



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"ESTUDIO ESTADÍSTICO DE LOS  
ESPACIAMIENTOS ENTRE RESONANCIAS  
CONSECUTIVAS DE SISTEMAS  
DESORDENADOS UNIDIMENSIONALES"**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

PRESENTA:

**DIANA MILENA URIZA PRIAS**

ASESOR(ES):

**DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ**

**JULIO DE 2017**

©2017 - Diana Milena Uriza Prias

Derechos Reservados

# Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a mi asesor, el Dr. José Antonio Méndez Bermúdez por su confianza y darme la oportunidad de ser su estudiante, por toda la ayuda brindada, sus consejos, su disposición y dedicación para el desarrollo de este trabajo.

Al Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas" por darme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de Posgrado en maestría en ciencias Física.

A mis padres Janeth Prias y Ramiro Uriza por su apoyo incondicional, sus consejos y su amor día a día, aunque no los tuve cerca durante mis estudios en la maestría, este logro también es de ellos.

A mi hermano Daniel Uriza por su cariño, apoyo y admiración.

Un especial agradecimiento a William Javier Rodríguez Cruz, hicimos un gran equipo en el transcurso de la maestría, nos apoyamos académica y emocionalmente, quiero agradecerle por su compañía durante este camino que emprendimos y logramos juntos.

Al Dr. German Luna por su colaboración y disposición en algunos momentos.

Al comité evaluador Dr. Jonathan Torres, Dr. Valentin García y Dr. Carlos Pando por sus comentarios y sugerencias en la revisión del trabajo.

A mis compañeros de maestría más cercanos que me permitieron conocer más sobre la cultura mexicana. Especialmente a Montse porque fué una amiga incondicional. En las fechas especiales, las cuales estuve lejos de mi familia, ella estuvo a mi lado.

Finamente, a CONACYT por el apoyo económico brindado durante el período de la maestría.



*Dedicado con cariño y gratitud a mis padres Janeth y Ramiro,  
con el corazón a mi hermano Daniel  
y con todo mi amor a William  
por su compañía, por su apoyo y su alegría.*



# Estudio estadístico de los espaciamientos entre resonancias consecutivas de sistemas desordenados unidimensionales

## Resumen

En esta Tesis se estudian las propiedades estadísticas de los espaciamientos entre resonancias consecutivas de sistemas desordenados unidimensionales abiertos (con acoplamiento al exterior), en los diferentes regímenes de transporte electrónico (balístico, difusivo y localizado). Para ello, se utilizaron alambres unimodales desordenados que representan el modelo de enlace fuerte unidimensional con desorden composicional o modelo de Anderson unidimensional (1D).

Inicialmente, realizamos un análisis de las propiedades espectrales y propiedades de transporte del modelo de Anderson 1D. Para ello se reprodujeron resultados reportados en la literatura, esto con el fin de tener una referencia para analizar el modelo abierto.

Luego, utilizamos las predicciones recientes obtenidas por Poli et al. [Phys. Rev. Lett. **108**, 174101 (2012)] sobre la teoría de matrices aleatorias con acoplamiento, para hacer un estudio exhaustivo sobre las propiedades estadísticas del ensamble Gaussiano ortogonal (GOE) y poder comparar con el modelo de Anderson 1D en el régimen difusivo, debido a las propiedades que comparten. Mostramos que las predicciones teóricas del GOE pueden describir satisfactoriamente el modelo de Anderson 1D en el régimen difusivo. Además construimos un panorama general que describe las propiedades estadísticas de los espaciamientos entre resonancias consecutivas del modelo de Anderson 1D cuando es acoplado al exterior en los tres regímenes de transporte. Por último, proponemos una variable que permite realizar un análisis más detallado del sistema abierto.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Antecedentes . . . . .	1
1.1.1	Modelo de Anderson unidimensional . . . . .	2
1.1.2	Hamiltoniano efectivo para el 1DAM . . . . .	5
1.1.3	Distribución de espaciamientos $P(s)$ . . . . .	6
1.2	Motivación . . . . .	6
1.2.1	Objetivos . . . . .	7
1.3	Organización del trabajo . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modelo de Anderson 1D: Propiedades estadísticas</b>	<b>9</b>
2.1	Propiedades espectrales . . . . .	9
2.2	Escalamiento de un sólo parámetro . . . . .	15
2.3	Propiedades de dispersión . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Distribución de espaciamientos para el GOE abierto</b>	<b>21</b>
3.1	Descripción de la $P(s)$ del GOE abierto . . . . .	21
3.2	Estudio exhaustivo de la $P(s)$ para el GOE . . . . .	22
3.2.1	Desplazamiento $\Delta_{P(0)}$ para el GOE . . . . .	25
3.2.2	Relación entre los acoplamientos del modelo teórico y numérico del GOE . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Distribución de espaciamientos para el 1DAM abierto</b>	<b>31</b>
4.1	$P(s)$ del 1DAM en el régimen difusivo . . . . .	31
4.2	$P(s)$ del 1DAM abierto en los tres regímenes de transporte . . . . .	35
4.3	Desplazamiento $\Delta_{P(0)}$ para el 1DAM . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Figuras complementarias</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



# Capítulo 1

## Introducción

A continuación se presentan los conceptos generales que se utilizarán a lo largo de la Tesis, incluyendo la motivación y los objetivos que se pretende alcanzar.

### 1.1 Antecedentes

Las propiedades de sistemas desordenados ha sido un tema de investigación muy activo por más de cincuenta años [1]. Un aporte importante a este tema [2–5], muestra que los sistemas desordenados infinitos con más de dos dimensiones espaciales manifiestan la transición metal-aislante como función de la amplitud del desorden (transición de Anderson). Mientras que en el caso unidimensional, cualquier cantidad de desorden produce localización (también conocida como localización de Anderson), es decir, los estados cuánticos se localizan debido a la interferencia destructiva.

En particular, en el modelo de Anderson unidimensional (1DAM-modelo de enlace fuerte compuesto por sitios conectados a primeros vecinos; con acoplamientos constantes y potenciales de sitio aleatorios) todos los autoestados son exponencialmente localizados [2]. Esto significa que la envolvente de la función de onda  $\Psi(n)$ , centrada alrededor de algún sitio con posición  $n_0$ , decae aproximadamente de manera exponencial en el espacio:

$$|\Psi(n)| \sim \exp\left(-\frac{|n - n_0|}{l_\infty}\right), \quad (1.1)$$

donde  $l_\infty$  se conoce como la longitud de localización y es una medida de la extensión espacial del estado localizado. La etiqueta  $\infty$  se utiliza para enfatizar que la longitud de localización esta definida para el sistema infinito.

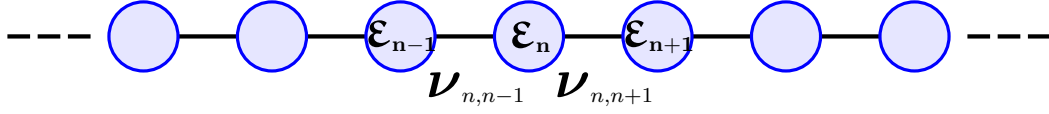


Figura 1.1: Modelo de Anderson unidimensional infinito, compuesto por sitios con potenciales  $\mathcal{E}_n$  y las integrales de acoplamiento a primeros vecinos  $\mathcal{V}_{n,n\pm 1}$ .

### 1.1.1 Modelo de Anderson unidimensional

En términos de los eigenestados del sitio  $|n\rangle$  el Hamiltoniano de enlace fuerte unidimensional con interacción a primeros vecinos está dado por [1]

$$H = \sum_{n=1}^L [\mathcal{E}_n |n\rangle\langle n| - \mathcal{V}_{n,n+1} |n\rangle\langle n+1| - \mathcal{V}_{n,n-1} |n\rangle\langle n-1|], \quad (1.2)$$

donde  $L$  es la longitud del alambre dada como el número total de sitios que lo componen,  $\mathcal{E}_n$  son los potenciales de sitio y  $\mathcal{V}_{n,n\pm 1}$  son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos, las cuales fijaremos con un valor constante  $\mathcal{V}_{n,n\pm 1} = \mathcal{V} = 1$ . Dicho Hamiltoniano también puede ser representado por una matriz tridiagonal con elementos

$$\langle m|H|n\rangle = H_{mn} = \mathcal{E}_n \delta_{mn} - \mathcal{V}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}). \quad (1.3)$$

Este Hamiltoniano puede describir una red cristalina perfecta si  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} = \text{cte}$ . Por el contrario, si los potenciales de sitio  $\mathcal{E}_n$  no son constantes y siguen una secuencia aleatoria, entonces se dice que el modelo tiene desorden diagonal. En este sentido, el modelo de Anderson unidimensional (1DAM) consiste en elegir  $\mathcal{E}_n$  aleatoriamente de un intervalo continuo finito con una distribución de probabilidad  $P(\mathcal{E}_n)$  que generalmente es uniforme o gaussiana con un promedio y varianza definido.

En la Fig. 1.1 presentamos un diagrama representativo del 1DAM como un alambre unidimensional infinito compuesto con potenciales de sitio  $\mathcal{E}_n$ , los cuales son escogidos como números aleatorios de una distribución rectangular (uniforme) entre  $-\omega/2$  y  $\omega/2$ , siendo  $\omega$  el ancho de la distribución y centrada en cero. Entonces la varianza de la distribución es  $\sigma^2 = \langle \mathcal{E}_n^2 \rangle = \omega^2/12$ .

Para el 1DAM con desorden débil,  $\sigma^2 \ll 1$ , Thouless obtuvo una expresión para  $l_\infty$ , ver Ec. (1.1), en términos de la varianza  $\sigma^2$  de los potenciales de sitio [6]

$$l_\infty^{-1}(E) = \frac{\sigma^2}{8(1 - E^2/4)}, \quad (1.4)$$

donde  $E$  es la energía del sistema. La expresión anterior se calculó a partir de la teoría de perturbaciones estándar en la aproximación de Born. La Ec. (1.4) no es válida cerca a los bordes de la banda de energía, pues allí  $l_\infty \rightarrow 0$ . En el centro de la banda,  $E = 0$ , la Ec. (1.4) se reduce a  $l_\infty^{-1}(0) = \omega^2/96$ . Pero, existe una corrección

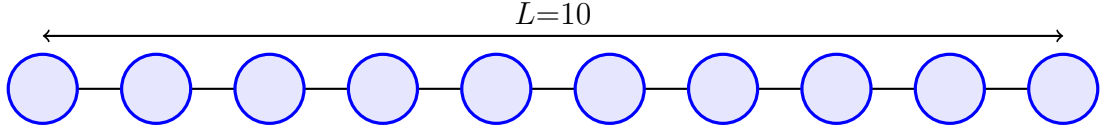


Figura 1.2: Modelo de Anderson unidimensional finito de tamaño  $L = 10$ , por tanto está compuesto por 10 sitios.

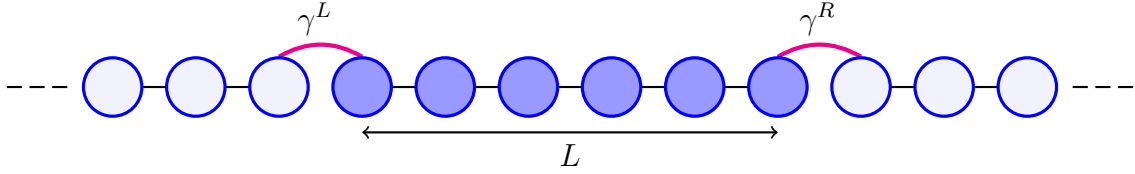


Figura 1.3: Modelo de Anderson unidimensional finito de tamaño  $L$  conectado al exterior con las terminales de la derecha e izquierda, respectivamente  $\gamma^L$  y  $\gamma^R$ .

debido a la insuficiencia de la teoría de perturbaciones en la norma de  $E = 0$  [7–9], entonces:

$$l_{\infty}^{-1}(E) = \frac{\omega^2}{105.2}. \quad (1.5)$$

Aunque la fórmula de Thouless, Ec. (1.4), proporciona la longitud de localización para el 1DAM de longitud infinita, ésta ecuación es de gran importancia cuando se consideran muestras con un número finito de sitios  $L$ , ver Fig. 1.2. Esto es porque las propiedades de dispersión de muestras de tamaño finito están determinadas por la razón  $l_{\infty}/L$ . Ésto se conoce en la literatura como *escalamiento con un sólo parámetro* [10], el cual será discutido con más detalle en la Sección 2.2.

Ahora, si consideramos al 1DAM de longitud  $L$  con dos terminales unimodales acopladas de manera perfecta <sup>1</sup> a los dos sitios extremos del sistema (sitios  $n_1$  y  $n_L$ ), ver Fig. 1.3, en el caso de transmisión (o conductancia adimensional  $G$ ) exponencialmente pequeña, el promedio del logaritmo de  $G$  se relaciona con la razón  $l_{\infty}/L$  como [2, 11–14]

$$\langle \ln G \rangle = -\frac{2L}{l_{\infty}}. \quad (1.6)$$

Esta expresión es válida para cualquier razón  $L/l_{\infty}$  y por lo tanto puede servir como definición alternativa de  $l_{\infty}$  cuando la conductancia del sistema esta disponible. Adicionalmente, se sabe que [15] la distribución de la conductancia  $P(G)$  para el 1DAM también depende solamente de la razón  $l_{\infty}/L$ .

<sup>1</sup>Frecuentemente se utiliza el término *acoplamiento perfecto* para definir la magnitud de acoplamiento para la cual la transmisión tiene un valor máximo.

## Regímenes de transporte

De acuerdo con la razón  $l_\infty/L$  (escalamiento de un solo parámetro), es posible definir tres regímenes de transporte característicos en el 1DAM [16]:

- (a) *Régimen balístico*: Ocurre si  $[l_\infty/L \gg 1]$ , ver Fig. 1.4. En este caso el desorden es débil, las autofunciones del alambre cerrado se extienden sobre el mismo. El que las autofunciones estén delocalizadas provoca que el transporte a través del alambre sea bueno. En consecuencia se dice que el alambre se encuentra en la *fase metálica*.

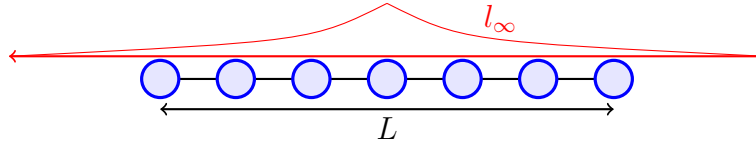


Figura 1.4: Régimen balístico. Representación esquemática de la relación entre  $l_\infty$  y  $L$ .

- (b) *Régimen difusivo*: Ocurre si  $[l_\infty/L \sim 1]$ , ver Fig. 1.5. Los autoestados son aleatorios<sup>2</sup> y extendidos. El transporte a través del alambre es difusivo<sup>3</sup>. Se espera en éste régimen que las predicciones de la teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) sean válidas debido al comportamiento caótico del sistema. Por ello a este régimen también se le conoce como *régimen caótico*.

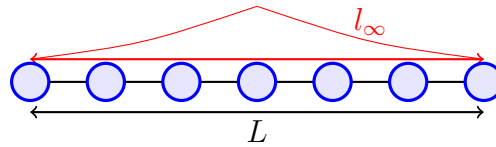


Figura 1.5: Régimen difusivo. Representación esquemática de la relación entre  $l_\infty$  y  $L$ .

- (c) *Régimen localizado*: Ocurre si  $[l_\infty/L \ll 1]$ , ver Fig. 1.6. El desorden es fuerte, las autofunciones del alambre cerrado se localizan exponencialmente. La localización de las autofunciones provoca que el transporte a través del alambre sea malo (la conductancia es exponencialmente pequeña respecto al tamaño del sistema). En consecuencia se dice que el alambre se encuentra en la *fase aislante*.

<sup>2</sup>Significa que la desviación de las componentes de cada autofunción respecto del promedio sigue una distribución gaussiana centrada en cero.

<sup>3</sup>Es útil mencionar como ejemplo el transporte en una cavidad caótica, pues cuando se envía a la cavidad una onda o partícula ocurre un proceso de difusión.

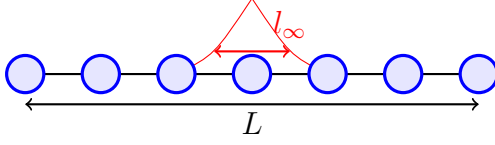


Figura 1.6: Régimen localizado. Representación esquemática de la relación entre  $l_\infty$  y  $L$ .

### 1.1.2 Hamiltoniano efectivo para el 1DAM

Consideremos el modelo de enlace fuerte conformado por un alambre de tamaño finito  $L$  al que nos referiremos en ocasiones como la región interna o sistema interno, que puede estar sujeto a cualquier tipo de desorden. Conectamos ambos extremos del sistema interno al exterior por medio de alambres ideales, es decir con potenciales de sitio constantes  $\mathcal{E}_n \rightarrow \epsilon$  y amplitudes de acoplamiento a primeros vecinos  $\mathcal{V}$ , como se muestra en la Fig. 1.3. Los alambres ideales son considerados semi-infinitos para evitar efectos de la reflexión sobre el sistema interno.

La región interna es conectada a los alambres semi-infinitos ideales (exterior) a través de las magnitudes de acoplamiento  $\gamma^L$  y  $\gamma^R$  en los extremos de la izquierda y derecha, respectivamente (ver Fig. 1.3).

Cuando el sistema interno es conectado al exterior, estamos tratando ahora con un sistema abierto o dispersivo, el cual podemos caracterizar con su espectro de energía, dado por los polos de la matriz dispersión  $S$  [17], los cuales coinciden con los autovalores complejos del Hamiltoniano efectivo no hermitiano:

$$\mathcal{H}_{eff} = H - \frac{i}{2}WW^T; \quad WW^T = W_{mn} = \sum_{c=1}^M A_m^c A_n^c. \quad (1.7)$$

La parte hermitiana  $H$  es la matriz Hamiltoniana de enlace fuerte dada por la Ec. (1.3) y la parte no hermitiana  $WW^T$  describe el acoplamiento entre el sitio  $m$  o  $n$  con las  $c$  terminales. En términos de la energía, es posible definir las amplitudes de acoplamiento del extremo izquierdo como [18]

$$A_n^L(E) = \delta_{n,1} \sqrt{\frac{\gamma^L}{\pi}} \left[ 1 - \left( \frac{E - \epsilon}{2\mathcal{V}} \right)^2 \right]^{1/4}, \quad (1.8)$$

y del extremo derecho como

$$A_n^R(E) = \delta_{n,1} \sqrt{\frac{\gamma^R}{\pi}} \left[ 1 - \left( \frac{E - \epsilon}{2\mathcal{V}} \right)^2 \right]^{1/4}, \quad (1.9)$$

donde  $\epsilon$  es una constante que representa las energías de sitio de los alambres ideales semi-infinitos, a los cuales se conecta la región interna.

### 1.1.3 Distribución de espaciamientos $P(s)$

En la década de los 50's Wigner se interesó por estudiar las propiedades espectrales de los átomos con núcleos pesados, los cuales eran complejos de analizar por la gran cantidad de resonancias que presentaban usando el fenómeno de dispersión. Para ello, Wigner [19] encontró que los valores propios de un conjunto de matrices aleatorias comparten las mismas propiedades con la distribución estadística de las resonancias de dichos átomos. Así, Wigner propuso la RMT, la idea principal es describir el Hamiltoniano del sistema en cuestión con un grupo de matrices aleatorias que obedecen las mismas propiedades de simetría. La aleatoriedad se debe a que se desconoce cómo interactúan las partículas (el núcleo atómico se modela como una caja negra en la que las partículas interactúan de modo aleatorio en su interior). Análogo a la física estadística se representan “todas las interacciones posibles” a través de una colectividad de matrices aleatorias cuyos autovalores representan las energías del sistema.

Con el fin de estudiar el espectro de los núcleos atómicos, Wigner propuso que la distribución de espaciamientos entre energías seguiría una secuencia idéntica a los autovalores de las matrices aleatorias, y haciendo un análisis estadístico a los autovalores establece una expresión para la distribución de espaciamientos entre energías consecutivas  $P(s)$ , esta cantidad se convirtió en la herramienta más popular para distinguir entre sistemas integrables de sistemas caóticos.

La distribución de espaciamientos entre niveles,  $P(s)$ , describe la densidad de probabilidad de encontrar dos autovalores de  $H$  separados por una distancia  $s$ . Normalmente esta cantidad es usada alrededor del centro de la banda de energía donde la densidad de estados es aproximadamente constante.

Por otro lado, recientemente [20], se estudió por primera vez de forma numérica, teórica (mediante la teoría de matrices aleatorias) y experimental (utilizando cavidades caóticas de microondas) la distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas  $P(s)$ . En particular, se calculó la  $P(s)$  para sistemas descritos por alguno de los tres ensambles gaussianos de matrices aleatorias: Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE), Gaussian Unitary Ensemble (GUE) y Gaussian Symplectic Ensemble (GSE) [19]. Los ensambles fueron acoplados al exterior, con magnitud de acoplamiento  $1/\eta$ , mediante terminales que soportan  $M$  modos abiertos. Además, como la  $P(s)$  se obtuvo en [20] como una extensión de las distribuciones de Wigner-Dyson  $P_{\text{WD}}(s)$  correspondientes [19], cuando  $1/\eta \rightarrow 0$  entonces  $P(s) \rightarrow P_{\text{WD}}(s)$ .

## 1.2 Motivación

Hasta el momento en [20], la  $P(s)$  ha sido estudiada sólo en el régimen caótico (o difusivo) con acoplamiento al exterior, dado que se ha considerado que el sistema interno es descrito por alguno de los tres ensambles Gaussianos. Por ello, en esta Tesis planteamos el estudio sistemático de la  $P(s)$  en los tres regímenes del transporte

(balístico, difusivo y localizado), teniendo como referencia (i) la  $P(s)$  del sistema cerrado correspondiente, mostrada en [18], (que se calculará numéricamente) y (ii) las predicciones teóricas para la  $P(s)$  en el régimen difusivo de [20].

Con este fin utilizaremos alambres unimodales desordenados (representados por el modelo de enlace fuerte unidimensional con desorden composicional o modelo de Anderson unidimensional) caracterizados por la razón  $l_\infty/L$ . Los alambres serán acoplados al exterior, con magnitud de acoplamiento  $\gamma$ , mediante una o dos terminales unimodales ( $M = 1$  o  $M = 2$ , respectivamente) que se acoplarán a los sitios extremos de los alambres. Entonces, estudiaremos la evolución de la  $P(s)$  al mover la razón  $l_\infty/L$  desde  $l_\infty/L \gg 1$  hasta  $l_\infty/L \ll 1$  de forma continua (para diferentes valores de  $\gamma$ ) tal que el sistema dispersivo transita desde el régimen balístico hasta el régimen localizado pasando por el régimen difusivo (cuando  $l_\infty/L \sim 1$ ).

Por supuesto, antes de comenzar con el estudio sistemático de la  $P(s)$  se reproducirán resultados reportados en la literatura sobre: (i) la  $P(s)$  del modelo de Anderson unidimensional cerrado en los tres regímenes del transporte (balístico, difusivo y localizado) [18] y (ii) la conductancia del modelo de Anderson unidimensional, Ec. (1.6).

Esperamos que los resultados obtenidos en esta Tesis contribuyan al entendimiento de las propiedades de dispersión y transporte de sistemas desordenados.

### 1.2.1 Objetivos

Para obtener nuestros resultados nos hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar e implementar programas de cómputo que permitan reproducir el Modelo de Anderson 1D y estudiar sus propiedades espectrales mediante la distribución de espaciamentos entre energías consecutivas  $P(s)$ . Esto con el fin de reproducir resultados reportados en [18] para tenerlos como referencia.
2. Construir e implementar programas de cómputo que nos permitan hacer un análisis estadístico de las propiedades de transporte mediante la reproducción de resultados de la conductancia.
3. Hacer un estudio estadístico de las propiedades de los espaciamentos entre resonancias consecutivas del Modelo de Anderson 1D en los tres regímenes de transporte.

## 1.3 Organización del trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 2 estudiamos las propiedades estadísticas, caracterizadas por la  $P(s)$ , al centro de la banda del 1DAM

en los tres regímenes de transporte, luego realizamos un análisis de las propiedades de transporte con el cálculo de la conductancia. En particular, reproduciremos resultados numéricos ya reportados para comprobar que los programas de cómputo diseñados están correctamente implementados y para usar los resultados como referencia de nuestro estudio. En el Capítulo 3 describimos el estudio realizado en [20] sobre la distribución de espaciamientos para sistemas descritos por ensambles Gaussianos. Posteriormente, realizamos un estudio exhaustivo que permite comparar la  $P(s)$  del ensamble GOE y del 1DAM en el régimen difusivo. En el Capítulo 4 mostramos las propiedades estadísticas que exhibe el 1DAM en los tres regímenes de transporte cuando es acoplado al exterior por una y dos terminales; esto, utilizando la  $P(s)$ . Finalmente, en el Capítulo 5 concluimos con los resultados obtenidos en este trabajo.

# Capítulo 2

## Modelo de Anderson 1D: Propiedades estadísticas

En este capítulo se presenta un estudio del 1DAM cerrado, es decir, sin acoplar al exterior, con el desorden que produce los tres regímenes de transporte (balístico, difusivo y localizado). El objetivo es reproducir cálculos numéricos ya reportados en investigaciones previas [18, 21]. Para dicho estudio, se construyeron programas de cómputo que generan matrices correspondientes al Hamiltoniano de enlace fuerte, caracterizado por los potenciales de sitio  $\mathcal{E}_n$  (números aleatorios de una distribución uniforme) y el tamaño del alambre  $L$ . Calculadas las matrices hamiltonianas, se utilizaron subrutinas de Fortran 90 (LAPACK) que diagonalizan numéricamente para obtener los autovalores  $E_i$  de cada matriz, los cuales permiten estudiar la distribución de espaciamientos entre energías consecutivas,  $P(s)$ , en los diferentes regímenes de transporte. También se caracterizan los histogramas obtenidos, por medio de la distribución de Izrailev. Adicionalmente, se hizo el sistema dispersivo acoplando las dos terminales del alambre al exterior, ver Ec. (1.7), y se calculó la conductancia  $G$  como una propiedad de transporte para comparar con las predicciones teóricas correspondientes. La reproducción de resultados permite garantizar que la implementación de los programas computacionales construidos son correctos.

### 2.1 Propiedades espectrales

En el campo del *caos cuántico*, una de las cantidades estadísticas más populares para analizar las propiedades espectrales es la distribución de espaciamientos entre niveles de energías consecutivas,  $P(s)$ . Como se mencionó en el capítulo anterior, la función de distribución  $P(s)$  puede ser usada para distinguir entre sistemas cuánticos integrables y caóticos. En el 1DAM se puede observar cómo la  $P(s)$  cambia suavemente en los regímenes balístico, caótico y localizado.

Es importante mencionar que la distribución  $P(s)$ , también da información de la

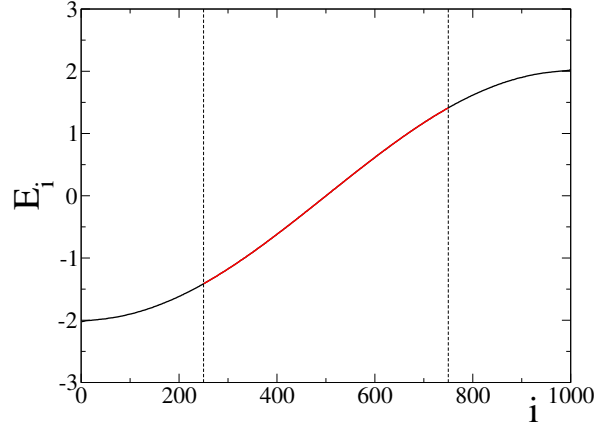


Figura 2.1: Autoenergías ordenadas de la matriz Hamiltoniana  $H$  para el 1DAM, Ec. (1.3), de tamaño  $L = 1000$  y parámetro de desorden  $\xi = 2.86$ . Se muestra que en el centro de la banda de energías la densidad de estados es aproximadamente constante. La línea roja representa el 50% de las autoenergías ubicadas en el centro de la banda.

densidad de probabilidad de encontrar dos autoenergías consecutivas del Hamiltoniano  $H$  con espaciamiento  $s$ . Para construir dicha distribución seguimos el siguiente procedimiento: (i) utilizamos el Hamiltoniano de enlace fuerte para el 1DAM, Ec. (1.3), considerando un tamaño de  $L = 1000$ , (ii) diagonalizamos y graficamos en la Fig. 2.1 las autoenergías de  $H$ , observamos que alrededor del centro de la banda ( $E = [-1.4, 1.4]$ ) la densidad de estados es aproximadamente constante, entonces utilizamos 500 energías al centro de la banda y (iii) realizamos este procedimiento con 2000 matrices hamiltonianas. Para cada matriz se calcularon los espaciamientos  $s$  entre energías consecutivas de forma que

$$s_i = \frac{E_{i+1} - E_i}{\Delta}, \quad (2.1)$$

donde  $\Delta$  es el espaciamiento promedio del espectro de cada matriz y es calculado como la pendiente de la curva  $E_i$  vs.  $i$  al centro de la banda, como se muestra en la Fig. 2.1. Este procedimiento de normalizar los autoenergías con el espaciamiento promedio es conocido como desdoblamiento del espectro.

Dados los espaciamientos entre energías consecutivas de todas las matrices hamiltonianas, se pueden graficar los histogramas que corresponden a la distribución  $P(s)$  en la transición de los tres regímenes de transporte, ver Fig. 2.2, recordando al lector que los regímenes de transporte están caracterizados por el desorden del sistema interno dado por la razón  $l_\infty/L$ , la cual nos vamos a permitir llamar *parámetro de desorden*, tal que

$$\xi = \frac{l_\infty}{L}. \quad (2.2)$$

Así, la longitud de localización  $l_\infty$  puede ser obtenida fijando valores para  $\xi$  y considerando alambres de tamaño  $L$ . Además, utilizando las ecuaciones de Thouless

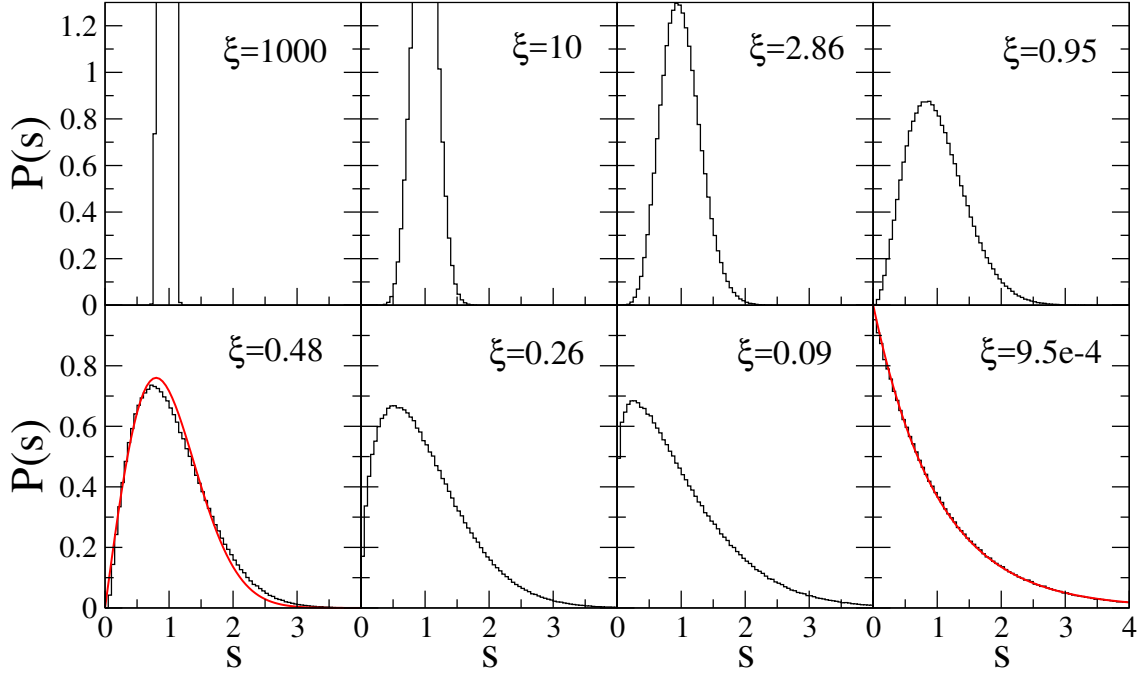


Figura 2.2: Distribución de espaciamentos entre energías consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM de tamaño  $L=1000$ , sin acoplamiento al exterior. Cada histograma está dividido en 80 bins, considerando para los cálculos  $10^6$  datos de 2000 realizaciones de alambres para cada parámetro de desorden  $\xi$  indicado en los paneles. Las curvas rojas corresponden a las distribuciones de Wigner-Dyson y Poisson respectivamente.

(1.4) y (1.5) se obtiene el ancho de la distribución uniforme,  $\omega$ , que da lugar a los potenciales de sitio aleatorios escogidos de  $-\omega/2$  a  $\omega/2$ ; así mismo el acoplamiento a primeros vecinos es  $\mathcal{V} = 1$ . Los valores escogidos para  $\xi$  son los mismos usados en [18], para reproducir los resultados reportados, añadiendo  $\xi = 1000$  y  $\xi = 10$ .

En el capítulo anterior se mencionó que el régimen balístico indica  $\xi \gg 1$ , el régimen difusivo o caótico señala  $\xi \sim 1$  y el régimen localizado es  $\xi \ll 1$ . En este sentido, la Fig. 2.2 muestra que la distribución  $P(s)$  en el régimen balístico se aproxima a una función delta centrada en  $s = 1$ . Al acercarse al régimen caótico, se puede usar la RMT para predecir la forma de la  $P(s)$  usando la simetría adecuada, en nuestro caso el 1DAM tiene simetría de inversión temporal al igual que el GOE, y para este sistema la distribución de espaciamento entre niveles  $P(s)$  puede ser descrita por la distribución de Wigner-Dyson (WD) dada por

$$P_{WD}(s) = \frac{\pi}{2}s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right). \quad (2.3)$$

Por último, en el régimen localizado los autoestados están localizados, cuestión que permite asumir que los autovalores están completamente descorrelacionados y por argumentos estadísticos [22] se puede mostrar que la  $P(s)$ , toma la forma de la

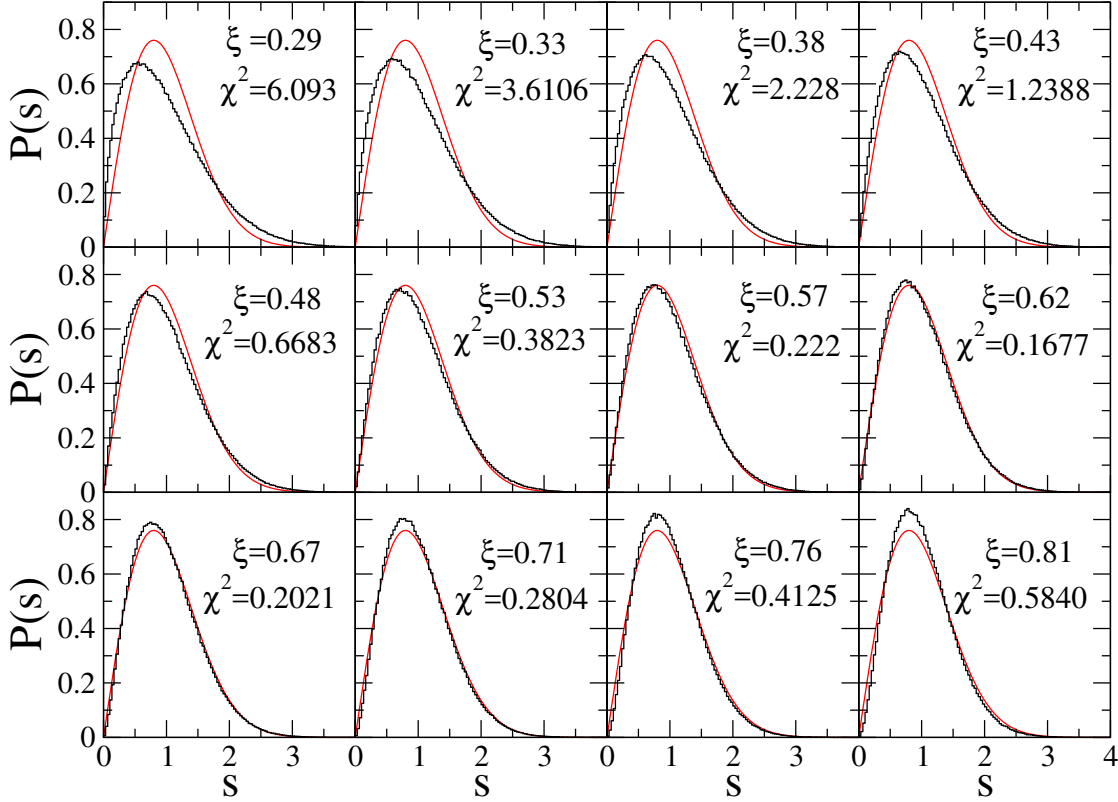


Figura 2.3: Distribución de espaciamentos entre energías consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM, con alambres de tamaño  $L=1000$ . Cada histograma fué construido con  $10^6$  datos, los valores de  $\xi$  se encuentran alrededor del régimen difusivo. La línea continua roja en cada panel representa la distribución de Wigner-Dyson. En cada panel se indica el valor de la estadística chi-squared,  $\chi^2$ .

distribución de Poisson,

$$P(s) = \exp(-s). \quad (2.4)$$

En [18] se menciona que la distribución de WD coincide con la curva de  $\xi = 0.48$ , sin embargo en los resultados reportados no se mostró gráficamente dicha afirmación, cuestión que realizamos en la Fig. 2.2. Prestando atención a la curva  $P(s)$  correspondiente a  $\xi = 0.48$ , se observa que el histograma no coincide perfectamente con la distribución de WD. Así que decidimos dibujar las curvas de  $P(s)$  para valores cercanos a  $\xi = 0.48$ , con el propósito de buscar una mejor correspondencia entre los histogramas con la distribución de WD. Como se puede apreciar en la Fig. 2.3, tomamos valores de  $\xi$  desde 0.29 hasta 0.81, sin embargo en el rango para  $\xi$  de 0.53 a 0.67 se muestra visualmente una mejor correspondencia entre los histogramas y la distribución de WD (curva roja).

Para establecer el valor de  $\xi$  que ajusta mejor la  $P(s)$  con la distribución de WD, se realizó la estadística chi-squared [23],  $\chi^2$ , para medir la correspondencia entre los

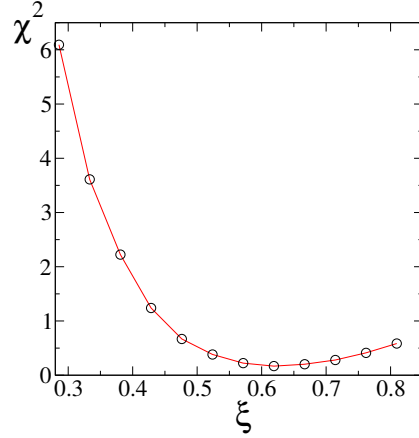


Figura 2.4: La estadística chi-squared,  $\chi^2$ , para la distribución de Wigner Dyson, como función del parámetro de desorden  $\xi$  alrededor del régimen difusivo.

datos numéricos y la distribución de WD, de manera que el valor de  $\xi$  que minimiza  $\chi^2$  es el que relaciona mejor ambas curvas, ver Fig. 2.4. Se encontró que dicho valor es  $\xi = 0.62$ , el cual tomaremos en cuenta en el Capítulo 4. Por ahora nos enfocaremos en la reproducción de resultados previos.

Es importante mencionar aquí que la distribución de WD, ver Ec. (2.3), es una aproximación para describir el GOE. Además, que la propiedad más importante de esta distribución es la repulsión de niveles cercanos, la cual ocurre cuando  $s \rightarrow 0$ , y por tanto  $P(s = 0) = 0$ . Esto es, en los regímenes donde las funciones de onda están extendidas sobre el sistema (balístico y difusivo), este fenómeno es llamado generalmente *repulsión de niveles* y deja de existir en el régimen localizado cuya  $P(s)$  se espera sea la distribución de Poisson, ver Ec. (2.4), donde  $P(s = 0) \neq 0$ .

Teniendo en cuenta la *repulsión de niveles*, Izrailev propuso una distribución  $P(s)$  [24,25] que describe analíticamente las situaciones intermedias entre los tres regímenes de transporte; desde una función delta para el régimen balístico, pasando por la distribución de WD en el régimen caótico hasta llegar a ser la distribución de Poisson para el régimen localizado. La distribución de espaciamientos mencionada está dada por:

$$P_\beta(s) = Ax^\beta (1 + B\beta x)^{f(\beta)} \exp \left[ -\frac{1}{4}\beta x^2 - \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)x \right], \quad x = \frac{\pi}{2}s, \quad (2.5)$$

donde A y B son parámetros de normalización que satisfacen las condiciones

$$\int_0^\infty P_\beta(s) ds = \int_0^\infty s P_\beta(s) ds = 1, \quad (2.6)$$

y  $\beta$  es conocido como el parámetro de repulsión, ya que describe el grado de repulsión entre niveles cercanos. La función  $f(\beta)$  en (2.5) ajusta la distribución  $P_\beta(s)$  a las tres distribuciones de la teoría de matrices aleatorias; GOE, GUE y GSE y a la distribución

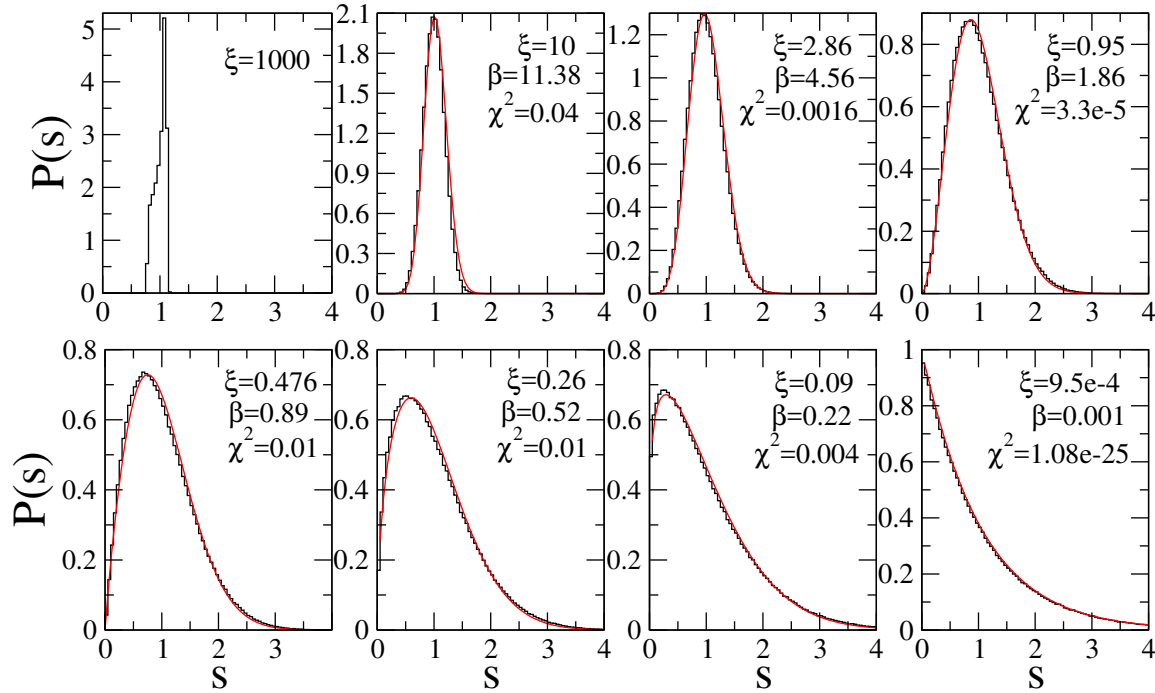


Figura 2.5: Los histogramas corresponden a la distribución de espaciamientos  $P(s)$  para  $L = 1000$  y las líneas rojas muestran el ajuste de la distribución de Izrailev  $P_\beta(s)$ . Cada histograma fué dividido en 80 bins y considerando  $10^6$  datos, obtenidos de 2000 realizaciones de alambres. En cada panel se muestra el parámetro de desorden  $\xi$ , el valor de ajuste para  $\beta$  y el valor para la estadística  $\chi^2$  entre el ajuste (curva roja) y el histograma.

Poissoniana utilizando los valores apropiados de  $\beta = 1, 2, 4$  y  $0$  respectivamente, la función de ajuste es

$$f(\beta) = \frac{2^\beta \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{\beta} - 0.16874. \quad (2.7)$$

La función (2.5) es conocida como *distribución de Izrailev* y es válida para cualquier valor de  $\beta$  de  $0 \rightarrow \infty$ . Cuando  $\beta = 1$  la distribución de Izrailev se aproxima a la distribución de WD, para  $\beta \gg 1$  la distribución  $P_\beta(s)$  tiende a una función delta centrada en  $s = 1$  porque todos los valores propios llegan a ser igualmente espaciados, por último cuando  $\beta \rightarrow 0$  la  $P_{\beta=0}(s)$  se reduce a la distribución de Poisson [18, 26]. En la Fig. 2.5 se realizó un ajuste de la distribución de Izrailev a las curvas numéricas obtenidas en la Fig. 2.2 para caracterizarlas con su respectivo parámetro de repulsión  $\beta$ .

Es interesante ver en la Fig. 2.5 que para valores muy grandes de  $\xi$ , por ejemplo en  $\xi = 1000$ , la  $P(s)$  del 1DAM tiende a una función delta aún cuando no pudimos hacer un ajuste de la distribución de Izrailev al histograma dado que el graficador utilizado (xmgrace) no lo permitió. Sin embargo, los histogramas y la distribución de

Izrailev tienden a una función delta cuando  $\xi$  y  $\beta$  son muy grandes.

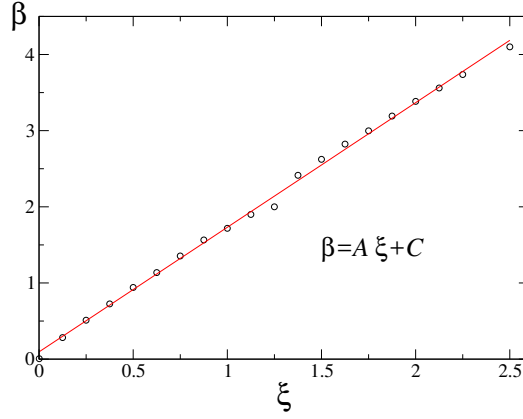


Figura 2.6: Parámetro de repulsión  $\beta$  en función del parámetro de desorden  $\xi$ . Cada símbolo fue calculado para muestras de tamaño  $L = 1000$  y diferentes valores para  $\xi$ . La línea roja es un ajuste lineal con coeficientes  $A = 1.6365 \pm 0.02$  y  $C = 0.095 \pm 0.03$ . El coeficiente de correlación para el ajuste lineal es  $r = 0.998$ .

Para ver cómo se relaciona el parámetro de repulsión  $\beta$  con  $\xi$  realizamos el mismo procedimiento usado para la Fig. 2.5, ajustando la distribución de Izrailev a cada curva numérica para conocer el parámetro  $\beta$  que corresponde a cada valor de  $\xi$ . La relación entre estos parámetros se muestra en la Fig. 2.6, donde se puede apreciar que el parámetro  $\beta$  tiene una dependencia lineal como función de  $\xi$ , se realizó un ajuste lineal a los datos numéricos (símbolos negros) y se encontró que la función que relaciona los parámetros es

$$\beta = A\xi + C; \quad \text{con } A = 1.64 \pm 0.02 \quad \text{y} \quad C = 0.09 \pm 0.03. \quad (2.8)$$

Ahora sabemos que  $\beta$  es linealmente proporcional a  $\xi$  y a su vez  $\xi$  es proporcional a  $l_\infty$ , ver Ec. (2.2), entonces podemos decir que el parámetro de repulsión también es proporcional a la longitud de localización. Además con relación (2.8) es posible conocer el parámetro de repulsión que corresponde a  $\xi = 1000$  y graficar la distribución de izrailev. Es importante resaltar que la energía utilizada para obtener la Ec. (2.8) fue  $E = 0$ , debido a que éste es el valor en el centro de la banda y la densidad de estados es aproximadamente constante.

## 2.2 Escalamiento de un sólo parámetro

La hipótesis del escalamiento de un sólo parámetro fué desarrollada en [2] desde el contexto del transporte de sistemas conductores desordenados. En particular, todas las propiedades de dispersión de muestras de tamaño finito están determinadas solamente por la razón  $l_\infty/L$  la cual es conocida en la literatua como el *parámetro*

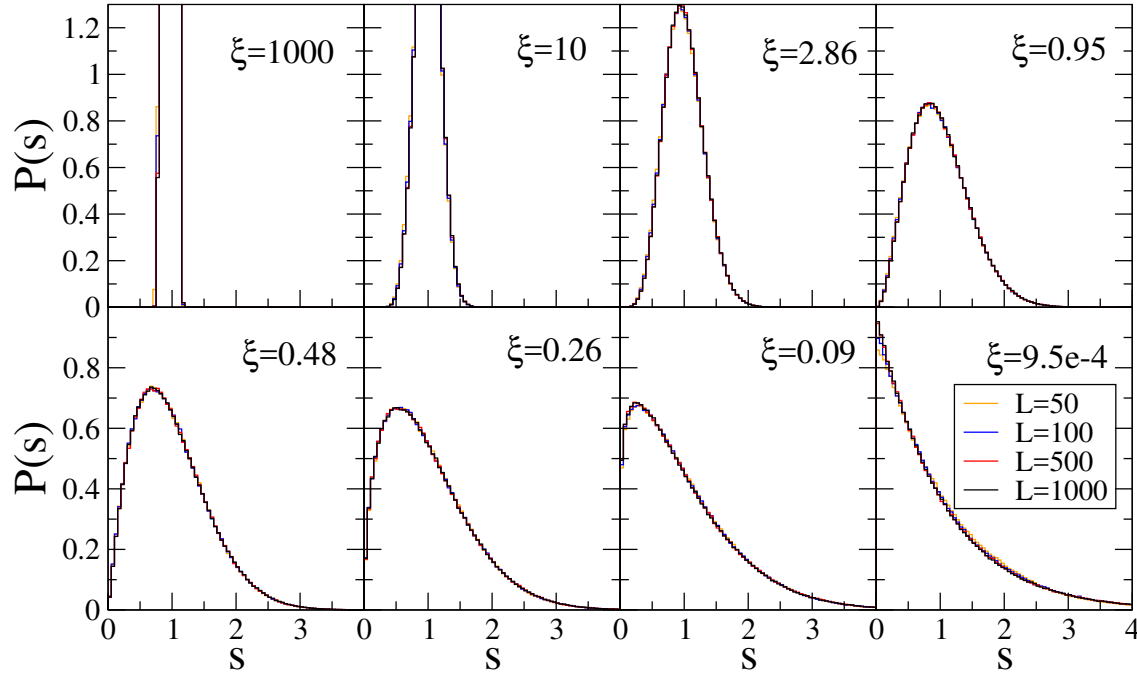


Figura 2.7: Distribución de espaciamentos de energías consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM de tamaño  $L=50, 100, 500$  y  $1000$ , sin acoplamiento al exterior. El parámetro de desorden  $\xi$  está indicado en cada panel.

de escalamiento, por lo tanto para un valor fijo de la razón  $l_\infty/L$  se espera que las propiedades de transporte sean invariantes al cambiar el tamaño  $L$ . En el desarrollo de este trabajo hemos llamado a dicha razón *parámetro de desorden*  $\xi$ , al cual se le han asignado valores fijos para muestras de tamaño  $L = 1000$ , ver Fig. 2.2, si fijamos el valor de  $\xi$  podemos esperar que la distribución  $P(s)$  también sea invariante cuando consideramos diferentes tamaños  $L$  del sistema.

Para comprobar la invarianza de la forma de  $P(s)$  para diferentes tamaños  $L$  usamos como referente la Fig. 2.2, donde se graficaron los histogramas de  $P(s)$  de muestras de tamaño  $L = 1000$  para diferentes valores de  $\xi$ . En la Fig. 2.7 realizamos el mismo procedimiento, pero ahora considerando muestras de tamaños  $L = 50, 100$  y  $500$ . Observamos precisamente que la distribución  $P(s)$  no depende del tamaño  $L$ . Esta cuestión permite confirmar que las propiedades espectrales del 1DAM sólo dependen del parámetro  $\xi$ .

## 2.3 Propiedades de dispersión

A continuación, se pretende abrir el sistema conectando las dos terminales del alambre finito a alambres semi-infinitos “ideales”, ver Fig. 2.8. De acuerdo al capítulo anterior, el modelo que permite acoplar la región interna al continuo está descrito por

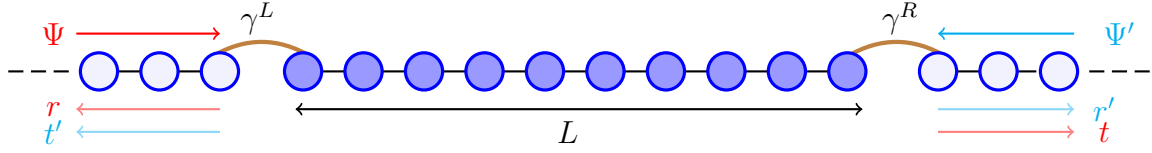


Figura 2.8: Modelo de Anderson unidimensional de tamaño  $L$  con dos terminales acopladas en los lados opuestos con magnitudes de acoplamiento  $\gamma^L$  y  $\gamma^R$  respectivamente.

el Hamiltoniano efectivo  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , ver Ec. (1.7),

$$\mathcal{H}_{mn} = H_{mn} - \frac{i}{2}W_{mn}; \quad W_{mn} = \sum_{c=L,R} A_m^c(0)A_n^c(0) = (\gamma^L\delta_{n,1} + \gamma^R\delta_{n,N})\delta_{nm}. \quad (2.9)$$

Por conveniencia elegimos  $\epsilon = 0$  y  $\mathcal{V} = 1$ . En la expresión anterior (2.9), la matriz  $W_{mn}$  contiene la información de las terminales acopladas al sistema.

Ahora bien, existe una expresión más general para el Hamiltoniano efectivo, que hace explícito el vector de onda  $k$  que incide en el alambre y a su vez depende de la energía  $E$ , este  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  tiene la forma:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - \frac{e^{ik}}{2}WW^T, \quad k = \arccos(E/2). \quad (2.10)$$

La matriz  $W$  es de tamaño  $L \times 2M$ , con  $M = 1$  debido a que el 1DAM es unimodal. Esta matriz especifica los sitios del alambre que se encuentran conectados al exterior. En nuestro caso los sitios acoplados se representan por los elementos  $W_{11}$  y  $W_{nn}$ , por lo tanto son los únicos elementos de la matriz  $W$  diferentes a cero,

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & W_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Es importante mencionar que las ecuaciones (2.9) y (2.10) son equivalentes. A partir de la Ec. (2.10), es posible calcular las propiedades de transporte a partir de la matriz dispersión  $S(E)$ . Consideramos la magnitud de acoplamiento perfecto en cada terminal, esto es  $\gamma^L = \gamma^R = 2$  [18]. Consecuentemente, se procede a calcular la matriz dispersión que usando métodos estándar puede ser escrita de la forma [27–29]

$$S(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = 1 - 2i \sin(k)W^T \frac{1}{E - \mathcal{H}_{\text{eff}}}W, \quad (2.12)$$

donde  $r$  y  $r'$  son las matrices de reflexión,  $t$  y  $t'$  son las matrices de transmisión del sistema mostrado en la Fig. 2.8. Estas matrices son de tamaño  $M \times M$ .

Dada la matriz de dispersión  $S(E)$ , sólo estudiaremos la función de transmisión que en la literatura también es conocida como la conductancia adimensional, pues el

objetivo es reproducir resultados ya reportados sobre esta cantidad. Una expresión para la conductancia fue propuesta por Landauer, en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión, la cual se generalizó para  $n$  canales acoplados al alambre, consecuentemente la conductancia adimensional  $G$  se puede expresar como [10, 11]

$$G = Tr(tt^\dagger), \quad (2.13)$$

siendo  $t$  el coeficiente de transmisión de la matriz dispersión  $S$ , Ec. (2.12). Adicionalmente, en el 1DAM cuando el desorden es fuerte el promedio de la conductancia es exponencialmente pequeña debido a la fuerte localización de los autoestados. Sin embargo, para este caso  $G$  no es una cantidad auto-promediada porque la varianza puede ser más grande que el propio promedio; por lo tanto, para caracterizar adecuadamente las propiedades de transporte de muestras con una conductancia exponencialmente pequeña, se debe hacer referencia al promedio del logaritmo de  $G$ , que depende de la razón  $l_\infty/L$ , debido a la teoría de escalamiento de un sólo parámetro, Ec. (1.6):

$$\langle -\ln G \rangle = \frac{2L}{l_\infty}.$$

En la Fig. 2.9 se calculó numéricamente el promedio del negativo de la conductancia  $\langle -\ln G \rangle$  como función del tamaño del alambre  $L$ , utilizando la Ec. (2.13) para energías:  $E = 0, 0.1, 0.25$  y  $1$ , los resultados obtenidos se representan con los símbolos correspondientes. El desorden de los potenciales de sitio está dado por la ecs. (1.4) y (1.5) que se relacionan con la longitud de localización  $l_\infty$  a la cual le asignamos los valores  $l_\infty = 10, 100$  y  $1000$ . Los resultados numéricos fueron comprobados utilizando la Ec. (1.6), consiguiendo las líneas discontinuas de color negro.

Hasta aquí, se han reproducido consistentemente los resultados ya reportados en [18, 21], los cuales fueron incluidos en el Apéndice (Fig. A.1 y Fig. A.2) para el 1DAM, permitiendo asegurar que los programas de cómputo construidos para los cálculos numéricos son correctos. En los capítulos subsecuentes, usaremos estos resultados como referencia para realizar el estudio de propiedades estadísticas, por medio de la  $P(s)$  de sistemas desordenados unidimensionales abiertos en los tres regímenes de transporte utilizando el 1DAM abierto.

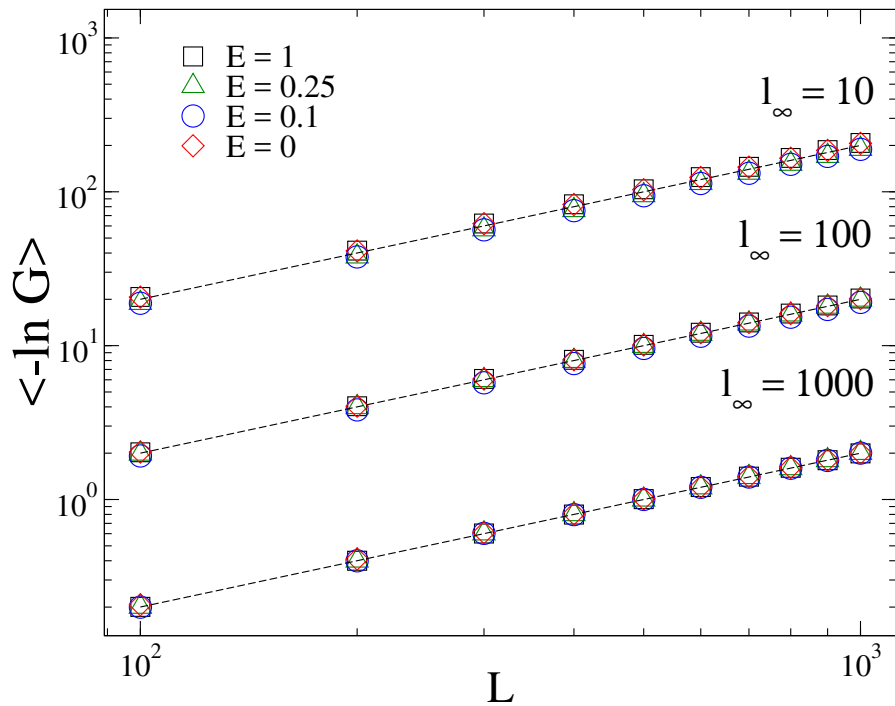


Figura 2.9: Promedio del negativo del logaritmo de la conductancia  $\langle -\ln G \rangle$  como función de  $L$  para el 1DAM. Se consideraron cuatro valores para la energía  $E = 0, 0.1, 0.25$  y  $1$ ; los cálculos numéricos para cada valor de  $E$  se representan con cuatro símbolos diferentes. Las líneas punteadas representan las curvas teóricas obtenidas de la Ec. (1.6). Los promedios fueron calculados a partir de  $10^5$  realizaciones de alambres.



# Capítulo 3

## Distribución de espaciamientos para el GOE abierto

En este capítulo se realiza un estudio de la distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  del ensamble gaussiano GOE abierto, usando como referencia la investigación realizada en [20] para este sistema. Se construyeron programas de cómputo para extender el estudio realizado en [20].

### 3.1 Descripción de la $P(s)$ del GOE abierto

La RMT generalmente es utilizada para estudiar el comportamiento estadístico de sistemas complejos a través de ensambles de matrices llenas determinadas únicamente por su simetría; los elementos son elegidos de una distribución gaussiana no correlacionada. El GOE corresponde a matrices reales y simétricas de tamaño  $N \times N$ , además tiene simetría ante inversión temporal. El GUE es una matriz hermitiana de tamaño  $N \times N$  que no preserva simetría ante inversión temporal. Por último, el GSE es una matriz  $N \times N$  cuyos elementos son variables aleatorias cuaterniónicas independientes.

Una cantidad estadística que permite analizar las propiedades espectrales de los tres ensambles gaussianos es la distribución de espaciamientos  $P(s)$  propuesta por Wigner-Dyson como una aproximación a 2 niveles, para ensambles Gaussianos sin acoplamiento a exterior [22]

$$P_\beta(s) \propto s^\beta e^{-(A/2)s^2}, \quad (3.1)$$

aquí  $\beta$  es el índice de Dyson que depende de la simetría del sistema (GOE  $\beta = 1$ , GUE  $\beta = 2$  y GSE  $\beta = 4$ ) y  $A$  es una constante de normalización.

Por otro lado, en [20] se estudió por primera vez de forma numérica, teórica y experimental (utilizando cavidades caóticas de microondas) la  $P(s)$  de los tres ensambles GOE, GUE y GSE acoplados al continuo, los cuales están caracterizados por las resonancias dadas por los polos de la matriz dispersión  $S$  que a su vez coinciden

con los autovalores complejos del Hamiltoniano efectivo (1.7), aquí  $H$  son las matrices aleatorias de cada ensamble con  $N$  niveles de energía y  $iWW^\dagger$  contiene la información de los  $M$  canales acoplados al exterior, de hecho se considera que las amplitudes de acoplamiento tienen media cero y covarianza:  $\langle W_n^c(W_{n'}^{c'})^* \rangle = (1/\eta)\delta_{nn'}\delta^{cc'}$ , siendo  $(1/\eta)$  la fuerza del acoplamiento y a su vez es un parámetro libre.

Los autovalores complejos de  $\mathcal{H}_{eff}$  son

$$\mathcal{Z}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n \quad (3.2)$$

donde  $E_n$  y  $\Gamma_n$  son las autoenergías y el ancho de las resonancias del sistema abierto respectivamente.

Finalmente, en [20] se obtuvo una expresión analítica para la  $P(s)$  de los tres ensambles Gaussianos acoplados al exterior, como una extensión de las distribuciones de WD correspondientes.

Ahora, las matrices Hamiltonianas que tienen invarianza ante inversión temporal, son reales y simétricas. Esta es una propiedad que comparten el GOE y el 1DAM, aunque es evidente que ambos modelos representan a sistemas diferentes. Por lo tanto, centraremos nuestra atención en la  $P(s)$  del GOE obtenida analíticamente en [20], dejando de lado los ensambles GUE y GSE, para comparar en el siguiente capítulo la  $P(s)$  del GOE y del 1DAM. Por ahora, la distribución de espaciamientos para el GOE acoplado a un canal es

$$P_{M=1}^{\beta=1}(s) = \frac{A\eta}{16} e^{-(A/2)s^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{s^2 + x^2/4}} e^{-(A/16)x^2 - (\eta/2)x} \times \left[ (8s^2 + x^2)I_0\left(\frac{Ax^2}{16}\right) + x^2I_1\left(\frac{Ax^2}{16}\right) \right], \quad (3.3)$$

donde  $A$  es una constante de normalización,  $x$  proviene de un cambio de variable  $x = \Gamma_1 + \Gamma_2$  e  $I_n$  son las funciones modificadas de Bessel de primera clase. Se puede observar que en el límite  $1/\eta \rightarrow 0$ , la distribución (3.3) tiende a la distribución de WD. La expresión anterior, fue verificada y validada comparando con simulaciones numéricas y con datos experimentales obtenidos de cavidades caóticas abiertas de microondas.

## 3.2 Estudio exhaustivo de la $P(s)$ para el GOE

Partiendo de la expresión obtenida en [20] para la distribución de espaciamientos del ensamble GOE abierto, ver ec. (3.3), realizamos un estudio más detallado de la  $P(s)$  cuando se consideran diferentes valores del acoplamiento  $1/\eta$ . Por lo tanto, asignamos valores a  $\eta$  en la expresión mencionada y la constante de normalización  $A$  es determinada usando las condiciones

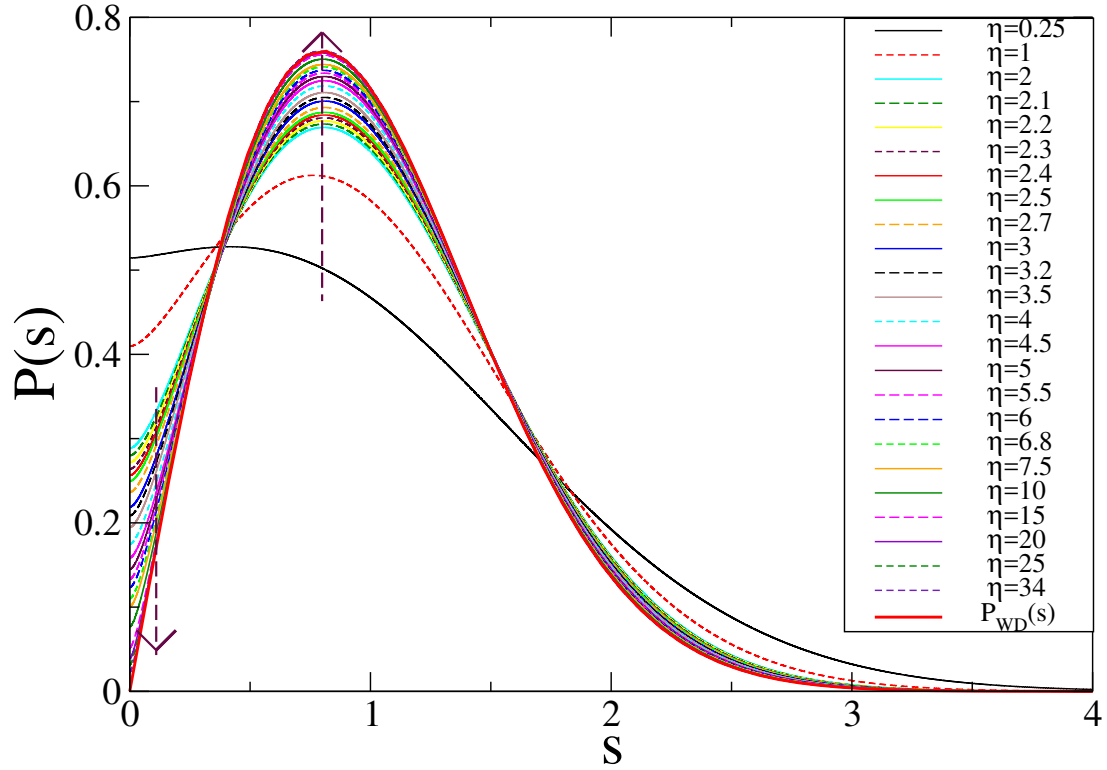


Figura 3.1: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas para el ensemble GOE normalizada, con acoplamiento al exterior en un canal ( $M = 1$ ). Se consideraron diferentes valores para  $\eta$  en la ec. (3.3). Las flechas indican que  $\eta$  crece. Además, se ha incluido la distribución de WD,  $P_{WD}(s)$ , como referencia.

$$\int_0^{\infty} P(s) ds = \int_0^{\infty} sP(s) ds = 1. \quad (3.4)$$

Calculamos las integrales numéricamente, para obtener la constante de integración. Teniendo en cuenta que el valor de  $A$  debe estar entre  $\pi/4$  y  $\pi/2$ .

En la Fig. 3.1 graficamos las curvas resultantes de la ec. (3.3) para diferentes valores de  $\eta$ . Sin embargo, debido al rango en el que la constante  $A$  está determinada,  $[\pi/4, \pi/2]$ , sólo es posible considerar valores para  $\eta$  desde 0.25 hasta 34, los cuales satisfacen las condiciones (3.4). Es evidente en la Fig. 3.1 que si la magnitud del acoplamiento  $1/\eta$  es pequeña, la distribución  $P_{M=1}^{\beta=1}(s) \rightarrow P_{WD}(s)$  (ver la curva para  $\eta = 34$ ), como se mencionó en la sección anterior. Pero a medida que aumenta el acoplamiento  $1/\eta$ , la curva  $P(s)$ , en  $s = 0$ , se va desplazando hacia arriba de forma continua.

La familia de curvas de la Fig. 3.1 describen el sistema GOE cuando es acoplado a un canal (o terminal) con magnitudes  $1/\eta$ , sin embargo el modelo de acoplamiento utilizado en el artículo de referencia [20], es diferente al modelo utilizado en este trabajo, ver ec. (2.9), por lo tanto el objetivo en esta parte es mostrar cómo se relacionan

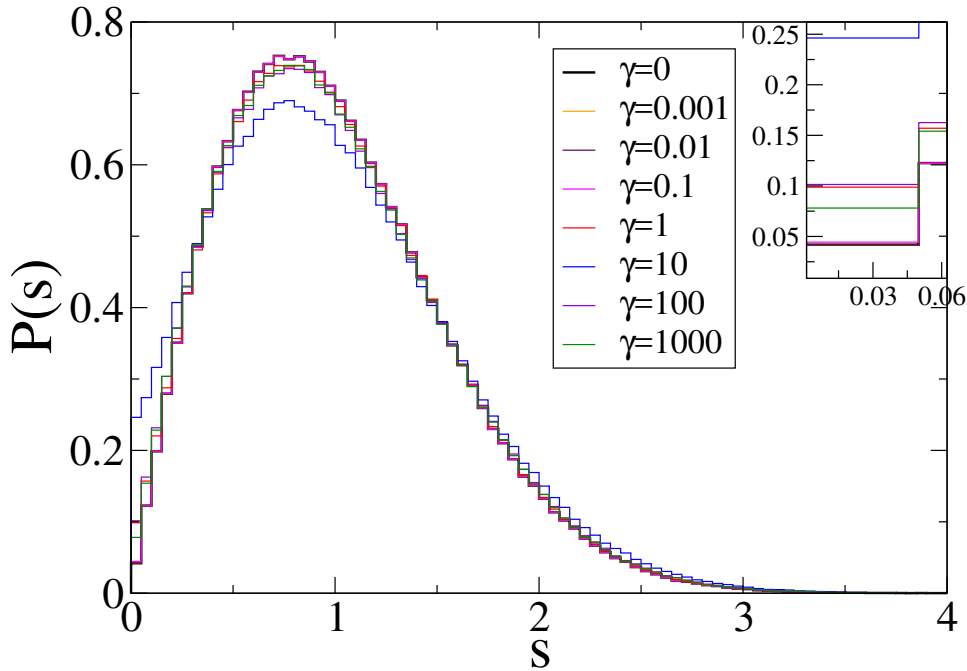


Figura 3.2: Distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el GOE, de tamaño  $L=100$  acoplado al exterior a un canal con magnitudes  $\gamma$ . Cada histograma está dividido en 80 bins, considerando para los cálculos  $10^6$  datos. En la parte superior derecha se presenta con más detalle la  $P(s)$  cerca de  $s=0$ .

las magnitudes de acoplamiento  $1/\eta$  y  $\gamma$  de ambos modelos; y posteriormente, en el siguiente capítulo, comparar la  $P(s)$  para el GOE y el 1DAM en el régimen caótico.

Para comenzar, se construyeron las curvas  $P(s)$  obtenidas por cálculos numéricos utilizando el hamiltoniano efectivo (2.9) del modelo de enlace fuerte abierto con una terminal acoplada, los números aleatorios que caracterizan la parte hermitiana  $H_{mn}$  del ensamble GOE corresponden a una distribución gaussiana, los cuales tienen media cero y varianza 1 en la diagonal principal, y fuera de ella tienen media cero y varianza  $1/2$ .

Los histogramas resultantes de los cálculos numéricos se muestran en la Fig.3.2, considerando magnitudes de acoplamiento  $\gamma = 0, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000$  con el fin de recorrer diferentes órdenes de magnitud, incluyendo el caso cerrado, es decir  $\gamma = 0$ .

Como se puede observar en la Fig. 3.2 el efecto de acoplar el sistema con magnitudes  $\gamma$  genera que la  $P(s)$  sea diferente de cero en  $s=0$ . La línea negra corresponde a la distribución de espaciamientos del sistema cerrado  $\gamma=0$ . Cuando el sistema es acoplado con magnitudes pequeñas, es decir de  $\gamma=0.0001$  hasta  $\gamma=0.1$ , los histogramas no muestran un cambio significativo respecto a la curva del sistema cerrado. A partir de  $\gamma=1$  (curva roja) la  $P(s)$  manifiesta un desplazamiento en  $s=0$ , y es máximo en  $\gamma=10$  (curva azul), pero si seguimos aumentando el acoplamiento  $\gamma$  las

curvas en  $s = 0$  ahora disminuyen su desplazamiento (ver las curvas violeta y verde). De acuerdo a lo anterior, se manifiesta un máximo desplazamiento de la  $P(s)$  en  $\gamma = 10$  y recordando que el tamaño utilizado para los cálculos fué  $L = 100$ , es posible inferir que el sistema GOE siente el máximo efecto de la dispersión cuando la magnitud de acoplamiento es  $\gamma = \sqrt{L}$ , por lo tanto es necesario reescalar el acoplamiento, para que sea independiente del tamaño  $L$ .

La razón por la cual es necesario reescalar cuando se trabaja con el ensamble GOE, es porque este sistema obedece a la ley del semicírculo de Wigner [30] que establece que la *densidad de estados* (DOS) está descrita por un semicírculo, en el intervalo  $[-2\sqrt{L}, 2\sqrt{L}]$  y tiene de la forma

$$\rho(E) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-E^2} & \text{para } |E| < 1 \\ 0 & \text{para } |E| > 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

entonces, los valores para la energía  $E$  son los autovalores reales de (2.9) que normalizados corresponden a  $E_i/\sqrt{L}$  para el sistema cerrado, y por tanto el espaciamento promedio de niveles (mean level spacing) es  $\Delta \propto 1/\sqrt{L}$  [31]. En este sentido, para obtener la distribución de espaciamentos del ensamble GOE con acoplamiento normalizada, independiente del tamaño  $L$ , es necesario escalar el acoplamiento  $\gamma$  con una nueva magnitud  $\kappa$  tal que

$$\kappa = \frac{\gamma}{\sqrt{L}}. \quad (3.6)$$

### 3.2.1 Desplazamiento $\Delta_{P(0)}$ para el GOE

Para comprobar que la nueva magnitud de acoplamiento  $\kappa$  escala adecuadamente la  $P(s)$ , se propuso una cantidad  $\Delta_{P(0)}$  que mide el desplazamiento de la distribución  $P(s)$  de las curvas numéricas (histogramas) en  $s = 0$  causado por el acoplamiento.

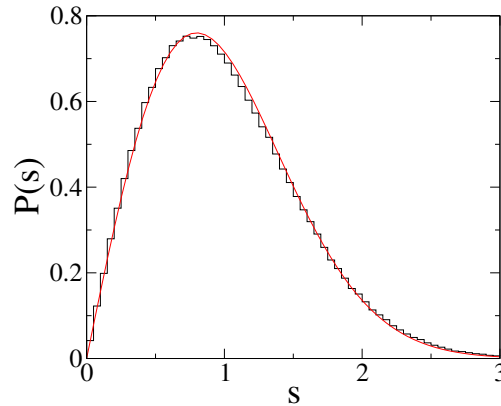


Figura 3.3: Curva roja: Distribución de WD para el ensamble GOE cerrado. Histograma:  $P(s)$  numérica para  $L = 100$ .

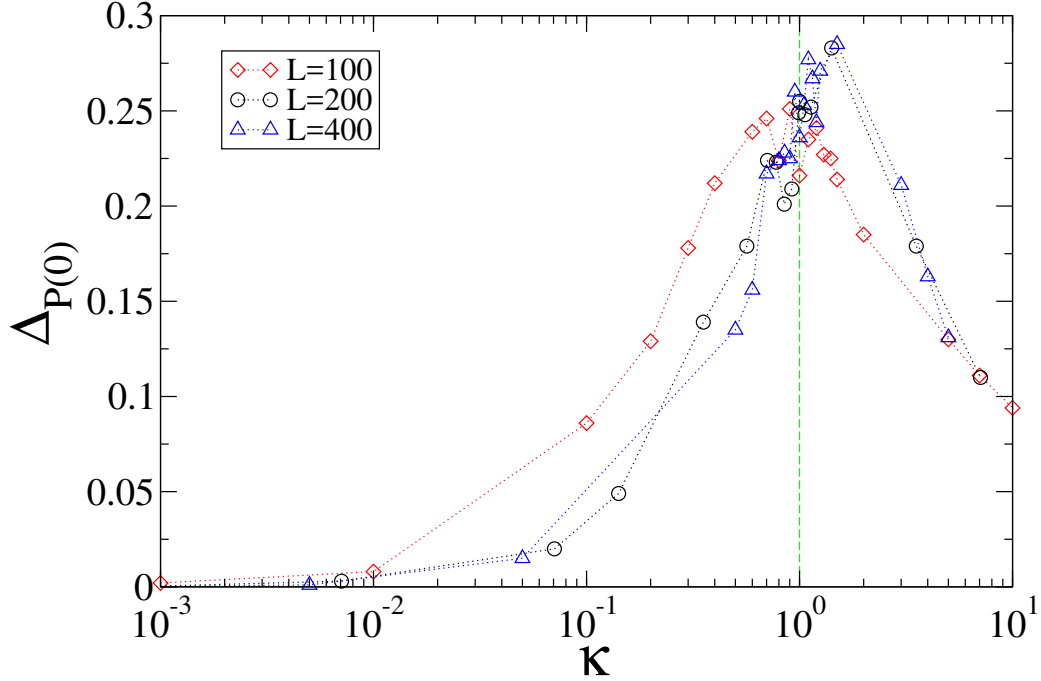


Figura 3.4: Desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  de la distribución de espaciamientos  $P(s)$  en función del acoplamiento  $\kappa$  para el GOE acoplado a una terminal con muestras de tamaños  $L = 100, 200$  y  $400$ . La línea verde indica  $\kappa = 1$ . Cada símbolo fué calculado con  $10^6$  datos.

Teniendo en cuenta que: (i) un histograma representa un conteo de números que caen en un intervalo  $[s_{i-1}, s_i]$  y (ii) la distribución de WD para el sistema cerrado en  $s = 0$  es  $P(s) = 0$ , como se observa en la curva roja de la Fig. 3.3. Buscamos en los datos que generan el histograma (curva negra) un intervalo  $[0, s_1]$  donde el conteo de números fuera cero, encontramos en promedio que  $s_1 = 1 \times 10^{-3}$ . Entonces, cuando se abre el sistema,  $\gamma \neq 0$ , el conteo de números en  $[0, 1 \times 10^{-3}]$  será diferente de cero, por lo tanto el valor que cuantifica el desplazamiento generado por el acoplamiento corresponde a un área con base  $s_1 = 1 \times 10^{-3}$  y altura  $N_{\text{conteo}}$  que representa el conteo de números en  $[0, s_1]$ , de manera que el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  es:

$$\Delta_{P(0)} = s_1 * N_{\text{conteo}} \quad (3.7)$$

Usando la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  medimos cuantitativamente el desplazamiento de la  $P(s)$  en  $s = 0$  generado por el acoplamiento para alambres de tamaño  $L = 100, 200$  y  $400$  considerando la magnitud  $\kappa = \gamma/\sqrt{L}$ . Los resultados se muestran en la Fig. 3.4, donde se puede ver que el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  es máximo cuando  $\kappa \approx 1$ .

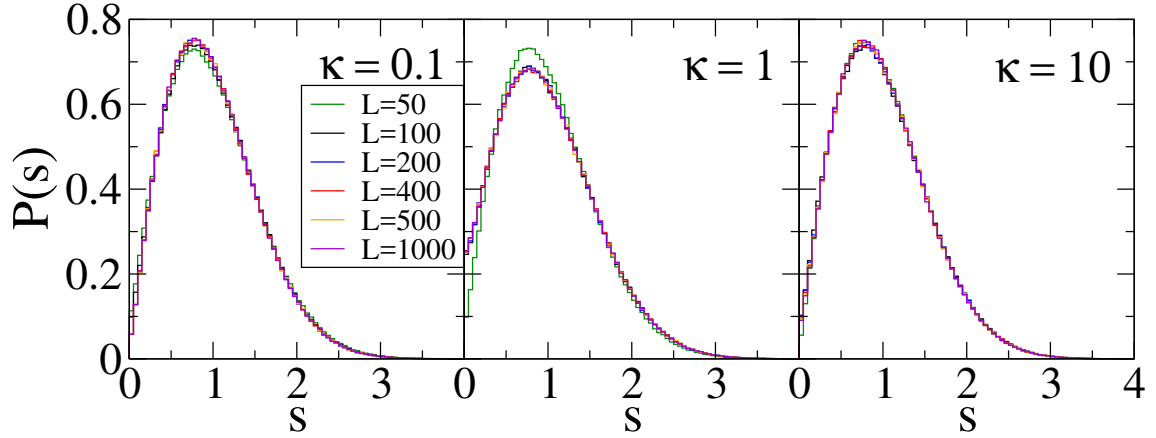


Figura 3.5: Distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el GOE, de tamaño  $L=50, 100, 200, 400, 500$  y  $1000$ , acoplados al exterior por un canal con magnitudes  $\kappa$ .

### 3.2.2 Relación entre los acoplamientos del modelo teórico y numérico del GOE

Ahora, considerando la nueva magnitud de acoplamiento escalada,  $\kappa$ , se graficaron los histogramas de la distribución de espaciamientos  $P(s)$  para tamaños  $L=50, 100, 200, 400, 500, 1000$ , con acoplamientos  $\kappa=0.1, 1$  y  $10$  como se indica en cada panel de la Fig. 3.5. Se puede notar que para cada valor de  $\kappa$  las curvas se superponen para todos los valores de  $L$  mostrados, excepto para  $L=50$  (curva verde); la explicación es que el sistema GOE debe cumplir que el tamaño del sistema  $L$  debe ser mucho mayor comparado con el número de canales acoplados  $M$ ,  $L \gg M$ , para poder evidenciar un comportamiento asintótico, es decir un comportamiento aproximadamente igual. Pero ¿Qué significa  $M \gg L$ ?, como información complementaria presentamos en las Figs. A.4 y A.5 del Apéndice con más detalle el comportamiento de las curvas  $P(s)$  desde  $L=50$  hasta  $L=100$  para  $M=1$  y  $M=2$ , es evidente que alrededor de  $L=95$  las curvas presentan fluctuaciones para 1 y 2 terminales acopladas, por lo tanto consideramos que aproximadamente  $L \geq 100$  las curvas tienen la misma forma como se puede notar en la Fig. 3.5.

Hasta aquí, hemos logrado establecer el modelo de acoplamiento para el ensamble GOE numérico independiente del tamaño  $L$ , por medio de la magnitud escalada  $\kappa$ , que puede ser escrito como

$$\mathcal{H}_{eff} = H - \frac{i}{2}(\kappa\delta_{n,1})\delta_{mn}, \quad (3.8)$$

para compararlo con el modelo de acoplamiento del artículo de referencia [20], donde la magnitud de acoplamiento es  $1/\eta$ .

A continuación, se describe el procedimiento para relacionar las magnitudes de acoplamiento  $\kappa$  y  $1/\eta$ . Primero, se obtuvieron las curvas numéricas (histogramas) para diferentes valores de  $\kappa$ , con  $L=200$ ; luego, sobre la familia de curvas teóricas,

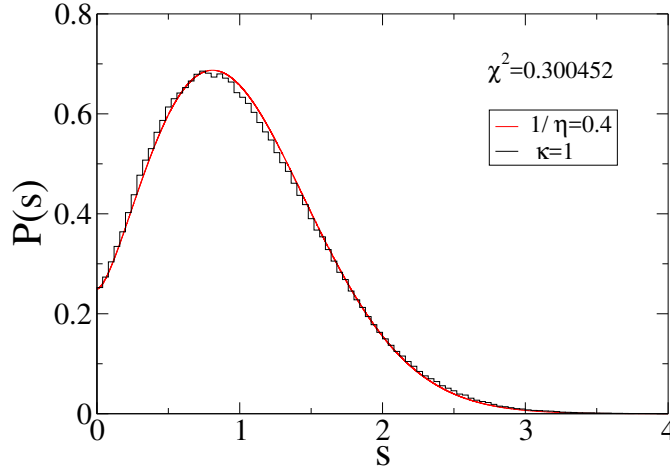


Figura 3.6: Distribución de espaciamientos  $P(s)$ . La curva roja se obtiene de la Ec. (3.3) con la magnitud de acoplamiento  $1/\eta = 0.4$  y el histograma se obtuvo de cálculos numéricos de la Ec. (3.8) con  $\kappa = 1$ . Los valores de  $\kappa$  y  $1/\eta$  corresponden al mínimo de  $\chi^2$ .

obtenidas de la Ec. (3.3) para diferentes valores de  $\eta$  en la Fig. 3.1, se graficaron cada uno de los histogramas obtenidos para observar la correspondencia entre  $\kappa$  y  $1/\eta$ , verificando el mejor ajuste con la estadística chi-squared, de manera que se encontraron los valores de  $\kappa$  y  $1/\eta$  para los cuales  $\chi^2$  es mínimo. Un ejemplo es mostrado en la Fig. 3.6 para  $\kappa = 1$  y  $1/\eta = 0.4$ , los cuales minimizan la estadística chi-squared a  $\chi^2 = 0.300452$ .

Finalmente, se realizó el mismo procedimiento para diferentes magnitudes  $\kappa$  y  $1/\eta$ , registrando en una tabla de datos los valores que minimizaban  $\chi^2$  (ver la Tab. 3.1). En la Fig. 3.7 se graficaron los datos obtenidos, en la que se puede observar la relación que guardan las magnitudes  $\kappa$  y  $1/\eta$ , nótese que alrededor de  $\kappa \approx 1$  es máximo el acoplamiento para  $1/\eta$ , antes y después de este punto el comportamiento de la curva es monótono y aproximadamente simétrico.

$\kappa$	$1/\eta$	$\chi^2$
0.01	0.04	0.1199
0.02	0.043	0.1223
0.04	0.05	0.1256
0.07	0.05	0.1191
0.1	0.066	0.129
0.2	0.1	0.1416
0.4	0.2	0.1971
0.7	0.29	0.2566
1.0	0.4	0.3004
2.0	0.416	0.3082
4.0	0.25	0.2301
7.0	0.166	0.1864
10.0	0.133	0.1706
20.0	0.1	0.1568
40.0	0.066	0.1363
70.0	0.066	0.1383
100.0	0.066	0.1861

Tabla 3.1: Correspondencia entre las magnitudes de acoplamiento  $1/\eta$  y  $\kappa$  con su respectivo  $\chi^2$ .

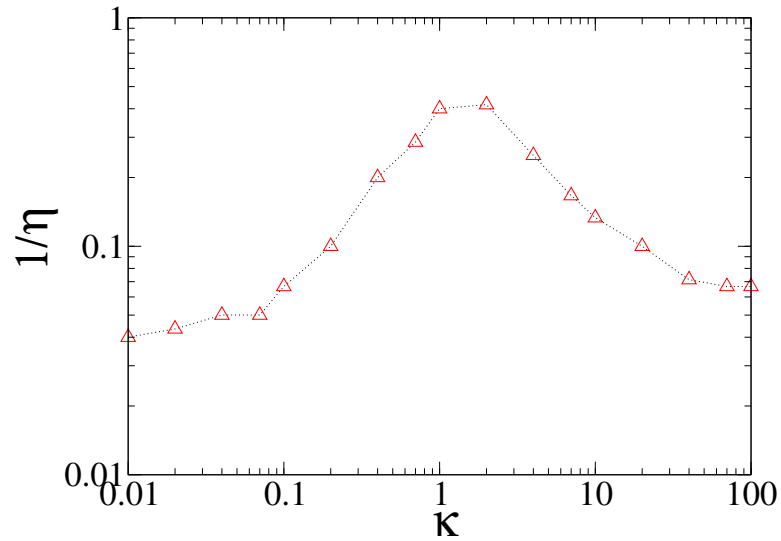


Figura 3.7: Relación entre las magnitudes de acoplamiento  $1/\eta$  y  $\kappa$  para el ensemble GOE. Cada símbolo representa la pareja de datos de la Tab. 3.1 donde se muestra su respectivo  $\chi^2$ .



# Capítulo 4

## Distribución de espaciamientos para el 1DAM abierto

En este capítulo se estudia numéricamente la distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  del 1DAM acoplado al exterior por una y dos terminales en los tres regímenes de transporte. En el régimen caótico demostramos que la distribución  $P(s)$  obtenida analíticamente en [20] para el GOE acoplado por un canal, también describe a la  $P(s)$  del 1DAM abierto por una terminal. Adicionalmente, se calcula la separación de la función  $P(s)$  en  $s = 0$  cuando se abre el sistema con magnitudes de acoplamiento  $\gamma$  por medio de una variable propuesta llamada *desplazamiento*  $\Delta_{P(0)}$ .

### 4.1 $P(s)$ del 1DAM en el régimen difusivo

Hemos mencionado en la Sección 2.1 que el ensamble GOE de la RMT describe sistemas caóticos con simetría de inversión temporal, de igual manera mostramos que los regímenes de transporte del 1DAM están caracterizados por el parámetro  $\xi$  y encontramos que  $\xi = 0.62$  corresponde al régimen caótico o difusivo, pues allí es donde existe un mejor ajuste con la distribución de WD (ver Fig. 2.3). La diferencia entre el GOE y el 1DAM es que el Hamiltoniano del GOE es una matriz llena de números aleatorios, mientras que el Hamiltoniano del 1DAM sólo tiene números aleatorios en la diagonal principal<sup>1</sup>. Sin embargo, ambos sistemas tienen simetría bajo inversión temporal. Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo principal de esta sección es comparar la distribución  $P(s)$  obtenida teóricamente en [20] para el GOE abierto con los histogramas de  $P(s)$  obtenidos numéricamente para el 1DAM abierto.

---

<sup>1</sup>Físicamente el GOE representa sistemas muy complejos debido a las interacciones entre partículas las cuales se modelan con números aleatorios, pero no tiene una dimensionalidad definida (depende del tamaño de las matrices que conforman el ensamble). Por otro lado, el 1DAM representa alambres unidimensionales con interacciones constantes a primeros vecinos.

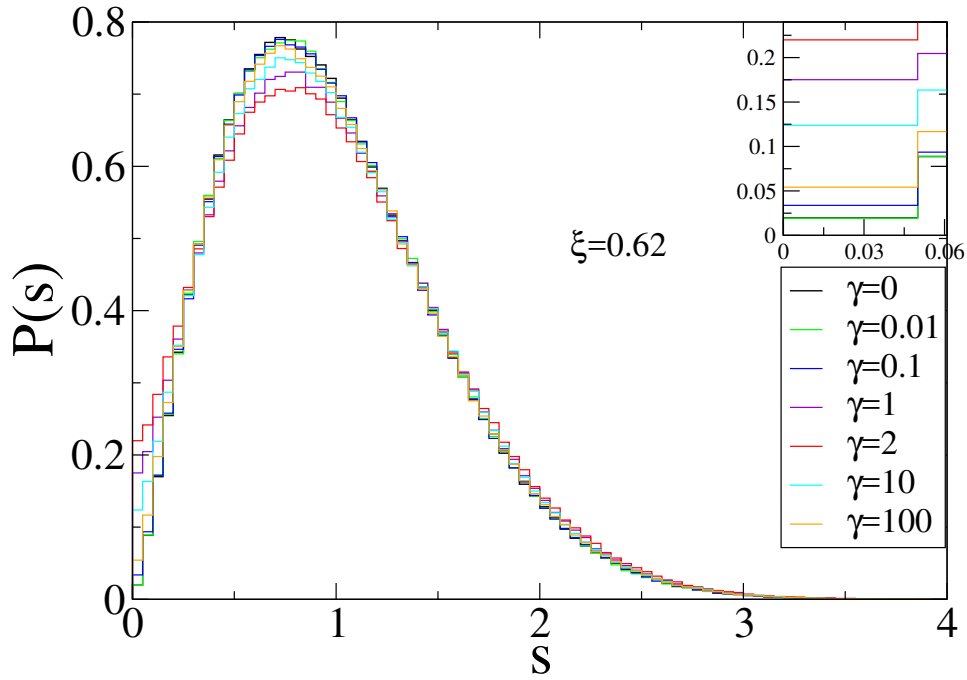


Figura 4.1: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM acoplado al exterior por una terminal con magnitudes  $\gamma$ .  $L=100$ .

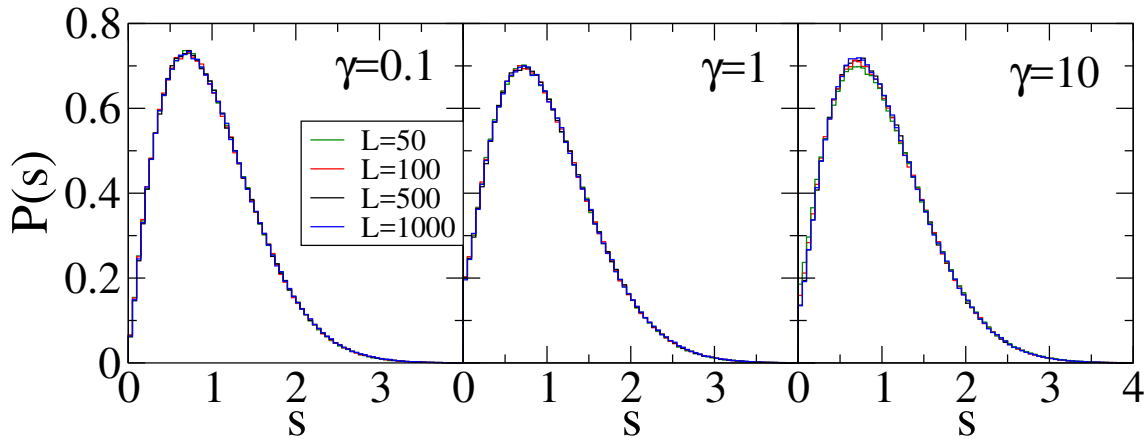


Figura 4.2: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM, de tamaño  $L=50, 100, 500$  y  $1000$ , acoplados al exterior por un canal con magnitudes  $\gamma = 0.1, 1$  y  $10$ .

En el capítulo anterior, comparamos las curvas numéricas de la distribución  $P(s)$  del ensamble GOE con las curvas teóricas obtenidas de la Ec. (3.3) para una terminal acoplada, se encontró gráficamente la relación entre los parámetros de acoplamiento  $1/\eta$  y  $\kappa$ , ver Fig. 3.7. Ahora, se pretende comparar los resultados obtenidos en el capítulo anterior con el 1DAM que obedece al Hamiltoniano efectivo (2.9), para ello sólo conectaremos el sistema interno a una terminal con  $\gamma^L = \gamma$ , entonces  $\gamma^R = 0$ .

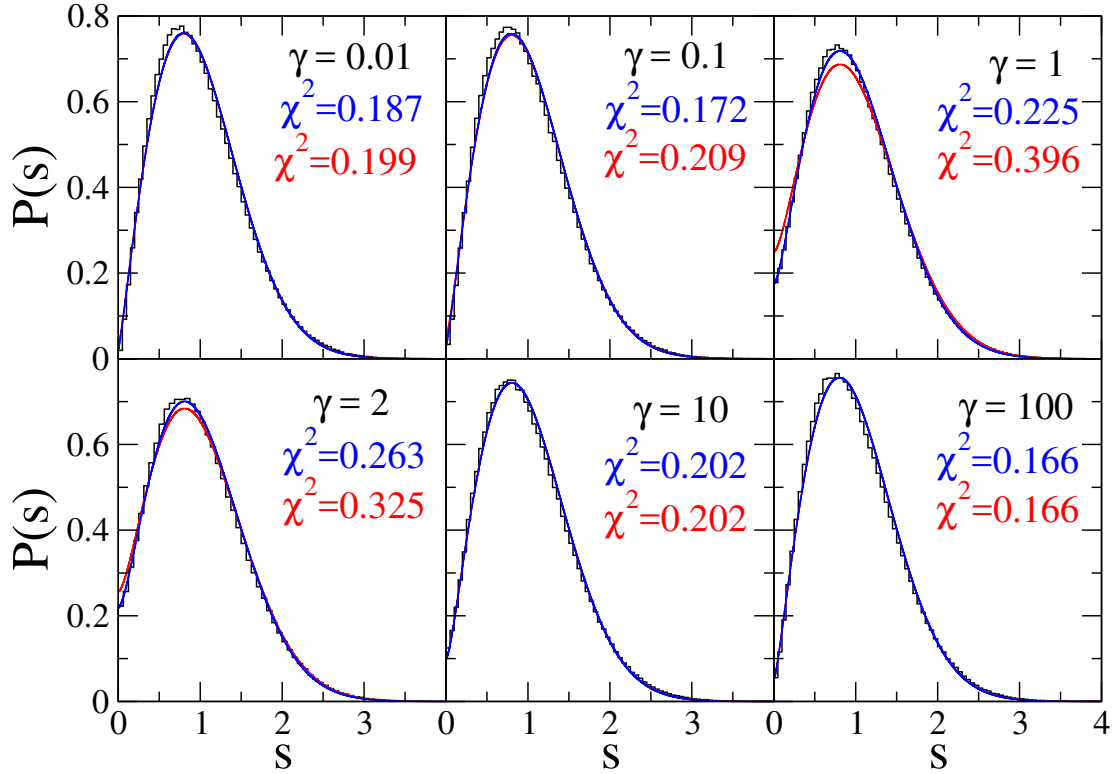


Figura 4.3: Histogramas de la distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM de tamaño  $L=100$ , con acoplamiento al exterior por una terminal. Las líneas rojas corresponden a las curvas teóricas del ensamble GOE con acoplamiento  $\kappa = \gamma$  y las líneas azules corresponden a las curvas teóricas del ensamble GOE que muestran mejor correspondencia con la  $P(s)$  del 1DAM.

Dado el hamiltoniano efectivo, se graficó en la Fig. 4.1 las curvas numéricas (histogramas) de la  $P(s)$  para el 1DAM en el régimen caótico,  $\xi = 0.62$ , con magnitudes de acoplamiento  $\gamma = 0, 0.01, 0.1, 1, 2, 10$  y  $100$ , con el fin de recorrer diferentes órdenes de magnitud, incluyendo el caso cerrado  $\gamma = 0$  y el valor de 2 ha sido incluido por conveniencia, ya que esta magnitud de acoplamiento es un valor crítico para el cual el sistema 1DAM se acopla de manera óptima al exterior y es conocido frecuentemente como *acoplamiento perfecto* [18, 32, 33].

Adicionalmente, en la Fig. 4.2 mostramos que la distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas del 1DAM es invariante cuando se consideran sistemas de diferentes tamaños  $L$ , por lo tanto no es necesario escalar el acoplamiento como se hizo para el GOE en el capítulo anterior.

Ahora, recordemos que en la Sección 3.2.2 encontramos una relación entre los acoplamientos  $\kappa$  y  $1/\eta$  del modelo numérico y teórico del GOE (ver Fig. 3.7). Entonces, graficamos en la Fig. 4.3 las curvas teóricas de la  $P_{M=1}^{\beta=1}(s)$  correspondientes a  $\kappa = 0.01, 0.1, 1, 2, 10, 100$  (color rojo), los histogramas representan la  $P(s)$  del

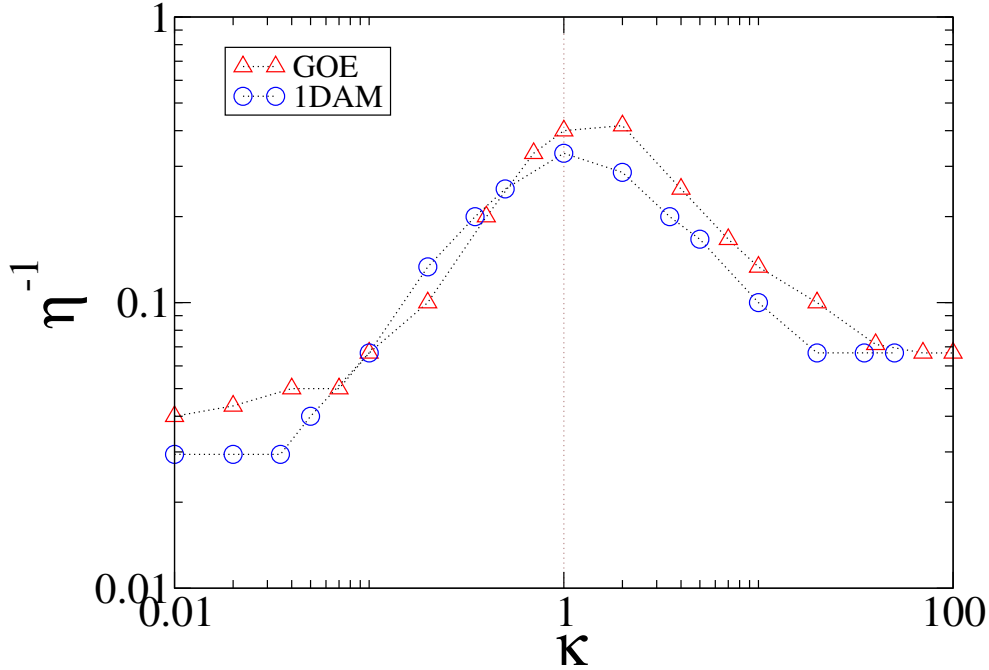


Figura 4.4: Relación entre el acoplamiento  $1/\eta$ , ver Ec. (3.3), con el acoplamiento  $\kappa$  para el ensemble GOE (triángulos) y para el 1DAM (círculos). Cada símbolo fué calculado para muestras de tamaño  $L=100$  y  $10^6$  datos.

1DAM con magnitudes de acoplamiento  $\gamma$ , nótese que consideramos los mismos valores para  $\kappa$  y  $\gamma$ . Comparando las curvas teóricas (de color rojo) con los histogramas se observa en algunos casos, por ejemplo  $\gamma = 1$  y  $\gamma = 2$ , que la curva roja tiene un comportamiento diferente al histograma. Sin embargo, encontramos otras curvas teóricas (color azul) de la Fig. 3.1 que se ajustan mejor a los histogramas.

La estadística chi-squared [23],  $\chi^2$ , se calculó para medir la correspondencia entre los histogramas y las curvas teóricas (de color rojo y azul). En cada panel se muestra el valor de  $\chi^2$  respectivamente. Es evidente que las curvas de color azul minimizan el valor de  $\chi^2$ . En este sentido, es necesario estudiar la relación que existe entre el parámetro de acoplamiento  $\gamma$  del 1DAM con el parámetro  $1/\eta$  de la Ec. (3.3).

La relación entre los parámetros de acoplamiento se reporta en la Fig. 4.4, por medio de los símbolos de color azul, considerando en el 1DAM el parámetro  $\kappa = \gamma/2$  para que el acoplamiento perfecto sea en  $\kappa = 1$  y comparar con la relación ya obtenida en la Fig. 3.7 para el GOE (triángulos rojos). Se puede observar que el comportamiento de ambas curvas es similar, en el sentido que son monótonas y aproximadamente simétricas alrededor de  $\kappa = 1$ , sin embargo existe una diferencia entre las curvas que relacionan los parámetros de acoplamiento de cada sistema, GOE y 1DAM, con el acoplamiento del modelo teórico, ya que es diferente el sistema interno del GOE y del 1DAM, como mencionamos en líneas anteriores el hamiltoniano  $H_{mn}$  para el GOE es una matriz completamente llena de números aleatorios, mientras que

para el 1DAM sólo hay números aleatorios en la diagonal principal.

El resultado más importante de esta sección es que la expresión para la distribución de espaciamentos  $P(s)$  calculada analíticamente en [20] para el GOE acoplado al exterior por un canal, también puede describir teóricamente la  $P(s)$  para el 1DAM acoplado al exterior por una terminal en el régimen difusivo (ver Fig. 4.3), teniendo en cuenta la relación que existe entre las magnitudes de acoplamiento del modelo teórico y del modelo numérico mostrada en la Fig. 4.4.

## 4.2 $P(s)$ del 1DAM abierto en los tres regímenes de transporte

Con el fin de completar nuestro estudio, se extendieron los cálculos numéricos para la distribución de espaciamentos  $P(s)$  del 1DAM abierto en los tres regímenes de transporte, balístico ( $\xi \gg 1$ ), difusivo ( $\xi \sim 1$ ) y localizado ( $\xi \ll 1$ ).

Comenzamos acoplando el sistema interno con una terminal  $\gamma^L = \gamma$ , los valores para el parámetro de desorden  $\xi$  son los mismos que se consideraron en el capítulo 2, ver Fig. 2.2, para mostrar el cambio de los histogramas generado por el acoplamiento. Los resultados se reportan en la Fig. 4.5, las curvas para  $\gamma = 0$  corresponden al sistema cerrado. Consideramos el valor crítico  $\gamma = 2$  donde ocurre el acoplamiento perfecto, además de  $\gamma = 0.1$  y 10 para evidenciar el cambio de las curvas con diferentes parámetros  $\gamma$ .

Analizando los histogramas de la Fig. 4.5 podemos decir que en el régimen balístico la distribución  $P(s)$  muestra un pequeño cambio cuando se acopla el sistema con la magnitud de acoplamiento perfecto, ver por ejemplo el caso  $\xi = 1000$ , aunque la curva sigue aproximándose a una función delta. A medida que el parámetro de desorden se acerca al régimen difusivo la  $P(s)$  empieza a ser afectada significativamente con el acoplamiento perfecto, por tanto la curva se desplaza en  $s = 0$  y la altura máxima en  $s \approx 1$  disminuye, ver por ejemplo los casos  $\xi = 10$ ,  $\xi = 2.86$ ,  $\xi = 0.95$  y  $\xi = 0.48$ . Finalmente, acercándonos al régimen localizado la  $P(s)$  deja de presentar cambios significativos con diferentes valores de  $\gamma$ , pues el desorden de la región interna es tan fuerte que el hecho de acoplar el sistema al exterior, no afecta significativamente sus propiedades estadísticas.

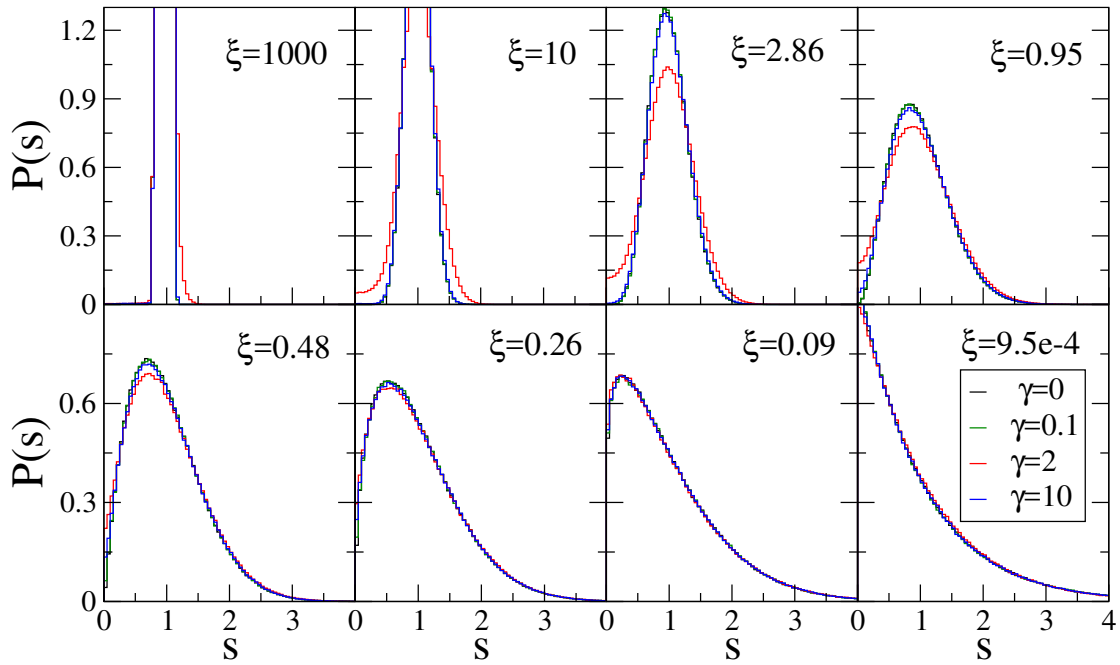


Figura 4.5: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM acoplado al exterior por una terminal con magnitudes  $\gamma$ . El parámetro de desorden  $\xi$  se indica en cada panel.

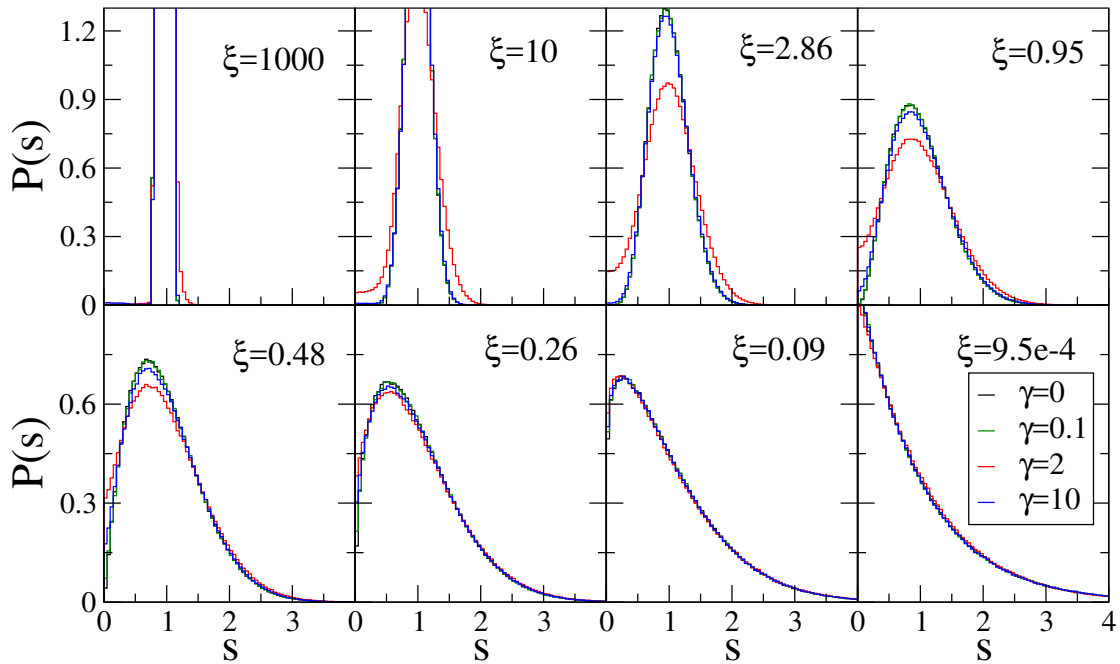


Figura 4.6: Distribución de espaciamentos entre energías consecutivas  $P(s)$  para el 1DAM acoplado al exterior por dos terminales con magnitudes  $\gamma^L = \gamma^R = \gamma$ . El parámetro de desorden  $\xi$  está indicado en los paneles.

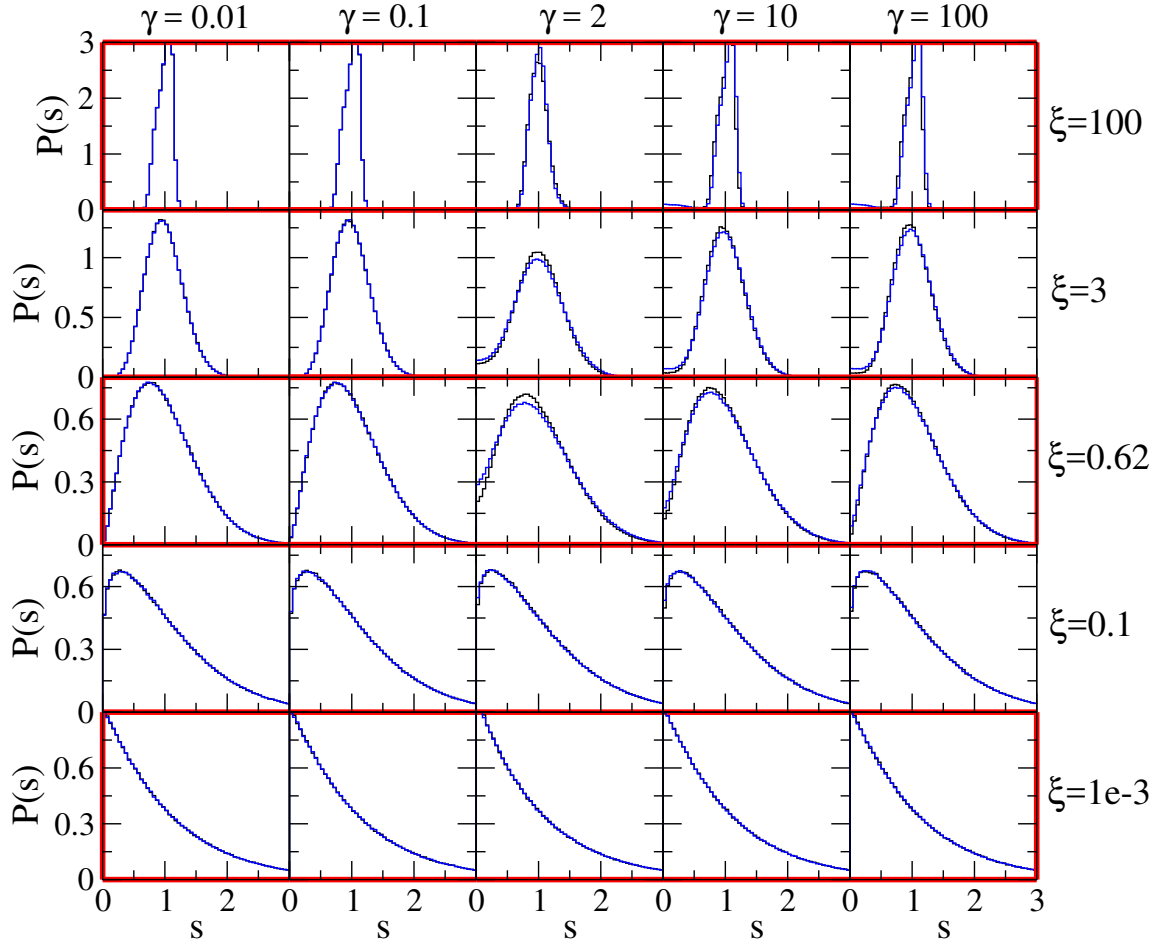


Figura 4.7: Panorama general de la distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas,  $P(s)$ , para el 1DAM acoplado por una (histograma color negro) y dos terminales (histograma color azul) recorriendo los tres regímenes de transporte, señalados por los recuadros rojos, indicando el parámetro de desorden  $\xi$ .

Luego, acoplamos el sistema interno a dos terminales con magnitudes  $\gamma^L$  y  $\gamma^R$ , los valores asignados a dichas magnitudes fueron  $\gamma^L = \gamma^R = \gamma$ , consideramos los mismos valores para  $\xi$  y  $\gamma$  usados en el caso anterior. En la Fig. 4.6 se muestra las curvas resultantes. Es evidente que la  $P(s)$  sigue siendo afectada significativamente alrededor del régimen difusivo cuando se acopla el sistema con la magnitud de acoplamiento perfecto. Comparando con las curvas obtenidas para una terminal acoplada, se puede notar que el desplazamiento en  $s = 0$  es mayor, y por tanto y la altura máxima en  $s \approx 1$  es menor cuando se acoplan dos terminales. En la siguiente sección haremos un análisis más detallado de esta cuestión.

Para ser más ilustrativos con nuestro estudio, presentamos en la Fig. 4.7 un panorama general de la distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas,  $P(s)$ , para el 1DAM dispersivo que transita desde el régimen balístico ( $\xi = 100$ ),

pasando por el régimen difusivo o caótico ( $\xi = 0.62$ ) hasta llegar al régimen localizado ( $\xi = 1e - 3$ ), como se puede apreciar en los recuadros enmarcados de color rojo. Esto para una y dos terminales acopladas,  $\gamma^L$  y/o  $\gamma^R$  respectivamente.

Es necesario destacar la importancia de este resultado, pues dado el panorama de la Fig. 4.7 para el 1DAM, es posible conocer la distribución de espaciamientos entre resonancias consecutivas en los diferentes regímenes de transporte, cuando el sistema se acopla al exterior a una o dos terminales con magnitudes  $\gamma$ .

### 4.3 Desplazamiento $\Delta_{P(0)}$ para el 1DAM

En las Figs. 4.5 y 4.6 se mostraron histogramas de espaciamientos  $P(s)$  para 1DAM abierto, es evidente que el hecho de acoplar al exterior, causa un desplazamiento de los histogramas en  $s = 0$  respecto al sistema cerrado. En la Sección 3.2.1 ya se introdujo la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  para medir el desplazamiento en  $s = 0$  del GOE, en esta sección utilizaremos la misma cantidad que permite cuantificar dicho desplazamiento en el régimen difusivo del 1DAM. Alejándose del régimen difusivo,  $\xi \rightarrow 0$ , se debe considerar que la función  $P(s)$  deja de ser cero en  $s = 0$  cuando el sistema está cerrado. En este caso, es necesario realizar un conteo de los números que caen en el intervalo  $[0, 1 \times 10^{-3}]$  con el sistema cerrado. Al realizar el producto del conteo,  $N_{\text{conteo}}$ , con la longitud del intervalo,  $1 \times 10^{-3}$ , obtenemos un área,  $A_1$ , que podemos usar como referencia para medir el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  cuando se acopla el sistema al exterior. Por lo tanto,  $\Delta_{P(0)}$  será proporcional a la diferencia entre el área del sistema abierto  $A_2$  y el área de del sistema cerrado  $A_1$ ,

$$\Delta_{P(0)} = \frac{A_2 - A_1}{N}, \quad (4.1)$$

siendo  $N$  el número total de datos que conforman el histograma, en particular usamos  $N = 1.002.000$ .

El desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  como función del acoplamiento  $\gamma$  del 1DAM de tamaño  $L = 1000$  con una terminal acoplada al exterior se reporta en la Fig. 4.8. Alrededor del régimen difusivo ( $\xi \sim 1$ ) se observa que el desplazamiento es máximo en  $\gamma = 2$ , es decir, cuando el acoplamiento es *perfecto*; para magnitudes de acoplamiento  $\gamma < 2$  y  $\gamma > 2$ ,  $\Delta_{P(0)}$  disminuye significativamente.

En el régimen balístico, cuando  $\xi \ll 1$ ; por ejemplo  $\xi = 1000$  no hay cambios representativos, y por tanto el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  es cero cuando se acopla el sistema al exterior, es por ello que sólo calculamos el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  desde  $\xi = 10$ , cerca al régimen caótico, donde ya se evidencian cambios por efecto del acoplamiento.

Por último, cerca al régimen localizado ( $\xi \ll 1$ ) el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  comienza a tener un comportamiento fluctuante; por ejemplo en  $\xi = 0.009$ , para todo  $\gamma$ ,  $\Delta_{P(0)}$  está por debajo de 0. Por otra parte, en  $\xi = 9.5e - 4$  y en  $\xi = 9e - 6$  el desplazamiento tiene un comportamiento irregular, difícil de analizar.

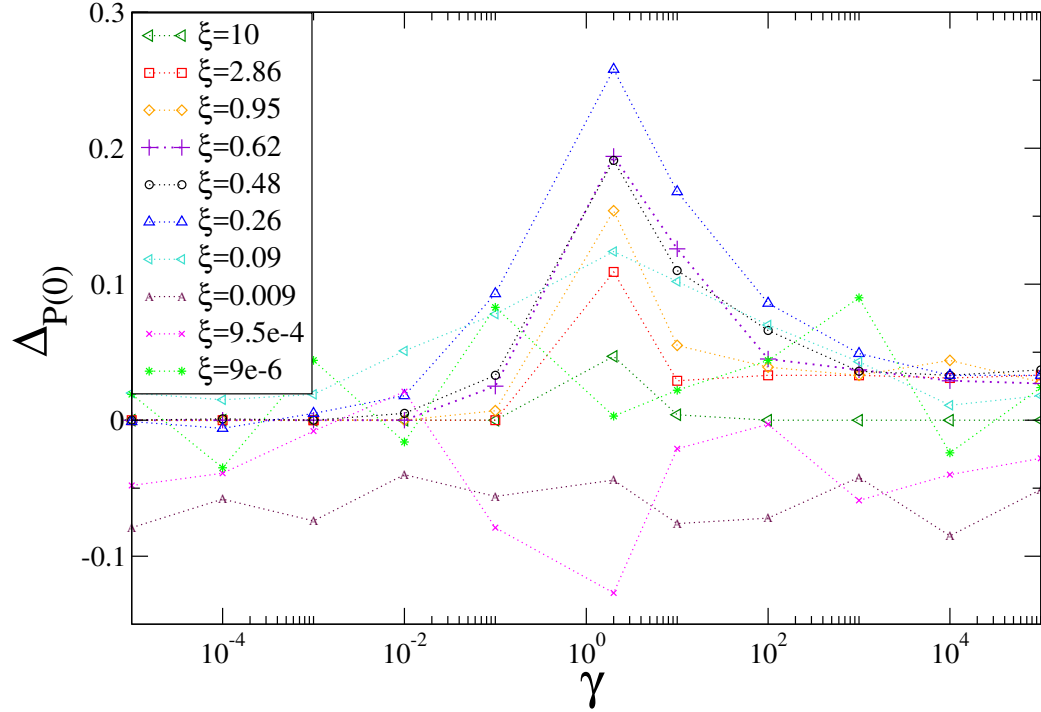


Figura 4.8: Desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  de la distribución de espaciamentos  $P(s)$  en  $s = 0$  como función del acoplamiento  $\gamma$  para el 1DAM, de tamaño  $L = 100$ , acoplado al exterior por una terminal. Se consideraron 10 valores para el parámetro de desorden  $\xi$ , alrededor de los tres regímenes de transporte.

En la Fig. 4.9 se presenta el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  como función del acoplamiento  $\gamma$  del 1DAM de tamaño  $L = 1000$  acoplado al exterior con dos terminales. Al comparar el rango de  $\Delta_{P(0)}$  en las Figs. 4.8 y 4.9, es evidente que la magnitud del desplazamiento alrededor del régimen difusivo es mayor cuando el sistema está acoplado a dos terminales. En el régimen localizado ocurre el mismo fenómeno que con una terminal acoplada.

Para comprobar si la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  cuantifica correctamente el desplazamiento de la  $P(s)$  en  $s = 0$  generado por el acoplamiento, utilizamos la expresión analítica (3.3) que describe la  $P(s)$  del 1DAM en el régimen difusivo (ver Fig. 4.3) y permite calcular teóricamente el desplazamiento en  $s = 0$ ; luego, compararemos con los valores de  $\Delta_{P(0)}$  obtenidos de los histogramas. En la Fig. 4.10 mostramos la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  obtenida (i) de forma teórica para diferentes magnitudes  $\gamma$  y (ii) de forma numérica como se mencionó en la Sección 3.2.1, observamos que ambas curvas tienen un comportamiento semejante, lo cual indica que la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  propuesta en éste trabajo cuantifica adecuadamente el desplazamiento de la  $P(s)$  en  $s = 0$ .

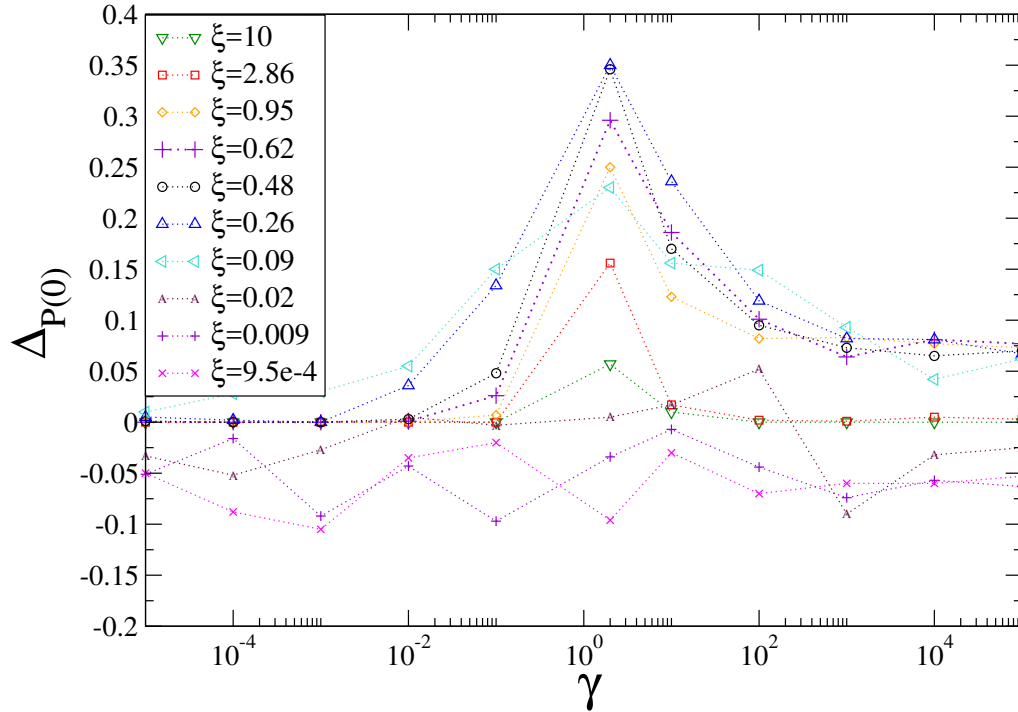


Figura 4.9: Desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  de la distribución de espaciamentos  $P(s)$  en  $s = 0$  como función del acoplamiento  $\gamma$  para el 1DAM acoplado al exterior por dos terminales. Se consideraron 8 valores para el parámetro de desorden  $\xi$ , alrededor de los tres regímenes de transporte. Cada símbolo fue calculado usando un alambre de tamaño  $L = 100$  y  $2 \times 10^4$  realizaciones.

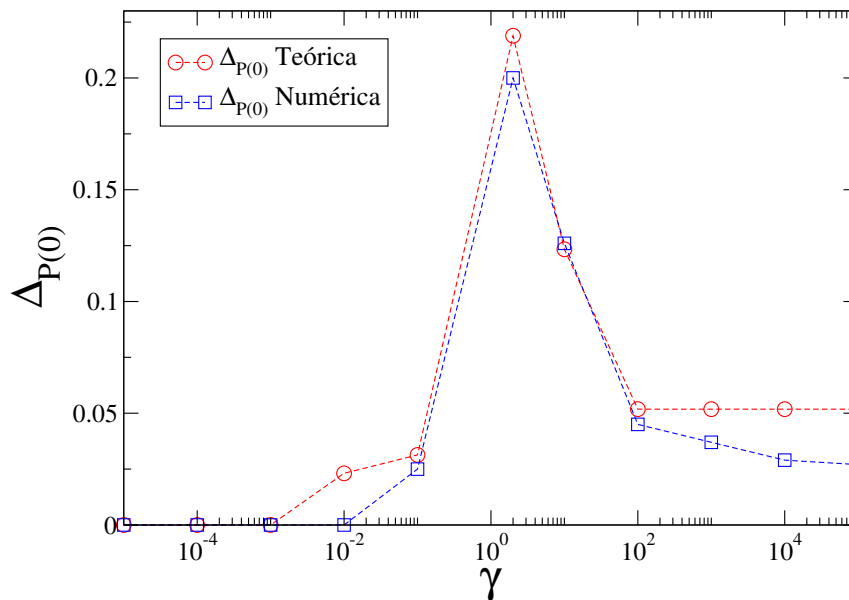


Figura 4.10: Comparación de la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  obtenida de las curvas numéricas con el desplazamiento  $\Delta_{P(0)}$  dado por las curvas teóricas de la Fig. 4.3.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se realizó un estudio de las propiedades estadísticas de los espaciamentos entre resonancias consecutivas de sistemas desordenados acoplados al exterior (continuo de estados), en los tres regímenes de transporte (balístico, difusivo y localizado). Con este fin utilizamos el Hamiltoniano efectivo no hermítico del 1DAM que nos permitió conectar el sistema interno al continuo.

En primer lugar, se estudiaron las propiedades espectrales del 1DAM cerrado. Para ello se verificaron los resultados reportados en [18] donde se muestra que la distribución de espaciamentos,  $P(s)$ , en los tres regímenes de transporte es invariante una vez que se ha fijado el parámetro  $\xi$  (escalamiento de un sólo parámetro). También caracterizamos el sistema con la distribución de Izrailev, que permite relacionar el parámetro de desorden  $\xi$  con el grado de repulsión entre niveles  $\beta$ . Adicionalmente, se analizó la conductancia, comprobando los resultados reportados en [21] en los que se evidencia que la cantidad  $\langle -\ln G \rangle$  decrece linealmente con el tamaño del alambre  $L$ , dicha cantidad puede ser independiente de  $L$  si fijamos la razón  $l_\infty/L$ , entonces  $\langle -\ln G \rangle$  incrementa cuando dicha razón también lo hace, es decir cuando el desorden tiende a ser débil.

Luego, se utilizó como referente la expresión analítica de [20] para la distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas,  $P(s)$ , del ensamble Gaussiano GOE de matrices aleatorias acoplado al exterior por una terminal, ver Ec. (3.3), con magnitud de acoplamiento  $1/\eta$ . Se realizó una extensión de este estudio en dos aspectos. Primero, mostramos gráficamente el comportamiento de las curvas  $P(s)$  para diferentes valores de acoplamiento  $1/\eta$ , ver Fig. 3.1. Segundo, encontramos que la expresión analítica propuesta en [20] para GOE, también describe satisfactoriamente la  $P(s)$  del 1DAM acoplado al exterior por una terminal en el régimen difusivo. No obstante, en el transcurso de este estudio exhaustivo, cuyo objetivo era comparar la  $P(s)$  del GOE con la del 1DAM, se verificó que es necesario redefinir el acoplamiento para el GOE con la magnitud  $\kappa = \gamma/\sqrt{L}$ , cuando se utiliza el Hamiltoniano efectivo de la Ec. (1.3), pues se espera que la  $P(s)$  dependa solamente de dos parámetros ( $\xi$  y  $\gamma$ ) cuando el tamaño del sistema  $L$  es mucho mayor que el número de terminales

acopladas. Sin embargo nosotros realizamos un estudio numérico en el que consideramos que para 1 y 2 terminales acopladas, un tamaño *muy grande* está representado por  $L \geq 100$ .

Otro aspecto importante a resaltar en esta parte es que la relación que existe entre las magnitudes de acoplamiento  $1/\eta$  y  $\kappa$  para el GOE, es diferente a la relación que guardan las magnitudes  $1/\eta$  y  $\gamma$  para el 1DAM, ver Fig. 4.4. Por lo tanto no se puede predecir la  $P(s)$  del 1DAM usando el acoplamiento del GOE.

Además, la cantidad  $\Delta_{P(0)}$  que hemos propuesto permite hacer un análisis cuantitativo del desplazamiento en  $s = 0$  causado por el acoplamiento. En el régimen difusivo, es evidente que el acoplamiento es perfecto cuando ocurre el máximo desplazamiento. Esta cantidad fue útil para analizar los sistemas GOE y 1DAM, sin embargo podría ser utilizada con otros sistemas desordenados que se representan con matrices aleatorias.

Centrandonos en el 1DAM, se mostró que cuando se abre el sistema, la distribución de espaciamentos,  $P(s)$ , sigue siendo invariante una vez que el parámetro de desorden  $\xi = l_\infty/L$  tiene un valor fijo. También, nuestro estudio proporciona un panorama general que permite caracterizar la  $P(s)$  del 1DAM acoplado a 1 y 2 terminales con magnitudes  $\gamma$ , en los diferentes regímenes de transporte determinados por el parámetro  $\xi$ . Observamos que el efecto más relevante de la cantidad  $P(s)$  en el régimen difusivo es el desplazamiento que ocurre  $s = 0$ . En el régimen localizado se espera que el acoplamiento al exterior ni tenga efecto en la  $P(s)$ , ya que el sistema interno presenta un desorden muy fuerte (y por tanto se encuentra en una *fase aislante* con autoestados exponencialmente localizados). Respecto al régimen balístico fué sorprendente que la  $P(s)$  no mostrara cambios importantes debido al acoplamiento. Sin embargo reportamos este resultado dejando abierta la discusión de este aspecto, considerando la posibilidad de que otra cantidad pueda detectar el efecto del acoplamiento en éste régimen. Esperamos en un futuro detallar esta cuestión.

# Apéndice A

## Figuras complementarias

A continuación se anexan las Figuras referentes a los resultados reproducidos en el Capítulo 2. También se presentan Figuras complementarias al estudio realizado del sistema GOE.

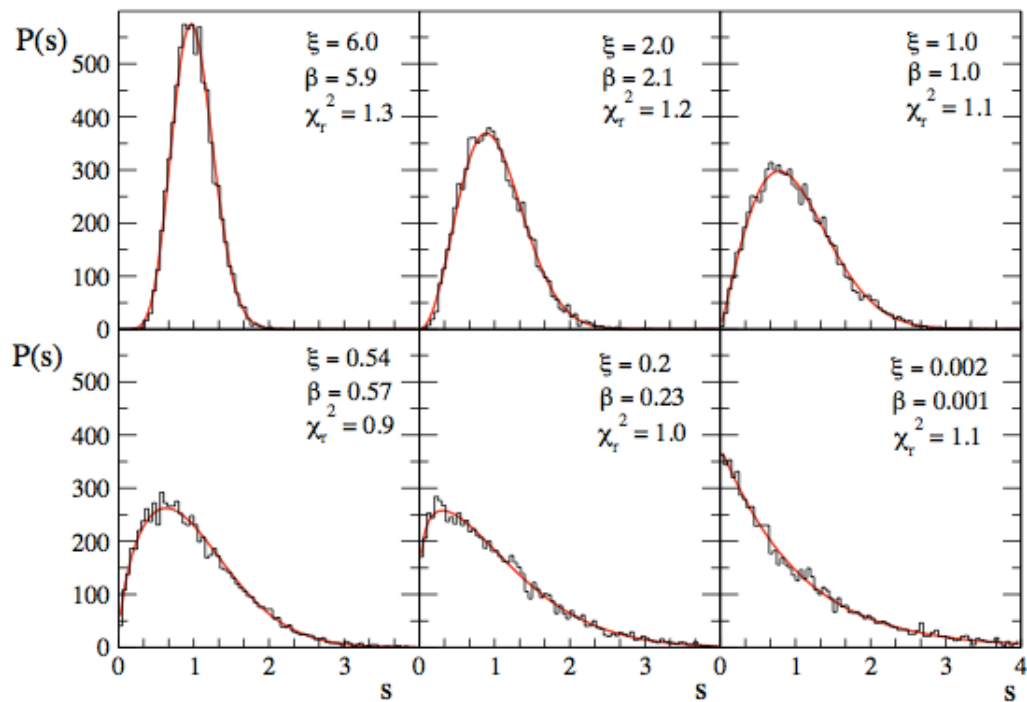


Figura A.1: Los histogramas corresponden a los datos numéricos de  $L = 1000$  y las curvas suaves a la distribución de Izrailev. Cada histograma está dividido en 80 bins y 120 realizaciones de desorden que son acumuladas. En cada panel se muestra el valor de  $\xi$  y  $\beta$  que minimizan el valor de la estadística  $\chi^2$ . FIG 9.4 de [18].

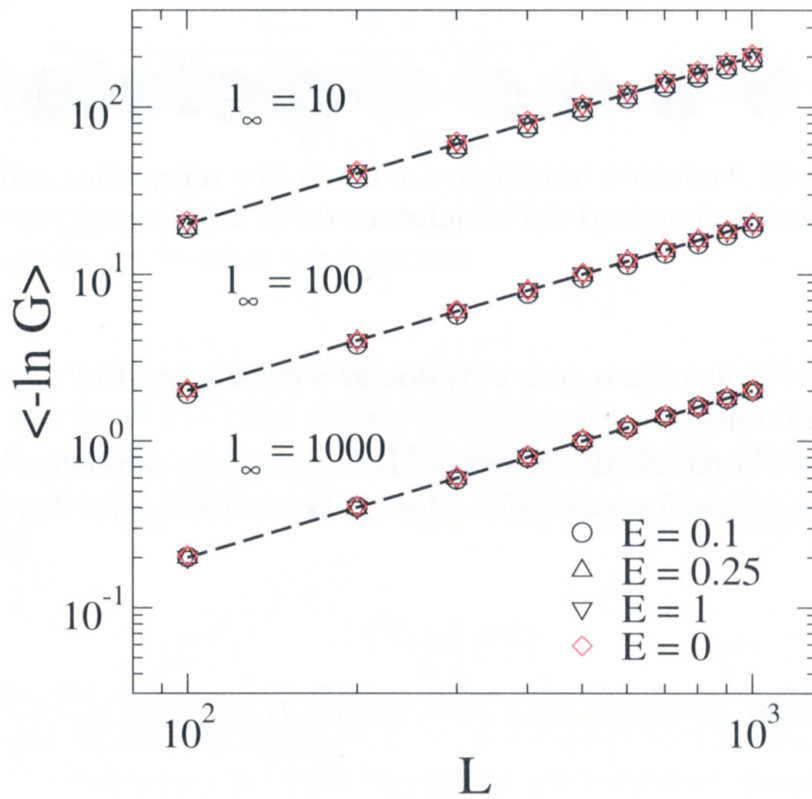


Figura A.2: Promedio del logaritmo de la conductancia  $\langle -\ln G \rangle$  como función de  $L$  para el 1DAM, considerando energías  $E = 0, 0.1, 0.25$  y  $1$ . FIG 2.3 de [21].

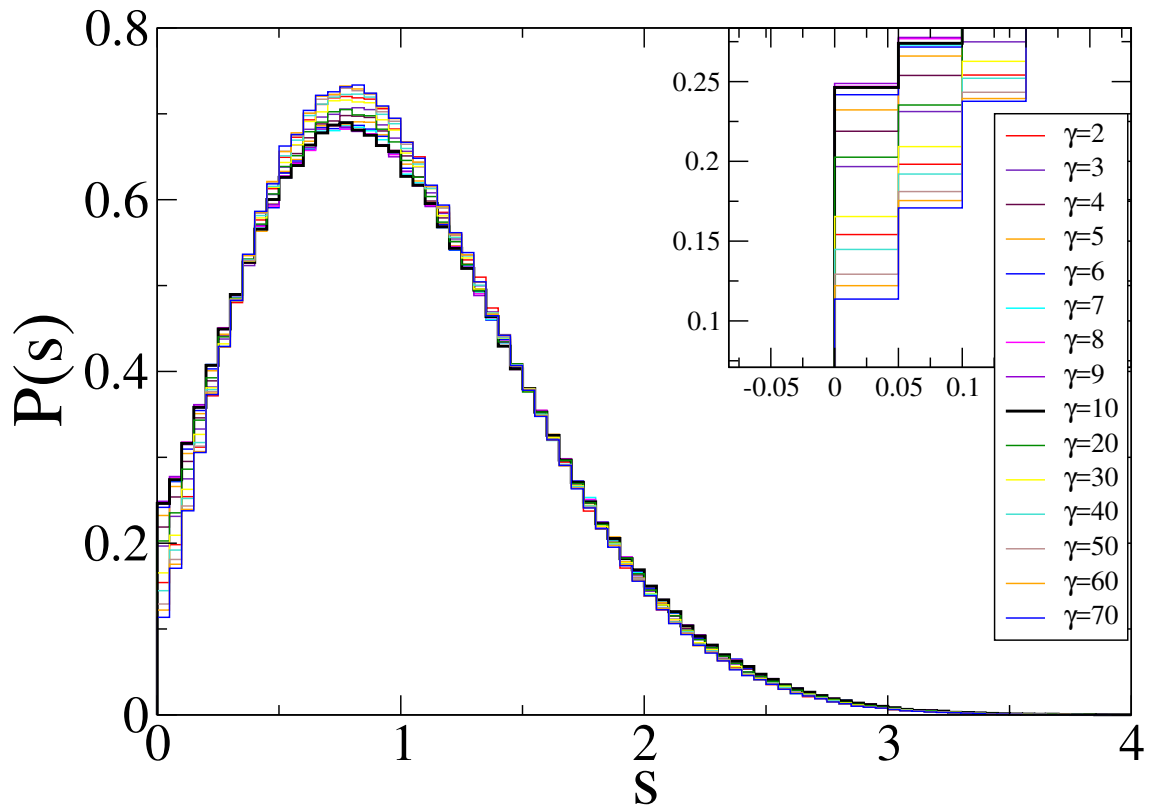


Figura A.3: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para GOE, con alambres de tamaño  $L = 50, 100, 200, 400, 500$  y  $1000$ , acoplados al exterior por un canal con magnitudes  $\kappa$  mostrados en cada panel. Cada histograma está dividido en 80 bins, considerando para los cálculos  $10^6$  datos.

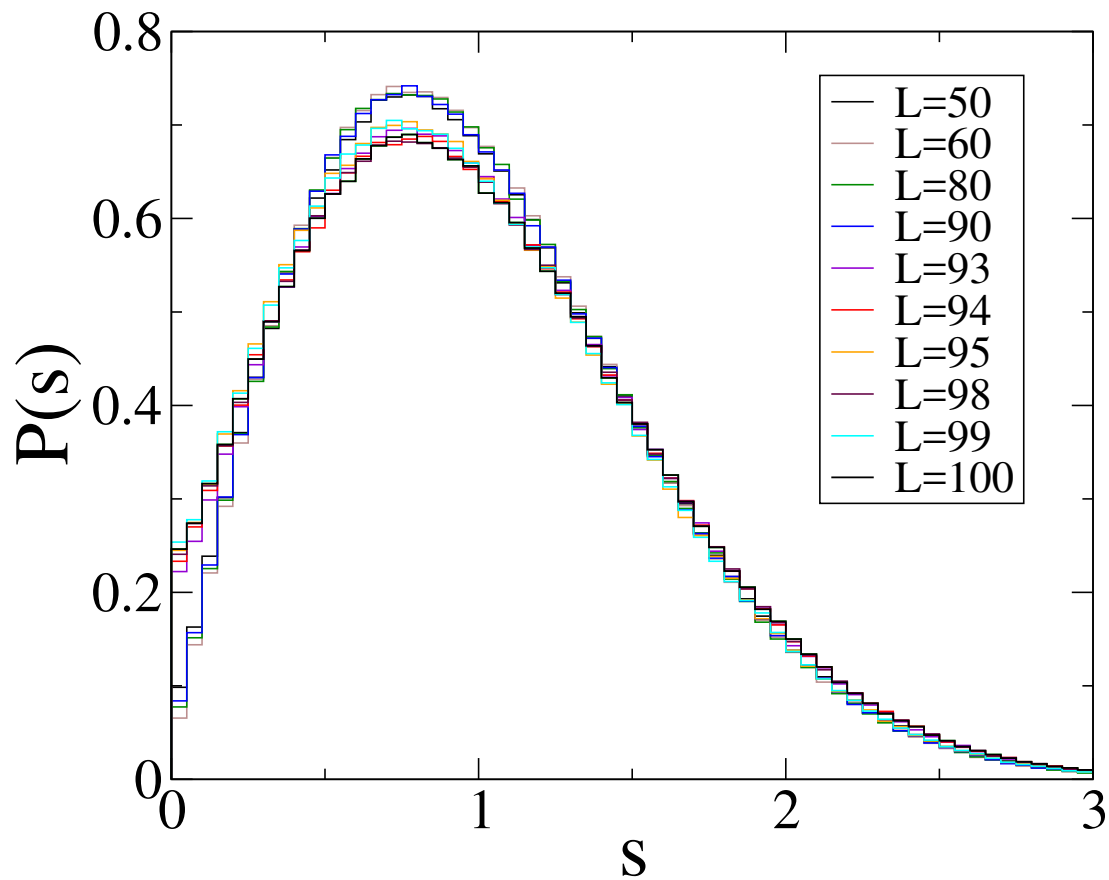


Figura A.4: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para GOE con diferentes tamaños  $L$ , acoplados al exterior por un canal con magnitud  $\kappa$ . Cada histograma está dividido en 80 bins.

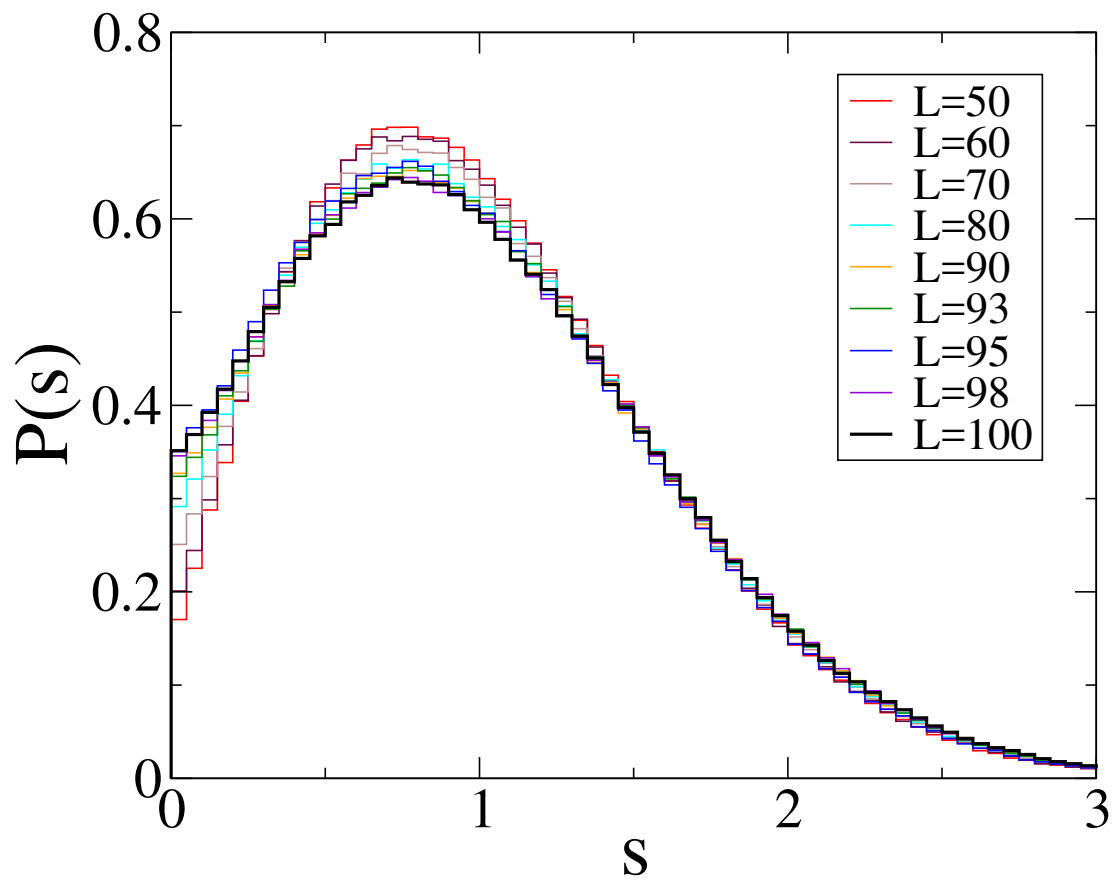


Figura A.5: Distribución de espaciamentos entre resonancias consecutivas  $P(s)$  para GOE con diferentes tamaños  $L$ , acoplados al exterior por dos canales con magnitudes  $\kappa$ . Cada histograma está dividido en 80 bins.

# Bibliografía

- [1] *50 years of Anderson Localization*, E. Abrahams (Ed.) (World Scientific, London, 2010).
- [2] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [3] A. MacKinnon y B. Kramer, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [4] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello y T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [5] L. P. Gorkov, A. I. Larkin y D. E. Khmel'nitskii, JETP Lett. **30**, 228 (1979).
- [6] D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **61**, 2141 (1988).
- [7] M. Kappus y F. Wegner, Z. Phys. B: Condens. Matter. **45**, 15 (1981).
- [8] B. Derrida y E. Gardener, J. Physique. **45**, 1283 (1984).
- [9] F. M. Izrailev, S. Ruffo, y L. Tessieri, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5263 (1998).
- [10] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams y D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
- [11] R. Landauer, Philos. Mag. **21**, 863 (1970).
- [12] K. Slevin, P. Markos y T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **86**, 3594 (2001).
- [13] J. Prior, A.M. Somoza y M. Ortuño, Phys. Stat. Sol. **243**, 395 (2006).
- [14] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul y L. A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems* (Wiley, New York, 1988).
- [15] L. S. Froufe-Perez, P. Garcia-Mochales, P. A. Serena, P. A. Mello y J. J. Saenz, Phys. Rev. Lett. **89**, 246403 (2002).
- [16] P. A. Mello y N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2004).

- [17] J. Okolowicz, M. Płoszajczak y I. Rotter, *Phys. Rep.* **374**, 271 (2003).
- [18] S. Sorathia, *Scattering properties of open systems of interacting particles*, Tesis Doctoral, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2010; S. Sorathia, F. M. Izrailev, V. G. Zelevinsky y G. L. Celardo, *Phys. Rev. E* **86**, 011142 (2012).
- [19] M. L. Mehta, *Random matrices* (Elsevier, Amsterdam, 2004).
- [20] C. Poli, G. A. Luna-Acosta y H.-J. Stöckmann, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 174101 (2012).
- [21] A. J. Martínez, *Estudio de las propiedades espectrales, de autoestados y de transporte de sistemas desordenados*, Tesis Doctoral, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México (2015).
- [22] *Quantum Chaos: An Introduction*, H.-J. Stöckmann (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [23] J. R. Taylor, *An introduction to error analysis: The study of uncertainties in physical measurements*, Second Edition (University Science Books, Sausalito, 1997).
- [24] F. M. Izrailev, *Chaos, Solitons & fractals*, **5**, 1219 (1995).
- [25] R. Scharf y F. Izrailev, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**, 963 (1990).
- [26] G. Casati, F. Izrailev y L. Molinari, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**, 4755 (1991).
- [27] T. Kottos y M. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 056401 (2002).
- [28] M. Titov y Yan V. Fyodorov, *Phys. Rev. B* **61**, R2444 (2000).
- [29] Y. V. Fyodorov y H.-J. Sommers, *J. Math. Phys.* **38**, 1918 (1997).
- [30] E. P. Wigner, *Proceedings of the four Canadian Mathematical Congress* (Toronto, 1959).
- [31] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, New York, 2010).
- [32] S. Ida, H.A. Weidenmüller y J.A. Zuk, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 583 (1990); *Ann. Phys. (N. Y)* **200**, 2019 (1990).
- [33] T. Guhr, A. Müller-Groeling y H.A. Weidenmüller, *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).