-15). Se observa en la Figura 8 cada faceta de la Idoneidad didáctica.

Figura 8

Idoneidad didáctica



Fuente: Elaboración propia tomada de Godino (2013).

En Malet et al. (2021, pp. 16-17) presentaron nueve categorías acerca de cómo se ha utilizado la idoneidad didáctica en las investigaciones:

- La Idoneidad Didáctica como herramienta para valorar orientaciones curriculares, planes de estudio o programas de formación.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para valorar libros de texto.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para valorar videos educativos.

- La Idoneidad Didáctica como herramienta para determinar criterios de idoneidad de tópicos específicos.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para desarrollar la competencia de análisis didáctico en la formación docente.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para valorar el diseño y/o la implementación de un ciclo educativo.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para valorar las acciones didácticas o producciones escritas de los profesores en formación.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para interpretar, en sus términos, valoraciones realizadas por profesores o futuros profesores.
- La Idoneidad Didáctica como herramienta para diseñar actividades y secuencias didácticas a partir de los criterios de idoneidad.

En esta investigación se utiliza la idoneidad didáctica para valorar libros de texto, abordaremos específicamente la faceta epistémica dado que una lección de un libro de texto se puede entender como un proceso de instrucción planeado por parte de los autores del libro (Castillo et al., 2022b). Se contempla que un proceso de instrucción matemática contiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales aplicados o pretendidos interpretan bien a un significado de referencia, dicho significado será relativo al nivel educativo al que pertenezca, tomando en cuenta los distintos tipos de problemas y contextos que se utilicen en el contenido objeto de enseñanza y las prácticas operativas y discursivas que se necesiten (Castillo et al., 2022b). Debido a esto se hará uso de la idoneidad epistémica, que según Godino (2013) la define como “el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.” (p. 116).

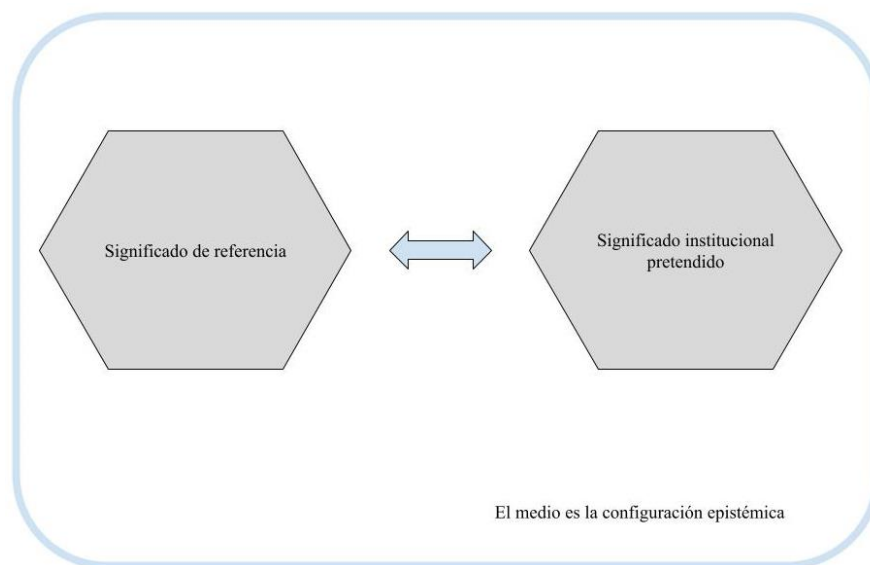
Asimismo, Godino et al. (2007) la define como:

Al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia (Figura 9). Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad). (p. 14)

Por lo tanto, entendemos a la idoneidad epistémica como el contraste que hay entre los indicadores de idoneidad y lo que se trabaja en los libros de texto.

Figura 9

Significado institucional y de referencia



Fuente: Elaboración propia.

2.1.3 Configuración epistémica

Puesto que las definiciones de práctica y objeto, tal como las distintas nociones de secuencia de prácticas (proceso) que se pueden llevar a cabo, se consideró imprescindible y eficiente exponer una tipología de objetos matemáticos, denominada configuración epistémica, que se entiende como un sistema de objetos institucionales (Godino et al., 2020).

En Godino et al. (2007) se entiende que “si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como objetos personales (p. 8).

En la Figura 10, se muestra la configuración epistémica que se utilizará en esta investigación puesto que el objeto matemático central es proporcionalidad, se centra en la situación-problema dado que se analizarán y se crearán tareas de proporcionalidad.

Figura 10

Configuración epistémica



Fuente: Elaboración propia.

Además, es esencial presentar las siguientes definiciones de situación-problema, lenguajes, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos, dado que son constructos que articulan a la configuración epistémica. En Godino et al. (2017) presentaron las siguientes definiciones de objetos primarios que componen a la configuración epistémica.

- **Situación-problema:** Son las aplicaciones extra matemáticas o intra-matemática, es decir, son las tareas o ejercicios que incitan la actividad matemática. Es decir, es el problema o situación que conlleve a realizar cálculos de razonamiento proporcional, por ejemplo, el siguiente problema tomado de SEP (2024) “En la central de abasto, dos trabajadores llenan un camión con capacidad de 3500 kg, con sacos de maíz de 50 kg, en 8 horas. Determinar: a) la masa de 2, 3, 4 y 5 sacos, b) la cantidad de sacos con la cual se llenará el camión” (p. 161), que incita a una actividad extra matemática de proporcionalidad.
- **Lenguaje:** Son las expresiones, gráficos, notaciones y términos que pueden ser, por ejemplo, orales, escritos y gestuales. Por ejemplo, retomando el problema anterior, son aquellas representaciones que surgen al resolver el problema.
- **Procedimientos:** Son las operaciones, algoritmos o métodos para realizar cálculos. Por ejemplo, la regla de tres.
- **Conceptos-definición:** Son explicaciones o descripciones que son abordados como definiciones, por ejemplo, la definición de proporcionalidad directa.
- **Proposiciones:** Son los enunciados o planteamientos acerca del concepto a abordar. Por ejemplo, el enunciado en concreto del ejemplo visto en situación problema.

- Argumentos: Son los enunciados o planteamientos que se utilizan para aclarar o validar las proposiciones y procedimientos racionales o de otro tipo.

2.1.4 Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

En la Tabla 5, se muestran los componentes e indicadores generales de la idoneidad epistémica establecidos en Godino (2013), estos se pueden adaptar de acuerdo con el tema o concepto matemático a estudiar. Dado que el objeto matemático central de esta investigación es la proporcionalidad, se utilizaron los indicadores propuestos en la GALT-Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b) para valorar la idoneidad epistémica de las tareas.

Tabla 5

Componentes e indicadores generales de idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

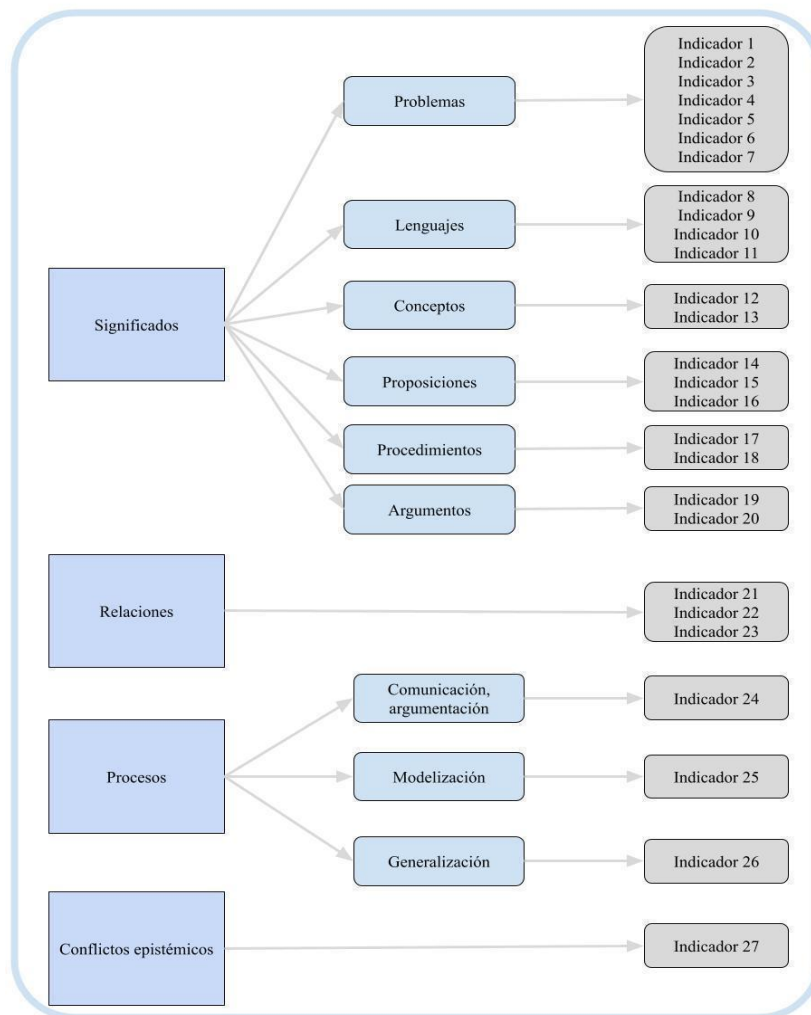
Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas.

Fuente: Godino (2013).

En la Figura 11, se presenta un diagrama que muestra el panorama general de los componentes e indicadores de idoneidad epistémica de la proporcionalidad que se utilizarán en esta investigación, aclarando que no se hará uso de un indicador (Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales) dado que se halló una similitud con algunos indicadores previos (indicador 3,4 y 11).

Figura 11

Panorama general de GALT- Proporcionalidad



Fuente: Elaboración propia.

2.1.5 GALT-Proporcionalidad

Antes de presentar la GALT-PROPORCIONALIDAD es relevante conocer los significados institucionales de la proporcionalidad visto desde el punto de vista epistémico (Aroza et al., 2016; Castillo et al., 2022b).

Significado intuitivo y cualitativo. Se enfoca en la contrastación perceptiva de la semejanza que involucran figuras geométricas o la comparación multiplicativa de números que están involucrados en el problema, por ejemplo, que los alumnos identifiquen perceptivamente relaciones proporcionales mediante figuras a escala.

Significado geométrico. Se enfoca en las razones y proporciones que involucran segmentos, semejanzas de figuras y escalas, por ejemplo, tareas que involucran escalas, reducciones y ampliaciones de figuras que prevalezcan su forma.

Significado aritmético. Se enfoca en la noción de proporción y razón, por ejemplo, las nociones de razón, proporción y magnitudes proporcionales, así como definiciones de fracción y número racional, entendiendo como razón un par en orden de cantidades de magnitudes ya sean homogéneas o heterogéneas, que son comparadas de forma multiplicativa. Cada cantidad es expresada por medio de un número real y la unidad de medida. Además, a partir de la razón se define proporción como la expresión de igualdad de dos razones. Aclarando que cuando se prescinde de las unidades de medida de las magnitudes, la proporción se encuentra de forma general como igualdad entre dos fracciones equivalentes.

Significado algebraico. Se enfoca en la noción de función, por ejemplo, las definiciones de razón, proporción y proporcionalidad toman sentido unificado con la noción de función lineal, el cual es un modelo matemático que aborda distintos lenguajes, situaciones y fenómenos. La función lineal se puede tomar en cuenta como la matematización de las nociones cotidianas y que son funcionales de la proporcionalidad. Además, el razonamiento proporcional involucra una función lineal en un sistema de dos variables que puede llegar a brindar conclusiones sobre una situación que puede ser caracterizada por una razón de dos cantidades.

A continuación, se describe cada componente (significados, relaciones, procesos y conflictos epistémicos) e indicadores de la GALT-Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b).

Significados

Problemas

Indicador 1. Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de razón, proporcionalidad y porcentajes (involucra resolver y formular problemas) en los cuatro significados asociados a la proporcionalidad¹.

La noción de razón está enfocada en la relación que vincula dos cantidades y el número obtenido se denomina valor de la razón, de las cuales las más frecuentes son aritmética (de tipo aditivo) que se refiere a la diferencia de una cantidad u otra y geométrica (de tipo multiplicativo) que es acerca del cociente, es decir, cuántas veces la cantidad es la otra (Block et al., 2015).

La noción de porcentaje está enfocada en que se puede expresar como una razón, dado que facilitan determinar si algo aumenta o disminuye, además que los porcentajes son usuales en situaciones de proporcionalidad (Block et al., 2015).

Ambas nociones son necesarias para abordar el concepto de proporcionalidad definido como:

Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicado a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante. En este caso, a veces sustituye el término factor por el de razón, quedando entonces: una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si la razón externa es constante. (Block et al., 2015, pp. 20-21)

Otras definiciones que son consideradas importantes son razón y proporción (Ben- Chaim et al., 2012 y Castillo et al., 2012b). En Ben- Chaim et al. (2012) consideran como sinónimos estos dos conceptos, señalando que “razón, cociente o proporción de dos números, magnitudes, cantidades o expresiones, como una medida del tamaño relativo de dos clases; por ejemplo, la razón del lado de un cuadrado a la diagonal es 1: (a la raíz cuadrada de) 2” (p. 24). Mientras que, en Godino y Batanero (2002) hacen una distinción acerca de razón y proporción:

¹ Intuitivo y cualitativo, geométrico, aritmético y algebraico.

Dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo k , llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por k de los valores correspondientes de la primera serie (p. 421)

Por otro lado, estos autores afirman que “cuando en la situación considerada sólo intervienen dos pares de números que corresponden se dice que se establece una proporción” (Godino y Batanero, 2002, p. 422). Por ende, para este estudio se considera que la razón representa una relación que hay entre dos cantidades respecto a la otra y la proporción es la relación o correspondencia que forman dos pares de razones entre sí.

Otros conceptos claves son la proporcionalidad inversa y la regla de tres. Godino y Batanero (2002) indican que “dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales” (p. 423). Por otra parte, la regla de tres es un procedimiento que se emplea al resolver problemas de proporcionalidad cuando se conocen tres cantidades y la cuarta se desconoce, a lo cual estos números forman las proporciones y se necesita calcular la cuarta cantidad (Godino y Batanero, 2002).

Indicador 2. Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la razón, proporcionalidad y porcentajes.

Tarea de valor faltante: se relacionan con problemas que se solucionan con una multiplicación o división, con tres cantidades conocidas y una desconocida (Block et al., 2015).

Tarea de comparación: a diferencia de la tarea anterior, la noción o concepto de razón es el objeto de la pregunta, por medio de una cualidad. Por ejemplo, qué gelatina sabe más a limón (Block et al., 2015).

Tarea tabular: corresponde a tareas que involucren el uso de tablas.

Indicador 3. Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea.

La comparación multiplicativa hace referencia a cuántas veces una cantidad es la otra, como, por ejemplo, la razón geométrica. Desde el punto de vista de la enseñanza se han visto ejemplos donde un valor (unitario) corresponde una relación entre dos cantidades (un huevo por cada 100 gramos de harina). En los libros de texto se hacen explícitas instrucciones para solucionar problemas multiplicativos con números decimales o fraccionarios. Por otro lado, las de tipo aditivo son las que hacen referencia a cuánto es más una cantidad que la otra (Block et al., 2015).

En Reyes-Gasperini (2013) un modelo multiplicativo escalar corresponde una relación entre cantidades homogéneas (dos o más números fraccionarios tienen el mismo denominador) y un modelo multiplicativo funcional, una relación entre cantidades heterogéneas (dos o más números fraccionarios tienen denominadores diferentes). Los tipos de estructuras multiplicativas recaen en la diferencia entre las estrategias que han realizado estudiantes en problemas de valor faltante son inter (modelo multiplicativo escalar) e intra (modelo multiplicativo funcional). Considerando los tipos de estructuras multiplicativas en relación con la noción de proporcionalidad se contempla que la división es más complicada que la multiplicación, por lo cual el modelo aditivo deriva del multiplicativo escalar que es menos difícil que el funcional.

Indicador 4. La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas.

En Ben- Chaim et al. (2012) una relación proporcional puede expresar distintos fenómenos entre variables particulares. El punto de vista de la evolución de estudio de razón y proporción es de forma intuitiva (identificación de relaciones proporcionales en distintas comparaciones), formal (entendimiento de los distintos tipos de problemas proporcionales y las estrategias para solucionarlos) y procedimental (entendimiento de las soluciones matemáticas que se necesitan para solucionar una diversidad de problemas). Los problemas proporcionales conllevan situaciones en las que las correspondencias matemáticas son de índole multiplicativo (en contraste con la aditiva) que permiten la creación de dos razones que son iguales entre ellas.

Indicador 5. Las situaciones involucran el uso de razones internas y externas.

Las razones internas hacen referencia al método escalar y razones externas al método funcional. Un ejemplo de razones internas son comparar razones que son del mismo término como dos

longitudes y un ejemplo de razones externas son la comparación de términos que son distintos como la distancia y el tiempo (Ben- Chaim et al., 2012).

Indicador 6. Se proponen situaciones de cálculo mental que involucran el razonamiento proporcional.

El razonamiento proporcional es un proceso largo de tiempo en el cual se desarrolla una comprensión y se dominan de forma superior las relaciones proporcionales. En las cuales se pueden desarrollar en tres etapas, la intuitiva (se intuye y no se correlaciona entre variables), concreta (donde se relaciona dos variables en una situación concreta, pero no se es capaz de generalizar) y formal (cuando existe un esquema proporcional en donde se entiendan las relaciones proporcionales este se puede utilizar como una herramienta mental para solucionar este tipo de problemas) es decir, ya hay un esquema de la proporcionalidad (Ben-Chaim et al., 2012).

Indicador 7. Se promueve que el alumno plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad y porcentajes.

En Ben-Chaim et al. (2012) mencionan que los datos que son proporcionados en los problemas como proporciones, fracciones, porcentajes, escalas, tablas y funciones entre otros son el corazón del razonamiento proporcional, además que pueden facilitar al resolver problemas de comparación.

Lenguajes

El lenguaje en el EOS hace referencias a las expresiones, gráficos, notaciones y términos que pueden ser, por ejemplo, orales, escritos y gestuales (Godino et al., 2017). Dentro de la proporcionalidad el subcomponente de lenguaje podría presentarse cuando en una tarea se desarrollan o utilizan representaciones o notaciones para expresar una razón o proporción, al igual que todo tipo de expresión con las manos, gesticulaciones y materiales manipulativos visuales enfocados en porcentajes (Godino y Batanero, 2002). En esta investigación los indicadores contemplados para el lenguaje son los siguientes.

Indicador 8. Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de razón, proporcionalidad y porcentajes.

Indicador 9. Nivel del lenguaje adecuado a la población estudiantil a la que se dirige.

En Ben- Chaim et al. (2012) se menciona que es importante el lenguaje involucrado en un problema dado que tiene un rol relevante, ya que puede confundir con palabras o términos a los estudiantes. Por ejemplo, *si la velocidad es mayor que 2*, cuando se pide determinar el tiempo podría ocasionar que los estudiantes tiendan a multiplicarlo por 2 en lugar de dividirlo por 2.

Indicador 10. Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la razón, proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.

Indicador 11. Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes.

La relevancia de este indicador recae “en que la estructura de las situaciones proporcionales es una relación entre dos magnitudes y que al considerar esta relación pueden darse los dos tipos de análisis” (Castillo et al., 2022b, p. 8). Es decir, se identifican representaciones que sean pertinentes para lograr diferenciar relaciones multiplicativas (comparación) que surgen entre magnitudes proporcionales, involucrando una razón.

Conceptos

Dentro del EOS los conceptos-definiciones son explicaciones o descripciones que son abordados como definiciones, por ejemplo, la definición de proporcionalidad inversa (Godino et al., 2017). A continuación, se presentan los indicadores que se usarán.

Indicador 12. Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional, relación proporcionalidad directa entre magnitudes y los conceptos involucrados.

Los conceptos que se consideran fundamentales en Educación Secundaria son razón, proporción, porcentajes, fracción, medida, proporcionalidad (directa e inversa). En seguida se presentan las definiciones establecidas en Soto (2011):

Razón. “La razón entre dos números a, b es el resultado que se obtiene al dividirlos” (p. 135).

Proporción. “Igualdad entre dos razones” (p.130).

Proporción directa. “Cuando dos cantidades están en proporción de manera que al crecer una de las cantidades, la otra crece la misma cantidad de veces, entonces las cantidades están en proporción directa” (p. 130).

Proporción inversa. “Cuando dos cantidades están en proporción de manera que al crecer una de las cantidades, la otra decrece la misma cantidad de veces, entonces las cantidades están en proporción inversa” (p. 130).

Porcentaje. “Fracción de una cantidad que se toma por cada cien contenida en ella y que se denota con el símbolo %, es decir, es una proporción que compara un número con el cien”. (p. 125).

Fracción. “Representación de una división ($r = a/b$) donde a es el dividendo, llamado numerador en la fracción, b es el divisor, llamado denominador en la fracción y r es el cociente” (pp. 64-65).

Números racionales. “Es el conjunto de todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero” (p.111). Por lo tanto, un número racional “es cualquier elemento del conjunto de los números racionales, todos los números enteros y todos los números naturales también son números racionales” (p. 111). Por ejemplo, $5/2$ y $-5/2$.

Constante de proporcionalidad. “Una constante de proporcionalidad k es el número que hace que se cumpla una relación de igualdad entre dos cantidades que varían de manera proporcional” (p. 25).

En Godino y Batanero (2002) definen el siguiente concepto:

Tasa. “Comparación de cantidades de magnitudes diferentes” (p. 434).

Indicador 13. Se proponen situaciones donde el alumnado tenga que reconocer, generar, aplicar definiciones de razón, proporcionalidad y porcentajes.

En el libro de texto se identificarán situaciones-problemas donde se haga uso de definiciones de razón, proporcionalidad y porcentajes.

Indicador. Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.

Este indicador se eliminará dado que guarda una relación semejante con los indicadores 3, 4 y 11 anteriormente presentados.

Proposiciones

En el EOS se definen las proposiciones como los enunciados o planteamientos acerca del concepto a abordar. Por ejemplo, el enunciado en concreto del ejemplo visto en situación problema (Godino et al, 2017). Los indicadores que se utilizaran son los siguientes.

Indicador 14. Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de razón, proporcionalidad y porcentaje de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.

Indicador 15. Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.

Indicador 16. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.

Procedimientos

En el EOS los procedimientos corresponden a las operaciones, algoritmos o métodos para realizar cálculos. Por ejemplo, la regla de tres (Godino et al., 2017).

Indicador 17. Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de razón, proporcionalidad y porcentajes para el nivel educativo correspondiente.

Indicador 18. Se proponen situaciones donde la persona estudiante tenga que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.

Argumentos

Dentro del EOS se define a los argumentos como los enunciados o planteamientos que se utilizan para aclarar o validar las proposiciones y procedimientos racionales o de otro tipo (Godino et al., 2017). A continuación, se presentan los indicadores que se utilizaran.

Indicador 19. Las proposiciones y procedimientos del contenido de razón, proporcionalidad y porcentaje se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.

Indicador 20. Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.

A continuación, se presentan los indicadores que se utilizarán para evaluar los componentes *procesos, relaciones y conflictos epistémicos*. Estos dos últimos componentes (relaciones y conflictos epistémicos) no cuentan con subcomponentes como el componente de significados y procesos.

Relaciones

Indicador 21. Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.

Indicador 22. Se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes (se trata la razón entre números, entre cantidades de una misma magnitud, entre cantidades correspondientes, etc.).

Indicador 23. Se identifican, articulan y desarrollan los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.

Procesos

Comunicación, argumentación

Indicador 24. Se promueven diversas situaciones de razón, proporciones y porcentajes donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.

Modelización

Indicador 25. Se plantean situaciones que permitan al alumno o alumna utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo) en los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.

Generalización

Indicador 26. Se proponen situaciones donde el estudiantado tenga oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y numéricos, incluso mediante el uso de expresiones algebraicas (función lineal) relacionados con los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.

Conflictos epistémicos

Dentro de este componente se consideran los conflictos epistémicos que involucran acciones que forman obstáculos epistemológicos en el desarrollo del razonamiento proporcional (Castillo et al., 2012b). El indicador correspondiente a este componente es el siguiente.

Indicador 27. Los contenidos, situaciones problema y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. de proporcionalidad y porcentajes se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones ni ambigüedades; se explicitan las condiciones que motivan la condición de proporcionalidad directa, se diferencia una razón de una fracción.

2.2 Modelo para la creación de problemas

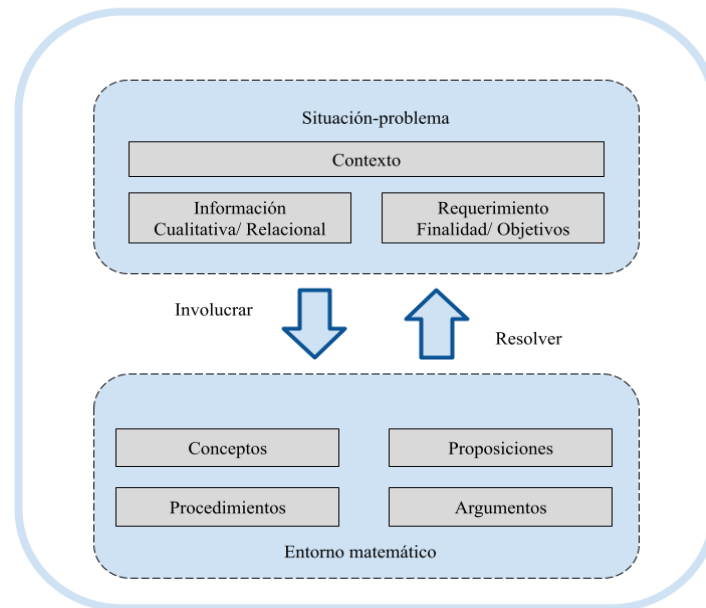
El modelo teórico que se utilizará en esta investigación para la creación de situaciones-problemas, es propuesto en Burgos et al. (2024), este grupo de investigadoras plantearon un modelo sustentado en los supuestos del EOS y elementos retomados de Malaspina y otros autores (Malaspina et al., 2017, Malaspina, 2021).

La finalidad de utilizar este modelo en esta investigación es dado el potencial que muestra para la creación de problemas que puede ser una elaboración o variación parcial o total de las situaciones-problemas.

En Burgos et al. (2024) explicaron que este modelo considera elementos para la creación de problemas contemplados en Malaspina (2017) los cuales se ilustran en la Figura 12, es decir, la información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

Figura 12

Elementos de una estructura de una situación-problema en el Modelo teórico de Burgos et al. (2024)



Fuente: Figura traducida de inglés a español de Burgos et al. (2024).

En Malaspina (2017, p. 4) definen lo siguiente:

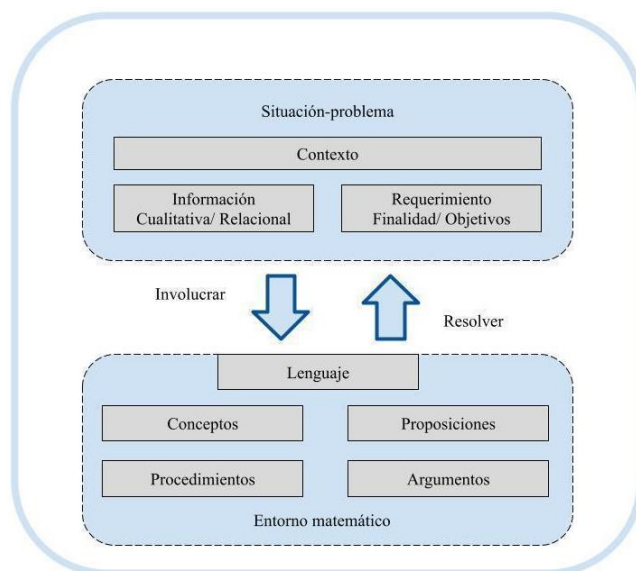
- La información: datos cuantitativos (por ejemplo, el peso) o relacionales (datos o valores que se relacionen, por ejemplo, en los datos que presentan dos columnas de una tabla) que se dan en el problema.
- El requerimiento: lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones. Por ejemplo, lo que se pida hallar en el enunciado del problema.
- El contexto: puede ser intra matemático o extra-matemático. (Un ejemplo intra-matemático es “ $20 - 8$ ”, mientras que un ejemplo extra matemáticos se refiere a “La mamá de Brenda le compra un paquete de 20 crayolas en la papelería. Brenda se da cuenta en el receso que pierde 8 crayolas, ¿cuántas crayolas le quedan en total?”).
- El entorno matemático: el marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (por ejemplo: funciones lineales; teoría de números; geometría analítica; cálculo diferencial; etc.).

En esta investigación el entorno matemático se describe considerando los objetos primarios (situación-problema, lenguaje, procedimientos, concepto-definición, proposiciones y argumentos) de la configuración epistémica: “sistema de prácticas, objeto y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea” (Godino, 2024, p. 214) el modelo de Castillo et al. (2022b) no considera el objeto primario *lenguaje*. No obstante, este objeto primario se considera de importancia porque involucra las expresiones, gráficos, notaciones y términos que pueden ser, por ejemplo, orales, escritos y gestuales (Godino, 2017). Además, comprende la integración de registros manipulativos o concretos distintos de hoja y lápiz (Castillo, 2022). Por tal motivo se considera un objeto relevante al momento de crear problemas.

También, es importante destacar que dentro del entorno matemático se considera la valoración epistémica, dado que se valoran cada uno de los elementos del entorno matemático (Malaspina, 2017) y/o objetos primarios (Godino, 2017) que son vistos en la GALT-Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b). Además, desde la perspectiva del EOS estos elementos que considera Malaspina (2017) son vistos desde la configuración epistémica. Por tal motivo en lugar de utilizar el término problema, se empleará el término situación-problema. En la Figura 13, se presenta el modelo que se utilizará en esta investigación, considerando el objeto primario del lenguaje.

Figura 13

Modelo de creación de tareas a utilizar en la investigación.



Fuente: Elaboración propia con base en Burgos et al. (2024).

En el modelo propuesto por Burgos et al. (2024) para la creación de problemas matemáticos establecen tres categorías:

Elaboración libre o no estructurada. No existe una situación problema inicial (estructurada), y no se incluyen indicaciones, pautas o restricciones sobre ninguno de los componentes (contexto, entorno, información y requisitos) del nuevo problema. Por ejemplo, "crea un problema fácil". El campo de requisito de información de contexto está completamente vacío y también lo está el entorno.

Elaboración semiestructurada. No existe una situación de problema base, pero se incluye información o restricciones sobre elementos del nuevo problema. Es decir, se dan algunos de los componentes de requisitos de información de contexto. Por ejemplo, puede contener contexto e información (Van Harper & Presmeg, 2013) que se debe completar con el objetivo, o datos (información) que se deben completar para responder a una determinada pregunta (requisito) (Cai & Jiang, 2017; Espinoza et Grundmeier, 2015). En otras ocasiones, la restricción puede darse como parte del entorno matemático, muchas veces como una estrategia o cierto cálculo que debe conducir a la solución (Christou et al., 2005).

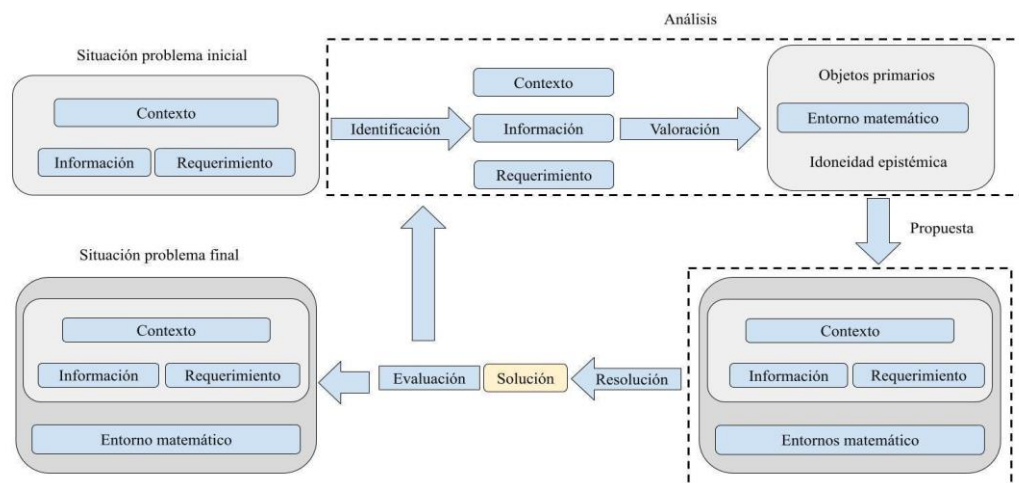
Elaboración o variación estructurada. Se plantea un problema a partir de otro anterior (Stoyanova & Ellerton, 1996; Van Harpen & Presmeg, 2013), de manera que se conocen los distintos elementos (contexto, información, requerimiento y entorno matemático). La variación puede ser parcial si se modifican algunos de estos componentes, pero no todos, por ejemplo, datos cuantitativos o relacionales (información) o preguntas (requisito) (Van Harpen & Presmeg, 2013), o completa (si los cuatro se modifican los componentes). El intercambio entre información y requerimiento, añadiendo nueva información o planteando nuevas preguntas (Cai & Jiang, 2017), también se considera dentro de la categoría de elaboración estructurada. (p. 14)

Específicamente el interés en el modelo es por el potencial que tiene para la creación de tareas (situaciones-problema) sobre proporcionalidad, el objetivo es utilizarlo para plantear tareas, con base en las tareas que se encuentren en los libros de texto (elaboración o variación estructurada) esto después de haber valorado la idoneidad epistémica de cada tarea. Es decir, dado que nuestra intención es la creación de tareas a partir de las propuestas en los libros de textos seleccionados previamente, utilizaremos la categoría *Elaboración o variación estructurada*, debido que esta

categoría menciona que la variación puede ser parcial o completa, es decir, el problema puede ser modificada parcialmente o en su totalidad. En la Figura 14, se presenta el proceso del planteamiento de tareas.

Figura 14

Proceso del planteamiento de tareas



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se detalla el proceso del planteamiento de tareas. En primera instancia se inicia este proceso con el recuadro de situación problema inicial en donde se contempla a los elementos involucrados en la tarea original, es decir, como aparece en el libro de texto, enseguida se identifica en la tarea el contexto, información y requerimiento. Posteriormente se identifican los objetos primarios y se aplican los indicadores antes presentados para la valoración de idoneidad epistémica. Después del análisis se plantea una nueva situación-problema considerando la valoración de la idoneidad epistémica. Dicha propuesta se resuelve y se somete a una evaluación. Finalmente se obtiene la situación-problema final (tarea).

2.2.1 Tarea

En esta investigación es esencial tener presente la distinción de un problema y una tarea, puesto que se ha utilizado estos términos en este estudio, es importante definir que se analizarán tareas, sin embargo, como se ha mencionado con anterioridad se crearán tareas a partir de un modelo para la creación de problemas, es decir, se crearán situaciones-problemas a partir de un modelo de creación de problemas dado que en la propuesta de Burgos et al. (2024) se consideran elementos del EOS.

En la literatura podemos encontrar distintas definiciones de problemas y tareas, Herbst (2012) definió problema como una pregunta matemática tal que su respuesta necesita del desarrollo de alguna noción matemática, mientras que tarea se refiere al desarrollo real o posible de la función del problema en el tiempo y por un individuo, además un problema pueda generar varias tareas.

Por otro lado, Berreiro et al. (2017) contempla que una tarea está compuesta o estructurada en tres partes:

- Un contexto: es una descripción que nos sitúa en el trabajo que vienen haciendo los estudiantes, los conocimientos preexistentes de los que disponen, las consignas que han utilizado los estudiantes, el instante en que se realizaría o plantearía la consigna, la modalidad de trabajo para llevarla a cabo individual o en equipo entre otras y posiblemente un adelanto de lo que se trabajará después.
- El objetivo que el profesor plantea y para el cual escoge esa consigna: es lo que se desea que el estudiante aprenda a partir de la clase dada.
- Una consigna: es el planteamiento o enunciado que se le proporciona al estudiante tal cual se le instruye.

No obstante de presentar las definiciones previas, de acuerdo con la literatura que se ha revisado en esta investigación, para Malaspina (2017) un problema está compuesto por cuatro elementos (información, requerimiento, contexto y entorno matemático), además destacó que la creación de problemas de matemáticas es vista como un proceso en que se consigue un nuevo problema que puede ser una variación de un problema inicial (modificando uno o varios de los elementos) o la elaboración libre (a partir de una situación planteada por el autor) o un pedido específico con alcance matemático (usualmente contexto intra matemático) o didáctico (usualmente extra matemático).

Burgos et al. (2024) para la creación de problemas estas autoras toman en cuenta los elementos de Malaspina (2017) conectándolos con los objetos primarios del EOS, es decir, dentro de la situación problema Burgos et al. (2024) retoman los elementos de Malaspina (2017) e interiormente en el entorno matemático se involucran los objetos primarios. Para estas autoras un problema es considerado como una situación- problema, dado que este modelo está basado en supuestos del EOS. Además, para Godino et al. (2017) una situación- problema son las aplicaciones extra

matemáticas o intra-matemáticas, es decir, son las tareas o ejercicios que incitan a la actividad matemática en un libro de texto. Por lo tanto, en esta investigación se utilizará la terminología situaciones-problemas para referirnos a tareas o problemas, considerándolos como sinónimos por la argumentación anterior.

CAPÍTULO 3. Metodología

En este capítulo se describen y exponen los elementos o métodos que se utilizarán y ayudarán para el análisis de tareas, valoración de la idoneidad epistémica y la creación de tareas, así como el tipo de investigación y el alcance. La presente investigación es de tipo cualitativa ya que abarca fenómenos explorándolos desde el punto de vista del participante en un entorno natural y en relación con su medio y con un alcance descriptivo, dado que el investigador debe de lograr descubrir qué datos recolectar (Hernández et al., 2014). En línea con lo anterior, esta investigación se centra en diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria.

3.1 Revisión de planes y programas de estudio SEP (2024-2025)

El plan de estudios relacionados a los tres niveles educativos de Secundaria que establece la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2024a) denominado Programa de Estudio para la Educación Secundaria: Programa sintético de la fase 6, aborda contenidos y procesos de desarrollo de aprendizajes del campo formativo, en donde se identificó que el contenido de funciones contempla el tema de proporcionalidad. En la Tabla 6, se presenta el contenido de funciones, así como los procesos de desarrollo de aprendizajes que involucran al tema de proporcionalidad.

La Secretaría de Educación Pública (SEP, 2024a) señala en el programa de estudios para la educación preescolar, primaria y secundaria: programas sintéticos de las fases 2 a 6, específicamente en la fase 6 que corresponde al programa sintético de secundaria de los tres niveles, en el cual se ubicó el libro de Saberes y Pensamiento Científico en el apartado de Funciones el tema de la proporcionalidad. De acuerdo con el contenido y proceso de desarrollo de aprendizaje del campo formativo se identificó el proceso de desarrollo de aprendizaje del tema de proporcionalidad de los tres niveles de secundaria que propone la SEP. En la Tabla 6, se muestra

específicamente el contenido que aborda a la proporcionalidad en el plan sintético de la fase 6 correspondiente a secundaria.

Tabla 6

Extracto de contenidos y procesos de desarrollo de aprendizajes del campo formativos en relación con la proporcionalidad

Contenido	Procesos de desarrollo de aprendizaje		
	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Funciones	Relaciona e interpreta relaciones proporcional y no proporcional a partir de su representación tabular, gráfica y con diagramas.	Relaciona e interpreta la proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades, además usa una tabla, gráfica o representación algebraica en diversos contextos.	Relaciona e interpreta la variación de dos cantidades a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica.
	Modela y resuelve diversas situaciones a través de ecuaciones proporcionales con constante positiva y negativa.		Explora diversos procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

Nota. Elaboración propia con base en SEP (2024a)

3.2 Identificación de tareas

Después de la revisión del programa sintético de la fase 6, se identificó cada tarea de proporcionalidad en los libros Saberes y Pensamiento Científico (SEP, 2024b; SEP, 2024c; SEP, 2024d) de los tres niveles educativos, para ello en la Tabla 7 se concentran el contenido de cada sección y los títulos de las lecciones de las tareas de proporcionalidad.

Tabla 7

Contenido de proporcionalidad en el libro saberes y pensamiento científico

Concepto	Grado escolar
----------	---------------

	Primer	Segundo	Tercero
Proporcionalidad	<i>Proporcionalidad y no proporcionalidad.</i> - Registro y tabulación de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales. - Gráficas en el plano cartesiano de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales.	<i>Proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades y su representación.</i> - Cálculo de la proporcionalidad inversa. - Representación gráfica, tabular y algebraica de la proporcionalidad inversa.	<i>Procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.</i> - Métodos para hallar un término de una relación proporcional. - Ejemplos de resolución de problemas de reparto proporcional.
Páginas	159-164	41-46	115-118
Tareas	5	3	4
Total		12	

Nota. Elaboración propia con base en (SEP, 2024b; SEP, 2024c; SEP, 2024d).

3.3 Proceso de diseño de tareas

Para la valoración de la idoneidad epistémica se analizará cada tarea utilizando la configuración epistémica y los criterios de idoneidad propuestos en la GALT-Proporcionalidad (presentados en el capítulo anterior). Con la configuración epistémica, se analizará cada objeto primario, es decir, se identificarán situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, argumentos, procedimientos y proposiciones involucrados en la tarea. Asimismo, se identificarán los elementos de Malaspina que son asociados en el modelo de creación de problemas. Posteriormente, se valorará la idoneidad epistémica con los indicadores de la GALT-Proporcionalidad, para ello se identificará los indicadores que la tarea contempla, luego se analizará la pertinencia del indicador, es decir, para la etapa de la creación de las tareas, se selecciona aquellos indicadores que necesitan o pueden ser atendidos, dado que no todos los indicadores se pueden modificar; debido a la categoría elaboración o variación estructurada, ya que en este estudio se pretende utilizar la variación parcial,

además, se contempla que algunos indicadores lograrían presentarse adecuadamente, sin embargo, puede presentarse el caso en donde el contenido ya no logre brindar condiciones para la variación parcial. Finalmente se presentará, la elaboración o variación estructurada de las tareas de proporcionalidad de los tres libros de Educación Secundaria de acuerdo con el análisis y valoración previamente realizada.

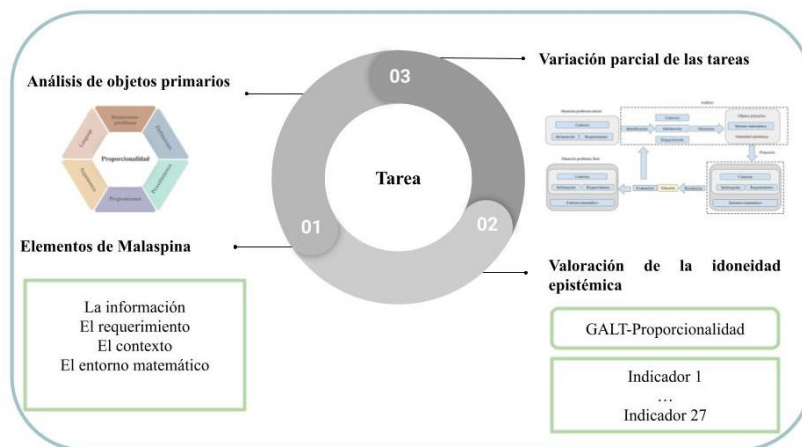
CAPÍTULO 4. Análisis y resultados

En este capítulo se aborda el análisis, la valoración de la idoneidad epistémica y el diseño de las tareas de proporcionalidad de los libros de Educación Secundaria. Para ello, en cada libro de texto, como primera etapa se identificaron los objetos primarios y los elementos de Malaspina involucrados en las tareas, en la segunda etapa se valoró la idoneidad epistémica por medio de los indicadores de la GALT-Proporcionalidad, por último, en la tercera etapa se presenta la variación parcial de cada tarea. Es importante señalar que la codificación para referirse a una tarea en específico, por ejemplo, tarea 1 del libro de primer grado se denominará como T1, para el caso del libro de segundo grado y tercer grado es T6 y T9.

Las tareas se presentan conforme al grado escolar y al libro correspondiente. En ese sentido, para primer grado se analizan las tareas incluidas en la lección Proporcionalidad y no proporcionalidad del libro (SEP, 2024b) “Saberes y pensamiento científico. Colección Ximhai”; para segundo grado las tareas de la lección Proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades y su representación del libro (SEP, 2024c) “Saberes y pensamiento científico. Colección Sk’ Asolil”; por último, las tareas de la lección Procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional del libro (SEP, 2024d) “Saberes y pensamiento científico. Colección Nanahuatzin”. Para el proceso del análisis de las tareas, en la Figura 15 se presenta un esquema general que muestra las etapas que se consideraron.

Figura 15

Proceso del análisis de las tareas



Fuente: Elaboración propia.

4.1 Libro Saberes y pensamiento científico primer grado

La lección Proporcionalidad y no proporcionalidad correspondiente al libro de primer grado (SEP, 2024b) incluye cinco tareas, cada una está conformada por el enunciado (tarea a resolver) y su respectiva solución (en el libro se presenta la secuencia de prácticas para dar solución a la tarea). Por lo anterior, se analiza tanto el enunciado como el proceso de solución que se propone en este libro de texto. Enseguida, se muestran las cinco tareas en la Figura 16.

Figura 16

Tareas del libro de primer grado de la lección proporcionalidad y no proporcionalidad.

T1	T2
Ejemplo 1. Proporcionalidad directa En la central de abasto, dos trabajadores llenan un camión con capacidad de 3 500 kg, con sacos de maíz de 50 kg, en 8 horas. Determinar: a) La masa de 2, 3, 4 y 5 sacos. b) La cantidad de sacos con la cual se llenará el camión.	Ejemplo 2. Proporcionalidad inversa Considerando la información del ejemplo anterior, ¿cuánto tiempo tardarán en cargar el camión 4, 8 y 16 trabajadores?
T3	T4
Ejemplo 1. Ubicación en el plano cartesiano Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano: a) $A(-2, 3)$ b) $B(5, 4)$ c) $C(3, -1)$ d) $D(-2, -3)$	Ejemplo 2. Variación proporcional en el plano cartesiano Graficar en el plano cartesiano los datos obtenidos de la relación entre el número de sacos y su masa en kilogramos.
T5	
Ejemplo 3. Variación no proporcional en el plano cartesiano Graficar en el plano cartesiano los datos obtenidos de la relación entre el número de trabajadores y el tiempo en horas.	

Fuente: T1 se obtuvo de (SEP, 2024b, p.161); T2 de (SEP, 2024b, p.163), T3 de (SEP, 2024b, p.165), T4 de (SEP, 2024b, p.167), y T5 de (SEP, 2024b, p.168).

A continuación, se presenta el proceso de solución que propone el libro de texto de primer grado en la Figura 17.

Figura 17

Solución de las tareas del libro de primer grado

ST1

Solución

- a) Para determinar cuál es la masa de 2, 3, 4 y 5 sacos, se calcula la proporción entre la masa de un saco y la masa de dos sacos:

$$\frac{1}{50} = \frac{2}{d}$$

$$d = (2)(50) = 100$$

Se repite la operación para 3, 4 y 5 sacos:

$$d = (3)(50) = 150$$

$$d = (4)(50) = 200$$

$$d = (5)(50) = 250$$

Los resultados se pueden tabular (organizar en una tabla de datos) para mejorar la visualización, comprensión e interpretación de la información.

Número de sacos	1	2	3	4	5
Masa (kg)	50	100	150	200	250

Solución

- b) La cantidad de sacos que soporta el camión es:

$$\frac{1}{50} = \frac{c}{3500}$$

$$c = \frac{(3500)(1)}{50}$$

$$c = 70 \text{ sacos}$$

Las magnitudes son proporcionales porque todas las razones son iguales a un valor constante:

$$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = \frac{3}{150} = \frac{4}{200} = \frac{5}{250} = \frac{70}{3500} = 0.02$$

ST2

Solución

Entre más trabajadores suban costales al camión, menor será el tiempo que tarden en llenarlo; la variación es de proporcionalidad inversa y la constante se obtiene al multiplicar las cantidades.

Si a es el número de trabajadores y b el tiempo en horas:

$$ab = k$$

$$(2)(8) = 16$$

Para 4 trabajadores:

$$(4)(b) = 16$$

$$b = \frac{16}{4} = 4 \text{ horas}$$

Se realiza el mismo procedimiento para 6, 8 y 16 trabajadores. Luego, se registran los valores en una tabla.

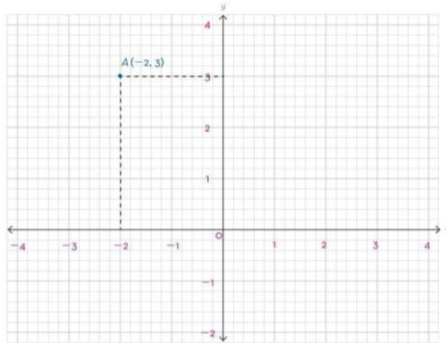
Número de trabajadores	2	4	8	16
Tiempo (horas)	8	4	2	1

Por lo tanto, el tiempo disminuye conforme aumenta el número de trabajadores.

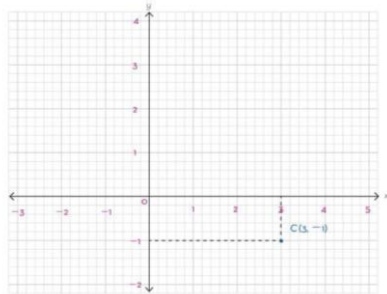
ST3

Solución

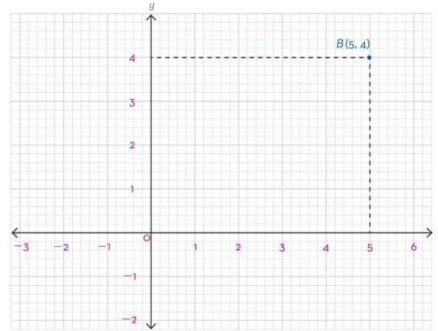
- a) Para graficar el punto $A(-2, 3)$, a partir del origen se desplaza sobre el eje x dos unidades a la izquierda (número negativo) y se suben tres unidades sobre el eje y (número positivo).



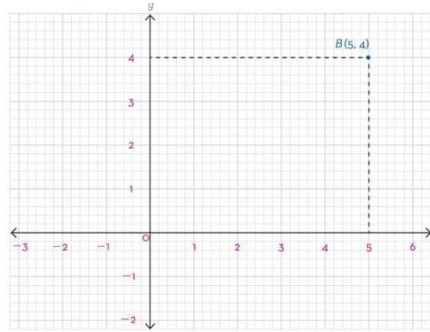
- c) Para graficar el punto $C(3, -1)$, a partir del origen éste se desplaza sobre el eje x tres unidades a la derecha (número positivo) y baja (número negativo) una unidad sobre el eje y .



- b) Para graficar el punto $B(5, 4)$, a partir del origen éste se desplaza sobre el eje x cinco unidades a la derecha (número positivo) y sube cuatro unidades sobre el eje y .



- b) Para graficar el punto $B(5, 4)$, a partir del origen éste se desplaza sobre el eje x cinco unidades a la derecha (número positivo) y sube cuatro unidades sobre el eje y .



ST4

Solución

Los valores correspondientes al número de sacos se ubicarán en el eje x ; mientras los correspondientes a la masa estarán en el eje y .

Número de sacos	1	2	3	4	5
Masa (kg)	50	100	150	200	250



La gráfica de una relación proporcional siempre va en aumento, tanto en el eje x como en el y .

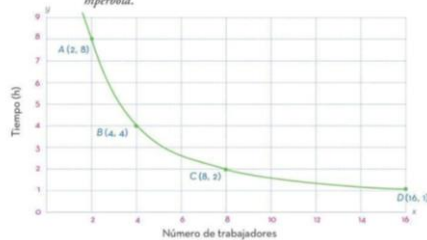
ST5

Solución

Los valores correspondientes al número de trabajadores están en el eje x , mientras que el tiempo, en el eje y .

Número de trabajadores	2	4	8	16
Tiempo (horas)	8	4	2	1

Esta relación es de proporcionalidad inversa, por lo cual los puntos no forman una recta, sino una curva que se llama *hipérbola*.



Fuente: ST1 se obtuvo de (SEP, 2024b, p.161); ST2 de (SEP, 2024b, p.163), ST3 de (SEP, 2024b, p.165), ST4 de (SEP, 2024b, p.167), y ST5 de (SEP, 2024b, p.168). ST hace referencia a la solución de la tarea.

4.1.1 Identificación de objetos primarios y elementos de Malaspina

En la Tabla 8 se presentan los objetos primarios y los elementos de Malaspina involucrados en las tareas del libro de primer grado. Sobre las situaciones-problemas se presentan tareas extras matemáticas (4) e intra-matemáticas (1), los significados asociados a la proporcionalidad involucrados son aritmético (2) y algebraico (2). Acerca de los lenguajes en todas las tareas se presentan términos resaltados en colores, por ejemplo, en la T1 se presenta antecedente, consecuente, cociente, valor numérico, unidad, términos medios, términos extremos, en la T1; en los procedimientos aplica proceso como $ab=cd$ para resolver proporciones, en algunas tareas (2) no presenta algún procedimiento. En conceptos-definición se abordan nociones de razón, proporción, así como las definiciones de proporcionalidad inversa y plano cartesiano. En las proposiciones y argumentos se realizan afirmaciones y justificaciones en las soluciones, por ejemplo, en la T1 se afirma que las cantidades son proporcionales si las razones son iguales a un valor constante (k) y en caso contrario a ser proporcionales, si existe una razón para la cual se obtiene un valor distinto al resto, para el caso de los argumentos en T1 solicita hallar la cantidad de sacos que se transporta y señala que las magnitudes son proporcionales al realizar operaciones (constante de proporcionalidad). Por otra parte, se identificaron todos los elementos de Malaspina (la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático) en las tareas; específicamente sobre el entorno matemático se encontró que las tareas abordan conceptos de proporcionalidad inversa (2), proporcionalidad directa (2) y sistema de coordenadas (1). El análisis detallado se presenta a continuación en la Tabla 8.

Tabla 8

Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)

<i>Tarea</i>	<i>Situación problema</i>
<i>T1</i>	Presenta un contexto extra-matemático dado que contempla una situación de la vida real. La tarea se encuentra asociada al significado aritmético ya que se enfoca en la noción de razón y proporción

- T2* La tarea involucra el significado aritmético de la proporcionalidad dado que aborda nociones de constante de proporcionalidad. La tarea es extra-matemático ya que presenta una situación de la vida cotidiana que es la central de abastos.
- T3* La tarea es intra-matemático dado que la situación no plantea una situación cotidiana. La tarea solicita ubicar puntos en el plano cartesiano. No se aborda algún significado de la proporcionalidad, la tarea se presenta como una tarea introductoria para tratar en las siguientes tareas el significado algebraico.
- T4* El significado de la proporcional asociado a la tarea es el significado algebraico dado que presenta variación proporcional en el plano cartesiano y el contexto es intra-matemático dado que a pesar de que hace referencia un problema previo con contexto extra matemático, en la tarea solo presenta una tabla con números que se refiere al número de sacos y masa en kg.
- T5* El significado de la proporcionalidad asociado a la tarea es el significado algebraico dado que presenta variación no proporcional. El intra-matemático dado que presenta una tabla con números que hace referencia al número de trabajadores y el tiempo en horas de una tarea previa.

Lenguaje

- T1* Las expresiones que se presentan en la introducción previa a la tarea son las notaciones que son señaladas en colores (antecedente, consecuente, cociente, valor numérico, unidad, términos medios, términos extremos) y las expresiones que se presentan en la práctica matemática involucrada en el proceso de solución son las notaciones que son distinguidas por colores para señalar las operaciones. Utiliza 3 términos para un solo término: cociente, valor unitario y constante de proporcionalidad.
- T2* Las expresiones que se muestran en la práctica matemática son los términos que resaltan en color (antecedentes, consecuente y consecuente). Presenta una tabla en donde se registran los datos para su interpretación. No presenta una justificación de la interpretación. La proporcionalidad inversa está involucrada en la tarea, ya que el tiempo es menor conforme al aumento del número de trabajadores.

<i>T3</i>	Las expresiones de la tarea es el plano cartesiano y los términos que señala con colores (Eje de las coordenadas, Eje de las abscisas Cuadrante I, II, III, IV, puntos de coordenadas).
<i>T4</i>	Las expresiones son los términos que señala con colores, los cuales son el número de sacos, masa en kg y el gráfico con la recta en color verde que se ubican en una tabla de valores.
<i>T5</i>	Las expresiones son los términos que utiliza para resaltar con colores, los cuales son los números del eje x e y. Las gráficas obtenidas después de haber ubicado los puntos en el plano, el término antecesor, consecuente y cociente.
<i>Procedimientos</i>	
<i>T1</i>	Presenta operaciones para resolver las proporciones, que consiste en aplicar $ab = cd$ no obstante no desarrolla el paso a paso de las operaciones. Hace uso de una tabla para ejemplificar la visualización de las respuestas, para sugerir interpretar los resultados (la tabla no fue solicitada en el enunciado), sin embargo, no presenta la interpretación de la información. En la otra parte de la tarea resuelve una proporción en donde realiza un procedimiento similar al inciso a).
<i>T2</i>	Presenta operaciones en donde aborda la proporcionalidad inversa con el concepto de constante de proporcionalidad. Realiza una operación y las siguientes se las deja al lector.
<i>T3</i>	Presenta a modo de redacción la solución, en donde señala que debemos ubicarnos en el origen, después ubicar la coordenada x y movernos en el eje x a la izquierda cuando se presenten valores negativos y a la derecha valores positivos, posteriormente, ubicar la coordenada y, y desplazarnos en y hacia arriba cuando tenemos valores positivos y hacia abajo cuando tenemos valores negativos.
<i>T4</i>	No presenta operaciones para ubicar los puntos en el plano cartesiano.
<i>T5</i>	No presenta procedimientos matemáticos, solamente la gráfica en donde ubica los puntos sin alguna explicación de cómo los llegó a ubicar.
<i>Conceptos-Definición</i>	

T1	Aborda antes de presentar la tarea introduce la noción de <i>razón</i> y <i>proporción</i> (Una razón es la comparación de dos cantidades, mientras que la proporción lo es entre dos razones, ambas relacionadas con un número constante llamado valor unitario). Posteriormente, el concepto de razón como: una razón es la comparación de dos cantidades, para ello se usa la división con su cociente. La razón entre a y b se puede escribir a/b, $a:b$, $a b$ y proporción: una proporción es una igualdad entre dos o más razones relacionadas por una o más razones relacionadas por una constante: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ para una tarea de proporcionalidad directa. Ambas definiciones son abordadas de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes.
T2	Aborda el concepto de proporcionalidad inversa (Una proporción es la comparación de dos o más razones y puede ser proporcional o no proporcional; si estas últimas corresponden a una proporcionalidad inversa, se relacionan mediante una constante de proporcionalidad. Entonces: Son proporcionales si ambas cantidades aumentan en la misma proporción y son de proporcionalidad inversa si una cantidad disminuye en cierta proporción. Su valor constante corresponde a un producto.) en donde resuelve utilizando la constante de proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ donde k es la constante de proporcionalidad o valor unitario.
T3	Previo a la tarea, define cómo está conformado un plano cartesiano: El plano cartesiano se forma por dos rectas perpendiculares. El punto donde se cruzan se llama origen. El eje horizontal es el eje x o de abscisas y el vertical es el eje y o de ordenadas. Se divide en cuatro cuadrantes: (I, II, III, IV) para graficar números positivos y negativos; los puntos se grafican en forma de par ordenado, con coordenadas (x, y). La definición de plano cartesiano aborda distintos términos adecuados, no obstante, podría definir par ordenado.
T4	No presenta conceptos o definiciones en la tarea.
T5	Presenta la definición de razón: una razón es la comparación de dos cantidades relacionadas por una constante.

Proposiciones

- T1* En la práctica matemática realiza afirmaciones en donde señala que la tarea se calcula por medio de una proporción.
- Además, afirma que las cantidades serán proporcionales si las razones son iguales a un valor constante k y que las cantidades serán no proporcionales si existe alguna razón para la cual se obtiene un valor distinto al resto.
- T2* Realiza afirmaciones en donde a través de una tabla (que no solicita en el enunciado) presenta los datos obtenidos y concluye mencionando que el tiempo disminuye conforme el número de trabajadores, pero no se muestra una justificación.
- T3* Afirman que las relaciones proporcionales y no proporcionales se pueden graficar en el plano cartesiano si se registran las cantidades correspondientes en los ejes x y y . Una vez ubicados los puntos, se unen con una línea.
- Además, afirma que todo punto se debe nombrar con una línea con una letra mayúscula antes del paréntesis $P(x,y)$.
- T4* Afirma que la gráfica de una relación proporcional siempre va en aumento tanto en el eje x como en el eje y .
- T5* Afirma que para graficar un punto en el plano cartesiano se utiliza sus coordenadas en los ejes x y y , se debe prestar atención al signo, los números negativos en x siempre van a la izquierda y los positivos a la derecha, en el eje y , los positivos hacia arriba y los negativos hacia abajo. Una vez colocados todos los puntos se unen mediante una línea. La gráfica visualmente corresponde a una hipérbola; de acuerdo con los temas previos a la proporcionalidad, los estudiantes no tendrían conocimiento de verificar que se trata de una hipérbola.

Argumentos

- T1* En el inciso b) de la tarea pide hallar la cantidad de sacos que transporta el camión, sin embargo, encuentra la cantidad de sacos y señala que las magnitudes son proporcionales al realizar operaciones (no se solicitó en el enunciado demostrar que las magnitudes son proporcionales).

<i>T2</i>	Brinda una justificación del por qué se trata de una proporcionalidad inversa implícitamente.
<i>T3</i>	Presenta una explicación en donde justifica como se debe ubicar los puntos en el plano: se desplaza horizontalmente sobre el eje x el primer valor de la coordenada (derecha para positivos, izquierda para negativos) y después se desplaza verticalmente el valor indicado en la segunda coordenada (arriba para positivos, abajo para los negativos).
<i>T4</i>	Únicamente justifica que los valores encontrados son para los números de sacos en el eje x y la masa en el eje y.
<i>T5</i>	Justifica que los datos de una tabla se pueden representar como puntos en el plano cartesiano.

La información

<i>T1</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son la capacidad del camión de 3500 kg y la masa de los sacos de maíz 50 kg.
<i>T2</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son dos trabajadores y el tiempo en que realizan el trabajo 8 horas.
<i>T3</i>	La información es cuantitativa dado que solicita hallar en el plano cartesiano los siguientes puntos: a) A(-2,3) b) B(5,4) c) C(3,-1) d) D(-2,-3)
<i>T4</i>	La información es de tipo cuantitativa dado que presenta el número de sacos y la masa en kg.
<i>T5</i>	Presenta datos cuantitativos que presentan numéricamente el número de sacos y la masa en kg.

El requerimiento

<i>T1</i>	Se pide: a) hallar la masa de 2, 3, 4 y 5 sacos y b) la cantidad de sacos con la cual se llenará el camión, es decir, se pide hallar datos cuantitativos. No menciona que se deba justificar las respuestas para obtener datos cualitativos del proceso de solución y no incluye gráficos ni demostraciones.
-----------	--

<i>T2</i>	Se pide que se encuentre el tiempo que se tarda en carga los camiones.
<i>T3</i>	Se pide ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano: a) $A(-2,3)$ b) $B(5,4)$ c) $C(3,-1)$ d) $D(-2,-3)$
<i>T4</i>	Solicita graficar en el plano cartesiano los datos obtenidos de la relación entre el número de sacos y su masa en kilogramos.
<i>T5</i>	Se pide graficar en el plano cartesiano los datos obtenidos de la relación entre el número de sacos y su masa en kilogramos.

El contexto

<i>T1</i>	Presenta un contexto extra matemático, el cual el contexto se sitúa en la central de abastos.
<i>T2</i>	El contexto es extra-matemático, dado que se sitúa en una central de abastos.
<i>T3</i>	El contexto es intra-matemático dado que solo se presentan los puntos a ubicar en el plano cartesiano.
<i>T4</i>	El contexto es intra-matemático dado que presenta una tabla con datos puramente numéricos.
<i>T5</i>	El contexto es intra-matemático dado que solo presenta los números en una tabla.

El entorno matemático

<i>T1</i>	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad directa en donde se aborda nociones de razón, proporción y la constante de proporcionalidad
<i>T2</i>	El marco en donde se ubican los conceptos es la proporcionalidad inversa.
<i>T3</i>	El entorno matemático se encuentra en el marco matemático del sistema de coordenadas.
<i>T4</i>	El marco matemático que engloba es el sistema de coordenadas.
<i>T5</i>	El marco matemático que se ubica los conceptos es el sistema de coordenadas

Nota. Elaboración propia.

4.1.2 Valoración de la idoneidad epistémica

Se presenta la valoración de la idoneidad epistémica de las tareas utilizando los indicadores de GALT- Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b). En la Tabla 9 se presenta con (✓) aquellas tareas que cumplen con lo establecido en los indicadores y con (-) aquellas que no los satisfacen.

Tabla 9

Identificación de indicadores en T1

Indicador	Tareas				
	T1	T2	T3	T4	T5
I1	✓	✓	-	✓	✓
I2	✓	✓	-	-	-
I3	-	-	-	-	-
I4	-	-	-	-	-
I5	✓	✓	-	-	✓
I6	-	-	-	-	-
I7	-	-	-	-	-
I8	✓	✓	✓	✓	✓
I9	✓	✓	✓	✓	✓
I10	✓	✓	✓	✓	✓
I11	-	-	-	-	-
I12	✓	✓	-	-	✓
I13	✓	✓	-	-	-
I14	✓	✓	-	-	-
I15	-	-	-	-	-
I16	✓	✓	-	✓	-
I17	✓	-	-	-	-
I18	-	-	-	-	-
I19	✓	-	✓	-	-
I20	-	-	-	-	-

I21	-	-	-	-	-
I22	✓	✓	-	✓	✓
I23	-	-	-	-	-
I24	-	-	-	-	-
I25	-	-	-	-	-
I26	-	-	-	-	-
I27	-	✓	✓	✓	✓

Nota. Elaboración propia. I1 hace referencia a indicador 1, I2 al indicador 2, I3 al indicador y así sucesivamente para los otros indicadores.

Para el componente *significados*, se valoraron 20 indicadores, en la valoración del indicador 1 (I1) se encontró que las tareas están asociadas al significado aritmético (T1 y T2), algebraico (T4 y T5), por otra parte, se identificó que una tarea (T3) está dentro de un contexto intra-matemático donde aborda el sistema de coordenadas para ubicar puntos como una noción previa para abordar otros significados en las tareas. En el I2, la T1 solicita hallar valores faltantes, en la solución presenta una tabla en donde se concentran los resultados obtenidos sin haberla solicitado previamente, se sugiere presentar información en la tabla para interpretar y comparar los resultados obtenidos; asimismo en la T2 se presenta una tarea de valor faltante que tenía como objetivo abordar la proporcionalidad inversa por medio de la constante de proporcionalidad, además en la solución se propone comparar los resultados, mientras que, en T3, T4 y T5 no se presentan tareas de valor faltante. Para I3 se halló que ninguna de las tareas presentó situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas, sin embargo, en la solución de T1 se puede identificar que se trata de una comparación multiplicativa donde la comparación es por medio de un cociente (razón).

Asimismo, en I4 no se hace explícita la relación multiplicativa en el enunciado, sin embargo, después de analizar la solución se identifica que se trata de una relación multiplicativa (T1, T2, T4 y T5). Para I5 se halló que las tareas involucran el uso de razones internas (T1, T2 y T5). En I6 no se presentaron tareas que involucran situaciones de cálculo mental. Asimismo, para I7 en ninguna tarea se halló que el estudiante proponga otra tarea relacionada con conceptos relacionados con la proporcionalidad. En I8 se halló que en la T1 hace uso de una tabla en la solución, sin embargo, no realizan una interpretación de los resultados, en T2 utilizan expresiones en colores para indicar

los procedimientos, pero no se incluyen gráficas. Se incluye una tabla en donde se propone comparar e interpretar los resultados, en la T3 se utilizan gráficas para modelizar la tarea, en este caso para ubicar los puntos en el plano cartesiano. Se utilizan los términos origen, abscisas, ordenadas, cuadrante I, II, III, IV, en la T4 se utilizan gráficas para modelizar la tarea, en este caso para ubicar los puntos en el plano cartesiano y en la T5 se utilizan gráficas para modelizar la tarea, en este caso para ubicar los puntos en el plano cartesiano.

En el I9 se encuentra que en todas las tareas el lenguaje es adecuado con respecto al nivel educativo de los estudiantes. En I10 en T1 se fomenta en la solución que los estudiantes interpreten los resultados a través de una tabla, en T2 se fomenta que los estudiantes establezcan relaciones proporcionales, pero se presenta una tabla que no fue indicada en el enunciado del problema, en T3 se fomenta que los estudiantes ubiquen los distintos puntos de las coordenadas en el plano cartesiano, en T4 se fomenta que los estudiantes construyan mediante un gráfico el segmento de recta en el plano cartesiano y en T5 se fomenta que los estudiantes construyan mediante un gráfico la hipérbola en el plano cartesiano. En I11 en todas las las tareas no se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas, en T5 solamente se presentan gráficos correspondientes de ubicar puntos en el plano.

En el caso de I12 en la T1 se presenta de forma adecuada al nivel educativo correspondiente los conceptos. No obstante, se refiere con tres términos a un solo concepto: cociente, valor constante y constante de proporcionalidad, en la T2 se presentan los conceptos de proporcionalidad inversa, fracción y de proporcionalidad directa, sin embargo, ya no se presentan los conceptos de razón y proporción, en T3 y T4 no se presentan los conceptos fundamentales de la proporcionalidad, mientras que en T5 sí se presentan los conceptos fundamentales de la proporcionalidad: Una razón es la comparación de dos cantidades relacionadas por una constante. Una proporción es la comparación de dos razones. Si son de proporcionalidad inversa, la constante k se calcula como un producto. Si incrementa los valores de un conjunto de datos, disminuirán los del otro en la misma proporción $a/b = k$. En el I13 se presentan situaciones donde se reconozca la definición de razón y proporción, pero no de porcentaje (T1), en la T2 se propone una situación de proporcionalidad inversa, mientras que en T3, T4 y T5 no se presentan situaciones en donde el estudiante aplique nociones de razón y proporción.

Por otro lado, en el I14 se presentan proposiciones de razón y proporción (T1), asimismo se presentan proposiciones adecuadas para el nivel educativo (T2), por otro lado, en T3, T4 y T5 no se establecen proposiciones suficientes para distinguir una situación proporcionalidad. En T4 solamente señalan que la gráfica de una relación proporcional siempre va en aumento, tanto en el eje x como en el eje y T5 no se presentan proporciones del tema de razón, proporción y porcentajes. Para I15 en todas las tareas no se establecen las proposiciones suficientes para poder identificar una situación proporcional, en T5 establecen que la relación es de proporcionalidad inversa, por lo cual los puntos no forman una recta sino una curva que se llama hipérbola. Si la relación es proporcional la gráfica que se forma es una recta, pero si es de proporcionalidad inversa, forma una curva que tiende a acercarse a los ejes cartesianos. Esta curva es similar a una hipérbola. Por otra parte, en I16 en la T1 se propone para hallar las respuestas de las proporciones el uso de propiedades de magnitudes directamente proporcional para completar la tabla, en T2 se presentan situaciones en donde el estudiante aplique situaciones proporcionales, en específico de proporcionalidad inversa, en T3 se presentan situaciones en donde el alumno genere propiedades de magnitudes directamente proporcional.

En el I17 en la T1 se presentan los procedimientos de las operaciones, no obstante, presenta la proporción como un algoritmo que propone con anterioridad para resolver la proporción y menciona que se resuelven de forma similar presentando los resultados sin mostrar los procedimientos, en T2 no se presentan de forma clara, no muestra los conceptos de razón ni proporción, en la T3 y T4 no se presentan procedimientos de razón y proporción. La tarea T3 propone ubicar coordenadas en el plano cartesiano. Así mismo, en I18 se halló que las tareas no se presenta una situación en donde se le solicite al estudiante proponer un problema o discutir. Para el I19 en la T1 puesto que se identificó este indicador, no se logra argumentar en la solución por qué se utiliza el concepto de proporción, en T2 no se explica de forma adecuada las proposiciones y procedimientos, en la solución menciona que se resuelve de forma similar y presenta la solución, mientras que en T3 si se la proposición presentada como solución si se explica de forma adecuada, por otro lado, en T4 la proposición presentada como solución no explican de manera adecuado de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes. Finalmente, para I20 se halló que en las tareas no se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas.

Para el componente *relaciones* se valoraron tres indicadores, para el I21 se halló que las tareas no establecen relaciones con números fraccionarios, solo con enteros positivos. En I22 en las tareas se hace explícito el uso de razones entre números (T1, T2, T4 y T5), por ejemplo, en la T2 se utilizan números para los trabajadores y para el caso de las magnitudes se utilizan horas para el tiempo. En T4 se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes, en esta tarea se utilizan el número de sacos y su masa en kilogramos. Por último, en I23 en la T1, T2 solamente se trabaja con el significado aritmético mediante procedimientos, mientras que en T4 y T5 el algebraico.

Para el componente *procesos* se valoraron dos indicadores, en el I24 se encontró que todas las tareas no se promueven que los estudiantes argumenten situaciones de razones, proporciones y porcentajes, en el I25 se halló que en las tareas (T1, T2, T3, T4, T5) no proponen modelos matemáticos de la función lineal en situaciones que involucren a la razón, proporcionalidad y porcentajes. En I26 se halló que en todas las tareas no se propone situaciones en donde el estudiante describa generalizaciones o conjeturas de patrones geométricos.

Por último, para el componente *conflictos epistémicos* se valoró un indicador, para I27 se halló que en la T1 existen ambigüedades en las definiciones ya que se presentan tres términos para referirse a un mismo concepto: *cociente* (k), *valor constante*, *constante de proporcionalidad*. Se sugiere no utilizar el término cociente (k) como sinónimo de constante de proporcionalidad, mientras que las tareas T2, T3, T4 y T5 se presentan de forma adecuada y sin ambigüedades, en T4 se hace la diferencia entre una razón de una fracción.

Como primeros resultados acerca de esta valoración epistémica en la lección de proporcionalidad del libro de primer grado, se tiene que en la T1 se cumplen 13 indicadores, en la T2 se cumplen 12 indicadores, en la T3 se cumplen cinco indicadores, en la T4 se cumplen siete indicadores y T5 se cumplen ocho indicadores de un total de 27 indicadores.

4.1.3 Diseño de las tareas del libro de primer grado

Posterior a la valoración de la idoneidad epistémica se diseñaron tareas tomando en cuenta lo encontrado en la valoración de algunos indicadores. Por ejemplo, para la T1 se valoraron 27 indicadores de los cuales se halló que la tarea no satisface lo establecido en 14. No obstante, en el diseño no se consideraron todos los indicadores dado que no todos pueden ser incluidos principalmente por la naturaleza de la situación-problema involucrada en cada tarea. A

continuación, se presenta la propuesta de diseño de las tareas (Burgos et al., 2024) en donde se tomó en cuenta los elementos de Malaspina, el análisis de los objetos primarios y la valoración epistémica de cada tarea.

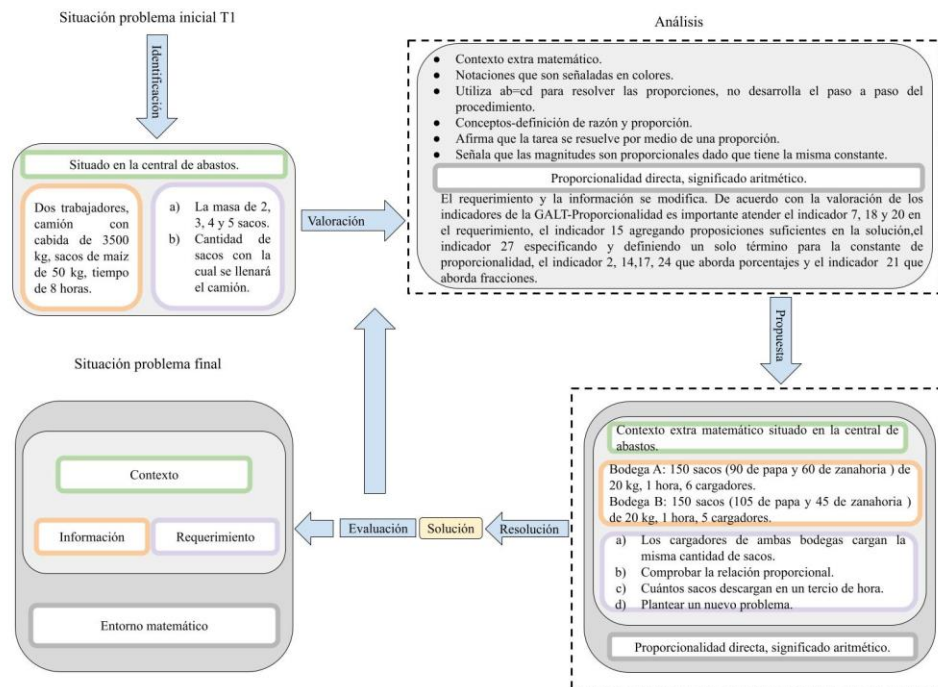
Propuesta T1

De acuerdo con el modelo de Burgos et al. (2024) en la categoría elaboración o variación estructurada, se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad directa que conlleva el uso de razones y proporciones.

En la T1 para el diseño se consideró atender los indicadores I2, I7, I14, I15, I17, I18, I20, I21, I24 e I27 dado que incluyen elementos donde el estudiante tenga que proponer, argumentar situaciones de tipo proporcional, la presentación de procedimientos fundamental de razón, porcentajes y proporcionalidad, la justificación de enunciados y proposiciones matemáticas de proporcionalidad, establecer relaciones del tema de proporcionalidad con fracciones y presentar sin ambigüedades los conceptos, proposiciones, lenguajes etc., de proporcionalidad. Por otra parte, los indicadores (I3, I4, I6, I11, I23, I25, I26) no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 18 se presenta el proceso del diseño de T1, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 18

Proceso del diseño de T1



Fuente: Elaboración propia.

Diseño de T1

En la central de abastos en la bodega A, seis cargadores por igual descargan 150 sacos de 20 kg en 1 hora; de los 150 sacos que transporta el camión, 90 sacos son de papa y 60 sacos de zanahorias. Mientras que, en la bodega B, cinco cargadores descargan 150 sacos de 20 kg en 1 hora; de los 150 sacos que transporta el camión, 105 sacos son de papa y 45 sacos de zanahorias.

Considerando la información anterior, contesta las siguientes preguntas.

- ¿Los cargadores de ambas bodegas cargan la misma cantidad de sacos?
- Comprueba que la relación del inciso a) es una relación proporcional directa.
- ¿Qué porcentaje de papa y zanahoria se descarga en cada camión?
- En un tercio de hora, ¿cuántos sacos habrá descargado cada cargador?
- Plantea un nuevo problema en donde puedas establecer una relación proporcional directa y discute de forma grupal la propuesta.

En todas tus soluciones justifica tu respuesta.

Solución a)

Las dos magnitudes en donde se establece una relación proporcional directa es:

$$\frac{\text{Número de sacos}}{\text{Número de cargadores}}$$

Por lo tanto, los datos cuantitativos que se utilizan para dar solución son el número de sacos y el número de cargadores.

Veamos el caso de la bodega A

Para hallar cuánto carga cada cargador se establece una razón

$$\frac{150 \text{ sacos}}{6 \text{ cargadores}} = 25 \text{ sacos por cargador}$$

Por otro lado, en la bodega B

$$\frac{150 \text{ sacos}}{5 \text{ cargadores}} = 30 \text{ sacos por cargador}$$

Si se comparan las razones obtenidas se puede obtener que individualmente, cada cargador de la bodega B carga 5 sacos más que cada cargador de la bodega A. Por lo tanto, los cargadores de la bodega B cargan más que los de la bodega A.

Solución b)

Esto se trata de una proporcionalidad directa dado que el número de sacos aumenta o disminuye de manera proporcional directa a la cantidad de los cargadores. Lo anterior podemos verificarlo obteniendo la constante de proporcionalidad.

Del inciso a) se halló que en la bodega A, cada cargador logra cargar 25 sacos, por lo tanto, dos trabajadores cargaran 50 sacos. Lo anterior lo podemos representar en la siguiente tabla.

Número de cargadores	1	2	3	4	5	6
Número de sacos	25	50	75	100	125	150

En la tabla anterior se puede interpretar que conforme aumenta el número de cargadores aumenta el número de sacos, obteniendo la constante de proporcionalidad es posible determinar que las magnitudes son proporcionales porque todas las razones son iguales a un valor constante.

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} = \frac{3}{75} = \frac{4}{100} = \frac{5}{125} = \frac{6}{150} = 0.04$$

Continuando con la bodega B, anteriormente se obtuvo que cada cargador logra cargar 30 sacos, por lo tanto, dos trabajadores cargan 60 sacos. Lo anterior se representa en la siguiente tabla.

Número de cargadores	1	2	3	4	5
Número de sacos	30	60	90	120	150

En la tabla podemos interpretar que conforme aumenta el número de cargadores aumenta el número de sacos, obteniendo la constante de proporcionalidad es posible determinar que las magnitudes son proporcionales porque todas las razones son iguales a un valor constante.

$$\frac{1}{30} = \frac{2}{60} = \frac{3}{90} = \frac{4}{120} = \frac{5}{150} = 0.0\bar{3}$$

Para dar solución a este inciso se utilizaron el número de cargadores y el número de sacos como datos cuantitativos.

Solución c)

De la información del problema se obtiene que el camión de la bodega A se descargan 90 sacos de papa y del camión de la bodega B se descargan 105 sacos de papa; mientras que, de zanahoria, en la bodega A se descargan 60 sacos y en la bodega B se descargan 45 sacos. En ambos camiones en total se descargaron 150 sacos. Con esta información se puede establecer las siguientes razones para hallar el porcentaje de sacos de papa y zanahoria de cada camión.

Porcentaje de sacos de papa y zanahoria del camión de la bodega A

$$\frac{90 \text{ sacos de papa}}{150 \text{ sacos totales}} = 0.6 = 60\% \text{ sacos de papa}$$

$$\frac{60 \text{ sacos de zanahoria}}{150 \text{ sacos totales}} = 0.4 = 40\% \text{ sacos de zanahoria}$$

Porcentaje de sacos de papa y zanahoria del camión de la bodega B

$$\frac{105 \text{ sacos de papa}}{150 \text{ sacos totales}} = 0.7 = 70\% \text{ sacos de papa}$$

$$\frac{45 \text{ sacos de zanahoria}}{150 \text{ sacos totales}} = 0.3 = 30\% \text{ sacos de zanahoria}$$

Por lo tanto, el camión de la bodega A carga un 60% de sacos de papa y 40% sacos de zanahoria. Mientras que el camión de la bodega B carga 70% sacos de papa y 30% sacos de zanahorias.

Solución d)

Para determinar cuántos sacos habrán descargado en ambas bodegas, se establece la siguiente proporción:

$$\frac{\text{tiempo total}}{\text{número total de sacos}} = \frac{\text{tercio del tiempo total}}{\text{número de sacos a hallar}}$$

Para ello se utilizan los siguientes datos cuantitativos: el tiempo total que es una hora, el tercio de tiempo total y el número total de sacos.

Bodega A

$$\frac{1}{150} = \frac{\frac{1}{3}}{d}$$

$$d = \left(\frac{1}{3}\right)(150) = 50$$

Por lo tanto, cada cargador descarga en un tercio de hora 50 sacos.

Bodega B

$$\frac{1}{150} = \frac{\frac{1}{3}}{d}$$

$$d = \left(\frac{1}{3}\right)(150) = 50$$

Por lo tanto, cada cargador descarga en un tercio de hora 50 sacos.

Solución e)

Se espera que los estudiantes puedan plantear un problema que contenga una relación de proporcionalidad directa, cambiando todos o algunos de los elementos: requerimiento, información, entorno matemático, contexto. Un ejemplo esperado de la propuesta es:

En una pastelería, se utilizan $\frac{1}{2}$ *kg* de azúcar para hacer un pastel. Durante el día la pastelería recibe un pedido de 30 pasteles, pero en el almacén solamente cuentan con 9 *kg* de azúcar. ¿Necesitarán más azúcar o les será suficiente con los 9 *kg*?

Solución.

Para poder determinar si se necesita más azúcar o no, se calcula la proporción entre los *kg* de azúcar de un pastel y los *kg* de azúcar de 30 pasteles. Los datos cuantitativos que se utilizan para dar respuesta al problema son los *kg* de azúcar de un pastel y los 30 pasteles.

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{30}{d}$$

$$d = (30)\left(\frac{1}{2}\right) = 15$$

Dando respuesta al problema, se necesitará más azúcar dado que para 30 pasteles se necesitan 15 *kg* de azúcar y solamente cuentan con 9 *kg* de azúcar.

En la Tabla 10, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T1. Es importante señalar que la T1 satisface el I2, I7, I14, sin embargo, se considera incluir en la propuesta las sugerencias detalladas en la valoración de la idoneidad epistémica.

Tabla 10*Indicadores considerados en T1*

Indicador	Criterios atendidos en T1
I2	Se atiende la sugerencia sobre presentar en tablas los resultados en la parte de la solución. Además, se incluye en el requerimiento un inciso en donde se solicita al estudiante aplicar procedimientos de porcentajes.
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad directa.
I14	En la parte de la solución se agregaron proposiciones del tema de proporcionalidad de forma clara y detallada. Además, se incluye en el requerimiento un inciso que toma en cuenta al porcentaje en la solución.
I15	Se incluyeron en las soluciones proposiciones suficientes para que el estudiante distinga una situación proporcional, explicando el porqué de cada paso incluido en la solución.
I17	Se presenta de forma clara y desglosada los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (regla de tres y uso de constante de proporcionalidad), asimismo se detalla el por qué la tarea se trata de una relación de proporcionalidad directa.
I18	Se agregó un inciso en donde el estudiante debe generar una nueva situación proporcional directa considerando el significado aritmético.
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I21	Se incluye a los números fraccionarios en un inciso del requerimiento, por lo tanto, se agrega el trabajo con fracciones (representación y operaciones) en los procedimientos asociados a la proporcionalidad.
I24	Se incluye como parte del requerimiento diversas situaciones donde el estudiante argumente, explique y verifique que se trata de una relación proporcional, asimismo se pide que justifique sus respuestas.

- I27 Dado que la tarea original presenta distintos términos cociente, valor unitario y constante de proporcionalidad, se agregó únicamente el término “constante de proporcionalidad” para no generar ambigüedades.

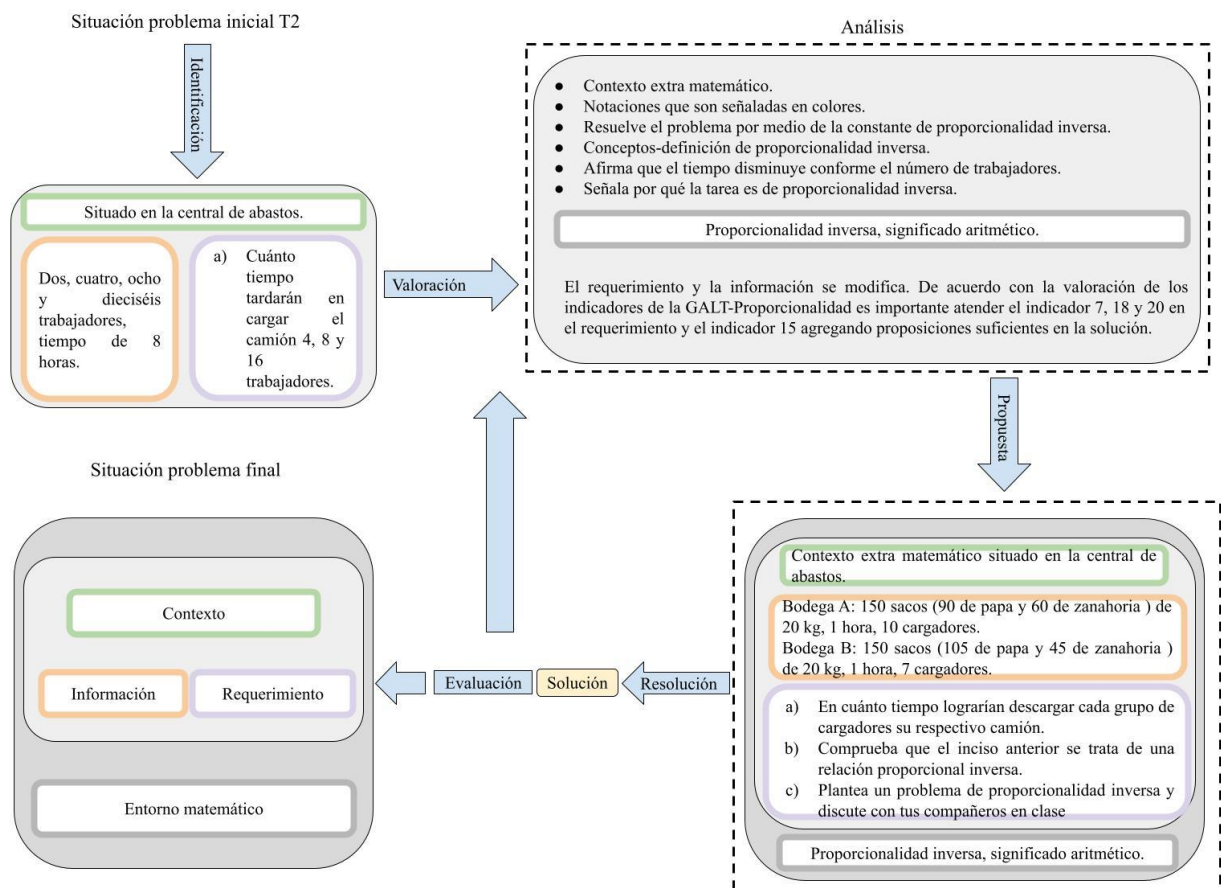
Nota. Elaboración propia.

Propuesta T2

Para el diseño de T2 se consideró mantener la relación con T1, es decir, se dará continuación con la situación-problema establecida en T1 y con ello se conserva la información que sea relevante para proponer la nueva tarea. Por lo tanto, se modifica la información y el requerimiento, se conserva el contexto y el entorno matemático que recae en la proporcionalidad inversa. Por otra parte, se atendieron los indicadores I7, I15, I18, y I20 dado que estos consideran la importancia de que el estudiante proponga, genere y discuta nuevas situaciones de proporcionalidad, así como incluir proposiciones suficientes para distinguir una situación proporcional y con ello se justifiquen los enunciados y proposiciones del tema de proporcionalidad. Por otra parte, los indicadores I3, I4, I6, I11, I17, I19, I21, I23, I24, I25 e I26 no se incluyeron en el diseño dado la naturaleza de la situación-problema de la tarea. En la Figura 19 se presenta el proceso del diseño de T2, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 19

Proceso del diseño de T2



Fuente: Elaboración propia.

Diseño T2

Retomando la información del problema anterior, contesta las siguientes preguntas:

- Si ahora en la bodega A se contratan diez cargadores y en la bodega B siete cargadores, ¿en cuánto tiempo lograrían descargar cada grupo de cargadores su respectivo camión?
- Comprueba que el inciso anterior se trata de una relación proporcional inversa.
- Plantea un problema de proporcionalidad inversa y discute con tus compañeros en clase.

Justifica cada respuesta.

Solución a)

En una situación de proporcionalidad inversa si una cantidad aumenta la otra disminuye en cierta proporción y su constante de proporcionalidad es el producto de ambas cantidades.

Sea a el número de cargadores y b el tiempo en horas

$$ab = k$$

Entonces para poder hallar la solución, se utiliza los siguientes datos cuantitativos: el número de trabajadores y el tiempo.

Para la bodega A

Si originalmente cuentan con seis cargadores y un tiempo de una hora, obtenemos la constante de proporcionalidad inversa.

$$(6)(1) = 6$$

Si ahora son 10 cargadores lograrán realizar la descarga del camión en el siguiente tiempo $(10)(b) = 6$

$$b = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ de hora}$$

Dado que una hora contiene 60 minutos, si se multiplica 0.6 por 60 *minutos*, el resultado es 36 *minutos*, por lo tanto, diez trabajadores descargan el camión en 36 minutos.

Para la bodega B

Si originalmente cuentan con cinco cargadores y un tiempo de una hora, obtenemos la constante de proporcionalidad inversa.

$$(5)(1) = 5$$

Si ahora son siete cargadores lograrán realizar la descarga del camión en el siguiente tiempo

$$(7)(b) = 5$$

$$b = \frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \text{ de hora}$$

Dado que una hora contiene 60 minutos, si se multiplica $\frac{5}{7}$ por 60 *minutos*, el resultado es $\frac{300}{7}$ *minutos*, correspondiente a $42.\overline{857142}$ *minutos*, por lo tanto, siete trabajadores descargan el camión en aproximadamente 42 minutos.

Solución b)

Para comprobar si el problema se trata de una relación proporcional inversa se puede obtener su constante de proporcionalidad, para ello, se presentan los datos obtenidos previamente en la siguiente tabla. Además, se calculan dos casos más para cada bodega.

Bodega	A				B			
Número de cargadores	6	10	12	15	5	7	9	12
Tiempo en horas	1	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$

De la tabla se puede interpretar lo siguiente, conforme aumenta el número de cargadores el tiempo disminuye. Además, si obtenemos las constantes que no se conocen podemos observar que se tratan de las mismas. Por lo tanto, el problema trata de una relación proporcional inversa.

Bodega A constante de proporcionalidad

$$(6)(1) = 6$$

$$(10)\left(\frac{6}{10}\right) = 6$$

Bodega B constante de proporcionalidad

$$(5)(1) = 5$$

$$(7)\left(\frac{5}{7}\right) = 5$$

Solución c)

Se espera que los estudiantes logren proponer un problema de proporcionalidad inversa, cambiando todos o algunos de los elementos: requerimiento, contexto, información y entorno matemático. Para ello se plantea un ejemplo de un problema en donde se modifica el contexto, la información y el requerimiento.

Dos artesanas realizan en conjunto el bordado de un huipil, para poder culminar el bordado se tardan tres meses. Si ellas necesitan acabar el bordado en dos meses, ¿cuántas artesanas se necesitan para terminar el bordado?

Solución.

Sea a el número de artesanas y b el tiempo en meses

$$ab = k$$

Entonces para poder hallar la solución, se utilizan los siguientes datos cuantitativos: el número de artesanas y el tiempo.

Si se cuentan con dos artesanas y un tiempo de tres meses, obtenemos la constante de proporcionalidad para la proporcionalidad inversa.

$$(2)(3) = 6$$

Para hallar cuántas artesanas se requieren para terminar el bordado en dos meses calculamos lo siguiente:

$$(a)(2) = 6$$

$$a = \frac{6}{2} = 3 \text{ artesanas}$$

Por lo tanto, se necesitan tres artesanas para terminar el bordado en dos meses; este problema es de proporcionalidad inversa dado que cuantos más artesanas trabajen en conjunto menor es el tiempo para terminar el bordado.

En la Tabla 11, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T2 y cómo fueron atendidos.

Tabla 11

Indicadores considerados en T2

Indicador	Criterios atendidos en T2
I7	Se añadió en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde el estudiante plantee un problema de proporcionalidad inversa.

- I15 Se incluyeron en las soluciones proposiciones suficientes para que el estudiante distinga una situación proporcional inversa, explicando el porqué de cada paso incluido en la solución, solicitando al estudiante que verifique que efectivamente se trata de una relación de proporcionalidad inversa. Además, se agregó una tabla con los resultados obtenidos para poder comparar, interpretar y visualizar que se presenta una relación inversamente proporcional.
- I18 Se agregó un inciso en donde el estudiante debe generar una nueva situación proporcional inversa considerando el significado aritmético.
- I20 En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.

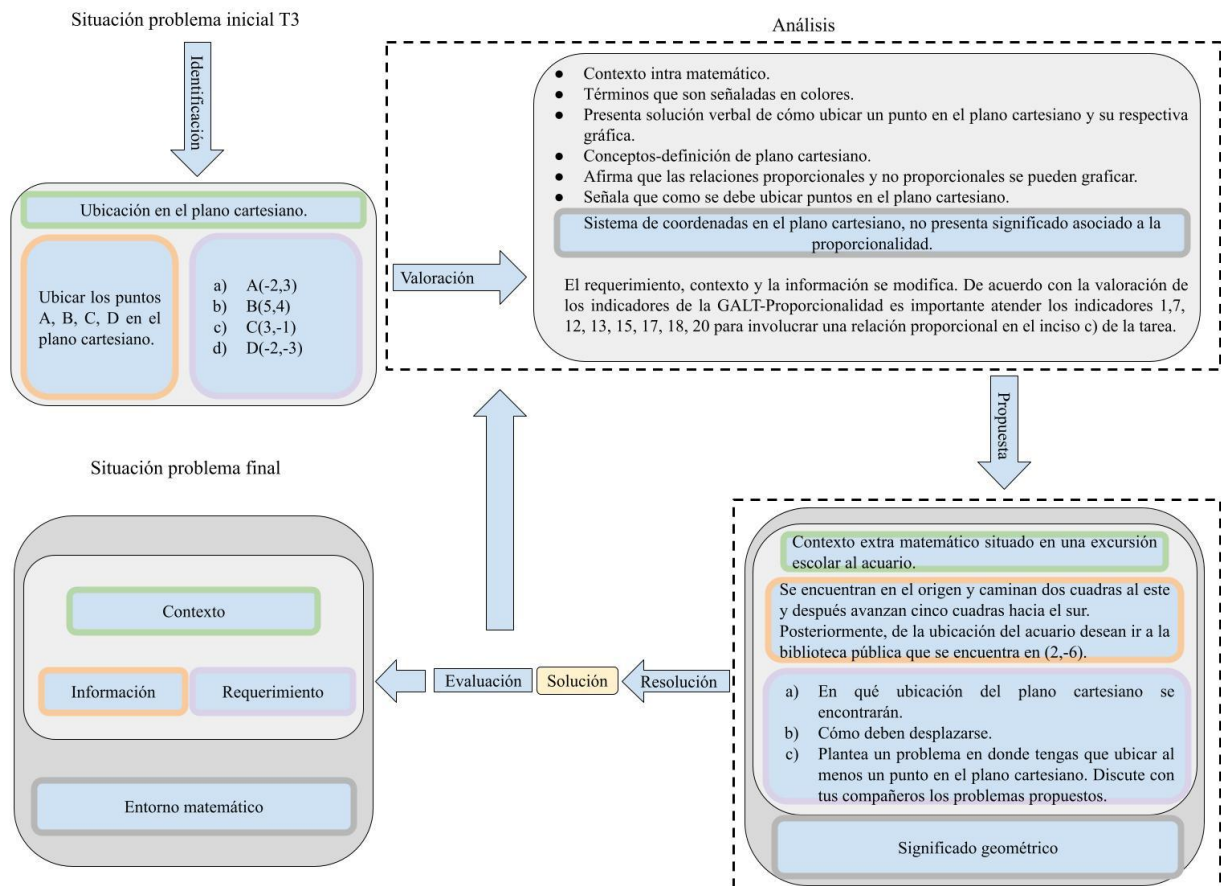
Nota. Elaboración propia.

Propuesta T3

La T3 es originalmente una lección introductoria para poder ubicar puntos en el plano cartesiano para las tareas que continúan. se atendieron los indicadores I1, I7, I12, I13, I15, I17, I18 y I20, ya que la tarea no incluía un significado asociado a la proporcionalidad en este diseño se consideró proponer una situación-problema relacionada con el significado geométrico, conservando con esto la parte introductoria de ubicar puntos en el plano cartesiano. Además, de incluir procedimientos fundamentales de proporcionalidad, que el estudiante genere y proponga situaciones de proporcionalidad, la justificación de enunciados y proposiciones matemáticas de este tema. No obstante, no se incluyeron los indicadores I2, I3, I4, I5, I6, I11, I14, I16, I21, I23, I24, I25 e I26 dado por la naturaleza de la situación-problema de la tarea. En la Figura 20 se presenta el proceso del diseño de T3, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 20

Proceso del diseño de T3



En el análisis de los elementos de Malaspina (2017) y los indicadores de la GALT-Proporcionalidad (Burgos et al., 2024) se determinó que no contiene situaciones donde el estudiante aplique nociones de razones y proporciones, sin embargo, se realizaron cambios en los elementos de Malaspina (2017). Específicamente, se modificó la información, el requerimiento y el contexto. Se conserva el entorno matemático que recae en el sistema de coordenadas en el plano cartesiano y en este se agrega el significado geométrico.

Diseño T3

En una excursión escolar al acuario de la ciudad, un grupo de estudiantes junto con su profesora deciden ir caminando desde la escuela.

- a) Si los estudiantes se encuentran en el origen y caminan dos cuadras al este y después avanzan cinco cuadras hacia el sur, ¿en qué ubicación del plano cartesiano se encontrarán?
- b) Ahora, de la ubicación del acuario desean ir a la biblioteca pública que se encuentra en $(2, -6)$, ¿cómo deben desplazarse?
- c) Plantea un problema en donde tengas que ubicar al menos un punto en el plano cartesiano. Discute con tus compañeros los problemas propuestos.

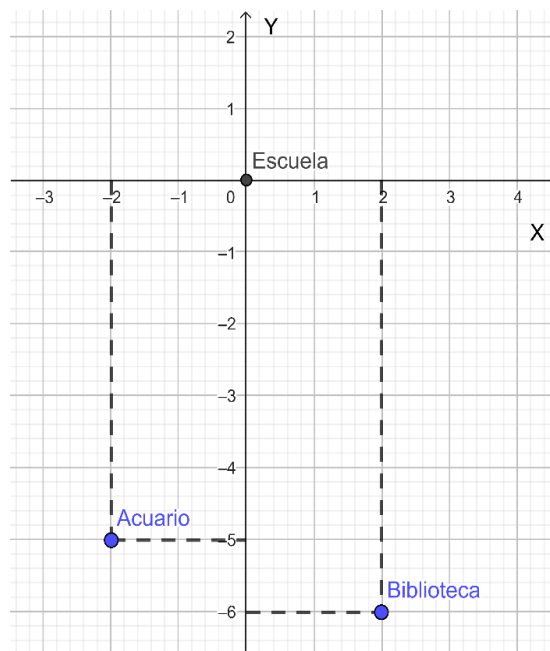
Solución a)

Para determinar su ubicación en el plano, a partir del origen en donde se encuentra la escuela se desplaza sobre el eje x dos unidades a la izquierda y baja cinco unidades sobre el eje y . Es decir, se ubican en las coordenadas $(-2, -5)$.

Solución b)

Si se ubican en $(-2, -5)$ ahora deben desplazarse sobre el eje x cuatro unidades a la derecha y bajar una unidad sobre el eje y . Es decir, se ubican en las coordenadas $(2, -6)$.

En la siguiente imagen se representa la ubicación de los puntos en el plano cartesiano.



Solución c)

Se espera que los estudiantes logren plantear un problema en donde se ubique un punto en el plano cartesiano. A continuación, se presenta un ejemplo en donde se modifica la información, el contexto y el requerimiento del problema original. Además, se incluye el significado geométrico asociado a la proporcionalidad.

Para realizar una actividad la profesora de matemáticas les solicita que dibujen dos cuadrados que estén ubicados en el plano cartesiano. La profesora observa que una alumna ha dibujado dos cuadrados; los cuadrados tienen de lado 3 y 7 unidades.

- Si dos vértices del cuadrado más pequeño está ubicado en $A(-1,1)$ y $B(-4,1)$ y un vértice del otro cuadrado se encuentra a dos unidades a la derecha de $A(-4,1)$, ¿cuáles son los puntos que determinan los vértices de ambos cuadrados?
- Calcula la razón de los lados de los cuadrados y determina cuántas veces es más grande el cuadrado grande que el cuadrado pequeño.
- La profesora menciona que cada estudiante debe ampliar sus cuadrados para exponer sus resultados previos. Si la alumna decide hacer sus cuadrados de 30 unidades y 40 unidades, ¿cuál es la escala de los cuadrados?

Solución a)

Vértices del cuadrado de lado 3 unidades

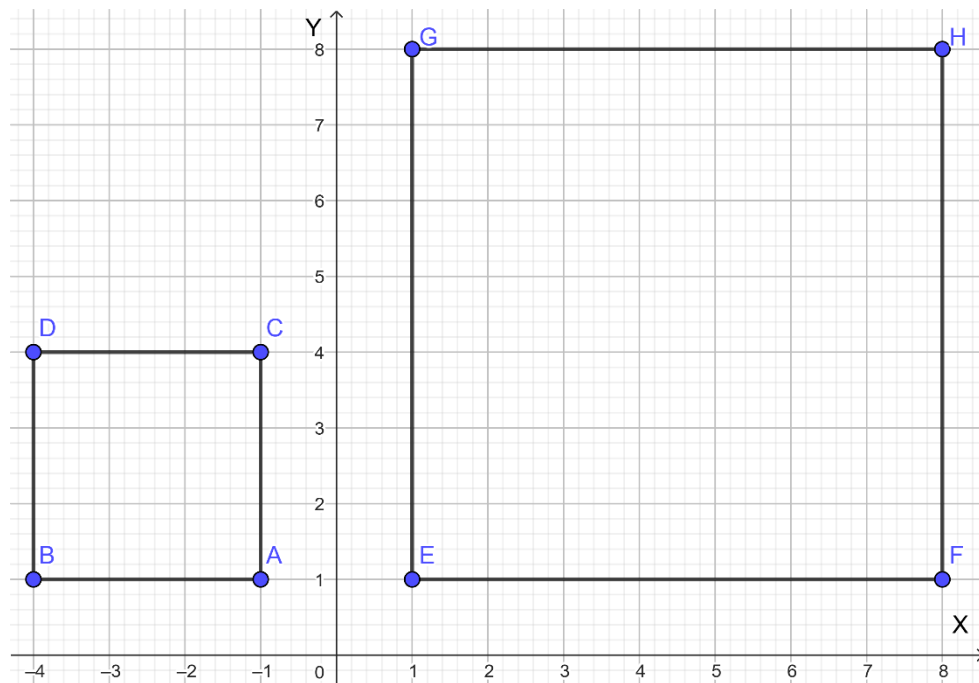
A partir del punto $A(-1,1)$ se sube tres unidades sobre el eje y , entonces el punto es $C(-1,4)$. Ahora, a partir del punto $B(-4,1)$ se sube tres unidades sobre el eje y , entonces el punto es $D(-4,4)$.

Vértices del cuadrado de lado 7 unidades

Dado que la información del problema indica que un vértice del otro cuadro se encuentra a dos unidades a la derecha del punto A , entonces a partir de $A(-1,1)$ se desplaza sobre el eje x dos unidades a la derecha, entonces el punto es $E(1,1)$.

A partir del punto $E(1,1)$ se desplaza sobre el eje x siete unidades a la derecha, entonces el punto es $F(8,1)$. Ahora, a partir del punto $E(1,1)$ se sube siete unidades sobre el eje y , entonces el punto es $G(1,8)$. Por último, a partir del punto $F(8,1)$ se sube siete unidades sobre el eje y , entonces, el punto es $H(8,8)$.

A continuación, se presenta la ubicación de los vértices de ambos cuadrados en la siguiente imagen.



Solución b)

La razón entre lados es una relación que hay entre longitudes o lados de figuras semejantes, es decir figuras que tienen distintas longitudes, pero tienen la misma forma. Para este caso, específicamente entre la longitud de los lados de los cuadrados.

Los lados del cuadrado pequeño o menor son de 3 unidades mientras que el cuadrado mayor o grande es de 7 unidades, por lo tanto, para obtener la razón de lados compararemos las longitudes de los lados del cuadrado mayor y el cuadrado menor.

$$\text{Razón entre los lados} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

Para determinar cuánto es más grande el cuadro mayor en comparación con el menor, calculamos la relación entre las áreas de los cuadrados

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

Por lo tanto, el cuadrado grande es $\frac{49}{9}$ veces más grande que el cuadrado pequeño. Además, es importante señalar que se obtiene una razón ya que se establece una comparación entre dos cantidades.

Solución c)

Para obtener la escala de los cuadrados, en este caso una ampliación, se calcula mediante

$$\text{escala} = \frac{\text{lado de la figura mayor}}{\text{lado correspondiente de la figura menor}}$$

Entonces, para el cuadrado de 3 unidades su escala es

$$\text{escala} = \frac{30 \text{ unidades}}{3 \text{ unidades}} = 10$$

La escala de ampliación es de 1:10, cada unidad en el cuadrado se multiplica por 10 en el cuadrado ampliado, es decir, cada unidad representa 10 unidades.

Ahora, para el cuadrado de 40 unidades su escala es

$$escala = \frac{40 \text{ unidades}}{7 \text{ unidades}} = 5.71$$

La escala de ampliación es de 1:5.71, cada unidad en el cuadrado se multiplica por 5.71 en el cuadrado ampliado, es decir, cada unidad representa 5.71 unidades.

En la Tabla 12, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T3 y como fueron atendidos.

Tabla 12

Indicadores considerados en T3

Indicador	Criterios atendidos en T3
I1	Se añadió el significado geométrico asociado a la proporcionalidad, presentando una situación en donde los estudiantes encuentren la razón entre los lados de las figuras.
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad enfocado en la obtención de razones de lados de unas figuras.
I12	En la solución se señala que lo que se obtiene es una razón ya que se realiza una comparación entre dos cantidades, en este caso se comparan los lados de las figuras.
I13	Se incluye una situación donde el estudiante tenga que reconocer que se debe aplicar una razón.
I15	Se incluyeron en las soluciones proposiciones suficientes para que el estudiante distinga una situación proporcional, explicando el porqué de cada paso.
I17	Se presentan de forma clara y desglosada los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (razón).
I18	Se agregó una situación-problema en donde el estudiante negocie procedimientos de situaciones de proporcionalidad (razón).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.

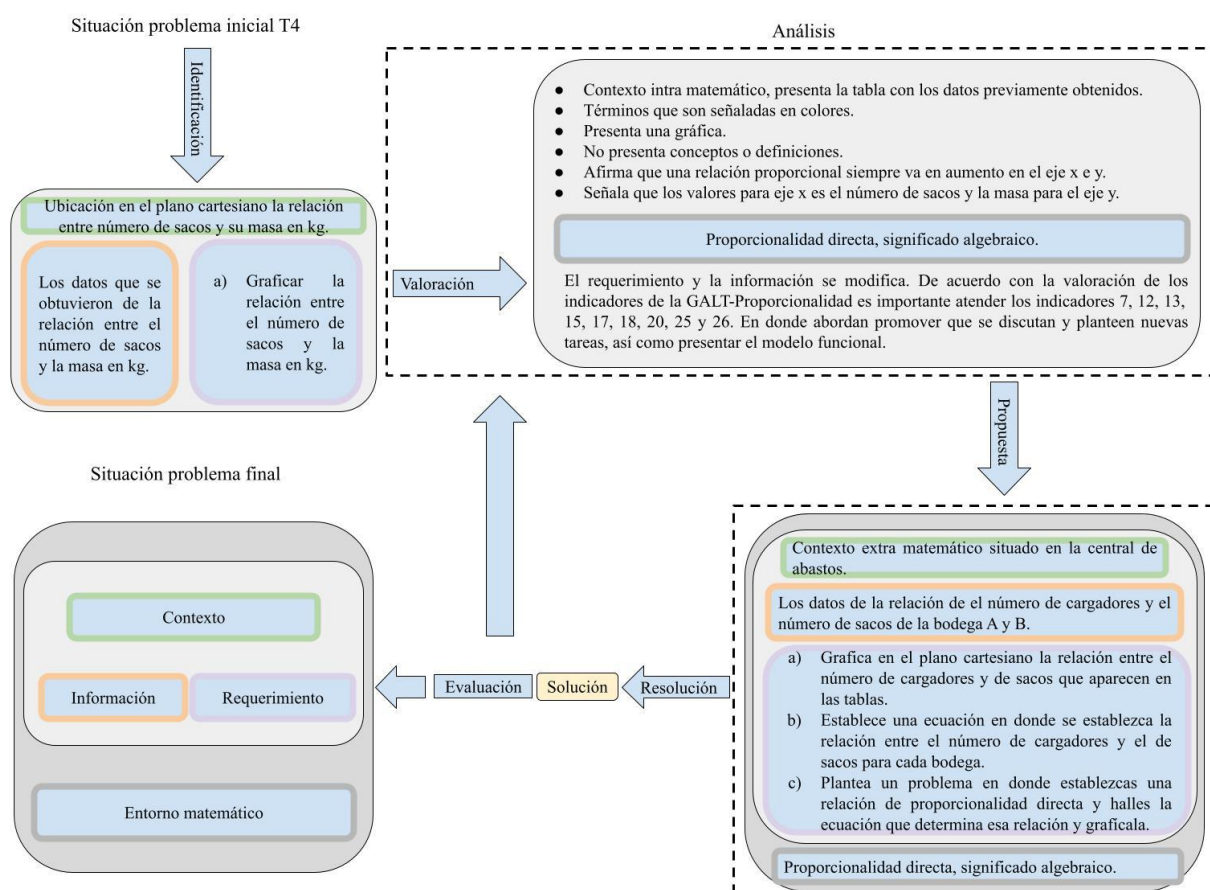
Nota. Elaboración propia.

Propuesta T4

Para el diseño de T4, se continúa con la propuesta del libro, acerca de retomar los problemas para abordarlos posteriormente, se prosigue a utilizar los elementos del primer problema modificado; considerando en este problema el entorno matemático con el significado algebraico o funcional. Se atendieron los indicadores I7, I12, I13, I15, I17, I18, I20, I25 y I26. Puesto que es relevante presentar de forma clara los procedimientos fundamentales del tema de proporcionalidad, así como proponer que los estudiantes planteen situaciones de proporcionalidad, plantear situaciones donde el estudiante utilice un modelo matemático funcional y tenga la oportunidad de explicar expresiones algebraicas. No obstante, no se tomaron en cuenta los indicadores I2, I3, I4, I5, I6, I11, I14, I19, I21, I23, I24 dado la naturaleza de la situación-problema de la tarea. En la Figura 21 se presenta el proceso de diseño de T4 y posteriormente la propuesta.

Figura 21

Proceso del diseño de T4



Fuente: Elaboración propia.

Diseño T4

En la solución del inciso a) del problema uno, se obtuvieron las siguientes tablas.

Bodega A

Número de cargadores	1	2	3	4	5	6
Número de sacos	25	50	75	100	125	150

Bodega B

Número de cargadores	1	2	3	4	5
Número de sacos	30	60	90	120	150

Con la información anterior:

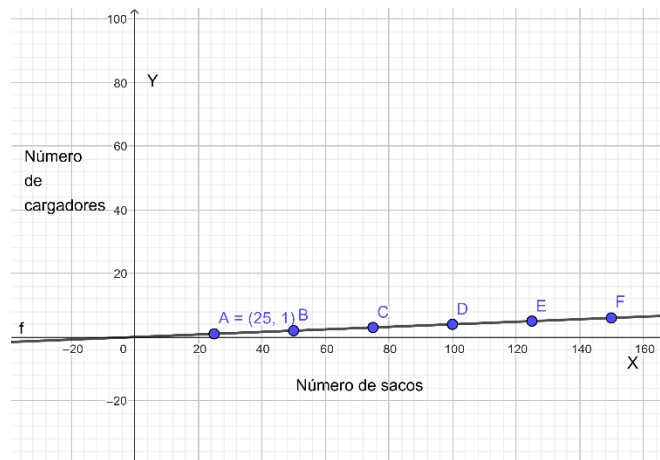
- Grafica en el plano cartesiano la relación entre el número de cargadores y el número de sacos que aparecen en cada tabla.
- Establece una expresión en donde se establezca la relación entre el número de cargadores y el número de sacos para cada bodega.
- Plantea un problema en donde establezcas una relación de proporcionalidad directa y halla la ecuación que determina esa relación y gráficala. Discute tu propuesta con tus compañeros.

Solución a)

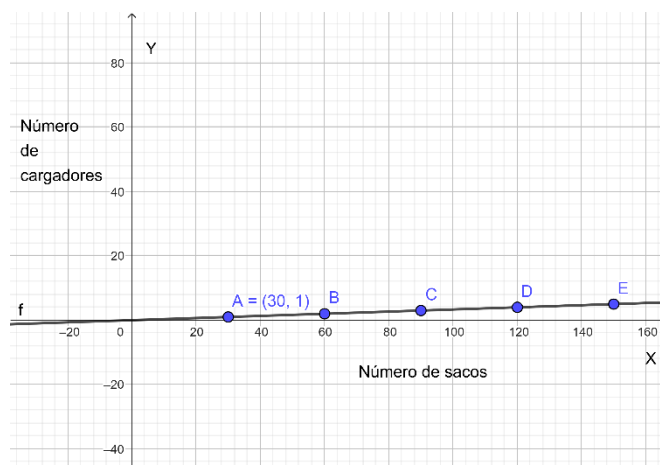
Para graficar la información de la tabla de las bodegas, primero se determina que variable es la independiente (x) y la dependiente (y), en este caso la variable dependiente es el número de trabajadores dado que dependen del número total de sacos para saber cuántos van a cargar, por lo tanto, la variable independiente es el número de sacos.

Por lo tanto, se puede ubicar los puntos desplazándose en el eje x hacia la derecha o izquierda y para el eje y hacia arriba o abajo. Ubicando los puntos obtenemos las siguientes graficas:

Bodega A



Bodega B



Solución b)

Para determinar las expresiones que representan estas relaciones proporcionales directas, se utiliza la constante de proporcionalidad directa.

Para la bodega A

$$\frac{a}{b} = k$$

Donde a es la variable dependiente y b la variable independiente; si despejamos a en la expresión obtenemos,

$$a = kb$$

Del problema uno, calculamos la constante de proporcionalidad directa

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} = \frac{3}{75} = \frac{4}{100} = \frac{5}{125} = \frac{6}{150} = 0.04$$

Entonces, $k = 0.04$ y la expresión es $a = 0.04b$

Para a bodega B

Calculamos previamente la constante de proporcionalidad directa

$$\frac{1}{30} = \frac{2}{60} = \frac{3}{90} = \frac{4}{120} = \frac{5}{150} = 0.0\bar{3}$$

Entonces, $k = 0.0\bar{3}$ y la expresión es $a = 0.0\bar{3}b$

Solución c)

Se espera que los estudiantes logren plantear un problema que involucre una expresión de una relación proporcional directa. A continuación, se presenta un ejemplo en donde se modifica la información, el contexto y el requerimiento del problema original. Además, se incluye el significado algebraico asociado a la proporcionalidad.

Como parte del entrenamiento de una ciclista principiante, debe registrar la distancia y el tiempo a cada cierto momento. En un día de entrenamiento recorre 8 km, los datos que registró se encuentran en la siguiente tabla.

Distancia en km	2	4	6	8
Tiempo en horas	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

a) Halla la expresión que determina la relación proporcional directa y graficala.

Solución a)

Analizando la información que proporciona la tabla, se tiene que se trata de una relación de proporcionalidad directa dado que la distancia y el tiempo aumentan en la misma proporción.

Para hallar la expresión que determina esta relación proporcional, se establece la constante de proporcionalidad directa,

$$\frac{a}{b} = k$$

Donde a es la variable dependiente y b la variable independiente, es decir, la distancia es la variable dependiente porque depende del tiempo que puede recorrer y el tiempo es la variable independiente; si despejamos a en la expresión obtenemos,

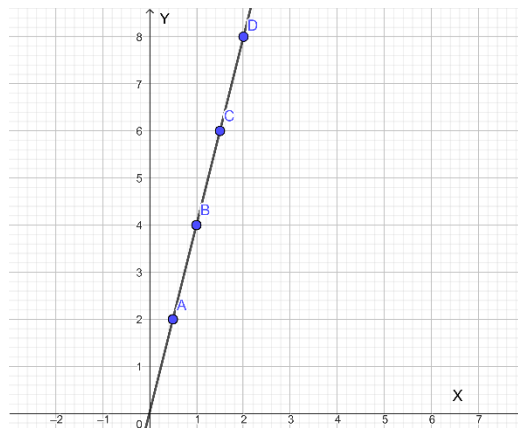
$$a = kb$$

Del problema, calculamos la constante de proporcionalidad directa

$$\frac{2}{1/2} = \frac{4}{1} = \frac{6}{3/2} = \frac{8}{2} = 4$$

Entonces, $k = 4$ y la expresión es $a = 4b$

La gráfica es la siguiente



En la Tabla 13, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T4 y como fueron atendidos.

Tabla 13

Indicadores considerados en T4

Indicador	Criterios atendidos en T4
-----------	---------------------------

I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad directa, además que hallen mediante una ecuación la relación que se propone.
I12	Se presenta el concepto de constante de proporcionalidad directa para que a partir de ello los estudiantes puedan hacer uso para establecer su ecuación.
I13	Se incluye una situación donde el estudiante tenga que reconocer que se puede aplicar la constante de proporcionalidad directa para determinar una ecuación que representa la situación involucrada.
I15	Se incluyeron en las soluciones proposiciones suficientes para que el estudiante distinga una situación proporcional, explicando el porqué de cada paso.
I17	Se presenta de forma clara y desglosada los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (constante de proporcionalidad)
I18	Se agregó un inciso en donde el estudiante debe proponer una nueva situación proporcional directa considerando el significado algebraico.
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I25	Se añadió en el requerimiento situaciones donde el estudiante pueda utilizar un modelo matemático.
I26	Se incluyó en el requerimiento situaciones donde el estudiante pueda establecer el uso de expresiones algebraicas.

Nota. Elaboración propia.

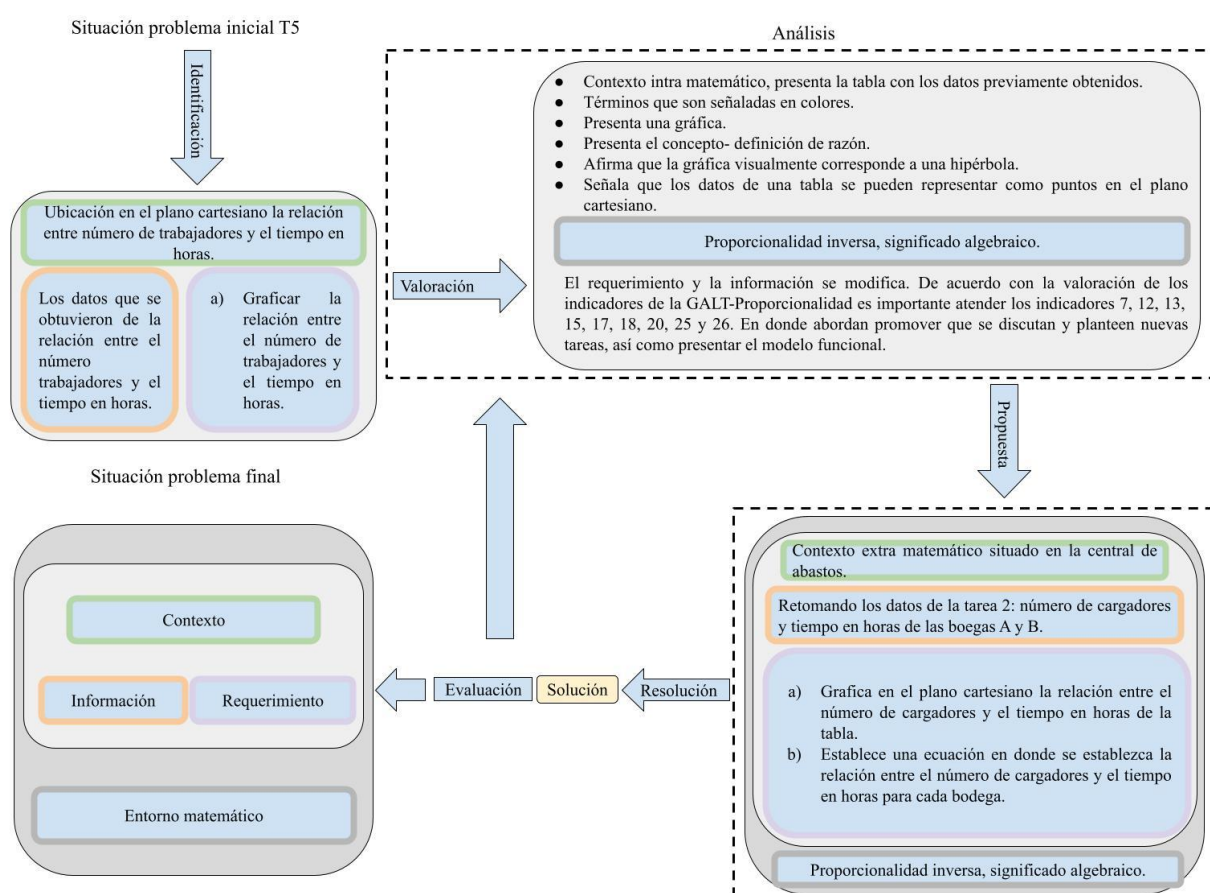
Propuesta T5

Para el diseño de T5, se continúa con la propuesta del libro, acerca de retomar los problemas para abordarlos posteriormente, se prosigue a utilizar los elementos del segundo problema; considerando en este problema el entorno matemático con el significado algebraico o funcional. Se atendieron los indicadores I7, I12, I13, I15, I17, I18, I20, I25 e I26 dado que es importante que el estudiante plantee nuevas situaciones con relación proporcional, genere, discuta procedimientos de situaciones proporcionales, e incluya situaciones utilizando el modelo matemático de la función lineal. No obstante, los indicadores que no se atendieron son I2, I3, I4, I6, I11, I14, I16, I19, I21,

I23, I24 dado la naturaleza de la situación-problema de la tarea. En la Figura 22 se presenta el proceso del diseño de la T5, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 22

Proceso del diseño de T5



Fuente: Elaboración propia.

Diseño T5

Retomando los datos de la tarea 2, se presenta la siguiente tabla.

Bodega	A				B			
Número de cargadores	6	10	12	15	5	7	9	12

Tiempo en horas	1	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$
-----------------	---	----------------	---------------	---------------	---	---------------	---------------	----------------

Con la información anterior:

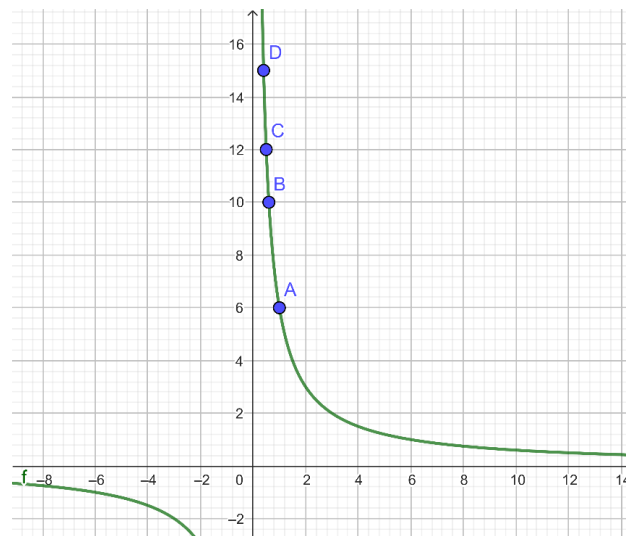
- Grafica en el plano cartesiano la relación entre el número de cargadores y el tiempo en horas de acuerdo con la información de la tabla.
- Establece una expresión que represente la relación entre el número de cargadores y el tiempo en horas para cada bodega.

Solución a)

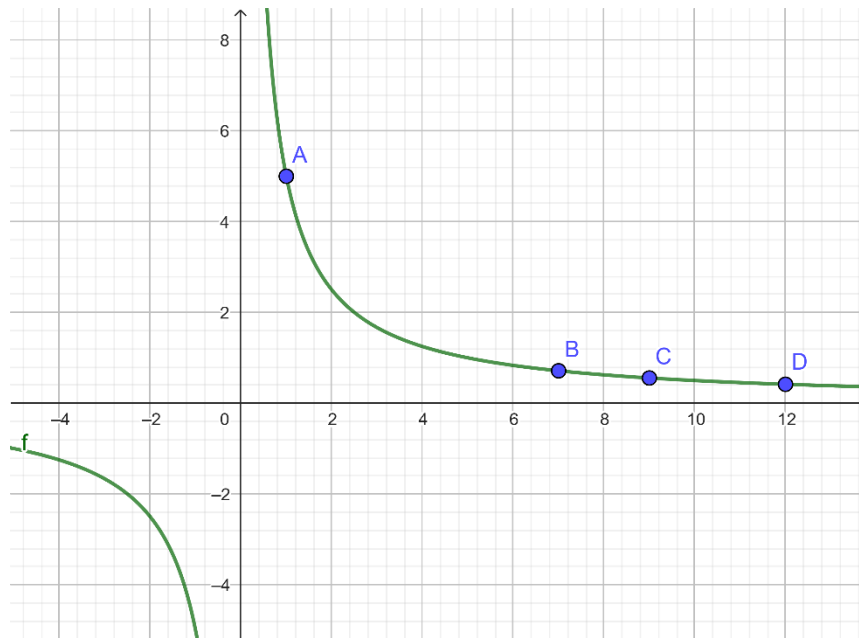
Para graficar la información de la tabla de las bodegas, primero se determina que variable es la independiente (x) y la dependiente (y), en este caso la variable dependiente es tiempo en horas porque con un mayor número de cargadores disminuye el tiempo, por lo tanto, la variable independiente es el número de cargadores.

Por lo tanto, se puede ubicar los puntos desplazándose en el eje x hacia la derecha o izquierda y para el eje y hacia arriba o abajo. Ubicando los puntos obtenemos las siguientes gráficas:

Bodega A



Bodega B



Solución b)

Para hallar las expresiones que establecen estas relaciones proporcionales, se puede definir por medio de la constante de proporcionalidad inversa,

Para la bodega A

$$a * b = k$$

Donde a es la variable dependiente y b la variable independiente; si despejamos a en la expresión obtenemos,

$$a = \frac{k}{b}$$

Previamente calculamos la constante de proporcionalidad inversa

$$(6)(1) = 6$$

$$(10)\left(\frac{6}{10}\right) = 6$$

Entonces, $k = 6$ y la expresión es $a = \frac{6}{b}$

Para la bodega B la constante de proporcionalidad es

$$(5)(1) = 5$$

$$(7) \left(\frac{5}{7}\right) = 5$$

Entonces, $k = 5$ y la expresión es $a = \frac{5}{b}$

En la Tabla 14, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T5 y como fueron atendidos.

Tabla 14

Indicadores considerados en T5

Indicador	Criterios atendidos en T5
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde el estudiante establezca la relación que se presenta mediante una ecuación.
I13	Se incluye una situación donde el estudiante tenga que reconocer que se debe aplicar la constante de proporcionalidad inversa.
I15	Se incluyeron en las soluciones proposiciones suficientes para que el estudiante distinga una situación proporcional, explicando el porqué de cada paso.
I17	Se presentan de forma clara y desglosada los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (constante de proporcionalidad inversa).
I18	Se agregó una situación-problema en donde el estudiante negocie procedimientos de situaciones de proporcionalidad inversa (constante de proporcionalidad inversa).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I25	Se añadió en el requerimiento situaciones donde el estudiante pueda utilizar un modelo matemático.
I26	Se incluyó en el requerimiento situaciones donde el estudiante pueda establecer el uso de expresiones algebraicas.

Nota. Elaboración propia.

4.2 Libro segundo grado pensamiento y saberes científicos

En la lección “Proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades y su representación” del libro de segundo grado (SEP, 2024c) incluye tres tareas que incluyen la tarea a resolver y su correspondiente solución. En seguida, se presentan las tareas en la Figura 23.

Figura 23

Tareas del libro de segundo grado de la lección proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades y su representación

T6	T7												
Ejemplo 1 Se envasa cierta cantidad de pintura en 6 cubetas de 20 l cada una. Hallar el número de cubetas de 4 l de capacidad que se requieren para envasar los 20 l de pintura.	Ejemplo 2 Cierta cantidad de alimento que comen 24 gallinas dura 10 días. Calcular el número de días que durará la misma cantidad de alimento para 30 gallinas.												
T8 Ejemplo Al aplicar la misma fuerza a objetos del mismo material y forma, pero de tamaño distinto para ponerlos en movimiento, se registraron los datos de su masa y aceleración en una tabla como la siguiente: <table><tr><th>Masa (kg)</th><th>Aceleración (m/s²)</th></tr><tr><td>9</td><td>8</td></tr><tr><td>6</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>18</td></tr><tr><td>3</td><td>24</td></tr><tr><td>2</td><td>36</td></tr></table>		Masa (kg)	Aceleración (m/s²)	9	8	6	12	4	18	3	24	2	36
Masa (kg)	Aceleración (m/s²)												
9	8												
6	12												
4	18												
3	24												
2	36												

Fuente: T6 se obtuvo de (SEP, 2024c, p.43), T7 de (SEP, 2024c, p.43) y T8 de (SEP, 2024c, p.44).

4.2.1 Identificación de objetos primarios y elementos de Malaspina

En la Tabla 15 se presentan los objetos primarios y elementos de Malaspina involucrados en las tareas del libro de segundo grado. Sobre las situaciones-problemas, se presentan contextos extra-matemáticos y se encuentran asociados al significado aritmético de la proporcionalidad (T6, T7 y T8). Por otro lado, acerca del lenguaje, se utilizan notaciones para representar operaciones, por ejemplo, en T6 se señala la operación de una regla de 3. En T7, por ejemplo, se presenta $a:b$ (se lee a es a b), por último, en la T8, se emplea, por ejemplo, $y = \frac{k}{x}$.

Por otro lado, en procedimientos, las tareas dan solución utilizando la regla de tres inversas (T6), por medio de la constante de proporcionalidad inversa (T7 y T8). Acerca de los conceptos-definiciones en dos tareas se presentan definiciones (T6 y T8) mientras que en T7 no se evidencia. Sobre las proposiciones realiza afirmaciones sobre los conceptos, por ejemplo, en la T6 menciona

que una situación proporcional inversa el valor faltante se puede calcular utilizando la constante de proporcionalidad. Acerca de los argumentos se halló que en la solución se presentan justificaciones, por ejemplo, en T6 se presenta que el valor desconocido representa la cantidad de cubetas de 4 litros que se necesitan para envasar la pintura y la constante de proporcionalidad es la cantidad total de pintura que se requiere envasar. Por otra parte, se identificaron todos los elementos de Malaspina (la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático) en las tareas; específicamente sobre el entorno matemático se encontró que todas las tareas abordan conceptos de proporcionalidad inversa. El análisis detallado se presenta a continuación en la Tabla 15.

Tabla 15

Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)

<i>Tarea</i>	<i>Situación-problema</i>
<i>T6</i>	Presenta un contexto extra-matemático puesto que involucra una situación de la vida diaria con aplicación de la proporcionalidad inversa. La tarea está asociada al significado aritmético, ya que se enfoca en el procedimiento de la regla de tres inversas.
<i>T7</i>	Presenta un contexto extra-matemático dado que involucra una situación que sucede en el mundo real donde se aplica una relación de proporcionalidad inversa. La tarea está asociada al significado aritmético de la proporcionalidad, ya que se enfoca en hallar el valor faltante mediante la constante de proporcionalidad, luego lo divide entre el valor conocido que corresponde al valor desconocido, esto aplicado en un problema de proporcionalidad inversa.
<i>T8</i>	Presenta un contexto extra matemático ya que contempla una situación en donde se registran la masa y aceleración de un objeto. La tarea se encuentra asociada al significado algebraico dado que se enfoque la proporcionalidad inversa e involucra a su constante de proporcionalidad $xy = k$.
<i>Lenguaje</i>	
<i>T6</i>	Las expresiones son las notaciones que son señaladas en color amarillo para representar las operaciones.
$6 \text{ cubetas} \rightarrow 20 \text{ l}$ $x \text{ cubetas} \rightarrow 4 \text{ l}$	

$$x = \frac{(6 \text{ cubetas})(20 \text{ l})}{4 \text{ litros}}$$

$$x = \frac{120}{4} \text{ cubetas}$$

$$x = 30 \text{ cubetas}$$

$$(6 \text{ cubetas})(20 \text{ l}) = 120 \text{ l por cubeta}$$

T7 Las expresiones son las notaciones que se presentan en la solución en color amarillo:

$$k = (24)(10) = 240.$$

Además, presenta otra notación para la proporcionalidad inversa,

$$a : b \text{ (se lee a es a b)} :: c : x \text{ (se lee c es a x)}$$

T8 Las expresiones son las notaciones en amarillo que se encuentran en la solución, así como las gráficas y la tabla.

$$\left(\frac{6 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} = 2 \right)$$

$$(6 \text{ m/s}^2)/(24 \text{ m/s}^2) = 1$$

$$m * a = 72$$

$$m = \frac{72}{a}$$

$$a = \frac{72}{m}$$

$$a = \frac{72}{m}$$

$$a = \frac{72}{m}$$

$$a = \frac{72}{12} = 6$$

$$x * y = k$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

Procedimientos

T6 Utiliza el procedimiento o algoritmo de la regla de tres inversas, es decir, multiplica el valor de las magnitudes involucradas y divide el valor conocido con respecto al dato faltante.

T7 Calcula el valor faltante por medio de la constante de proporcionalidad, luego divide a este valor hallado entre el valor conocido que corresponde al valor desconocido.

Si a, b , y x son valores que tienen una relación de proporcionalidad inversa, tal que

$$a : b \text{ (se lee a es a b)} :: c : x \text{ (se lee c es a x)},$$

Donde a, b y c son valores conocidos y x es un valor desconocido, entonces el valor de x se calcula

$$x = \frac{(a)(b)}{c}$$

- T8 Presenta operaciones que involucran a la constante de proporcionalidad de la forma $x * y = k$, es decir, $m * a = 72$, $m = 72/a$ y $a = 72/m$.

Conceptos-Definición

- T6 Previo a la tarea presenta las siguientes definiciones.
 Proporcionalidad inversa: es una relación entre dos magnitudes tales que, al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa.
 Regla de tres inversas: es un algoritmo para calcular un valor faltante o desconocido en una relación de proporcionalidad inversa. Este algoritmo consiste en multiplicar los valores correspondientes de las dos magnitudes y dividirlo entre la cantidad conocida correspondiente al valor desconocido que se necesita calcular.
- T7 No se presentan definiciones en la tarea.
- T8 Las definiciones que se presentan son las siguientes.
 La representación tabular de una relación proporcionalidad inversa entre dos magnitudes consiste en organizar los datos correspondientes de esas magnitudes en una tabla.
 Dos magnitudes tienen una relación de proporcionalidad inversa si al aumentar una magnitud la otra disminuye en la misma proporción. La constante de proporcionalidad inversa es el producto de multiplicar los valores correspondientes de ambas magnitudes. Algebraicamente, la proporcionalidad inversa entre dos variables x y y se representa como
 $x * y = k$ o $y = k/x$
 En esta expresión, x y y son magnitudes o variables inversamente proporcionales y k es la constante de proporcionalidad.

Proposiciones

- T6 Realiza afirmaciones señalando que, en una situación de proporcionalidad inversa, el valor faltante también se puede calcular mediante la constante de proporcionalidad de

	la siguiente forma: se calcula la constante de proporcionalidad y se divide entre el valor conocido correspondiente al valor faltante.
T7	Afirma que para hallar el número de días que corresponde a 30 gallinas, se debe dividir la constante de proporcionalidad entre 30. Por lo tanto, la misma cantidad de alimento para 30 gallinas durará 8 días.
T8	Afirma que la curva que representa la relación de proporcionalidad inversa entre la masa y la aceleración presenta un comportamiento decreciente conforme aumentan los valores de alguna de las magnitudes y se ubica en el primer cuadrante del plano cartesiano, puesto que los valores de ambas magnitudes son positivos. La representación de una relación de proporcionalidad inversa en el plano cartesiano es una curva en el primer y tercer cuadrante de este si la constante de proporcionalidad es positiva o una curva en el segundo y cuarto cuadrante si la constante de proporcionalidad es negativa.
<i>Argumentos</i>	
T6	En la solución presenta las siguientes justificaciones: el valor desconocido representa la cantidad de cubetas de 4 litros requeridas para envasar la pintura y la constante de proporcionalidad es la cantidad total de pintura que se requiere envasar.
T7	En la solución presenta la siguiente justificación: como se conocen dos pares de valores que son correspondientes en esta situación a 24 gallinas y 10 días, entonces se halla la constante de proporcionalidad, posteriormente divide 30 gallinas para encontrar los días que durará el alimento.
T8	Presenta la justificación que m representa la masa de los objetos, a su aceleración y 72 es la constante de proporcionalidad inversa en esta situación, $m * a = 72$.
<i>La información</i>	
T6	Presenta datos cuantitativos, los cuales son 6 cubetas y 20 litros, correspondiente a la capacidad de cada cubeta.
T7	Presenta datos cuantitativos, los cuales son 24 gallinas, 10 días que compete a los días que dura el alimento.
T8	Presenta datos cuantitativos, los cuales son presentados en una tabla, en la primera columna contiene los valores de la masa en kg y en la segunda columna los valores de la aceleración en m/s^2 de los objetos registrados.

<i>El requerimiento</i>	
T6	Se pide hallar el número de cubetas de 4 litros de capacidad que se requieren para envasar los 20 litros de pintura.
T7	La tarea solicita calcular el número de días que durará la misma cantidad de alimento para 30 gallinas.
T8	En la presentación de la situación no presenta un requerimiento, sin embargo, al final del problema solicita calcular la aceleración que tendría un objeto con una masa de 12 kg al aplicarle la misma fuerza.
<i>El contexto</i>	
T6	Presenta un contexto extra matemático el cual se sitúa en el llenado o envasado de cubetas de pintura.
T7	Presenta un contexto extra-matemático dado que se sitúa en una situación de hallar los días que dura el alimento de una cierta cantidad de gallinas.
T8	Presenta un contexto extra matemático, el cual el contexto se sitúa en registrar la aceleración y la masa de objetos.
<i>El entorno matemático</i>	
T6	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad inversa en donde se aborda la regla de tres inversas y la constante de proporcionalidad.
T7	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad inversa en donde se encuentra el valor faltante mediante $x = \frac{(a)(b)}{c}$
T8	El entorno matemático en donde se ubica es la proporcionalidad inversa en donde aborda la noción de constante de proporcionalidad inversa.

Nota. Elaboración propia.

4.2.2 Valoración de la idoneidad epistémica

En la Tabla 16 se presenta la valoración de la idoneidad epistémica de las tareas utilizando los indicadores de GALT- Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b).

Tabla 16*Identificación de indicadores en el libro de segundo grado*

Indicador	Tareas		
	T6	T7	T8
I1	✓	✓	✓
I2	✓	✓	✓
I3	-	-	-
I4	-	-	-
I5	✓	✓	✓
I6	-	-	-
I7	-	-	-
I8	✓	✓	✓
I9	✓	✓	✓
I10	-	-	-
I11	✓	✓	✓
I12	✓	-	✓
I13	✓	✓	✓
I14	✓	✓	✓
I15	✓	✓	✓
I16	✓	✓	✓
I17	✓	✓	✓
I18	-	-	-
I19	✓	✓	✓
I20	-	-	-
I21	-	-	-
I22	✓	✓	✓
I23	-	-	-
I24	-	-	-

I25	-	-	✓
I26	-	-	-
I27	✓	✓	✓

Nota. Elaboración propia.

Para el componente *significados*, se valoraron 20 indicadores, para el I1, se halló que la T6 está asociada al significado aritmético dado que aborda la proporcionalidad inversa mediante el procedimiento de la regla de tres inversa; la T7 está asociada al significado aritmético dado que aborda la proporcionalidad inversa a través de hallar la constante de proporcionalidad inversa y dividir el valor conocido que corresponde al valor faltante; y la T8 se encuentra asociada al significado algebraico o funcional dado que aborda la proporcionalidad inversa por medio de la constante de proporcionalidad inversa y llevarlo a una función en un contexto de la física. Para I2, en la T6 presenta una situación de valor faltante aplicada a un contexto en específico (hallar la cantidad de cubetas de pintura), en la que se resuelve por medio de la regla de tres inversas. En T7 la tarea presenta una situación de valor faltante aplicada a un contexto en específico (determinar los días que durará el alimento de cierta cantidad de gallinas), en el que se resuelve hallando la constante de proporcionalidad inversa y dividiendo la constante entre el valor conocido. En T8 la tarea presenta tabla de valores para mostrar que los productos de las magnitudes involucradas son constantes, además de mostrar gráficas de una relación de proporcionalidad inversa. En I3, en todas las tareas (T6, T7 y T8) no se distinguen las comparaciones multiplicativas de las aditivas, por ejemplo, en T6, no obstante, en la solución se puede identificar la relación multiplicativa. Asimismo, para I4, dado que se trata de una situación-problema abordada en tres tareas (T6, T7 y T8) no se hace explícitas las relaciones multiplicativas en distintos problemas.

En I5, en T6, T7 y T8 involucran una situación de uso de razones internas dado que involucra productos constantes. Para I6, en todas las tareas (T6, T7 y T8) no se proponen situaciones de cálculo mental. Asimismo, en I7, no se promueve que el estudiante proponga nuevas situaciones de relaciones proporcionales inversas (T6, T7, T8).

En I8, en T6 utiliza tablas de valores para mostrar que los productos de las magnitudes son constantes, en T7 emplea expresiones para denotar en colores la constante de proporcionalidad inversa $k = (24)(10) = 240$, además presenta el siguiente lenguaje: Si a, b , y x son valores que tienen una relación de proporcionalidad inversa, tal que $a:b$ (se lee a es a b) $:: c :$

x (se lee c es a x), donde a, b y c son valores conocidos y x es un valor desconocido, entonces el valor de x se calcula: $x = \frac{(a)(b)}{c}$, en T8 emplea expresiones representadas en colores para distinguir los conceptos y representaciones gráficas.

Para I9, en todas las tareas se utiliza un nivel adecuado del lenguaje para los estudiantes. Para I10, en T6, T7 y T8 no se fomenta que los estudiantes interpreten los resultados, por ejemplo, en T6 fomentan la argumentación por medio de las explicaciones incluidas en la solución.

En I11, para T6, T7 y T8 la situación involucra una situación de relación multiplicativa que se hace explícita en la solución. En I12, para T6 se presentan las definiciones de proporcionalidad inversa y la regla de tres inversa. La proporcionalidad inversa es una relación entre dos magnitudes tales que, al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa. La regla de tres inversa es un algoritmo para calcular un valor faltante o desconocido en una relación de proporcionalidad inversa. Este algoritmo consiste en multiplicar los valores correspondientes de las dos magnitudes y dividirlo entre la cantidad conocida correspondiente al valor desconocido que se necesita calcular; en T7 no se presentan definiciones o conceptos relacionados con la proporcionalidad inversa; al final de la tarea se expone un procedimiento para hallar el valor faltante; en T8, sí, presenta las siguientes definiciones. La representación tabular de una relación proporcionalidad inversa entre dos magnitudes consiste en organizar los datos correspondientes de esas magnitudes en una tabla. Dos magnitudes tienen una relación de proporcionalidad inversa si al aumentar una magnitud la otra disminuye en la misma proporción. La constante de proporcionalidad inversa es el producto de multiplicar los valores correspondientes de ambas magnitudes. Algebraicamente, la proporcionalidad inversa entre dos variables x y y se representa como $x * y = k$ o $y = k/x$. En esta expresión, x y y son magnitudes o variables inversamente proporcionales y k es la constante de proporcionalidad.

Para I13, en T6 se presenta una situación en donde el alumno debe identificar y aplicar las nociones de proporcionalidad inversa; en T7 se presenta una situación en donde el alumno debe identificar y aplicar las nociones de proporcionalidad inversa, en específico a través de la constante de proporcionalidad inversa. En T8 se presenta una situación en donde el alumno debe identificar y aplicar las nociones de proporcionalidad inversa, en específico a través de la constante de proporcionalidad inversa, que se aproxima a la noción de función. En I14, en T6 se presenta la noción del procedimiento de la regla de tres inversa; en T7 se presenta la noción de utilizar la

constante de proporcionalidad inversa para hallar el valor faltante, en T8 se presenta la noción en donde utilizan la constante de proporcionalidad inversa para hallar un valor en específico.

En I15, en la parte de la solución en T6, T7 y T8 se explica porque la situación involucrada en la tarea es una relación de proporcionalidad inversa en la solución; además, en T7 explica cómo hallar el valor faltante; en T8 explica cómo hallar la constante de proporcionalidad inversa, encuentra la representación algebraica de la relación presentada.

Sobre I16, para hallar las soluciones en T6 se propone mediante la regla de tres inversa, en T7 mediante la constante de proporcionalidad, después de obtener la constante dividirla entre el valor conocido correspondiente con el valor faltante, en T8 por medio de la constante de proporcionalidad, estableciéndose como una representación algebraica.

En I17, en T6 se presentan los procedimientos de las operaciones realizadas, presenta la solución utilizando la regla de tres inversa; en T7 se muestran las operaciones realizadas, presenta la solución utilizando la constante de proporcionalidad inversa. Al final de la solución presenta un procedimiento para hallar el valor faltante: Si a, b , y x son valores que tienen una relación de proporcionalidad inversa, tal que $a : b$ (se lee a es a b) $:: c : x$ (se lee c es a x), donde a, b y c son valores conocidos y x es un valor desconocido, entonces el valor de x se calcula $x = \frac{(a)(b)}{c}$. En T8 se presentan los procedimientos de las operaciones para determinar que el producto de las magnitudes es constante, además de presentar explicaciones acerca del comportamiento de una relación proporcional inversa.

Para I18, en T6, T7 y T8 no se proponen situaciones donde el estudiante genere procedimientos para dar solución a situaciones de proporcionalidad, es decir, no se propicia que los estudiantes lleven a cabo una discusión. Para I19, en T6 en la solución presenta justificaciones acerca de la situación de proporcionalidad inversa y cómo se obtiene la constante la de proporcionalidad en este caso; en T7 y T8 en la solución presenta justificaciones acerca de la situación proporcionalidad inversa y como se obtiene la constante de proporcionalidad. Además, en T8 se representa de forma algebraica. En I20, no se favorece la justificación de enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad (T6, T7 y T8).

Por otro lado, para el componente *relaciones*, se valoraron tres indicadores, para I21, en T6, T7 y T8, no se establece relaciones del tema de proporcionalidad que incluyan números fraccionarios.

En I22, en T6, T7 y T8 se hace explícito en la solución la relación entre las operaciones y las cantidades relacionadas con los valores de las magnitudes. Para I23, no se desarrollan en T6, T7, T8 los cuatro tipos de significados de la proporcionalidad, únicamente el significado aritmético.

Por otro lado, para el componente *procesos*, se valoraron tres indicadores, en I24, no se halló que en T6, T7, T8 se promueva que el estudiante argumente y formule conjeturas. Para I25, en T6, T7 no se presentan situaciones en donde el estudiante tenga que utilizar el modelo funcional, por otro lado, mientras que en T8 sí. Para I26, no se evidencia en T6, T7, T8 que el estudiante realice generalizaciones y conjeturas como por ejemplo de patrones geométricos. Por último, para el componente *conflictos epistémicos*, se valoró un indicador, en I27, se presentan T6, T7 y T8 sin ambigüedades, de forma correcta, sin errores ni contradicciones.

4.2.3 Diseño de las tareas del libro de segundo grado

Posterior a la valoración de la idoneidad epistémica se diseñaron tareas tomando en cuenta lo encontrado en la valoración de algunos indicadores. Por ejemplo, para la T6 se valoraron 27 indicadores de los cuales se halló que la tarea no satisface lo establecido en I2. No obstante, en el diseño no se consideraron todos los indicadores dado que no todos pueden ser incluidos principalmente por la naturaleza de la situación-problema involucrada en cada tarea. A continuación, se presenta la propuesta de diseño de las tareas (Burgos et al., 2024) en donde se tomó en cuenta los elementos de Malaspina, el análisis de los objetos primarios y la valoración epistémica de cada tarea.

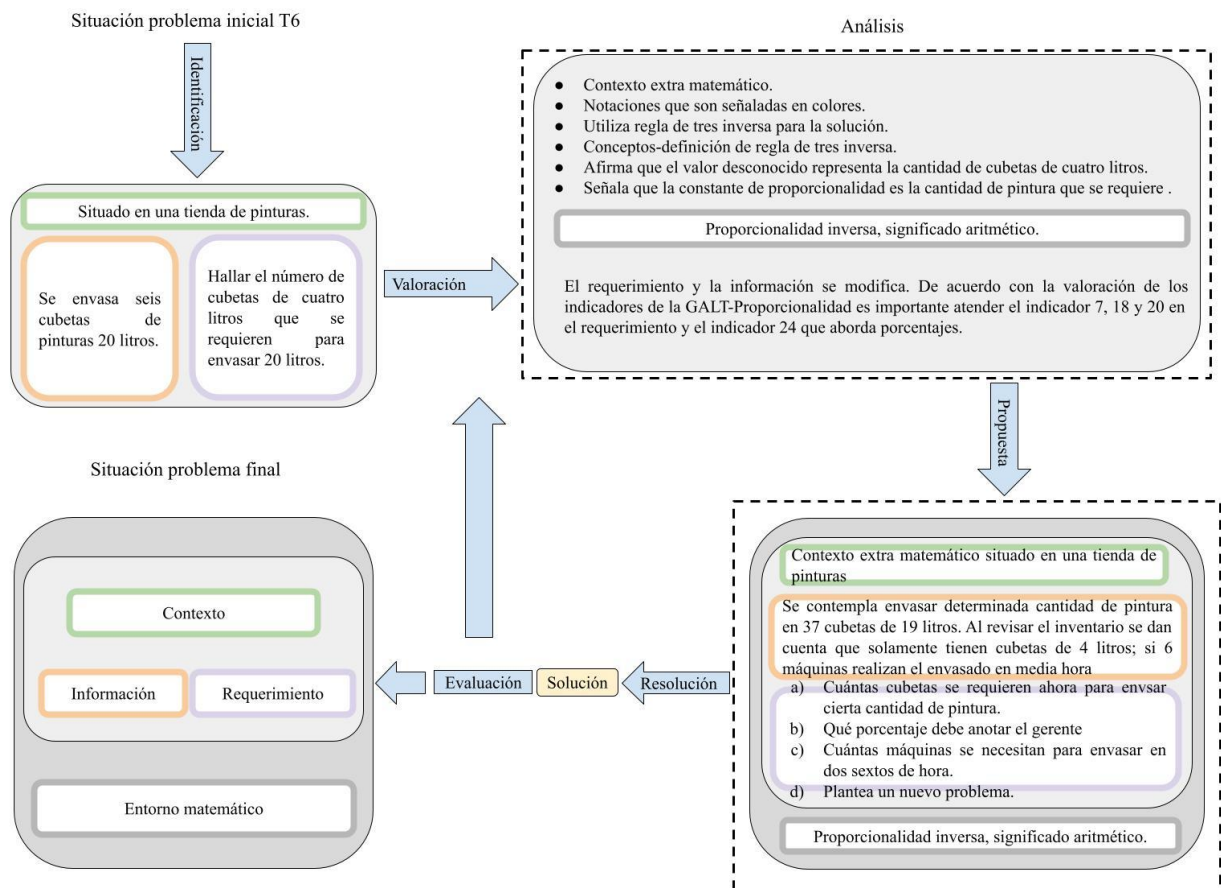
Propuesta T6

De acuerdo con el modelo de Burgos et al. (2024) en la categoría elaboración o variación estructurada, se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad inversa. En la T6 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18, I20 y I24 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba y situaciones que involucren porcentajes. Por otra parte, los indicadores (I3, I4, I6, I10, I21, I23, I25 y I26) no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado

aritmético. En la Figura 24 se presenta el proceso del diseño de T6, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 24

Proceso del diseño de T6



Fuente: Elaboración propia.

Diseño de T6

En una tienda se contempla envasar una determinada cantidad de pintura en 37 cubetas de 19 litros.

- Al revisar el inventario se dan cuenta que solamente tienen cubetas de 4 litros, ¿cuántas cubetas requieren ahora para envasar esa cierta cantidad de pintura?
- Considerando tu respuesta anterior, si el gerente debe realizar un reporte en donde deba justificar el aumento o disminución de cubetas utilizadas, ¿qué porcentaje debe anotar el gerente?

- c) Si 6 máquinas realizan el envasado en media hora, ¿cuántas máquinas se necesitan para envasar la pintura en dos sextos de hora?
- d) Plantea un problema en donde tengas que resolver una situación inversamente proporcional. Discute con tus compañeros los problemas propuestos.

Solución a)

Del enunciado se tiene que 37 cubetas serán envasadas en 19 litros, pero ahora se envasarán en cubetas de 4 litros. Por lo tanto, el valor desconocido es la cantidad de cubetas de 4 litros. Entonces

$$x = \frac{(37 \text{ cubetas})(19 \text{ litros})}{4 \text{ litros}}$$

$$x = \frac{703}{4} \text{ cubetas}$$

$$x = 175.75 \text{ cubetas}$$

Entonces, se necesitan 176 cubetas. Además, se tiene que la relación es inversamente proporcionalidad dado que, si la capacidad de pintura de las cubetas disminuye, aumenta el número a utiliza de cubetas.

Solución b)

Dada la solución del inciso a) se puede concluir que se tiene un aumento en el uso de la cantidad de cubetas ya que inicialmente envasarían en 37 cubetas de 19 litros, entonces se puede obtener la constante de proporcionalidad inversa dado que en este caso es la cantidad total de pintura que se necesita envasar, entonces la constante de proporcionalidad inversa es

$$(37 \text{ cubetas})(19 \text{ litros}) = 703 \text{ litros} = k$$

Luego, si en total son 703 litros, por el inciso a) se obtuvo que se necesitan 176 cubetas, entonces el porcentaje es

$$\frac{176 \text{ cubetas} - 37 \text{ cubetas}}{37 \text{ cubetas}} (100\%) = \frac{139}{37} \text{ cubetas} * (100\%) = 375.\overline{67}\% \text{ de cubetas}$$

Por lo tanto, 375. $\overline{67}\%$ de cubetas representa el aumento en la cantidad de cubetas necesarias, en comparación con la cantidad de cubetas originales (37).

Solución c)

Si 6 máquinas realizan el envasado en $\frac{1}{2}$ hora y ahora se requiere envasar la pintura en $\frac{2}{6}$ de hora, pero media hora correspondería a $\frac{3}{6}$ de hora, entonces se tiene que

$$6 \text{ máquinas} \rightarrow \frac{3}{6} \text{ hora}$$

$$x \text{ máquinas} \rightarrow \frac{2}{6} \text{ hora}$$

$$x = \frac{(6 \text{ máquinas})(\frac{3}{6} \text{ hora})}{\frac{2}{6} \text{ hora}}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ máquinas} = 9 \text{ máquinas}$$

Por lo tanto, se requieren 9 máquinas para envasar cierta cantidad de pintura en dos sextos de hora.

Solución d)

Los trabajadores de una empresa que elabora quesillos deben empaquetarlos para la venta en tiendas de abarrotes. 3 trabajadores pueden empaquetar 25 bolsas de un cuarto en 1 hora. Los trabajadores deben realizar un pedido de 81 bolsas de un cuarto, pero un trabajador se ausenta.

- ¿En cuánto tiempo el resto de los trabajadores podrá realizar el pedido?
- ¿Qué sucedería si ahora en lugar de ausentarse un trabajador se incluyen dos trabajadores más? ¿Continúa presentando una relación de proporcionalidad inversa?

Solución a)

El valor desconocido representa el tiempo que se necesita saber para que los trabajadores realicen el pedido. Esto se puede calcular por medio de una regla de tres inversas, dado que si el número de trabajadores disminuye el tiempo en horas aumenta.

Entonces, sea x el tiempo en horas

Inicialmente se tiene que 3 trabajadores empaquetan y pesan 25 bolsas de un cuarto en 1 hora, pero se desea conocer el tiempo que se demoran de 81 bolsas, es decir,

$$25 \text{ bolsas} \rightarrow 1 \text{ hora}$$

81 bolsas → x horas

$$x = \frac{(81)(1)}{25} = 3.24 \text{ horas}$$

Entonces en 3.24 horas los tres trabajadores pueden empacar 81 bolsas de un cuarto, pero si se ausenta un trabajador, ahora se tiene que

3 trabajadores → 3.24 horas

2 trabajadores → x horas

$$x = \frac{(3)(3.24)}{2} = \frac{9.72}{2} = 4.86 \text{ horas}$$

Por lo tanto, dos trabajadores pueden empacar 81 bolsas de un cuarto en 4.86 horas, es decir, en 4 horas y $0.86(60) = 52$ minutos.

Solución b)

En inciso a) se halló que 3 trabajadores pueden empaquetar y pesar 81 bolsas de un cuarto en 3.24 horas, entonces ahora se agregan 2 trabajadores más y se desea conocer el tiempo con los trabajadores extras, es decir, el tiempo que demoraría 5 trabajadores.

Sea x el tiempo en horas

3 trabajadores → 3.24 horas

5 trabajadores → x horas

$$x = \frac{(3)(3.24)}{5} = \frac{9.72}{5} = \frac{243}{125} = 1.944 \text{ horas}$$

Por lo tanto, cinco trabajadores pueden empacar 81 bolsas de un cuarto en 1.944 horas, es decir, en 1 horas y $0.944(60) = 56.64$ minutos. Aproximadamente, en 1 hora y 57 minutos.

El problema continúa presentando una relación inversamente proporcional dado que ahora sí aumentan el número de trabajadores, el tiempo disminuye.

En la Tabla 17, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T6 y como fueron atendidos.

Tabla 17

Indicadores considerados en T6

Indicador	Criterios atendidos en T6
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad inversa utilizando en la solución la regla de tres inversa.
I18	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (regla de tres inversa).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I24	Se incluyó en el requerimiento un inciso que involucra el uso de porcentajes en donde deben interpretar y explicar qué representa ese porcentaje.

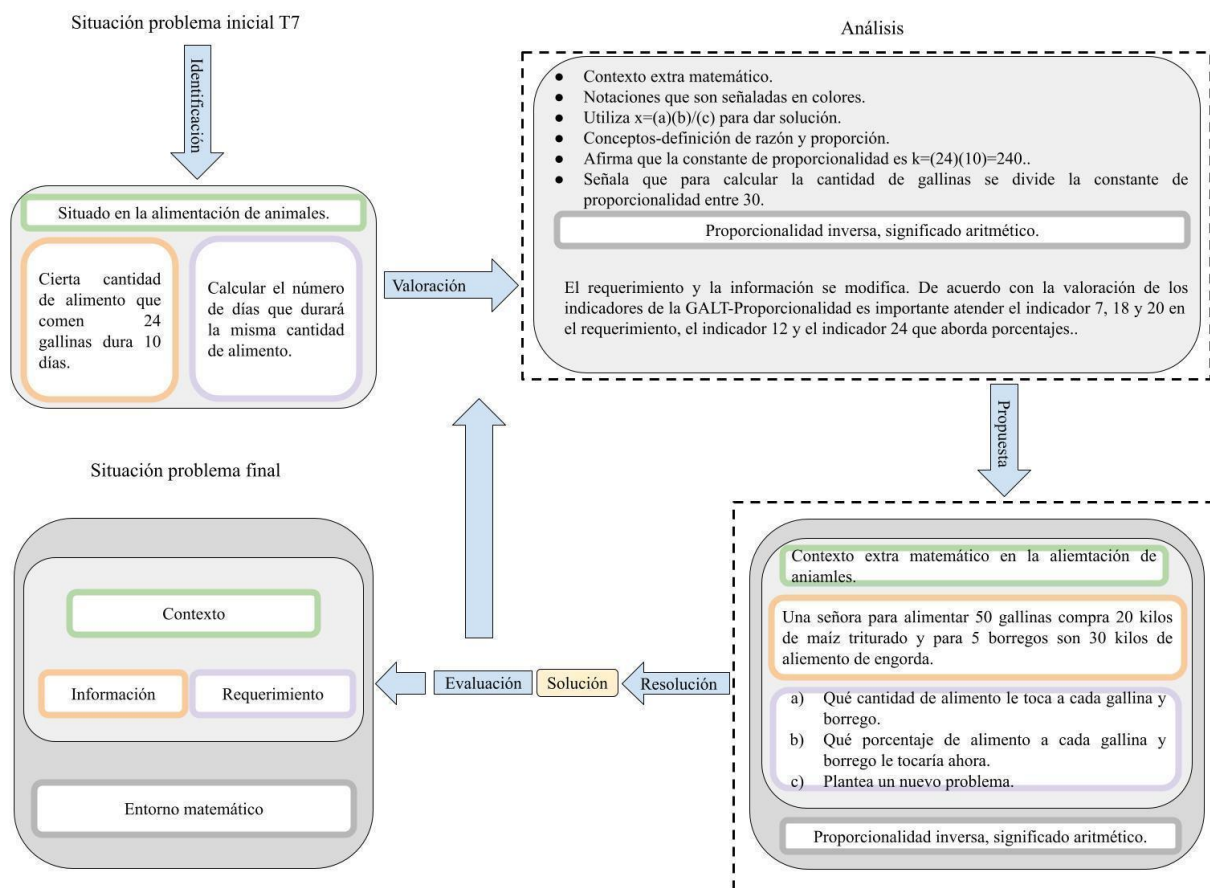
Nota. Elaboración propia.

Propuesta T7

Se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad inversa. En la T7 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I12, I18, I20 y I24 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, se presenten claros los conceptos de constante de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba y situaciones que involucren porcentajes. Por otra parte, los indicadores I3, I4, I6, I10, I21, I23, I25 y I26 no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 25 se presenta el proceso del diseño de T7, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 25

Proceso del diseño de T7



Diseño de T7

Una señora para alimentar a 50 gallinas compró 20 kilos de maíz triturado y para alimentar a 5 borregos compró 30 kilos de alimento de engorda.

- Pero al llegar a su casa, un señor le compró 20 gallinas y 2 borregos, entonces ¿qué cantidad de alimento le toca a cada gallina y borrego?
- ¿Qué porcentaje de alimento a cada gallina y borrego le tocaría ahora?
- Plantea un problema en donde tengas que resolver una situación inversamente proporcional. Discute con tus compañeros los problemas propuestos

Solución a)

Caso: gallinas

Inicialmente se tiene que los valores correspondientes que se conocen son 50 gallinas y 20 kilos. Entonces la constante de proporcionalidad inversa es:

$$k = \text{cantidad de gallinas} * \text{alimento por gallina}$$

$$20 \text{ kilos} = 50 \text{ gallinas} * \text{alimento por gallina}$$

$$\text{alimento por gallina} = \frac{20 \text{ kilos}}{50 \text{ gallinas}} = 0.4 \text{ kilos por gallina}$$

Pero la señora vendió 20 gallinas, entonces le quedaron 30 gallinas

$$30 \text{ kilos} * \text{alimento por gallina} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \text{ kg por gallina}$$

Entonces a cada gallina le tocaría $\frac{2}{3}$ kg por gallina.

Caso: borregos

Inicialmente se tiene que los valores correspondientes que se conocen son 5 borregos y 30 kilos. Entonces la constante de proporcionalidad inversa es

$$k = \text{cantidad de borregos} * \text{alimento por borregos}$$

$$30 \text{ kilos} = 5 \text{ borregos} * \text{alimento por borregos}$$

$$\text{alimento por borregos} = \frac{30 \text{ kilos}}{5 \text{ borregos}} = 6 \text{ kilos por borregos}$$

Pero la señora vendió 2 borregos, entonces le quedaron 3 borregos

$$30 \text{ kilos} * \text{alimento por borregos} = \frac{30}{3} = 10 \text{ kg por borregos}$$

Entonces a cada borrego le tocaría 10 kg por borrego.

Solución b)

El porcentaje de aumento de maíz triturado en las gallinas es

$$\frac{\frac{2}{3} - 0.4}{0.4} (100\%) = \frac{\frac{4}{15}}{0.4} (100\%) = 0.\bar{6}\%$$

Y para los borregos

$$\frac{10 - 6}{6}(100\%) = \frac{4}{6}(100\%) = 0.\bar{6}\%$$

Solución c)

Para el cumpleaños de Brenda se compraron 2 pasteles para 40 personas, pero al final llegaron 60 personas a su cumpleaños. Si la mamá de Brenda desea que cada invitado alcance a comer pastel, ¿qué porción de pastel le tocará a cada invitado?

Solución.

El problema presenta una relación inversamente proporcional dado que, si llegaron más personas, la porción de pastel es menor. Para dar solución se puede calcular mediante la constante de proporcionalidad inversa: se calcula la constante de proporcionalidad y se divide entre el valor conocido correspondiente al valor faltante.

Entonces, se conoce el número de personas y la porción, por tanto, con 40 personas se tiene que la proporción es

$$\frac{2}{40} = \frac{1}{20} \text{ de pastel}$$

Entonces,

$$k = 40 \left(\frac{1}{20} \right) = 2$$

Por lo tanto, la porción para 60 personas es:

$$60(\text{porción de pastel}) = 2$$

$$\text{porción de pastel} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

En la Tabla 18, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T7 y como fueron atendidos.

Tabla 18*Indicadores considerados en T7*

Indicador	Criterios atendidos en T7
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad inversa utilizando la constante de proporcionalidad inversa.
I12	Se presenta la constante de proporcionalidad inversa para que a partir de ella los estudiantes puedan establecer un procedimiento ($x = (a)(b)/(c)$) para dar solución a la situación-problema.
I18	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (regla de tres inversa).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I24	Se incluyó en el requerimiento un inciso que involucra el uso de porcentajes en donde deben interpretar y explicar qué representa ese porcentaje.

Nota. Elaboración propia.**Propuesta T8**

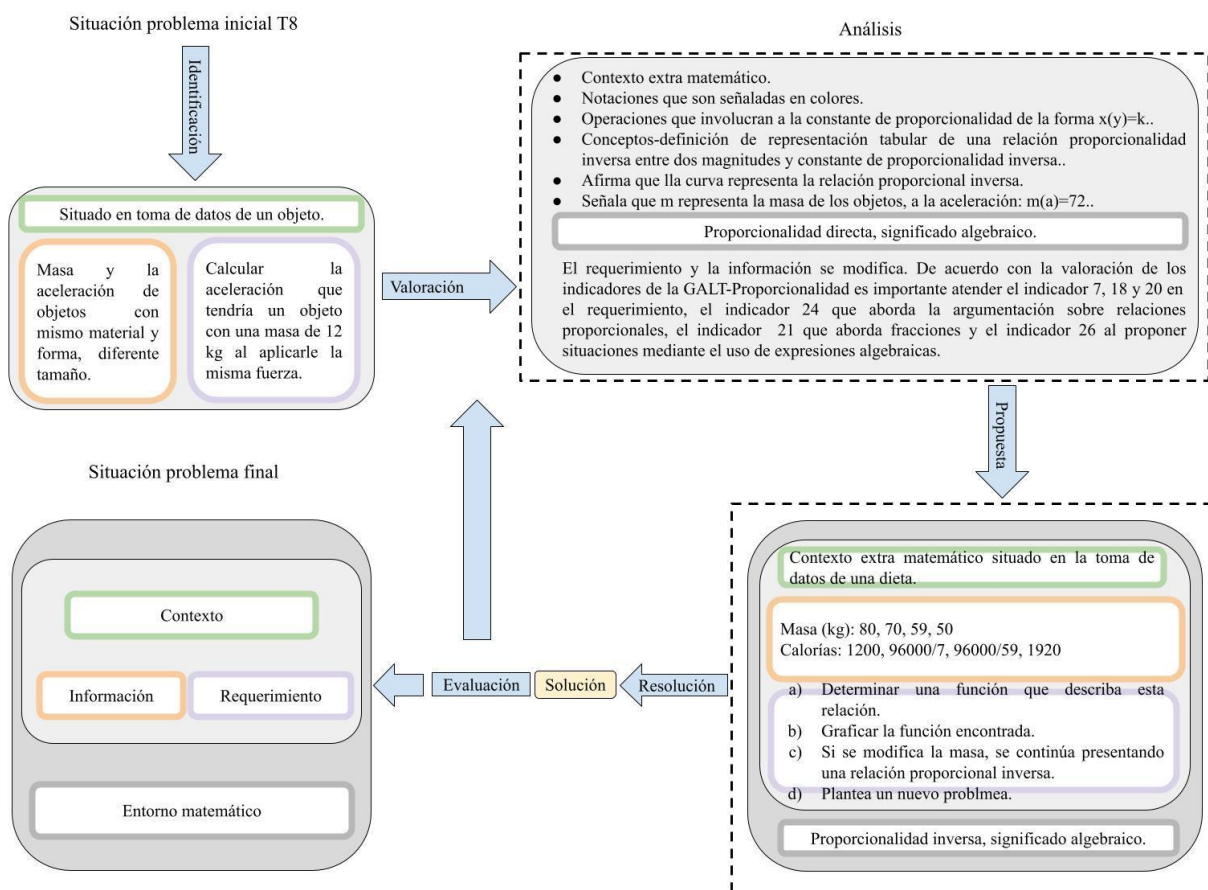
Se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad inversa.

En la T8 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18, I20, I21, I24 y I26 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba, situaciones que involucren porcentajes, situaciones que involucren fracciones en general y donde el estudiante proponga situaciones que atiendan el uso de expresiones algebraicas. Por otra parte, los indicadores I3, I4, I6, I10 y I23 no

se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 26 se presenta el proceso del diseño de T8, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 26

Proceso del diseño de T8



Diseño de T8

Se registraron en una tabla los datos obtenidos de la dieta que sigue una joven, en la tabla se observa la masa y el número de calorías que tiene permitido consumir.

Masa (kg)	Calorías
80	1200

70	$\frac{96000}{7}$
59	$\frac{96000}{59}$
50	1920

- Determina una función que describa esta relación.
- Grafica la función encontrada.
- Si al valor correspondiente de calorías de 1200 se modificara por 82 kg, conservando los demás datos restantes, ¿continuaría presentándose una relación proporcionalmente inversa?
- Plantea un problema en donde tengas que resolver una situación inversamente proporcional e involucre una función. Discute con tus compañeros los problemas propuestos.

Solución a)

Si la situación anterior describe una relación proporcionalmente inversa, la constante de proporcionalidad inversa de los datos debe ser determinada por

$$k = masa * calorías$$

Entonces,

Masa (kg)	Calorías	Constante de proporcionalidad inversa
80	1200	96000
70	$\frac{96000}{7}$	96000
59	$\frac{96000}{59}$	96000
50	1920	96000

Por lo tanto, los datos se comportan como una relación inversamente proporcional, entonces, si la constante es

$$96000 = masa * calorías$$

Se tiene

$$C(m) = \frac{96000}{\text{masa}}$$

Siendo

$C(m)$: las calorías en función de la masa

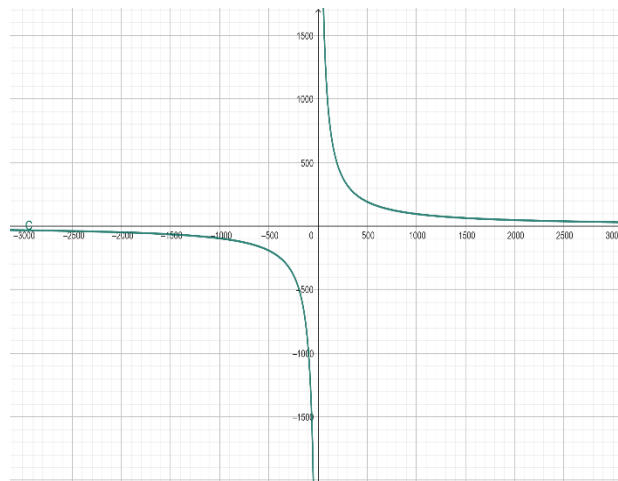
Masa: la masa de la joven

Por ejemplo, tiene una masa de 76 kilos debe consumir las siguientes calorías

$$C(76) = \frac{96000}{76} = \frac{24000}{19} \text{ calorías}$$

Solución b)

La gráfica de la función es la siguiente:



Dado que la constante de proporcionalidad inversa es positiva la curva se encuentra entre el tercer y primer cuadrante, dicha curva es una hipérbola. Sin embargo, para esta situación nos situaremos en el primer cuadrante dado que la masa de una persona debe ser positiva. Es decir, en una situación realista, el peso mínimo de una joven debe ser alrededor de los 50 kilos.

Solución c)

Si se modifica por 82 kg se tiene que ver si continúa presentando un comportamiento inversamente proporcional.

Masa (kg)	Calorías	Constante de proporcionalidad inversa
82	1200	98400
70	$\frac{96000}{7}$	96000
59	$\frac{96000}{59}$	96000
50	1920	96000

Por lo tanto, si se modifica por 82 kg los datos ya no presentan una relación inversamente proporcional.

Solución d)

En una pizzería utilizan 4 hornos para hornear 12 pizzas. Establece una función que modele la relación anterior.

Solución.

Sea x el número de hornos

Debemos hallar una función $f(x)$ que describa este fenómeno

Entonces tenemos que

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

Siendo k la constante de proporcionalidad y $f(x)$ representa la cantidad de pizzas que se hornean en cada horno.

Entonces,

$$\frac{k}{4} = 12$$

$$k = 48$$

$$f(x) = \frac{48}{x}$$

Por lo cual, se tiene que, si se tiene x hornos, cada uno hornea $\frac{48}{x}$ pizzas.

En la Tabla 19, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T8 y como fueron atendidos.

Tabla 19

Indicadores considerados en T8

Indicador	Criterios atendidos en T8
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes planteen un problema de proporcionalidad inversa utilizando la constante de proporcionalidad inversa para establecer una relación inversamente proporcional.
I18	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (constante de proporcionalidad inversa)
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I21	Se incluye en la situación-problema números fraccionarios.
I24	Se incluyó en el requerimiento un inciso que involucra comprobar y explicar si se trata de una relación de proporcionalidad inversa.
I26	Se propone en el requerimiento un inciso en donde el estudiante tenga que incluir un problema que incluya una expresión algebraica.

Nota. Elaboración propia.

4.3 Libro tercer grado saberes y pensamiento científico

La lección Procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional correspondiente del libro de tercer grado (SEP, 2024d) incluye cuatro tareas, cada una conformada por la tarea a resolver y su respectiva solución. Enseguida, se muestra las tareas en la Figura 27.

Figura 27

Tareas del libro de tercer grado de la lección procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

T9

Ejemplo 1

En una escuela, las autoridades mandaron colocar un dispensador de agua, para los estudiantes, con una capacidad de 150 l. Dicho aparato puede re-llenar 15 garrafas en 5 minutos.

T10

Ejemplo 2

La administración escolar pretende colocar 4 dispensadores de agua y se desea conocer cuánto tiempo se necesita para atender a 60 es-tudiantes. En este caso, se usa la relación proporcional inversa, dado que cuando aumenta la cantidad de dispensadores se reduce el tiem-po de atención para el mismo número de estudiantes.

T11

Ejemplo 1

A principio de año, la cooperativa escolar recibió los aportes de 200 estudiantes inscritos ese año. La administradora de la cooperativa concentró la información en la siguiente tabla:

Grupo	Cooperación individual por estudiante (\$)	Número de estudiantes	Total recibido por grupo (\$)
A	20	60	1200
B	50	75	3750
C	100	65	6500
Total		200	11450

Durante todo el año, la cooperativa vendió comida sana y frutas, y reunió \$20 000. Ahora ese dinero debe repartirse entre todos los miembros de la coo-perativa de forma proporcional, de acuerdo con la cantidad que entregaron al inicio del año y con la ganancia acumulada.

T12

Ejemplo 2

En una carrera de bicicletas se otorgan tres premios (primer, segundo y tercer lugar) cuya suma total es \$1 450 000. En la misma, el ganador registró un tiem-po de 1 hora y 12 minutos, el participante que llegó en segundo lugar demoró 96 minutos y el tercero llegó a la meta 12 minutos después del segundo compe-tidor. Considerando que el premio se repartirá entre los tres lugares de acuerdo con el tiempo demorado, descubrir cómo se debe repartir el premio.

Fuente: T9 se obtuvo de (SEP, 2024d, p.116), T10 de (SEP, 2024d, p.117) T11 de (SEP, 2024d, p.119) y T12 de (SEP, 2024d, p. 120).

4.3.1 Identificación de los objetos primarios y elementos de Malaspina

En la Tabla 20 se presentan la identificación de los objetos primarios y los elementos de Malaspina involucrados en las tareas del tercer libro. Sobre las situaciones-problemas

Tabla 20

Análisis de los objetos primarios y elementos de Malaspina (2017)

Tarea	Situación-problema
T9	Presenta un contexto extra-matemático dado que contempla una situación en donde se desea conocer la cantidad de garrafas que se pueden rellenar en un

	determinado tiempo. La tarea se encuentra asociada al significado aritmético mediante la proporcionalidad directa, utilizando el procedimiento de la regla de tres y el método de reducción a la unidad.
T10	Presenta un contexto extra matemático dado que contempla una situación en donde se desea conocer el tiempo en que cuatro dispensadores de agua podrían rellenar sus garrafas 60 estudiantes. La tarea se encuentra asociada al significado aritmético mediante la proporcionalidad inversa, utilizando el procedimiento de la regla de tres inversa.
T11	Presenta un contexto extra matemático dado que contempla una situación en donde se expone las ganancias de una cooperativa escolar de un año. La tarea se encuentra asociada al significado aritmético mediante la proporcionalidad directa, utilizando el uso de razones.
T12	Presenta un contexto extra-matemático dado que contempla una situación en donde se repartirá el premio de una carrera de bicicletas de acuerdo con el tiempo empleado que demoró los tres primeros lugares. La tarea se encuentra asociada al significado aritmético mediante la proporcionalidad inversa, utilizando el uso de razones.

Lenguaje

T9	Utiliza la siguiente notación para la regla de tres $\frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}} = \frac{x}{\text{Dato C}} \text{ entonces } x = \text{Dato B} \times \text{Dato C} / \text{Dato A}$ Para el método de reducción utiliza la notación Valor de la unidad: $\text{Dato B} / \text{Dato A}$
T10	Utiliza la siguiente notación para la regla de tres inversa Dato A es a Dato B como Dato C es a x, $\text{Dato A} \times \text{Dato B} = \text{Dato C} \times x \text{ entonces } x = \text{Dato A} \times \text{Dato B} / \text{Dato C}$
T11	Utiliza la siguiente notación de la regla para reparto proporcional directo: para realizar el reparto proporcional directo de una cierta cantidad (M) a otras cantidades determinadas (a, b, c) se construyen las razones proporcionales de la siguiente manera

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{M}{a + b + c}$$

Donde $M = A + B + C$ y A, B y C son las cantidades a determinar.

T12 Utiliza la siguiente notación de la regla para reparto inversamente proporcional: para realizar el reparto inversamente proporcional de una cierta cantidad (M) a otras cantidades determinadas (a, b, y c), se construyen las razones inversamente proporcionales de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{A}{1}}{a} = \frac{\frac{B}{1}}{b} = \frac{\frac{C}{1}}{c} = \frac{M}{1/a + 1/b + 1/c}$$

Donde $M = A+B+C$ y A, B y C son las cantidades a determinar.

Procedimientos

- T9 Presenta dos procedimientos para dar solución a la tarea, primero realiza una regla de tres y posteriormente utiliza el método de reducción a la unidad.
La regla de para proporcionalidad directa: Si existe una relación proporcional directa entre A y B, entonces la cantidad que genera C se puede calcular
Dato B/Dato A = x/Dato C entonces $x = \text{Dato B} \times \text{Dato C} / \text{Dato A}$
Método de reducción a la unidad: SI existe una relación proporcional directa entre A y B, el cociente entre un elemento de B y el elemento que le corresponde de A arroja el valor de la unidad.
Valor de la unidad: Dato B/ Dato A
- T10 Presenta un procedimiento para dar solución a la tarea el cual es la regla de tres para para proporcionalidad inversa.
- T11 Presenta la regla para reparto proporcional directo en donde señala que se utilizan razones de proporcionalidad directa.
- T12 Presenta la regla para reparto inversamente proporcional en donde señala que se utilizan razones inversamente proporcionales.

Conceptos-Definición

- T9 Antes de presentar la tarea aborda las siguientes definiciones:
La proporcionalidad es una relación entre dos o más entidades. Entre dos variables puede existir, o no, una relación de proporcionalidad directa o inversa.

	En una relación proporcionalidad directa, la cantidad y de una variable dependiente aumenta o disminuye de manera proporcional al aumento o disminución que sufre la cantidad de la variable independiente x. Se produce una relación proporcional inversa cuando la variable independiente aumenta a la vez que la variable dependiente disminuye y viceversa en la misma proporción.
<i>T10</i>	No presenta definiciones.
<i>T11</i>	Presenta la definición de reparto proporcional: Si todos los participantes reciben la misma cantidad, se dice que el reparto es equitativo o justo, pero si cada participante recibe una cantidad en función de alguna condición dada, se dice que el reparto es proporcional y puede ser directa o inversa.
<i>T12</i>	No presenta definiciones.
<i>Proposiciones</i>	
<i>T9</i>	Señala que en toda relación proporcional existe una constante, representada con la letra k , que se denomina constante de proporcionalidad.
<i>T10</i>	Señala que una relación proporcional puede ser directa o inversa.
<i>T11</i>	Señala que dado las condiciones que presenta la tarea es necesario generar razones proporcionales a través de la regla para reparto proporcional directo para realizar el reparto.
<i>T12</i>	Señala que, en un reparto proporcional directo, las variables involucradas cambian de la misma manera, es decir, experimentan cambios de magnitud en el mismo sentido, hacia arriba o abajo (constante de proporcionalidad). Por otro lado, en un reparto inversamente proporcional, el cambio que sufren las variables es de proporcionalidad inversa: al incremento de una, le corresponde la disminución de otra, de acuerdo con las razones proporcionales determinadas. Con el estudio de la relación proporcional entre las variables independiente y dependiente, denotadas, respectivamente, por x y y, se puede determinar si se trata de una relación proporcional directa (cuando el cociente entre las variables es constante, es decir, $y \div x = k$) o si se trata de una relación proporcional

inversa (cuando la constante entre las cantidades de estas variables resulta de la multiplicación $xy = k$).

<i>Argumentos</i>	
<i>T9</i>	Menciona que en la tarea intervienen dos variables lo cuales son los minutos y las garrafas y en el procedimiento de la regla de tres la variable minutos se cancela.
<i>T10</i>	Después de presentar la tarea, señala que se usa la relación proporcional inversa dado que cuando aumenta la cantidad de dispensadores se reduce el tiempo de atención para el mismo número de estudiantes. Además, posterior a dar solución por medio de la regla de tres inversa, menciona que al aumentar 4 veces el número de dispensadores de agua hace que el tiempo de atención disminuya un cuarto.
<i>T11</i>	Menciona que para conocer el valor aportado de cada grupo se multiplica la razón proporcional por la aportación de cada comunidad. Este resultado define lo que a cada grupo le corresponde de las ventas del año de la cooperativa escolar.
<i>T12</i>	Menciona que el corredor que empleó menor tiempo en terminar la carrera ganó mayor cantidad de dinero, es por ello que en esta situación se presenta una relación proporcional inversa.
<i>La información</i>	
<i>T9</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son la capacidad de 150 l, y el dispensador puede llenar 15 garrafas en 5 minutos.
<i>T10</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son 4 dispensadores de agua y 60 estudiantes.
<i>T11</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son la cantidad que reunió la cooperativa escolar de \$20,000, el aporte por cada grupo A= \$1,200, B= \$3,700 y C= \$6, 500.
<i>T12</i>	Presenta datos cuantitativos, los cuales son la cantidad del premio \$1, 450,000 y el tiempo que demora cada ganador en terminar la carrera, el primero lugar 72 minutos, el segundo lugar 96 minutos y el tercer lugar 108 minutos.

<i>El requerimiento</i>	
<i>T9</i>	Se pide hallar cuántas garrafas se pueden rellenar con el dispensador durante los 20 minutos del recreo.
<i>T10</i>	Se pide hallar cuánto tiempo se necesita para atender 60 estudiantes.
<i>T11</i>	No menciona explícitamente un requerimiento, sin embargo, presenta el procedimiento para hallar cuánto dinero le tocará a cada estudiante.
<i>T12</i>	Se pide hallar cómo se debe repartir el premio, considerando que el premio se repartirá entre los tres lugares de acuerdo con el tiempo demorado.
<i>El contexto</i>	
<i>T9</i>	Presenta un contexto extra matemático, el cual el contexto se sitúa en una escuela en donde se desea conocer la cantidad de garrafas de agua que puede llenar un dispensador en 20 minutos.
<i>T10</i>	Presenta un contexto extra matemático, el cual el contexto se sitúa en una escuela en donde se desea conocer el tiempo que se necesita para que 60 estudiantes llenen sus garrafas de agua considerando que se colocaría 4 dispensadores.
<i>T11</i>	Presenta un contexto extra matemático, el cual se sitúa en la cooperativa escolar de una escuela que repartirá las ganancias generadas en un año.
<i>T12</i>	Presenta un contexto extra matemático, el cual el se sitúa en una carrera de bicicletas en donde a los tres primeros lugares se repartirá el premio de acuerdo con el tiempo empleado para terminar la carrera.
<i>El entorno matemático</i>	
<i>T9</i>	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad directa en donde se aborda el procedimiento de la regla de tres y el método de reducción a la unidad.
<i>T10</i>	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad inversa en donde se aborda el procedimiento de la regla de tres inversa.
<i>T11</i>	El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad directa en donde se aborda la regla para reparto proporcional directo.

T12 El marco matemático en donde se ubica es la proporcionalidad inversa en donde se aborda la regla para reparto proporcional inversa.

Nota. Elaboración propia.

4.3.2 Valoración de la idoneidad epistémica

En la Tabla 21 se presenta la valoración de la idoneidad epistémica de las tareas utilizando los indicadores de GALT- Proporcionalidad (Castillo et al., 2022b).

Tabla 21

Identificación de indicadores en el libro de tercer grado

Indicador	Tareas			
	T9	T10	T11	T12
I1	✓	✓	✓	✓
I2	✓	✓	✓	✓
I3	✓	✓	✓	✓
I4	✓	-	-	-
I5	✓	✓	✓	✓
I6	-	-	-	-
I7	-	-	-	-
I8	✓	✓	✓	✓
I9	✓	✓	✓	✓
I10	-	-	-	-
I11	✓	✓	✓	✓
I12	✓	-	✓	-
I13	✓	✓	✓	✓
I14	✓	✓	✓	✓
I15	✓	✓	✓	✓
I16	✓	✓	✓	✓
I17	✓	✓	✓	✓

I18	-	-	-	-
I19	✓	✓	✓	✓
I20	-	-	-	-
I21	-	-	-	-
I22	✓	✓	✓	✓
I23	-	-	-	-
I24	-	-	-	-
I25	-	-	-	-
I26	-	-	-	-
I27	✓	✓	✓	✓

Nota. Elaboración propia.

Para el componente *significados*, se valoraron 20 indicadores, para el I1 se halló que para T9 está asociada al significado aritmético de la proporcionalidad, dado que aborda la proporcionalidad directa con la regla de tres directa y el método de reducción a la unidad; la T10 está asociada al significado aritmético de la proporcionalidad, dado que aborda la proporcionalidad inversa mediante la regla de tres inversas; en T11 está asociada al significado aritmético de la proporcionalidad, dado que aborda relaciones proporcionales directas enfocadas a la regla de reparto proporcional directo y en T12 está asociada al significado aritmético de la proporcionalidad, dado que aborda relaciones de proporcionalidad inversa.

Sobre I2, en T9 se presenta dos formas de dar solución a situaciones de proporcionalidad directa: regla de tres directa y método de reducción a la unidad. Además, que para presentar este método propone nuevos valores a las variables; en T10 se presenta una tarea de valor faltante el cual aborda contenidos relacionados con la proporcionalidad inversa; en T11 se presenta una tarea tabular el cual aborda contenidos relacionados relaciones proporcionales directa y en T12 se presenta una tarea el cual aborda contenidos relacionados con la proporcionalidad inversa. Acerca de I3, en T9, T10, T11 y T12 se presenta la distinción de las comparaciones multiplicativas en las aditivas en la parte de la solución de la tarea, es decir, esta tarea presenta una comparación multiplicativa.

Para I4, en T9 el planteamiento original involucra una relación multiplicativa. Posteriormente, presenta una nueva propuesta con nuevos valores a las variables para presentar el método de

reducción a la unidad en donde conlleva una relación multiplicativa; en T10, T11 y T12 no se hace explícita las relaciones proporcionales en diferentes problemas. En el I5, en T9, T10 involucra razones externas dado que compara valores con diferentes magnitudes, por ejemplo, en T10 se hace uso del número de dispensadores y el tiempo en minutos, en T11 el dinero y en T12 dinero y minutos.

Para I6, en todas las tareas (T9, T10, T11 y 12) no se propone situaciones de cálculo mental. Sobre I7 no se promueve que se propongan nuevos problemas (T9, T10, T11 y T12). Acerca de I8, en T9 se utilizan notaciones para señalar a la regla de tres: Dato A es a Dato B como Dato C es a X y al método de reducción a la unidad: Dato A es a Dato B, entonces Valor de la unidad: Datos B/ Datos A; en T10 se utiliza notaciones para señalar a la regla de tres inversas:

Dato A es a Dato B

Como Dato C es a x

$$Dato A \times Dato B = Dato C \times x \text{ entonces } x = \frac{Dato A \times Dato B}{Dato C}$$

En T11 se utiliza notaciones para señalar a la regla de tres inversa:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{M}{a + b + c}$$

Donde $M = A + B + C$ y A, B y C son las cantidades a determinar; en T12 se utiliza notaciones para señalar a la regla de tres inversas:

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{\frac{1}{b}} = \frac{C}{\frac{1}{c}} = \frac{M}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Donde $M = A + B + C$ y A, B, C son las cantidades a determinar.

Para I9, el lenguaje es adecuado para los estudiantes en T9, T10, T11 y T12. Para I10, en T9, T10, T11 y T12 explícitamente no se fomenta que los estudiantes interpreten los resultados, implícitamente se puede inferir en la solución dado que muestran explicaciones. En I11, en T9, T10, T11 y T12 la situación involucra una situación de relación multiplicativa que se hace explícita en la solución. Sobre I12, en T9 se presenta las siguientes definiciones: la proporcionalidad es una relación entre dos o más entidades. Entre estas dos variables puede existir, o no, una relación de proporcionalidad directa o inversa. En una relación proporcionalidad directa, la cantidad y de una

variable dependiente aumenta o disminuye de manera proporcional al aumento o disminución que sufre la cantidad de la variable independiente x . Se produce una relación proporcional inversa cuando la variable independiente aumenta a la vez que la variable dependiente disminuye y viceversa en la misma proporción. Posteriormente, presenta las definiciones siguientes: la regla de proporcionalidad directa: Si existe una relación proporcional directa entre A y B, entonces la cantidad que genera C se puede calcular

$$\frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}} = \frac{x}{\text{Dato C}} \text{ entonces } x = \frac{\text{Dato B} \times \text{Dato C}}{\text{Dato A}}$$

Método de reducción a la unidad: Si existe una relación proporcional directa entre A y B, el cociente entre un elemento de B y el elemento que le corresponde de A arroja el valor de la unidad. Por último, presenta la definición de Valor de la unidad: $\text{Dato B} / \text{Dato A}$. En T10 y T12 no se presentan definiciones; en T11 presenta la definición de reparto proporcional: si todos los participantes reciben la misma cantidad, se dice que el reparto es equitativo o justo, pero si cada participante recibe una cantidad en función de alguna condición dada, se dice que el reparto es proporcional y puede ser directa o inversa.

Para I13, en T9 se presenta una situación en donde el alumno debe identificar y aplicar las nociones de proporcionalidad directa, en específico a través de la regla de tres y el método de reducción a la unidad; en T10 se presenta una situación en donde el alumno debe identificar y aplicar las nociones de relaciones inversamente proporcionales, en específico a través de la regla de tres inversa; en T11 se presenta una situación en donde el alumno debe aplicar el reparto proporcional directo y en T12 se presenta una situación en donde el alumno debe aplicar las nociones de razones en un caso de reparto proporcional inverso. Sobre I14, en T9 se presenta la noción de la regla de tres y el método de reducción a la unidad, en donde mencionan que si existe una relación proporcional directa se puede hacer uso de los procedimientos mencionados; en T10 se presentan enunciados sobre la regla de tres inversa; en T11 se presentan los enunciados acerca del reparto proporcional directo y en T12 se presenta el reparto proporcional inverso.

Acerca de I15, en T9 mencionan que de acuerdo con el planteamiento de la tarea se puede realizar una regla de tres directa para dar solución, mencionando que, si existe una relación proporcional directa entre dos variables A y B, entonces C se puede calcular; en T10 utiliza una relación proporcional inversa, puesto que cuando incrementa el número de dispensadores disminuye el

tiempo de atención para la misma cantidad de estudiantes; en T11 menciona que para dar solución a la tarea se requiere utilizar razones de proporcionalidad directa para el reparto proporcional y en T12 se utiliza una relación proporcional inversa, dado que se desea repartir el premio conforme al tiempo y al lugar, al ganador que tenga menos tiempo recibe más parte del premio.

En I16, en T9 se propone hallar las soluciones mediante la regla de tres directa y el método de reducción a la unidad; en T10 se propone una situación en donde se solicita hallar el tiempo de atención para la misma cantidad de estudiantes; T11 se presenta una situación en donde se solicita repartir el dinero acumulado de una cooperativa entre los estudiantes de cada grupo y T12 se plantea una situación en donde se solicita la cantidad del premio a cada participante. Para I17, en T9 se explica en qué consiste la regla de tres y el método de reducción a la unidad, así como las respectivas operaciones; en T10 se explica en qué consiste la regla de tres inversa; en T11 se propone una situación en donde se solicita repartir el dinero acumulado de una cooperativa entre los estudiantes de cada grupo y en T12 se explica en qué consiste el reparto proporcional directo y qué representa cada variable. En I18, en T9, T10, T11 y T12 no se presenta una situación en donde se solicite al estudiante discutir distintas situaciones de proporcionalidad.

Acerca I19, en T9 en la solución presenta justificaciones acerca de la situación de proporcionalidad directa y cómo se obtiene la solución mediante dos procedimientos distintos; en T10 en la solución presenta justificaciones acerca de cuáles son las variables que intervienen y explicaciones acerca de los procedimientos; en T11 en la solución presenta justificaciones acerca de cuáles son las variables que intervienen en la solución y explicaciones acerca de los procedimientos y en T12 en la solución presenta justificaciones acerca de cuáles son las variables que intervienen en la solución y explicaciones acerca de los procedimientos. Sobre I20, en T9, T10, T11 y T12 no se favorece la justificación de los enunciados y las proposiciones de manera explícita. Sin embargo, de forma implícita en la solución aborda justificaciones del porqué de las operaciones realizadas.

Por otro lado, para el componente *relaciones*, se valoraron tres indicadores, para I21 en T9, T10, T11 y T12 no se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones, solamente con números naturales. En I22, en T9, T10, T11 y T12 se hace explícito en la solución la relación entre las operaciones y las cantidades asociadas con los valores de las magnitudes. Para I23, en T9, T10, T11 y T12 solo se aborda el significado aritmético asociado a la proporcionalidad.

Para el componente *procesos*, se valoraron tres indicadores, sobre I24 en T9, T10, T11 y T12 no se promueve situaciones en donde los estudiantes realicen generalizaciones. Sobre I25 en T9, T10, T11 y T12 no se presentan situaciones en donde el estudiante utilice el modelo matemático de la función. Acerca de I26 en T9, T10, T11 y T12 no se propone situaciones en donde el estudiante realice generalizaciones y conjeturas. Finalmente, para el componente de *conflictos epistémicos*, se valoró un indicador, para I27 en T9, T10, T11 y T12 se presentan de forma correcta el contenido y las definiciones sin ambigüedades.

4.3.3 Diseño de las tareas del libro de tercer grado

Posterior a la valoración de la idoneidad epistémica se diseñaron tareas tomando en cuenta lo encontrado en la valoración de algunos indicadores. Por ejemplo, para la T9 se valoraron 27 indicadores de los cuales se halló que la tarea no satisface lo establecido en 10. No obstante, en el diseño no se consideraron todos los indicadores dado que no todos pueden ser incluidos principalmente por la naturaleza de la situación-problema involucrada en cada tarea (significado algebraico asociado a la proporcionalidad). A continuación, se presenta la propuesta de diseño de las tareas (Burgos et al., 2024) en donde se tomó en cuenta los elementos de Malaspina, el análisis de los objetos primarios y la valoración epistémica de cada tarea.

Propuesta T9

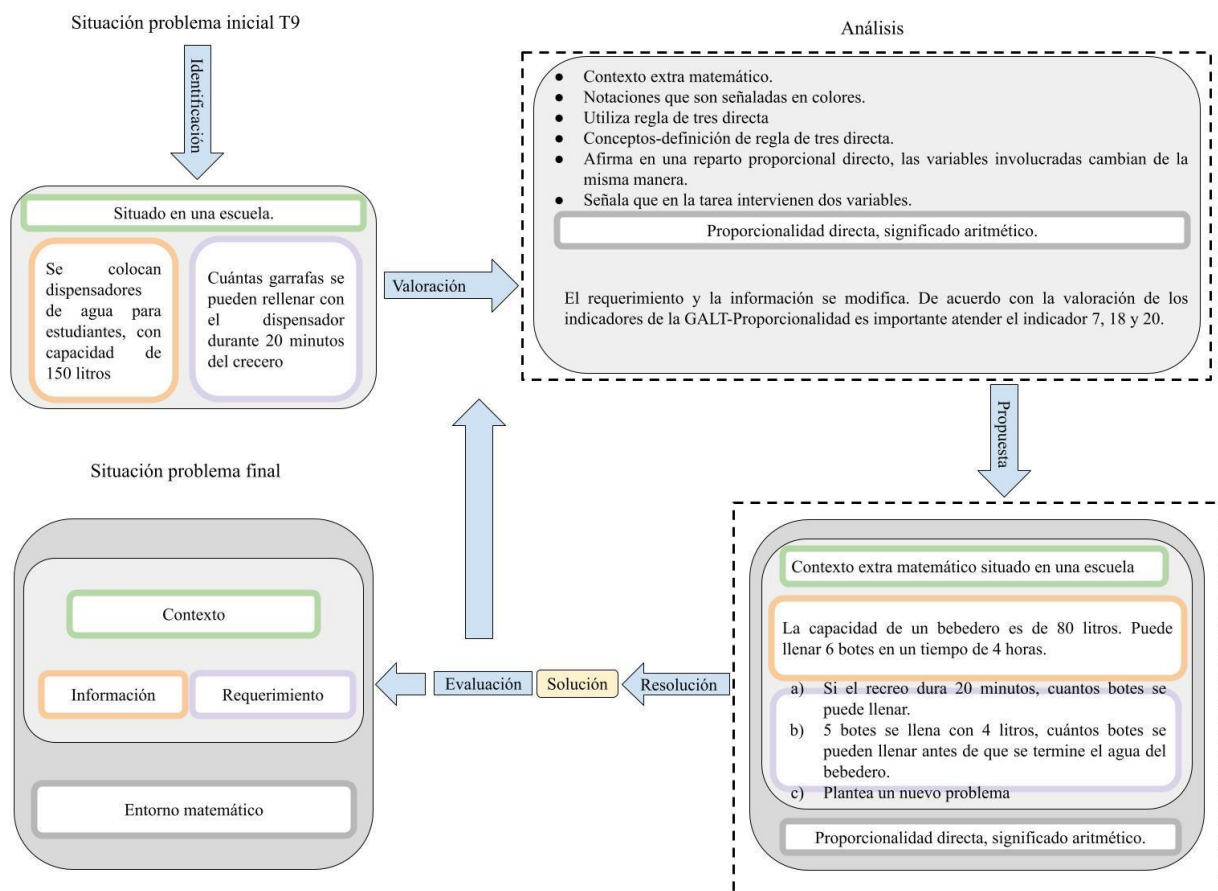
Se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad inversa.

En la T9 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18 y I20 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba. Por otra parte, los indicadores I6, I10, I21, I23, I24, I25 y I26 no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético.

En la Figura 28 se presenta el proceso del diseño de T9, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 28

Proceso del diseño de T9



Diseño de T9

En una escuela la capacidad de un bebedero de agua es de 80 litros y este puede llenar 6 botes en un tiempo de 4 minutos:

- Si el recreo tiene una duración de 20 minutos, cuántos botes se pueden llenar.

- b) Ahora, si se conoce que 5 botes tienen la misma capacidad y se llenan con 4 litros, ¿cuántos botes se pueden llenar antes de que se termine el agua del bebedero?
- c) Plantea un nuevo problema en donde tengas que resolver una situación de proporcionalidad directa mediante la regla de tres.

Solución a)

Se conoce que el bebedero en 4 minutos logra llenar 6 botes. Se puede utilizar una regla de tres dado que si aumenta los minutos de llenado aumenta los botes que se podrán llenar. Entonces, sea x la cantidad de botes, entonces se tiene que:

$$\frac{6 \text{ botes}}{4 \text{ minutos}} = \frac{x \text{ botes}}{20 \text{ minutos}}$$

$$x = \frac{6 \text{ botes}(20 \text{ minutos})}{4 \text{ minutos}} = 30 \text{ botes}$$

Por tanto, se pueden llenar 30 botes en 20 minutos.

Solución b)

Ahora se tiene que en 5 botes se pueden llenar con 4 litros, entonces si

$$\frac{4 \text{ litros}}{5 \text{ botes}} = 0.8 \text{ litros por bote}$$

Entonces con 80 litros se logran llenar

$$\frac{80 \text{ litros}}{0.8 \text{ litros por bote}} = 100 \text{ botes}$$

Solución c)

Una costurera puede hacer 20 vestidos de niña con 55 metros de tela:

- a) Si se quisiera realizar 25 vestidos, ahora, ¿cuántos metros de tela necesitará?
- b) Si se cuenta con 30 metros de tela, ¿cuántos vestidos puede hacer?

Solución a)

Se conoce que 20 vestidos pueden ser confeccionados con 55 metros de tela, entonces

$$x = \frac{25 \text{ vestidos (55 metros)}}{20 \text{ vestidos}} = \frac{1375}{20} = 68.75 \text{ metros}$$

Entonces se necesitan aproximadamente 69 metros de tela.

Solución b)

Ahora se pretende conocer cuántos vestidos se pueden hacer con 30 metros de tela, entonces, si

$$\frac{55 \text{ metros}}{20 \text{ vestidos}} = 2.75 \text{ metros por vestido}$$

$$\frac{30 \text{ metros}}{2.75 \text{ metros por vestidos}} = 10.\overline{90} \text{ vestidos}$$

Entonces, se pueden hacer 10 vestidos.

En la Tabla 22, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T9 y como fueron atendidos.

Tabla 22

Indicadores considerados en T9

Indicador	Criterios atendidos en T9
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes resuelvan un problema de proporcionalidad directa utilizando la regla de tres directa para establecer una relación proporcional.
I18	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (regla de tres directa)
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.

Nota. Elaboración propia.

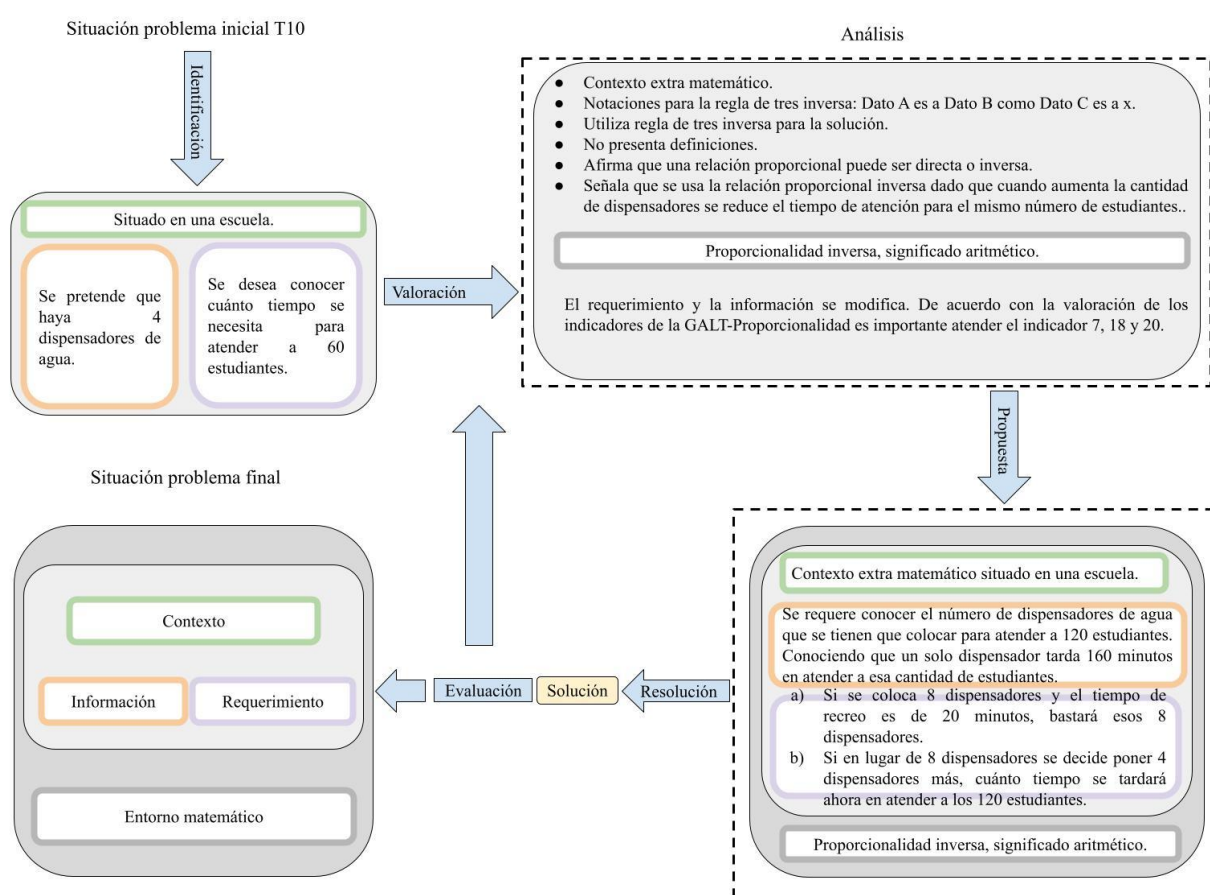
Propuesta T10

Se modificaron los componentes de información y requerimiento. Se conservaron los componentes de contexto y entorno matemático, es decir, el contexto es extra-matemático y el marco matemático es la proporcionalidad inversa.

En la T10 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18 y I20 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba. Por otra parte, los indicadores I4, I6, I10, I12, I21, I23, I24, I25 y I26 no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 29 se presenta el proceso del diseño de T10, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 29

Proceso del diseño de T10



Diseño de T10

En una escuela se requiere conocer el número de dispensadores de agua que se tienen que colocar para atender a 120 estudiantes. Conociendo que un solo dispensador tarda 160 minutos en atender a esa cantidad de estudiantes, contesta las siguientes preguntas:

- Si se colocaran 8 dispensadores y el tiempo de recreo es de 20 minutos, ¿basta esos 8 dispensadores?
- Si en lugar de 8 dispensadores se decide poner 4 dispensadores más, cuánto tiempo se tardará ahora en atender a los 120 estudiantes.

Solución a)

Se conoce que un dispensador tarda 160 minutos en atender a 120 estudiantes, entonces sea x el tiempo que se tardan 8 dispensadores

$$x = \frac{160 \text{ minutos (1 dispensador)}}{8 \text{ dispensadores}} = 20 \text{ minutos}$$

Entonces, si basta con 8 dispensadores.

Solución b)

Ahora si se consideran 4 dispensadores más, sea x el tiempo de los 12 dispensadores, entonces

$$x = \frac{160 \text{ minutos (1 dispensador)}}{12 \text{ dispensadores}} = 13.33 \text{ minutos}$$

Entonces, en 13.33 minutos se pueden atender 120 estudiantes con 12 dispensadores de agua.

En la Tabla 23, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T10 y como fueron atendidos.

Tabla 23

Indicadores considerados en T10

Indicador	Criterios atendidos en T10
17	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes resuelvan un problema de proporcionalidad inversa utilizando la regla de tres inversa.

- I18 Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (constante de proporcionalidad inversa).
- I20 En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
-

Nota. Elaboración propia.

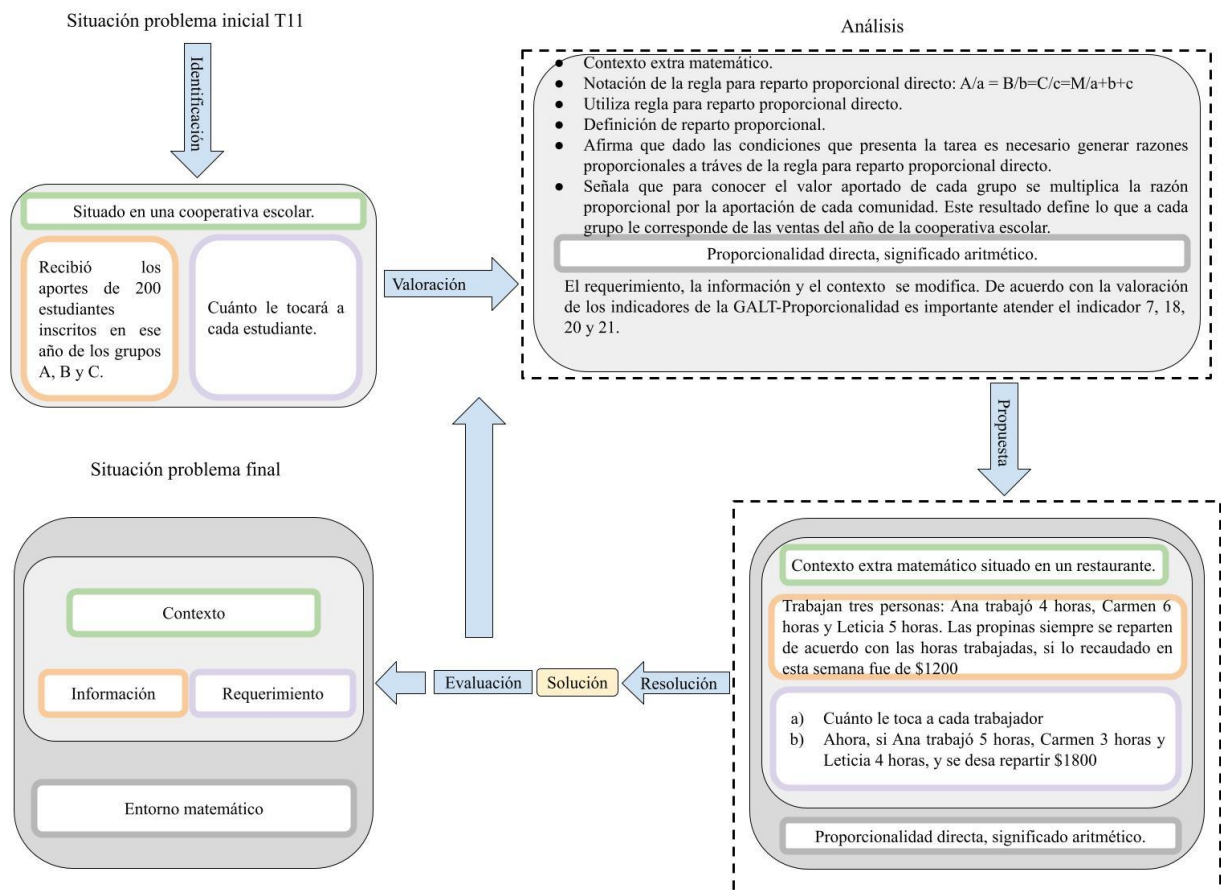
Propuesta T11

Se modificaron los componentes de información, requerimiento y contexto. Se conservó el componente de entorno matemático, es decir, el marco matemático es la proporcionalidad directa.

En la T11 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18, I20 y I21 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba, situaciones que involucren porcentajes, situaciones que involucren fracciones en general. Por otra parte, los indicadores I4, I6, I10, I23, I24, I25 y I26 no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 30 se presenta el proceso del diseño de T11, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 30

Proceso del diseño de T11



Diseño de T11

En un restaurante trabajan tres personas

Trabajadores	Horas trabajadas
Ana	4
Carmen	6
Leticia	5

Las propinas siempre se reparten de acuerdo con las horas trabajadas, si lo recaudado en esta semana fue de \$1200

- ¿Cuánto le toca a cada trabajador?
- Ahora, si Ana trabajó 5 horas, Carmen 3 horas y Leticia 4 horas, y se desea repartir \$1800.

Solución a)

Se tiene que las horas de trabajo en total corresponden a

$$\textit{Total de horas trabajadas} = 4 \textit{ horas} + 6 \textit{ horas} + 5 \textit{ horas} = 15 \textit{ horas}$$

Entonces a cada una le corresponde:

Ana

$$\frac{4}{15}(\$1200) = \$320$$

Carmen

$$\frac{6}{15}(\$1200) = \$480$$

Leticia

$$\frac{5}{15}(\$1200) = \$400$$

Solución b)

Ahora, se desea repartir \$1800 entre las horas trabajadas, entonces a cada una le corresponde

$$\textit{Total de horas trabajadas} = 5 \textit{ horas} + 3 \textit{ horas} + 4 \textit{ horas} = 12 \textit{ horas}$$

Ana

$$\frac{5}{12}(\$1800) = \$750$$

Carmen

$$\frac{3}{12}(\$1800) = \$450$$

Leticia

$$\frac{4}{12}(\$1800) = \$600$$

En la Tabla 24, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T11 y como fueron atendidos.

Tabla 24*Indicadores considerados en T11*

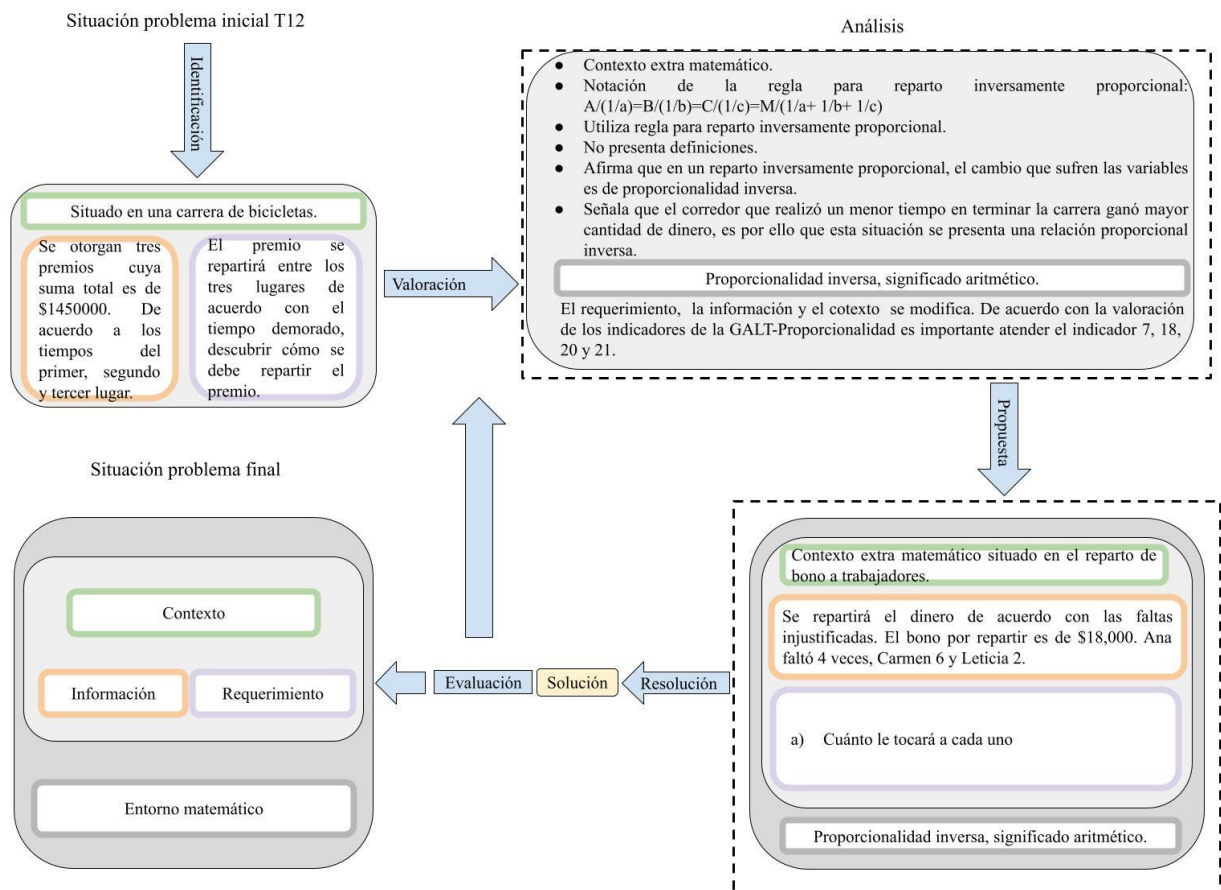
Indicador	Criterios atendidos en T11
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes resuelvan un problema reparto proporcional directo.
I18	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (reparto proporcional directo).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I21	Se incluyen en la situación-problema números fraccionarios.

Nota. Elaboración propia.**Propuesta T12**

Se modificaron los componentes de información, requerimiento y contexto. Se conservó el componente de entorno matemático, es decir, el marco matemático es la proporcionalidad inversa.

En la T12 para el diseño se consideró atender los indicadores I7, I18, I20 y I21 dado que incluyen elementos donde el estudiante proponga nuevas situaciones de proporcionalidad, negocie procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad, así como la justificación de proposiciones mediante distintos métodos de prueba, situaciones que involucren porcentajes, situaciones que involucren fracciones en general. Por otra parte, los indicadores I4, I6, I10, I12, I23, I24, I25 y I26 no se tomaron en cuenta dado la naturaleza de la tarea, en particular por el significado aritmético. En la Figura 31 se presenta el proceso del diseño de T12, posteriormente se presenta la propuesta.

Figura 31*Proceso del diseño de T12*



Diseño de T12

Por motivos de fin de año, se dará un bono a los trabajadores, para ello se repartirá el dinero de acuerdo con las faltas injustificadas. El bono por repartir es de \$18,000 y en la siguiente tabla se tienen los registros de esta información:

Trabajador	Faltas injustificadas en el transcurso del año
Ana	4
Carmen	6
Leticia	2

a) ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Solución a)

Primero se calculó los inversos de los tiempos

$$Ana = \frac{1}{4}$$

$$Carmen = \frac{1}{6}$$

$$Leticia = \frac{1}{2}$$

Ahora se suman los inversos y después se divide cada inverso entre el total de la suma de los inversos, entonces

$$Suma\ de\ los\ inversos = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

Ahora,

$$Ana = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{12}} = \frac{3}{11}$$

$$Carmen = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{12}} = \frac{2}{11}$$

$$Leticia = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{12}} = \frac{6}{11}$$

Por último, multiplicamos cada proporción por el total de las horas, entonces a cada una le toca

$$Ana = \frac{3}{11}(\$18000) = \$4909.\overline{09}$$

$$Carmen = \frac{2}{11}(\$18000) = \$3272.\overline{72}$$

$$Leticia = \frac{6}{11}(\$18000) = \$9818.\overline{18}$$

En la Tabla 25, se presentan los indicadores que fueron considerados en la propuesta de la T12 y como fueron atendidos.

Tabla 25*Indicadores considerados en T12*

Indicador	Criterios atendidos en T12
I7	Se incluyó en el requerimiento asociado a la situación-problema un inciso en donde se proponga que los estudiantes resuelvan un problema de reparto proporcional inversa.
I15	Se agregó una situación en donde el estudiante negocie y genere procedimientos fundamentales de proporcionalidad (reparto proporcional inverso).
I20	En el requerimiento se solicita a los estudiantes que justifiquen sus soluciones matemáticas mediante argumentación u otro tipo de método que considere pertinente.
I21	Se incluye en la situación-problema números fraccionarios.

Nota. Elaboración propia.

CAPÍTULO 5. Conclusiones y reflexiones

En este capítulo se contestan las preguntas de investigación asociadas con el objetivo general, asimismo se presenta el contraste de los resultados obtenidos con la literatura existente, una discusión acerca del diseño de tareas, reflexiones acerca de las tareas originales, las propuestas y futuras líneas de investigación.

Esta investigación tuvo como objetivo general diseñar tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto mexicanos de Educación Secundaria. Para ello se utilizaron los elementos teóricos y metodológicos del EOS: objetos primarios, idoneidad epistémica, GALT-Proporcionalidad, modelo teórico de creación de problema de Burgos et al. (2024), así como los elementos de Malaspina (2017). Para contestar la pregunta de investigación específica ¿Cuál es la valoración de la idoneidad epistémica del tratamiento de la proporcionalidad en tareas que se encuentran en los libros de texto Saberes y pensamiento científico de la Educación Secundaria en México? es importante señalar que utilizaron los indicadores de la GALT-Proporcionalidad, encontrando que las tareas de las lecciones de proporcionalidad de los libros de texto de Educación Secundaria no satisfacen con todos los indicadores de idoneidad epistémica, en 5.1 se presenta con profundidad la respuesta a la pregunta.

Para contestar a la segunda pregunta de investigación específica ¿Cómo diseñar tareas de proporcionalidad a través del análisis de los libros de texto Saberes y pensamiento científico y el modelo teórico de Burgos et al. (2024)? Es relevante mencionar que, el diseño propuesto en esta investigación, se llevó a cabo mediante distintas etapas, primero se realizó un análisis a las tareas de las lecciones de proporcionalidad usando la configuración epistémica y la identificación de los elementos de Malaspina, dado que lo anterior (objetos primarios y elementos de Malaspina) se encuentran involucrados en el modelo de Burgos et al. (2024), posteriormente se realizó la valoración de la idoneidad epistémica de las tareas involucradas, por último, considerando todo lo anterior, se utilizó el modelo en la categoría *elaboración o variación estructurada*. En 5.2 se presenta con profundidad la respuesta a la pregunta de investigación.

5.1 Valoración de la idoneidad epistémica

La valoración de idoneidad epistémica se llevó a cabo mediante el contraste de los indicadores de la GALT-Proporcionalidad y lo que se presentan en las tareas de las lecciones de proporcionalidad de los libros de texto de Educación Secundaria. Para ello se valoraron 27 indicadores de idoneidad epistémica asociados a cuatro componentes: significados, relaciones, procesos y conflictos epistémicos.

- *Significado*

Acerca de este componente se halló que las tareas de los libros de texto tienden a tener un solo significado asociado a la proporcionalidad, predominando el significado aritmético. Específicamente en primer grado se abordaron aritmético (2) y algebraico o funcional (2), en segundo grado aritmético (2) y algebraico o funcional (1) y en tercer grado aritmético (4). Teniendo nula presencia el significado intuitivo y el geométrico. Asimismo, no se logra presentar distintas situaciones para que el estudiante interprete, relacione y realice procedimientos de proporcionalidad. Por otro lado, se presentan definiciones que son abordadas antes o durante la tarea, así como procedimientos como la regla de tres directa e inversa, utilizar la constante de proporcionalidad y el reparto proporcional. Por otra parte, no se propicia que los estudiantes planteen y discutan otras tareas.

- *Relaciones*

En las tareas se tiende a utilizar números naturales en lugar de una mezcla con otros números como fraccionarios o racionales. Por otro lado, la articulación de significados no se hace presente ya que estas tareas presentan un único significado. Además, implícitamente se puede intuir la relación entre cantidades de una misma magnitud y la razón entre números.

- *Procesos*

Dado que la mayoría de las tareas se concentran en atender una sola situación-problema en donde se tenga que dar solución a una o dos incisos, no se presenta una muestra diversa en donde el estudiante tenga que argumentar, formular conjeturas e inclusive utilizar un modelo funcional, ya que como las tareas involucran un único significado en su mayoría aritmético no se logra articular con otros significados.

- *Conflictos epistémicos*

En la mayor parte de las tareas no se presentan ambigüedades o errores, a excepción de la T1 en donde no se define con claridad el uso de un solo término para referirse a la constante de proporcionalidad.

En la literatura de Educación Matemática se pueden encontrar investigaciones que han analizado la idoneidad didáctica dentro de ella se encuentra la idoneidad epistémica. Aroza et al. (2016) llevaron a cabo una experiencia de enseñanza acerca de la proporcionalidad, valorando las distintas facetas e identificando propuestas para el rediseño de la experiencia. Sobre la faceta epistémica, valoraron con indicadores de idoneidad didáctica generales adaptándolos al tema de proporcionalidad encontrando en la unidad didáctica que únicamente se centra en el significado aritmético utilizando la regla de tres. Por otra parte, se evidencia que el tema de proporción se reduce a fracciones equivalentes y razón a fracciones. En comparación con los resultados obtenidos se muestra una similitud acerca del predominio del significado aritmético en los libros de texto de Educación Secundaria de México y España.

Por otra parte, Luque y Ibarra (2021) en su investigación describieron el grado de representatividad de los componentes del significado de la proporcionalidad que se evidencian en pruebas propuestas por docentes de secundaria referentes a los significados institucionales. Sobre la faceta epistémica, obtienen que las propuestas de los profesores (A y B) atienden los significados asociados a la proporcionalidad, para el profesor A logra proponer situaciones que involucren el significado aritmético, proto-algebraico y algebraico funcional, mientras que el otro profesor B se enfoca en los significados informal o cualitativo, proto-algebraico y algebraico funcional. En contraste con lo obtenido, se encuentra una similitud ya que se propusieron tareas que involucran el significado aritmético y algebraico o funcional.

Castillo y Burgos (2022b) analizaron las reflexiones que realizaron futuros docentes acerca del grado de conveniencia de una lección de proporcionalidad de un libro de texto de Educación Primaria (España) y las modificaciones para incrementar la idoneidad didáctica del proceso instruccional. Sobre la valoración de la faceta epistémica, hallaron que los problemas son a) algorítmicos y repetitivos; b) no se fomenta el proponer nuevos problemas por parte de los estudiantes; c) no se distinguen las relaciones multiplicativas entre cantidades; d) las proposiciones no son suficientes para distinguir una situación proporcional; e) así como no se promueve la modelización y f) No se distinguen las comparaciones multiplicativas y aditivas. En comparación

con los resultados obtenidos en esta investigación se muestra una similitud acerca de que no se planteen por parte de los estudiantes nuevas tareas (Libro de primer, segundo y tercer grado), asimismo las tareas no se distinguen las relaciones multiplicativas de las aditivas (Libro de primer, segundo y tercer grado). Por otra parte, el libro de primer y segundo grado contempla tareas que involucran el significado algebraico o funcional el cual utilizan expresiones algebraicas sin llegar a una modelización.

Castillo et al. (2022b) establecieron una pauta de indicadores de idoneidad didáctica específicamente de proporcionalidad que pueden servir para la valoración de libros de texto y como una herramienta para la reflexión de los docentes para el proceso instruccional, partiendo del GALT-Matemáticas. Sobre la faceta epistémica, establecieron indicadores de idoneidad epistémica acerca del tema de proporcionalidad atendiendo específicamente significados, relaciones, procesos y conflictos epistémicos. Esta guía permite valorar la idoneidad epistémica de las tareas de en particular de proporcionalidad, por lo anterior es importante utilizar este tipo de herramientas que atiende este concepto.

5.2 Diseño de tareas utilizando indicadores y un modelo

Para el diseño de las tareas se consideraron los indicadores de idoneidad epistémica y el modelo de Burgos et al. (2024), para ello se analizaron y valoraron las tareas de proporcionalidad. La incorporación para el diseño fue relevante dado que permitieron considerar criterios específicos acerca de la proporcionalidad que deben estar involucrados en las tareas. Estos indicadores permitieron ver con detenimiento aspectos de la tarea (significado, relaciones, procedimientos y conflictos epistémicos) que tenían que ser considerados o no en el diseño de las tareas.

En esta investigación se consideró la valoración de la idoneidad epistémica, así como el modelo en el cual se conservaron elementos en su mayoría entorno matemático y contexto, permitiendo establecer nuevas tareas a partir de las tareas originales de los libros de texto. En este sentido sigue la línea de otras investigaciones en donde se han utilizado los criterios de idoneidad para rediseñar una unidad didáctica (Acedo et al., 2024), una lección de proporcionalidad (Esqué de los Ojos y Breda, 2021).

En Acedo et al. (2024) analizaron el rediseño de una unidad didáctica de proporcionalidad de primer grado de secundaria por parte de una profesora en donde implementó y evaluó la propuesta.

Sobre la idoneidad epistémica, la profesora menciona que es importante considerar incorporar una diversidad de procedimientos y problemas, además halla que los significados aritméticos y algebraicos son los principales en la unidad.

En Esqué de los Ojos y Breda (2021) analizaron reflexiones de la práctica docente de un profesor utilizando criterios de idoneidad didáctica, esto para que el profesor valorará y rediseñara una lección de proporcionalidad. Sobre la idoneidad epistémica, se halló que el profesor realiza una autoevaluación acerca de los errores y menciona que la propuesta es en atención a una mejora de evaluación formativa, es decir, que la unidad didáctica sistematice la obtención de resultados y el análisis de los estudiantes. Por otra parte, en Burgos et al. (2020) realizaron un análisis acerca de una lección del tema de proporcionalidad para caracterizar la idoneidad de las trayectorias didácticas e incrementar la idoneidad. Sobre la idoneidad epistémica, analizaron mediante configuraciones didácticas las prácticas y objetos que intervienen, así como los procesos y conflictos epistémicos.

En esta investigación, se utilizó para el diseño de tareas el modelo de Burgos et al. (2024), este modelo es relevante ya que permite proponer nuevas tareas considerando la valoración de la idoneidad epistémica, asimismo, el uso de indicadores de idoneidad epistémica de la GALT-Proporcionalidad permitieron atender específicamente algunos criterios sobre este contenido.

5.3 Futuras líneas de investigación

Una vez concluido este estudio, se plantean posibles líneas de investigación que dan apertura a la continuidad a esta línea de diseño de tareas mediante la valoración de la idoneidad epistémica. Por ello, se propone atender intervenciones formativas que involucren el diseño, la evaluación y el análisis de tareas de proporcionalidad por parte de profesores o futuros profesores. Por otra parte, investigaciones que involucren el conocimiento del profesor en el diseño de tareas de proporcionalidad, así como diseñar tareas y al mismo tiempo el correspondiente material manipulativo. Por último, en cuestión de la GALT-proporcionalidad se podría desarrollar indicadores que atiendan al realismo. Así como investigaciones que incluyan otras facetas de la idoneidad didáctica en donde se valoren otros indicadores de idoneidad de acuerdo con las facetas elegidas.

5.4 Reflexiones sobre la investigación

Para el diseño de tareas, uno de los elementos teóricos y metodológicos utilizados fue el modelo de Burgos et al. (2024) en donde en capítulos anteriores se profundizó acerca de ello. No obstante, es importante señalar que este modelo que se encuentra enfocado para profesores fue adaptado para esta investigación, es decir, dentro del modelo original se contempla la situación-problema, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos, que son vistos desde el EOS. Estos objetos son considerados en la configuración epistémica como objetos primarios. Sin embargo, en el modelo original no se contempló el objeto primario: lenguaje. En esta investigación se añadió al modelo dado que es importante analizar las expresiones y términos utilizados en las tareas.

Sobre la GALT-Proporcionalidad se consideraron 27 indicadores de idoneidad epistémica, acerca de esto es relevante considerar que en las nuevas propuestas no se consideraron todos los indicadores ya que, por ejemplo, el I23 en donde contempla la integración de todos los significados asociados a la proporcionalidad (intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico o funcional), al estar sujetos a la categoría elaboración o variación parcial no era posible realizar el diseño con estos significados; por otro lado si se hubiera considerado modificar el entorno matemático y considerar todos los significados se modificaría la intención de considerar las tareas de proporcionalidad de los libros de texto. En cuanto al indicador I6 acerca de situaciones de cálculo mental no fue pertinente considerarlo dado el nivel educativo, por ejemplo, en tareas en donde se requería proponer un modelo funcional implica un mayor razonamiento proporcional para plantearlo de forma mental.

Con respecto a la pertinencia de las tareas en comparación con el diseño curricular de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) que propone atender tareas que contengan contextos reales y sean resueltos mediante el pensamiento crítico, en el cual los estudiantes interpretan relaciones entre modelos matemáticos y desarrollan procedimientos (Dirección General de Desarrollo Curricular de la Secretaría de Educación Pública, 2024). Se considera que las nuevas tareas impactan de forma positiva dado que se apega a los lineamientos de la NEM, ya que estas tareas tratan de que se formule e interprete matemáticamente las situaciones descritas, además, se buscó que las situaciones-problemas estuvieran asociadas con contextos de la vida cotidiana.

Finalmente, la intención de esta investigación fue diseñar tareas de proporcionalidad utilizando la valoración de idoneidad epistémica con un modelo en donde se analizaron e identificaron

elementos teóricos considerados dentro del EOS, esto permitió utilizar la categoría elaboración o variación estructurada para tomar en cuenta las tareas originales y proponer nuevas tareas.

Referencias

- Aroza, C., Godino, J. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *Avances en Investigación e Innovación – Revista de Educación Secundaria*, 6(1), 1-29.
- Arzola, G., Breda, A., Sánchez, A. y Rosário, V. (2024). Proporcionalidad y porcentajes en la educación básica: análisis y propuesta de mejora de una unidad didáctica. *Revista Eletrônica de Educação*, 18(1), 1-21. <https://doi.org/10.14244/reveduc.v18i1.6544>
- Azzahra, N., Herman, T. & Dasari, D. (2022). Analysis of inverse proportion in mathematics textbook based on praxeological theory. *Jurnal analisa*, 8(2), 152-167.
- Berreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., Rodriguez, M. (2017), *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.
- Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes)*. Sense publishers.
- Burgos, M., & Castillo, M. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(4), 165-191.
- Burgos, M. y Castillo, M. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de libro de texto sobre proporcionalidad por parte de maestros en formación. *Revemop*, 4, 1-25. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>
- Burgos, M., & Castillo, M. (2023). Competence of analysis and reflection on the management of textbook lessons by pre-service teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 23(1), 1-17. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7274>
- Burgos, M., Castillo, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con

- herramientas del enfoque ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40-68. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2023a). Análisis didáctico en la formación de maestros basado en las herramientas del enfoque ontosemiótico. El caso de lecciones de proporcionalidad. *Revista Interuniversitaria de Formación de Formación del Profesorado*, 98(37.2), 11-34. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99050>
- Burgos, M., Castillo, M. y Godino, J. (2023b). Análisis de lecciones de libros de texto basado en las herramientas del Enfoque Ontosemiótico: Una experiencia con maestros en formación. *Revista Paradigma*, 44, 34-58.
- Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia*, 37(1), 254-277. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14>
- Burgos, M. y Godino, J. (2020a). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad: Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 1-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- Burgos, M. & Godino, J. (2020b). Semiotic conflicts in the learning of proportionality: analysis of a teaching experience in primary education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), 1-18. <https://doi.org/10.29333/iejme/7943>
- Burgos, M., & Godino, J. (2020c). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problema. *Mathematics Education Research Journal*, (34), 269-291. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9>
- Burgos, M. & Godino, J. (2021a). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (20), 367-389. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0>
- Burgos, M. & Godino, J. (2021b). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of students' solutions to proportionality tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (43), 347-376. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4>

- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., & Chaverri, J. (2024). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematcis Education Research Journal*, 1-30. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w>
- Block, D., Mendonza, T., y Ramírez, M. (2015). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Somos maestros.
- Castillo, M. & Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analyzing textbooks lessons. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), 1-16. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
- Castillo, M. y Burgos, M. (2022b). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 555-579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>
- Castillo, M. y Burgos, M. (2023). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, 17(2), 171-199. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.24089>
- Castillo, M., Burgos, M., & Godino, J. (2021). Prospective high school mathematics teachers' assessment of the epistemic suitability of a proportionality textbook lesson. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 23(4), 169-206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
- Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, 34(2), 39-71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>
- Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022b). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-19. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
- Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. (2022c). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, 1-19. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787esp>

- Castillo, M., Burgos, M., Díaz, J. (2022d). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-21. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
- Dirección General de Desarrollo Curricular de la Secretaría de Educación Pública. (2024). *El plan de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022*. <https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Plan-de-Estudio-ISBN-ELECTRONICO.pdf>
- Esqué de los Ojos, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38-54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (11), 111-132.
- Godino, J. (2022). Emergencia, estado actual y perspectiva del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista venezolana de investigación en educación matemática*. 2(2), 1-24.
- Godino, J. y Batanero, M-C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. y Batanero, M-C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. <https://hdl.handle.net/10481/95719>
- Godino, J. Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotical approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Virtual, España. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

- Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista chilena de educación matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J. (2024). *Enfoque ontosemiótico en la educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna.
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 5-22.
- Hernández, R. F., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Ibáñez, C. y Martínez, S. (2020). Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4.º de ESO. *SUMA*, (95), 51-58.
- Luque, K. y Ibarra, S. (2021). El papel de las pruebas escritas en la evaluación de los aprendizajes sobre el tema de proporcionalidad. *SahuarUS*, 5(1), 64-80.
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional. Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos..Virtual*, España. <https://www.ugr.es/~fqm126//civeos/malaspina.pdf>
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17.
- Malet, O., Giacomone, B., y Repetto, A. (2021). La idoneidad didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, 3, 1-23.
- Martínez, S., Muñoz, J. y Oller, A. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 95-115.

- Martínez, S., Muñoz, J., Oller, A. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 95-122. <https://doi.org/10.12802/relime.17.2014>
- Martínez-Meléndez, K. (2023). *Consideración de la realidad en problemas verbales matemáticos con estudiantes de segundo grado de secundaria* [Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla] Repositorio institucional BUAP. <https://hdl.handle.net/20.500.12371/20156>
- Martínez Meléndez, K. M., Morales-García, L., y Juárez-López, J. A. (2025). Revisión sistemática acerca de la proporcionalidad en libros de texto. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 17(1), 3–16. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v17i1.177>
- Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública. (2022). *Programa sintético de la Fase 2 a 6*. Secretaría de Educación Pública. https://www.dof.gob.mx/2023/SEP/ANEXO_ACUERDO_080823_FASES_2_A_6.pdf
- Secretaría de Educación Pública. (2024a). *Programa de estudio para la educación secundaria: programa sintético de la fase 6*. Secretaría de Educación Pública. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_6.pdf
- Secretaría de Educación Pública. (2024b). *Saberes y pensamiento científico. Colección ximhai*. Secretaría de Educación Pública. <https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S1SAA.htm>
- Secretaría de Educación Pública. (2024c). *Saberes y pensamiento científico. Colección sk'asolil*. Secretaría de Educación Pública. <https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S2SAA.htm>
- Secretaría de Educación Pública. (2024d). *Saberes y pensamiento científico. Colección nanahuatzin*. Secretaría de Educación Pública. <https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S3SAA.htm>
- Secretaría de Educación Pública de Baja California Sur. (2019). *Reporte integrado planea secundaria* 2019.

Vega, B. (2021). La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto. *Revista De Educación Matemática*, Número especial, 1-13.

Anexos

Anexo 1. Soluciones de las tareas del libro de segundo grado.

ST6

Ejemplo 1

Se envasa cierta cantidad de pintura en 6 cubetas de 20 l cada una. Hallar el número de cubetas de 4 l de capacidad que se requieren para envasar los 20 l de pintura. En este ejemplo, la relación de proporcionalidad inversa se plantea como sigue:

$$6 \text{ cubetas} \longrightarrow 20 \text{ l}$$

$$x \text{ cubetas} \longrightarrow 4 \text{ l}$$

El valor desconocido representa la cantidad de cubetas de 4 l requeridas para envasar la pintura. Se calcula de la forma siguiente:

$$x = \frac{(6 \text{ cubetas})(20 \text{ l})}{4 \text{ l}}$$

$$x = \frac{120}{4} \text{ cubetas}$$

$$x = 30 \text{ cubetas}$$

En esta situación, la constante de proporcionalidad es la cantidad total de pintura que se requiere envasar; es decir, el producto de dos valores correspondientes a la cantidad de cubetas y la capacidad de pintura en cada una. Por ejemplo:

$$(6 \text{ cubetas})(20 \text{ l}) = 120 \text{ l por cubeta}$$

La constante de proporcionalidad es $k = 120$.

En una situación de proporcionalidad inversa, el valor faltante también se puede calcular mediante la constante de proporcionalidad de la siguiente manera: se calcula la constante de proporcionalidad y se divide entre el valor conocido correspondiente al valor faltante.

ST7

Dos pares de valores correspondientes que se conocen en esta situación son 24 gallinas y 10 días. Entonces, la constante de proporcionalidad es: $k = (24)(10) = 240$

Para calcular la cantidad de días correspondiente a 30 gallinas, se divide la constante de proporcionalidad entre 30; esto es: $240 \div 30 = 8$.

Por tanto, la misma cantidad de alimento para 30 gallinas durará 8 días.

Si a , b , c y x son valores que tienen una relación de proporcionalidad inversa, tal que:

$$a : b \text{ (se lee } a \text{ es a } b) :: c : x \text{ (se lee } c \text{ es a } x),$$

donde a , b y c son valores conocidos y x es un valor desconocido, entonces el valor de x se calcula como sigue:

$$x = \frac{(a)(b)}{c}$$

ST8

El comportamiento de los datos en la tabla muestra que las magnitudes masa y aceleración son inversamente proporcionales porque, al multiplicar pares de valores correspondientes de las magnitudes, el resultado es constante (siempre es el mismo valor) y representa la constante de proporcionalidad.

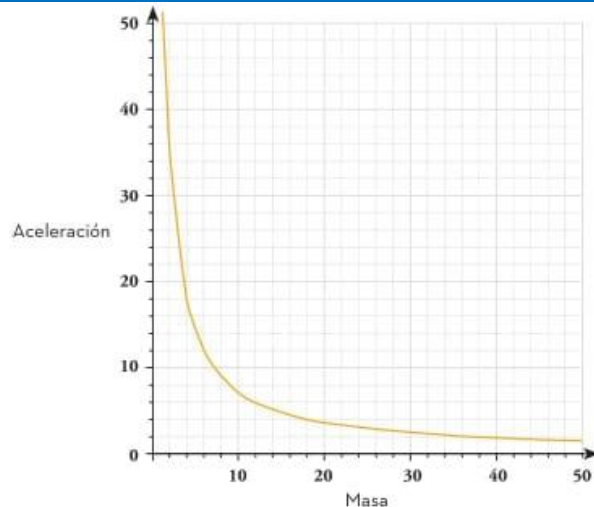
$$\text{Por ejemplo: } (4)(18) = 72 \quad (3)(24) = 72$$

En esta situación, la constante de proporcionalidad representa la fuerza que se aplica a los objetos para ponerlos en movimiento.

Si los datos de una magnitud varían en una razón r , los datos de la otra magnitud deben variar en la razón inversa $\frac{1}{r}$.

Por ejemplo, la masa disminuye de 6 kg a 3 kg en la razón $2 : 1$ $\left(\frac{6 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} = 2 \right)$, mientras que la aceleración aumenta de 12 m/s^2 a 24 m/s^2 en la razón $1 : 2$ $\left(\frac{12 \text{ m/s}^2}{24 \text{ m/s}^2} = \frac{1}{2} \right)$.

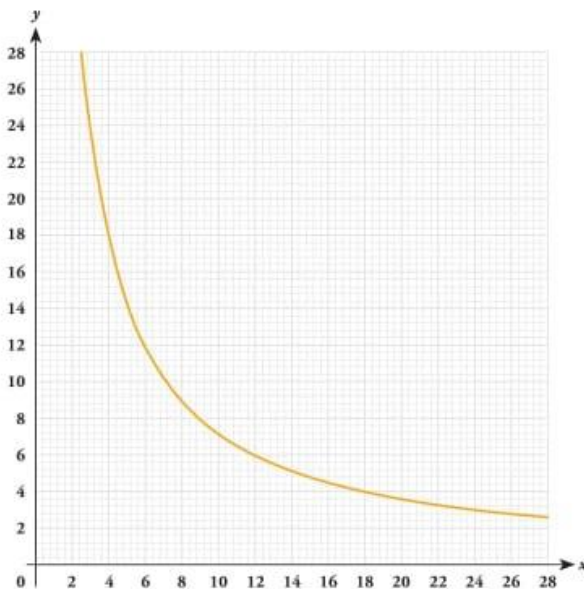
Los pares de valores correspondientes a la masa y la aceleración se pueden representar como puntos en un plano cartesiano para formar una gráfica como la siguiente:



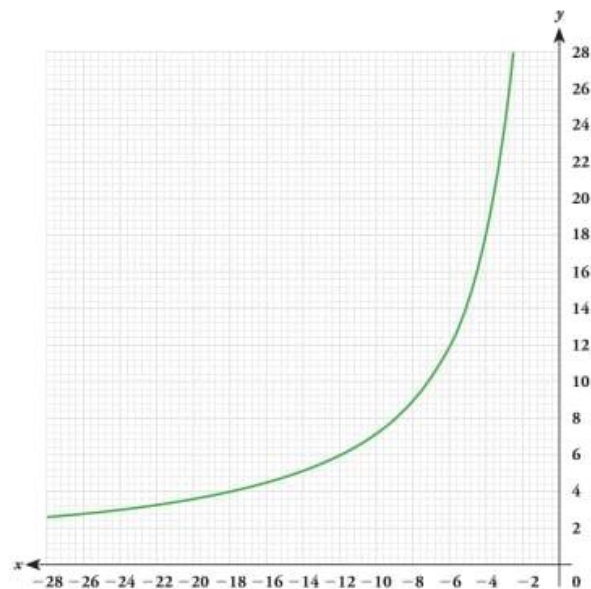
En particular, la curva que representa la relación de proporcionalidad inversa entre la masa y la aceleración tiene un comportamiento decreciente conforme aumentan los valores de alguna de las magnitudes y se ubica sólo en el primer cuadrante del plano cartesiano, dado que los valores de ambas magnitudes son positivos.

En general, la representación gráfica de una relación de proporcionalidad inversa en el plano cartesiano es una curva en el primer y tercer cuadrantes de éste si la constante de proporcionalidad es positiva, o una curva en el segundo y cuarto cuadrantes si la constante es negativa.

A continuación, se muestra la forma gráfica y algebraica de relaciones inversamente proporcionales entre dos magnitudes.



$$y = \frac{k}{x}, \text{ donde } k > 0$$



$$y = \frac{k}{x}, \text{ donde } k < 0$$

La representación algebraica de la relación de proporcionalidad inversa entre las dos magnitudes del ejemplo 1 es de la forma:

$$m \cdot a = 72 \qquad m = \frac{72}{a} \qquad a = \frac{72}{m}$$

En dicha relación, m representa la masa de los objetos, a su aceleración y 72 es la constante de proporcionalidad inversa en esta situación. Estas expresiones algebraicas funcionan como fórmulas que permiten calcular el valor desconocido de alguna de las magnitudes masa (m) y aceleración (a). Por ejemplo, para calcular la aceleración que tendría un objeto con una masa de 12 kg al aplicarle la misma fuerza, se sustituye este valor en la fórmula:

$$a = \frac{72}{m} \qquad a = \frac{72}{12} = 6$$

Por tanto, un objeto de 12 kg se moverá con una aceleración de 6 m/s².

La representación tabular de la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes permite calcular la constante de proporcionalidad al multiplicar pares de valores correspondientes en la tabla y también hacer el cálculo para la variación entre los datos. La representación gráfica ayuda a describir y analizar el comportamiento de los datos de una situación de proporcionalidad. Con la representación algebraica se puede calcular cualquier valor desconocido de una magnitud si se conoce el valor correspondiente de la otra variable y la constante de proporcionalidad, o bien, de otra pareja de valores correspondientes.

Fuente: ST6 se obtuvo de (SEP, 2024c pp. 43); ST7 de (SEP, 2024c, p.43), ST8 de (SEP, 2024c, pp.44-46).

Anexo 2. Soluciones de las tareas del libro de tercer grado.

ST9

Regla de tres para proporcionalidad directa: Si existe una relación proporcional directa entre A y B , entonces la cantidad que genera C se puede calcular:

$$\begin{array}{l} \text{Dato A es a Dato B} \\ \text{como Dato C es a } x: \\ \frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}} = \frac{x}{\text{Dato C}} \text{ entonces } x = \frac{\text{Dato B} \times \text{Dato C}}{\text{Dato A}} \end{array}$$

117 

Información

- Dato A: Tiempo necesario = 5 minutos 5 minutos es a 15 garrafas
- Dato B: Cantidad de garrafas = 15 como 20 minutos es a x
- Dato C: Tiempo total = 20 minutos

$$x = \frac{15 \text{ garrafas} \times 20 \text{ minutos}}{5 \text{ minutos}} = 60 \text{ garrafas}$$

En el problema intervienen dos variables: garrafas y minutos. Obsérvese que en la ecuación la variable “minutos” se cancela. Una vez hecha la operación, se obtiene que se pueden rellenar 60 garrafas de agua durante el recreo.

Ahora bien, la capacidad del dispensador es de 150 l, pero en esta ocasión en 10 garrafas caben 5 l de agua. Para conocer cuántas garrafas se podrán rellenar antes de que el dispensador se quede sin agua, se realiza lo siguiente:

Método de reducción a la unidad: Si existe una relación proporcional directa entre A y B , el cociente entre un elemento de B y el elemento que le corresponde de A arroja el valor de la unidad.

Dato A es a Dato B, entonces

$$\text{Valor de la unidad: } \frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}}$$

Así, a partir de la expresión obtenida al final de la página anterior, se tiene que

$$x = \text{Dato C} \times \text{Valor de la unidad}$$

5 l es a 10 garrafas

Valor de la unidad:

$$\frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}} = \frac{10 \text{ garrafas}}{5 \text{ l}} = \frac{2 \text{ garrafas}}{1 \text{ l}}$$

2 garrafas por cada litro

$$\begin{aligned} x &= 150 \text{ l} \times \frac{\text{Dato B}}{\text{Dato A}} \\ &= 150 \text{ l} \times \frac{2 \text{ garrafas}}{1 \text{ l}} = 300 \text{ garrafas} \end{aligned}$$

Información

- Dato A: Litros de agua = 5
- Dato B: Garrafas = 10
- Dato C: Dispensador = 150 l

El dispensador alcanza a llenar de agua a 300 garrafas antes de vaciarse por completo.

ST10

Regla de tres para proporcionalidad inversa: Si existe una relación proporcional inversa entre A y B , entonces la cantidad que genera C se puede calcular:

$$\begin{aligned} &\text{Dato } A \text{ es a Dato } B \\ &\text{como Dato } C \text{ es a } x, \\ &\text{Dato } A \times \text{Dato } B = \text{Dato } C \times x \text{ entonces } x = \frac{\text{Dato } A \times \text{Dato } B}{\text{Dato } C} \end{aligned}$$

Información

► Dato A : Dispensador que hay = 1

► Dato B : Tiempo = 20 minutos

► Dato C : Dispensadores = 4

1 dispensador 20 minutos

4 dispensadores x

$$x = \frac{1 \text{ dispensador} \times 20 \text{ minutos}}{4 \text{ dispensadores}} = 5 \text{ minutos}$$

Es decir, aumentar 4 veces el número de dispensadores de agua hace que el tiempo de atención disminuya un cuarto.

Una relación proporcional puede ser directa o inversa; por ello, es importante identificar cuál de las dos se presentan ante una determinada situación, para así elegir el método más apropiado para su resolución. Al buscar la solución de un problema, es importante analizar la información con la que se cuenta, pues es fundamental para descubrir el dato faltante.

ST11

Regla para reparto proporcional directo: Para realizar el reparto proporcional directo de una cierta cantidad (M) a otras cantidades determinadas (a, b, c) se construyen las razones proporcionales de la siguiente manera:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{M}{a + b + c}$$

Donde $M = A + B + C$ y A, B y C son las cantidades a determinar.

Los estudiantes del grupo A aportaron $a = \$1200$; llámese A a la cantidad que les corresponde. El grupo B aportó $b = \$3750$, por lo que le corresponde la cantidad B y al grupo C, que aportó $c = \$6500$, le corresponderá la cantidad C . El desafío es concretar un reparto proporcional directo de los \$20 000 recabados en el año escolar, entre los miembros. Es necesario generar las razones proporcionales a través del método mencionado, para realizar un reparto proporcional directo:

$$\frac{A}{\$1200} = \frac{B}{\$3750} = \frac{C}{\$6500} = \frac{\$20000}{\$11450} = 1.747$$

Para conocer el valor aproximado de A, B y C , se multiplica la razón proporcional por la aportación de cada comunidad. Los resultados definen lo que a cada comunidad le corresponde de las ventas del año, aproximadamente, ya que al sumar estos valores rebasan la cantidad total por \$3.50, derivado del redondeo de la razón proporcional anterior.

Al dividir cada monto entre el total de estudiantes de cada grupo, se concluye que cada estudiante de los grupos A, B y C recibirá, respectivamente, \$34.94, \$87.35 y \$174.7.

$$\begin{aligned} A &= 1.747 \times \$1200 = \$2096.4 \\ B &= 1.747 \times \$3750 = \$6551.25 \\ C &= 1.747 \times \$6500 = \$11355.5 \end{aligned}$$

ST12

Regla para reparto inversamente proporcional: Para realizar el reparto inversamente proporcional de una cierta cantidad (M) a otras cantidades determinadas (a , b y c), se construyen las razones inversamente proporcionales de la siguiente manera:

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{\frac{1}{b}} = \frac{C}{\frac{1}{c}} = \frac{M}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Donde $M = A + B + C$ y A , B y C son las cantidades a determinar.

Información

- M : Monto total de los premios = \$1 450 000
- a : Marca del 1er lugar = 1 h y 12 minutos = 72 minutos
- b : Marca del 2do lugar = 96 minutos
- c : Marca del 3er lugar = 96 minutos + 12 minutos = 108 minutos

Es importante determinar las fracciones equivalentes para facilitar la suma de fracciones, tal como se presenta a continuación. Para ello se deben sustituir las variables por los minutos correspondientes, posteriormente ubicar el mínimo común múltiplo de los denominadores y posteriormente registrar las fracciones equivalentes de cada una cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo encontrado.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{72} = \frac{12}{864}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{96} = \frac{9}{864}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{108} = \frac{8}{864}$$

Luego se calcula la suma de las razones inversas:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{12}{864} + \frac{9}{864} + \frac{8}{864} = \frac{29}{864}$$



Entonces, las razones inversamente proporcionales de acuerdo con la regla, son:

$$\frac{A}{\frac{1}{72}} = \frac{B}{\frac{1}{96}} = \frac{C}{\frac{1}{108}} = \frac{1\,450\,000}{\frac{29}{864}} = 43\,200\,000$$

Por tanto, el ganador de la carrera se embolsará \$600 000, pues:

$$A = 43\,200\,000 \times \frac{1}{72} = 600\,000$$

Al segundo lugar le corresponden \$450 000, ya que:

$$B = 43\,200\,000 \times \frac{1}{96} = 450\,000$$

Y, para el competidor que llegó en tercer lugar, recibe \$400 000, puesto que:

$$C = 43\,200\,000 \times \frac{1}{108} = 400\,000$$

El ganador de la carrera recibió un monto mayor al de los competidores que llegaron en segundo y tercer lugares, es decir, el corredor que empleó menor tiempo en terminar la carrera ganó mayor cantidad de dinero, es por ello que en esta situación se presenta una relación proporcional inversa.

En un reparto proporcional directo, las variables involucradas cambian de la misma manera, es decir, experimentan cambios de magnitud en el mismo sentido, hacia arriba o abajo (constante de proporcionalidad). Por otro lado, en un reparto inversamente proporcional, el cambio que sufren las variables es de proporcionalidad inversa: al incremento de una, le corresponde la disminución de otra, de acuerdo con las razones proporcionales determinadas.

Fuente: ST9 se obtuvo de (SEP, 2024d, pp. 116-117); ST10 de (SEP, 2024b, p.118), ST11 de (SEP, 2024b, p.119), ST12 de (SEP, 2024b, pp.120-121).