



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

TEORÍAS DE GRAVEDAD ESCALARES TENSORIALES CON  
INVARIANZA DE ESCALA A ESCALAS COSMOLÓGICAS

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Fabrice Matthieu Brieuç Bernès Carmona

Asesorado por

Dra. Ana Aurelia Avilez López.

Puebla Pue.  
6 de agosto de 2025





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

TEORÍAS DE GRAVEDAD ESCALARES TENSORIALES CON  
INVARIANZA DE ESCALA A ESCALAS COSMOLÓGICAS

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Fabrice Matthieu Brieuç Bernès Carmona

Asesorado por

Dra. Ana Aurelia Avilez López.

Puebla Pue.  
6 de agosto de 2025



**Título:** TEORÍAS DE GRAVEDAD ESCALARES TENSORIALES CON INVARIANZA DE ESCALA A ESCALAS COSMOLÓGICAS  
**Estudiante:** FABRICE MATTHIEU BRIEUC BERNÈS CARMONA

COMITÉ

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Presidente

---

Dr. Gerardo Torres del Castillo  
Secretario

---

Dr. Iván Álvarez Ríos  
Vocal

---

Dra. Ana Aurelia Avilez López.  
Asesora

---

Dr Gilberto Aguilar Pérez  
Suplente



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción y objetivo</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Nociones de Relatividad</b>	<b>3</b>
2.1	Relatividad Especial	3
2.1.1	Estructura causal del espacio-tiempo	5
2.1.2	Cantidades conservadas y relativas	6
2.2	Relatividad General	7
2.2.1	Espacio-tiempo curvo	9
2.3	Ecuaciones de Einstein	12
2.3.1	Tensor de energía-momento canónico	13
2.3.2	Tensor de Einstein	15
2.4	Relatividad General como una teoría de campos	15
2.4.1	Relación entre la geometría del Universo y su contenido	16
<b>3</b>	<b>Elementos del Modelo Cosmológico Estándar</b>	<b>17</b>
3.1	Expansión de Hubble	17
3.2	Radiación cósmica de Fondo	17
3.3	Principio Cosmológico	19
3.4	Corrimiento al rojo Cosmológico	19
3.5	Factor de escala y el flujo de Hubble	20
3.6	La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker	21
3.7	El papel de la Relatividad General en el Modelo Cosmológico	22
<b>4</b>	<b>Teorías escalar-tensoriales como extensiones a Relatividad General</b>	<b>25</b>
4.1	Principio de Mach	25
4.2	Teoría de Jordan-Brans-Dicke	25
4.3	Modificaciones escalares tensoriales	27
4.4	Ecuaciones de campo en teorías de tipo BD	28
4.4.1	Ecuaciones de campo como el extremo de una función	28
4.4.2	Ecuaciones de campo como el extremo de una funcional	31
4.4.3	Variación arbitraria sobre los campos	34
4.4.4	Ecuaciones de movimiento	37
<b>5</b>	<b>Invarianza de escala</b>	<b>39</b>
5.1	Transformaciones conformes	39
5.1.1	Invarianza de ángulos	39
5.1.2	Invarianza de ángulos en el 4-espacio	40
5.1.3	Invarianza de ángulos como una simetría física	41

5.2	Inversiones puras . . . . .	41
5.3	Inversiones especiales . . . . .	41
5.3.1	Definición . . . . .	41
5.3.2	Transformación del elemento de línea bajo inversiones especiales . . . . .	43
5.3.3	Discontinuidades en el marco conforme . . . . .	44
5.4	Simetría Conforme en teorías de tipo BD . . . . .	44
5.4.1	Reescalamientos de punto . . . . .	45
5.4.2	Reescalamientos pasivos . . . . .	46
5.4.3	Teorías de tipo BD invariantes de escala en el marco de Einstein . . . . .	48
5.5	El grupo conforme $C(1, 4)$ . . . . .	51
5.6	Relatividad General bajo reescalamientos . . . . .	51
5.7	Relación con el flujo de Hubble . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Teorema de Noether aplicado a teorías de tipo BD</b>	<b>53</b>
6.1	Transformaciones en variedades . . . . .	53
6.2	Variación canónica sobre el 4-espacio . . . . .	55
6.2.1	Efecto sobre la densidad Lagrangiana . . . . .	55
6.2.2	Efecto sobre el operador de integración . . . . .	56
6.2.3	Efecto sobre la acción . . . . .	57
6.2.4	Aplicación del principio de Hamilton . . . . .	59
6.2.5	Corrientes de Noether . . . . .	60
6.3	La corriente de Noether no es un término de frontera . . . . .	61
6.4	Leyes de conservación covariantes . . . . .	62
6.5	Corriente de Noether asociada a invarianza de escala . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Teorías de gravedad escalar-tensoriales con invarianza de escala aplicadas al Modelo de Concordancia</b>	<b>65</b>
7.1	Ecuaciones de campo . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Conclusiones y consecuencias por explorar</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Expresiones de utilidad</b>	<b>69</b>
A.1	Resumen . . . . .	69
A.2	Variación de la métrica, en términos de la variación su inversa . . . . .	69
A.3	Variación de la medida de integración . . . . .	70
A.4	Variación de las conexiones, en términos de variaciones de la métrica . . . . .	71
A.5	Variación del tensor de Ricci . . . . .	72
A.6	Variación del término de acoplamiento . . . . .	73
A.6.1	Integración por partes . . . . .	73
A.7	Variación del término cinético . . . . .	75
A.7.1	Integración por partes . . . . .	75
A.8	Variación del potencial escalar . . . . .	76
A.9	Variación de la parte geométrica de la densidad Lagrangiana . . . . .	76
A.10	Variación total de los campos, en términos de las variaciones propias . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Condiciones de frontera</b>	<b>79</b>
B.1	Resumen . . . . .	79
B.2	Independencia entre campos y sus derivadas . . . . .	79
B.3	Términos de superficie . . . . .	81

B.3.1	Condición de Dirichlet . . . . .	81
B.3.2	Condición de Neumann . . . . .	82
B.3.3	Significado físico de las condiciones de frontera . . . . .	82
B.3.4	Condiciones más avanzadas . . . . .	82
B.4	Fronteras en el infinito . . . . .	83
<b>C</b>	<b>Líneas de mundo bajo inversiones especiales</b>	<b>85</b>
C.1	Partículas relativistas en el marco conforme . . . . .	85
C.2	Partículas en reposo en el marco conforme . . . . .	86
C.3	Compatibilidad con el principio de Hamilton . . . . .	88
C.4	Otros ejemplos de partículas libres . . . . .	89
<b>D</b>	<b>Cadabra2 para manipular expresiones</b>	<b>91</b>
D.1	Forma de trabajar con Cadabra2 . . . . .	91
D.1.1	Sintaxis . . . . .	91
D.1.2	Formas de ejecutar código, y formatos de salida . . . . .	92
D.1.3	Integración con L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X . . . . .	92
D.2	Ventajas y desventajas . . . . .	92
D.3	Definición y manipulación de símbolos y expresiones . . . . .	92
D.3.1	Elementos necesarios para el cálculo de las corrientes de Noether . . . . .	93
D.3.2	Elementos necesarios para evaluar las ecuaciones de campo . . . . .	101



# Índice de figuras

2.1	El intervalo $\Delta l$ es imposible de medir instantáneamente. La región del espacio que incluye al extremo de $\Delta l$ , sólo es observable desde el origen, a tiempos menores a $t_{-2}$ .	5
2.2	En el marco de la izquierda, los eventos $A$ y $B$ son simultáneos. Además, $C$ precede a $B$ , y $N_1$ precede a $N_2$ . En el marco de la derecha, transformado según (2.3), $A$ y $B$ no son simultáneos, pero $B$ y $C$ sí lo son. Las propiedades que se conservarán entre la infinidad de marcos relacionados por $-1 \leq v \leq 1$ son la causalidad $N_1 \rightarrow N_2$ , y las clasificaciones de espacioide para $A$ y $B$ , de nulo para $N_1$ y $N_1$ , y de temporaloides para $C$ .	6
2.3	Los sistemas de referencia $\mathcal{O}$ (el único fijo en el disco) y $\mathcal{O}'$ , no coinciden en el valor de $\pi$ . Los sistemas $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ tampoco. Los sistemas $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$ encuentran la misma discrepancia. Por último, $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ no pueden distinguir una rotación en el disco, de una rotación sobre el resto del Universo, mientras que $\mathcal{O}''$ sí. Las flechas grises representan la velocidad tangencial a lo largo de un diámetro del disco.	7
2.4	La equivalencia entre campos gravitacionales y sistemas bajo aceleración constante es un fenómeno local. A escalas cosmológicas, no existe tal equivalencia.	
	<b>a:</b> El principio de equivalencia se cumple para masas pequeñas, en un sistema de referencia pequeño.	
	<b>b:</b> En un sistema de gran extensión, el campo gravitacional anterior converge a un punto, mientras que la aceleración conserva las trayectorias paralelas del caso anterior	
	<b>c:</b> Cuerpos lo suficientemente masivos y/o de gran extensión, experimentan efectos de marea si interactúan con otros cuerpos masivos, mientras que la aceleración no produce efectos cuya intensidad varíe con la forma de los cuerpos.	8
2.5	Se puede mapear a los puntos de la región sombreada en la base de coordenadas con métrica $\eta_X$ , a la región sombreada del punto con base de coordenadas $\eta_Y$ por medio de $f(Y) \circ f^{-1}(X)$ , o en el otro sentido, eventos en $\eta_Y$ se pueden representar en $\eta_X$ por medio de $f(X) \circ f^{-1}(Y)$ . Los mapeos $f(X)$ y $f(Y)$ forman un atlas.	10
2.6	Componentes de $T_{\mu\nu}$ en un Universo espacialmente bidimensional (las unidades de volumen, serían áreas en 3 dimensiones, y las de superficie, serían líneas) Dado que $P_0$ es la energía del fluido contenido, $T_{tt}$ debe ser una densidad de energía (notar que la unidad de volumen de un espacio bidimensional, es un área en 3 dimensiones). La componentes $T_{xx}$ se puede interpretar como $\partial_t (\partial P_1 / \partial y)$ , que es el flujo del momento a través de la línea (superficie) de coordenada $x$ constante. Equivalentemente, $\partial_y (\dot{P}_1)$ es una fuerza (derivada del momento respecto al tiempo) por unidad de superficie. La componente $T_{yy}$ es el mismo caso, para la superficie de coordenada $y$ constante.	13

2.7	Las componentes señaladas con $A$ y $B$ , son densidades de momento (momento por unidad de volumen). Las componentes señaladas con $C$ y $D$ se pueden escribir como fuerzas por unidades de área conmutando las derivadas. Por ser longitudinales, describen cizallamientos. Las componentes señaladas con $E$ y $F$ , son flujos de energía a través de las superficies de $x$ y $y$ constantes, respectivamente. . . . .	14
5.1	Esta definición de vector tangente $\vec{T}_\gamma$ forma parte de las fórmulas de Frenet-Serret. La curva $\gamma$ es parametrizada por $s$ , y $d\ell$ es el elemento de línea de $\gamma$ . . . . .	39
5.2	Una rotación positiva, sobre el eje que pasa por $\vec{P}$ , compuesta con una traslación hacia el suroeste, preserva ángulos. En la figura se muestra a las tangentes de dos curvas $\alpha$ y $\beta$ , en su punto de intersección $P$ . . . . .	40
6.1	El campo $\phi$ representa una única variable dinámica, y se define sobre todo el espacio-tiempo. El sentido de las flechas en esta figura, indica el campo se define sobre la variedad, pero la variedad es independiente de ellos. . . . .	53
6.2	La transformación sobre la variedad (en este caso un reescalamiento), relaciona a los puntos $X$ y $X'$ , pero esta transformación no se realizó sobre los campos, por lo que no se puede asociar al campo resaltado, con el punto $X'$ . Luego, el punto $X'$ debe tener asociado un campo distinto al de antes de transformarse. . . . .	54
6.3	Para la versión pasiva de un reescalamiento, $\phi(x)$ pasa a existir en un punto distinto, y por lo tanto hay un nuevo valor del campo en $X$ , el cual permanece sin cambio. . . . .	54
6.4	La densidad Lagrangiana depende las coordenadas transformadas, pero se la puede graficar respecto a las coordenadas originales. Fijando a todas excepto $z$ (y por lo tanto a $z'$ también), la transformación infinitesimal desplaza a los límites de integración. . . . .	58
B.1	Las parciales de un campo están bien definidas al interior de la región de integración. Pero en la superficie que la delimita, sólo se pueden definir parciales en direcciones con componentes antinormales a la misma. . . . .	80
B.2	El cilindro consta de dos hiper-superficies de tiempo constante, y una de radio constante. El hecho de que los términos de superficie se anulen para cualquier superficie, implica que en el límite $r \rightarrow \infty$ , los campos decaen más rápido de lo que el volumen crece. . . . .	83
C.1	Inversión conforme especial y la línea de mundo para una partícula relativista en ambos marcos. Los puntos señalados son, en el marco original: <b>O</b> : Origen del sistema de coordenadas. <b>A</b> : Pasado absoluto. <b>B</b> : Evento que se dispara en el marco conforme. <b>C</b> : Futuro absoluto. <b>Cuadrados negros</b> : Eventos previos a <b>B</b> , equidistantes. <b>Cuadrados blancos</b> : Eventos posteriores a <b>B</b> , equidistantes. . . . .	86
C.2	Inversión conforme especial y la línea de mundo para una partícula en reposo en ambos marcos. Los puntos señalados son, en el marco original: <b>O</b> : Origen del sistema de coordenadas. <b>B</b> y <b>C</b> : Eventos que se disparan en el marco conforme <b>A</b> : Pasado absoluto <b>D</b> : Futuro absoluto. <b>Cuadrados negros</b> : Eventos intermedios a las discontinuidades, equidistantes. <b>Cuadrados blancos</b> : Eventos anteriores y posteriores a las discontinuidades, equidistantes. . . . .	88
C.3	Inversiones especiales aplicadas a líneas de mundo para partículas libres. La flecha representa al vector de desplazamiento $b$ , ampliado 10 veces. . . . .	89

D.1	Nótese la jerarquía que siguen los subíndices de $Y$ , y que no se observa en los índices de $X$ . . . . .	98
D.2	Representación del escalar de Ricci en términos del tensor métrico inverso, y contracciones de símbolos de Christoffel y sus parciales. . . . .	99



# Agradecimientos

Quiero agradecer a:

- Mis papás, por razones obvias.
- A los mejores maestros que he tenido, y que no quiero intentar listar porque se me van a olvidar algunos nombres, y porque espero que algunos de ellos me sigan enseñando en la maestría.
- Por último, a las personas que han construido recursos que considero invaluable, sin esperar nada a cambio. Desde libros de texto gratuitos hasta secciones de Wikipedia y respuestas en foros. Y desde editores de texto hasta programas como Cadabra.



# Capítulo 1

## Introducción y objetivo

El Modelo Cosmológico Estándar es un conjunto de teorías y postulados dirigidos a explicar la evolución y el comportamiento del Universo observable. Entre sus bases teóricas y suposiciones, están el llamado Principio Cosmológico, la Teoría de la Relatividad General, y el fenómeno de inflación. Con estos elementos, se busca comprender los fenómenos que se observan a escalas superiores a los cientos de mega pársecs. Los resultados experimentales permiten refinar al modelo cosmológico, ya sea en los parámetros fijos que lo caracterizan, o en sus fundamentos teóricos. Por ejemplo, la observación experimental de corrimientos al rojo en el espectro de objetos lejanos, así como la existencia del CMB, [21][20], fueron motivos para desechar modelos estacionarios.

En la actualidad, el modelo  $\Lambda$ CDM es el modelo de concordancia que describe con precisión a la historia del Universo, que en la actualidad se considera como compuesto de fluidos perfectos térmicamente desacoplados, cuyas proporciones determinan el comportamiento de la expansión. En este modelo, las especies contenidas en el Universo incluyen materia y radiación, así como energía oscura y materia oscura. Ambas especies continúan sin ser detectadas directamente de manera experimental [2], y si existieran, entonces sólo detectamos sus efectos gravitacionales, por lo que se consideran candidatos para reemplazarlas.

Además, varios de experimentos destinados a determinar un valor para la constante de Hubble, como la calibración de la escalera de distancias, la caracterización del CMB, la detección de ondas gravitacionales, y la medición de la escala acústica de bariones, presentan discrepancias en sus resultados que no parecen deberse a errores experimentales o a faltas de precisión, lo cual sugiere la necesidad de re-evaluar a los pilares del modelo cosmológico.

La Teoría de la Relatividad General es uno de estos pilares, y aunque ha sido aplicada y comprobada exitosamente a escalas astronómicas, existe la posibilidad de que no sea válida a escalas cosmológicas.

La motivación principal de la tesis, es considerar la posibilidad de que la gravedad posea simetría de escala. Para ello, se recurre a una familia de teorías de gravedad escalar-tensoriales, en las cuales el acoplamiento del tensor métrico con un campo escalar puede dar lugar a la simetría que se requiere, al tiempo que se conservan los resultados de la Relatividad General como un caso límite. Además, se calcula la corriente de Noether asociada a la invarianza de escala, la cual permite identificar observables con esta simetría.

El orden en el cual se desarrollan las ideas, se puede resumir como sigue: Dado que se busca proponer una extensión a la Teoría de la Relatividad General, el capítulo dos está dirigido a revisar sus postulados, convenciones y consecuencias respecto a la descripción de las interacciones gravitacionales. Después, en el capítulo tres, se revisan los elementos más relevantes del modelo  $\Lambda$ CDM, para poner en contexto el papel de la Relatividad General en un modelo cosmológico. El capítulo cuatro explica las razones históricas para introducir a la teoría escalar-tensorial de la que surgió la

clase de teorías que se consideran en este trabajo, así como la forma de obtener a la familia de teorías de tipo Brans-Dicke como un caso particular de las acciones descritas en el Teorema de Lovelock. Después, se calculan sus ecuaciones de movimiento. Una vez decidida la estructura de la acción característica de la nueva teoría, así como la forma de sus ecuaciones de campo, el capítulo cinco se enfoca en la construcción de los elementos que formarán al nuevo grupo de simetría de la teoría, y de las leyes de transformación de los elementos de la acción. Estas leyes permiten restringir a la familia de teorías a aquellas que presenten la simetría de escala. El capítulo seis consiste en expresar un reescalamiento infinitesimal, y utilizarlo para encontrar a la corriente de Noether asociada a esta simetría. Finalmente, se sustituye a las ecuaciones de Einstein en el modelo de concordancia, por las ecuaciones de la nueva teoría, con el fin de compararlas cualitativamente.

Los apéndices están dedicados a temas de interés tangencial, y al cálculo de resultados útiles, pero que no contribuyen directamente al argumento principal. Además, a lo largo de todo el trabajo, se hace el intento de interpretar el significado físico de las ecuaciones conforme se las vaya introduciendo, y se trata de hacer explícita la intuición detrás de cada definición, y de cada procedimiento.

## Capítulo 2

# Nociones de Relatividad

### 2.1 Relatividad Especial

La teoría de la Relatividad Especial establece que ninguna interacción es instantánea <sup>1</sup>, sino que debe propagarse entre un emisor y un receptor, a una velocidad menor o igual a la de la luz. Esta velocidad límite es una propiedad intrínseca de las interacciones, y por lo tanto no depende de la velocidad relativa entre observadores inerciales, lo cual es un resultado imposible de reproducir si se aceptan las ideas de Galileo, que asumen que el paso del tiempo es absoluto o independiente del observador:

Dados dos sistemas inerciales  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , relacionados entre sí por su velocidad relativa  $\vec{v}$ , entonces, un haz que se desplaza a velocidad constante  $\vec{c}$  según  $\mathcal{O}$ , lo hará a velocidad  $\vec{c} - \vec{v}$  en  $\mathcal{O}$  según el formalismo de Galileo <sup>2</sup>. Esto es porque los vectores de posición, y los tiempos medidos por cada sistema están relacionados como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t &\implies d\vec{r}' &= d\vec{r} - \vec{v} dt \\ t' &= t &\implies dt' &= dt\end{aligned}\tag{2.1}$$

Por lo tanto:

$$\vec{c}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{v}t) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}\frac{dt}{dt} = \vec{c} - \vec{v}\tag{2.2}$$

Según la Relatividad Especial, las relaciones correctas son tales que tanto las posiciones como los tiempos relativos, están relacionados entre sí, a diferencia de lo mostrado en (2.1), donde no se necesita información de las posiciones para relacionar a los tiempos entre ambos sistemas (porque son el mismo:  $t' = t$ ), y viceversa. El paso de un sistema de referencia inercial (no acelerado) a otro, está dado por las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \frac{\vec{r} - \vec{v}t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &\implies d\vec{r}' &= \frac{d\vec{r} - \vec{v} dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - \vec{r}v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &\implies dt' &= \frac{dt - d\vec{r}v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\tag{2.3}$$

---

<sup>1</sup>Esto se menciona en [11, pág. 36], y en [15, págs. 19 a 21] se encuentra una explicación de su equivalencia con el postulado de la constancia de  $c$ .

<sup>2</sup>No es útil especificar el contenido del haz, ni su fuente. Se está considerando un ente cualquiera, que se identifica con un haz desplazándose a una velocidad cualquiera, cuya magnitud denotamos como  $c$ .

Por lo tanto, una velocidad  $\vec{u}$  medida desde  $\mathcal{O}'$ , en términos del mismo vector medido desde  $\mathcal{O}$ , es:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{1 - \vec{u}\vec{v}^2/c^2} \quad (2.4)$$

En este caso, si  $\vec{u} = \vec{c}$ , es claro que (2.4) se reduce a  $\vec{u}' = \vec{u}$ , por lo que  $c$  es efectivamente una cantidad absoluta y por lo tanto límite<sup>3</sup>. Además, dado que las transformaciones de Galileo se propusieron con base a la experiencia y la intuición que se tenían, cualquier candidato a reemplazarla, debería contener a sus resultados como un caso límite. En el límite  $\vec{v} \ll \vec{c}$ , las ecuaciones dadas en (2.4) y en (2.3), se reducen a (2.2) y (2.1) respectivamente.

Ahora, dado que tiempo y espacio son aspectos de un mismo fenómeno<sup>4</sup>, debe ser posible incorporar a  $t$  en la definición de distancia, introduciendo una cuarta coordenada para definir al espacio en el que evoluciona cualquier sistema.

Poincaré definió a esta nueva coordenada como  $it$ , introduciendo a la unidad imaginaria para obtener un 4-espacio en el que la definición de norma de un 4-vector es igual a la de un sistema cartesiano. Con este sistema de coordenadas, el 4-intervalo recorrido por una partícula que se desplaza en el 3-espacio a velocidad  $v$  tiene una norma igual a:

$$\|r\| = x^2 + y^2 + z^2 - (v(it))^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (vt)^2 \quad (2.5)$$

Esta definición, con la coordenada de tiempo como una cantidad compleja, tiene sus propios usos e interpretaciones, pero el uso de  $ct$  es tal vez más intuitivo, porque lo sugiere la relación entre la velocidad de un fotón y la distancia que el mismo recorre en un intervalo de tiempo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \implies \|r_{\text{fotón}}\| = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (2.6)$$

Luego, los 4-intervalos de otras partículas tienen coordenadas de tiempo que son fracciones de  $\pm c$ .

Con esta otra definición, se sigue solucionando el problema de las unidades, pues las 4 coordenadas se miden en unidades de distancia. En este caso, la distinción<sup>5</sup> geométrica entre tiempo y espacio proviene de la llamada signatura de la métrica [11, pág. 85]. En lo que sigue, la coordenada cero se mide en unidades de  $ct$ , o sea, la distancia recorrida por una onda electromagnética en el vacío<sup>6</sup>, transcurridos  $t$  segundos desde un tiempo de referencia, también conocido como *tiempo-luz* [11, Pág. 85]. Otra convención relevante es  $c = 1$ , que forma parte del sistema de unidades naturales: si

<sup>3</sup>Reiterando que esta equivalencia se explica en [15, págs. 19 a 21].

<sup>4</sup>En palabras de Einstein, “Lo que tiene realidad física no es ni el punto en el espacio ni el instante del tiempo en que algo ocurre sino únicamente el acontecimiento mismo.” [11, pág. 84]. En este sentido, sea cual sea el fenómeno que se estudie, dos aspectos que lo identifican son los las coordenadas de tiempo y de espacio que un observador pueda definir para sus eventos correspondientes.

<sup>5</sup>La necesidad de distinguir entre tiempo y espacio como [11, pág. 85] explica, a pesar de que (2.3) pruebe que son la misma clase de variables (en el sentido de la nota 4, y en el sentido de que no se pueden relacionar a las posiciones espaciales de un evento entre sistemas, sin conocer también el instante que les corresponde), se debe a que, en la experiencia, se entiende a un intervalo de tiempo como una cantidad (medida en unidades de tiempo), que toma sentido luego de un cambio en el estado del Universo, mientras que las distancias son cantidades (medidas en unidades de distancia) con un significado físico válido en un mismo instante de tiempo. La descripción del Universo como una serie de 3-espacios es un ejemplo de cómo esta distinción forma parte del estudio del mismo.

<sup>6</sup>Nótese que sólo hasta ahora se hace notar que  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Esto es para resaltar el hecho de que las transformaciones de Lorentz son el resultado de elegir una velocidad límite para las interacciones. Electromagnéticas o de otra clase. Aunque la Relatividad Especial se pueda desarrollar partiendo de la constancia de la velocidad de la luz, resulta más general proponerla como resultado de imponer que cualquier interacción se propaga desde su fuente a velocidad finita, no mayor a un límite  $c$ , a través de un medio.

se normaliza a  $c$  y se conviene como adimensional, entonces la coordenada cero pasa a ser  $t$ , y sus unidades son de distancia. Esto no se debe a una redefinición de  $t$ , sino a que  $c$  adimensional implica:

$$c = \frac{\langle \text{distancia} \rangle}{\langle \text{tiempo} \rangle} = 1 \implies \langle \text{distancia} \rangle = \langle \text{tiempo} \rangle \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Estructura causal del espacio-tiempo

Un 4-espacio en el que se puede definir un sistema de coordenadas cartesiano con ejes  $t, x, y, z$ , todos con las mismas unidades, y donde se satisface (2.6), se denomina espacio de Minkowski. Los puntos que lo forman son *eventos*: posiciones dadas a un tiempo determinado. En él, cualquier recta que pase por el origen y cuyos puntos satisfagan (2.6), corresponde a la trayectoria de un fotón que atraviesa el origen. Por ejemplo, la trayectoria de un fotón libre que se propaga en el eje  $x$ , es la recta  $(t, x, y, z) = (t, t, 0, 0)$ . Todas estas rectas definen un par de conos con vértices en el origen, de apertura igual a  $\frac{\pi}{2}$  radianes, y cuyo eje coincide con el eje  $t$ . Esta relación entre trayectorias a la velocidad límite y una superficie cónica<sup>7</sup>, permite clasificar a cualquier evento según se encuentre dentro, fuera, o en la superficie de los conos. Algebraicamente, los eventos pueden ser espacialoides, nulos, o temporaloides, según sea la cantidad  $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$  menor, mayor o igual a cero respectivamente.

Dado que ninguna interacción puede propagarse a velocidades mayores a  $c$ , es imposible que un evento al exterior de los conos sea debido a un evento al interior. El origen interactúa con el cono superior y es influenciado por eventos en el cono inferior. El hiper-plano perpendicular al eje  $t$  y que pasa por el origen, corresponde al 3-espacio como existe simultáneamente con el origen. Como es imposible interactuar con él, el intervalo espacial entre  $O$  y cualquier otro objeto, llamado distancia propia, sólo se puede inferir en vez de medir, dado que carece de conexión causal. El formalismo necesario para lidiar en la práctica con esta limitación, se discute más adelante.

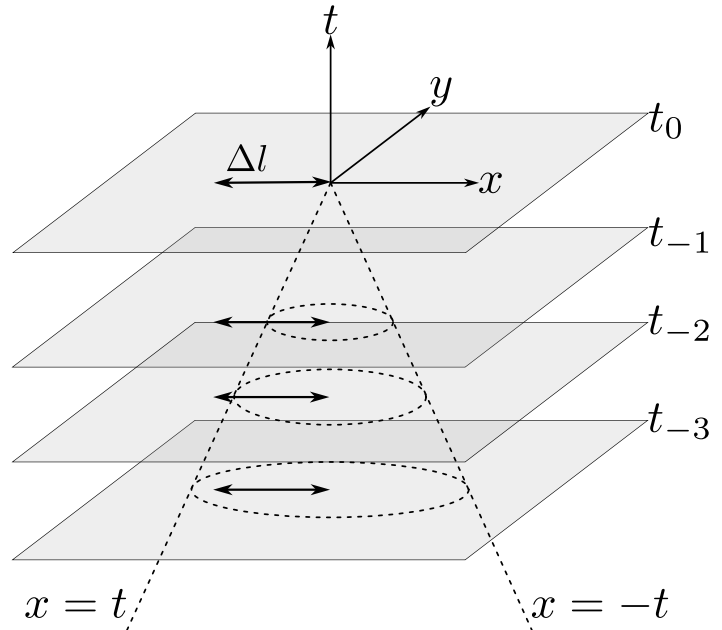


Figura 2.1: El intervalo  $\Delta l$  es imposible de medir instantáneamente. La región del espacio que incluye al extremo de  $\Delta l$ , sólo es observable desde el origen, a tiempos menores a  $t_{-2}$ .

<sup>7</sup>que también se pueden interpretar como los frentes de una onda electromagnética emitida en el origen.

### 2.1.2 Cantidades conservadas y relativas

La razón de proponer a (2.3) como la forma correcta de relacionar mediciones entre sistemas inerciales, es la necesidad de éstos coincidan en el valor de  $c$ , para ser consistentes con su carácter de límite. Algunas consecuencias de este nuevo paradigma son:

**El efecto Doppler relativista:** La frecuencia de una onda electromagnética es *relativa* al estado de movimiento de los sistemas inerciales. Si en un sistema se observa una frecuencia  $f$ , entonces otro sistema caracterizado por una velocidad relativa  $v$ , observará en la dirección de movimiento, una frecuencia mayor a  $f$ , y menor a  $f$  en la dirección opuesta, de la misma forma que lo hacen las ondas acústicas:

$$f' = f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (2.8)$$

En el contexto de la Cosmología, este efecto es producido por *velocidades peculiares*.

**La dilatación del tiempo y contracción de las distancias:** Dado un sistema de referencia inercial, un mismo intervalo de tiempo  $\Delta t$  debe corresponderse con uno mayor para un sistema en movimiento relativo:  $\Delta t' > \Delta t$ . A la vez, intervalos de distancia alineados con  $v$ , deben ser menores:  $\Delta l' < \Delta l$ . Ambas relaciones contienen al mismo factor de  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ :

$$\Delta t' = \Delta t \left( \sqrt{1 - (v/c)^2} \right)^{-1} \quad \Delta l' = \Delta l \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (2.9)$$

**Relatividad de la simultaneidad:** La diferencia entre intervalos de espacio y tiempo para distintos sistemas de referencia, hace que la simultaneidad entre eventos sea dependiente del sistema de referencia. Sin embargo, la clasificación de la norma del intervalo que los separa sí lo es. Intervalos que son espacialoides en un sistema de referencia inercial, lo serán en cualquier otro, y lo mismo ocurre con intervalos nulos e intervalos temporaloides. Estas dos propiedades de las transformaciones sobre intervalos en el 4-espacio permite establecer conexiones causales entre eventos.

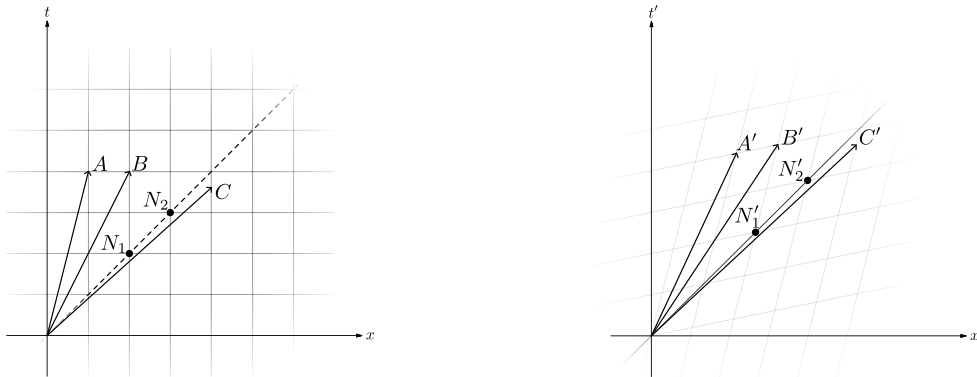


Figura 2.2: En el marco de la izquierda, los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos. Además,  $C$  precede a  $B$ , y  $N_1$  precede a  $N_2$ . En el marco de la derecha, transformado según (2.3),  $A$  y  $B$  no son simultáneos, pero  $B$  y  $C$  sí lo son. Las propiedades que se conservarán entre la infinidad de marcos relacionados por  $-1 \leq v \leq 1$  son la causalidad  $N_1 \rightarrow N_2$ , y las clasificaciones de espacialoide para  $A$  y  $B$ , de nulo para  $N_1$  y  $N_1$ , y de temporaloide para  $C$ .

**La equivalencia entre energía y masa (relativista):** Esta equivalencia será ampliada por la definición del Tensor de Energía-Momento en las siguientes secciones, así que no es tan importante

como las consecuencias anteriores, pero implica que no existe lo que sería una masa de reposo para las partículas relativistas. Es decir, no existe un marco de reposo para el fotón.

## 2.2 Relatividad General

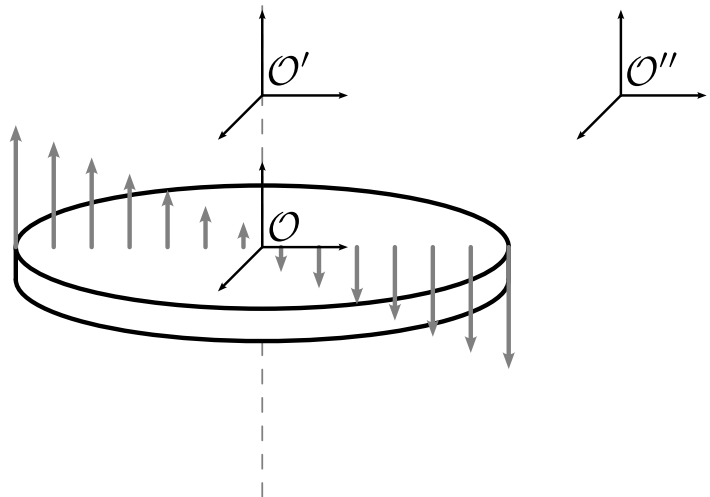
La velocidad límite de propagación de las interacciones hace que los cuerpos rígidos como aquellos que conservan la distancia entre sus puntos en todo momento, sea físicamente imposible. Incluso considerando esta limitación, si se hace girar un disco sobre su centro, entonces, desde un sistema de referencia separado del disco, las secciones del que se encuentren más lejos del centro, deben experimentar velocidades tangenciales mayores, y por lo tanto, de acuerdo con (2.9), deben contraerse en sus ejes perpendiculares al radio del disco. A su vez, los radios no deben experimentar efectos de contracción. Por lo tanto, el cociente entre el radio y la circunferencia no es igual a  $2\pi$  si el disco está rotando.

Sistemas de referencia fijos en el disco no son inerciales, pero desde su centro, no debería percibirse ninguna fuerza ficticia, y los puntos del disco deben ser estáticos desde ahí <sup>8</sup>, de modo que la relación entre el radio y cualquier circunferencia debe ser la esperada, aunque sea imposible realizar observaciones instantáneas sobre cualquier punto que no sea el centro.

Este arreglo describe a la paradoja de Ehrenfest, y sobre ella se puede notar que:

- Sistemas no inerciales, no satisfacen las relaciones geométricas que se obtienen de los postulados de Euclides.
- La física obtenida en el centro del disco, debería ser consistente con fijarlo y hacer rotar al resto del Universo desde el mismo eje, suponiendo que se deja pasar el tiempo suficiente para que el centro del disco sea influenciado por las regiones en movimiento. Sin embargo, el sistema independiente del disco sólo observará dicha equivalencia si se encuentra sobre el eje de rotación del disco. Además, el “tiempo suficiente” depende de la geometría del Universo.

Figura 2.3: Los sistemas de referencia  $\mathcal{O}$  (el único fijo en el disco) y  $\mathcal{O}'$ , no coinciden en el valor de  $\pi$ . Los sistemas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  tampoco. Los sistemas  $\mathcal{O}'$  y  $\mathcal{O}''$  encuentran la misma discrepancia. Por último,  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  no pueden distinguir una rotación en el disco, de una rotación sobre el resto del Universo, mientras que  $\mathcal{O}''$  sí. Las flechas grises representan la velocidad tangencial a lo largo de un diámetro del disco.



La teoría General de Relatividad ofrece una explicación satisfactoria a la primera cuestión, pues consigue relacionar a la geometría del Universo, con el estado de aceleración de un sistema. Además,

<sup>8</sup>suponiendo que ha pasado suficiente tiempo entre el inicio de la rotación, y la propagación del movimiento hasta el borde del disco.

establece que las interacciones gravitacionales son físicamente indistinguibles de una aceleración constante, a la escala apropiada. De manera más formal:

- Un campo gravitacional constante es una aceleración constante. No es útil buscar una distinción entre estos.
- Un sistema que no acelera uniformemente, no puede reproducir resultados de la geometría Euclidiana.
- Un campo gravitacional que no es constante, conlleva a una aceleración variable, y por lo tanto, debe poder describirse como un efecto geométrico. Menos masa debe corresponderse con un mayor parecido al espacio de Minkowski

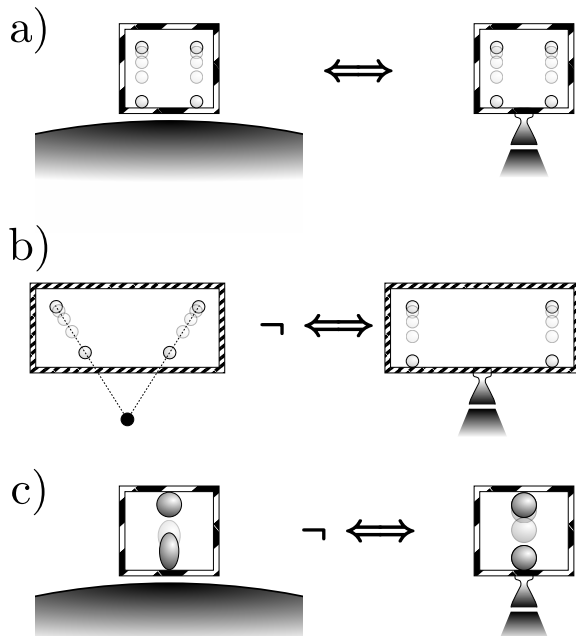


Figura 2.4: La equivalencia entre campos gravitacionales y sistemas bajo aceleración constante es un fenómeno local. A escalas cosmológicas, no existe tal equivalencia.

**a:** El principio de equivalencia se cumple para masas pequeñas, en un sistema de referencia pequeño.

**b:** En un sistema de gran extensión, el campo gravitacional anterior converge a un punto, mientras que la aceleración conserva las trayectorias paralelas del caso anterior

**c:** Cuerpos lo suficientemente masivos y/o de gran extensión, experimentan efectos de marea si interactúan con otros cuerpos masivos, mientras que la aceleración no produce efectos cuya intensidad varíe con la forma de los cuerpos.

A lo anterior, deben sumarse los postulados de la Relatividad Especial, y sus consecuencias deben cumplirse sólo como casos límite<sup>9</sup>. Esto es, la constancia de  $c$  y la equivalencia entre sistemas inerciales siguen siendo esenciales, e independientes de la escala. Sistemas inerciales deben seguir relacionándose por medio de (2.3), mientras que sistemas acelerados deben reproducir los resultados de la Relatividad Especial sólo localmente<sup>10</sup>.

La segunda cuestión de la paradoja de Ehrenfest es motivo de debate, y Einstein era consciente de que explorar esas ideas podría tener consecuencias importantes, pero su teoría de la Relatividad General se desarrolla sin ellas. Este tema se considera más adelante, en la sección 4.1.

<sup>9</sup>Lo que se describe en [15, pág. 46] como un corolario del principio de correspondencia.

<sup>10</sup>O sea, a la escala apropiada. En regiones galileanas [11, pág.116].

### 2.2.1 Espacio-tiempo curvo

El tratamiento de los espacios cuya parte espacial sólo es euclidiana a escalas lo suficientemente pequeñas, es parte del dominio de la topología. Específicamente, una variedad es Riemann es un espacio topológico dotado de una métrica que localmente coincide con la de un espacio-tiempo de Minkowski.

De lo general a lo particular, un espacio topológico se define como un conjunto de elementos y una topología que los relaciona. Si la topología se puede interpretar como un concepto de distancia entre los elementos del espacio, la topología del espacio se puede caracterizar por medio de una métrica. Luego, se pueden definir curvas paramétricas sobre el espacio por medio de otro espacio métrico auxiliar (un subconjunto de la recta real) que sirve como el dominio del parámetro. Las parciales de las curvas respecto de su parámetro, evaluadas en un punto específico, se pueden descomponer, con ayuda de un segundo espacio auxiliar, asociado al punto en el que se evalúa a la derivada, en el producto de una derivada parcial, y de la velocidad de la curva paramétrica, que se suele normalizar aprovechando la arbitrariedad del espacio utilizado para el parámetro de la curva. Con esto, y aprovechando nuevamente la arbitrariedad de la curva paramétrica misma (en el sentido de que se puede definir una infinidad de curvas paramétricas que contienen al punto sobre el cual se deriva), es posible tratar al operador de derivada como un elemento de la base de un espacio tangente a la variedad. Este procedimiento se describe en [22, Pág. 105] con el arreglo que se define en [22, Pág. 59].

Si los vectores base obtenidos con el procedimiento anterior coinciden con los de un espacio de Minkowski, se dice que el espacio métrico es una variedad de Riemann, y los operadores de derivada definen un sistema de coordenadas de Riemann, cuyos vectores base se asocian con un sistema de referencia local de Lorentz [17].

Un método más sencillo para definir sistemas de referencia sobre un espacio-tiempo curvo, y que se alinea mejor con el proceso que sigue Einstein en [11], es considerando que sobre dos puntos infinitesimalmente cercanos, hay una única geodésica, que se puede normalizar para obtener nuevamente a las bases de Riemann [4].

El estudio del espacio-tiempo como un espacio topológico hace uso de muchas definiciones que, si bien permiten construir y manipular campos con estructuras internas, se pueden ignorar bajo la suposición de que el espacio-tiempo es un continuo, y que por lo tanto, sobre cualquier punto, es posible definir un sistema de coordenadas que coincide localmente con el de una variedad de Minkowski.

Einstein se refiere al formalismo con el que describe 4-espacios que espacialmente se desvían de la geometría euclidiana, como “teoría de las superficies”, desarrollada en parte por Riemann y Gauss [11, P’ag. 122], y que busca describir al espacio-tiempo continuo por sus características geométricas, como sus elementos de línea, y su curvatura a lo largo de direcciones arbitrarias. Al mismo tiempo, la “teoría de los tensores”, sirve para agrupar coeficientes y relaciones geométricas como componentes de tensores, representados en sistemas de coordenadas arbitrarios. Por último, para proponer las ecuaciones de Einstein, recurre a la “teoría de los invariantes”, buscando construir un tensor que se transforme covariantemente cuando se transforma a los puntos del espacio-tiempo.

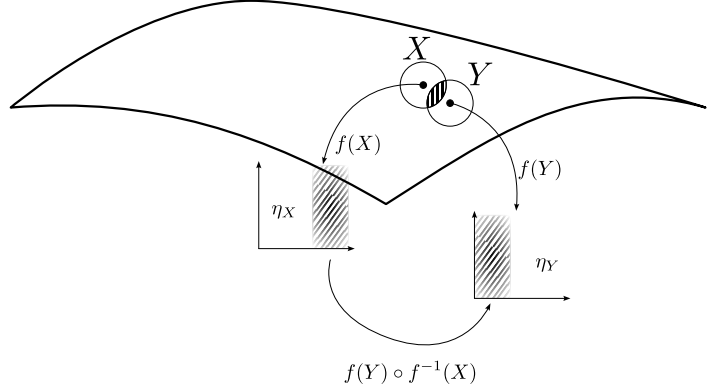
En lo que sigue, se utiliza una definición que también representa un espacio-tiempo continuo, en general curvo y localmente plano, y que ignora los detalles requeridos para tratarlo como un caso particular de un espacio topológico, pero no impide definir a los tensores que describen a su geometría y a su contenido:

Una variedad son los puntos que la forman, donde cada uno de esos puntos tiene asociado un espacio, llamado aquí base de coordenadas. Dado un punto, se puede conocer su base, y dada una base, se puede encontrar el punto al que corresponde.

Sobre una variedad, se pueden definir atlas, que son conjuntos de puntos, tales que si se elige

uno de ellos, su base asociada se sobrepone con la base de otro punto en el atlas. Que dos bases se sobrepongan, significa que es posible definir a la composición de la carta evaluada en un punto, y el inverso de la carta en el otro punto. Naturalmente, esta función compuesta también es invertible.

Figura 2.5: Se puede mapear a los puntos de la región sombreada en la base de coordenadas con métrica  $\eta_X$ , a la región sombreada del punto con base de coordenadas  $\eta_Y$  por medio de  $f(Y) \circ f^{-1}(X)$ , o en el otro sentido, eventos en  $\eta_Y$  se pueden representar en  $\eta_X$  por medio de  $f(X) \circ f^{-1}(Y)$ . Los mapeos  $f(X)$  y  $f(Y)$  forman un atlas.



Finalmente, una variedad es de Riemann si las bases de coordenadas de todos los puntos que la forman, son espacios de Minkowski (Ver comienzo de la sección 2.1.1), y todas ellas se sobrepone, es decir, “todos los puntos de la variedad” es un atlas válido.

El primer requisito es el equivalente formal del principio de equivalencia (figura 2.4), y el segundo requisito garantiza que cualquier resultado obtenido en una base de coordenadas, es válido para la vecindad centrada en el punto correspondiente. De aquí en adelante, siempre que se hable de variedades y sus objetos asociados, se entiende que se está refiriendo a este arreglo, y que su base de coordenadas es un espacio sobre el que se puede definir un sistema inercial con vectores base  $x^\mu$ :

$$x^0 = t \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (2.10)$$

donde  $t$  es el tiempo-luz [11, Pág. 85], y  $x$   $y$   $z$  son coordenadas cartesianas.

De la misma manera que lo que se hizo con el espacio de Minkowski, se puede asociar un punto cualquiera <sup>11</sup> con un origen, y asignar un sistema de coordenadas al mismo. Luego, puntos en la variedad representan eventos, y estos pueden o no estar causalmente conectados con el origen.

A cada vector, o en general a cada tensor que se pueda definir sobre la variedad <sup>12</sup>, le corresponde su inverso, el cual satisface que el producto entre ellos es igual al tensor identidad, que a su vez se define como el operador cuyo producto con un vector, lo deja sin cambio. En cada caso, la definición de “producto” es:

$$[v \cdot v^{-1}]^\mu{}_\nu = v^\mu [v^{-1}]_\nu = [\mathbf{1}]^\mu{}_\nu \quad [\mathbf{1} \cdot v]^\mu = [\mathbf{1}]^\mu{}_\nu v^\nu = v^\mu \quad (2.11)$$

Donde, para poder dotar a la variedad de estos productos, es necesario definir al llamado espacio dual. Por último, asociar a un vector con su inverso, equivale a definir un tensor de componentes

<sup>11</sup>El Principio Cosmológico, que se introduce más tarde, requiere que todos los puntos de la variedad sean equivalentes.

<sup>12</sup>Haciendo énfasis en el hecho de que la variedad como se la está tratando, son los puntos que la forman, mas no los objetos definidos sobre ella. Esto será relevante cuando se apliquen transformaciones, a la variedad, a los objetos definidos en ella, o a ambos. Nótese también que se no se hace mención de la topología, necesaria para que los puntos formen un espacio métrico, porque la estructura del tensor métrico (que se introduce más adelante) determina por completo a la geometría de la variedad, y viceversa: dados los puntos de la variedad, se puede determinar al tensor métrico a partir del elemento de línea del 4-espacio [11, Pág. 119 y 120]

$g_{\mu\nu}$  que al operar sobre el vector  $v$  de componentes  $v^\mu$ , produzca a  $v^{-1}$  de componentes  $[v^{-1}]_\nu$  o sencillamente <sup>13</sup>  $v_\nu$ :

$$[v^{-1}]_\nu = [g \cdot v]_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu \quad (2.12)$$

Es importante notar que la notación no indica que se está hablando de vectores cuyos puntos iniciales coinciden, pero esto es obligatorio, dado que las componentes están determinadas por el sistema de coordenadas en uso, que a su vez depende del punto de la variedad sobre el que se esté trabajando. Por lo tanto, el tensor métrico también es un objeto que depende del punto de la variedad sobre el que se esté mapeando a vectores con sus inversos. Esto se denotará (cuando sea necesario hacer énfasis en esta dependencia) como  $g(x)$  o  $g_{\mu\nu}(x)$ .

Intuitivamente, el tensor métrico dicta la medida en la que la variedad se desvía de lo que sería un espacio Euclidiano. De forma aún más informal, determina qué tanto hay que estirar un espacio a lo largo de cada uno de sus ejes, para que la longitud de una curva en él sea iguales a la longitud de la misma curva subtendida en la variedad. Esto es porque, dado el tensor métrico, se puede obtener directamente al elemento de línea de cualquier curva que pase por ese punto:

$$d^2l = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.13)$$

Dado que la decisión de a quién denotar “inverso” entre  $v$  y  $v^{-1}$  es arbitraria (porque el inverso de  $v^{-1}$  es  $v$ ), es necesario que el tensor métrico  $g$  tenga asociado un inverso ( $g^{-1}$ ), y debe ser simétrico en sus índices, pues  $v^{-1} \cdot v = v \cdot v^{-1}$ . Por lo tanto, ( $g^{-1}$ ) también es simétrico en los índices de sus componentes  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ .

Sabiendo que se puede usar la misma lógica en cualquiera de los puntos de la variedad, queda por hallar la manera de relacionar vectores con orígenes en puntos distintos. Para hacer esto, se requiere de un objeto que relacione a la base de Riemann de dos puntos cualesquiera. Este objeto es la conexión, cuyas componentes se conocen como símbolos de Christoffel. Estos se definen como el objeto que contraído con un vector base, proporciona la razón de cambio de dicho vector base, a lo largo de la dirección en la que apunta: <sup>14</sup>

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e_\rho \quad (2.14)$$

Es posible escribir a los símbolos de Christoffel en términos de parciales de  $g$ . Para eso, notar que  $e_\mu e_\nu = g_{\mu\nu}$ :

$$e_\mu e_\nu = e_\mu e^\rho g_{\rho\nu} = [\mathbf{1}]_\mu{}^\rho g_{\rho\nu} = g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Luego, las componentes de la parcial de  $g$  son:

$$\partial_\mu g_{\sigma\nu} = \partial_\mu (e_\sigma e_\nu) = (\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} e_\alpha) e_\nu + (\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} e_\alpha) e_\sigma = \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} g_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} \quad (2.16)$$

De donde se sigue que:

$$\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} = 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} \implies \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.17)$$

Los símbolos de Christoffel permiten definir a un operador de derivada covariante  $\nabla$  que exprese

<sup>13</sup>De modo que sub-índices definen implícitamente cantidades del espacio dual.

<sup>14</sup>Es decir, a lo largo del parámetro de la curva paramétrica que lo define, ver figura ??.

razones de cambio a lo largo de curvas sobre la variedad, en contraste con las parciales ordinarias  $\partial$ , que por ser un sistema de coordenadas válido, operan sobre el plano tangente al punto en el que se las define, y por lo tanto sólo son validas para vecindades de la variedad. Las derivadas covariantes son derivadas parciales con términos lineales destinados a corregir el cambio en los sistemas de coordenadas a lo largo de cada dirección en la variedad:

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} v^{\alpha} + \partial_{\mu} v^{\nu} \quad (2.18)$$

La derivada covariante permite trasladar vectores entre puntos de la variedad, sin alterar su significado físico. Un vector es transportado paralelamente entre dos puntos, si en todo momento satisface la condición:

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = 0 \quad (2.19)$$

Dado que es posible expresar a los símbolos de Christoffel en términos del tensor métrico, se satisface la llamada condición de compatibilidad de la métrica:

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

El último objeto de interés en lo que respecta a la geometría de una variedad, es el tensor de curvatura de Riemann, que indica qué tanto cambia un vector si se lo transporta paralelamente en una trayectoria cerrada, infinitesimal. Se puede escribir a este tensor en términos de contracciones y parciales de los símbolos de Christoffel. Su forma luego realizar el procedimiento, es:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \quad (2.21)$$

Dado que los vectores no forman parte de la variedad, sino que se definen en ella, y dado que el transporte paralelo es una consecuencia de la geometría de la variedad, es posible usar los mismo coeficientes que forman al tensor de Riemann, para indicar qué tanto cambia el tensor métrico en el centro del bucle, respecto de lo que sería la métrica correspondiente a una variedad de Minkowski. Estas cantidades se obtienen de la traza de  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ :

$$R_{\sigma\nu} = R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} = \partial_{\rho} \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} \Gamma^{\rho}_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \quad (2.22)$$

Finalmente, se puede contraer por completo al tensor de Ricci con el tensor métrico inverso, para obtener un escalar:

$$R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \quad (2.23)$$

## 2.3 Ecuaciones de Einstein

La Teoría General de la Relatividad como se la consideraba antes de que Einstein hiciera un intento de solucionar el llamado problema cosmológico [11, pág.172], se resume en las ecuaciones de campo que en su versión moderna [10, pág. 161] son:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Los los tensores que aparecen en ella, no se mencionaron en la sección 2.2.1, así que se los explica

brevemente a continuación:

### 2.3.1 Tensor de energía-momento canónico

El nombre de “tensor de energía momento” se utiliza para varios objetos que sirven al mismo propósito de cuantificar el contenido del Universo, pero son distintos en su origen, utilidad, y definición. En el contexto de las ecuaciones de Einstein, se define a  $T_{\mu\nu}$  como las componentes del tensor simétrico[8]:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^0 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^0 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_1}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^0 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^0 \partial x^2 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^3} & \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^0 \partial x^1 \partial x^2} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Donde  $P_\mu$  son las entradas del 4-momento del fluido <sup>15</sup> que actúa como fuente de campos gravitacionales:

$$P_0 = \rho \quad P_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.26)$$

Con  $\rho$  igual a la masa relativista,  $m$  la masa de reposo de la especie, y  $v_i$  las componentes de su velocidad respecto al sistema de referencia.

Su intuición geométrica y significado físico se muestran en las siguientes figuras:

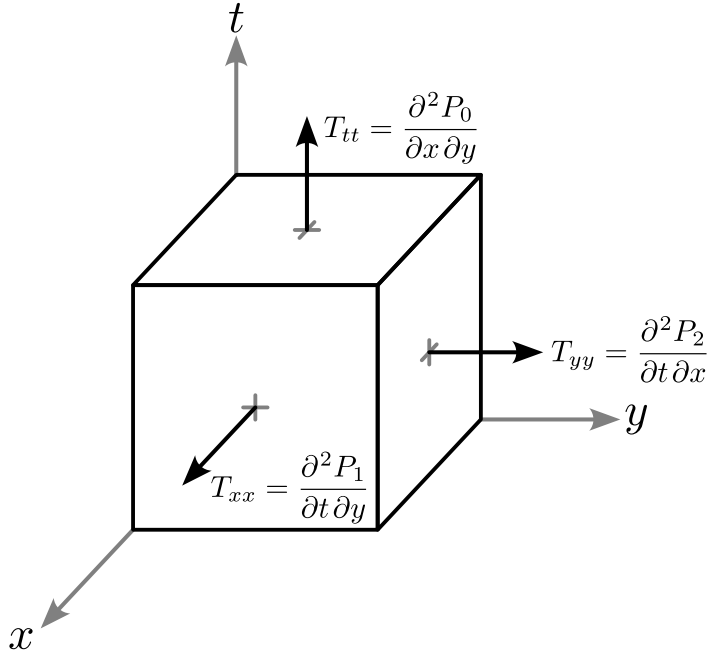


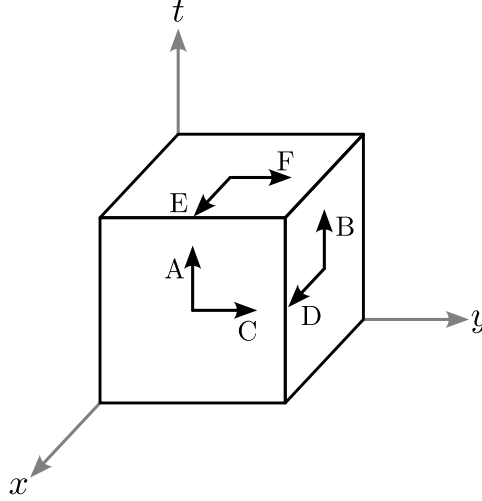
Figura 2.6: Componentes de  $T_{\mu\nu}$  en un Universo espacialmente bidimensional (las unidades de volumen, serían áreas en 3 dimensiones, y las de superficie, serían líneas)

Dado que  $P_0$  es la energía del fluido contenido,  $T_{tt}$  debe ser una densidad de energía (notar que la unidad de volumen de un espacio bidimensional, es un área en 3 dimensiones).

La componentes  $T_{xx}$  se puede interpretar como  $\partial_t (\partial P_1 / \partial y)$ , que es el flujo del momento a través de la línea (superficie) de coordenada  $x$  constante. Equivalentemente,  $\partial_y (\dot{P}_1)$  es una fuerza (derivada del momento respecto al tiempo) por unidad de superficie. La componente  $T_{yy}$  es el mismo caso, para la superficie de coordenada  $y$  constante.

<sup>15</sup>En el modelo de concordancia se considera un fluido mixto, formado por materia y radiación. Cada especie con su propia ecuación de estado [10, pág. 187].

Figura 2.7: Las componentes señaladas con  $A$  y  $B$ , son densidades de momento (momento por unidad de volumen). Las componentes señaladas con  $C$  y  $D$  se pueden escribir como fuerzas por unidades de área conmutando las derivadas. Por ser longitudinales, describen cizallamientos. Las componentes señaladas con  $E$  y  $F$ , son flujos de energía a través de las superficies de  $x$  y  $y$  constantes, respectivamente.



$$\begin{aligned} \text{A: } T_{xt} &= \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} \\ \text{B: } T_{yt} &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} \\ \text{C: } T_{xy} &= \frac{\partial^2 P_1}{\partial t \partial x} \\ \text{D: } T_{yx} &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial t \partial y} \\ \text{E: } T_{tx} &= \frac{\partial^2 P_0}{\partial t \partial y} \\ \text{F: } T_{ty} &= \frac{\partial^2 P_0}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Notando que las componentes en la diagonal son parciales de las componentes de  $P$  que son perpendiculares a cada hiper-superficie del 4-espacio, los elementos de la diagonal representan flujos de 4-momento sobre todas las caras de un 4-volumen. Las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal, son divergencias de las componentes de  $P$  a lo largo de cada dirección en las caras del mismo 4-volumen. Una interpretación más literal del significado del tensor de energía-momento como aparece en las ecuaciones de Einstein se muestra en la figura

Por motivos que se explican en la sección 3.3, se asume que el contenido del Universo es isótropo, y se puede representar <sup>16</sup> como un fluido mixto, cuyas especies no están acopladas térmicamente. Estas restricciones se traducen en un tensor de energía-momento diagonal. En tal caso, las componentes  $T_{\mu\mu}$  se pueden escribir en términos de las densidades de energía y presión de cada especie, y de sus 4-velocidades respecto de un sistema inercial [12, pág. 71]:

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ (\rho + p)v_\mu v_\nu + pg_{\mu\nu} & \text{si } \mu = \nu \end{cases} \quad (2.27)$$

Donde la consistencia en las unidades se debe a que hay un factor implícito de  $\frac{1}{c^2}$ , corrigiendo las unidades del término  $pv_\mu v_\nu$ , pues las componentes espaciales de  $P$  son momentos relativistas. No se incluye a ese factor porque se está trabajando en unidades naturales <sup>17</sup> desde que se introdujo la noción de 4-espacio en la sección 2.1.1.

El caso  $v_0 = 1, v_i = 0$  corresponde a una región en la cual la velocidad promedio del fluido contenido en ella, es nula <sup>18</sup>. Con esta condición, las componentes del tensor de energía momento que son distintas de cero, corresponden directamente a la densidad de energía y las presiones en cada dirección espacial, que deben ser las mismas si se trata de un fluido isótropo:

$$T_{\text{ideal}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg_{33} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

<sup>16</sup>A escalas cosmológicas.

<sup>17</sup>Ver ecuación (2.7)

<sup>18</sup>En cosmología, esta condición determina un elemento de volumen comóvil.

En el ámbito de la Cosmología, y en particular para  $\Lambda$ CDM,  $T_{\text{ideal}}$  representa al contenido del Universo o parte de él, desde un sistema de referencia comóvil (Ver sección 3.5).

### 2.3.2 Tensor de Einstein

El tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , de acuerdo con (2.23), (2.22), y (2.17), se puede escribir por completo en términos del tensor métrico y sus primera y segunda derivadas parciales. Es decir, las ecuaciones de Einstein <sup>19</sup> son de segundo orden en  $g$ . Esto garantiza que en el límite en el que el tensor métrico tiende al de Minkowski, (2.24) se reduzca a la ecuación de Poisson característica de la Ley de Gravitación Universal, nuevamente satisfaciendo el corolario del principio de correspondencia (ver nota 9 de la misma sección.). Esto se demuestra expresando al tensor métrico como uno que difiere infinitesimalmente del de un espacio de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

Luego, reemplazando (2.29) en (2.24), y considerando un fluido ideal y en reposo (2.28), las parciales de  $\eta_{\mu\nu}$  deben ser todas iguales a cero (por la definición misma de la métrica de Minkowski). Además, la igualdad entre componentes de  $G$  y de  $T$ , implica que  $h_{\mu\nu}$  debe ser diagonal. Por último, tratándose de un fluido en reposo, la componente de tiempo de la perturbación,  $h_{00}$  sólo puede depender de las posiciones espaciales. Nuevamente, la igualdad entre la parte geométrica y material implica que  $\rho$  (la contraparte de materia de  $h_{00}$ ), depende de las distancias. Con todas estas consideraciones, se puede reducir a (2.24) a la forma:

$$\partial_i \partial^i h_{00} = 4\pi\rho(\vec{x}) \implies \nabla^2 \left( \frac{\phi(\vec{x})}{G} \right) = 4\pi\rho(\vec{x}) \implies \nabla^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}) \quad (2.30)$$

El lado izquierdo es la ecuación de Poisson, cuya solución es un potencial escalar  $\phi = h_{00}G^{-1}$  que depende del inverso de la distancia  $r = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$  y tiene asociado un campo conservativo, que en presencia de masa produce una fuerza exactamente como la que Newton describe en su Ley de la Gravitación Universal.

## 2.4 Relatividad General como una teoría de campos

Abordar el problema de describir a las interacciones gravitacionales desde el punto de vista de la teoría de campos, permite obtener a las ecuaciones que dictan la evolución de un sistema, como una consecuencia de conceptos más profundos, como el principio de Hamilton y el teorema de Noether, que si se parte directamente de las ecuaciones de Einstein. Para adoptar este principio al formalismo de la Relatividad Especial, donde las coordenadas de tiempo y espacio forman parte de una misma estructura, es necesario sustituir las nociones de grados de libertad, por campos, que son funciones definidas en una variedad. En este sentido, el tensor métrico y el tensor de energía-momento, son campos, y por lo tanto debería ser posible derivar (2.24) como la función que extremiza alguna funcional de acción <sup>20</sup>.

<sup>19</sup>La ecuación de Einstein es la forma que (2.24) toma si se refiere a los tensores en vez de a sus componentes:  $G = 8\pi T$

<sup>20</sup>Dicho de otra forma, las ecuaciones de Einstein son la evolución canónica de los campos que definen una acción. De ahí que el tensor de energía-momento como aparece en (2.24) se conozca como el T canónico. En contraste, el tensor de energía-momento de Noether requiere una definición distinta, y se obtiene como una consecuencia de la conservación del 4-momento.

Una de las ventajas de adoptar un enfoque centrado en teorías de campos, son el hecho de que se puede construir una acción utilizando criterios de simetría. Así por ejemplo, si se espera que transformaciones que actúen como se indica en (2.3) no alteren la física en el marco o el espacio <sup>21</sup> transformados, entonces la acción debe construirse de forma deliberada, para ser siempre invariante bajo esta clase de transformaciones.

La acción que describe a la evolución del tensor métrico, llamada acción de Einstein-Hilbert, se obtiene con una Lagrangiana <sup>22</sup> separable <sup>23</sup> en una parte geométrica, en la que sólo figuran el tensor métrico y sus derivadas, y una parte de masa, cuya variación respecto de los campos  $g_{\mu\nu}$  forma las componentes de  $T_{\mu\nu}$ . A esta nueva definición ([12, pág. 9]) de  $T$ , se le conoce como el tensor de energía-momento de Hilbert:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{materia})} \quad T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (2.31)$$

A pesar de que el  $T$  de Hilbert es conceptualmente distinto al canónico, es correcto asumir que este tomará la forma (2.25) cuando las variables dinámicas evolucionen por la trayectoria canónica.

La inclusión de  $(16\pi)^{-1}$  en la parte geométrica de la acción, no es relevante a la dinámica de los campos, pero permite reproducir lo dicho en la sección 2.3.2 sobre reducir las ecuaciones de campo a la Ley de Gravitación Universal. Se puede prescindir de ese factor, pero entonces la equivalencia en el límite se verá ofuscada.

El factor de  $\sqrt{-g}$  es mucho más importante, pues garantiza la invarianza bajo transformaciones de Lorentz. Se lo define como la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico, con el signo negativo para no tener cantidades complejas debido a la signatura de la métrica.

Por último, el escalar de Ricci  $R$  es una contracción de las variables dinámicas (los campos de los cuales se busca comprender su evolución, y sus derivadas) que da lugar precisamente a un escalar.

La acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo transformaciones de Lorentz, así como traslaciones en el espacio y el tiempo, y rotaciones en el espacio. La forma más general de componer estas transformaciones, determina los elementos del grupo de Poincaré.

### 2.4.1 Relación entre la geometría del Universo y su contenido

Como se explicó al introducir las ecuaciones (2.12) y (2.13), el tensor métrico es indispensable para definir productos entre cantidades sobre una variedad. Esto hace que  $g$  aparezca en los términos cinéticos de cualquier campo  $\psi(x)$ :

$$(\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi) = g_{\mu\nu} (\partial^\mu \psi) (\partial^\nu \psi) = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \psi) (\partial_\nu \psi) \quad (2.32)$$

El efecto que esto tiene, a nivel de las ecuaciones de campo, es que la que corresponde  $g$  siempre tendrá términos con campos de materia, y si estos son estáticos, entonces el tensor métrico también debe serlo.

<sup>21</sup>La aplicación de una transformación a un marco de referencia al espacio (una variedad) o a un sistema de referencia, es físicamente equivalente cuando es posible, pero matemáticamente involucra procedimientos distintos. Esto se discute en la sección 6.1.

<sup>22</sup>En varias ocasiones se omitirá la precisión de llamar al integrando de la acción de una teoría de campos, densidad lagrangiana.

<sup>23</sup>Esta separación no es tan sencilla como agrupar términos con campos de materia en una integral aparte. Ver sección 2.4.1

## Capítulo 3

# Elementos del Modelo Cosmológico Estándar

### 3.1 Expansión de Hubble

Se entiende por expansión o inflación al fenómeno por el cual el Universo se expande a lo largo de su historia, y esta expansión es una característica intrínseca del espacio-tiempo. Es decir, no se trata de una expansión en el sentido de que las estructuras formadas por sus especies se alejen entre sí, si no que las relaciones de distancia entre ellas, evolucionan en el tiempo.

Dos evidencias que apoyan fuertemente a la idea de que la inflación es un verdadero fenómeno físico, son la existencia de un fondo de radiación cósmica (CMB), y la dependencia con la distancia de las velocidades de recesión de objetos lejanos <sup>1</sup>.

### 3.2 Radiación cósmica de Fondo

Las mediciones realizadas por Arno Penzias y Robert Wilson, y publicadas en 1965, fueron cruciales para la aceptación de modelos cosmológicos de tipo Big-Bang (modelos que presentan inflación) que sustituyen a la teoría del estado estacionario, pues probaron más allá de toda duda razonable que cualquier antena de microondas, sin importar su ubicación, orientación y defectos, registra un ruido de fondo proveniente de la frontera del Universo observable, y cuyo espectro de emisión coincide con el de un cuerpo negro.

Este hecho experimental se puede reproducir con gran precisión cuando se usan modelos cosmológicos donde el Universo se expande como se explicó en la sección anterior, y donde las especies que lo forman se encuentran en equilibrio térmico y pueden interactuar mediante fuerzas fundamentales y/o efectos gravitacionales. En el resto de la siguiente sección, se explica el formalismo en el que el modelo  $\Lambda$ CDM se apoya para describir las épocas previas a las que forman parte del Universo observable, con la intención de poner en contexto la necesidad de considerar a la inflación para explicar el paso de un Universo opaco <sup>2</sup>, a uno en el que, al menos a escalas cosmológicas, las especies que lo conforman no presentan interacciones térmicas.

---

<sup>1</sup>Este fenómeno se puede explicar sin necesidad de Universos en expansión, pero implicaría que somos observadores privilegiados en el sentido de que el resto del Universo se aleja de un único punto, y el ser humano se encuentra precisamente en él. El modelo  $\Lambda$ CDM asume lo contrario, y uno de los postulados de la teoría de la Relatividad (el de la equivalencia entre sistemas inerciales) se puede interpretar como que la existencia de sistemas inerciales distintos al resto, es físicamente imposible.

<sup>2</sup>Es decir, en el cual la materia relativista se encuentra acoplada con la materia ordinaria, en contraste con la experiencia que se tiene sobre la forma en la que las partículas relativistas se propagan en el Universo

La existencia del fondo de radiación se predijo antes de su observación, y se considera, junto con la Ley de Hubble, una de las evidencias más contundentes de la expansión del Universo. Partiendo de un modelo cosmológico que establezca valores para la geometría y del espacio y la composición del fluido cósmico, es posible compensar los efectos del corrimiento al rojo cosmológico (que se define en las siguientes secciones) para obtener la longitud de onda emitida en la última superficie de dispersión (LSS)<sup>3</sup>, y usando la Ley de Wien, calcular la temperatura promedio de dicha superficie. En el modelo  $\Lambda$ CDM, se estima una temperatura por encima de los 10,000K, que al comparar con la medición experimental de aproximadamente 2.7K, implica un lapso de 12 a 16 Gyr entre el tiempo actual y el tiempo de emisión. Este período corresponde a la llamada *época de formación de estructura*, cuya evolución (a escalas cosmológicas) se rige principalmente por interacciones gravitacionales.

Épocas anteriores a la responsable del CMB son imposibles de detectar basándose en la electrodinámica, ya que la densidad del fluido cósmico es tal que los fotones se encuentran acoplados en un plasma que en consecuencia es opaco. Sin embargo, asumiendo (como se hace con  $\Lambda$ CDM) que la física antes y después del desacoplamiento de especies relativistas y no-relativistas, no ha cambiado<sup>4</sup>, la Física de Partículas es capaz de modelar a las fuerzas mediadoras de los procesos que ocurren en un plasma a las temperaturas que se esperan del Universo durante las épocas correspondientes a la historia térmica, cuando los parámetros de densidad de radiación y materia coinciden.

Las épocas previas a la de formación de estructura se explican<sup>5</sup> con el formalismo que deriva de la mecánica estadística, y se espera que su comprobación experimental resulte en correcciones al Modelo Estándar. Por ejemplo, las oscilaciones acústicas de bariones son un remanente de los procesos de creación-aniquilación de pares de partículas que ocurrieron durante la época de formación de reliquias, y son evidencia de un valor no-nulo para la masa de los neutrinos.

Extrapolando las condiciones del Universo hasta la era Planckiana ( $10^{-43}$ s después del Big-Bang), la temperatura del Universo se corresponde, de acuerdo con la constante de Boltzmann, con una energía cinética promedio de las partículas de  $10^9$ GeV. Muy por encima de la energía de unificación (246GeV), por debajo de la cual el mecanismo de Higgs dota a las partículas de masa. Esto significa que es necesaria una descripción unificada de las interacciones fundamentales para entender los procesos relevantes a la era Planckiana. Épocas posteriores están modeladas con mayor certeza, pero presentan deficiencias.

Descartando épocas que van más allá de las capacidades del Modelo Estándar y los aceleradores de partículas en uso, se distinguen a la era electrodébil ( $T \approx 100$ GeV), la era del plasma de quark-gluón ( $T \approx 200$ MeV), y la era leptónica ( $T \approx 0.5$ MeV).

La era electrodébil se estudia como un Universo en el cual la cromodinámica cuántica gobierna su evolución. Las suposiciones del Principio Cosmológico implican equilibrio térmico, y dado que el Universo es un sistema aislado, el enfriamiento requerido para el paso de la era electrodébil a la era del plasma de quark-gluón se explica a través de la expansión del Universo, la cual se cuantifica con el parámetro de Hubble, que se definirá cuando incorpore el fenómeno de inflación al formalismo de la Relatividad General. Lo mismo es cierto para el paso hacia la era leptónica.

La era leptónica, a diferencia de las anteriores, involucra procesos irreversibles. En términos de mecánica estadística, un sistema en equilibrio químico a escala macroscópica, es tal que sus componentes pueden pasar por microestados de no-equilibrio sin comprometer la estabilidad del macroestado. En estos microestados se dan procesos de producción de partículas ligeras (fotones, neutrinos), como la aniquilación de pares electrón-positrón, a un par de fotones (proceso de Dirac).

<sup>3</sup>La última superficie de dispersión, corresponde a todos los eventos del 4-espacio en los que la materia relativista interactuó por última vez con la materia ordinaria.

<sup>4</sup>Esto implica la necesidad de modelar interacciones por medio de acciones que son invariantes a lo largo de la historia del Universo, y como se explica en el siguiente capítulo, esta es una de las motivaciones para proponer una extensión a la Teoría de la Relatividad General.

<sup>5</sup>Al menos para instantes posteriores al Big-Bang y hasta el tiempo de Planck.

La irreversibilidad del proceso de producción de fotones, se debe a que el proceso inverso (proceso de Breit-Wheeler) ocurre con menor probabilidad (la sección eficaz para el propagador que describe el proceso de Breit-Wheeler es menor que la del proceso de Dirac). Así, el macroestado de equilibrio se mantiene, pero la entropía del Universo aumenta, y por lo tanto, su temperatura también. Luego, la única variable en la ecuación de Boltzmann que distingue un Universo en el cual los electrones y positrones se aniquilan por completo, de uno en el cual la temperatura desciende lo suficiente como para permitir otros procesos de menor energía, es nuevamente el factor de Hubble. En particular, si la expansión del Universo es *acelerada*, entonces, a medida que la frecuencia de los procesos de Dirac se reduce, los electrones restantes emiten radiación de frenado. Los fotones emitidos siguen interactuando con la materia a través del esparcimiento Compton. A pesar de que los microestados accesibles incluyen procesos fuera del equilibrio, cualquier parte del fluido cósmico se mantiene en equilibrio térmico con las demás. De otra forma, el espectro de radiación del Universo no sería el de un cuerpo negro, como indican las observaciones experimentales del fondo de radiación.

Los últimos procesos antes del fin de la historia térmica, son el esparcimiento Thompson, y los procesos de recombinación. Cuando estos comienzan, la densidad de número de electrones desciende lo suficiente como para detener los procesos de esparcimiento. Los fotones creados en épocas anteriores pasan a ser partículas libres, el fluido cósmico deja de ser opaco.

En resumen, si se asume que el Universo en sus inicios estaba compuesto por un fluido uniforme y en equilibrio térmico, existen momentos críticos en los cuales las fluctuaciones que se dan al nivel de los microestados, no es suficiente para estimular procesos de creación de reliquias, a menos que se considere un Universo en expansión.

### 3.3 Principio Cosmológico

Observaciones experimentales sugieren que, a escalas mayores a los 180Mpc, el Universo es homogéneo. Es decir, no es posible distinguir entre dos volúmenes de esas dimensiones, tomados de regiones distintas. Una consecuencia directa de esta homogeneidad, es que el Universo también debe ser isótropo, pues si hubiera alguna anisotropía, es imposible que todo observador pueda confirmar su existencia, ya que la región en la que se la aprecia debe de ser distinta al resto, contradiciendo la homogeneidad.

Otra de las motivaciones para suponer que no deberían existir regiones del Universo que incluso a escalas cosmológicas se distingan del resto, es el hecho de que los descubrimientos que se han hecho en el pasado sobre nuestra posición en el Universo, sugieren que lo más razonable es asumir que no solo nos ubicamos en una región que no es el centro de las estructuras que observamos (no somos el Sol, ni el centro de la Vía Láctea), sino que no existe una región que se pueda identificar como el centro de todo lo demás.

En resumen, incorporar el Principio Cosmológico a un modelo cosmológico, se hace imponiendo homogeneidad e isotropía en el espacio <sup>6</sup>.

### 3.4 Corrimiento al rojo Cosmológico

Otra evidencia contundente para considerar modelos de tipo Big-Bang, son las observaciones relevantes a la llamada escalera de distancias. La calibración de la escalera de distancias se consigue por métodos que, al ser experimentales, no requieren de tantas suposiciones como es el caso con la historia temprana del Universo.

---

<sup>6</sup>Mas no en el tiempo, a menos que se consideren Universos estacionarios.

Las supernovas de tipo Ia, y todas las candelas estándar que siguen en la escalera, presentan corrimientos al rojo en sus espectros cada vez mayores, cuanto más lejos se encuentren <sup>7</sup>. El corrimiento al rojo se define como sigue:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \quad (3.1)$$

De tal forma que  $z$  (adimensional) es cero (no hay corrimiento) si la longitud de onda emitida ( $\lambda_0$ ) es igual a la recibida ( $\lambda$ ). El corrimiento al rojo que toma valores mayores (y siempre al rojo) cuanto más distante se ubique el emisor, no puede ser producido por velocidades peculiares a menos que el punto desde el que se han realizado estas mediciones, sea el único lugar en el Universo del que todo lo demás se aleja.

En contraste, Universos que se expanden como se describe al inicio de este capítulo, reproducen el efecto observado en todas sus regiones: Si se observan objetos estáticos <sup>8</sup>, pero se reduce la escala de distancia, entonces la separación entre ellos aumenta, a pesar de su estado de reposo relativo. Luego, si esta reducción depende del tiempo, se puede definir una velocidad, llamada velocidad de recesión, como el límite del cociente entre los intervalos de distancia y tiempo. Las dos propiedades notables de esta velocidad de recesión, son el hecho de que dependa linealmente de la distancia a un origen, y que esta dependencia, aunque sea respecto a un origen, es válida en cualquier origen. Cualquier observador que se pueda asociar con un sistema inercial, percibe <sup>9</sup> al resto del contenido del Universo, como si se alejara de la misma manera en todas direcciones, y a mayor velocidad, cuanto más lejos se encuentre.

Esto es evidente del hecho de que las velocidades de recesión deben producir corrimientos relativistas para mantener la constancia de  $c$ , pero a diferencia del corrimiento producido por velocidades peculiares (Ver sección 2.1.2), este debe ocurrir de la misma manera en todos los puntos del espacio.

### 3.5 Factor de escala y el flujo de Hubble

Para incorporar la expansión en un modelo cosmológico, es necesario comparar las distancias que naturalmente dependen del tiempo, llamadas distancias propias, con alguna referencia fija. Una referencia válida es la distancia comóvil, dada por la separación que los cuerpos libres <sup>10</sup> tendrían en todo momento, si no fuera por la evolución del concepto de distancia. Para definirla, es necesario convenir tal momento. Esta convención es la distancia de los cuerpos comóviles al día de hoy. Así, la distancia propia depende del tiempo a través de una función que multiplica (escala) a la distancia comóvil:

$$D(t) = a(t)r \quad (3.2)$$

Este factor de escala  $a(t)$  es, de acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, igual a 1 en el presente, y asumiendo que siempre incrementa <sup>11</sup>, debería tender a cero en el pasado.

<sup>7</sup>Cuanto más alejados se encuentren los objetos que se observan, más dependientes del modelo se vuelven las estimaciones de distancia, pues la historia de expansión del modelo dicta en qué medida el tamaño angular de los objetos es afectado por el hecho de que en épocas pasadas (que son las únicas de las que recibimos fotones), los objetos observados se encontraban más cerca de nosotros. Sin embargo, la dependencia del corrimiento al rojo con la distancia es claramente una función que depende linealmente de la distancia, al menos para el corrimiento que presentan las supernovas de tipo Ia

<sup>8</sup>Lo cual puede implicar que no se dan interacciones gravitacionales entre ellos.

<sup>9</sup>como un corrimiento al rojo dado por la ecuación (3.1)

<sup>10</sup>Aquellos que sólo presentan velocidades de recesión, pero serían estáticos si no hubiera inflación. Sus marcos de referencia propios, se llaman sistemas de referencia comóviles.

<sup>11</sup>Como lo sugieren el hecho de que todos los cuerpos comóviles presentan corrimientos al rojo, y la necesidad de expansiones para describir varios de los procesos que ocurren durante la historia térmica del Universo y hasta la última superficie de dispersión.

De la ecuación (3.2), se sigue de inmediato que las velocidades de recesión son:

$$v = \frac{dD}{dt} = \left(\frac{da}{dt}\right)r = \frac{da}{dt} \left(\frac{D}{a}\right) \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3), se define al parámetro de Hubble:

$$v = H(t)D \implies H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.4)$$

La evolución de  $H$  se conoce como el flujo de Hubble y caracteriza a la inflación. El hecho de que se aprecien velocidades de recesión, implica que el flujo de Hubble no se puede apreciar a escalas locales, pues de ser así, la extensión espacial de todas las estructuras del Universo, sería capaz de negar el incremento en las distancias que las separan, de la misma forma que la distancia comóvil es estática porque no considera la expansión del Universo. Es decir, se expande con él.

Esto significa que el flujo de Hubble sólo se puede apreciar a escalas cosmológicas, así como las interacciones gravitacionales sólo se pueden distinguir de aceleraciones a cierta escala (figura 2.4). El principio de equivalencia de Einstein iguala los efectos de la gravedad, con aceleraciones constantes producidas por cualquier fuerza, y en el caso del flujo de Hubble, cualquier fuerza interna en una estructura, es capaz de ocultar los efectos de la inflación.

### 3.6 La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

El Principio Cosmológico conlleva fuertes restricciones sobre el resto del modelo. Por ejemplo, en lo que respecta a su geometría, la variedad que representa al 4-espacio no debe de tener un borde que la delimite, pues de ser así, puntos en dicho borde serán distintos del resto, ya que sus bases de coordenadas asociadas tendrán la particularidad de estar acotadas en algunas direcciones, y se violaría la homogeneidad impuesta por el Principio Cosmológico. Esto reduce a las formas posibles, a Universos cuyas partes espaciales son superficies cerradas, o de extensión infinita. Otro requisito indispensable, es que la parte espacial de la variedad debe ser de curvatura constante, para garantizar que dado un punto cualquiera en ella, todas las direcciones son equivalentes, lo cual implica isotropía. Einstein también consideraba la necesidad de un espacio isótropo, de la condición de compatibilidad (2.20) ([11, Pág. 144]), y consideraba que la parte espacial del Universo debería ser esférica o elíptica ([11, Pág. 48]), para evitar divergencias al infinito en lo que respecta al contenido del Universo, si se busca prescindir de condiciones de frontera [11, Pág. 236]. Es importante notar que el Principio Cosmológico se refiere sólo a las características espaciales del Universo. Extender los criterios de homogeneidad e isotropía a la coordenada espacial equivale a suponer un Universo estacionario ([10, Pág. 163]), y de acuerdo con la distinción entre espacio y tiempo <sup>12</sup> que se menciona en la nota 5 de la sección 2.1.1, no hay un concepto de curvatura del tiempo propio comparable con el que se puede aducir al espacio, a razón de que el tiempo como una sucesión de eventos, sólo se puede interpretar después de formar parte de la experiencia del observador <sup>13</sup>. Por otro lado, sí es posible comparar una

---

<sup>12</sup>La no equivalencia entre espacio y tiempo a la que Einstein se refiere en [11, Pág. 85], no entra en conflicto con la noción de que se trate de variables del mismo tipo. Tanto porque sus unidades de medición son las mismas (recordando que la coordenada de tiempo es realmente el tiempo-luz), como por la “No separabilidad del continuo tetradimensional”.

<sup>13</sup>Einstein explica este razonamiento en [11, Págs. 51 a 53], y concluye que “el universo de ideas no puede ser deducido de la experiencia por un método lógico sino que, por el contrario, es una creación de la mente humana, sin la cual no es posible la Ciencia”

sucesión de eventos entre sistemas de referencia. En un procedimiento que físicamente se corresponde al de comparar relojes.

Estas limitaciones, en términos de la geometría del espacio-tiempo, corresponden a 4-espacios espacialmente esféricos, planos, o hiperbólicos. La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) generaliza los tres casos con un elemento de línea que en coordenadas esféricas es:

$$d^2l = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad \epsilon \in [-1, 0, 1] \quad (3.5)$$

Donde  $\epsilon$  es la curvatura gaussiana de la hiper-superficie encajada.

La curvatura gaussiana es el producto de sus curvaturas principales, que son las curvaturas máxima y mínima de entre todas las curvas que intersectan a los planos que contienen al vector normal a la parte espacial del 4-espacio en un punto dado. En la cuestión de las unidades,  $\epsilon$  tiene unidades de inverso de la distancia al cuadrado, y su signo determina si se trata de una superficie hiperbólica (curvaturas principales con signos opuestos), plana (las curvaturas máxima y mínima son ambas nulas), o esférica (las curvaturas máxima y mínima coinciden).

Luego, de acuerdo con la ecuación <sup>14</sup> (2.13), el tensor métrico que describe un Universo no estacionario, isótropo y homogéneo, es, en coordenadas polares  $(t, r, \theta, \psi)$ :

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1 - \epsilon r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$(g^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \epsilon r^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(a(t)r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

### 3.7 El papel de la Relatividad General en el Modelo Cosmológico

Para determinar la forma de  $H(t)$ , se necesita conocer la dinámica del factor de escala (ecuación (3.4)). La ecuación de Einstein proporciona esta información, dado que las componentes del tensor métrico son funciones que dependen solamente de  $a(t)$  y de las coordenadas que se decidan utilizar. Sustituyendo a (3.6) y (2.28) en (2.24):

$$G_{00} = 8\pi \quad T_{00} = 8\pi\rho \quad G_{11} = 8\pi \quad T_{11} = \frac{8\pi}{1 - \epsilon r^2} \quad G_{22} = \dots \quad (3.7)$$

Luego, se puede despejar a la densidad de energía  $\rho$ , y a la presión  $P$ , para obtener la forma en la que evolucionan en el 4-espacio. Las ecuaciones obtenidas [10], sólo dependen del factor de escala, que a su vez, sólo depende del tiempo. Además, Todas las ecuaciones con índices espaciales

<sup>14</sup>válida para cualquier sistema de coordenadas [11, Pág. 120].

son equivalentes. Los resultados son:

$$\rho(t) = \frac{3}{8\pi} \frac{(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2} \quad P(t) = -\frac{1}{8\pi} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2} \right) \quad (3.8)$$

de donde se puede despejar el factor de  $(\dot{a}^2 + \epsilon)a^{-2}$  en la ecuación de presión, y sustituir el resultado en la ecuación de densidad, para obtener, después de despejar a  $\ddot{a}a^{-1}$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = qH^2 = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \quad (3.9)$$

Donde  $H$  es el parámetro de Hubble (ecuación (3.4)), y  $q$  es el parámetro de desaceleración:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (3.10)$$

Y está relacionado con la velocidad del flujo de Hubble:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a\dot{a}^2} - \frac{1}{\dot{a}}\right) = -H^2(1 + q) \quad (3.11)$$

Además, despejando al parámetro de Hubble de la ecuación para la densidad:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\epsilon}{a^2} \quad (3.12)$$

A las ecuaciones (3.12) y (3.9), se les conoce como la ecuación de Friedmann, y la ecuación de aceleración, respectivamente. Estas ecuaciones relacionan al contenido del Universo, con la historia de su expansión. Para visualizar esta historia, es necesaria conocer a la(s) ecuación(es) de estado de las especies que conforman al contenido.

Einstein y De Sitter se percataron [10, pág. 162] de que (2.24) implica que en ningún momento se puede obtener un Universo estacionario. Esto era problemático, pues se suponía que, a escalas cosmológicas, debería poder definirse un sistema de referencia para el cual la materia del Universo se encuentra en reposo, incluso si Hubble ya había mostrado evidencia experimental que apunta a una expansión a escalas del sistema estelar, e hizo un intento por obtener soluciones estáticas introduciendo una constante  $\Lambda$ , llamada constante cosmológica, a sus ecuaciones [11, Pág. 174]. La acción correspondiente y sus ecuaciones de campo, son:

$$S^{(\Lambda)} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - \Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

cuyas ecuaciones de Friedmann y aceleración, son:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\epsilon}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda \quad qH^2 = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda \quad (3.14)$$

las cuales se obtienen de la forma de las ecuaciones de campo para una métrica de FLRW:

$$\rho(t) = \frac{1}{8\pi} \left( 3\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \Lambda \right) \qquad P(t) = -\frac{1}{8\pi} \left( 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda \right) \quad (3.15)$$

La constancia de  $\Lambda$  hace que la densidad de la especie asociada con ella sea fija, lo cual implica que su contenido incrementa a medida que el Universo se expande <sup>15</sup>. Además, su presión es negativa si  $\Lambda > 0$ . Se suele interpretar a la especie responsable de la Constante Cosmológica con la energía del vacío. Sin embargo, el cálculo de la energía asociada a los procesos de creación-aniquilación de pares de partículas que se esperan de la llamada polarización del vacío, no son suficientes para reproducir el valor de  $\Lambda$  necesario para que el Modelo Cosmológico concuerde con lo observado[2].

---

<sup>15</sup>Se dice que la energía oscura no se diluye, porque es una propiedad del espacio, y no de su contenido.

## Capítulo 4

# Teorías escalar-tensoriales como extensiones a Relatividad General

### 4.1 Principio de Mach

El principio de Mach es la interpretación que Einstein le dio a una idea de Ernst Mach. Volviendo a la situación descrita en la figura 2.2, Mach sugería que la fuerza centrífuga no era un efecto ficticio producido por sistemas de referencia que rotan, sino una verdadera fuerza, debida a la interacción del disco con el resto del Universo. Si un sólido gira lo suficientemente rápido como para cambiar de forma, es porque el resto del Universo habrá ejercido una fuerza mayor que las que le dan al disco su estructura.

La idea de que el contenido del Universo debe producir fuerzas sobre cualquier sistema embebido en él, sirvió a Einstein para darle su estructura al tensor de energía-momento, de modo que la métrica estuviera relacionada no solo con la masa de un sistema, sino también con su distribución en el espacio-tiempo <sup>1</sup>.

Las ecuaciones de Einstein indican que la distribución de materia determina la geometría del espacio, pero en este formalismo, la fuerza centrífuga sigue siendo un efecto ficticio, e imposible de reproducir en un sistema de referencia inercial.

### 4.2 Teoría de Jordan-Brans-Dicke

En los años cincuenta, Robert Dicke buscaba incorporar el principio de Mach a las ecuaciones de Einstein proponiendo una acción en la cual la Constante de Gravitación Universal fuera una de las variables dinámicas. Uno de los motivos para considerar una  $G$  variable, era la llamada hipótesis de los grandes números propuesta por Dirac[1].

La hipótesis de Dirac consistía en que la escala del Universo y las constantes que figuran en las interacciones están relacionadas entre sí, de modo que las leyes que gobiernan a las fuerzas fundamentales han cambiado a lo largo de la historia del Universo. En lo que respecta a la gravedad, sabiendo que la masa de los cuerpos produce campos gravitacionales, habría que relacionar a  $G$  con la masa del Universo. Una suposición previa a las ideas de Dirac, es la del modelo de Milne, que intentaba explicar la naturaleza de la gravedad sin recurrir a las características geométricas del Universo. En ese modelo, la masa del Universo se conserva, y  $G$  incrementa conforme el Universo

---

<sup>1</sup>[11, pág. 161]

evoluciona:

$$G \propto \left( \frac{1}{M_{\text{Universo}}} \right) \tau \quad (4.1)$$

La propuesta de Dirac, trataba de relacionar a otras constantes como la masa del electrón, y suponía que  $G$  ha disminuido como  $G \propto \tau^{-1}$ . Finalmente, la relación propuesta por Robert Dicke, es entre  $G$  y tanto el tamaño del Universo, como su contenido de Masa:

$$\frac{GM}{R} = c^2 = 1 \quad (4.2)$$

De modo que si el Universo es estático, las leyes que describen interacciones gravitacionales serán las mismas en todo momento. La razón para intuir que la variación de  $G$  depende tanto de masas como de distancias, viene de la interpretación que Dicke le daba al principio de Mach.

Con esta guía, Carl Brans propuso una modificación a la acción de Einstein-Hilbert, en la que la masa del resto del Universo actúa a través de la Constante de Gravitación Universal:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} G \mathcal{L}^{(\text{materia})} \quad (4.3)$$

Esta acción es tal que, considerando la condición de compatibilidad (ecuación (2.20)), se puede mostrar que  $\nabla g = 0 \implies \nabla(GT) = 0$ . Este resultado es intuitivamente correcto en cuanto que un espacio estático debe producirse no sólo porque se aplicó el principio de Hamilton a una región vacía del mismo, sino que también el resto del Universo debe estar vacío.

Sin embargo, esto produce una discrepancia entre el tensor de energía-momento de Hilbert, y el de Noether (Ver nota 20 del capítulo 2), a menos que  $G$  sea una constante. Se puede resolver esta discrepancia si se considera a  $G^{-1}$  como el campo. Visto así, la acción de  $\phi \equiv G^{-1}$  debería de aparecer en la nueva versión de lo que serían las ecuaciones de Einstein, por la razón dada en la sección 2.4.1, pero además de eso, y a diferencia de lo que sucede con los campos de materia, el campo escalar  $\phi$  forma parte de una acción donde la métrica está directamente acoplada al campo escalar.

Por último, la dinámica de  $\phi(x)$ , ahora que se lo distingue de la materia contenida en la región de integración, debe incluir un término cinético y un término de potencial:

$$S^{(\text{BD})} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R + \omega \frac{1}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + V(\phi) \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \quad (4.4)$$

A esta acción se le conoce como la acción de Brans-Dicke, donde la cantidad de  $\phi^{-1}$  que aparece en el término cinético, es necesaria para mantener consistencia en las unidades (recordando que  $G = \phi^{-1}$ ), y la cantidad  $\omega$  es una constante, cuya determinación experimental permitiría conocer qué tanto influye el resto del Universo sobre un sistema que interactúa con él. Como caso límite, la acción de Einstein-Hilbert se recupera cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , pues en ese caso, sólo es posible definir una acción cuando  $\nabla^\mu \phi \rightarrow 0$ , que a su vez implica  $\phi \approx \text{cte}$ .

La teoría de Brans-Dicke perdió relevancia a medida que experimentos con el espejo colocado en la Luna [1][7] determinó valores de  $\omega$  tan grandes que la acción dada en (4.4) apenas era distinta de la dada en (2.31), aunque, dado que los experimentos están restringidos al Sistema Solar, cabe la posibilidad de considerar teorías escalar-tensoriales para las cuales los efectos de  $\phi$  sólo son relevantes a escalas apropiadas, o en regiones con características distintas a las del Sistema Solar. Este es caso de las teorías gobernadas por la Lagrangiana de Hordenski, en la que se definen términos de auto-interacción del campo escalar, que hacen que sus efectos disminuyan en regiones del espacio donde la

densidad de materia es lo suficientemente grande [16]. Un caso más sencillo, se obtiene sustituyendo a los términos de auto-interacción por un potencial escalar, que es el que se considera a continuación.

### 4.3 Modificaciones escalares tensoriales

Con la finalidad de hallar nuevas teorías de gravedad donde las ecuaciones de campo son de segundo orden en el tensor métrico <sup>2</sup>, se buscó la forma más general de una acción donde los efectos gravitacionales se atribuyen a  $g$  y opcionalmente a un campo escalar  $\phi$ . El resultado es una densidad Lagrangiana con un término de acoplamiento no-mínimo más general que el de la acción dada en (4.4), así como términos que representan desviaciones producidas por ondas asociadas al campo escalar y otras contracciones del momento asociado a  $\phi$ . Algunos de los términos de esta Lagrangiana, son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(L)} = & G_1(\phi, \mathcal{X})R + G_2(\mathcal{X}) + G_3(\phi, \mathcal{X})\nabla_\mu\nabla^\mu\phi \\ & + G_4(\phi, \mathcal{X})\left(\left(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi\right)^2 - \left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)\left(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right)\right) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

La Lagrangiana de Brans-Dicke, corresponde al caso particular:

$$G_1 = \phi \qquad G_2 = \frac{\omega}{\phi}\mathcal{X} \quad (4.6)$$

Según teorema de Lovelock, no se pueden formar teorías de gravedad de segundo orden simplemente buscando más contracciones del tensor métrico con él mismo y sus primeras parciales. Más bien, es necesario introducir nuevos campos o dimensiones extra. Considerando esta guía, se puede partir de la acción de Einstein-Hilbert, e introducir un campo escalar que por su propia dinámica debe aparecer como un término cinético y un potencial escalar en la acción:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{\omega}{\phi}\mathcal{X} - V(\phi) \right) \quad (4.7)$$

Y que además presente un acoplamiento no-mínimo con la parte geométrica de la acción:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left( f(\phi)R + \mathcal{L}(\phi) + 16\pi\mathcal{L}^{(masa)} \right) \quad (4.8)$$

A esta familia de acciones, se les conoce como acciones *de tipo* Brans-Dicke (BD). Tal y como sucede con la acción (4.4), el campo escalar corresponde al contenido del Universo que interactúa con el sistema contenido en la región de integración. La naturaleza atractiva de las interacciones gravitacionales, sugiere que  $\phi > 0$ , y el Principio Cosmológico<sup>3</sup> requiere  $\phi(\vec{x}) = \text{cte.}$ . Esto es, el campo escalar debe ser espacialmente homogéneo a escalas cosmológicas. Esto no impide que  $\phi$  evolucione en el tiempo:

$$\nabla^\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi = \dot{\phi} \quad (4.9)$$

Donde se usó el hecho de que la derivada covariante de un escalar es igual a su parcial ordinaria, ya que el valor de un escalar no depende del sistema de coordenadas del punto de la variedad en

<sup>2</sup>Para evitar teorías que incluyen fuerzas ficticias en sus ecuaciones de movimiento.

<sup>3</sup>Sección 3.3

el cual se lo define, y por lo tanto no se lo puede descomponer como una suma de múltiplos de los vectores base del punto en cuestión. Dicho de otra forma,  $\phi(x)$ , a pesar de su dependencia con  $x$  por su naturaleza de campo, está exento de los efectos del transporte paralelo. Este no es el caso con el D'Alembertiano de  $\phi$ , pues la cantidad  $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi$  es la derivada (covariante) del vector  $\nabla^\mu \phi$ :

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma^\rho_{\mu\rho} \partial^\mu \phi = \partial_t \partial^t \phi(t) + \Gamma^\rho_{0\rho} \dot{\phi}(t) = \ddot{\phi} + \Gamma^\rho_{0\rho} \dot{\phi} \quad (4.10)$$

La familia de teorías de tipo BD resulta de interés para este trabajo, porque se puede elegir una forma apropiada para las funciones libres  $f(\phi)$ ,  $\omega$ , y  $V(\phi)$ , de tal forma que la acción presente simetrías más generales que las del grupo que gobierna a la Relatividad General, lo cual debería resultar en nuevos fenómenos, que localmente <sup>4</sup> se desvanezcan, reproduciendo así los resultados de la Relatividad General.

## 4.4 Ecuaciones de campo en teorías de tipo BD

### 4.4.1 Ecuaciones de campo como el extremo de una función

Se distinguen dos procedimientos para hallar las condiciones bajo las cuales la acción se extremiza. El primero es análogo a la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se suele encontrar como introducción al cálculo de variaciones. Consiste en representar una trayectoria arbitraria  $\phi(x)_{\text{arbitraria}} = \bar{\phi}(x)$ , en función de la trayectoria  $\phi(x)_{\text{canónica}} = \phi(x)$  que extremiza a la acción. Similar para la métrica:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x) = \phi(x) + \epsilon \eta(x) &\implies \partial_\alpha \bar{\phi}(x) = \partial_\alpha \phi(x) + \epsilon \left( \partial_\alpha \eta(x) \right) \\ \bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \epsilon \eta_{\mu\nu}(x) &\implies \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \epsilon \left( \partial_\alpha \eta_{\mu\nu}(x) \right) \\ &\implies \partial_\beta \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \epsilon \left( \partial_\beta \partial_\alpha \eta_{\mu\nu}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notando que para simplificar la notación, se hace uso de  $\eta$  para indicar tanto las desviaciones del campo escalar, como las desviaciones de la métrica, pero  $\eta(x)$  y  $\eta_{\mu\nu}(x)$  son campos completamente distintos. El coeficiente  $\epsilon$  indica qué tanto se desvía el campo arbitrario, y también se abusa de la notación usando un solo símbolo para desviaciones de  $\bar{\phi}(x)$  respecto de  $\phi(x)$ , como para desviaciones de  $\bar{g}(x)$  respecto de  $g(x)$ , para evitar el uso de  $\epsilon_\phi$  y  $\epsilon_{g_{\mu\nu}}$ . Esto no es un problema muy grande, porque no hay términos que tengan productos de ambos coeficientes, como se ve a continuación. La última consideración antes de buscar puntos extremos, es que la necesidad de indicar los estados inicial y final de un sistema *a priori* implica que no puede haber una distinción entre  $\bar{\phi}(x)$  y  $\phi(x)$  en esos puntos, sin importar que  $\epsilon$  sea distinta o no de cero. Esto significa que  $\eta(x_i) = 0 = \eta(x_f)$ . Similar para la métrica:  $\eta_{\mu\nu}(x_i) = 0 = \eta_{\mu\nu}(x_f)$ .

Considerando todo esto, se puede fijar a todos los campos, dejando como único parámetro de  $S$  a los coeficientes  $\epsilon$ . Esto permite tratar a  $S$  ya no como una funcional, sino como una función de  $\epsilon$  (o mejor dicho, una función de dos variables, si no se abusara de la notación). Con  $S$  como una función, se puede calcular su derivada total:

<sup>4</sup>Esto es, cuando los parámetros que distinguen al nuevo grupo de simetría tienen magnitudes apropiadas.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \int d^4x \mathcal{L}(\bar{g}, \bar{\phi}, \partial\bar{g}, \dots) = \int d^4x \left( \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\bar{g}, \bar{\phi}, \partial\bar{g}, \dots) \right) \\
 &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} \frac{d\bar{g}_{\mu\nu}}{d\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \frac{d}{d\epsilon} (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}) + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por última vez, se aclara que usando una distinción apropiada entre el coeficiente para la desviación de cada campo, se sigue obteniendo una única integral, donde los coeficientes actúan de la misma manera sin importar su tipo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \epsilon_\phi} + \frac{\partial S}{\partial \epsilon_g} &= \int d^4x \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon_\phi} \mathcal{L}(\bar{g}(\epsilon_g), \bar{\phi}(\epsilon_\phi), \partial\bar{g}(\epsilon_g), \dots) \right) + \int d^4x \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon_g} \mathcal{L}(\bar{g}(\epsilon_g), \bar{\phi}(\epsilon_\phi), \partial\bar{g}(\epsilon_g), \dots) \right) \\
 &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} \frac{d\bar{g}_{\mu\nu}}{d\epsilon_\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \frac{d}{d\epsilon_\phi} (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}) + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\bar{\phi})} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon_\phi} + \dots \right) \\
 &\quad + \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} \frac{d\bar{g}_{\mu\nu}}{d\epsilon_g} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \frac{d}{d\epsilon_g} (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}) + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\bar{\phi})} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon_g} + \dots \right) \\
 &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} \frac{d\bar{g}_{\mu\nu}}{d\epsilon_g} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\bar{\phi})} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon_\phi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Haciendo uso de (4.11), las derivadas respecto de  $\epsilon$  son:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{g}_{\mu\nu}}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} (g_{\mu\nu}(x) + \epsilon \eta_{\mu\nu}(x)) = \eta_{\mu\nu}(x) \\
 \frac{d}{d\epsilon} (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}) &= \frac{d}{d\epsilon} \left( \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) + \epsilon (\partial_\alpha \eta_{\mu\nu}(x)) \right) = \partial_\alpha \eta_{\mu\nu}(x) \\
 &\text{etc...}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Lo cual se puede reemplazar en (4.12):

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} \eta_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_\alpha (\eta_{\mu\nu}(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_\beta (\partial_\alpha \eta_{\mu\nu}(x)) + \dots \right) \tag{4.15}$$

Los sumandos que corresponden a productos de parciales de  $\mathcal{L}$  con un campo  $\eta(x)$  se pueden dejar como están. El resto se debe integrar por partes, tantas veces como sea necesario para deshacerse de las parciales de  $\eta(x)$ . Por ejemplo, el segundo sumando de (4.15) en coordenadas cartesianas, es el argumento de una integral anidada en otras tres, y para la cual sólo la coordenada respecto a la que se integra es variable:

$$\int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_\alpha (\eta_{\mu\nu}(x)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \tag{4.16}$$

Ahora se escribe la suma sobre  $\alpha$  de forma explícita, y se indica, usando  $\eta(z)$ , que en la integral

más profunda, las coordenadas que no son  $z$  están fijas.

$$\int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_t (\eta_{\mu\nu}(z)) dz + \dots + \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_z (\eta_{\mu\nu}(z)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \quad (4.17)$$

Se puede integrar por partes la que corresponde a  $\alpha = 3$  (parciales respecto de  $z$ ), y aplicar las condiciones iniciales, recordando que en los puntos que se definen *a priori*, los campos  $\eta$  no están presentes:

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_z (\eta_{\mu\nu}(z)) dz &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \eta_{\mu\nu} \Big|_{z_i}^{z_f} - \int_{z_i}^{z_f} \left( \eta_{\mu\nu}(z) \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \right) dz \\ &= - \int_{z_i}^{z_f} \left( \eta_{\mu\nu}(z) \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \right) dz \end{aligned} \quad (4.18)$$

De modo que (4.17) es:

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( - \int_{z_i}^{z_f} \left( \eta_{\mu\nu}(z) \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \right) dz + \sum_{k=0}^2 \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_k (\eta_{\mu\nu}(z)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \\ &= - \int d^4x \left( \eta_{\mu\nu}(x) \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \right) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_t (\eta_{\mu\nu}(z)) dz + \dots + \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_y \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_y (\eta_{\mu\nu}(z)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ahora se repite el paso anterior con la integral correspondiente a  $\alpha = 2$ . Para eso, se reordenan las integrales, justificando ese paso por la independencia de las coordenadas:

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_y \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_y (\eta_{\mu\nu}(z)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_y \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_y (\eta_{\mu\nu}(y)) dy \right) dz \right) dx \right) dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

Luego de integrar por partes, (4.19) es:

$$\begin{aligned} &- \int d^4x \left( \eta_{\mu\nu}(x) \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \bar{g}_{\mu\nu})} \right) - \int d^4x \left( \eta_{\mu\nu}(x) \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_y \bar{g}_{\mu\nu})} \right) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_f} \left( \int_{x_i}^{x_f} \left( \int_{y_i}^{y_f} \left( \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_t (\eta_{\mu\nu}(z)) dz + \int_{z_i}^{z_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_x (\eta_{\mu\nu}(z)) dz \right) dy \right) dx \right) dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

Repitiendo el paso anterior sobre las integrales restantes, se concluye que:

$$\int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \partial_\alpha (\eta_{\mu\nu}(x)) \right) = - \int d^4x \left( \eta_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \right) \quad (4.22)$$

Si se repite este proceso con todas las integrales de (4.15) que lo requieran, es posible despejar a  $\eta$  y a  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\phi})} \right) \eta(x) + \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} + \partial_\beta \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} \right) \eta_{\mu\nu}(x) \quad (4.23)$$

Dado que se ha fijado a todos los campos, siendo  $\epsilon$  la única cantidad de la que  $S$  depende, la función  $d_\epsilon S$  determina un extremo de la función<sup>5</sup>  $S$  cuando  $d_\epsilon S = 0$ , y como  $\eta$  es arbitraria (ya que lo que distingue una evolución canónica es el coeficiente  $\epsilon$  siendo cero o no), necesariamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\phi})} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} + \partial_\beta \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu})} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Donde se eliminaron las barras ahora que  $\bar{\phi} = \phi$  y  $\bar{g} = g$ . Antes de explicar el segundo método, las conclusiones más importantes del razonamiento anterior son:

- Es suficiente con que  $\mathcal{L}$  satisfaga (4.24) para que los campos evolucionen según el principio de Hamilton, haciendo extrema a la acción.
- La única condición que se impuso en los límites, es la existencia de condiciones iniciales antes de hallar un extremo de  $S$ , sin que se hayan dado condiciones más específicas, ni sobre los campos, ni sobre la región de integración. Esto es porque (4.18) y sus pasos equivalentes para los demás términos de  $d_\epsilon S$ , asume de forma implícita que en cualquier instante posterior a  $t_i$ , todas las coordenadas cambian. Es decir,  $z = z_i$  implica  $t = t_i$ ,  $x = x_i$ , y  $y = y_i$ .
- Este método no trata de hallar extremos de la funcional de acción, sino de hallar el extremo de una función que se convierte en  $S$  cuando se deja libres a los campos. Dicho de otra forma, el extremo de  $S(\epsilon)$  corresponde al extremo de  $S[\mathcal{L}]$ , por lo tanto, las condiciones que extremizan a la función, extremizan a la funcional.

Este razonamiento es tedioso para teorías de campos, y más fácil de aplicar para sistemas con grados de libertad discretos, pero es válido, y será útil contrastarlo con el método de variaciones.

#### 4.4.2 Ecuaciones de campo como el extremo de una funcional

El segundo método, consiste en notar que  $S$  estacionaria implica que transformaciones infinitesimales sobre los campos, no producen variaciones en la acción, sin importar que las variaciones en los campos sean debidas a una transformación de simetría o no. Esto significa que diferencias en los

<sup>5</sup>Dado que se ha fijado a los campos, y en su lugar se usa  $\epsilon$ , que no es una función, para distinguir trayectorias arbitrarias de la trayectoria canónica, se está estudiando a  $S$  como una función, y no como una funcional.

valores de  $\phi$  y  $g$  para un *instante* posterior al inicial, para los cuales el *diferencial* de  $S$  es cero; son producidas por campos que obedecen al principio de Hamilton.

Por ser  $S$  una funcional, el concepto de diferencial total  $\delta S$ , involucra una integral sobre variaciones:

$$\delta S = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \delta g_{\mu\nu}(x) + \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \right] = 0 \quad (\text{cuando la acción es extrema}) \quad (4.25)$$

Nótese que, aunque  $\mathcal{L}$  depende de primeras derivadas de  $\phi$  y  $g$ , y de segundas derivadas de  $g$ , en lo que respecta a la acción, cuando esta es extrema, los momentos y aceleraciones pasan a ser funciones de los campos, en vez de ser independientes. Notar también que la integral no es sobre el 3-espacio entre los tiempos inicial y final, sino sobre un 4-volumen cuya frontera se extiende hasta el infinito.

La independencia de los campos indica que cada sumando debe ser individualmente igual a cero para que el integrando sea siempre nulo, y como las variaciones son infinitésimos, es necesario que las derivadas funcionales sean exactamente iguales a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \delta g_{\mu\nu}(x) = 0 &\implies \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) = 0 &\implies \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Este es el método más común para hallar las ecuaciones de movimiento. La ecuación de campo para la métrica se obtiene igualando a cero la variación de  $S$  respecto de  $g_{\mu\nu}$ , y la del campo escalar igualando a cero la variación de  $S$  respecto de  $\phi$ . Esto se explora en la siguiente sección, considerando que es más sencillo calcular la variación de  $S$  respecto de la métrica *inversa*, y aprovechando que una se relaciona con la otra.

Antes de usar este segundo método para encontrar a las ecuaciones de campo, se comprueba que este procedimiento es equivalente al anterior, mostrando que (4.25) implica (4.24):

Denotando por  $y$  a los puntos que constituyen el recorrido de los campos entre los tiempos inicial y finales, se escribe en (4.25) a la acción como la integral de volumen de la densidad Lagrangiana, la cual depende explícitamente de campos y sus parciales:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \left( \int d^4y \mathcal{L}(\phi(y), \partial_\alpha \phi(y), g_{\mu\nu}(y), \dots) \right) \right] \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left( \int d^4y \mathcal{L}(\phi(y), \partial_\alpha \phi(y), g_{\mu\nu}(y), \dots) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

El operador de derivada funcional conmuta con el de integración sobre  $d^4y$ , de modo que actúa directamente sobre  $\mathcal{L}$ , y por regla de la cadena, se tiene:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \int d^4y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(y)} \frac{\delta \phi(y)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi(y))} \frac{\delta (\partial_\alpha \phi(y))}{\delta g_{\mu\nu}(x)} + \dots \right) \right] \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta \phi(x) \int d^4y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(y)} \frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi(x)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi(y))} \frac{\delta (\partial_\alpha \phi(y))}{\delta \phi(x)} + \dots \right) \right] \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta(y-x) \uparrow} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\partial_\alpha \frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi(x)} = \delta'(y-x) \uparrow}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Donde hay términos de se anulan por la independencia de los campos, y hay términos que son deltas de Dirac, o derivadas de deltas de Dirac, denotadas por  $\delta$ ,  $\delta'$ , y  $\delta''$ , que viene del término que no se muestra pero es:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \int d^4y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(y))} \frac{\delta (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(y))}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \right) \right] \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \int d^4y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(y))} \partial_\beta \partial_\alpha \frac{\delta g_{\mu\nu}(y)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \right) \right] \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \int d^4y \left( \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(y))} \delta''(y-x) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Se puede introducir a  $\delta \phi(x)$  y a  $\delta g_{\mu\nu}(x)$  a las integrales sobre  $d^4y$ , como constantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \delta g_{\mu\nu}(x) \int d^4y \left( \delta g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}(y)} \delta(y-x) + \dots + \delta \phi(x) \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi(y))} \delta'(y-x) \right) \right] = 0 \tag{4.30}$$

La  $n$ -ésima derivada de la delta de Dirac satisface la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4y f(x) \delta^n(y-x) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d^4y f^{(n)}(y) \delta(y-x) \tag{4.31}$$

Lo cual permite escribir a (4.30) como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \int d^4y \left( \delta g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (g_{\mu\nu}(y))} \delta(y-x) - \delta g_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha g_{\mu\nu}(y))} \right) \delta(y-x) + \dots \right) \right] = 0 \tag{4.32}$$

Luego, se factorizan las deltas de Dirac, y de nuevo, sea usa una propiedad de las distribuciones. Esta vez es  $\int_{-\infty}^{\infty} d^4x f(y) \delta(y-x) = f(x)$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ \int d^4y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (g_{\mu\nu}(y))} \delta g_{\mu\nu}(x) + \dots - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi(y))} \right) \delta \phi(x) \right) \delta(y-x) \right] \\
 = & \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (g_{\mu\nu}(x))} \delta g_{\mu\nu}(x) + \dots - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi(x))} \right) \delta \phi(x) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por último, se factorizan las variaciones y se separa otra vez a la integral por sus sumandos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(g_{\mu\nu}(x))} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu}(x))} + \partial_\beta \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x))} \right) \delta g_{\mu\nu}(x) \\ & + \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi(x))} \right) \right) \delta\phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si se considera que cada sumando debe ser igual a cero por la independencia de los campos, y que las variaciones de los campos no son iguales a cero, se obtiene (4.24) como se esperaba. Las conclusiones más importantes de este segundo procedimiento son:

- A diferencia de la sección anterior, esta vez se extremizó a la acción directamente, sin hacer uso de una función que después se puede convertir en una funcional.
- Por la conclusión anterior, no es posible integrar por partes a los términos que contienen derivadas de deltas de Dirac. Esto es porque no es posible identificar a  $\partial_\mu \delta(y-x) d^4y$  con un diferencial  $dv$ , porque el diferencial de una distribución no está definido. En su lugar,  $\partial_\mu \delta(y-x) d^4y$  es la distribución  $\delta'(y-x)$ , y satisface (4.31)
- En la sección anterior, se hace uso de las condiciones iniciales al momento de integrar por partes, y toman la forma  $\eta(x_i) = \eta(x_f) = 0$ . En esta sección, las condiciones iniciales también están presentes desde el inicio, pero de forma menos obvia, a través del uso de campos y sus derivadas como variables independientes de  $\mathcal{L}$ , incluso cuando se supone que la acción es extrema, y que por lo tanto, los momentos son funciones de sus campos asociados. Esta idea se explica más detenidamente en la sección B

### 4.4.3 Variación arbitraria sobre los campos

La acción se separa por sus lagrangianas geométrica y de masa. Luego, se considera una variación arbitraria, infinitesimal, sobre los campos, y que no afecta a las coordenadas:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{geom.})} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \quad (4.35)$$

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left( \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{L}^{(\text{geom.})} + \sqrt{-g} \delta(\mathcal{L}^{(\text{geom.})}) \right) + \int d^4x \left( \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{L}^{(\text{masa})} + \sqrt{-g} \delta(\mathcal{L}^{(\text{masa})}) \right) \quad (4.36)$$

Esta expresión será de uso cuando todos sus términos sean integrales de productos con variaciones de los campos, o términos de superficie <sup>6</sup>. Reuniendo integrales que contengan a  $\delta(\sqrt{-g})$  y haciendo uso de (A.2), se obtienen términos responsables de la evolución de la métrica, que surgen de la

<sup>6</sup>Como se explica más adelante, estos términos no contribuyen a la dinámica de los campos cuando se elijen las condiciones de frontera apropiadas.

inclusión de la cantidad  $\sqrt{-g}$  a la función Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -f(\phi)R + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \mathcal{X} + V(\phi) - \mathcal{L}^{(\text{masa})} \right) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \delta \mathcal{L}^{(\text{geom.})} + 16\pi \delta \mathcal{L}^{(\text{masa})} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Luego, la expansión de  $\delta \mathcal{L}^{(\text{masa})}$  por medio de (A.28) revela más términos de las ecuaciones de campo, tanto de la métrica como del campo escalar:

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -f(\phi)R + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \mathcal{X} + V(\phi) - 16\pi \mathcal{L}^{(\text{masa})} \right) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \delta \mathcal{L}^{(\text{masa})} \right) \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{df(\phi)}{d\phi} R - \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \mathcal{X} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \mathcal{X} - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta \phi \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( f(\phi) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - f(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\rho}) \right) \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} - 2 \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) \delta (\nabla_\nu \phi) \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Donde las últimas dos líneas corresponden a la expansión de  $\int d^4x \sqrt{-g} (f(\phi) \delta R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \delta \mathcal{X})$ , y su tratamiento según las secciones A.6.1 y A.7.1 da lugar a más términos de las ecuaciones de campo, y también contribuyen al término de superficie.

En particular, el resultado de integrar por partes y agrupar términos en  $-\int d^4x \sqrt{-g} (\frac{\omega(\phi)}{\phi} \delta \mathcal{X})$  se puede expresar como una contribución a cada ecuación de campo, más un término de superficie:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \mathcal{X} - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \mathcal{X} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi \right) \delta \phi \\ & - \frac{1}{16\pi} \int d^4x \nabla_\rho \left( \sqrt{-g} \frac{\omega(\phi)}{2\phi} (\nabla^\rho \phi) \delta \phi \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donde la contribución a la dinámica de  $g$  es debida al acoplamiento débil que surge de la necesidad del tensor métrico para definir al cuadrado del momento asociado al campo escalar, y la contribución a la dinámica de  $\phi$  incluye una segunda derivada del campo escalar, como es de esperarse para una Lagrangiana que depende a primer orden de  $\phi$ . Además, el término de superficie se puede expresar como la integral de una derivada covariante porque al tratarse de un campo escalar, se tiene  $\partial_\rho \phi = \nabla_\rho \phi$ . Es decir, el cambio en  $\phi(x)$  no está sujeto a efectos del transporte paralelo, aunque el cambio en el momento  $\partial \phi$  sí lo esté. La importancia de este detalle se hará notar cuando se aplique el Teorema de Noether.

Por otro lado, al integrar por partes y agrupar términos en  $\int d^4x \sqrt{-g} (f(\phi) \delta R)$ , no se obtienen contribuciones a la dinámica del campo escalar, pues estas ya se extrajeron de  $\int d^4x \sqrt{-g} (\delta f(\phi) R)$ , pero sí se encuentran términos de la ecuación de campo para la métrica, y el resto de los términos

de superficie:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho f(\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu f(\phi) \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \nabla_\rho \left( \sqrt{-g} \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + (\nabla_\sigma f(\phi)) \delta g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (\nabla^\rho f(\phi)) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\rho\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde resulta importante notar que no aparecen terceras derivadas de la métrica en las ecuaciones de campo, a pesar de que  $\mathcal{L}$  depende explícitamente de  $\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}$  por medio de las derivadas de la conexión que aparecen en el tensor de Ricci. La razón, desde el punto de vista de la física, de que una Lagrangiana que depende a segundo orden de la métrica no dé lugar a ecuaciones de campo de orden mayor, es la posibilidad de elegir a los símbolos de Christoffel como las variables dinámicas, de modo que la acción dependa sólo de campos y sus momentos asociados, y no de aceleraciones. Matemáticamente, la razón de esto es que las segundas derivadas de la métrica, son el argumento de una derivada covariante, y por lo tanto se las puede ignorar como términos de superficie, cuyas variaciones en la frontera son nulas, y por lo tanto no generan dinámica. Esto se menciona en la siguiente sección.

Por último, suponiendo que  $\mathcal{L}^{(\text{masa})}$  describe a un fluido en reposo, su variación sólo es debida al cambio sobre la geometría del espacio que resulte de la variación  $\delta g$ :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(\text{masa})} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(\text{masa})} &= \frac{\delta \mathcal{L}^{(\text{masa})}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}^{(\text{masa})}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})})}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Reemplazando a (4.39), (4.40) y (4.41) en las últimas dos integrales de (4.38), se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S &= \\ & \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\phi) R + f(\phi) R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{X} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu f - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - 8\pi T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{df(\phi)}{d\phi} R - \frac{1}{2\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \mathcal{X} + \frac{\omega(\phi)}{2\phi^2} \mathcal{X} + \frac{1}{2} \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\rho \nabla^\rho \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta \phi \\ & + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \nabla_\rho J^\rho \end{aligned} \quad (4.42)$$

Donde:

$$J^\rho = \sqrt{-g} \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + (\nabla_\sigma f(\phi)) \delta g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (\nabla^\rho f(\phi)) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\rho\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} - \frac{\omega(\phi)}{2\phi} (\nabla^\rho \phi) \delta \phi \right) \quad (4.43)$$

#### 4.4.4 Ecuaciones de movimiento

Según (4.26), los campos obedecen al principio de Hamilton cuando la ecuación (4.42) se iguala a cero, pero es de mayor interés obtener las ecuaciones de campo para  $g$  y  $\phi$  individualmente. Hay dos formas<sup>7</sup> de hacer esto. La primera, es calcular directamente a la variación de la acción respecto de la métrica inversa<sup>8</sup> e imponer su igualdad con cero, y hacer lo mismo con la variación de la acción respecto al campo escalar. Para hacer esto, (4.42) no es de utilidad, pero el procedimiento necesitaría repetir muchos cálculos de la sección anterior. El concepto es el siguiente:

La medida de integración hace que todos los términos estén acoplados a la métrica, y por lo tanto deberían aparecer en la ecuación para la misma. Por ejemplo, la variación del término de potencial escalar respecto de las componentes de la métrica inversa, es:

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} V(\phi)) = \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} V(\phi) + \sqrt{-g} \overset{=0}{\downarrow} \frac{\delta V(\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.44)$$

Y como  $\sqrt{-g}$  no depende de  $\phi$ , su diferencial total es, por comparación con (A.12):

$$\delta \sqrt{-g} = \left( \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \implies \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \quad (4.45)$$

De modo que:

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} V(\phi)) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.46)$$

Pero no es posible realizar estas comparaciones con el término de acoplamiento, pues la variación total de los símbolos de Christoffel que componen a  $R_{\mu\nu}$ , dada por (A.16), no le debe su carácter de infinitésimo a variaciones de la métrica o su inverso, sino a derivadas covariantes de estas variaciones. Esto no impide hallar las ecuaciones de movimiento por aplicación directa de (4.24). Sin embargo, con las condiciones de frontera apropiadas, esto no es necesario, como se explica a continuación.

La segunda forma de hallar las ecuaciones de campo, es calculando la variación total de la acción, como ya se hizo, e interpretando a (4.26) como cocientes de infinitésimos, lo cual sólo es aceptable si se limita su uso con reglas que produzcan resultados idénticos a los de un tratamiento apropiado<sup>9</sup>, y se define a un infinitésimo como una cantidad que se puede llevar a la forma  $A\delta g + B\delta\phi$ .<sup>10</sup> Por ejemplo, el cociente entre  $\delta\sqrt{-g}$  y  $\delta g^{\mu\nu}$ , con  $\delta\sqrt{-g}$  dado por (A.12), debe producir el lado derecho

<sup>7</sup>Tres, considerando que se puede calcular (4.24) a fuerza bruta. Esta clase de cuentas se revisará cuando se aplique el Teorema de Noether para la simetría de escala.

<sup>8</sup>En la sección anterior se menciona que es más fácil calcular esta variación, que la variación respecto a la métrica, pero que ambos resultados están directamente relacionados y por lo tanto su utilidad es la misma.

<sup>9</sup>Con tratamiento apropiado, se entiende el uso de la definición de derivada funcional como un proceso límite.

<sup>10</sup>En este sentido,  $\delta S$  como aparece en (4.42) no es un infinitésimo si el término de superficie no es igual a cero, a pesar de que  $\delta g^{\mu\nu}$  y  $\delta\phi$  lo sean. Dicho de otra forma,  $\delta S$  no satisface las reglas que debe de cumplir una variación para que su cociente con otras variaciones pueda reemplazar a la definición de derivada funcional.

de la implicación (4.45), lo cual se logra si  $\delta g^{\mu\nu}/\delta g^{\mu\nu} = 1$ . Al mismo tiempo, el hecho de que  $\sqrt{-g}$  no dependa de  $\phi$ , sugiere que el cociente  $\delta g^{\mu\nu}$  con  $\delta\phi$  sea igual a cero.

El hecho de que ya esté usándose el símbolo  $\frac{\delta}{\delta f}$  para denotar al operador de derivada funcional respecto a  $f$ , puede dar la impresión de que sólo se está repitiendo lo que ya se sabe sobre la independencia de los campos, porque la notación hace que reemplazar los cocientes en las reglas mencionadas, por derivadas funcionales, se vea exactamente igual aunque su significado sea distinto. Lo cual es absurdo, dado que no hay una regla que defina al cociente  $1/\delta g^{\mu\nu}$ , mientras que la *derivada funcional*  $\delta S/\delta g^{\mu\nu}$  está bien definida, e involucra un término como el siguiente:

$$\nabla_\rho J^\rho = \nabla_\rho \left( \sqrt{-g} \left( f(\phi) g^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + (\nabla_\sigma f(\phi)) \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} - \frac{1}{2} (\nabla^\rho f(\phi)) g_{\alpha\beta} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} + \dots \right) \right) = 0 \quad (4.47)$$

Dicho esto, si ahora se considera que el término de superficie es nulo, las ecuaciones de campo son, de acuerdo con (4.42) y (4.26):

$$\begin{aligned} f(\phi) G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{X} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu f - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - 8\pi T_{\mu\nu} &= 0 \\ \frac{df(\phi)}{d\phi} R - \frac{1}{2\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \mathcal{X} + \frac{\omega(\phi)}{2\phi^2} \mathcal{X} + \frac{1}{2} \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\rho \nabla^\rho \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  es el tensor de Einstein. La primera ecuación es análoga a la que se obtiene de la acción de Einstein-Hilbert, con la novedad de que contiene términos que involucran al campo escalar, mientras que la segunda es análoga a la ecuación de Klein-Gordon, pero incluye contracciones de la métrica con ella misma.

Es importante notar que estas ecuaciones se obtienen no sólo aplicando el principio de Hamilton, el cual requiere **condiciones iniciales**, sino también imponiendo que el término de superficie sea nulo. Esto requiere de **condiciones de frontera**, que normalmente se explican como “los campos no varían en la superficie” o “los campos tienden a cero en el infinito”. En el apéndice B se precisan estas ideas.

Antes de intentar sustituir a las ecuaciones (3.13) en el modelo de concordancia, se busca fijar a las funciones libres de la teoría,  $f(\phi)$ ,  $\omega(\phi)$ , y  $V(\phi)$  en base a criterios de simetría. Este es el propósito principal del siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Invarianza de escala

### 5.1 Transformaciones conformes

#### 5.1.1 Invarianza de ángulos

Dado un punto cualquiera en el 4-espacio, hay una infinidad de curvas paramétricas que pasan por él. La derivada del elemento de línea respecto del parámetro de la curva, evaluada en el punto de interés, es un vector unitario tangente a la curva en ese punto. Esto se ilustra en la figura 5.1.

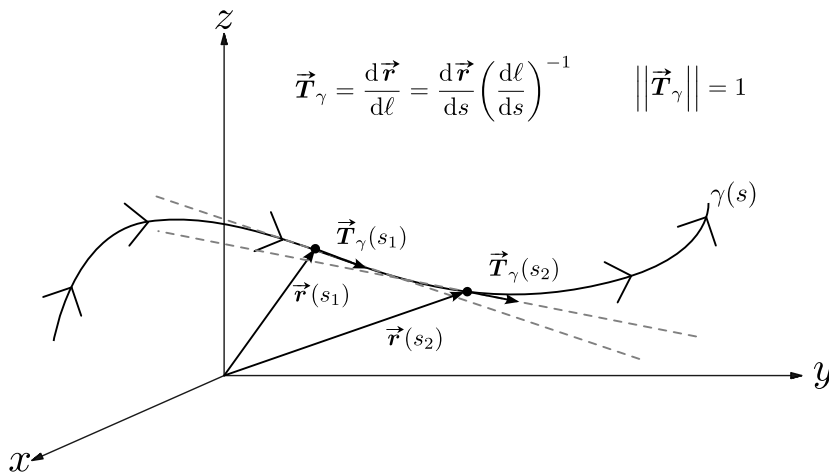


Figura 5.1: Esta definición de vector tangente  $\vec{T}_\gamma$  forma parte de las fórmulas de Frenet-Serret. La curva  $\gamma$  es parametrizada por  $s$ , y  $d\ell$  es el elemento de línea de  $\gamma$ .

Una transformación conforme es aquella que no produce ningún cambio sobre los ángulos en el espacio. Esto significa que el ángulo entre los vectores tangentes de dos curvas paramétricas que pasan por un mismo punto, debe preservarse al realizar la transformación, sin importar que dichas tangentes se vean rotadas, trasladadas o reescaladas. Las transformaciones conformes incluyen (pero no se limitan) a las rotaciones sobre cualquier eje, y las traslaciones en cualquier dirección.

Todas las transformaciones ortogonales son conformes <sup>1</sup>, pues por definición, preservan el valor de cualquier producto escalar, y los vectores tangentes son, nuevamente, por definición, unitarios. Luego, el ángulo entre las tangentes de curvas distintas, que se puede expresar como el coseno inverso del producto punto entre ellos, es invariante.

<sup>1</sup>Las reflexiones involucran cambios de quiralidad, y como consecuencia, la dirección de los ángulos puede cambiar, pero su magnitud se mantiene constante.

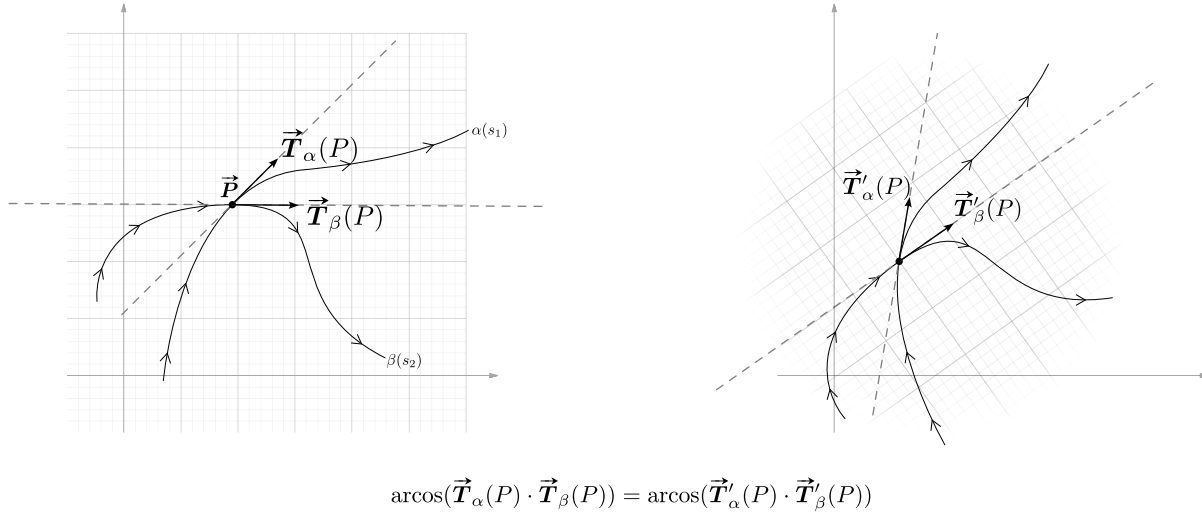


Figura 5.2: Una rotación positiva, sobre el eje que pasa por  $\vec{P}$ , compuesta con una traslación hacia el suroeste, preserva ángulos. En la figura se muestra a las tangentes de dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$ , en su punto de intersección  $P$ .

En su forma más general, las transformaciones conformes preservan ángulos de manera local. Esto significa que las tangentes en cada punto pueden ser rotadas, trasladadas y reescaladas en distinta medida, para distintas regiones del espacio. Los casos en los cuales estos cambios son del mismo tipo en todos los puntos, como es el caso de la figura 5.2, son transformaciones globales.

### 5.1.2 Invarianza de ángulos en el 4-espacio

El **Teorema de Liouville sobre las transformaciones conformes** garantiza que cualquier transformación definida sobre un espacio euclidiano, se puede expresar como una composición de isometrías (transformaciones que preservan la distancia entre puntos) e inversiones. Esto limita a las transformaciones conformes en espacios de Minkowski <sup>2</sup> a:

- Traslaciones
- Rotaciones (en el 3-espacio)
- Transformaciones de Lorentz (rotaciones en el 4-espacio)
- Reflexiones
- Inversiones

El grupo de Poincaré comprende a todas las isometrías del espacio de Minkowski. Como se explica en la sección 2.4, la acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo este grupo, y por lo tanto, cualquier extensión a RG debería serlo también.

Asumiendo que la acción para teorías de tipo BD ya es invariante de Poincaré, entonces las traslaciones y las transformaciones ortogonales (reflexiones, y rotaciones, incluyendo transformaciones de Lorentz) no son novedad. Sin embargo, si existen simetrías relacionadas con inversiones, que se puedan expresar por medio de transformaciones globales, infinitesimales; entonces deberían surgir nuevas leyes de conservación.

<sup>2</sup>Que son espacios euclidianos con una dimensión temporal

### 5.1.3 Invarianza de ángulos como una simetría física

La simetría de Lorentz relaja el requisito impuesto por las transformaciones de Galileo, de que el concepto de distancia (en el 3-espacio) sea invariante entre observadores inerciales caracterizados por una velocidad relativa entre ellos. En su lugar, se busca que el intervalo de distancia en el 4-espacio sea la nueva cantidad invariante entre sistemas inerciales (ver figura 2.2), perdiéndose así el carácter absoluto del tiempo que imponía Galileo, y ganándose generalidad en cuanto a que el  $P(1, 3)$  incluye a las rotaciones, traslaciones, y velocidades relativas consideradas por Galileo. Además, la conservación del intervalo en el 3-espacio pasa a ser un caso límite, obtenido cuando la velocidad relativa entre sistemas inerciales es lo suficientemente pequeña.

La simetría conforme es un caso similar en cuanto a que nuevamente relaja el requisito de la preservación de la 4-distancia, en favor de preservar solamente los ángulos. Como consecuencia, se pierde carácter absoluto de la conexión causal entre eventos <sup>3</sup>, y se gana generalidad en cuanto a que  $C(1, 3)$  incluye a todas las transformaciones del grupo de Poincare. Además, la conservación de la causalidad entre sistemas de referencia conformes pasa a ser un caso límite, obtenido cuando la magnitud de la inversión especial es lo suficientemente pequeña.

## 5.2 Inversiones puras

Una **inversión pura** es la transformación sobre el espacio definida como sigue:

$$x \rightarrow x' = \frac{x}{\|x\|^2} \qquad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x_\alpha x^\alpha} \qquad (5.1)$$

A simple vista o por cálculo directo, se puede notar que la doble aplicación de una inversión pura:  $x \rightarrow x' \rightarrow x''$ , es tal que  $x'' = x$ . Luego, el operador de inversión (al que por ahora no se le va a asignar un símbolo), junto con el operador identidad  $\mathbb{1}$ , forman un grupo de solo dos elementos, y por lo tanto discreto. En efecto, (5.1) no se puede estudiar como una aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales porque el límite  $x \rightarrow 0$  no existe, de modo que el Teorema de Noether (que se revisa en el capítulo 6), el cual hace uso de transformaciones infinitesimales, no se aplica a invarianza bajo inversiones puras.

Aún así, las inversiones puras son de interés porque físicamente mapean a todos los puntos en el infinito, hacia el origen<sup>4</sup>, que es un único punto  $x' = 0$ . Mientras que el punto que originalmente correspondía a  $x = 0$  se mapea al infinito. Esto permite estudiar fronteras y cantidades conservadas en el infinito por métodos que pueden dar resultados más precisos que si se intentara avanzar en ideas como las de B.4 [6] [3] [18].

## 5.3 Inversiones especiales

### 5.3.1 Definición

Habiendo descartado a las inversiones puras como generadoras de corrientes conservadas, queda preguntarse si existen composiciones de ellas con isometrías, que sí formen un grupo continuo.

<sup>3</sup>Ver apéndice C

<sup>4</sup>Resulta incómodo hablar de interpretaciones físicas del infinito, y es aún más problemático asociar a un límite ( $\infty$ ) con una cantidad (0). Parte del propósito de este capítulo y su apéndice relacionado B es exponer las posibles deficiencias o razones para descartar el uso de inversiones y transformaciones que dependan de ellas, como herramientas para estudiar sistemas físicos, y argumentos en favor de las mismas.

Composiciones de inversiones  $I$  con otras transformaciones de  $P(1,3)$  no forman grupos, pues no hay forma de simplificarlas luego de realizar composiciones de las composiciones originales. Por ejemplo, la composición de composiciones de inversiones con traslaciones  $IT_i$  es  $IT_1IT_2$ , y no hay más que decir al respecto sin entrar en detalles sobre la forma de cada matriz de traslación. Este no es el caso si se considera una segunda inversión, pues como se dijo en la sección anterior, una doble inversión se reduce a una matriz identidad. Composiciones de  $IT_iI$  se simplifican como sigue:

$$(IT_1I)(IT_2I) = IT_1 \overset{\mathbb{1}}{\downarrow} (II) T_2I = I \overset{T_3}{\downarrow} (T_1T_2) I = IT_3I \quad (5.2)$$

De modo que productos de matrices  $IT_iI$  se pueden simplificar a matrices que son también de la forma  $IT_iI$ . Esta cerradura, junto con el hecho <sup>5</sup> de que  $\mathbb{1}$  también es de la forma  $IT_iI$ , y que a cada transformación  $IT_iI$  le corresponde <sup>6</sup> una transformación  $IT_{-i}I$  tal que  $(IT_iI)(IT_{-i}I) = \mathbb{1}$ , llevan a la conclusión de que las transformaciones de la forma  $IT_iI$ , forman un grupo. A sus elementos se les conoce como **inversiones especiales**. Hace falta comprobar que el grupo no sea discreto.

Una inversión especial (IE) se caracteriza por la magnitud del vector de traslación que está entre las inversiones. Si se lo denota por  $b$ , entonces, de acuerdo con (5.1), la IE dada por  $b$  se compone como sigue:

$$x \rightarrow x' = \frac{x}{\|x\|^2} \rightarrow x'' = x' - b \rightarrow x'' = \frac{x''}{\|x''\|^2} \quad (5.3)$$

En notación de componentes, la transformación en términos del punto original es:

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow (x''')^\mu &= \frac{x'^\mu - b^\mu}{(x' - b)_\alpha (x' + b)^\alpha} = \frac{\frac{x^\mu}{x_\nu x^\nu} - b^\mu}{\left(\frac{x_\alpha}{x_\rho x^\rho} - b_\alpha\right) \left(\frac{x^\alpha}{x_\sigma x^\sigma} - b^\alpha\right)} \\ &= \frac{\frac{x^\mu - b^\mu \|x\|^2}{\|x\|^2}}{\frac{\|x\|^2}{x_\rho x^\rho x_\sigma x^\sigma} - 2\frac{x_\alpha b^\alpha}{\|x\|^2} + b_\alpha b^\alpha} = \frac{x^\mu - b^\mu \|x\|^2}{1 - 2x_\alpha b^\alpha + \|b\|^2 \|x\|^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Renombrando  $x''' \equiv x'$  se obtiene::

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu \|x\|^2}{1 - 2x_\alpha b^\alpha + \|b\|^2 \|x\|^2} \quad (5.5)$$

Esta vez, (5.5) no se indefine cuando  $x = 0$ , por lo que el grupo de las IE's es continuo <sup>7</sup>: Una IE se puede formar por medio de composiciones de IE's caracterizadas por vectores de desplazamiento  $b$  infinitesimales.

Se puede repetir este procedimiento con los grupos que se pueden formar de composiciones de inversiones con rotaciones ( $IR_iI$ ) e inversiones con boosts ( $I\Lambda_iI$ ) para obtener expresiones que divergen cuando  $x = 0$ . Otros grupos continuos se pueden formar de casos más complicados como

<sup>5</sup>Este caso corresponde a  $T_i$  una traslación por un vector nulo

<sup>6</sup>Este caso corresponde a  $T_{-i} = T_i$ . Una traslación es por un vector de la misma magnitud que la otra, pero sentido opuesto

<sup>7</sup>No se debe pensar en la IE como una aplicación sucesiva de de tres transformaciones independientes. Si así fuera, la transformación resultante no sería continua, porque las inversiones simples que la forman tampoco lo son. La composición de las tres matrices  $ITI$  en ese orden, forman una transformación que se aplica sobre los puntos del 4-espacio de un solo tajo.

$(IR_i T_i I)$ , pero estos complicarían el análisis sin aportar más información, pues las inversiones son la única transformación que no es isométrica en el 4-espacio, y las traslaciones sólo se introducen para obtener continuidad.

### 5.3.2 Transformación del elemento de línea bajo inversiones especiales

Primero se calcula el caso finito. Bajo IE's, la norma del punto  $x$  se transforma como:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \rightarrow \|x'\|^2 = x'^\mu x'_\mu &= \frac{(x^\mu - b^\mu x^\alpha x_\alpha)(x_\mu - b_\mu x^\beta x_\beta)}{(1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2)^2} = \frac{\|x\|^2 + \overbrace{2\|x\|^2 b^\mu x_\mu}^{\text{Considerando que } b_\mu x^\mu = b^\mu x_\mu} + \|b\|^2 \|x\|^2}{(1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2)^2} \\ &= \|x\|^2 \frac{(1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2)^2}{(1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2)^2} = \frac{\|x\|^2}{1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

En principio, el caso infinitesimal se puede obtener usando (5.6) como sigue:

$$(d^2x)' = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\|x\|^2}{1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2} \right) dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\|x\|^2}{1 - 2b_\rho x^\rho + \|b\|^2 \|x\|^2} \right) dx^\nu g_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

Sin embargo, si lo que se busca es inferir una Ley de transformación para los campos, que sea debida por completo al cambio en la variedad (esto es, debida sólo a una transformación en los puntos), no deben aparecer los campos en dicha Ley. En esta última expresión se observa a  $g_{\mu\nu}$ , y al desarrollar las parciales se encontrarán parciales de  $g$ . Por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \|x\|^2 = \partial_\mu (g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) = x^\alpha x^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta} + [\mathbf{1}]^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} x^\beta + [\mathbf{1}]^\beta_\mu g_{\alpha\beta} x^\alpha \quad (5.8)$$

Entonces, el elemento de línea se calcula como el límite  $y \rightarrow x$  para la longitud del intervalo  $\|y - x\|$ :

$$\begin{aligned} (\|y - x\|^2)' &= \frac{\|y - x\|^2}{1 - 2b_\rho (y - x)^\rho + \|b\|^2 \|y - x\|^2} = \frac{\|y - x\|^2}{1 - 2b_\rho (y^\rho - x^\rho) + b_\alpha b^\alpha (y_\beta - x_\beta)(y^\beta - x^\beta)} \\ &= \frac{\|y - x\|^2}{1 - 2b_\rho y^\rho + 2b_\rho x^\rho + \dots - b_\alpha b^\alpha y_\beta y^\beta b_\lambda x^\lambda + b_\alpha b^\alpha y_\beta y^\beta b_\sigma b^\sigma y_\sigma y^\lambda + \dots} \end{aligned} \quad (5.9)$$

En el límite  $y \rightarrow x$ , términos de orden 3 o más en las coordenadas tienden a cero:

$$\begin{aligned} b_\alpha b^\alpha y_\beta y^\beta b_\lambda x^\lambda &\rightarrow 0 && \text{(orden 3)} \\ b_\alpha b^\alpha y_\beta y^\beta b_\sigma b^\sigma y_\sigma y^\lambda &\rightarrow 0 && \text{(orden 4)} \\ \text{etc...} &&& \end{aligned} \quad (5.10)$$

Con lo que el denominador de (5.9) pasa a ser:

$$1 + 2b^\alpha y_\alpha + b^\alpha b_\alpha y^\beta x_\beta - 2b^\alpha x_\alpha + b^\alpha b_\alpha x^\beta x_\beta \quad (5.11)$$

Obteniéndose así:

$$(\|y-x\|^2)' = \frac{\|y-x\|^2}{1 + \underbrace{2b^\alpha y_\alpha}_{\rightarrow 2b^\alpha x_\alpha} + \underbrace{b^\alpha b_\alpha y^\beta x_\beta}_{\rightarrow 2b^\alpha b_\alpha x^\beta x_\beta} - 2b^\alpha x_\alpha + b^\alpha b_\alpha x^\beta x_\beta + O(3)}$$

Y en conclusión:

$$(d^2x)' = \frac{d^2x}{1 + 2\|b\|^2\|x\|^2} \tag{5.12}$$

### 5.3.3 Discontinuidades en el marco conforme

Observando (5.6) se puede notar que, aunque las IE's formen un grupo continuo <sup>8</sup>, siguen presentando discontinuidades cuando el denominador de (5.6) es cero. En esos casos, los puntos relevantes se encontrarán en el infinito al aplicar la transformación, y los puntos en el pasado absoluto y el futuro absoluto tomarán el lugar de las discontinuidades. Sin embargo, los elementos de línea siempre están definidos, a pesar de que los intervalos finitos no sean continuos. Esto es porque el denominador en (5.12) es positivo, instante a instante, para puntos anteriores a las discontinuidades, y estas se pueden llevar tan lejos como sea necesario. En C se buscan y grafican estas discontinuidades, y en lo siguiente, se tomará a 5.12 como punto de partida para encontrar nuevas simetrías en teorías de la familia descrita por (4.8)

## 5.4 Simetría Conforme en teorías de tipo BD

La razón de empezar a buscar leyes de transformación para los campos partiendo de (5.12), sin estudiar el efecto de (5.5) sobre regiones de escalas cosmológicas <sup>9</sup>, es que para ello, sería necesario hacer uso de geodésicas, las cuales están determinadas por el tensor métrico a través de las conexiones. Esto lleva al mismo tipo de problema que se mostró con la ecuación (5.7).

Una alternativa sería el uso de tétradas para permitir un tratamiento de la variedad que no dependa de transporte paralelo, y aplicar IE's a estos objetos. Sin embargo, es suficiente con saber que (5.12) garantiza que la conexión causal entre dos eventos infinitesimalmente cercanos se mantiene luego de una transformación conforme, y que cualquier punto en el espacio de Minkowski asociado a un punto de la variedad, se puede relacionar con otro punto en la variedad, localizado en la vecindad del primero, como se ilustra en la figura 2.2.1 Luego, una transformación sobre la variedad que satisfaga (5.12), necesariamente conserva el orden de los folios en los que se defina a la funcional de acción.

Por lo anterior, de ahora en adelante se considera a (5.12) como punto de partida para hallar una Ley de transformación para los campos y las coordenadas de la variedad. Si la métrica y las posiciones se transforman de tal forma que:

$$(d^2x)' = g'_{\mu\nu}(dx^\mu)'(dx^\nu)' = \frac{d^2x}{\sigma(x)}; \quad \sigma(x) > 0 \tag{5.13}$$

Entonces los ángulos en las bases de coordenadas de cada punto, son invariantes, y la transformación tiene una corriente de Noether asociada cuando se fija el valor de  $\sigma(x)$ .

<sup>8</sup>Porque se puede escribir una IE infinitesimalmente cercana a  $\mathbb{1}$  tomando el límite  $b^\mu \rightarrow 0$  en (5.5)

<sup>9</sup>Regiones de una variedad caracterizada por una métrica de FLRW

La escala  $\sigma(x)$  es una función que abstrae las características esenciales del denominador de (5.12). Esto es,  $\sigma(x)$  es real, y positivo hasta antes de las discontinuidades que se mencionan en el apéndice C. Estas condiciones restringen al parámetro  $b$  a valores lo suficientemente grandes como para que las divergencias se encuentren fuera del volumen ilustrado en la figura B.1, pero, como estos puntos corresponden a **tiempos** determinados, y como los extremos de la integral de acción se consideran arbitrarios, siempre es posible acercarse a los planos  $t_i$  y  $t_f$  para sacar a las divergencias, sin perder generalidad. Dicho esto, es más conveniente reescribir por última vez al punto de partida, como el elemento de línea reescalado por una exponencial, cuyo parámetro está por determinarse. Luego, la versión global de la IE corresponde a un valor fijo para el exponente de  $e$ , y se le conoce como un reescalamiento:

$$(d^2x)' = e^{2\lambda} d^2x \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.14)$$

### 5.4.1 Reescalamientos de punto

El primer paso ahora que el punto de partida es la Ley de transformación para el elemento de línea (5.14), es inferir una Ley de transformación para vectores y 1-formas:

$$\begin{aligned} (dx^\mu)' &= e^\lambda dx^\mu \implies (x')^\mu = e^\lambda x^\mu \\ (dx_\mu)' &= e^\lambda dx_\mu \implies (x')_\mu = e^\lambda x_\mu \end{aligned} \quad (5.15)$$

Esta transformación induce un cambio en los operadores de derivada parcial, pues la independencia de coordenadas  $\partial_\mu x^\nu = [\mathbf{1}]^\nu_\mu$  en un sistema reescalado por (5.15) es:

$$[\mathbf{1}']^\nu_\mu = (\partial_\mu x^\nu)' = \partial'_\mu (e^\lambda x^\nu) = e^\lambda \partial'_\mu x^\nu = [\mathbf{1}]^\nu_\mu \implies \partial'_\mu = e^{-\lambda} \partial_\mu \quad (5.16)$$

El mismo procedimiento, aplicado a 1-formas, da la Ley de transformación para el operador  $\partial^\mu$ . Obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (5.17)$$

Para la Ley de transformación para las componentes del tensor métrico, se expande (5.14), y se sustituye el lado izquierdo de las implicaciones de (5.15):

$$\begin{aligned} (d^2x)' &= e^{2\lambda} d^2x = e^{2\lambda} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \\ \implies g'_{\mu\nu} (e^\lambda dx^\mu) (e^\lambda dx^\nu) &= e^{2\lambda} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \implies g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Por lo tanto, los reescalamientos aplicados a las coordenadas, dejan invariante a  $g$ ,  $(g^{-1})$ , y  $\sqrt{-g}$ . La Ley de transformación para las conexiones, se obtiene reemplazando (5.18) y (5.17) en (2.17), y con ella, se obtiene también la transformación de  $R$ :

$$(\Gamma^\rho_{\mu\nu})' = e^{-\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu} \quad R'_{\mu\nu} = e^{-2\lambda} R_{\mu\nu} \implies R' = e^{-2\lambda} R \quad (5.19)$$

Para determinar la Ley de transformación de  $\phi$ , se impone invarianza sobre lo que sería el término

cinético de un campo escalar:

$$\begin{aligned} \left( \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) \right)' &= \int (e^{4\lambda} d^4x) \sqrt{-g} (e^{-\lambda} \partial^\mu \phi') (e^{-\lambda} \partial_\mu \phi') \\ \Rightarrow e^{2\lambda} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^\mu \phi') (\partial_\mu \phi') &= \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) \Rightarrow \phi' = e^{-\lambda} \phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aplicando todas estas reglas a (4.8), se obtiene:

$$S' = \frac{1}{16\pi} \int (e^{4\lambda} d^4x) \sqrt{-g} \left( f'(\phi) (e^{-2\lambda} R) - \frac{\omega'(\phi)}{e^{-\lambda} \phi} (e^{-4\lambda} \mathcal{X}) - V'(\phi) \right) + \int (e^{4\lambda} d^4x) \sqrt{-g} \mathcal{L}'^{(\text{masa})} \quad (5.21)$$

De donde es claro que, para que la acción sea invariante bajo reescalamientos, es necesario que:

$$f(\phi) \propto \phi^2 \quad \omega(\phi) \propto \phi \quad V(\phi) \propto \phi^4 \quad \mathcal{L}'^{(\text{masa})} = e^{-4\lambda} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \quad (5.22)$$

Es importante notar que, aunque el Teorema de Liouville se refiere a espacios euclidianos, es válido asumir que si la variedad, o la métrica que la caracteriza, conducen a (5.14), entonces sus bases de coordenadas satisfacen la misma condición, y por lo tanto en ellas, la apertura de los conos de luz es invariante, que es lo que se busca conservar.

### 5.4.2 Reescalamientos pasivos

Como se explica más adelante, en la sección 6.1, si el tensor métrico es una variable dinámica, entonces cualquier transformación sobre el 4-espacio, se puede expresar como una transformación aplicada directamente a los campos, y que deja intactos a los puntos. En el caso de los reescalamientos, si se establece la Ley de transformación  $(x^\mu)' = x^\mu \Rightarrow (dx^\mu)' = dx^\mu$ , entonces el factor de escala en la ecuación (5.14) debe venir de la Ley de transformación para  $g_{\mu\nu}$ :

$$(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)' = g'_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\lambda} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow g'_{\mu\nu} = e^{2\lambda} g_{\mu\nu} \quad (5.23)$$

Las funciones  $(g^{\mu\nu})'$  deben satisfacer la relación  $(g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu})' = ([\mathbf{1}]_\mu^\nu)' = [\mathbf{1}]_\mu^\nu$ , por lo que la Ley de transformación para las componentes de  $(g^{-1})$ , es:

$$(g^{\mu\nu})' = e^{-2\lambda} g^{\mu\nu} \quad (5.24)$$

Para obtener  $(\sqrt{-g})'$ , se escribe el determinante de forma explícita, donde cada término  $g_{\mu\nu}$  contribuye un factor de  $e^{2\lambda}$  según (5.23):

$$(\sqrt{-g})' = \left( -\frac{1}{4!} \epsilon^{\alpha\beta\rho\eta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\kappa} g'_{\alpha\mu} g'_{\beta\nu} g'_{\rho\sigma} g'_{\eta\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} = (e^{8\lambda})^{\frac{1}{2}} \sqrt{-g} = e^{4\lambda} \sqrt{-g} \quad (5.25)$$

Dado que los puntos  $x^\mu$  son invariantes bajo reescalamientos pasivos, los operadores de integra-

ción<sup>10</sup> y de derivada parcial, permanecen sin cambio:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \quad \left( \int d^4x \right)' = \int d^4x \quad (5.26)$$

Por lo tanto, los símbolos de Christoffel son invariantes, a diferencia de lo que ocurre con los reescalamientos de punto:

$$(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})' = \frac{1}{2}(e^{-2\lambda}g^{\rho\sigma})\left(\partial_{\mu}(e^{2\lambda}g_{\sigma\nu}) + \partial_{\nu}(e^{2\lambda}g_{\mu\sigma}) - \partial_{\sigma}(e^{2\lambda}g_{\mu\nu})\right) = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \quad (5.27)$$

Esto es consistente con el hecho de que las conexiones son una medida de la diferencia entre bases de coordenadas de dos puntos infinitesimalmente cercanos: Si la variedad se deja intacta<sup>11</sup>, sus bases de coordenadas también lo estarán. Con esto, debería ser claro que el paso de una transformación de punto, a su versión pasiva, equivale a sustituir manipulaciones sobre la geometría del espacio, con redefiniciones al nivel del observador. Esta idea es útil al momento de interpretar las diferencias entre los marcos de Jordan y de Einstein, y cuando se cuando se comparen las ecuaciones de Friedmann y de aceleración para teorías escalar tensoriales, con las que se obtienen usando Relatividad General.

El tensor de Ricci también será invariante, pero el escalar de Ricci tendrá la misma Ley de transformación que se muestra en (5.19):

$$(R_{\mu\nu})' = R_{\mu\nu} \quad R' = (g^{\mu\nu})' R_{\mu\nu} = e^{-2\lambda}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = e^{-2\lambda}R \quad (5.28)$$

Similarmente, si se busca invarianza sobre términos cinéticos, se sigue cumpliendo lo obtenido en (5.20), pues los factores que antes provenían de operadores diferenciales, ahora se deben al acoplamiento mínimo requerido para definir el producto  $(\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi)$ , y a la transformación sobre el determinante del Jacobiano:

$$\begin{aligned} \left( \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^{\mu}\phi)(\partial_{\mu}\phi) \right)' &= \int d^4x (e^{4\lambda} \sqrt{-g})(e^{-2\lambda}g^{\mu\nu})(\partial_{\mu}\phi')(\partial_{\nu}\phi') \\ \implies e^{2\lambda} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^{\mu}\phi')(\partial_{\mu}\phi') &= \int d^4x \sqrt{-g} (\partial^{\mu}\phi)(\partial_{\mu}\phi) \implies \phi' = e^{-\lambda}\phi \end{aligned} \quad (5.29)$$

Y por lo tanto, para que (4.8) sea invariante, es necesario restringir a las funciones libres  $f(\phi)$ ,  $\omega(\phi)$ , y  $V(\phi)$  de la familia, exactamente como en (5.22), lo cual es de esperarse, por tratarse de transformaciones físicamente equivalentes. En este caso, los factores que antes venían de la integral de volumen, ahora provienen de  $\sqrt{-g}$ , y los que venían de las derivadas parciales, ahora vienen del tensor métrico. La razón de que no hay ningún cambio en las necesidades para los acoplamientos, es que  $\sqrt{-g}$  actúa como una medida de integración, y  $g$  es parte de la definición de  $\partial^{\mu}$ .

En conclusión, es posible restringir a la familia de teorías de tipo BD a aquellas que presentan simetría de escala, eligiendo correctamente a las funciones de acoplamiento no mínimo  $f(\phi)$ , a la constante de acoplamiento  $\omega(\phi)$  que junto con  $\phi^{-1}$  juega el papel de la masa del campo escalar, y al potencial  $V(\phi)$ . Las transformaciones de escala forman un sub-grupo de las transformaciones

<sup>10</sup>Sin el determinante del jacobiano  $\sqrt{-g}$

<sup>11</sup>Transformar al tensor métrico, sin transformar a la variedad, equivale a cambiar la forma de medir distancias en ella. De ahí que se llame a esta transformación “pasiva”, a pesar de que la misma actúe directamente sobre los campos, comparada con las transformaciones de punto, que sólo transforman a los campos de forma indirecta.

conformes especiales, y por ser globales y continuas, deben conducir a una cantidad conservada para teorías que sean invariantes bajo las mismas. Eso se calcula en la próxima sección, con las funciones libres reemplazadas por  $\phi^2$ ,  $\phi$ , y  $\phi^4$  respectivamente.

El Lagrangiano de masa depende explícitamente del tensor métrico inverso y del tensor de energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})}) \implies \mathcal{L}^{(\text{masa})} = \left( T_{\mu\nu} + 2 \frac{\delta \mathcal{L}^{(\text{masa})}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) g^{\mu\nu} \quad (5.30)$$

Su Ley de transformación,  $\mathcal{L}'^{(\text{masa})} = e^{-4\lambda} \mathcal{L}^{(\text{masa})}$ , se debe a las contribuciones de  $(g^{-1})$  en el caso de los reescalamientos pasivos, y a las contribuciones de  $T_{\mu\nu}$  para reescalamientos activos. Particularmente al hecho de que sus entradas son variaciones de 4-momentos respecto a hiper-superficies, donde los 4-momentos son operadores de derivada actuando sobre los campos de materia, que se transforman de acuerdo con (5.17).

### 5.4.3 Teorías de tipo BD invariantes de escala en el marco de Einstein

Aunque las funciones libres sean elegidas para que la teoría sea invariante de escala, en general, las inversiones especiales locales, que se obtienen transformando a la métrica o a los puntos de la variedad con factores de la forma  $e^{\lambda(x)}$ , no son transformaciones canónicas, por lo que deberían cambiar la dinámica del sistema. En su versión pasiva, las transformaciones describen a la teoría desde un sistema de referencia acelerado, y en su versión de punto, representan un Universo responsable de que las partículas libres, a pesar de no interactuar con ninguna otra, viajen en trayectorias que no coinciden con las geodésicas en un instante determinado.

Se puede elegir una forma de este factor que permite describir a la parte geométrica de S como un término igual al de la acción de Einstein-Hilbert, que en la práctica corresponde a desacoplar a  $\phi$  de  $g$ :

$$\int d^4x (\sqrt{-g})' (\phi^2)' R' = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (5.31)$$

En su versión pasiva, lo anterior es el resultado de transformar a la métrica de la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow (e^{\lambda(x)})^2 g_{\mu\nu} \quad g^{\mu\nu} \rightarrow (e^{-\lambda(x)})^2 g^{\mu\nu} \quad (5.32)$$

Ahora que el factor de escala es una función de  $x$ , la transformación de los símbolos de Christoffel

requiere un cálculo más complicado, porque las derivadas de los parámetros  $e^{\lambda(x)}$  no se anulan:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma^\rho{}_{\mu\nu})' &= \frac{1}{2} \left( e^{-2\lambda(x)} g^{\rho\sigma} \right) \left( \partial_\mu (e^{2\lambda(x)} g_{\sigma\nu}) + \partial_\nu (e^{2\lambda(x)} g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (e^{2\lambda(x)} g_{\mu\nu}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( e^{-2\lambda(x)} g^{\rho\sigma} \right) \left( 2 g_{\sigma\nu} e^{\lambda(x)} \partial_\mu (e^{\lambda(x)}) + 2 g_{\mu\sigma} e^{\lambda(x)} \partial_\nu (e^{\lambda(x)}) - 2 g_{\mu\nu} e^{\lambda(x)} \partial_\sigma (e^{\lambda(x)}) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( e^{-2\lambda(x)} g^{\rho\sigma} \right) e^{2\lambda(x)} \left( \partial_\mu (g_{\sigma\nu}) + \partial_\nu (g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (g_{\mu\nu}) \right) \\
 &= g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} e^{-\lambda(x)} \partial_\mu e^{\lambda(x)} + g^{\rho\sigma} g_{\mu\sigma} e^{-\lambda(x)} \partial_\nu e^{\lambda(x)} - g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} e^{-\lambda(x)} \partial_\sigma e^{\lambda(x)} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \\
 &= [\mathbf{1}]^\rho{}_\nu \partial_\mu \lambda(x) + [\mathbf{1}]^\rho{}_\mu \partial_\nu \lambda(x) - g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \lambda(x) + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

En este caso, el argumento dado para la invarianza de la ecuación (5.27) sigue siendo relevante en cuanto a que, si se deja intacta a la variedad, pero se adopta una forma de medir distancias que depende de la región desde la que se mida, entonces los símbolos de Christoffel después de la transformación, deberán ser corregidos con un factor que se suma a su definición original, pero estos sí permanecen intactos en el sentido de que  $(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu})' \neq F(x)\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ . Las parciales de los símbolos de Christoffel se siguen directamente de (5.33):

$$\begin{aligned}
 (\partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu})' &= \partial_\rho (\Gamma^\rho{}_{\mu\nu})' = \partial_\nu \partial_\mu \lambda(x) + \partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) - \partial_\sigma (g_{\mu\nu} \partial^\sigma \lambda(x)) + \partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \\
 (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\rho\nu})' &= \partial_\mu (\Gamma^\rho{}_{\rho\nu})' = \partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) + 4\partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) - \partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) + \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\rho\nu}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Y sus contracciones son:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma})' &= \\
 &\left( [\mathbf{1}]^\rho{}_\nu \partial_\mu \lambda(x) + [\mathbf{1}]^\rho{}_\mu \partial_\nu \lambda(x) - g_{\mu\nu} \partial^\rho \lambda(x) + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \right) \left( [\mathbf{1}]^\sigma{}_\sigma \partial_\rho \lambda(x) + [\mathbf{1}]^\sigma{}_\rho \partial_\sigma \lambda(x) - g_{\rho\sigma} \partial^\sigma \lambda(x) + \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \right) \\
 &= 8 \left( \partial_\mu \lambda(x) \right) \left( \partial_\nu \lambda(x) \right) - 4 g_{\mu\nu} \left( \partial_\rho \lambda(x) \right) \left( \partial^\rho \lambda(x) \right) + 4 \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda(x) \\
 &\quad + \Gamma^\sigma{}_{\nu\sigma} \partial_\mu \lambda(x) + \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} \partial_\nu \lambda(x) - g_{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \partial^\rho \lambda(x) + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma} \\
 (\Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\sigma\nu})' &= \\
 &\left( [\mathbf{1}]^\rho{}_\rho \partial_\mu \lambda(x) + [\mathbf{1}]^\rho{}_\mu \partial_\rho \lambda(x) - g_{\mu\rho} \partial^\rho \lambda(x) + \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \right) \left( [\mathbf{1}]^\sigma{}_\nu \partial_\sigma \lambda(x) + [\mathbf{1}]^\sigma{}_\sigma \partial_\nu \lambda(x) - g_{\sigma\nu} \partial^\sigma \lambda(x) + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\nu} \right) \\
 &= 16 \left( \partial_\mu \lambda(x) \right) \left( \partial_\nu \lambda(x) \right) + 4 \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \partial_\nu \lambda(x) + 4 \Gamma^\sigma{}_{\sigma\nu} \partial_\mu \lambda(x) + \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \Gamma^\sigma{}_{\sigma\nu}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Reemplazando (5.34) y (5.35) en (A.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} (R_{\mu\nu})' &= R_{\mu\nu} - 8\left(\partial_\mu\lambda(x)\right)\left(\partial_\nu\lambda(x)\right) - 4g_{\mu\nu}\left(\partial_\rho\lambda(x)\right)\left(\partial^\rho\lambda(x)\right) + 4\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\partial_\rho\lambda(x) - 3\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\partial_\nu\lambda(x) \\ &\quad - 3\Gamma^\rho{}_{\rho\nu}\partial_\mu\lambda(x) - g_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}\partial^\rho\lambda(x) - \partial_\sigma\left(g_{\mu\nu}\partial^\sigma\lambda(x)\right) - 2\partial_\mu\partial_\nu\lambda(x) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Y por lo tanto, el escalar de Ricci se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})' &= e^{-2\lambda(x)}\left(R - 24\left(\partial_\rho\lambda(x)\right)\left(\partial^\rho\lambda(x)\right) - 10\Gamma^\rho{}_{\sigma\rho}\partial^\sigma\lambda(x) - 2\partial_\rho\partial^\rho\lambda(x) \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{(g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial^\rho\lambda(x) - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho\lambda(x) - 2\Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\partial^\rho\lambda(x) - 4\Box\lambda(x)}_{\downarrow} \right) \\ &\quad + 4\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\rho\lambda(x) - g^{\mu\nu}\partial_\rho\left(g_{\mu\nu}\partial^\rho\lambda(x)\right) \\ &= e^{-2\lambda(x)}\left(R - 24\left(\partial_\rho\lambda(x)\right)\left(\partial^\rho\lambda(x)\right) - 12\Gamma^\rho{}_{\sigma\rho}\partial^\sigma\lambda(x) + 4\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\rho\lambda(x) - 6\Box\lambda(x)\right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Por lo tanto, el término de acoplamiento, con  $f'(\phi) = (\phi^2)' = e^{-2\lambda(x)}\phi^2$  y con  $(\sqrt{-g})' = e^{4\lambda(x)}\sqrt{-g}$  cambia <sup>12</sup> de la siguiente manera bajo IE's locales:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\phi^2 R \rightarrow \\ &\frac{1}{16\pi}\int d^4x(e^{4\lambda(x)}\sqrt{-g})(e^{2\lambda(x)}\phi^2)(e^{-2\lambda(x)}R) \\ &\quad - \frac{24}{16\pi}\int d^4x(e^{4\lambda(x)}\sqrt{-g})(e^{2\lambda(x)}\phi^2)\left(\partial_\rho\lambda(x)\right)\left(\partial^\rho\lambda(x)\right) + \dots \\ &= \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\phi^2 e^{4\lambda(x)}R + \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

Se busca cancelar al término  $\phi^2$  de la primera integral eligiendo una forma adecuada para  $e^{\lambda(x)}$ . Esto es:

$$\phi^2 e^{4\lambda(x)} = 1 \implies (e^{\lambda(x)})^4 = \phi^{-2} \implies \begin{cases} e^{\lambda(x)} = \phi^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda(x) = \ln(\phi^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}\ln\phi \end{cases} \quad (5.39)$$

Con esta elección <sup>13</sup>, y con  $\omega(\phi) = \phi$ , el término cinético de la parte geométrica de la acción, se transforma como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi}\int d^4x \left(\frac{1}{\phi^2}\sqrt{-g}\right) (\phi g^{\mu\nu}) \left(\nabla_\mu\left(\phi^{\frac{3}{2}}\right)\right) \left(\nabla_\nu\left(\phi^{\frac{3}{2}}\right)\right) &= \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{\phi}g^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\left(\phi^{\frac{3}{2}}\right)\right)\left(\nabla_\nu\left(\phi^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{9}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{X} \end{aligned} \quad (5.40)$$

<sup>12</sup>La Ley de transformación para el campo escalar es la obtenida en (5.29). Aunque el procedimiento usado en ese caso sería inválido ahora que el término de reescalamiento es una función de  $x$ , se sabe que  $\phi$  debe transformarse de la misma manera si se utilizara una transformación activa, y en ese caso,  $e^{\lambda(x)}$  proviene del operador de derivada.

<sup>13</sup>La definición de  $\phi$  como un sustituto de la constante de gravitación universal, garantiza que (5.39) es una elección válida, pues  $G(\phi) \propto \phi^{-1} \implies \phi^{-\frac{1}{2}} > 0$ .

Y el potencial escalar,  $V(\phi) = \phi^4$ , en el marco de Einstein, toma la forma:

$$V'(\phi) = (\phi')^4 = \left(\phi^{\frac{3}{2}}\right)^4 = \phi^6 \quad (5.41)$$

Sobre la parte de masa en la acción, no es tan útil hacer desarrollos completos, como lo es notar que en el marco de Einstein, los campos que aparezcan en  $\mathcal{L}^{(\text{masa})}$  estarán acoplados al campo escalar:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(\text{masa})} \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g} (\phi^{-2} \mathcal{L}'^{(\text{masa})}) \quad (5.42)$$

Y no es posible que el término  $\phi^{-2}$  se cancele al desarrollar  $\mathcal{L}'^{(\text{masa})}$ , pues originalmente  $\mathcal{L}^{(\text{masa})}$  sólo está acoplado mínimamente al tensor métrico, por lo que contribuye un término  $\sigma$ .

En conclusión, en el marco de Einstein, la gravedad se puede representar como un efecto geométrico, que no depende del resto del contenido del Universo, pero los campos de materia pasan a estar acoplados de forma no-mínima a  $\phi$ , pues el factor de escala depende del campo escalar. Considerando que  $T_{\mu\nu}$  representa a un fluido inicialmente en reposo, el paso al marco de Einstein hace que las partículas libres no viajen en geodésicas del 4-espacio.

## 5.5 El grupo conforme $C(1, 4)$

Los elementos del grupo conforme son las transformaciones:

$$(x')^\mu = \sigma \Lambda^\mu{}_\nu(x) x^\nu + b^\mu \quad (5.43)$$

Con  $b^\mu$  las 4 componentes de un vector de traslación, y  $\Lambda^\mu{}_\nu$  las 4 rapidezces y los 3 ángulos de Euler que determinan transformaciones de Lorentz y rotaciones en el 3-espacio.  $\sigma$  puede producir tanto reflexiones en alguno o varios de los 3 ejes espaciales, o inversiones en el tiempo, así como reescalamientos.

## 5.6 Relatividad General bajo reescalamientos

Es fácil mostrar que la acción de Einstein-Hilbert (ecuación (2.31)) no es invariante bajo reescalamientos, pues su parte geométrica para a ser, de acuerdo con (5.25), (5.26), y (5.28):

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad \rightarrow \quad S' = e^{2\lambda} \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R = e^{2\lambda} S \quad (5.44)$$

Si se considera una acción con constante cosmológica, esta debe transformarse como lo hace un campo escalar, y se obtiene:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - \Lambda) \quad \rightarrow \quad S' = e^{2\lambda} \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - e^\lambda \Lambda) \quad (5.45)$$

## 5.7 Relación con el flujo de Hubble

Se puede observar del el parecido entre las ecuaciones (5.14) y (3.2):

$$\begin{cases} D \Leftrightarrow (d^2x)' \\ a(t) \Leftrightarrow e^{2\lambda} \\ r \Leftrightarrow d^2x \end{cases} \implies [D = a(t)r \Leftrightarrow (d^2x)' = e^{2\lambda} d^2x] \quad (5.46)$$

Es decir, la inflación corresponde a un reescalamiento del espacio-tiempo, y por lo tanto, cualquier teoría de gravedad que sea válida en distintas épocas de la evolución del Universo, deberá ser invariante de escala. Esta es una razón especialmente fuerte para considerar teorías de gravedad escalar-tensoriales, donde el acoplamiento no-mínimo entre el campo escalar y el tensor métrico hace que las transformaciones de escala sean una simetría, al tiempo que las ecuaciones de campo son de segundo orden en el tensor métrico.

Recordando que (5.14) se propuso asumiendo un valor adecuado para el vector de traslación, sus efectos al nivel de las bases de coordenadas, siguen estando dados por (5.5), que, como se describe en el apéndice

## Capítulo 6

# Teorema de Noether aplicado a teorías de tipo BD

### 6.1 Transformaciones en variedades

En el formalismo de Lagrange, una teoría se estudia por la evolución de sus grados de libertad, y en su aplicación a teorías definidas en un espacio-tiempo, cada grado de libertad pasa a ser un campo, de modo que para cada variable dinámica, ahora hay un valor del correspondiente campo, en cada uno de los puntos de la variedad. Hay que recordar que la variedad son los puntos que la forman, y nada más (Ver sección 2.2.1).

Cada punto se asocia con una base de coordenadas, pero no con un campo. Esto es importante porque dicta la manera en la que transformar a la variedad induce transformaciones en los campos, y a su vez, se puede transformar a los campos sin transformar a la variedad.

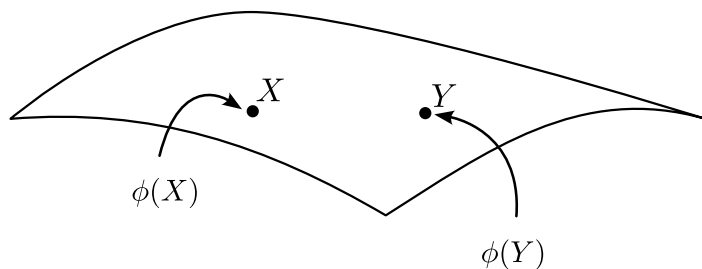


Figura 6.1: El campo  $\phi$  representa una única variable dinámica, y se define sobre todo el espacio-tiempo. El sentido de las flechas en esta figura, indica el campo se define sobre la variedad, pero la variedad es independiente de ellos.

Si se define un campo  $\phi$  en la variedad, y se la transforma, entonces un punto cualquiera  $X$  pasa a ser el punto  $X'$ , y se sabe de esta correspondencia porque está dada por una función invertible, que va de la variedad original, a la transformada. Después del cambio,  $\phi(X)$ , el valor del campo asignado al punto  $X$ , pasará también a ser algo distinto, y por el momento no es importante conocer qué ocurre con él. Lo importante es que no hay ninguna razón para suponer que el valor de  $\phi$  definido en  $X$ , debería estar definido en  $X'$  cuando la variedad se transforma. En conclusión, transformar a la variedad, induce un cambio sobre los campos que se definan en ella:

$$X \rightarrow X' \implies \phi(X) \rightarrow \phi'(X') \quad (6.1)$$

A las transformaciones realizadas sobre la variedad, se les conoce como transformaciones activas o de punto[13].

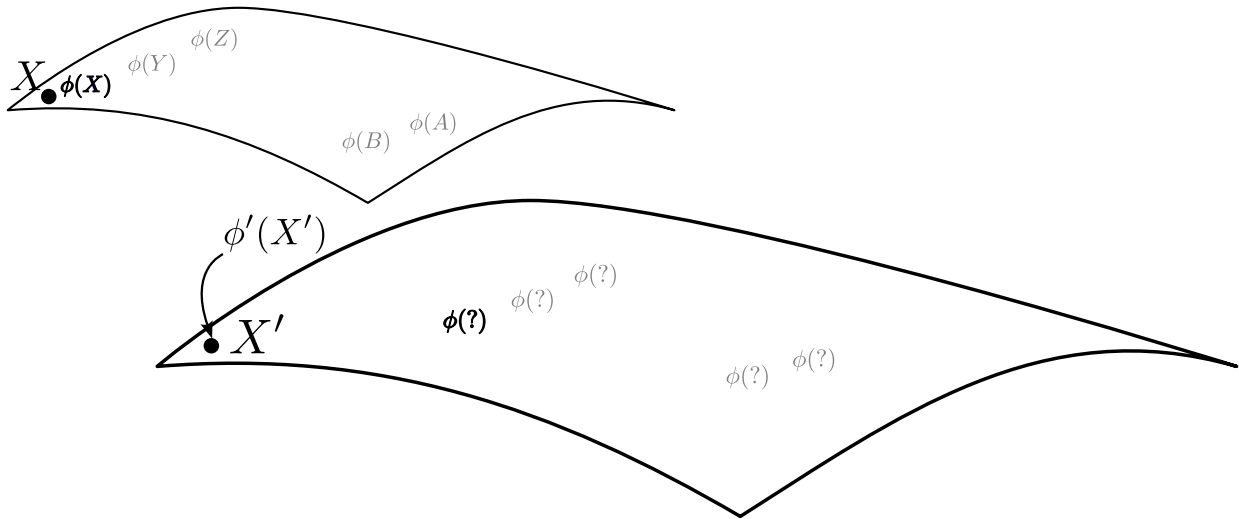


Figura 6.2: La transformación sobre la variedad (en este caso un reescalamiento), relaciona a los puntos  $X$  y  $X'$ , pero esta transformación no se realizó sobre los campos, por lo que no se puede asociar al campo resaltado, con el punto  $X'$ . Luego, el punto  $X'$  debe tener asociado un campo distinto al de antes de transformarse.

Sin embargo, como la física de un sistema viene de la evolución de los campos, se puede lograr el mismo efecto si se transforma sólo a los campos. En el caso de la figura 6.2, el reescalamiento en un sentido sobre la variedad, es indistinguible de un reescalamiento en el sentido opuesto sobre los campos, lo cual sería una versión pasiva de la misma transformación.

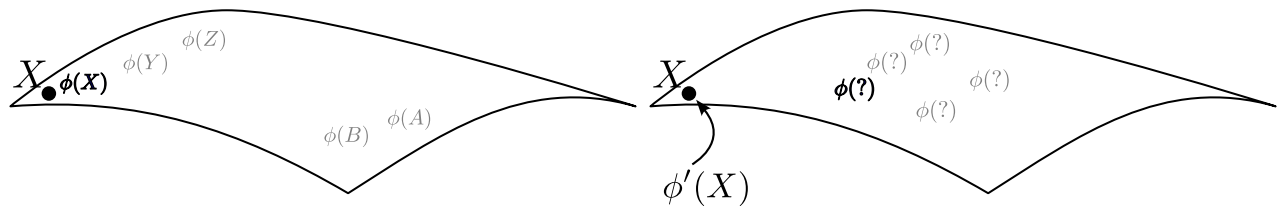


Figura 6.3: Para la versión pasiva de un reescalamiento,  $\phi(x)$  pasa a existir en un punto distinto, y por lo tanto hay un nuevo valor del campo en  $X$ , el cual permanece sin cambio.

Las transformaciones pasivas permiten simplificar la mayoría de los cálculos, pero sólo es posible definir las una vez que se conoce el efecto que la transformación de punto tiene sobre los campos. Finalmente, si el tensor métrico es uno de los campos, como ocurre con las teorías de gravedad, se tiene el caso especial en el que la estructura misma de la variedad evoluciona según un principio de mínima acción. Dicho de otra forma, si existe la variedad, existe su métrica, y sin métrica no hay variedad. Una consecuencia de esto, es que, si la transformación de punto no afecta a la geometría de la variedad, como es el caso con los reescalamientos, entonces su versión activa transforma a los puntos pero no a  $g$  (aunque sí transforme a los demás campos), y su versión pasiva transforma a  $g$  pero no a los puntos.

## 6.2 Variación canónica sobre el 4-espacio

La mayor parte del procedimiento seguido aquí, se basa en el razonamiento dado en el capítulo cinco de la referencia[15]. Se considera una transformación sobre los puntos del 4-espacio, sin especificar su forma. Como se explicó en la sección 6.1, esta transformación induce una variación en los campos:

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow (x')^\mu && \implies (x')^\mu = (\Delta x)^\mu + x^\mu \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') && \implies \phi'(x') = \Delta\phi - \phi(x) \\ g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow g'_{\mu\nu}(x') && \implies g'_{\mu\nu}(x') = \Delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Y se busca la forma que adquiere la variación inducida sobre la acción. Para esto, se estudian a parte las variaciones de  $\mathcal{L}$  y de el operador de integración sobre el 4-espacio.

### 6.2.1 Efecto sobre la densidad Lagrangiana

La densidad Lagrangiana depende explícitamente de los campos  $g_{\mu\nu}$  y  $\phi$ , y depende sólo de forma implícita de las coordenadas  $x^\mu$ , a través de los mismos campos, y de los operadores de derivada parcial. Su transformación se expresa como  $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), \dots) \rightarrow \mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x'), \dots)$ , y determina un cambio  $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ . Ahora, para el caso particular en el que  $\mathcal{L}$  es invariante, como es de esperarse si la transformación es de simetría, entonces la forma funcional de  $\mathcal{L}$  no cambia, a pesar de que sus variables dinámicas sí lo hagan, es decir:  $\mathcal{L}(\phi(x), \dots) \rightarrow \mathcal{L}(\phi'(x'), \dots)$ .

En este caso,  $\Delta\mathcal{L}$  estará dado por completo en términos de la variación de  $\mathcal{L}$  respecto de sus variables dinámicas:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} \Delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})} \Delta(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu g_{\alpha\beta})} \Delta(\partial_\nu\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \quad (6.3)$$

Que se puede factorizar, por medio de (A.31):

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} = & \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\partial_\rho\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\rho g_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \Delta x^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \partial_\rho \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ & + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Se aplica la regla de Leibniz a los términos que contienen derivadas de variaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \partial_\rho \delta\phi &= \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \delta\phi \right) - \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \right) \delta\phi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} &= \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) - \partial_\rho \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Y sobre el término con una segunda derivada de  $\delta g_{\mu\nu}$ , se aplica dos veces:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} = \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} \right) - \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} \\
 = & \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} \right) - \partial_\rho \left( \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) + \partial_\rho \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (6.6) \\
 = & \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) + \partial_\rho \partial_\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Donde se aprovechó que las parciales  $\partial_\rho$  y  $\partial_\sigma$  conmutan. Ahora se pueden reemplazar (6.5) y (6.6) en (6.4):

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{L} = & \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\partial_\rho \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\rho g_{\mu\nu} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \Delta x^\alpha \\
 & + \partial_\rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) \quad (6.7) \\
 & + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \right) \delta \phi \\
 & + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

### 6.2.2 Efecto sobre el operador de integración

El operador de integración se forma de la integral entre los tiempos inicial y final que definen a la acción, y la integral tridimensional necesaria para reemplazar a la Lagrangiana por su densidad, y la transformación sobre los puntos del 4-espacio se ve reflejada tanto en los límites de integración, como en la forma del elemento de volumen. El elemento de volumen cambia como su producto con el determinante del jacobiano de la transformación:

$$(d^4x)' = J d^4x = \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) d^4x = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \dots \\ \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \dots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} d^4x \quad (6.8)$$

Donde las entradas de la matriz, de acuerdo con (6.2), son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} &= \frac{\partial}{\partial x^0} (\Delta x^0 + x^0) = \overbrace{\partial_0 \Delta x^0}^{\partial_0 x^0 = [\mathbb{1}]_0^0} + \mathbb{1} \\
 \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} &= \frac{\partial}{\partial x^0} (\Delta x^1 + x^1) = \overbrace{\partial_0 \Delta x^1}^{\partial_0 x^1 = [\mathbb{1}]_0^1} + \mathbb{0} \\
 \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} (\Delta x^0 + x^0) = \partial_1 \Delta x^0 \\
 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\Delta x^\mu + x^\mu) = \partial_\nu \Delta x^\mu + [\mathbb{1}]_\nu^\mu
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

De modo que (6.8), a primer orden en el infinitésimo  $\Delta x^\mu$ , es  $1 + \partial_0 \Delta x^0 + \dots + \partial_3 \Delta x^3 = 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu$ , y por lo tanto, la transformación de coordenadas actúa sobre la acción como:

$$S' = \int_{U'} (d^4x)' \mathcal{L}'(\phi', \dots) = \int_{U'} (1 + \partial_\mu \Delta x^\mu) d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) = \int_{U'} d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) + \int_{U'} d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu \tag{6.10}$$

Donde  $U'$  es la nueva región de integración, y hace falta escribirla en términos de los límites originales. Para eso, se usa la independencia de las coordenadas como se hizo en (4.16), aprovechando que las integrales en (6.10) son respecto al diferencial de 4-volumen sin transformar.

Sin importar el orden de las integrales anidadas, si la más profunda es respecto a la coordenada  $x^\mu$  y actúa sobre  $\mathcal{L}$  o sobre  $\mathcal{L} \partial_\mu x^\mu$  como si fueran funciones sólo de  $x^\mu$ , entonces la transformación sobre esa coordenada, según (6.2), es equivalente a una traslación sobre los límites, lo cual permite re-escribir a la integral transformada, como la integral original con las contribuciones de la traslación como integrales distintas. Además, la naturaleza infinitesimal de dicha traslación, permite reemplazar a estas integrales distintas, por valores específicos de la función que se está integrando, como se muestra en la figura 6.4.

Repitiendo el proceso con las 3 coordenadas restantes, se puede expresar a la acción transformada usando a la integral original:

$$S' = \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) + \left[ \mathcal{L}(\phi', \dots) \right]_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} + \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu + \left[ \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu \right]_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} \tag{6.11}$$

### 6.2.3 Efecto sobre la acción

El cambio en  $S$ , según (6.7), es:

$$\begin{aligned}
 \Delta S = S' - S &= \overbrace{\int_U d^4x \Delta \mathcal{L}}^{\int d^4x \Delta \mathcal{L}} - \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi, \dots) \\
 &= \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) + \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu - \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi, \dots) \\
 &\quad + \left[ \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu \right]_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} + \left[ \mathcal{L}(\phi, \dots) \right]_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

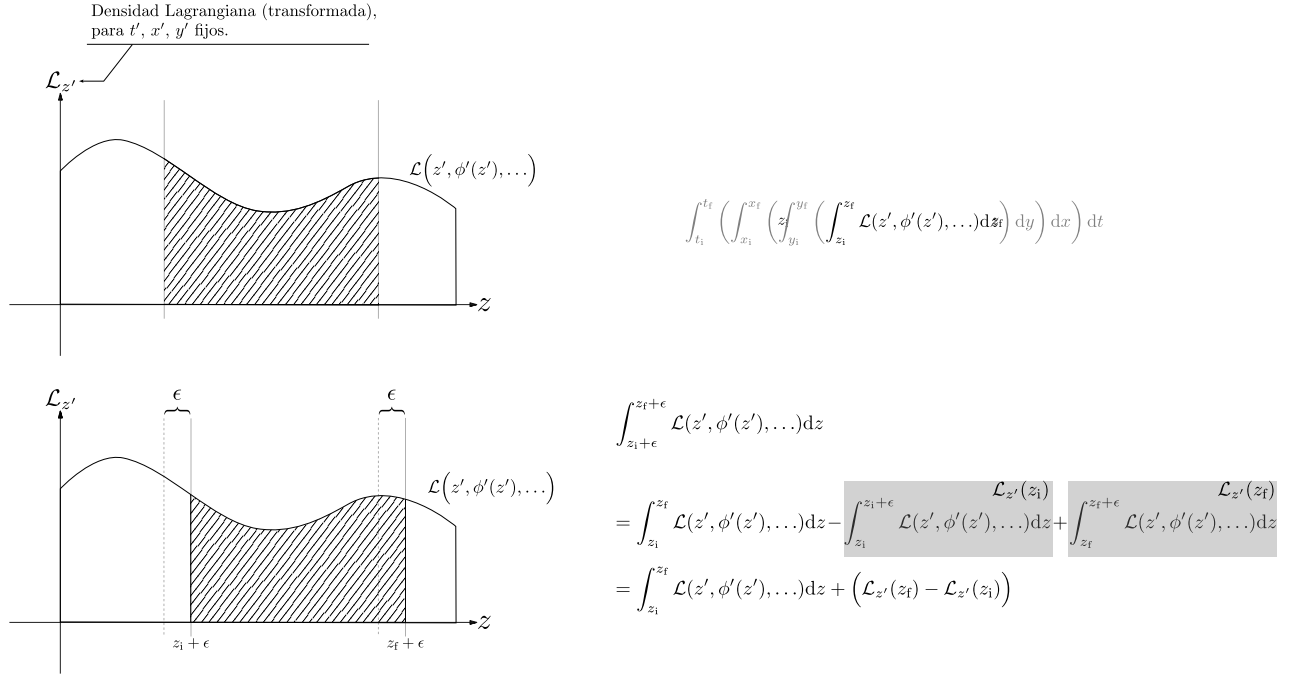


Figura 6.4: La densidad Lagrangiana depende las coordenadas transformadas, pero se la puede graficar respecto a las coordenadas originales. Fijando a todas excepto  $z$  (y por lo tanto a  $z'$  también), la transformación infinitesimal desplaza a los límites de integración.

Que luego de agrupar términos, y usando (6.11) para escribir de forma más explícita a  $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ , toma la forma:

$$\begin{aligned} \Delta S = & \int_U d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\partial_\rho \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\rho g_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \Delta x^\alpha \\ & + \int_U d^4x \partial_\rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) \\ & + \int_U d^4x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \right) \delta \phi + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \right] \\ & + \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu + \left[ \mathcal{L}(\phi', \dots) (1 + \partial_\mu \Delta x^\mu) \right]_{x_1^\alpha}^{x_f^\alpha} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Y la primera integral se puede obtener de aplicar la regla de la cadena para calcular la derivada de  $\mathcal{L}$  respecto de las coordenadas, considerando que  $\mathcal{L}$  depende explícitamente de  $\phi$ , que a su vez depende de  $x^\alpha$ , y por lo tanto, un cambio en las coordenadas contribuye un término  $(\partial \mathcal{L} / \partial \phi)(\partial \phi / \partial x^\alpha) \Delta x^\alpha$  al cambio en  $\mathcal{L}$ , sin importar el cambio que venga (y que resulta inevitable, como se aprecia en

[APÉNDICE]) de la variación sobre los campos <sup>1</sup>. Así, la primera integral se puede denotar por  $\int d^4x [\partial_\mu \mathcal{L}(\phi', \dots)] \Delta x^\mu$ , permitiendo recuperar una derivada total de (6.13):

$$\int_U d^4x [\partial_\mu \mathcal{L}(\phi', \dots)] \Delta x^\mu + \int_U d^4x \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu = \int_U d^4x \partial_\mu (\mathcal{L}(\phi', \dots) \Delta x^\mu) \quad (6.14)$$

Habiendo agrupado estas dos integrales,  $\Delta S$  se puede describir como tres términos característicos: la integral que contiene a las ecuaciones de Euler-Lagrange, la integral de una derivada total, y la constante que viene de evaluar a  $\mathcal{L}(1 + \partial_\alpha \Delta x^\mu)$  en la frontera. Se va a observar a cada término, bajo la suposición (que hasta ahora no ha sido necesaria) de que la acción es extrema.

### 6.2.4 Aplicación del principio de Hamilton

Como se explica al inicio de 4.4.2, suponer que la acción es extrema implica, sin más condiciones, que  $\Delta S = 0$ . Por lo que el lado izquierdo de (6.13) debe ser cero, no porque se asume que la transformación sea de simetría, sino porque se asume que el sistema que se va a estudiar, evoluciona según el principio de Hamilton. Además, como se explica en 4.4.1, las integrales que contienen a las ecuaciones de Euler-Lagrange, deben ser iguales a cero, de acuerdo con (4.24). Esto es:

$$\begin{aligned} & \int_U d^4x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \right) \delta \phi + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \right] \\ & = \int_U d^4x \left[ (0) \delta \phi + (0) \delta g_{\mu\nu} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Esto también es consecuencia del principio de Hamilton. Así como lo es el hecho de que, si bien la frontera puede ser afectada por la variación en las coordenadas, esta variación debe conocerse *a priori*, pues la frontera original y la ley de transformación son conocidas. Específicamente:  $\partial_\mu \Delta x^\mu = 0 = \partial_\mu \Delta x^\mu_{\text{f}}$  Es decir,  $\Delta x^\mu$  es constante en la frontera. Lo anterior, junto con el hecho de que  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo<sup>2</sup>, implica que el término constante de (6.13) es también igual a cero:

$$\left[ \mathcal{L}(\phi', \dots) (1 + \partial_\mu \Delta x^\mu) \right]_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} = \mathcal{L}(\phi', \dots) \Big|_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} + \mathcal{L}(\phi', \dots) \partial_\mu \Delta x^\mu \Big|_{x_i^\alpha}^{x_f^\alpha} = \mathcal{L}_f - \mathcal{L}_i = 0 \quad (6.16)$$

Considerando estas cancelaciones, así como lo dicho en (6.14), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\int_U d^4x \partial_\rho \left( \mathcal{L}(\phi', \dots) \Delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (6.17)$$

Donde todas las parciales actúan sobre la densidad original, **a excepción de la primera**, que se evalúa respecto de la densidad luego de la transformación de coordenadas. Esto no se puede ignorar a pesar de que  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ , ya que la descomposición de esa parcial incluirá a términos como  $\partial_\mu V(\phi'(x'))$ ,

<sup>1</sup>esta es la razón de haber re-escrito a  $\Delta \phi$  en términos de  $\delta \phi$ .

<sup>2</sup>Y por lo tanto es una cantidad conservada

pero no hay razón de suponer  $V' = V$ , así que:

$$\partial_\mu V' = \frac{dV'}{d\phi'} \frac{\partial\phi'}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (6.18)$$

Con consideraciones similares para los términos cinéticos y de acoplamiento. Para resolver esta complicación, basta con revertir el reemplazo que se hizo en (6.4), pero eso se hace después. Por ahora es suficiente recordar que los términos del integrando incluyen cambios debido a la variación de los campos por sí mismos, y cambios debido a la variación de las coordenadas, sin incluir el cambio que ellas inducen sobre los campos <sup>3</sup>.

### 6.2.5 Corrientes de Noether

El integrando en (6.17) no es propiamente un término de superficie. Esto se discute en la siguiente sección. Esto significa que no se puede eliminar a la derivada parcial  $\partial_\rho$  para concluir que su argumento es igual a cero. En vez de eso, se debe recurrir a la arbitrariedad de  $U$  para confirmar que efectivamente, el argumento de  $\partial_\rho$  debe ser cuando menos constante, en todo lugar y a todo momento, pues de no ser así, la igualdad con cero que el principio de Hamilton impone, es resultado de contribuciones distintas de cero, pero que se cancelan idénticamente en  $U$ . Si este fuera el caso, se podría escoger una región de integración contenida en  $U$ , pero que excluya a las regiones que cancelan a las previas, para obtener una integral que es distinta de cero, pero que trata una configuración de los campos que obedece al principio de Hamilton, lo cual es absurdo. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\rho \left( \mathcal{L}(\phi', \dots) \Delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(\phi', \dots) \Delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} = F^\rho(\text{cte.}) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Para prescindir de las variaciones locales, se las despeja de (A.31), y se factorizan términos que sean productos con variaciones (totales) de los campos, o con variaciones de los puntos:

$$\begin{aligned} &\partial_\rho \left( [\mathbb{1}]^\rho_\alpha \mathcal{L}(\phi', \dots) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \partial_\alpha \phi' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g'_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \partial_\alpha g'_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g'_{\mu\nu} \right) \Delta x^\alpha + \partial_\rho \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \right) \Delta\phi \right] \\ &\quad + \partial_\rho \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \right) \Delta g_{\mu\nu} \right] + \partial_\rho \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \partial_\sigma \Delta g_{\mu\nu} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por último, se hace explícita la forma en la que actúa una transformación infinitesimal sobre los puntos y sobre los campos:

$$\Delta x^\alpha = G^\alpha_\beta(x) \epsilon^\beta \quad \Delta\phi = [F_\phi]_\beta(x) \epsilon^\beta \quad \Delta g_{\mu\nu} = [F_g]_{\mu\nu\beta}(x) \epsilon^\beta \quad (6.21)$$

<sup>3</sup>Esto se nota porque la derivada es respecto a coordenadas sin transformar, en vez de tenerse  $\partial\mathcal{L}'/\partial x'^\alpha$

Donde  $G^\alpha$  son los generadores de la transformación, definida por los  $\beta$  parámetros infinitesimales  $\epsilon^\beta$ . Las funciones  $F_\phi$  y  $F_g$  son las representaciones de la transformación generada por  $G^\alpha$  actuando sobre campos escalares y vectoriales respectivamente. Considerando que los parámetros  $\epsilon^\beta$  son independientes de las coordenadas y distintos de cero, si se sustituye (6.21) en (6.20), se obtiene una igualdad de la forma  $\partial_\rho (\epsilon^\beta N^\rho_\beta) = 0 \implies \epsilon^\beta \partial_\rho N^\rho_\beta = 0 \implies \partial_\rho N^\rho_\beta = 0$ . La expresión completa para  $N^\rho_\beta$  es:

$$N^\rho_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} [F_\phi]_\beta + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \right) [F_g]_{\mu\nu\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma [F_g]_{\mu\nu\beta} + \left( [\mathbf{1}]^\rho_\alpha \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \partial_\alpha \phi' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g'_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \partial_\alpha g'_{\mu\nu} + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g'_{\mu\nu} \right) G^\alpha_\beta \quad (6.22)$$

El Teorema de Noether demuestra que para cualquier sistema físico <sup>5</sup>, cada transformación de simetría determinada por  $\beta$  parámetros, produce  $\beta$  corrientes, dadas por (6.22), y con ecuaciones de continuidad  $\partial_\rho N^\rho_\beta = 0$ .

### 6.3 La corriente de Noether no es un término de frontera

Se le llama término de superficie a aquel que se puede evaluar como una integral sobre la hipersuperficie que delimita al 4-volumen sobre el que se integra a la función lagrangiana, por medio del teorema de la divergencia. En variedades con métricas arbitrarias  $g$ , el teorema de la divergencia aplica a operadores de integración cuyo diferencial de 4-volumen es invariante bajo transformaciones de coordenadas <sup>6</sup>, que operan sobre derivadas covariantes:

$$\int_{\mathcal{U}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu F^\mu = \int_{\partial \mathcal{U}} d^3x \sqrt{-\gamma} F^\mu \hat{n}_\mu \quad (6.23)$$

Donde  $\partial \mathcal{U}$  es la hipersuperficie que delimita a  $\mathcal{U}$ ,  $\gamma$  es la métrica que resulta de encajar a  $\partial \mathcal{U}$  en el 4-espacio, y  $\hat{n}$  es el vector normal a  $\partial \mathcal{U}$ . Que un término sea de superficie no significa que deba ser igual a cero.

Un término de frontera es un término de superficie que es igual a cero bajo la prescripción de las condiciones de frontera.

La integral obtenida al considerar variaciones canónicas sobre una acción extrema es de la forma  $\int d^4x \partial_\rho F^\rho$ , con  $F^\rho$  como aparece en (6.19). El hecho de que se hable de una acción extrema, implica que (4.24) se cumple, y según se explica en el capítulo 4.4, esas igualdades equivalen a (4.26), que a su vez implican (4.47). Por lo tanto, imponer  $\delta S = 0$  no sólo hace que (4.24) se deba cumplir, sino que también hace que necesario que los términos de frontera ya hayan sido eliminados, ya sea por medio de una prescripción como las mostradas en el apéndice B, o por la naturaleza propia del sistema. En otras palabras, como la deducción de (4.24) es independiente de que haya o no términos de frontera, pero el cálculo de (4.26), que es un resultado más fundamental, requiere que estos se anulen, entonces (6.9) contiene a dichos términos en ella, de modo que  $\int d^4x \partial_\rho F^\rho$  es un término

<sup>4</sup>Es decir,  $\beta$  no es un índice de Lorentz, sino una etiqueta.

<sup>5</sup>Cualquier sistema cuyos campos extremizan a su acción

<sup>6</sup>Es decir, el operador es de la forma  $\int d^4x \sqrt{-g}$ , dado que transformaciones de punto transforman a  $d^4x$  por un factor de  $\det(\frac{\partial x'}{\partial x})$ , y a  $\sqrt{-g}$  por un factor de  $(\det(\frac{\partial x'}{\partial x}))^{-1}$

distinto a los llamados de frontera:

$$\begin{aligned}
 & \int_U d^4x \partial_\rho \left( \mathcal{L}(\phi', \dots) \Delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) \\
 & + \int_U d^4x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)} \right) \delta\phi + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \right] \\
 & = \partial_\rho F^\rho + \nabla_\rho J^\rho + (\text{ecs. de campo}) = 0
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

## 6.4 Leyes de conservación covariantes

El hecho de que el Teorema de Noether sea referente a ecuaciones de continuidad de la forma  $\partial_\rho j^\rho = 0$ , no significa que las corrientes conservadas no sean componentes de objetos que se transforman como tensores, y el tensor de energía-momento es el caso más claro de esta posibilidad. Para empezar, si se considera al tensor  $T$  de Hilbert (ecuación (2.31)), junto con la condición de compatibilidad de la métrica (2.20), y se aplica la derivada covariante a (2.24), el resultado se reduce, luego de expresar al tensor de Einstein en términos del tensor métrico y sus derivadas, a:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 = 8\pi \nabla_\rho T_{\mu\nu} \implies \nabla_\rho T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.25}$$

Este resultado se mantiene si se considera un Universo con Constante Cosmológica, pues es de esperar que la derivada covariante del escalar  $\Lambda$ , igual a su derivada parcial, es la derivada de una constante:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} + \nabla_\rho g_{\mu\nu} \Lambda + g_{\mu\nu} \nabla_\rho \Lambda = 0 \implies \nabla_\rho T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.26}$$

Ahora, recordando que el tensor  $T$  canónico se obtiene al aplicar el Teorema de Noether a la invarianza bajo traslaciones en el tiempo y en el espacio, y sabiendo que los elementos del grupo de las traslaciones están determinados por 4 parámetros, se espera obtener 4 corrientes  $N^\rho$  distintas. Esto es, de acuerdo con (6.22):

$$\partial_\rho (N^\rho)_\beta = [\mathbf{1}]^\rho_\alpha \mathcal{L} G^\alpha_\beta + \dots = 0 \tag{6.27}$$

Donde las 4 componentes, de las 4 corrientes, forman por definición precisamente a la versión canónica del tensor energía-momento, mostrado en (2.25):

$$N^\rho_\beta = T^\rho_\beta = g^{\rho\alpha} T_{\alpha\beta} \tag{6.28}$$

Sin embargo, el Teorema de Noether sólo prueba que:

$$\partial_\rho g^{\rho\alpha} T_{\alpha\beta} = 0 \tag{6.29}$$

Y la ley de conservación covariante es debida a la condición de compatibilidad. La necesidad de que  $T$  canónico se conserve covariantemente fue la motivación para elegir un campo escalar desacoplado de la acción de materia, como se explica al proponer la acción dada en (4.3), pero ahora, asumiendo que *debe* conservarse porque la métrica satisface la condición de compatibilidad, entonces, también

debe haber una ley de conservación covariante, asociada al campo escalar, para garantizar  $\nabla_\rho T_{\mu\nu} = 0$ . Para hallarla, se iguala a cero la derivada covariante de la ecuación de campo para el tensor métrico, dada en (4.48), con las funciones libres ya determinadas por (5.22):

$$\nabla_\rho \left( \phi^2 G_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{X} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^4 + \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi^2) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi^2 \right) = \nabla_\rho (8\pi T_{\mu\nu}) = 0 \quad (6.30)$$

Es decir, la invarianza bajo traslaciones de la teoría invariante de escala, produce, resulta en las corrientes:

$$N^\alpha_\beta = \left( \phi^2 G_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{X} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^4 + \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi^2) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi^2 - T_{\mu\nu} \right) \quad (6.31)$$

Y el hecho de que sea una ecuación de conservación covariante, implica que la forma de las corrientes depende del sistema de coordenadas que se defina, y por lo tanto, sus componentes deben transformarse si se transforma al sistema de referencia, para que el tensor  $N$  preserve su significado físico.

## 6.5 Corriente de Noether asociada a invarianza de escala

En contraste con las corrientes de la ecuación (6.31), se espera que la corriente de Noether asociada a los reescalamientos resulte en las componentes de un vector, pues los reescalamientos dependen de un único parámetro: el factor de reescalamiento <sup>7</sup>, y efectivamente, si se escribe de forma explícita tanto a las lagrangianas de masa como de gravedad mostradas en (4.35), y se la expande por completo, hasta que todos los términos dependan explícitamente de los campos y sus derivadas, y luego se calculan todas las parciales de la ecuación (6.22) por fuerza bruta <sup>8</sup>, se obtiene una expresión en la que el tensor de energía-momento no aparece, ya que  $\sqrt{-g}$  no depende de las parciales de  $g$ , y tampoco lo hacen los acoplamientos mínimos en  $\mathcal{L}^{(masa)}$ . La corriente de Noether asociada a la invarianza de escala, es:

$$j^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu (\phi^2) + 2\phi^2 \partial_\nu g^{\mu\nu} - 2\phi^2 g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\nu\rho} \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6.32)$$

Intuitivamente, debería ser posible obtener una ley de conservación covariante de (6.32), ya que la variedad satisface el principio de equivalencia, y el campo escalar no está contraído con otros campos aparte de  $g$  en las ecuaciones de movimiento, y por lo tanto debe propagarse sobre las geodésicas de la variedad, lo cual es precisamente la definición de transporte paralelo, dado por la ecuación (2.19).

Sin embargo, la dependencia del campo escalar sólo con el tiempo (ecuación (4.9)), hace que resulte de mayor utilidad el cálculo de la *carga* asociada a la (única) corriente de Noether asociada a la invarianza de escala.

Para esto, se integra a la ecuación de conservación sobre el 3-espacio (porque lo que se busca es

<sup>7</sup>Intuitivamente, la versión global e infinitesimal de una inversión especial (que se determina con 4 parámetros, las componentes de  $b^\mu$ ), se realiza o no se realiza, porque cualquiera que sea el factor de reescalamiento, se vuelve exactamente igual a los demás cuando se toma su infinitésimo.

<sup>8</sup>Ver apéndice D

una cantidad conservada en el tiempo):

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t j^0 + \partial_i j^i = 0 \implies \int_{3\text{-Univ.}} dV \partial_t j^0 = - \int_{3\text{-Univ.}} dV \vec{\nabla}_i j^i \quad (6.33)$$

El operador de derivada temporal puede salir de la integral sobre el espacio, y la integral del lado derecho se anula, porque se la puede expresar como el flujo de  $j^i$  sobre cada una de las caras de la parte espacial del Universo entero en un momento dado, y no tiene sentido suponer que existe tal flujo, porque de ser así, lo que define a  $j^i$  estaría saliendo o entrando al 3-volumen de integración, contradiciendo que se trata de una integral sobre la extensión del Universo entero. De esta forma se obtiene a la carga de Noether y su ecuación de conservación:

$$Q = \int_{3\text{-Univ.}} dV \left( g^{0\nu} \partial_\nu (\phi^2) + 2\phi^2 \partial_\nu g^{0\nu} - 2\phi^2 g^{0\nu} \Gamma^\rho_{\nu\rho} \right) \quad \partial_t Q = \dot{Q} = 0 \quad (6.34)$$

## Capítulo 7

# Teorías de gravedad escalar-tensoriales con invarianza de escala aplicadas al Modelo de Concordancia

### 7.1 Ecuaciones de campo

Con el procedimiento indicado en la sección D.3.2 del apéndice D, se puede determinar a los símbolos de Christoffel para la métrica de FLRW:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^i_{i0} &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma^\theta_{\theta r} &= \Gamma^\psi_{\psi r} = \frac{1}{r} & \Gamma^r_{rr} &= -\epsilon r \frac{1}{\epsilon r^2 - 1} \\
 \Gamma^\psi_{\psi\psi} &= \frac{1}{\tan \psi} & \Gamma^0_{rr} &= \frac{\ddot{a}a}{(\epsilon r^2 - 1)} & \Gamma^r_{\psi\psi} &= r(\epsilon r^2 - 1)(\sin^2 \psi) \\
 \Gamma^0_{\theta\theta} &= -\dot{a}a(r^2) & \Gamma^0_{\psi\psi} &= -\dot{a}a(r^2) \sin^2 \psi & \Gamma^r_{\theta\theta} &= r(\epsilon r^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Y con ellos, las entradas del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\psi\psi} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} \tag{7.2}$$

Y el escalar de Ricci:

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} \tag{7.3}$$

Los D'Alembertianos del campo escalar, de acuerdo con (4.10):

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma^\rho_{\mu\rho} \partial^\mu \phi = \ddot{\phi} + \Gamma^\rho_{0\rho} \dot{\phi} = \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} \tag{7.4}$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi^2 = \partial_t \partial^t \phi^2 + \Gamma^\rho_{\mu\rho} \partial^\mu \phi^2 = \partial_\mu (2\phi \dot{\phi}) + \Gamma^\rho_{\mu\rho} 2\phi \partial^\mu \phi = 2\dot{\phi}^2 + 2\phi \ddot{\phi} + 6\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} \phi \tag{7.5}$$

Con lo que se obtiene, de las ecuaciones de campo:

$$\rho(t) = \frac{\phi^2}{8\pi} \left( 3 \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \frac{1}{2} \phi^2 \right) \quad (7.6)$$

$$8\pi P(t) = \frac{\phi^2}{r^2} + \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \phi^2 R + \frac{2\epsilon\phi^2}{a^2} + \phi^2 \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \quad (7.7)$$

Comparando a las ecuaciones (7.6) y (7.7) con (3.15), se observa que los términos en los que aparece el campo escalar, juegan un papel similar al de la Constante Cosmológica  $\Lambda$ . En el contexto de las ecuaciones de Einstein, la energía del vacío tiene el efecto de una especie de presión negativa, y en el contexto de las teorías de tipo BD, ese efecto proviene de las relaciones que debe haber entre las estructuras del Universo por el hecho de formar sistemas abiertos y que interactúan entre sí a lo largo de la historia de expansión.

Respecto a la falta de justificación física para introducir a la Constante Cosmológica, Einstein sugiere que la naturaleza del espacio-tiempo podría necesitar de una teoría más complicada que la Relatividad General, y menciona que para encontrar tal teoría, cualquier campo que se introduzca, debería contar con una justificación física, o una razón empírica para considerarse. En el caso de la introducción del campo escalar a las teorías de tipo BD, se lo sigue justificando como una interpretación del principio de Mach que difiere de la de Einstein en cuanto a que el contenido del Universo no sólo tiene un efecto sobre su geometría, sino que también es responsable de cualquier movimiento peculiar de las partes que lo forman.

Las teorías escalar-tensoriales más generales como la de Hordenski, están motivadas porque permiten sustituir a la constante cosmológica por términos que no requieren determinar o imponer constantes para definirlos (los términos de auto-interacción), y pueden explicar la manera en la que el Universo debería expandirse en momentos críticos de su historia, como el definido por la última superficie de dispersión, y la época de recalentamiento [10, Pág. 397, 398].

## Capítulo 8

# Conclusiones y consecuencias por explorar

Las teorías de gravedad escalar-tensoriales permiten obtener ecuaciones de campo de segundo orden en el tensor métrico, en las que se introducen nuevos grados de libertad en el sector gravitacional, que podrían describir los fenómenos que se atribuyen a la Constante Cosmológica en el modelo de concordancia. Además, estas teorías son gobernadas por el grupo de simetría  $C(1, 3)$ , más general que el que define a la acción de Einstein-Hilbert  $P(1, 3)$ , que introducen nuevas leyes de conservación.

Es bien sabido que las teorías escalares tensoriales en general no son invariantes bajo transformaciones conformes. Por ejemplo, en el marco de Jordan las partículas de prueba viajan por geodésicas, mientras que en el marco de Einstein éstas se acoplan al campo escalar, violando así el principio de equivalencia. Una motivación para construir una teoría escalar tensorial invariante bajo transformaciones conformes, es que no se altere la estructura de las geodésicas bajo estas transformaciones, de modo que en todos los marcos conformes, el principio de equivalencia sea válido.

El resultado principal de este trabajo, fue haber calculado la corriente de Noether para más adelante explorar las implicaciones fenomenológicas. Para tener mayor certeza sobre la validez de las teorías invariantes de escala como extensiones a la Relatividad General, se puede continuar el trabajo sobre las ecuaciones de Friedmann y de aceleración para obtener expresiones de relevancia en la Cosmometría <sup>1</sup>, como los horizontes cosmológicos, y el valor de la constante de Hubble en términos de parámetros de densidad.

En el aspecto teórico, debería ser posible relacionar el formalismo de las inversiones locales con el de las variedades, con el objetivo de representar la estructura causal de un Universo en expansión a escalas cosmológicas. Esto permitiría, entre otras cosas, superar limitaciones como las que surgen al buscar leyes de transformación para los campos bajo inversiones especiales. El formalismo de las tétradas es una posibilidad, porque permitiría distinguir a las bases de coordenadas como grados de libertad internos, a los cuales se les inducen transformaciones a nivel de la variedad. Otro estudio que permitiría aclarar la naturaleza del campo escalar, es la obtención de una forma particular en la que debe  $\phi(x)$  debe desvanecerse en el infinito, y del efecto que ese comportamiento tiene sobre la forma de la carga asociada a la invarianza de escala. Por último, si se busca una teoría invariante bajo inversiones especiales, esta sería invariante bajo reescalamientos, pero además, necesitaría de una ampliación del concepto de derivada covariante, pues cada punto de la variedad tendría un espacio interno en el cual actúan y se definen elementos de su propio grupo  $C(1, 3)$ , y por lo tanto habría que introducir un operador cuya ley de transformación relacione los parámetros de espacios distintos.

---

<sup>1</sup>“ La parte de la cosmología que trata de la medición de distancias y volúmenes ” [10, pág. 270].



# Apéndice A

## Expresiones de utilidad

### A.1 Resumen

Este apéndice está dedicado a los procedimientos para obtener expresiones que se usan varias veces a lo largo de esta tesis, y a los procedimientos para resultados que sólo se usan una vez, pero su inclusión entorpecería la lectura.

### A.2 Variación de la métrica, en términos de la variación su inversa

Por ser  $g^{\mu\nu}$  componentes del inverso de  $g$ , se cumple  $(g^{-1})g = \mathbb{1} \implies g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = [\mathbb{1}]^{\alpha}_{\beta}$ . La variación de esta expresión es:

$$\underbrace{\delta(g^{\alpha\sigma})g_{\sigma\beta} + g^{\alpha\sigma}\delta(g_{\sigma\beta})}_{\delta(g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta})} = \underbrace{0}_{\delta(\mathbb{1})} \implies \delta(g^{\alpha\sigma})g_{\sigma\beta} = -g^{\alpha\sigma}\delta(g_{\sigma\beta})$$

Se multiplican ambos lados por  $g_{\rho\alpha}$ , sin que el orden de los factores importe, pues está en uso la notación de componentes:

$$g_{\sigma\beta}g_{\rho\alpha}\delta(g^{\alpha\sigma}) = -\underbrace{[\mathbb{1}]^{\sigma}_{\rho}}_{g_{\rho\alpha}g^{\alpha\sigma}}\delta(g_{\sigma\beta}) = -\delta([\mathbb{1}]^{\sigma}_{\rho}g_{\sigma\beta}) = -\delta(g_{\rho\beta})$$

Renombrando índices, la expresión final, y la que se obtendría si se hubiera despejado  $\delta(g^{\mu\nu})$ , son:

$$\delta(g_{\mu\nu}) = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta(g^{\alpha\beta}) \qquad \delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta(g_{\alpha\beta}) \qquad (\text{A.1})$$

Un aspecto de la notación que se usará a menudo, es que  $\delta(g^{\mu\nu})$  es equivalente a la entrada con índices  $\mu, \nu$  de  $\delta(g^{-1})$ . Por lo que se hace mención de  $\delta(g^{\mu\nu})$ ,  $\delta(g^{-1})^{\mu\nu}$ ,  $\delta(g)^{\mu\nu}$  y  $\delta g^{\mu\nu}$  según se quiera hacer énfasis en la variación, o en las sumas implícitas, o se trate de simplificar la notación eliminando paréntesis o aprovechando que la posición de los índices en el símbolo  $g$  es suficiente para distinguir si se trata de componentes de  $g$  o de  $(g^{-1})$ .

### A.3 Variación de la medida de integración

Por la regla de la cadena, se tiene:

$$\delta(\sqrt{-\det g}) = \frac{1}{2\sqrt{-\det g}} \delta(-\det g) \quad (\text{A.2})$$

Luego, es posible calcular  $\delta - \deg g$  en términos de  $\delta g$  si la métrica satisface la fórmula de Jacobi:

Se define a la exponencial de un tensor  $A$ , como otro tensor del mismo rango, cuyas componentes son exponenciales de las componentes correspondientes de  $A$ :

$$[e^A]_{\alpha\beta} = e^{[A]_{\alpha\beta}} \quad (\text{A.3})$$

Si existe una representación en la cual  $A$  toma la forma de una matriz diagonal, entonces su determinante será el producto de los elementos de sus eigenvalores, y el determinante de  $e^A$  será la exponencial de la suma de los eigenvalores de  $A$ . Si  $A$  es una matriz de tamaño  $4 \times 4$ :

$$\det A = \prod_{\alpha=0}^3 [A]_{\alpha\alpha} \implies \det(e^A) = \prod_{\alpha=0}^3 [e^A]_{\alpha\alpha} = e^{[A]_{00}} \dots e^{[A]_{33}} = e^{(A_{00} + \dots + A_{33})} \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado, la traza de  $A$  es un escalar definido como la suma de los elementos de su diagonal. Luego, el exponencial de la traza de  $A$ , es exponencial de la suma de los elementos de la diagonal de  $A$ :

$$\text{tr}A = \sum_{\alpha=0}^3 [A]_{\alpha\alpha} = A_{00} + \dots + A_{33} \implies e^{\text{tr}A} = e^{(A_{00} + \dots + A_{33})} \quad (\text{A.5})$$

Comparando (A.4) con (A.5), se obtiene la Fórmula de Jacobi:

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}A} \quad (\text{A.6})$$

Donde, ahora que no se hace referencia a entradas particulares de ninguna matriz, esta expresión es válida en cualquier representación, con la única condición de que  $A$  sea diagonalizable. Tomando el logaritmo natural de (A.6):

$$\ln(\det(e^A)) = \text{tr}A \quad (\text{A.7})$$

La definición (A.3) se puede invertir, de modo que  $A$  sea el logaritmo natural de la matriz  $B = e^A$ .

$$A = \ln(e^A) = \ln B \quad (\text{A.8})$$

El logaritmo natural de una matriz  $B$  se define de forma análoga al exponente de una matriz:

$$[\ln B]_{\alpha\beta} = \ln(B_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.9})$$

Con lo que (A.7) es:

$$\ln(\det B) = \text{tr}(\ln B) \quad (\text{A.10})$$

Donde la variación total del lado izquierdo es, de acuerdo con la regla de la cadena:

$$\delta(\ln(\det B)) = (\det B)^{-1} \delta(\det B)$$

Y la variación del lado derecho se calcula considerando que la variación de una traza, es la variación de una suma, la cual a su vez es una suma de variaciones. Esto es, la variación de la traza de una matriz, es la traza de la variación de la matriz:

$$\delta(\text{tr}(\ln B)) = \text{tr}(\delta(\ln B)) = \text{tr}(B^{-1}\delta B)$$

Por lo tanto, (A.10) implica:

$$(\det B)^{-1} \delta(\det B) = \text{tr}(B^{-1}\delta B) \implies \delta(\det B) = \text{tr}(B^{-1}\delta B) \det B$$

Llegados a este punto, las únicas condiciones requeridas para satisfacer (A.11), son B diagonalizable (porque se partió de una matriz A diagonalizable), y B invertible (para poder definir B<sup>-1</sup>). La métrica satisface estas características<sup>1</sup>. Luego, si B = -g, y considerando que tr(-g) = -tr g, y δ(-g) = -δg:

$$\delta(\det(-g)) = \delta(-\det g) = \text{tr}(g^{-1}\delta g) \det(-g) \tag{A.11}$$

Reemplazando (A.11) en (A.2):

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-\det g}) &= \frac{1}{2\sqrt{-\det g}} \overset{\text{tr}(g^{-1}\delta g)}{\downarrow} g^{\alpha\beta} \delta(g)_{\alpha\beta} \overset{\det(-g)}{\downarrow} (\sqrt{-\det g})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta(g_{\alpha\beta}) \\ &\quad \uparrow \delta(g)_{\alpha\beta} = \delta(g_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Por último, usando (A.1):

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g} \overset{[\delta]_{\mu}^{\beta}}{\uparrow} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta(g^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) \tag{A.12}$$

## A.4 Variación de las conexiones, en términos de variaciones de la métrica

La variación total de la definición(2.17)

$$\delta(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} \overset{\partial_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}}{\downarrow} \delta(\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \tag{A.13}$$

<sup>1</sup>En este caso, la signatura de la métrica requiere que A sea compleja, para que su logaritmo tenga entradas menores a cero. Por ejemplo:  $g_{11} = -t \implies A_{11} = i\pi f$ , donde  $e^f = t$

Usando (A.1) para reescribir  $\delta g^{\lambda\sigma}$ , se puede recuperar un símbolo de Christoffel:

$$\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} (-g^{\alpha\lambda} \overset{\Gamma^\beta_{\mu\nu}}{\uparrow} g^{\beta\sigma} \delta g_{\alpha\beta}) (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\overset{\sigma \rightarrow \alpha}{\downarrow} \partial_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.14})$$

Luego, se puede factorizar el término  $\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}$ :

$$\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left( \overset{-\delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}}{\uparrow} -2\delta(g_{\alpha\beta})\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.15})$$

Notando que  $\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} - \delta(g_{\alpha\beta})\Gamma^\beta_{\mu\nu}$  son dos de los tres términos necesarios para formar a la entrada  $\mu$ -ésima de la derivada covariante de  $\delta g_{\alpha\nu}$ , se suma cero de forma conveniente a (A.15), para completar dicha derivada:

$$\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left( \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} -\delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \partial_\mu \delta g_{\alpha\nu} - \overset{=0}{\uparrow} \delta g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \delta g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} \right)$$

Nuevamente, los términos  $-\partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} + \delta g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}$  sugieren sumar cero para recuperar  $-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})$ :

$$\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left( -\delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu}) + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \delta g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\alpha} + \overset{-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})}{\downarrow} \delta g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \overset{-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})}{\downarrow} \delta g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \overset{=0}{\uparrow} \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} \right)$$

Y los términos que no se han agrupado, son la descomposición de  $\nabla_\nu(\delta g_{\mu\alpha})$ :

$$\delta(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left( \overset{-\nabla_\nu(\delta g_{\mu\alpha})}{\uparrow} -\delta g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu}) - \overset{-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})}{\downarrow} \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu}) + \overset{\nabla_\mu(\delta g_{\alpha\mu})}{\downarrow} \partial_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \overset{-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})}{\downarrow} \delta g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \right)$$

Renombrando índices, y reordenando índices y términos, se obtiene la expresión estándar para la variación de los símbolos de Christoffel:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} \left( \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.16})$$

## A.5 Variación del tensor de Ricci

Escribiendo a  $R_{\mu\nu}$  en términos de símbolos de Christoffel y sus derivadas:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \quad (\text{A.17})$$

Y distribuyendo la variación sobre los sumandos y productos, se pueden obtener todos los términos que forman derivadas covariantes de variaciones de símbolos de Christoffel, sumando  $0 =$

$\delta(\Gamma^\beta_{\nu\alpha})\Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \delta(\Gamma^\beta_{\nu\alpha})\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$  y renombrando índices mudos:

$$\begin{aligned}
 \delta(R_{\mu\nu}) &= \partial_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \partial_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}) + \overset{\alpha\rightarrow\beta \quad \beta\rightarrow\alpha}{\delta(\Gamma^\alpha_{\mu\nu})\Gamma^\beta_{\alpha\beta}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\delta(\Gamma^\beta_{\alpha\beta}) \\
 &\quad - \underset{\alpha\rightarrow\beta \quad \beta\rightarrow\alpha}{\delta(\Gamma^\beta_{\mu\alpha})\Gamma^\alpha_{\nu\beta}} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\delta(\Gamma^\alpha_{\nu\beta}) + \delta(\Gamma^\beta_{\nu\alpha})\Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \underset{\alpha\rightarrow\beta \quad \beta\rightarrow\alpha}{\delta(\Gamma^\beta_{\nu\alpha})\Gamma^\alpha_{\beta\mu}} \\
 &= \partial_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + \delta(\Gamma^\beta_{\mu\nu})\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \delta(\Gamma^\alpha_{\nu\beta})\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \delta(\Gamma^\alpha_{\mu\beta})\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \\
 &\quad - \partial_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}) - \delta(\Gamma^\beta_{\nu\alpha})\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \delta(\Gamma^\beta_{\alpha\beta})\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta(\Gamma^\alpha_{\nu\beta})\Gamma^\beta_{\alpha\mu} \\
 &= \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha})
 \end{aligned}$$

En conclusión:

$$\delta(R_{\mu\nu}) = \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}) \quad (\text{A.18})$$

## A.6 Variación del término de acoplamiento

$$\begin{aligned}
 \delta(f(\phi)R) &= \overset{\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})}{\delta(f(\phi))} R + f(\phi)\delta R \\
 &= \left(\frac{df(\phi)}{d\phi}\right)\delta(\phi)R + f(\phi)\left(\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) \\
 &= \overset{\delta(f(\phi))}{\left(\frac{df(\phi)}{d\phi}\right)}\delta(\phi)R + f(\phi)\left(\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\overset{\text{Ver (A.18)}}{\left(\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha})\right)}\right) \\
 &= \frac{df(\phi)}{d\phi}R\delta\phi + f(\phi)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha})
 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

De los dos últimos términos, se obtienen más cantidades que dependen de  $\delta g^{\mu\nu}$ , así como términos de superficie. Su desarrollo es suficientemente largo como para requerir sus propias secciones:

### A.6.1 Integración por partes

El primer paso, es llevar a  $f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu})$  a una forma en la que  $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  no sea el argumento de una derivada. Esto se consigue integrando por partes y notando a los términos que son cero por la condición de compatibilidad de la métrica, y los que se anulan cuando las condiciones de frontera son las apropiadas. Luego, se escribe esa variación en términos de variaciones de la métrica, y se usa

la misma estrategia:

$$\begin{aligned}
 f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) &= \nabla_\alpha(f(\phi)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha(f(\phi)g^{\mu\nu}) \\
 &= \nabla_\alpha(f(\phi)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha f(\phi) \\
 &\stackrel{\text{Ignorar por el momento (...)}}{=} \nabla_\alpha(f(\phi)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\nabla_\alpha(f(\phi))\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}) \\
 &= (\dots) - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\mu(-g_{\alpha\sigma}g_{\beta\nu}\delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}) \\
 &= (\dots) + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}(-g_{\alpha\sigma}g_{\beta\nu}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta}) + (\dots) \\
 &= (\dots) + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))\overset{[\mathbb{I}]^\mu_\beta}{g^{\mu\nu}}\overset{[\mathbb{I}]^\lambda_\alpha}{g^{\lambda\sigma}}\overset{[\mathbb{I}]^\mu_\beta}{g_{\alpha\sigma}}\overset{[\mathbb{I}]^\lambda_\alpha}{g_{\beta\nu}}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta} + (\dots) \\
 &= (\dots) + \frac{1}{2}(\nabla_\lambda f(\phi))\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta} + (\dots) \\
 &= (\dots) + \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\lambda f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\beta\nabla_\lambda f(\phi) + \overset{\text{Recuperar}}{(\dots)} \\
 &= (\dots) + \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\lambda f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\beta\nabla_\lambda f(\phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} \\
 &\stackrel{\text{Repetir los últimos 6 pasos}}{=} \overset{\text{Recuperar}}{(\dots)} + \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\lambda f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\beta\nabla_\lambda f(\phi) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\alpha f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\nabla_\beta f(\phi) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f(\phi))g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} \\
 &\stackrel{\text{Repetir el paso anterior}}{=} \nabla_\alpha(f(\phi)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\lambda f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\beta\nabla_\lambda f(\phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\nabla_\beta((\nabla_\alpha f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\nabla_\beta f(\phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\nabla_\sigma(g_{\alpha\beta}(\nabla^\sigma f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\nabla_\sigma\nabla^\sigma f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

La última expresión es más manejable después de renombrar índices para agrupar a todas las derivadas que estén multiplicadas sólo por factores numéricos:

$$\begin{aligned}
 f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) &= \nabla_\rho(fg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} + (\nabla_\sigma f(\phi))\delta g^{\rho\sigma} - (\nabla^\rho f(\phi))g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}((\nabla_\alpha\nabla^\alpha f(\phi))g_{\alpha\beta} - 2\nabla_\alpha\nabla_\beta f(\phi))\delta g^{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

El segundo paso, es seguir el mismo procedimiento con  $-f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha})$ , para obtener:

$$f(\phi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}) = \nabla_\rho \left( f(\phi)g^{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\nabla^\rho f(\phi))g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2}(\nabla^\alpha\nabla_\alpha f(\phi))g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

## A.7 Variación del término cinético

$$\begin{aligned} \delta \left( -\frac{\omega(\phi)}{\phi} \mathcal{X} \right) &= -\overbrace{\delta(\omega(\phi)\phi^{-1})}^{\delta(\omega(\phi))\frac{1}{\phi} + \omega(\phi)\delta(\frac{1}{\phi})} \mathcal{X} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \delta \mathcal{X} \\ &= -\overbrace{\left( \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \right)}^{\delta(\omega(\phi))} \delta(\phi) \frac{1}{\phi} \mathcal{X} + \omega(\phi) \overbrace{\frac{1}{\phi^2} \delta(\phi)}^{-\delta(\frac{1}{\phi})} \mathcal{X} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \overbrace{\delta \mathcal{X}}^{\delta(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)} \\ &= -\left( \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \right) \frac{1}{\phi} \mathcal{X} \delta\phi + \omega(\phi) \frac{1}{\phi^2} \mathcal{X} \delta\phi \dots \\ &\quad \dots - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left( \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu\phi \nabla_\nu\phi + g^{\mu\nu} (\delta(\nabla_\mu\phi) \nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\phi \delta(\nabla_\nu\phi)) \right) \\ &= \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} - \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \right) \mathcal{X} \delta\phi - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) \delta g^{\mu\nu} \dots \\ &\quad \dots - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left( \underbrace{g^{\mu\nu} \delta(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi)}_{\substack{\mu \rightarrow \nu \\ \nu \rightarrow \mu}} + g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \delta(\nabla_\nu\phi) \right) \\ &= \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} - \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \right) \mathcal{X} \delta\phi - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) \delta g^{\mu\nu} - 2 \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \delta(\nabla_\nu\phi) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

### A.7.1 Integración por partes

Por tratarse de variaciones aplicadas directamente a los campos (ver sección), el operador  $\nabla$  permanece invariante, de modo que  $\delta(\nabla_\nu\phi) = \nabla_\nu(\delta\phi)$ . Basta con hacer uso de la regla de Leibniz sobre el último término de (A.23) para descomponerlo en una derivada multiplicada sólo por factores numéricos, y un término multiplicado por  $\delta\phi$ :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \nabla_\nu \delta\phi &= 2 \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \delta\phi \right) - 2 \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \right) \delta\phi \\ &= 2 \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\phi) \delta\phi \right) - 2 g^{\mu\nu} \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu\phi \right) \delta\phi \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Aunque esto es todo lo necesario para descomponer a la variación del término cinético en términos de superficie y productos de variaciones de  $\phi$ , todavía es posible descomponer el segundo término,

distribuyendo la derivada covariante sobre el producto, y usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \right) &= \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} \right) \nabla_\mu \phi + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\
 &= \left( \nabla_\nu \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi} \right) \right) \nabla_\mu \phi + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\
 &= \left( \frac{1}{\phi} \nabla_\nu \omega(\phi) - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \nabla_\nu \phi \right) \nabla_\mu \phi + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\
 &= \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\nu \nabla_\mu \phi
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

## A.8 Variación del potencial escalar

$$\delta(V(\phi)) = \left( \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta\phi \tag{A.26}$$

## A.9 Variación de la parte geométrica de la densidad Lagrangiana

Los términos a desarrollar son las variaciones de los términos de acoplamiento, cinético, y del potencial escalar:

$$\delta\mathcal{L}^{(\text{geom.})} = \delta \left( f(\phi)R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \mathcal{X} - V(\phi) \right) \tag{A.27}$$

Las expansiones completas se muestran en (A.19), (A.23), y (A.26). Si se factorizan las variaciones de los campos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}^{(\text{geom.})} &= \left( \frac{df(\phi)}{d\phi} R + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \mathcal{X} - \frac{1}{\phi} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \mathcal{X} - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta\phi \\
 &+ \left( f(\phi)R_{\mu\nu} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) \right) \delta g^{\mu\nu} \\
 &+ f(\phi)g^{\mu\nu} \nabla_\alpha (\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - f(\phi)g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}) - 2g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) \delta(\nabla_\nu \phi)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

## A.10 Variación total de los campos, en términos de las variaciones propias

La transformación más general sobre un campo  $\phi(x)$  es  $\phi'(x') = \Delta\phi + \phi(x)$ , pero resulta útil hacer uso de la variación del campo por sí mismo, separando así la transformación sobre las coordenadas. Es decir, se busca expresar  $\Delta\phi$  en términos de  $\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$ . Para eso, se realiza una expansión

en series de Taylor de  $\phi'(x')$ , centrada en el punto original  $x$ :

$$\begin{aligned}
 \phi'(x') &= \phi'(x) + (x' - x) \cdot \left( \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x^0} \quad \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x^3} \right) \\
 &+ (x' - x) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi'(x)}{\partial x^0\partial x^0} & \dots & \frac{\partial^2\phi'(x)}{\partial x^0\partial x^3} \\ \frac{\partial^2\phi'(x)}{\partial x^1\partial x^0} & \frac{\partial^2\phi'(x)}{\partial x^1\partial x^1} & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} (x' - x) + \dots \\
 &= \phi'(x) + (\Delta x)^\mu \partial_\mu \phi'(x) + (\Delta x)^\mu \partial_\nu \partial_\mu \phi'(x) (\Delta x)^\nu + \dots
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Que a primer orden en  $\Delta x$ , es  $\phi'(x') = \phi'(x) + (\Delta x)^\mu \partial_\mu \phi'(x)$ . Si se resta  $\phi(x)$  a esta igualdad, se obtiene:

$$\Delta\phi = \underbrace{\phi'(x)}_{\delta\phi} + (\Delta x)^\mu \partial_\mu \phi'(x) - \phi(x) = \partial_\mu \phi'(x) (\Delta x)^\mu + \delta\phi \tag{A.30}$$

Y dado que las transformaciones se realizan sobre objetos definidos en el 4-espacio (ya sea sobre los puntos, o sobre los campos), pero los momentos están definidos en el espacio tangente, sus cambios deben ser inducidos. Los momentos dependen explícitamente de sus campos asociados, y no de los puntos del 4-espacio. La razón de notar esto, es que la variación del momento debe ser producto de la variación en los campos, *a pesar de que el operador  $\partial_\mu$  pueda ser transformado por los puntos*. Esto significa que la variación total, vista como la acción de un operador  $\Delta$ , conmuta con el operador de derivada parcial, así como ocurre con el operador de variación  $\delta$ :  $\Delta(P_\phi) = \Delta\partial_\mu \phi = \partial_\mu \Delta\phi$ .

El mismo razonamiento aplica para el resto de los campos <sup>2</sup>  $g_{\mu\nu}$ , de modo que las variaciones están relacionadas como sigue:

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= \partial_\mu \phi'(x) (\Delta x)^\mu + \delta\phi & \Delta g_{\mu\nu} &= \partial_\alpha g'_{\mu\nu}(x) (\Delta x)^\alpha + \delta g_{\mu\nu} \\
 \Delta\partial_\mu \phi &= \partial_\alpha (\partial_\mu \phi'(x)) (\Delta x)^\alpha + \delta\partial_\mu \phi & \Delta\partial_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\alpha (\partial_\rho g'_{\mu\nu}(x)) (\Delta x)^\alpha + \partial_\rho \delta g_{\mu\nu} \\
 & & \Delta\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\alpha (\partial_\sigma \partial_\rho g'_{\mu\nu}(x)) (\Delta x)^\alpha + \partial_\sigma \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

<sup>2</sup>Los cálculos más generales tratan teorías con  $n$  campos  $f_i$ . En este caso,  $f_1 = \phi$ ,  $f_2 = g_{00}$  etc.



# Apéndice B

## Condiciones de frontera

### B.1 Resumen

Al final de la sección 4.4, se insinuó que la necesidad de requerir condiciones iniciales tiene un efecto sobre la independencia entre campos y sus momentos asociados. Esto parece contradecir las manipulaciones como  $\delta\partial\phi = \partial\delta\phi$  que ya se han utilizado varias veces. La siguiente discusión apunta a dejar más clara la forma en que las definiciones, tanto de  $S$  como de las variables dinámicas, establece la medida en la cual el momento es una cantidad independiente, y las condiciones bajo las cuales el momento es una rapidez de cambio y dirección para los campos.

### B.2 Independencia entre campos y sus derivadas

La acción es una funcional de los campos. Es decir, en  $S[\phi, g]$ , las componentes de la métrica, y el campo escalar, son funciones libres. Esta es la razón de que  $\delta S$  se defina como en (4.25): Su variación es el resultado de variaciones en los campos, y nada más.

Los tiempos inicial y final también forman parte de la definición de  $S$ , pero son **parámetros fijos**, y por lo tanto no figuran en (4.25) de forma explícita. La integral definida  $\int_{t_i}^{t_f} dt$  sólo se puede calcular si se conoce el valor de los campos en los instantes  $t_i$  y  $t_f$ <sup>1</sup>. Esto significa que para estudiar un sistema partiendo de su funcional de acción, las **condiciones iniciales** son tan importantes como la acción misma. Sin ellas, la integral que forma parte de  $S$  no se puede evaluar. Teniendo estos dos elementos, las ecuaciones de campo son los valores de los campos que hacen extrema a la acción en cualquier momento contenido en la región de integración, y se las puede calcular por medio de (4.26). No es necesario hacer nada más.

Sin embargo, en la práctica, la funcional  $S$  se construye una vez que se determina una densidad Lagrangiana para el sistema, y se la usa para escribir a la función Lagrangiana como una integral sobre un 3-volumen. Esto no significa que la acción no sea el objeto principal para describir a un sistema<sup>2</sup>.

La densidad Lagrangiana es una función  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \dots)$  de los campos y sus derivadas (y del tiempo, si describe a un sistema abierto). La razón de que en  $\mathcal{L}$  se considere a  $\phi$  y  $\partial\phi$  como variables

---

<sup>1</sup>Además, se define a un campo por sus valores en todo el espacio, así que  $\phi(t_i, x^j)$  es el valor del campo escalar en un 3-volumen sobre el folio del 4-espacio correspondiente a  $t_i$

<sup>2</sup>Si la Lagrangiana fuera suficiente para estudiar a un sistema, las ecuaciones de Euler-Lagrange podrían deducirse sin la necesidad de partir de la acción, pero entonces se perdería el concepto de condiciones iniciales, pues sólo la integral de  $S$  hace alusión a ellas, pues determina los extremos del intervalo de tiempo sobre el que evolucionan los campos.

independientes, tiene que ver con el hecho de que **la acción precede a la densidad Lagrangiana**.

Si el momento asociado al campo escalar no fuera una variable independiente de  $\phi$ , entonces debe de estar bien definida para todos los puntos en el dominio de integración de  $S$ , pero  $\phi$  no es derivable en los límites de integración, pues el operador  $\partial_\mu$  representa un proceso límite en la vecindad de  $x^\mu$ , la cual no se puede definir en la frontera, porque entonces sería necesario conocer el valor de los campos en instantes previos a  $t_i$ , y posteriores a  $t_f$ , y esta es información que no forma parte de  $S$  (ver figura B.1).

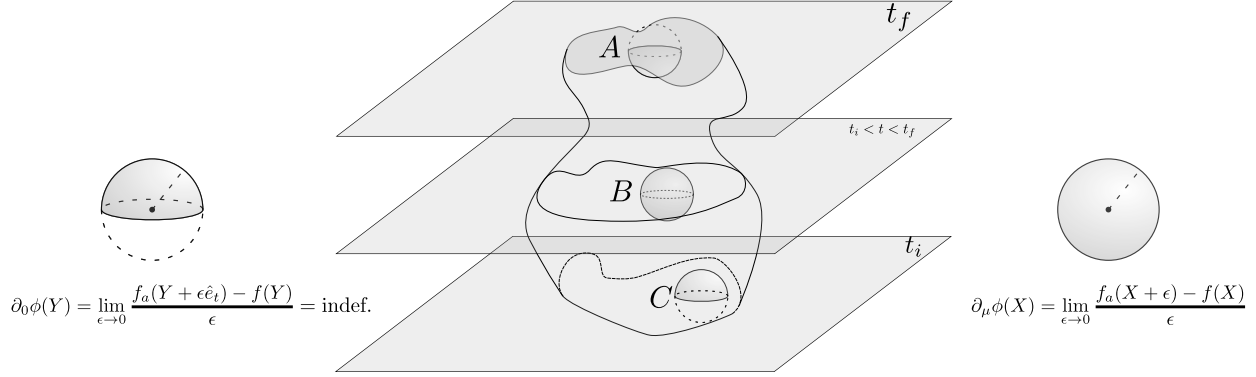


Figura B.1: Las parciales de un campo están bien definidas al interior de la región de integración. Pero en la superficie que la delimita, sólo se pueden definir parciales en direcciones con componentes antinormales a la misma.

Otra forma de notar la necesidad de distinguir posiciones de momentos, es repitiendo el procedimiento mostrado en la sección 4.4.1, y escribiendo al diferencial de  $\mathcal{L}$  como si se tratara de una función de  $\phi$  y  $g$  solamente. Esto conduce incorrectamente a ecuaciones de Euler-Lagrange que corresponden a campos estáticos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$$

Así se confirma que la densidad Lagrangiana es una función no sólo de sus campos, sino también de sus derivadas, y por lo tanto, las condiciones iniciales deben incluir los valores iniciales de los momentos, aceleraciones, y cualquier derivada de los campos que forme parte de  $\mathcal{L}$ . Esto no cambia el significado de las condiciones iniciales, ni la forma de  $\delta S$ . Más bien, si se escribe explícitamente a la acción, entonces, por ser esta una integral de la densidad Lagrangiana, las condiciones iniciales son su valor en los límites de integración <sup>3</sup>.

Una vez hecho lo anterior, se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento no sólo por medio de (4.26), sino también por medio de (4.24). Ambos métodos son válidos y deben producir el mismo resultado. Además, ambos métodos son aplicaciones directas del Principio de Hamilton, y no requieren nada más que lo necesario para definir a  $S$  y a  $\mathcal{L}$  <sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Una forma más literal de observar esta equivalencia, son las condiciones iniciales para la dinámica de un continuo material, se pueden dar en la representación material o Lagrangiana como posiciones y velocidades iniciales, o en la representación espacial o de Euler como las velocidades iniciales[14] (pues en la representación espacial, los puntos que forman al material son conocidos)

<sup>4</sup>Tiempos inicial y final, variables dinámicas (los campos que representan al sistema), y condiciones iniciales (valores iniciales de los campos y las derivadas de los mismos que aparezcan en  $\mathcal{L}$ ). Así como todo el formalismo requerido para definir a los campos y sus leyes de transformación, sobre lo cual hay un resumen en [APÉNDICE].

## B.3 Términos de superficie

La imposibilidad de calcular parciales de los campos en los eventos inicial y final que definen a la acción no constituye ningún problema, pues sus valores se fijan por las condiciones iniciales. Sin embargo, el valor de estas parciales en todos los elementos de superficie que dependen del tiempo presenta un problema de condiciones iniciales que **no forma parte de la definición de acción**. Esto hace que las ecuaciones de campo necesiten **condiciones de frontera**, que son un requisito adicional, y surge de la necesidad de expresar a la Lagrangiana como una integral (definida) de volumen en el espacio. Estas integrales son esenciales para la formulación Lagrangiana de una teoría de campos <sup>5</sup>.

Para establecer condiciones de frontera, es necesario encontrar a los términos de superficie <sup>6</sup> que surgen al variar de forma arbitraria a  $S$ . Para teorías de tipo B-D, estos términos se agrupan en (4.43) como el argumento de una derivada covariante, que se puede distribuir sobre el producto con  $\sqrt{-g}$ , de modo que la integral resultante es un término de superficie.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{U}} d^4x \nabla_{\rho} \left[ \sqrt{-g} \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + (\nabla_{\sigma} f(\phi)) \delta g^{\rho\sigma} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\nabla^{\rho} f(\phi)) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\rho\nu} \delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu} - \frac{\omega(\phi)}{2\phi} (\nabla^{\rho} \phi) \delta\phi \right) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{U}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\rho} \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \dots \right) + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{U}} d^4x \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \dots \right) \overset{=0}{\nabla_{\rho} \sqrt{-g}} \\
&= \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\mathcal{U}} d^3x \sqrt{-\gamma} \left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \dots \right) \hat{n}_{\rho}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Donde  $\sqrt{-\gamma}$  es la raíz de (menos) el determinante de la métrica encajada en la hipersuperficie, y  $\hat{n}_{\rho}$  son las componentes del vector normal a la misma. La región de integración es la hipersuperficie que delimita al 4-volumen  $\mathcal{U}$ .

Dada esta última forma de la integral de superficie, se identifican dos maneras distintas de que esta se evalúe a cero <sup>7</sup>:

### B.3.1 Condición de Dirichlet

Si las variaciones de los campos en la hipersuperficie son nulas:

$$\delta g_{\mu\nu} \Big|_{\partial\mathcal{U}} = 0 \qquad \delta\phi \Big|_{\partial\mathcal{U}} = 0 \tag{B.2}$$

Entonces:

$$\left[ f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + (\nabla_{\sigma} f(\phi)) \delta g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (\nabla^{\rho} f(\phi)) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\rho\nu} \delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu} - \frac{\omega(\phi)}{2\phi} (\nabla^{\rho} \phi) \delta\phi \right]_{\partial\mathcal{U}} \overset{=0}{=} 0$$

$\uparrow \delta g_{\mu\nu}=0 \Rightarrow \nabla \delta g_{\mu\nu}=0 \Rightarrow \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=0$

$\overset{=0}{\downarrow} \delta\phi$

$$\tag{B.3}$$

<sup>5</sup>Pues permiten tratar posiciones y tiempos como aspectos de un mismo fenómeno

<sup>6</sup>Términos a los que se les puede aplicar el teorema de la divergencia

<sup>7</sup>Sin considerar el caso trivial en el que los campos mismos son iguales a cero

Los términos que no están anotados se anulan por las mismas razones que los que sí lo están.

### B.3.2 Condición de Neumann

La última integral en (B.1) representa el flujo de cada sumando sobre la superficie de integración. Para que estos flujos sean iguales a cero, sin que las variaciones, ni los campos mismos, sean iguales a cero, basta con igualar a las divergencias a cero:

$$\hat{n}_\rho \nabla^\rho g_{\mu\nu} = 0 \qquad \hat{n}_\rho \nabla^\rho \phi = 0 \qquad (\text{B.4})$$

De modo que:

$$\left( f(\phi) g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho + (\nabla_\sigma f(\phi)) \delta g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} (\nabla^\rho f(\phi)) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(\phi) g^{\rho\nu} \delta\Gamma_{\sigma\nu}^\sigma - \frac{\omega(\phi)}{2\phi} (\nabla^\rho \phi) \delta\phi \right) \hat{n}_\rho = 0 \quad (\text{B.5})$$

$\xrightarrow{\nabla^\rho f(\phi) \hat{n}_\rho = \frac{df(\phi)}{d\phi} (\nabla^\rho \phi \hat{n}_\rho) = 0}$   
 $\xrightarrow{\nabla^\rho g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \delta(\nabla^\rho g_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \nabla^\rho(\delta g_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0}$   
 $\xrightarrow{=0}$

Los términos que no están anotados se anulan por las mismas razones que los que sí lo están.

### B.3.3 Significado físico de las condiciones de frontera

Variaciones nulas corresponden a valores fijos de los campos. Si se impone esta condición, el resto del Universo no tiene efecto alguno sobre el interior del 4-volumen sobre el que se integra. En otras palabras, imponer condiciones de Dirlichet, equivale a estudiar un sistema **aislado**. Esta idea contradice el principio de Mach, que sugiere que estudiar un sistema que no sea el Universo entero como un sistema aislado, carece de sentido físico, pues la evolución de una región del Universo es inseparable de su interacción con el resto del mismo.

Las condiciones de Neumann corresponden a un sistema **cerrado**, pero no necesariamente aislado. Es decir, la fuente de energía que el resto del Universo representa, puede transferir esa energía al sistema, pero el sistema debe ceder exactamente la misma cantidad en todo momento. Esta interpretación sí es compatible con el principio de Mach, y se cumple naturalmente para la métrica, gracias a la condición de compatibilidad  $\nabla g = 0$ .

La segunda condición en (B.4) (la condición de Neumann sobre el campo escalar) también se satisface de forma natural, pues, de acuerdo con la Ley de Gauss, si el flujo del campo vectorial  $\nabla\phi$  sobre la superficie cerrada  $\partial\mathcal{U}$  es nulo, entonces dicha superficie no encierra ningún objeto capaz de producir variaciones en  $\phi$ , lo cual es consistente con la interpretación del campo escalar como el efecto del resto del Universo sobre el sistema.

Por lo tanto, para las teorías de la familia de BD, no hace falta imponer condiciones de frontera para que los términos de superficie se desvanezcan.

### B.3.4 Condiciones más avanzadas

Otras formas válidas de anular a los términos de superficie son las llamadas *condiciones mixtas* (hay sectores de la superficie que satisfacen (B.2), y sectores que satisfacen (B.4)), y las *condiciones de Robin*, que son combinaciones lineales de las condiciones de Neumann y de Dirlichet. Ninguna de estas condiciones es realmente útil, ya que se ha descartado el uso de condiciones de Dirlichet por ser incompatibles con el principio de Mach.

## B.4 Fronteras en el infinito

En la sección B.3.3 se concluyó que la forma en la que se define a los campos  $g$  y  $\phi$  es tal que ambos satisfacen condiciones de Neumann sin que haya necesidad de imponerlas. Una consecuencia de esto, es que el valor de los campos converge a cero más rápido de lo que el volumen sobre el que se integra diverge. Dicho de otra manera, como las condiciones de frontera no son necesarias para anular términos de superficie <sup>8</sup>, los límites de integración sobre la densidad Lagrangiana tampoco influyen en la forma de las ecuaciones de campo, y entonces se puede llevar a la frontera hacia el infinito, como se muestra en la figura B.2



Figura B.2: El cilindro consta de dos hiper-superficies de tiempo constante, y una de radio constante. El hecho de que los términos de superficie se anulen para cualquier superficie, implica que en el límite  $r \rightarrow \infty$ , los campos decaen más rápido de lo que el volumen crece.

En la figura B.2, las hiper-superficies que definen a las tapas inferior y superior, y a la pared del mismo, se pueden calcular como sigue, respectivamente:

$$V_i = \left[ \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \sqrt{|g_{11}g_{22}g_{33}|} d\psi d\theta dr \right]_{t=t_i} \quad (\text{B.6})$$

$$V_f = \left[ \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \sqrt{|g_{11}g_{22}g_{33}|} d\psi d\theta dr \right]_{t=t_f} \quad (\text{B.7})$$

$$V_3 = \int_{t=t_i}^{t=t_f} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \sqrt{|g_{00}g_{22}g_{33}|} d\psi d\theta dt \quad (\text{B.8})$$

<sup>8</sup>En contraste con las condiciones iniciales, que sí lo son

Con el tensor métrico dado por (3.5). El 3-volumen de las tapas, depende de la curvatura:

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_n = 2\pi \left( R\sqrt{1+R^2} - \operatorname{arcsinh}(R) \right) \left( a(t_n) \right)^{\frac{3}{2}} & \text{Cuando } \epsilon = -1 \\ V_n = \frac{4}{3}\pi R^3 \left( a(t_n) \right)^{\frac{3}{2}} & \text{Cuando } \epsilon = 0 \\ V_n = 2\pi \left( \operatorname{arcsin}(R) - R\sqrt{1-R^2} \right) \left( a(t_n) \right)^{\frac{3}{2}} & \text{Cuando } \epsilon = 1 \end{array} \right. \quad (\text{B.9})$$

Mientras que el volumen de la pared, depende de la evolución del factor de escala:

$$V_3 = 4\pi R^2 \int \left( a(t) \right)^{\frac{3}{2}} dt \quad (\text{B.10})$$

El hecho de que el término de frontera (ecuación (4.47)) deba tender a cero en el límite  $R \rightarrow \infty$ , más rápido que las paredes y las tapas del cilindro, corresponde a una métrica asintóticamente plana, y un campo escalar que se desvanece en el infinito<sup>9</sup>. Esto significa que el infinito no tiene influencia sobre el resto del espacio, lo cual es consistente con la idea de que las inversiones especiales son una simetría a pesar de sus singularidades (apéndice C).

---

<sup>9</sup>O en el caso de un Universo esférico, un campo que tiende a cero en el límite  $R \rightarrow \epsilon^{-1}$

## Apéndice C

# Líneas de mundo bajo inversiones especiales

En esta sección, se observa el efecto de las inversiones especiales como se hace en [19] y [15]. También se incluyen casos más generales, y se discute su compatibilidad con el principio de Hamilton.

### C.1 Partículas relativistas en el marco conforme

En un espacio de Minkowski, la trayectoria de una partícula que se desplaza libremente a velocidad  $c$ , se corresponde con una recta de pendiente  $c$ . Por la isotropía del espacio<sup>1</sup>, todas las direcciones de desplazamiento que podría tener dicha partícula, son equivalentes, de modo que se puede elegir un sistema de coordenadas cartesiano, tal que la dirección de desplazamiento coincida con un eje<sup>2</sup> sin perder generalidad. Similarmente, como el espacio es homogéneo, se puede elegir un origen que coincida con un punto de la línea de mundo de la partícula, de modo que esta forme parte del cono de luz correspondiente al sistema de referencia.

Con los arreglos mencionados, la línea de mundo se corresponde con la recta  $x = ct$ . En unidades naturales<sup>3</sup>,  $x = t$ . Ahora, si se transforma a ese espacio por medio de 5.5, Los puntos  $r$  de la recta, parametrizadas por  $t$ , pasarán a ser:

$$\begin{aligned}
 (r^0)' &= \frac{t - b^0 \overbrace{\|r\|^2}^{\|r\|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 = -t^2 + t^2 + 0 = 0}}{1 - 2(tb^0 + \underbrace{x}_{x=t} b^1 + \underbrace{y}_{y=0} b^2 + \underbrace{z}_{z=0} b^3) + \|b\|^2 \underbrace{\|r\|^2}_{\|r\|^2=0}} = \frac{t}{1 - 2t(b^0 + b^1)} \\
 (r^1)' &= \frac{x - b^1 \|x\|^2}{1 - 2(tb^0 + x b^1 + y b^2 + z b^3) + \|b\|^2 \|r\|^2} = \frac{t}{1 - 2t(b^0 + b^1)} \\
 (r^2)' &= \frac{y - b^2 \|x\|^2}{1 - 2t(b^0 + b^1)} = 0 & (r^3)' &= \frac{z - b^3 \|x\|^2}{1 - 2t(b^0 + b^1)} = 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

<sup>1</sup>Ver sección 3.3

<sup>2</sup>También, se pueden usar coordenadas esféricas o cilíndricas para simplificar el estudio de direcciones arbitrarias, pero en ese caso la coordenada radial no puede explicar lo que ocurre en el origen.

<sup>3</sup>Ver ecuación (2.7)

Lo cual es válido para todos los instantes  $-\infty < t < \infty$ , y para el futuro absoluto  $t \rightarrow \infty$  y pasado absoluto  $t \rightarrow -\infty$ . En conclusión, la geodésica nula  $t = t, x = t, y = z = 0$  se transforma como sigue:

$$\begin{cases} t = t \\ x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = \frac{t}{1 - 2t(b^0 + b^1)} \\ x' = \frac{t}{1 - 2t(b^0 + b^1)} \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Lo cual corresponde nuevamente a una geodésica nula, pues los puntos que la forman son intervalos de longitud  $-(t')^2 + (x')^2 + 0 + 0 = 0$ . Sin embargo, el orden eventos se pierde al pasar de un marco a otro. En particular, de (C.2), se observan divergencias cuando  $t = 1/(2(b^0 + 2b^1))$ , que son imposibles de evitar con valores grandes de  $b$ , porque  $t$  no está acotada. Además, de la regla de L'Hôpital se puede notar que  $\lim_{(t \rightarrow \pm\infty)} t' = (1 - 2(b^0 + b^1))^{-1}$ .

La siguiente figura incluye estos casos límite, y otros puntos de interés que muestran la forma en la que el orden de los eventos en un intervalo nulo se transforma al pasar a un marco conforme:

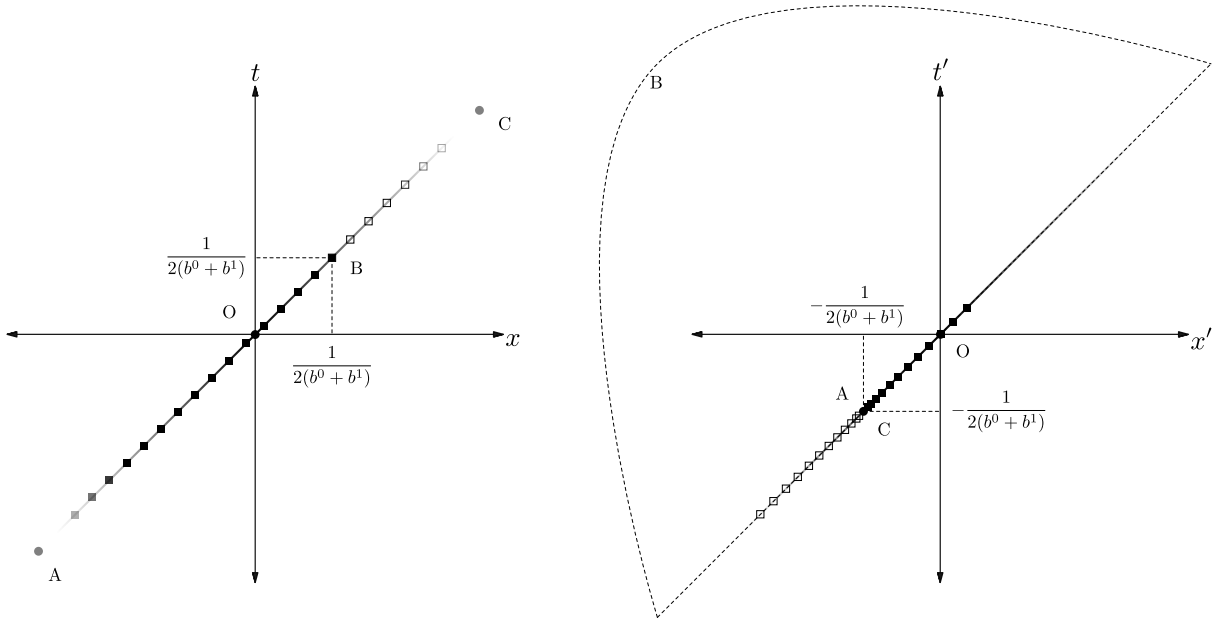


Figura C.1: Inversión conforme especial y la línea de mundo para una partícula relativista en ambos marcos. Los puntos señalados son, en el marco original: **O**: Origen del sistema de coordenadas. **A**: Pasado absoluto. **B**: Evento que se dispara en el marco conforme. **C**: Futuro absoluto. **Cuadrados negros**: Eventos previos a **B**, equidistantes. **Cuadrados blancos**: Eventos posteriores a **B**, equidistantes.

## C.2 Partículas en reposo en el marco conforme

Se puede fijar un sistema de referencia a partículas libres, de modo que su línea de mundo coincida con el eje de tiempo. Luego, todos sus puntos están dados por  $r = (t, 0, 0, 0)$ , y sus normas están

dadas por  $\|r\|^2 = -t^2$ .

En este caso, los puntos de su trayectoria en el 4-espacio, se transforman como:

$$\begin{cases} t = t \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = \frac{t + t^2 b^0}{1 - 2tb^0 + (-t^2)(-(b^0)^2 + (b^1)^2)} \\ x' = \frac{t^2 b^1}{1 - 2tb^0 + (-t^2)(-(b^0)^2 + (b^1)^2)} \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Que diverge en las raíces la ecuación  $1 - 2tb^0 + (-t^2)(-(b^0)^2 + (b^1)^2) = 0$ , que son:

$$t = \frac{2b^0 \pm \sqrt{4(b^0)^2 + 4(-(b^0)^2 + (b^1)^2)}}{2((b^0)^2 - (b^1)^2)} \quad (\text{C.4})$$

Los casos más generales se muestran más adelante, pero el más ilustrativo de las consecuencias a nivel físico de una inversión especial, se puede considerar para  $b^0 = 0$ , cuyos límites al infinito en el marco transformado, son:

$$\begin{aligned} (t = 0, x = 0) &\rightarrow (0, 0) \\ (\pm\infty, 0) &\rightarrow \left( -\frac{2b^0}{2((b^1)^2 - (b^0)^2)}, -\frac{2b^1}{2((b^1)^2 - (b^0)^2)} \right) = \left( 0, -\frac{1}{b^1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Y los límites cerca de las discontinuidades, que de acuerdo con (C.4) son los puntos  $t = \pm \frac{1}{b^1}$ , son:

- Para  $-\frac{1}{b^1} < t < \frac{1}{b^1}$ :
  - $(t', x') \rightarrow (\infty, -\infty)$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{b^1}$ ,
  - $(t', x') \rightarrow (-\infty, -\infty)$  cuando  $t \rightarrow -\frac{1}{b^1}$
- Para  $t < -\frac{1}{b^1}$ :
  - $(t', x') \rightarrow (\infty, \infty)$  cuando  $t \rightarrow -\frac{1}{b^1}$ ,
- Para  $t > \frac{1}{b^1}$ :
  - $(t', x') \rightarrow (-\infty, \infty)$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{b^1}$ ,

Así, la línea de mundo se divide en las dos ramas de una hipérbola desplazada.

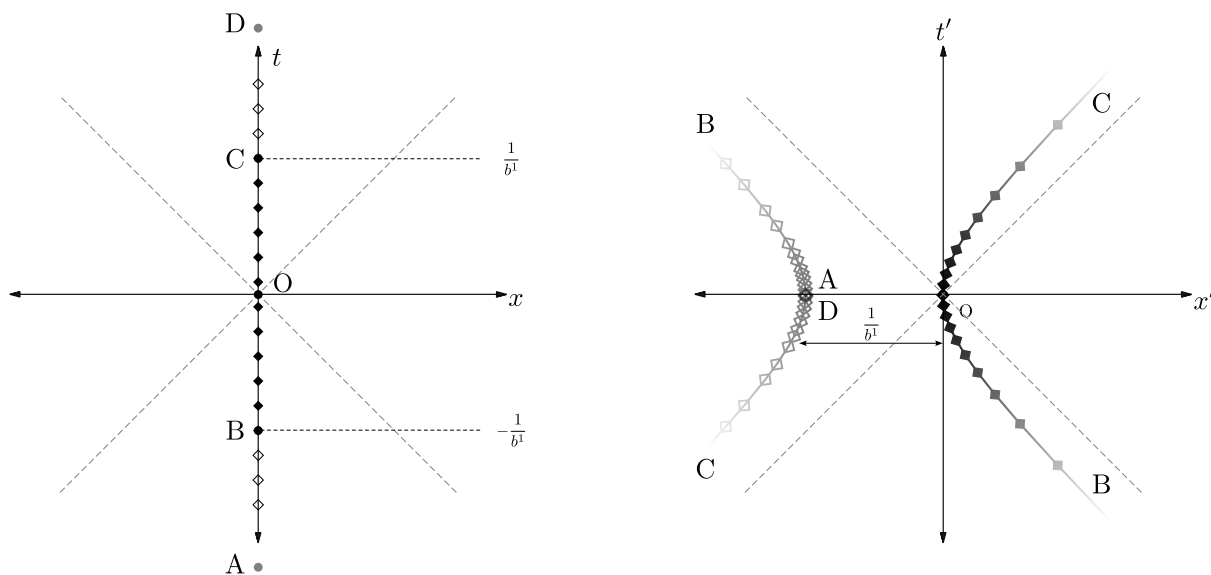


Figura C.2: Inversión conforme especial y la línea de mundo para una partícula en reposo en ambos marcos. Los puntos señalados son, en el marco original: **O**: Origen del sistema de coordenadas. **B** y **C**: Eventos que se disparan en el marco conforme **A**: Pasado absoluto **D**: Futuro absoluto. **Cuadrados negros**: Eventos intermedios a las discontinuidades, equidistantes. **Cuadrados blancos**: Eventos anteriores y posteriores a las discontinuidades, equidistantes.

### C.3 Compatibilidad con el principio de Hamilton

La diferencia en el orden de los eventos de las geodésicas nulas no supone ningún problema, ya que por tratarse de las líneas de mundo de partículas relativistas, estas no experimentan el paso del tiempo como una sucesión eventos, porque no se las puede asociar con un sistema de referencia propio. Este mapeo de intervalos nulos a intervalos nulos indica que los conos de luz, que son los que determinan a la estructura causal del espacio de Minkowski, se corresponden en el marco conforme con conos de la misma forma <sup>4</sup>, lo cual es suficiente para dotar al espacio transformado de una estructura causal en el sentido de que cualquier señal puede propagarse a lugares al interior del cono superior, o provenir de lugares al interior del cono inferior, mientras que puntos externos a ellos son físicamente inalcanzables, y por lo tanto no hay interacciones sobre el origen que provengan de ahí, como sucedía en el sistema de referencia original.

El caso de las partículas sobre las cuales sí se puede definir un sistema de referencia propio, es más complicado. Los aspectos más importantes de las líneas de mundo para partículas libres en el marco de referencia conforme, son el hecho de que todos los puntos que se encuentran entre las discontinuidades, forman una de las ramas de la hipérbola, y esa rama está siempre contenida en los conos de luz, y mantiene el orden de sus eventos.

El evento que coincide con el origen, permanece sin cambio, y es simultáneo tanto con los eventos que correspondían al pasado y futuro absolutos. Sin embargo, está causalmente desconectado de ellos, pues la rama que los contiene está compuesta de intervalos espacialoides.

<sup>4</sup>Misma apertura, y misma ubicación de los vértices.

### C.4 Otros ejemplos de partículas libres

Las siguientes figuras corresponden a casos generales de partículas que se desplazan a velocidad  $v \in (-1, 1)$ , y se encuentran a  $d$  unidades del origen, en un sistema de referencia caracterizado por una inversión conforme especial de magnitud con un vector de desplazamiento de componentes  $b^0$  y  $b^1$ :

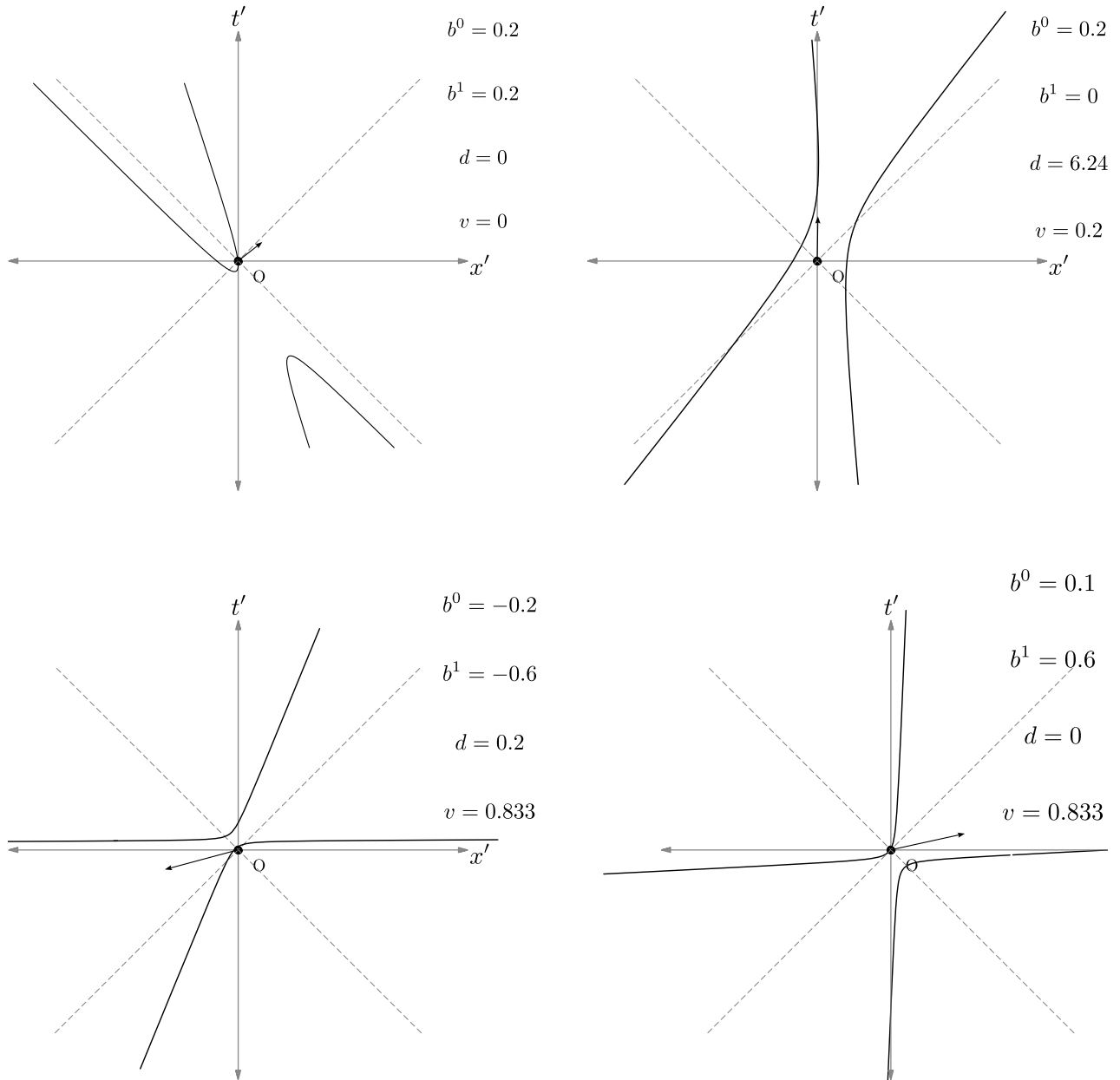


Figura C.3: Inversiones especiales aplicadas a líneas de mundo para partículas libres. La flecha representa al vector de desplazamiento  $b$ , ampliado 10 veces.

Todas las gráficas de la figura C.4 son de la forma:

$$(t, x) \rightarrow$$
$$(t', x') = \left( \frac{t - b^0(-t^2 + (vt + d)^2)}{1 - 2(tb^0 + (vt + d)b^1) + (-(b^0)^2 + (b^1)^2)(-t^2 + (vt + d)^2)}, \right. \quad (\text{C.6})$$
$$\left. \frac{vt - b^0(t^2 + (vt + d)^2)}{1 - 2(tb^0 + (vt + d)b^1) + (-(b^0)^2 + (b^1)^2)(-t^2 + (vt + d)^2)} \right)$$

## Apéndice D

# Cadabra2 para manipular expresiones

Cadabra 2 es un conjunto de librerías y herramientas para representar tensores de modo que el programa tenga una noción de su estructura, y los exponga al usuario como se los suele representar en la literatura. Así, se pueden formar y manipular expresiones con ellos, de una forma muy similar a lo que sería un cálculo con papel y lápiz. La filosofía detrás de su diseño, se puede resumir como, “ el programa representa y manipula, mientras el usuario resuelve y simplifica ”, es decir, las sesiones <sup>1</sup> de Cadabra2 no tienen concepto de lo que es un resultado final, ni cuentan con objetivos que el usuario no defina de manera explícita[5].

Esto hace que sea ideal para reducir o estudiar expresiones tensoriales que son sencillas en cuanto que se pueden resolver por mecanización, pero especialmente largas y tediosas, lo cual es común cuando hay muchas contracciones con más de un índice, porque la cantidad de entradas por considerar crece rápidamente. A pesar de esto, Cadabra 2 puede interactuar con `sympy` para los casos en los que se quieren evaluar expresiones numéricamente, graficar estos resultados, o simplificar expresiones para entradas particulares.

El propósito principal de este apéndice es informar sobre su existencia, y colocar las partes que más se utilizaron o podrían utilizarse para realizar los cálculos que aparecen en este trabajo. Una explicación detallada de su utilidad y eficiencia, aplicada al estudio de teorías de gravedad escalar-tensoriales, se puede encontrar en[9].

## D.1 Forma de trabajar con Cadabra2

### D.1.1 Sintaxis

Si no se está programando un script de Python o código en C++, la sintaxis que se debe usar es una mezcla de Python y un lenguaje propio. Las sentencias escritas en Python se ejecutan como un subproceso, no por `cadabra2`, sino por el intérprete de `python` del sistema. Esta distinción es importante cuando se piensa en programar algoritmos que no formen parte del “núcleo” <sup>2</sup> de Cadabra 2, pues entra en juego los conceptos de ámbito y de localidad <sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>Ver secciónD.1.2

<sup>2</sup><https://cadabra.science/man.html>

<sup>3</sup>El ámbito de una sección de código, se puede entender como el conjunto de variables a la que el código puede acceder en un momento dado. La localidad de un programa se refiere en este contexto, a qué tan a menudo se reutiliza una variable

### D.1.2 Formas de ejecutar código, y formatos de salida

Cadabra2 incluye su propia shell para usarse a modo de REPL, en el que las respuestas se muestran formateadas como código de  $\text{\LaTeX}$ , o con los símbolos que la terminal soporte. Si se usa la interfaz gráfica (su ejecutable se llama `cadabra2-gtk`), la misma shell se ejecuta en el fondo, pero sus respuestas se muestran como `svg`'s generados con MicroTeX, y se puede dividir el código en celdas, similares a las de un kernel de `Jupyter`. También se puede compilar un verdadero kernel de `Jupyter`, si la interfaz gráfica no es suficiente. Por último, se pueden ejecutar programas directamente desde un intérprete de `Python`, si se importan las librerías apropiadas, o se pueden compilar ejecutables a partir de código en `C++` si se se usa directamente `cadabra2++`.

### D.1.3 Integración con $\text{\LaTeX}$

La sintaxis, ejecución, y formatos de salida de Cadabra 2, hacen que sea relativamente sencillo <sup>4</sup> conectar el proceso de escribir documentos científicos, con el proceso de manipular la clase de expresiones que se encuentran en teorías de campos. Los ejecutables `cadabra2cadabra`, `cadabra2html`, `cadabra2ipynb`, `cadabra2latex`, y `cadabra2python` sirven al propósito de convertir scripts de `cadabra` o `Python`, así como notebooks de `Jupyter` o `cadabra2-gtk`, de un lenguaje a otro, o convertir sus resultados en código de  $\text{\LaTeX}$  o texto en `HTML`. Con todo esto y las funciones del compilador de  $\text{\LaTeX}$  que se use, es posible reproducir hasta cierto punto, la funcionalidad de librerías más integradas con  $\text{\LaTeX}$ , pero menos avanzadas, como `LuaCAS`. Los macros y símbolos que no formen parte de `MicroTeX`, se pueden sustituir por otros, con ciertas limitaciones, asignándole la propiedad `:LaTeXForm` al símbolo de interés <sup>5</sup>.

## D.2 Ventajas y desventajas

Dado que se trata de un producto gratuito y sin restricciones, desarrollado principalmente por un investigador en su tiempo libre, Cadabra 2 carece de algunas comodidades que se consideran estándar en software similar pero de paga, o lenguajes soportados por esos programas. Por ejemplo, el resaltado de sintaxis funciona en los editores de texto de `Jupiter` y `cadabra2-gtk`, pero no en editores de texto de uso general como `Notepad++`, `Vim`, o `VSCodium`, los mensajes de error pueden ser difíciles de interpretar, y las opciones para depurar y validar código son las de `python` y `C++`, sin que exista un equivalente para el lenguaje propio de `cadabra2`.

Sin embargo, por ser libre y de código abierto, las prioridades para incluir nuevas funciones y características, sólo están limitadas por el interés de la comunidad en aportarlas. Ejemplos de contribuciones externas se dan en la sección de agradecimientos del repositorio oficial. Además, el autor principal y otros miembros activos, suelen brindar apoyo para problemas específicos en el foro <sup>6</sup>, y el sitio oficial <sup>7</sup> incluye un manual, ejemplos, y guías para usar y contribuir al código.

## D.3 Definición y manipulación de símbolos y expresiones

El operador `:=` asigna variables a expresiones, cualquier símbolo de  $\text{\LaTeX}$  se convierte en un símbolo si es la primera vez que lo introduce al código, junto con sus índices y sus posiciones. Para hacer referencia a estas expresiones, se usa la sintaxis `@(variable)`. Símbolos asignados por este

<sup>4</sup>O al menos posible para alguien sin formación profesional enfocada en la programación.

<sup>5</sup><https://cadabra.science/manual/LaTeXForm.html>

<sup>6</sup><https://cadabra.science/qa/>

<sup>7</sup><https://cadabra.science/man.html>

método pueden resultar demasiado ambiguos para `cadabra2`, en cuyo caso se puede usar la sintaxis `<simbolo>::<propiedad>`<sup>8</sup> para especificar más propiedades, como sus simetrías o antisimetrías, la naturaleza de sus índices, si se están estudiando teorías con grados de libertad internos<sup>9</sup>, y sus propiedades como operadores. A continuación se muestran ejemplos que ilustran estas ideas:

```

1 # Operadores
2 \partial{#}::PartialDerivative.
3 \nabla{#}::Derivative.
4
5 # Tensor simétrico, y que puede bajar índices con los que esté contraído
6 g_{\alpha \beta}::LaTeXForm("[g(x)]").
7 g_{ \mu \nu }::Metric.
8 g_{\mu \nu}::Symmetric.
9
10 # Escalar
11 \phi::LaTeXForm("\phi(x)").
12
13 # Expresión que define a dos nuevos símbolos: X y Y,
14 # con uno y tres índices respectivamente
15 mi_expresion := g_{\mu \nu}X^{\rho} + Y_{\mu \nu}k^{\rho}
```

Además de expresiones algebraicas como la que se asignó a la variable `mi_expresion` del ejemplo anterior, existen Reemplazos, igualdades, y patrones o expresiones regulares, cuyo uso se explicará cuando se muestre la aplicación a este trabajo. El uso genérico de Cadabra 2, consiste en definir a todos los símbolos de la teoría, con el nivel de precisión necesario para especificar la clase de sustituciones válidas, después, construir expresiones, y finalmente, transformar esas expresiones un paso a la vez. Para mantener este apéndice relativamente corto, sólo se explicará el procedimiento seguido para calcular la expresión dada por la ecuación (6.22), para el caso de una transformación pasiva, y hará mención del uso de `sympy` para obtener las ecuaciones de Friedmann y de aceleración, para la teoría de tipo BD que presenta invarianza de escala.

### D.3.1 Elementos necesarios para el cálculo de las corrientes de Noether

En el caso de una teoría de gravedad escalar-tensorial, la posición de los índices distingue a la variedad de su espacio dual, por lo que sería conveniente definir una lista de índices, y asignarle a la lista la propiedad `Indices( position=fixed )`. Además, se asignan símbolos para el tensor métrico y el campo escalar como se hizo en el ejemplo anterior, y se utilizan estos símbolos para construir una expresión que representa a  $\mathcal{L}^{(\text{geom.})}$  como aparece en la ecuación(4.35):

```

# --- Librerías ---
from cdb.utils.develop import algo, Algorithm

## -- Indices --

indices_einstein := {
    \alpha, \beta,
```

<sup>8</sup>En general: `<simbolo>_{<subindices>}^{<superindices>}::<propiedad>(<opciones>)`

<sup>9</sup>Este sería el caso si por ejemplo se utilizara el formalismo de las tétradas, en el que los índices de Lorentz se distinguen de índices de mundo, como se sugiere en la sección5.4.

```

\gamma, \eta,
\mu, \nu,
\rho,
\lambda#
}.
@(indices_einstein)::Indices( position=fixed );

## -- Derivadas respecto a coordenadas --
\partial{#}::PartialDerivative.
\nabla{#}::Derivative.

## -- Campos --
g_{\alpha \beta}::LaTeXForm("[g(x)]").
g_{ \mu \nu }::Metric.
g_{\mu \nu}::Symmetric.

g^{\alpha \beta}::LaTeXForm("[g^{-1}(x)]").
g^{\mu \nu}::InverseMetric.
g^{\mu \nu}::Symmetric.

\delta^{\mu}_{\nu}::KroneckerDelta.
\delta_{\mu}^{\nu}::KroneckerDelta.

\phi::LaTeXForm("\phi(x)").

## -- Momentos --

\p1g_{\alpha \mu \nu}::LaTeXForm("P1g").
\p1phi_{\mu}::LaTeXForm("P1f").
\p1phi^{\mu}::LaTeXForm("P1f").

def derivative_to_moment(ex):
    repl = $\partial_{\alpha}{ g_{\mu \nu} } = \p1g_{\alpha \mu \nu}$
    substitute(ex, repl)

    repl = $\partial_{\alpha}{ \phi } = \p1phi_{\alpha}$
    substitute(ex, repl)

    return ex

def manip_inverse_metric(ex):
    repl = $ g^{\mu \nu} -> g_{\alpha \beta} g^{\alpha \mu} g^{\beta \nu}$
    substitute(ex, repl)

    return ex

## -- Aceleración --

```

```

\p2g_{\alpha \beta \mu \nu}::LaTeXForm("P2g").
56
57
58
def derivative_to_accel(ex):
59
    repl = # ... <-- se cortó esta línea para ajustarse a la página
60
    $\partial_{\alpha}{ \p1g_{\beta \mu \nu} } = # ...
61
    \p2g_{\alpha \beta \mu \nu}$ # ... <-- Fin de la línea
62
    substitute(ex, repl)
63
64
    repl = # ... <-- se cortó esta línea para ajustarse a la página
65
    $\partial_{\alpha}{ \partial_{\beta}{ g_{\mu \nu} } } = # ...
66
    \p2g_{\alpha \beta \mu \nu}$ # ... <-- Fin de la línea
67
    substitute(ex, repl)
68
69
    return ex
70
71
## -- Contracciones de la métrica --
72
73
\Gamma^{\alpha}_{\mu \nu}::TableauSymmetry( shape={2}, indices={1,2} ).
74
Christoffel := \Gamma^{\rho}_{\mu \nu} =
75
    1/2 g^{\rho \eta} (
76
        \partial_{\mu}{ g_{\eta \nu} }
77
        + \partial_{\nu}{ g_{\mu \eta} }
78
        - \partial_{\eta}{ g_{\mu \nu} }
79
    );
80
81
RicciT := R_{\mu \nu} =
82
    \partial_{\rho}{ \Gamma^{\rho}_{\mu \nu} }
83
    - \partial_{\nu}{ \Gamma^{\rho}_{\mu \rho} }
84
    + \Gamma^{\rho}_{\mu \nu} \Gamma^{\eta}_{\rho \eta}
85
    - \Gamma^{\rho}_{\mu \eta} \Gamma^{\eta}_{\rho \nu};
86
87
RicciS := R = g^{\alpha \beta} R_{\alpha \beta};
88
\dm::LaTeXForm("\sqrt{-g}").
89
90
# -- Funciones libres --
91
92
\dm::Depends( \D0g{#} ).
93
f::LaTeXForm("f(\phi)")
94
\omega::LaTeXForm("\omega(\phi)").
95
V::LaTeXForm("V(\phi)").
96
97
## -- Lagrangiano de tipo Brans-Dicke --
98
99
termino_acoplamiento := f R.
100
termino_cinetico := (- \omega / \phi) g^{\mu \nu} \p1phi_{\mu} \p1phi_{\nu}.
101
potencial_escalar := V.
102
103

```

```
Lgrav := 1/(16\pi) \dm (
    @(termino_acoplamiento)
    + @(termino_cinetico)
    - @(potencial_escalares)
);
```

Algunos aspectos a notar en este código que no se han mencionado son:

- La variable `Lgrav` se construye con referencias a otras variables
- La sintaxis que se usó para declarar el símbolo  $\lambda$  como un índice válido, permite que las expresiones con demasiados índices hagan uso de  $\lambda 1$ ,  $\lambda 2$ , etcétera.
- Por las razones dadas en el apartado B.2, es necesario convertir a las parciales de los campos en símbolos independientes, ya que se busca realizar reemplazos de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta g^{\eta\lambda})} \partial_\mu \partial_\nu g^{\rho\sigma} = [\mathbf{1}]^\alpha_\mu [\mathbf{1}]^\beta_\nu [\mathbf{1}]^\rho_\eta [\mathbf{1}]^\sigma_\lambda \quad (\text{D.1})$$

lo cual requiere identificar índices, así como establecer una dependencia entre el símbolo que denota a la aceleración asociada al tensor métrico, y un operador diferencial con 4 índices, lo cual aún no se ha hecho.

- El símbolo que se decidió usar para las aceleraciones, `\p2phi`, no tiene un carácter en las fuentes que usa  $\text{\LaTeX}$ , así que se lo asocia simplemente con las letras `P2g`. Si bien se podía haber asignado `\parcial \parcial g` o algo más intuitivo, esto puede dificultar la lectura de las expresiones. Además, la notación estándar  $g_{,\mu\nu}^{\alpha\beta}$  para denotar parciales de un tensor, no es posible de adoptar por el soporte limitado que tiene Cadabra 2 para extraer índices y utilizarlos en los símbolos.

Ahora se define a lo que serán los operadores de parciales respecto a los campos:

```
## -- Parciales de Euler --
\D0phi{#}::Derivative.
\D0phi{#}::LaTeXForm("\frac{\partial}{\partial \phi}").
\D1phi{#}::Derivative.
\phi::Depends( \partial{#}, \D0phi{#} ).
\p1phi_{\rho}::Depends( \D1phi{#} ).
\D1phi{#}::LaTeXForm("\frac{\partial}{\partial ( \partial \phi )}").
\D0g{#}::Derivative.
\D0g{#}::LaTeXForm("\frac{\partial}{\partial g}").
\D1g{#}::Derivative.
g_{\mu \nu}::Depends( \partial{#}, \D0g{#} ).
\p1g_{\alpha \mu \nu}::Depends( \D1g{#} ).
\D1g{#}::LaTeXForm("[\frac{\partial}{\partial ( \partial g )}]").
```

```

\D2g{#}::Derivative. 19
#\partial_{\alpha}{ \partial_{\beta}{ g_{\mu \nu} } }::Depends(\D2g{#}). 20
\p2g_{\alpha \beta \mu \nu}::Depends( \D2g{#} ). 21
\D2g{#}::LaTeXForm("[\frac{\partial}{\partial (\partial (\partial g ) )}]"). 22

```

La última construcción necesaria para poder evaluar la expresión de interés, tiene que ver con otra limitación de Cadabra 2: Al menos por el momento <sup>10</sup>, no es posible definir símbolos con la propiedad `::Derivative`, que cuenten con más de un índice. Si un símbolo de derivada tiene varios índices, los algoritmos como `ProductRule(<expr>)`, interpretarán estas expresiones como derivadas sucesivas <sup>11</sup>:

$$D_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} X^\alpha \rightarrow D_\mu D_\nu g^{\lambda\rho} D_\lambda g^{\eta\sigma} D_\eta X^\alpha \quad (D.2)$$

Donde se omiten los paréntesis para simplificar la notación. Para obtener el comportamiento deseado, es posible usar las librerías que permiten manipular la estructura interna de las expresiones. En este caso, se muestra cómo escribir un algoritmo que funciona aproximadamente de la siguiente manera:

- Se recorre la expresión hasta encontrar el operador de interés
- Se guarda a los índices del operador, así como su orden y sus posiciones.
- Se realiza una copia de la sub-expresión que contiene a la derivada
- Se sustituye a la derivada de interés, por un símbolo con la propiedad `Derivative`, y sin índices.
- Se ejecuta el algoritmo `product_rule()` sobre la copia de la expresión.
- Con la copia y los índices recuperados, se reconstruye la expresión original, donde el operador de derivada se ha distribuido como debería de hacerlo.
- La expresión reconstruida se re-inserta en la expresión original.
- Este proceso se repite hasta llegar a la última derivada de interés.

Adicionalmente, es necesario mantener la cuenta de la cantidad de términos sumados que aparecen en cada iteración, y la cantidad de derivadas de interés que había originalmente. Esto es porque las funciones que permiten recorrer la estructura de una expresión, deben reiniciarse cada vez que se modifica a la misma. Antes de mostrar la función que se comporta como la lista de pasos, es necesario precisar la idea de “recorrer la estructura de una expresión”.

Internamente, la computadora mantiene un concepto de la estructura de un tensor por medio de Tablas de Young. Aunque Cadabra2 tiene funciones que permiten mostrar diagramas de las Tablas de Young, esto no es tan útil como su representación como un árbol de nodos:

El caso más sencillo, es el un tensor y sus índices. La siguiente figura representa un tensor simétrico  $X_{\mu\nu}$ , y un tensor que es simétrico en sus dos subíndices, y además tiene un superíndice:

<sup>10</sup>La versión más reciente es la 2.5.12 al momento de escribir esto.

<sup>11</sup>El siguiente enlace confirma que el creador de Cadabra2 está enterado de esta limitación: <https://cadabra.science/qa/2729/derivatives-with-two-indices?show=2729#q2729>

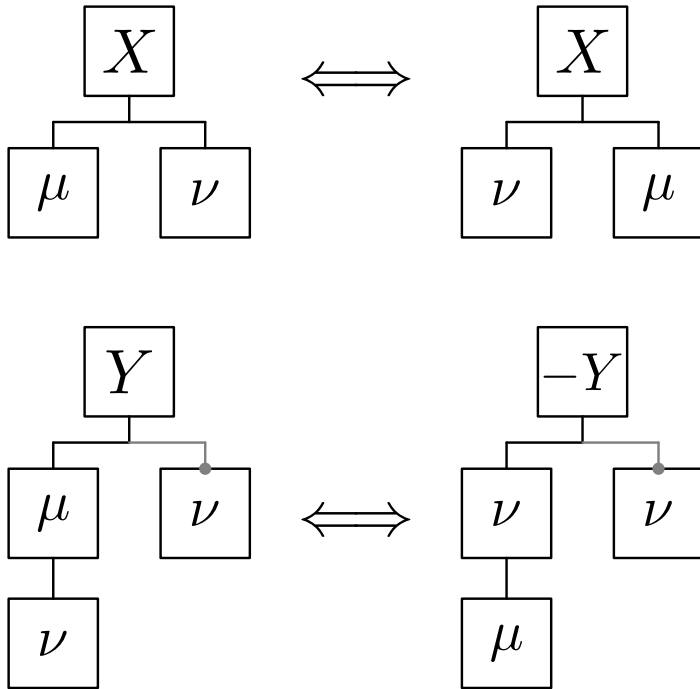


Figura D.1: Nótese la jerarquía que siguen los subíndices de  $Y$ , y que no se observa en los índices de  $X$ .

Además, si un símbolo se asocia con un operador, entonces, además de índices, puede estar conectado con otros tensores. Naturalmente, el símbolo  $+$  es un operador de suma, y no tiene índices. El operador de producto es similar. Considerando todo esto, y utilizando el código que se ha mostrado al inicio de esta sección, se puede mostrar a la siguiente expresión como un árbol de nodos:

```
mi_expr:= R
substitute(mi_expr, RicciS)
substitute(mi_expr, RicciT)
```

1  
2  
3

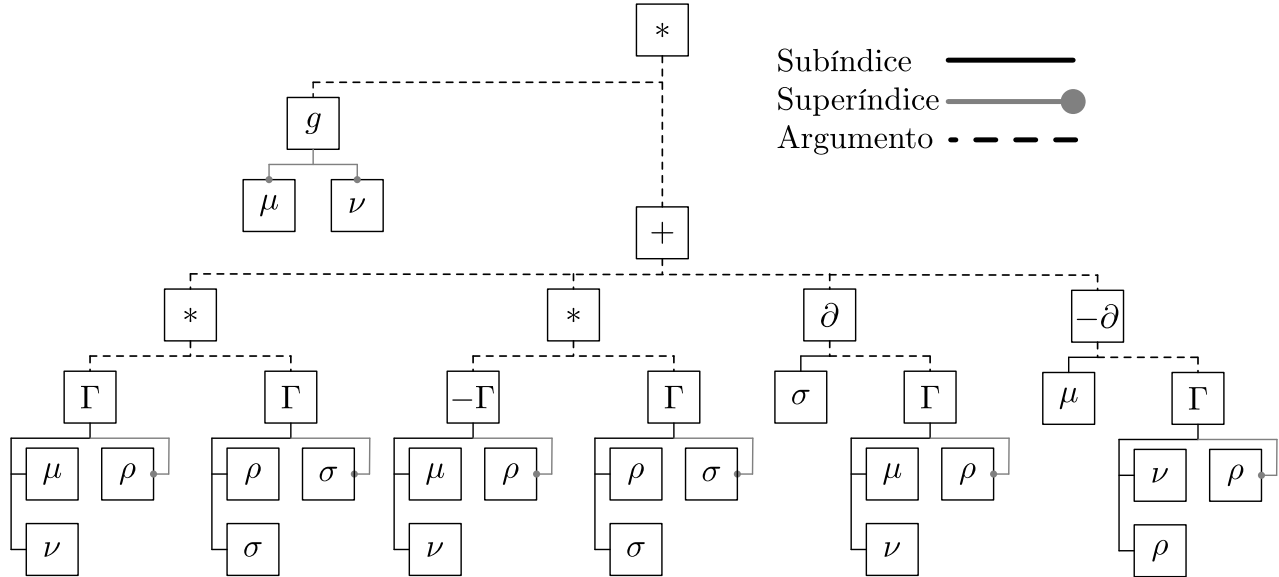


Figura D.2: Representación del escalar de Ricci en términos del tensor métrico inverso, y contracciones de símbolos de Christoffel y sus parciales.

Este árbol de nodos <sup>12</sup> se puede recorrer de arriba hacia abajo, y de izquierda a derecha, comenzando desde el primer nodo con el símbolo de interés, por medio del iterador `mi_expr[<símbolo>]`, de modo que se puede ejecutar algo como:

```

for nodo in full_expr["\Gamma"]:
    print(nodo.name)
print('Terminado')
>>> \mu
>>> \nu
>>> \rho
>>> \rho
>>> \sigma
>>> \sigma
>>> #...
    
```

Donde `nodo` es en realidad un sub-árbol, por lo que se lo puede asignar a una variable para guardar todos los nodos que estén debajo del nodo que reponed al iterador `mi_expr["\Gamma"]`. La propiedad `name` es una de varias. En este caso, `name` es una cadena, pero también existen propiedades como `index.parent_rel` para obtener el tipo de nodo del que proviene el sub-árbol que se está extrayendo, además de métodos como `args()`, que devuelve un iterador sobre todos sub-árboles que dependan del nodo en cuestión como argumentos del mismo, descartando nodos que correspondan a índices. Considerando todo esto, la siguiente función:

```

def distribuir_parciales_de_g(full_expr, symbol, indices, verbose=False):
    por_expandir = 0 # Será la cantidad de derivadas en la expresión original
    
```

<sup>12</sup>Como una nota un poco tangencial, las expresiones algebraicas como árboles de nodos tienen sentido si se usa la notación polaca, en la que un operador con varios arumentoss, se escribe con su símbolo y todos los que le siguen:  $a + b + c \Leftrightarrow (+abc)$ . Esta notación no es muy cómoda al trabajar en papel, pero sí lo es al trabajar con algoritmos.

```

expandidas = 0 # Son las derivadas que ya se han distribuido 3
nuevas = 0 # Son las derivadas que se han acumulado al distribuir 4
5
# Primera cuenta 6
for expression in full_expr[symbol]: 7
    por_expandir += 1 8
if verbose: print("Distribuyendo", str(por_expandir), "términos") 9
10
while por_expandir > expandidas: 11
    # Se inicia un contador que va a desplazarse para ignorar a las derivadas 12
    # que ya han sido expandidas. 13
    index = 0 14
    for node in full_expr[symbol]: 15
        if nuevas != index: 16
            index += 1 17
            if verbose: print( "Ignorando", str(node.ex() ) 18
            continue 19
        # Terminando el contador, se procede a extraer la derivada 20
        term_to_distribute = node.ex() # Crear una copia del sub-árbol 21
        original_indices = () 22
        \RESERVED{#}::Derivative. # Definir una derivada sin índices 23
        distributed_term = None 24
        body = None 25
        for node2 in term_to_distribute: 26
            if len(original_indices) != indices and node2.name != symbol: 27
                original_indices += ( node2.name, ) 28
            elif node2.name != symbol and len(original_indices) == indices: 29
                body = node2.ex() 30
                # if verbose: print("Made a copy of:", str(body)) 31
                distributed_term = $\RESERVED{ @(body) }$ 32
                break 33
        distribute(distributed_term, repeat=True) 34
        product_rule(distributed_term) 35
        for done_idx in distributed_term[r'\RESERVED']: 36
            nuevas += 1 37
            derivative_string = symbol + "^{ " 38
            for recovered_index in original_indices: 39
                derivative_string += recovered_index 40
            derivative_string += " }" 41
            repl = r"\RESERVED{F??} -> " + derivative_string + "{F??}" 42
            substitute(distributed_term, Ex(repl)) 43
            44
            expandidas += 1 45
            node.replace(distributed_term) 46
    return full_expr 47

```

Se puede confirmar que esta función devuelve las expresiones esperadas:

```
test := \D1g^{\alpha \mu \nu}{ x^{\lambda} \partial_{\beta}{ g_{\eta \rho} } } 1
```

```

+ X^{\lambda}_{\beta \eta \rho} + \D1g^{\alpha \mu \nu}{ x^{\lambda}
\partial_{\beta}{ g_{\eta \rho} };
distribute(test, repeat=True);

```

Actúa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \left[ x^{\lambda}\partial_{\beta}g_{\eta\rho} + X^{\lambda}_{\beta\eta\rho} + \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})}x^{\lambda} \right] = x^{\lambda}\frac{\partial(\partial_{\beta}g_{\eta\rho})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \quad (D.3)$$

El argumento `repeat=True` permite re-aplicar el algoritmo `distribute` repetidamente, hasta que la expresión resultante sea igual a la anterior.

### D.3.2 Elementos necesarios para evaluar las ecuaciones de campo

Aunque Cadabra 2 incluye funciones con las cuales se podría seguir el procedimiento de la sección 4.4, resulta más sencillo definir las ecuaciones de campo directamente. En este caso, la mayoría de los cálculos se realizan a través de `sympy`. Desde obtener las entradas del tensor métrico inverso, dadas las entradas de  $g$ , hasta evaluar y simplificar las entrada de los tensores de Ricci y de energía-momento hasta que no queden identidades trigonométricas o factorizaciones que realizar:

```

1  coordenadas := {t, r, \psi, \theta}.
2  @(coordenadas)::Coordinate.
3
4  a::Depends(t).
5
6  ## -- Indices --
7  indices_einstein := {
8      \alpha, \beta,
9      \gamma, \eta,
10     \mu, \nu,
11     \rho,
12     \lambda#
13 }.
14 @(indices_einstein)::Indices( values=@(coordenadas), position=fixed);
15
16
17 # ----- ECUACIONES DE MOVIMIENTO(hardcoded)
18
19 fieldg := R_{\mu \nu} - 1/2 g_{\mu \nu} R =
20     \phi**(-2) \partial_{\mu}{\phi} \partial_{\nu}{\phi}
21     - 1/2 g_{\mu \nu} \phi**(-2) g^{\alpha \beta} \partial_{\alpha}{\phi} \partial_{\beta}{\phi}
22     - 1/2 \phi**2 g_{\mu \nu} - \phi**(-2) \partial_{\mu}{ \partial_{\nu}{ \phi**2 } }
23     + g_{\mu \nu} \phi**(-2) \partial_{\lambda}{ \partial^{\lambda}{ \phi**2 } }
24     + 8 \pi \phi**(-2) T_{\mu \nu};
25
26 fieldphi := 0 =
27     2 \phi R + 2 \partial_{\lambda}{ \partial^{\lambda}{ \phi**2 } } - 4 \phi**3;
28
29 # ----- FLRW

```

```

30 sg := {
31     g_{t t} = 1,
32     g_{r r} = (a**2)/(1 - k r**2),
33     g_{\theta \theta} = a**2 r**2,
34     g_{\psi \psi} = a**2 r**2 \sin(\psi) \sin(\psi)
35 }.
36
37 \densidad::LaTeXForm("\rho")
38 st := {
39     T_{t t} = \densidad,
40     T_{r r} = (a**2)/(1 - k r r),
41     T_{\theta \theta} = a**2 r**2,
42     T_{\psi \psi} = a**2 r**2 \sin(\phi)\sin(\phi)
43 }.
44
45 # ----- Llamadas a sympy
46 complete(sg,$g^{\mu \nu}$);
47
48 evaluate(Christoffel, sg, rhsonly=True);
49
50 substitute(RicciT, Christoffel);
51 evaluate(RicciT, Christoffel, rhsonly=True);
52
53 # ... pasos intermedios ...
54
55 evaluate(fieldg, sg);
56 substitute(fieldg,st);

```

En este caso, se ha tenido que dar más información respecto a la estructura del tensor métrico, y sobre el rango de los índices que figuran en las ecuaciones de movimiento. Específicamente, se ha dicho que estos toman valores  $t$ ,  $r$ ,  $\sigma$ , y  $\psi$  cuando se trabaja en coordenadas esféricas <sup>13</sup>, y que el factor de escala depende explícitamente de  $t$ , pero no de las demás coordenadas. También se han reemplazado a las entradas de  $T$  y  $g$  según las ecuaciones (3.6) y (2.28).

---

<sup>13</sup>Se ha ignorado la convención de usar a  $\phi$  como el acimut para evitar confusión con el campo escalar  $\phi$  ( $\phi$ ).

# Bibliografía

- [1] Torsten Asselmeyer-Maluga. *At the Frontier of Spacetime*. Springer, mayo de 2016. ISBN: 3319312979.
- [2] Robin Booth. *The Exochronous Universe: a static solution to the Einstein field equation*. 2023. arXiv: [2201.13120](https://arxiv.org/abs/2201.13120) [astro-ph.CO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2201.13120>.
- [3] Jack Borthwick, Maël Chantreau y Yannick Herfray. *Ti and Spi, Carrollian extended boundaries at timelike and spatial infinity*. 2024. arXiv: [2412.15996](https://arxiv.org/abs/2412.15996) [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/2412.15996>.
- [4] Leo Brewin. *Riemann Normal Coordinates*. 1996.
- [5] *Cadabra: a field-theory motivated approach to computer algebra — cadabra.science*. <https://cadabra.science/>. [Consultado el 06-07-2025].
- [6] John Cardy. *Boundary Conformal Field Theory*. 2008. arXiv: [hep-th/0411189](https://arxiv.org/abs/hep-th/0411189) [hep-th]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0411189>.
- [7] *Carl H. Brans | College of Humanities + Natural Sciences — web.archive.org*. <https://web.archive.org/web/20150202235952/http://chn.loyno.edu/physics/bio/carl-h-brans>. [Consultado el 06-07-2025].
- [8] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. arXiv: [gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019) [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [9] Oscar Castillo-Felisola, Dominic T. Price y Mattia Scomparin. *Cadabra and Python algorithms in General Relativity and Cosmology I: Generalities*. 2022. arXiv: [2210.00005](https://arxiv.org/abs/2210.00005) [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/2210.00005>.
- [10] Jordi Ceba. *Cosmología Física*. Ediciones AKAL, abr. de 2007. ISBN: 9788446025337. URL: [https://books.google.com/books/about/Cosmolog%C3%ADa\\_F%C3%ADsica.html?hl=&id=5y6okZ6U\\_S8C](https://books.google.com/books/about/Cosmolog%C3%ADa_F%C3%ADsica.html?hl=&id=5y6okZ6U_S8C).
- [11] Albert Einstein. *El significado de la relatividad*. Planeta-Agostini, 1993.
- [12] Valerio Faraoni. *Cosmology in scalar-tensor gravity*. en. 2004<sup>a</sup> ed. Fundamental Theories of Physics. New York, NY: Springer, mar. de 2004.
- [13] T. Fulton, F. Rohrlich y L. Witten. “Conformal Invariance in Physics”. En: *Rev. Mod. Phys.* 34 (3 jul. de 1962), págs. 442-457. DOI: [10.1103/RevModPhys.34.442](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.442). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.34.442>.
- [14] Peter Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. en. 2<sup>a</sup> ed. Advanced Texts in Physics. Berlin, Germany: Springer, mar. de 2002.
- [15] Boris Kosyakov. *Introduction to the classical theory of particles and fields*. 2007<sup>a</sup> ed. Berlin, Germany: Springer, oct. de 2006.

- [16] Kazuya Koyama. “Testing Brans-Dicke gravity with screening by scalar gravitational wave memory”. En: *Physical Review D* 102.2 (jul. de 2020). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.102.021502](https://doi.org/10.1103/physrevd.102.021502). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.021502>.
- [17] *Lecture Notes on General Relativity - S. Carroll* — *ned.ipac.caltech.edu*. <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll13/Carroll12.html>. [Accessed 02-08-2025].
- [18] Shyan-Ming Perng. “On conserved quantities at spatial infinity”. En: *Journal of Mathematical Physics* 40.4 (abr. de 1999), págs. 1923-1950. ISSN: 1089-7658. DOI: [10.1063/1.532841](https://doi.org/10.1063/1.532841). URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.532841>.
- [19] Joe Rosen. “The conformal group and causality”. En: *Annals of Physics* 47.3 (1968), págs. 468-480. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(68\)90210-8](https://doi.org/10.1016/0003-4916(68)90210-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491668902108>.
- [20] Peter Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer, nov. de 2014. ISBN: 9783642540820. URL: [https://books.google.com/books/about/Extragalactic\\_Astronomy\\_and\\_Cosmology.html?hl=&id=jNhBnwEACAAJ](https://books.google.com/books/about/Extragalactic_Astronomy_and_Cosmology.html?hl=&id=jNhBnwEACAAJ).
- [21] *Supernova Cosmology Project* — *supernova.lbl.gov*. <https://www.supernova.lbl.gov/>. [Accessed 08-07-2025].
- [22] Loring W Tu. *An introduction to manifolds*. 2<sup>a</sup> ed. Universitext. New York, NY: Springer, oct. de 2010.