

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN ACTUARÍA



PRONÓSTICO DEL NÚMERO DE ACCIDENTES DE TRÁNSITO DE LA ZONA  
URBANA DE PUEBLA PARA EMPRESAS ASEGURADORAS DE AUTOMÓVILES

TESIS PRESENTADA AL  
COLEGIO DE MATEMÁTICAS

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE  
LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA  
LILIA HERNÁNDEZ IZQUIERDO

ASESORADA POR  
DR. BULMARO JUÁREZ HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUE.

ABRIL 2016



# Agradecimientos



# Resumen

En este trabajo de tesis se presentan los conceptos que describen de forma general el funcionamiento de una empresa aseguradora. También se estudia la teoría básica para el análisis de *series de tiempo*, y de forma particular la metodología Box-Jenkins, la cual se aplica para identificar un modelo apropiado a un conjunto de datos. Además se obtienen los pronósticos sobre el número de accidentes de tránsito en la ciudad de Puebla; dichos pronósticos se realizan sobre el total de accidentes, de acuerdo a la fatalidad del accidente y al tipo de vehículo involucrado en dicho suceso.



# Introducción

El seguro es un convenio o contrato por el cual una parte denominada asegurador se obliga a indemnizar<sup>1</sup> a otra parte denominada asegurado mediante alguna transacción comercial a causa de un daño, perjuicio o pérdida causada por algún azar, accidente, o peligro especificado a cambio del pago de una suma estipulada. La industria del seguro se divide en dos categorías: seguros para personas y seguros de daños, de esta última categoría se desprende el seguro de auto, el cual consiste en cubrir la responsabilidad civil del conductor que se derive de los daños, tanto personales como materiales.

La idea fundamental de un seguro reside en el hecho de que se crean asociaciones con la finalidad de cubrir conjuntamente pérdidas por sucesos determinados. En la actualidad la institución del seguro se funda en la mutualidad<sup>2</sup> y la estadística. El seguro, ya sea bajo la forma de sociedades mutualistas o sociedades comerciales, ocupa parte importante de la vida económica moderna, pues, debido a la creciente demanda de automóviles en el mundo, en México y en particular en la ciudad de Puebla, así como el incremento de la cultura o necesidad del contrato de seguro, uno de los servicios más demandados en el mercado de seguros es precisamente el seguro de auto.

El riesgo que conlleva este seguro debe ser analizado y valorado en sus dos aspectos: cualitativo y cuantitativo; por esta razón, las exigencias de las entidades aseguradoras son cada vez mayores, la palabra pronóstico forma una parte fundamental en su estructura, pues de ello depende controlar la incertidumbre y así, lograr una planeación más acertada respecto a la ocurrencia del siniestro<sup>3</sup>, pues, de esto depende el precio del seguro (*prima*) que debe pagar el contratante de dicho servicio; el precio del seguro debe ser suficiente para cubrir el posible siniestro, gastos administrativos y utilidad para la empresa.

Actualmente un accidente de tránsito es la causa principal por la que se ejerce<sup>4</sup> el contrato del seguro de automóvil, por lo cual, esta investigación tiene como objetivo pronosticar el número de accidentes de tránsito que ocurren en la ciudad de Puebla.

El objetivo general de esta investigación es mostrar el modelo que mejor se ajuste a los datos del número de accidentes registrados de la zona urbana de Puebla tomando en consideración la

---

<sup>1</sup>Pagar una cantidad de dinero a una persona para compensar un daño.

<sup>2</sup>El seguro es una especie de fondo común en el que cada asegurado aporta una suma proporcional al riesgo que introduce.

<sup>3</sup>Manifestación concreta del riesgo asegurado.

<sup>4</sup>Hacer valer el contrato de seguro para resarcir el daño

base de datos mensuales que proporciona el INEGI<sup>5</sup>, y así, las empresas aseguradoras puedan tomar medidas precautorias en función al panorama futuro que se muestra sobre los accidentes viales.

Los objetivos particulares son:

- Pronósticar el número de accidentes de tránsito en la ciudad de Puebla para tres tipos de vehículos:
  - Automóvil, Camioneta de pasajeros y Microbús.
- Pronósticar el número de accidentes de acuerdo a su fatalidad clasificada de la siguiente manera:
  - Fatales, No fatales y Sólo daños.

El estudio del seguro requiere de la estadística, ya que la probabilidad de ocurrencia del siniestro depende de la frecuencia con que se presente este hecho, y la estadística sólo puede ser eficaz para hechos que se repiten con regularidad, porque el azar observado en grandes masas, obedece a la Ley de los grandes números (ver Ref. [2], Pág. 352). La Teoría de procesos estocásticos es fundamental para el estudio de problemas de esta índole y en particular, el uso de series de tiempo.

Una serie de tiempo se entiende como el registro cronológico de observaciones de una variable aleatoria. La información histórica que se tiene sobre accidentes de tránsito en Puebla está registrada de forma periódica y esta es una característica que se cumple para realizar el pronóstico mediante series de tiempo, y en específico empleando modelos paramétricos *ARIMA*.

El presente trabajo está organizado en 4 capítulos, el primero explica los elementos básicos que intervienen en un contrato de seguros, los cuales son necesarios para comprender cómo funciona una empresa aseguradora; también se expone un ejemplo sencillo que demuestra la importancia de la probabilidad y la estadística en la estructura de una aseguradora. Por otro lado, en el segundo capítulo se explican los conceptos teóricos que serán necesarios para el caso de estudio. En principio se aborda el estudio de los procesos estocásticos, se definen las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, así como sus propiedades. También, se estudian los diferentes modelos de series de tiempo y se presentan ejemplos de cada modelo; además, debido a su importancia en el estudio de series de tiempo, se explica la metodología Box-Jenkins. En el tercer capítulo se analiza el caso de estudio, el cual se centra en pronosticar el número de accidentes de tránsito para 7 clasificaciones principales. La primer clasificación se denomina *Accidentes totales*, la cual engloba el número de accidentes sin importar el tipo de vehículo o la fatalidad del accidente; las siguientes tres clasificaciones son *Fatales*, *No fatales* y *Sólo daños*, las cuales están separadas de acuerdo al nivel de fatalidad del accidente; las últimas tres clasificaciones corresponden al tipo de vehículo que fue involucrado en un accidente, las cuales son *Automóvil*, *Camioneta de pasajeros* y *Microbús*. Y finalmente, en el cuarto capítulo, se presentan un análisis y las conclusiones del trabajo en conjunto, así como algunas propuestas para trabajos futuros en el análisis de éste tipo de fenómenos.

---

<sup>5</sup>Instituto Nacional de Estadística y Geografía





# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Introducción	v
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
<b>1. Seguros de automóviles</b>	<b>1</b>
1.1. Accidente de tránsito . . . . .	1
1.2. Conceptos de seguros . . . . .	1
1.3. Tratamiento del Riesgo . . . . .	2
<b>2. Modelos de series de tiempo</b>	<b>7</b>
2.1. Conceptos básicos de Series de Tiempo . . . . .	7
2.1.1. Procesos estocásticos . . . . .	7
2.1.2. Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación . . . . .	8
2.1.3. Concepto y ejemplos de Estacionariedad . . . . .	9
2.1.4. Estimadores de parámetros de funciones de autocovarianza y autocorrelación . . . . .	14
2.1.5. Eliminación de tendencia y estacionalidad . . . . .	15
2.2. Modelos que describen Series de Tiempo . . . . .	18
2.2.1. Modelos de Series de Tiempo Estacionarias . . . . .	19
2.3. Identificación, estimación, diagnóstico y pronóstico . . . . .	40
<b>3. Caso de estudio</b>	<b>49</b>
3.1. Total de accidentes . . . . .	50
3.2. Fatalidad del accidente . . . . .	55
3.2.1. Fatales . . . . .	55
3.2.2. No fatales . . . . .	58
3.2.3. Sólo daños . . . . .	62
3.3. Tipo de vehículo . . . . .	65
3.3.1. Automóvil . . . . .	65
3.3.2. Camioneta . . . . .	68
3.3.3. Microbús . . . . .	70
3.3.4. Modelo de mejor ajuste para cada clasificación . . . . .	74
<b>A. Gráficos de ACF y PACF</b>	<b>77</b>

<b>B. Datos del Caso de estudio</b>	<b>81</b>
<b>C. Código en R</b>	<b>85</b>
C.0.5. Código para accidentes <i>Totales</i> . . . . .	85
C.0.6. Código para accidentes <i>Fatales</i> . . . . .	86
C.0.7. Código para accidentes <i>No fatales</i> . . . . .	87
C.0.8. Código para accidentes <i>Sólo daños</i> . . . . .	88
C.0.9. Código para accidentes <i>Automóvil</i> . . . . .	89
C.0.10. Código para accidentes <i>Camioneta</i> . . . . .	90
C.0.11. Código para accidentes <i>Automóvil</i> . . . . .	91
<b>D. Significancia de los coeficientes</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Índice de figuras

2.1.	ACF y PACF del modelo $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ .	23
2.2.	ACF y PACF del modelo $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$ .	26
2.3.	ACF y PACF del modelo $Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t$ .	30
2.4.	ACF y PACF del modelo $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ .	32
2.5.	Simulación de los procesos $MA(1)$ , $MA(2)$ , $AR(1)$ y $AR(2)$ .	37
2.6.	ACF y PACF de los modelos teóricos $MA(1)$ , $MA(2)$ , $AR(1)$ y $AR(2)$ .	38
3.1.	Accidentes de tránsito <i>Totales</i> .	50
3.2.	Accidentes Totales en Puebla (periodo 2003-2014).	50
3.3.	ACF y PACF de la serie original.	51
3.4.	Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias	51
3.5.	Datos estacionales de periodo 12	52
3.6.	ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12	52
3.7.	Residuales del modelo $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$	54
3.8.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Totales</i> con el modelo $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$	54
3.9.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Totales</i> con el modelo $ARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$	54
3.10.	Accidentes de tránsito <i>Fatales</i>	55
3.11.	ACF y PACF de serie datos originales	56
3.12.	ACF y PACF de primeras diferencias	56
3.13.	Residuales del modelo $ARIMA(0, 1, 1)$	57
3.14.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Fatales</i> con el modelo $ARIMA(0,1,1)$	57
3.15.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Fatales</i> con el modelo $ARMA(1,1)$	58
3.16.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Fatales</i> con el modelo $AR(1)$	58
3.17.	Accidentes <i>No fatales</i> .	59
3.18.	ACF y PACF de accidentes de <i>No fatales</i> .	59
3.19.	Residuales del modelo $ARIMA(0, 1, 2)$ .	60
3.20.	ACF y PACF de primeras diferencias.	60
3.21.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>No fatales</i> con el modelo $ARIMA(0,1,2)$	61
3.22.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>No fatales</i> con el modelo $ARIMA(0,1,1)$	61
3.23.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>No fatales</i> con el modelo $ARIMA(1,1,2)$	61
3.24.	Accidentes de tránsito <i>Sólo daños</i>	62
3.25.	ACF y PACF de serie sólo daños	62
3.26.	Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias	63
3.27.	Datos estacionales de periodo 12	63
3.28.	ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12	63
3.29.	Pronóstico de accidentes de tránsito <i>Sólo daños</i> con el modelo $ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	64
3.30.	Accidentes de tránsito de <i>Automóviles</i>	65
3.31.	ACF y PACF de serie accidentes de automóviles	65
3.32.	Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias	66

3.33. Datos estacionales de periodo 12 . . . . .	66
3.34. ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12 . . . . .	66
3.35. Pronóstico . . . . .	67
3.36. Accidentes de tránsito de <i>Camionetas</i> . . . . .	68
3.37. ACF y PACF del número de camionetas que han sido implicadas en un accidente de tránsito . . . . .	68
3.38. ACF y PACF de primeras diferencias . . . . .	69
3.39. Pronóstico . . . . .	69
3.40. ACF y PACF de residuales del modelo ajustado <i>ARIMA</i> (1, 1, 1) . . . . .	70
3.41. Accidentes de tránsito de <i>Microbús</i> . . . . .	70
3.42. ACF y PACF del número de accidentes de tránsito en donde han sido involucrados vehículos del tipo Microbús . . . . .	70
3.43. ACF y PACF de primeras diferencias . . . . .	71
3.44. Pronóstico . . . . .	71
3.45. Accidentes de tránsito de <i>Microbús</i> (sin dato atípico) . . . . .	72
3.46. Funciones de autocorrelación de <i>Microbús</i> (sin dato atípico) . . . . .	72
3.47. ACF y PACF de primeras diferencias de accidentes de tránsito de <i>Microbús</i> (sin dato atípico) . . . . .	73
3.48. Pronóstico de accidentes de tránsito de <i>Microbús</i> (sin dato atípico) con el modelo <i>ARIMA</i> (1, 1, 1) . . . . .	73
C.1. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	85
C.2. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	86
C.3. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	86
C.4. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	87
C.5. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	87
C.6. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	88
C.7. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	88
C.8. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	89
C.9. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	89
C.10. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	90
C.11. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	90
C.12. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	91
C.13. Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación . . . . .	91
C.14. Código para generar gráficos de modelos ajustados . . . . .	92

# Índice de tablas

2.1. Una clasificación de procesos estocásticos . . . . .	7
2.2. Características para identificar un modelo $AR$ o $MA$ . . . . .	36
3.1. Se identifica al modelo $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$ como el de mejor ajuste para accidentes <i>Totales</i> (de acuerdo al valor de los residuales) . . . . .	53
3.2. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	55
3.3. Modelos propuestos . . . . .	57
3.4. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	58
3.5. Modelos propuestos . . . . .	60
3.6. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	62
3.7. Modelos propuestos . . . . .	64
3.8. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	64
3.9. Modelos propuestos . . . . .	67
3.10. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	67
3.11. Modelos propuestos . . . . .	69
3.12. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	69
3.13. Modelos propuestos . . . . .	71
3.14. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	72
3.15. Valor del criterio de Akaike y residuales de los modelos propuestos . . . . .	73
3.16. Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014 . . . . .	74
3.17. Modelos de mejor ajuste y pronósticos 2015 . . . . .	74
A.1. Funciones de autocorrelación del modelo $AR(1)$ . . . . .	77
A.2. Funciones de autocorrelación del modelo $AR(2)$ . . . . .	78
A.3. Funciones de autocorrelación del modelo $MA(1)$ . . . . .	79
A.4. Funciones de autocorrelación del modelo $MA(2)$ . . . . .	80



# Capítulo 1

## Seguros de automóviles

### 1.1. Accidente de tránsito

Un accidente de tránsito, es definido en el Código Nacional de Tránsito como un evento generalmente involuntario generado al menos por un vehículo en movimiento, que causa daños a personas y/o bienes e igual afecta la circulación de los vehículos que se movilizan por la vía (camino por donde se transita).

Aunque es posible evitar accidentes de tránsito mediante la aplicación de la conducción preventiva, el ejercicio de la conducción como actividad peligrosa, tiene riesgos que en cualquier momento pueden materializarse en un desafortunado accidente y este evento podría generar un descontrol emocional, físico y económico. Según el director general del centro de Experimentación y Seguridad Vial México (CESVI), los percances viales dejan altos costos para los conductores que, de no contar con un seguro contra accidentes, tienen que hacer grandes erogaciones<sup>1</sup> para cubrir los gastos.

El Seguro de Automóviles normalmente cubre todo riesgo, la póliza<sup>2</sup> cubre la Responsabilidad Civil, la Defensa Criminal del conductor, los Daños, Incendio y Robo del vehículo. En México la causa más frecuente por la que se efectúa el seguro de autos es por un accidente de tránsito.

### 1.2. Conceptos de seguros

En un sentido amplio, el objeto del seguro es la compensación del perjuicio económico experimentado por un patrimonio a consecuencia de un siniestro. Es una actividad de servicios que ha sido considerada desde su aspecto social como una asociación de masas para el apoyo de los intereses individuales, mediante la transformación de los riesgos en pagos periódicos presupuestables, esto debido a que los pagos periódicos por cada persona asegurada se convierte en una masa de capital que habría de satisfacer los riesgos.

---

<sup>1</sup>Desembolso de dinero.

<sup>2</sup>Documento legal en el que se estipulan las normas del contrato de seguro, las cuales han sido convenidas entre el asegurado y el asegurador.

Algunos conceptos relacionados con este tema son:

**Riesgo:** Posible ocurrencia por azar de un acontecimiento o daño que produce una necesidad económica.

**Seguro:** Es una operación financiera-económica en virtud de la cual, una parte (el asegurado) se hace acreedor, mediante el pago de una remuneración (la prima), de una prestación que habría de satisfacerle la otra parte (el asegurador) en caso de que se produzca un siniestro.

**Prima:** Precio que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura del riesgo que ésta le ofrece.

**Asegurador:** Es la persona que, mediante la formalización de un Contrato de Seguro, asume las consecuencias dañosas producidas por la realización del evento cuyo riesgo es objeto de cobertura.

**Contratante/Asegurado:** Es la persona que suscribe con una entidad aseguradora una póliza o contrato de seguro y se obliga al pago de la prima y de igual adquirente de derechos de indemnización.

**Contrato de seguro:** Es aquél convenio en el que el asegurador se obliga, mediante el cobro de una prima y para el caso de que se produzca el evento cuyo riesgo es objeto de cobertura, a indemnizar, dentro de los límites pactados, el daño producido al asegurado, o a satisfacer un capital u otras prestaciones<sup>3</sup> convenidas.

**Indeminización:** Es el importe que está obligado a pagar el asegurador al asegurado en caso de producirse el siniestro.

**Póliza:** Es el documento que legaliza el contrato de seguro, en el que se reflejan las normas que, de forma general, particular o especial, regulan las relaciones contractuales convenidas entre el asegurador y el asegurado.

### 1.3. Tratamiento del Riesgo

La institución aseguradora debe examinar su capacidad para cubrir un riesgo, por lo que pone en práctica un conjunto de técnicas que le permiten establecer la naturaleza, valoración y límites de aceptación del riesgo en cuestión. Dichas técnicas pueden resumirse en:

---

<sup>3</sup>Conjunto de actividades que responden a las necesidades de un cliente.

A) *Selección*

Elegir mediante determinadas características técnicas el conjunto de riesgos que se considera no tendrían comportamientos desequilibrados, es decir resultados orientados al promedio de su categoría.

B) *Análisis*

Es el instrumento técnico de que se vale la actividad aseguradora para lograr el adecuado equilibrio en sus resultados. Fundamentalmente, se concreta en los siguientes aspectos:

- Ponderación o Clasificación de Riesgos, determinar la correcta tarificación<sup>4</sup> del riesgo asumido, aplicándole la prima adecuada y creando grupos homogéneos en base a la probabilidad de siniestros e intensidad de los mismos.
- Prevención de Riesgos, mediante la cual se procura la adopción de las medidas precautorias adecuadas.
- Control de Resultados, capacidad de solvencia cuando se presenten situaciones como: Cancelación de pólizas deficitarias, delimitación de las garantías, imposición de exclusiones de cobertura, etc.

C) *Evaluación*

Es el proceso por el cual se establece, en un período de tiempo determinado, la probabilidad de que ocurran los daños, así como su cuantificación.

D) *Compensación*

Es el conjunto de medidas para lograr el adecuado equilibrio de resultados entre los riesgos que componen una cartera de pólizas<sup>5</sup>, es decir, que los riesgos considerados de mayor probabilidad de ocurrencia sean contrarrestados con los de menor siniestralidad para la entidad aseguradora.

E) *Distribución*

Reparto o dispersión de todos los riesgos que delega la aseguradora en otras entidades conocidas como Coaseguradoras y Reaseguradoras (ver [6] Págs. 156-157).

---

<sup>4</sup>Operación por la cual se determina el costo del servicio brindado.

<sup>5</sup>Conjunto de pólizas de seguro de personas amenazadas por el mismo peligro.

## Ejemplo de cálculo de una Prima Pura

Técnicamente, la prima es el coste de la probabilidad media teórica de que ocurra un siniestro.

Por ejemplo, si una aseguradora tiene asegurados 5,000 automóviles, respecto a los cuales se pronostica que, al cabo de un año, 2,000 de esos vehículos van a tener un siniestro por un importe de \$30,000 cada uno, la prima que el asegurador debería cobrar individualmente a las personas cuyos vehículos quisieran asegurar es:

$$\frac{(2,000)(30,000)}{5,000} = 12,000.$$

En este ejemplo simple se puede apreciar que la prima debe ser proporcional, entre otros aspectos, a la duración del seguro, a la probabilidad del siniestro y a la posible intensidad o coste<sup>6</sup> del siniestro.

Por otra parte, la institución asegurada no se limita a cobrar al asegurado la Prima Pura, sino que ha de gravarla<sup>7</sup> con una serie de recargos, tales como:

- Gastos de Administración (cobro de primas, tramitación de siniestros, haberes de personal de la empresa, etc.).
- Gastos de Producción (comisiones de agentes, etc.).
- Gastos de Redistribución de riesgos (Coaseguro<sup>8</sup> y Reaseguro<sup>9</sup>).
- Recargo Comercial (para obtener un beneficio lógico por el capital que arriesga la empresa aseguradora y el trabajo que desarrolla).

Todos estos recargos convierten la Prima Pura o Prima de Riesgo en *Prima Comercial*; más aún, la entidad aseguradora ha de satisfacer otra serie de gravámenes que repercuten sobre la Prima Comercial (impuestos), los cuales dan origen a la *Prima Total*, que el asegurado ha de satisfacer definitivamente a la aseguradora. Cada empresa de seguros tiene sus métodos para determinar el precio de la prima, sin embargo, todos los métodos residen en el hecho de tener una probabilidad de ocurrencia del siniestro (ver Ref. [12]).

El problema realmente surge cuando ha existido una valoración excesiva (supraseguro) o deficiente (infraseguro) del objeto asegurado y el capital acordado en la póliza es superior o inferior respectivamente, al que realmente tiene la compañía aseguradora (ver Ref. [6] Págs. 36-38). De esta forma, determinar el precio del seguro no es en absoluto una decisión trivial, pues de ello depende en gran parte el éxito o fracaso de la operación, por lo que, el camino hasta tomar esta decisión es ciertamente largo y complejo (ver Ref. [11]).

<sup>6</sup>Valor monetario que implica asegurar un riesgo.

<sup>7</sup>Tasa que se aplica por concepto de impuesto.

<sup>8</sup>Intervención de dos o más entidades aseguradoras (coaseguradores) para cubrir un mismo riesgo.

<sup>9</sup>Transferencia del riesgo de un aseguradora otras entidades

En el ejemplo expuesto previamente se puede notar que dos de los tres factores que intervienen en el cálculo de la prima son:

- La probabilidad del siniestro.
- Intensidad del siniestro.

Por ello, la estadística tiene la función más importante en una institución aseguradora, porque a través de métodos estadísticos se puede establecer con relativa exactitud el nivel de probabilidad de que se produzca determinado evento. Debido a que se necesitan pronósticos del número de accidentes y de su fatalidad o intensidad; la herramienta de *series de tiempo* es fundamental para este propósito.



# Capítulo 2

## Modelos de series de tiempo

### 2.1. Conceptos básicos de Series de Tiempo

#### 2.1.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\bar{Y}(\cdot, t)$ , definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , donde  $t$  pertenece al conjunto de subíndices  $T$  (ver Ref. [2], pags. 1-3). Así, al par ordenado  $(\omega, t)$  le corresponde un valor  $Y(\omega, t)$  que también puede denotarse como  $Y_t(\omega)$ . Para  $\omega$  fijo, el mapeo  $\omega \mapsto Y_t(\omega)$  es una trayectoria o realización del proceso.

Cuando el conjunto de subíndices,  $T$ , es un subconjunto de los números enteros  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  se dice que es un proceso a tiempo discreto, donde  $Y_n$  representa el valor del proceso al tiempo  $n$ . De forma análoga cuando  $T$  es un subconjunto no numerable de los números reales entonces se presenta un proceso a tiempo continuo. El subíndice  $n$  de cada variable aleatoria  $Y_n$  representa el instante de tiempo en que es observada. Así, los procesos estocásticos se pueden clasificar según la estructura del conjunto de índices  $T$  y el espacio muestral  $\Omega$ , es decir, si  $\omega$  y  $t$  toman valores en conjuntos continuos o discretos (ver Tabla ??).

Tabla 2.1: Una clasificación de procesos estocásticos

$t \backslash \omega$	Discreta	Continua
Discreta	Cadenas de Markov, Procesos de ramificación.	<b>Series de tiempo</b>
Continua	Procesos de Poisson, Teoría de colas, Procesos de nacimiento y muerte.	Procesos Brownianos

En particular, en este trabajo será de interés conocer más acerca de los procesos estocásticos a tiempo discreto para un valor fijo de  $\omega$  como función del tiempo  $t$ , es decir la realización de una sola trayectoria, también conocido como *serie de tiempo*.

Una serie de tiempo representa un fenómeno por medio de una trayectoria, la cual depende de variables aleatorias que generalmente están relacionadas entre sí; graficar los datos que conforman una serie de tiempo resulta ser de gran utilidad para llevar a cabo un buen análisis,

ya que, mediante la gráfica es posible observar algunas características como discontinuidades, irregularidades o incluso datos atípicos. Las series tienen implícitas algunas componentes como tendencia, cambios cíclicos y efecto estacional, tales componentes se definen enseguida:

**Componente tendencia** ( $m_t$ ): Representa el aumento o disminución en la serie sobre un periodo amplio de tiempo. Generalmente se puede representar como una línea recta o curva, el valor de la pendiente indicará el sentido y magnitud de dicho crecimiento.

**Componente estacional** ( $s_t$ ): Patrón de cambio que generalmente se aprecia cuando los datos se identifican por períodos cortos (semanal, mensual o trimestral).

**Componente cíclica** ( $c_t$ ): Es la fluctuación que ocurre alrededor de la tendencia, cualquier patrón regular de variaciones arriba o debajo de la línea que representa la tendencia.

**Componente aleatoria** ( $\epsilon_t$ ): Es el resultado de factores fortuitos que inciden de forma aislada en una serie de tiempo.

Una vez que se han descrito de manera breve los componentes que influyen en una serie de tiempo, es posible representarla mediante la ecuación

$$Y_t = m_t + s_t + \epsilon_t. \quad (2.1)$$

Nótese que el componente cíclico no se incluye explícitamente en la ecuación (2.1) debido a que es una componente que no siempre se puede identificar en una serie, pero cuando existe se considera implícitamente en la componente aleatoria,  $\epsilon_t$ .

### 2.1.2. Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación

Cada una de las variables  $Y_t$  que conforman un proceso estocástico tendrán su propia función de distribución así como sus respectivos momentos, de igual forma, cada subconjunto de variables tendrá su correspondiente función de distribución conjunta y sus funciones de distribución marginales; luego, para caracterizar un proceso estocástico, deberían especificarse las funciones de distribución, sin embargo, conocer estas funciones no es sencillo, de forma que, para caracterizar un proceso estocástico, basta con conocer la media y la varianza de cada  $Y_t$ , así como la covarianza y correlación para variables referidas a distintos valores de  $t$ .

La *Función de valor esperado*,

$$\mu_t = E(Y_t), \quad (2.2)$$

representa el valor esperado del proceso al tiempo  $t$ , el cual no necesariamente es igual en cada valor de  $t$ ; a partir de esta idea surge una propiedad denominada *estacionariedad*, dicha propiedad será importante para el estudio de *series de tiempo*, este concepto se explicará con mayor detenimiento en la siguiente sección.

También son de interés las siguientes funciones:

*Función de Varianza,*

$$\sigma_t^2 := E [(Y_t - \mu_t)^2]. \quad (2.3)$$

*Función de Autocovarianza,*

$$\gamma_{t,s} := E [(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)], \quad (2.4)$$

donde las variables aleatorias  $Y_t$  y  $Y_s$  están separadas por  $|s - t|$  unidades de tiempo, así, de las ecuaciones (2.3) y (2.4) es fácil ver que cuando  $s$  toma el valor de  $t$  entonces  $\gamma_{t,t} = \sigma_t^2$ .

*Función de Autocorrelación,* para las variables  $Y_t$  y  $Y_s$  se define como:

$$\rho_{t,s} := \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\sigma_t^2 \sigma_s^2}} = \text{Corr}(Y_t, Y_s).$$

De las definiciones anteriores se puede probar que  $\rho_{t,t} = 1$ ,  $\rho_{t,s} = \rho_{s,t}$  y  $|\rho_{t,s}| \leq 1$ . (ver Ref. [7], Págs. 45-47)

Cuando la correlación,  $\rho_{t,s}$ , de las variables  $Y_t$  y  $Y_s$  es positiva indica que ambas variables tienden a aumentar juntas, si  $\rho_{t,s}$  es negativa, significa que cuando una variable aumenta la otra disminuye, cuando  $\rho_{t,s}$  toma valores cerca de  $\pm 1$  muestra una fuerte relación (positiva o negativa) entre las variables aleatorias y un valor cercano a 0 indica una relación débil o nula entre las variables (ver Ref. [5], Pág. 598 y Ref. [13], Págs 517-525).

Las funciones de autocovarianza y autocorrelación indican el grado de dependencia lineal entre cada una de las variables que forman el proceso, esta relación es importante porque los procesos estocásticos tienen como finalidad predecir el valor futuro del proceso en base a valores previos.

### 2.1.3. Concepto y ejemplos de Estacionariedad

#### Estacionariedad

Para realizar inferencia por medio de procesos estocásticos, es necesario que se cumplan ciertas características como *estacionariedad*, esta condición se centra principalmente en que los valores del proceso están alrededor de un valor constante con una longitud de dispersión constante.

Se dice que un proceso estocástico ( $Y_t$ ) es *estrictamente estacionario* o de *estacionariedad fuerte* si las funciones de distribución conjuntas son invariantes respecto a un desplazamiento en el tiempo (variación de  $t$ ), es decir, considerando que  $t_1, t_2, \dots, t_n$  denotan periodos sucesivos

en  $T$ , y  $k$  representa a la longitud de desplazamiento en  $T$ , se cumple que:

$$F_{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})}(x_1, \dots, x_n) = F_{(Y_{t_1+k}, \dots, Y_{t_n+k})}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.5)$$

donde las  $x_i$ 's son valores reales cualesquiera.

De la ecuación (??) se sigue que  $E(Y_t) = E(Y_{t+k})$  para cualquier valor de  $t$  y  $k$ , como la función de valor esperado es igual para cualquier valor de  $t$ , se puede denotar como  $\mu_t = \mu$ , dado que el segundo momento también es constante en el tiempo,  $\sigma_t^2$  se puede escribir como  $\sigma^2$  (sólo si la varianza del proceso es finita).

Ahora se verá que las funciones de covarianza y correlación no dependen de la variable tiempo. Considérese la función de distribución bivariada de  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$ ,  $\forall k \in T$ ; por la ecuación (??) se cumple que para un desplazamiento en el tiempo,  $s$ , la covarianza es

$$\gamma_{t,t+k} = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(Y_{t-s}, Y_{t+k-s}), \quad \forall k \in T.$$

Nótese que, cuando la longitud de desplazamiento  $s$  es igual a  $t+k$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma_{t,t+k} &= Cov(Y_{t-(t+k)}, Y_{t+k-(t+k)}) \\ &= Cov(Y_{-k}, Y_0) \\ &= Cov(Y_0, Y_{-k}) \\ &= Cov(Y_0, Y_{|-k|}) \\ &= \gamma_{0,|-k|}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

o, si  $s = -t+k$

$$\gamma_{t,t-k} = \gamma_{t-k,t} = \gamma_{0,k}$$

esto es:

$$\gamma_k = \gamma_{0,k} = \gamma_{t,t-k}.$$

Para el caso estrictamente estacionario la covarianza entre  $Y_t$ ,  $Y_{t+k}$  sólo depende del intervalo de tiempo  $|-k|$ , es decir  $\gamma_{t,t+k} = \gamma_k$ .

De forma análoga se puede probar para la función de autocorrelación, que:

$$\rho_{t,t+k} = \rho_{0,-k} = \rho_{-k} \quad (2.7)$$

Dado que las funciones de autocovarianza y autocorrelación no dependen del tiempo en el que se calculen sino de la longitud del desfaseamiento ( $k$  unidades), en la notación podrá omitirse el momento,  $t$ .

La estacionariedad fuerte puede relajarse substancialmente utilizando la denominada *estacionariedad débil* (o estacionariedad en covarianza). Se dice que un proceso es débilmente estacionario si el primer y segundo momento están definidos y son constantes y si la autocovarianza y autocorrelación dependen únicamente de tiempo transcurrido ( $k$ ) entre las variables.

**Definición 2.1.** Se dice que un proceso es débilmente estacionario si:

$$i. E(Y_t) = \mu, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \mu^2 < \infty \quad (2.8a)$$

$$ii. Var(Y_t) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \sigma^2 < \infty \quad (2.8b)$$

$$iii. Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_k, \quad \forall t, k \in \mathbb{R} \quad (2.8c)$$

**Definición 2.2.** Dado un proceso débilmente estacionario, se definen:

- Función de autocovarianza:  $\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$ .
- Función de autocorrelación (ACF)<sup>1</sup>  $\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{\sigma_t^2} \sqrt{\sigma_{t+k}^2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

Para todo proceso débilmente estacionario se satisfacen las siguientes propiedades:

- I.  $\gamma_0 = Var(Y_t)$ .
- II. Del hecho que  $|\rho_k| \leq 1$ , se tiene que  $|\gamma_k| \leq \gamma_0$  para todo  $k$ .
- III.  $\rho_k$  y  $\gamma_k$  son simétricas con respecto a  $k$ , es decir,  $\rho_k = \rho_{-k}$  y  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ .

La estacionariedad en sentido estricto garantiza la estacionariedad en sentido débil pero no recíprocamente. En el caso particular de un proceso gaussiano, como su distribución queda determinada por  $\mu$  y  $\sigma^2$  se tiene que *estacionariedad fuerte* es lo mismo que *estacionariedad débil*.

Ahora se presentan algunos ejemplos para ver cuando se cumple la propiedad de *estacionariedad débil*.

### Ruido i.i.d. (independiente e idénticamente distribuido)

Un ejemplo de un proceso estacionario en covarianza es una sucesión  $(Y_t)$  de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) también denominado *ruido i.i.d.*,  $Y_t \sim IID(\mu, \sigma^2)$ , donde la propiedad “distribución idéntica” significa que cada componente de la sucesión tiene la misma distribución y en particular tendrán su media y varianza iguales, la propiedad “independiente” significa que  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$  y  $\gamma_0 = \sigma^2$ , esto es, también  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = 0$ .

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés *Autocorrelation function*.

## Ruido blanco

Si  $(Y_t)$  es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas, cada una con media  $\mu = 0$  y varianza finita,  $\sigma^2$ , entonces  $(Y_t)$  es un *ruido blanco*, claramente  $(Y_t)$  es estacionario con las mismas propiedades de la covarianza de *Ruido i.i.d.*. Este proceso se denota como  $Y_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Si  $Y_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , entonces:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

y

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

además, si  $(Y_t)$  es un proceso Normal, entonces todas las variables del proceso son independientes. En este caso, a  $(Y_t)$  se le conoce como *ruido blanco normal*.

Técnicamente, un proceso i.i.d. (con una varianza finita) es un proceso de ruido blanco, pero un proceso de ruido blanco no es necesariamente un proceso i.i.d. (ya que las  $Y$ 's no necesariamente están idénticamente distribuidas o son independientes).

El proceso de ruido blanco seguirá siendo importante ya que forma parte del bloque básico para la construcción de series de tiempo más elaboradas.

## Caminata aleatoria

La caminata aleatoria  $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  se obtiene al sumar variables aleatorias i.i.d. y decimos que la caminata tiene media cero, cuando:

$$S_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_t, & t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

y  $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$  es un ruido i.i.d. con media cero.

Si  $(X_t)$  es un proceso binario, por ejemplo  $P(X_t = 1) = p$  y  $P(X_t = -1) = (1 - p)$ , entonces al proceso se le conoce como **caminata aleatoria con simetría simple**.

Ahora, dado que las variables  $(X_1, X_2, \dots, X_t)$  son i.i.d. con media  $\mu = 0$ , se cumple que  $E(S_t) = 0$  y  $E(S_t^2) = t\sigma^2 < \infty$  para toda  $t$ , además para toda  $h \geq 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
\gamma_s(t, t+h) &= \text{Cov}(S_t, S_{t+h}) \\
&= \text{Cov}(S_t, S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}) \\
&= \text{Cov}(S_t, S_t) \\
&= t\sigma^2
\end{aligned}$$

es decir  $\gamma_s(t, t+h)$  depende de  $t$  y por la definición de estacionariedad, se observa que la serie  $(S_t)$  es no estacionaria.

En los dos ejemplos siguientes se introducen dos modelos importantes que se estudiarán con mayor detalle en la Sección 2.2, por ahora sólo considérense como parte de los ejemplos para ver la propiedad de estacionariedad.

### Promedios móviles de primer orden o Proceso MA(1)

Sea:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

una serie (conocida como *Promedios móviles de primer orden*), donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\theta$  es una constante. De la ecuación (??), se puede ver que  $E(X_t) = 0$ ,  $E(X_t^2) = \sigma^2(1 + \theta^2) < \infty$ , y:

$$\gamma_X(t, t+h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2), & h = 0 \\ \sigma^2\theta, & h = \pm 1 \\ 0, & |h| > 1 \end{cases}$$

Además:

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, & h = \pm 1 \\ 0, & |h| > 1. \end{cases}$$

Y de esta forma se cumplen las condiciones para que el proceso MA(1) sea estacionario.

### Modelo autorregresivo de primer orden o proceso AR(1)

Supóngase que  $(X_t)$  es una serie estacionaria que satisface la ecuación:

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \dots \quad (2.10)$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ,  $|\phi| < 1$ , y  $Z_t$  no está correlacionada con  $X_s$  para cada  $s < t$ . Dado que  $E(Z_t) = 0$ , se puede decir que  $E(X_t) = 0$  (más adelante se demostrará esta propiedad). Ahora, si se multiplican ambos lados de la ecuación (??) por  $X_{t-h}$  y se calcula la esperanza, se tiene que  $E(X_t X_{t-h}) = E(\phi X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h})$ , es decir:

$$E(X_t X_{t-h}) = E([X_t - E(X_t)][X_{t-h} - E(X_{t-h})]) = \gamma_X(h).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(h) &= E(\phi X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}) \\
 &= \phi E(X_{t-1} X_{t-h}) \\
 &= \phi \gamma_X(h-1) + 0 \\
 &\vdots \\
 &= \phi^h \gamma_X(0).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dado que  $\gamma(h) = \gamma(-h)$ :

$$\gamma_X(h) = \phi^{|h|} \gamma_X(0).$$

Así la función de autocorrelación queda de la siguiente forma:

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \phi^{|h|}, \quad \text{para } h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Se define:

$$\gamma_X(0) = \text{Cov}(X_s, X_s).$$

Ahora, por la propiedad bilineal de la covarianza, y dado que  $X_t$  y  $Z_{t-1}$  no están correlacionadas:

$$\gamma_X(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Cov}(\phi X_{t-1} + Z_t, \phi X_{t-1} + Z_t) = \phi^2 \gamma_X(0) + \sigma^2.$$

Al despejar  $\gamma_X(0)$ , se tiene que:

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

#### 2.1.4. Estimadores de parámetros de funciones de autocovarianza y autocorrelación

Sea  $(Y_n)$  un proceso estacionario. Si únicamente se tiene una realización  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de cada variable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  que forma el proceso, ¿cómo se estimarían sus características?. Es difícil hacer inferencia sobre una variable  $Y_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), cuando la muestra de todo el proceso tiene una sola observación para cada variable  $Y_i$ , sin embargo, dado que los valores de la realización del proceso, describen el mismo proceso, es posible utilizar la muestra del proceso para hacer inferencia de los parámetros poblacionales. Por esta razón las funciones que representan los parámetros, deben adaptarse a información muestral y no poblacional.

**Definición 2.3.** Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  observaciones de una serie de tiempo.

La **media muestral** de  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$$

La *función de autocovarianza muestral* es:

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} (y_{t+|k|} - \bar{y})(y_t - \bar{y}), \quad -n < k < n$$

La *función de autocorrelación muestral* es:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad -n < k < n$$

A partir de los datos de una serie temporal se puede estimar un número finito de autocorrelaciones. El gráfico de las autocorrelaciones muestrales recibe el nombre de correlograma (ver Ref. [9], Págs. 782-785).

### 2.1.5. Eliminación de tendencia y estacionalidad

Diferenciar una serie de tiempo dada hasta lograr hacerla estacionaria, es un tipo de filtro particular el cual elimina la tendencia de la serie. Para poder aplicar esto se necesita que los datos no sean estacionales, es decir, que no presenten fluctuaciones periódicas muy marcadas. Por lo cual, se definen los operadores diferencia y de retraso que serán de gran utilidad tanto en esta sección como en las posteriores.

#### Operadores diferencia y de retraso

**Definición 2.4.** El operador diferencia  $\nabla$  (nabla) está dado por:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} = (1 - B)y_t,$$

donde  $B$  es el operador de retraso:

$$B y_t = y_{t-1}.$$

Análogamente se definen:

$$B^d y_t = y_{t-d},$$

y,

$$\nabla^d (y_t) = \nabla (\nabla^{d-1} (y_t)), \quad d \geq 1,$$

donde  $\nabla^0 (y_t) = y_t$ .

El método de diferenciación consiste en formar una nueva serie  $x_2, \dots, x_n$  a partir de la original  $y_1, y_2, \dots, y_n$  mediante:

$$x_t = y_t - y_{t-1} = \nabla y_t, \quad t = 2, 3, \dots, n. \quad (2.12)$$

Generalmente al tomar las primeras diferencias la serie se vuelve estacionaria, sin embargo, algunas veces es necesario diferenciar dos veces usando el operador  $\nabla^2$ ,

$$\begin{aligned}\nabla^2 y_t &= \nabla(\nabla(y_t)) \\ &= (1 - B)(1 - B)y_t \\ &= (1 - 2B + B^2)y_t \\ &= y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.\end{aligned}$$

Es importante recordar que el propósito de aplicar diferencias a una serie, es convertir una serie *no estacionaria* en *estacionaria*, pero, si se diferencia una serie que ya es *estacionaria*, se comete un error conocido como *sobrediferenciación* (ver Ref. [10], Págs. 39-41)

### Eliminación de componente estacional

Al principio de esta sección, se presentaron de forma general las componentes que describen una serie de tiempo, donde  $m_t$  es la componente tendencia,  $s_t$  es una función que representa la componente estacional y  $\epsilon_t$  es la componente de ruido aleatorio<sup>2</sup>. La serie se representó como

$$y_t = m_t + s_t + \epsilon_t \quad (2.13)$$

En general, cuando una serie muestra estacionalidad es necesario aplicar algún método para eliminar dicho efecto. En esta sección se presenta el filtro lineal simple conocido como *diferenciación estacional*, la cual se representa con el operador  $\nabla_d$  y se define de la siguiente manera:

$$\nabla_d y_t = y_t - y_{t-d} = (1 - B^d)y_t \quad (2.14)$$

Es decir, la técnica de diferenciación descrita anteriormente para datos no estacionales, también se puede aplicar a datos estacionales de periodo  $d$ . Por ejemplo para datos mensuales se debe calcular:

$$\nabla_{12} y_t = y_t - y_{t-12}, \quad (2.15)$$

Por otro lado, al aplicar el operador de la ecuación (??) al modelo (??) y dado que  $\{s_t\}$  tiene periodo  $d$ , se tiene que:

$$\nabla_d y_t = m_t - m_{t-d} + \epsilon_t - \epsilon_{t-d}, \quad (2.16)$$

es decir, se ha eliminado la componente estacional; de forma análoga, se puede eliminar la tendencia ( $m_t - m_{t-d}$ ) mediante el método de diferenciación, y de esta forma la serie queda expresada en función de un *ruido*.

Estos procedimientos descritos son sólo algunos de los existentes para estimar y/o eliminar tanto la tendencia como el efecto estacional en una serie de tiempo. En secciones posteriores se explicarán técnicas específicas para modelos de series de tiempo.

---

<sup>2</sup> $E(\epsilon_t) = 0, \text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2.$

### Función de Autocorrelación Parcial (PACF)<sup>3</sup>.

Anteriormente se explicó la importancia de la autocorrelación entre las variables  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$ , pero también es importante conocer la correlación que hay entre estas variables cuando se excluye la dependencia lineal entre  $Y_t$ , y  $Y_{t+k}$ , y las variables  $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}$ , es decir, la correlación entre las variables  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$  una vez que ya se conoce el valor de las variables intermedias (ver Ref. [3] pag. 248); dicha relación se denota como la correlación condicional

$$P_k = \text{Corr}(Y_t, Y_{t+k} | Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k-1}), \quad (2.17)$$

y se conoce como *función de autocorrelación parcial* o PACF.

Para encontrar el valor de dicha correlación, considérese un proceso estacionario, con variables explicativas  $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k-1}$ , del cual se asume que  $E(Y_t) = 0$ . La dependencia lineal de  $Y_{t+k}$  con  $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k-1}$  se representa como

$$Y_{t+k} = \phi_{k1}Y_{t+k-1} + \phi_{k2}Y_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}Y_{t+1} + e_{t+k}, \quad (2.18)$$

donde  $\phi_{ki}$  (para  $i = 1, \dots, k-1$ ) denota el  $i$ -ésimo coeficiente de regresión lineal y  $e_{t+k}$  es un término de error no correlacionado con  $Y_{t+k-j}$  para  $j \geq 1$ . Ahora si se multiplica a ambos lados de la ecuación (??) por la variable  $Y_{t+k-j}$  y se calcula esperanza se obtiene

$$E(Y_{t+k-j}Y_{t+k}) = \phi_{k1}E(Y_{t+k-j}Y_{t+k-1}) + \dots + \phi_{kk}E(Y_{t+k-j}Y_{t+1}) + E(Y_{t+k-j}e_{t+k}), \quad (2.19)$$

dado que  $(Y_t)$  es un proceso estacionario, entonces la ecuación (??) se puede expresar como

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}, \quad (2.20)$$

luego, si se divide la ecuación (??) por la varianza del proceso,  $\rho_0$ , se tiene que

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad (2.21)$$

al sustituir  $j = 1, 2, \dots, k$  por sus valores, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{k-2} + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{k-3} + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_1 + \phi_{kk}\rho_0 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Por sus siglas en inglés Partial Autocorrelation Function

Mediante la regla de Cramer, se pueden despejar los coeficientes  $\phi_{ki}$  y en particular  $\phi_{kk}$

$$\phi_{11} = \rho_1,$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\vdots$$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad (2.22)$$

De aquí se obtiene que  $\phi_{kk} = P_k$ , es decir la autocorrelación parcial de  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$ . Los coeficientes también se pueden obtener como los coeficientes de regresión asociada a  $Y_t$  de  $k$  pasos.

## 2.2. Modelos que describen Series de Tiempo

La publicación *Time Series Analysis: Forecasting and Control* de G.P.E. Box y G. M. Jenkins [4], marcó el comienzo de una nueva generación de herramientas de pronóstico. Comúnmente llamada como metodología de Box-Jenkins, pero técnicamente conocida como metodología ARIMA, el interés de estos modelos radica en el análisis de las propiedades probabilísticas o estocásticas de las series de tiempo.

En este apartado se analizarán los modelos estacionarios

- Autorregresivos (AR<sup>4</sup>)

---

<sup>4</sup>Por sus siglas en inglés *Autoregressive*.

- Promedios móviles (MA<sup>5</sup>)
- Autorregresivo de promedios móviles (ARMA<sup>6</sup>)
- Autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA<sup>7</sup>)

### 2.2.1. Modelos de Series de Tiempo Estacionarias

Anteriormente se mencionó que un proceso estacionario puede escribirse como una combinación lineal de v.a's no correlacionadas; aquí se presenta la misma idea, pero ahora con un número finito de observaciones.

En este apartado se da a conocer el modelo autorregresivo de medias móviles, el cual es una combinación del modelo autorregresivo y el de medias móviles.

Para que un proceso estocástico estacionario admita algún modelo de los que aquí se presentarán, deberán cumplirse dos condiciones:

1. El proceso no debe ser anticipante, es decir, que el futuro no explique el presente.
2. El proceso debe ser invertible; lo que supone que la correlación entre una variable y su pasado va reduciéndose a medida que aumenta el tiempo entre el presente y el pasado, es decir, debido a que la variable  $Y_t$  está en función de ciertos coeficientes que determinan su correlación con los valores pasados de ella misma, los valores de dichos coeficientes deberán ser necesariamente inferiores a uno, de lo contrario, el proceso de infinitos números será "explosivo".

#### Procesos lineales

**Definición 2.5.** La serie de tiempo ( $Y_t$ ) es un proceso lineal si tiene la representación:

$$Y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \quad (2.23)$$

Para toda  $t$ , donde  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\psi_i$  es una sucesión de constantes con  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ .

La condición  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$  garantiza que la suma infinita de la ecuación (??) converge.

Si se aplica el operador de retraso a la ecuación (??), se tiene que:

$$Y_t = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (2.24)$$

donde  $\psi(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$ . De la Definición ?? se desprenden algunos casos particulares, que reciben nombres específicos, por ejemplo, cuando  $\psi_i = 0$  para toda  $i < 0$ , al proceso se le conoce como de **promedios móviles o MA**( $\infty$ ) y su notación es:

<sup>5</sup>Por sus siglas en inglés *Moving average*.

<sup>6</sup>Por sus siglas en inglés *Autoregressive moving average*.

<sup>7</sup>Por sus siglas en inglés *Autoregressive integrated moving average*

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

Del proceso de promedios móviles se deriva otro más específico y su diferencia reside en que la suma es finita (hasta un número  $q$ ), dicho proceso se estudia en el siguiente apartado.

### Procesos de media móvil (MA)

El proceso de promedios móviles de orden finito o también conocido como  $MA(q)$ , explica el valor de la variable  $Y_t$  en función de un término independiente y una sucesión de errores, correspondientes a periodos precedentes, los cuales están ponderados convenientemente, tales ponderaciones se representan con el símbolo  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

Se dice que un proceso es de promedios móviles de orden  $q$ , si puede ser expresado como:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.25)$$

donde  $\varepsilon_s$ , para  $s = t, \dots, t - q$ , es un *ruido blanco* (proceso puramente aleatorio con media cero y varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ ).

Es posible escribir la ecuación (??) en términos del operador de retraso:

$$\begin{aligned} Y_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \\ &= \left( 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \right) \varepsilon_t \\ &= \Theta_q(B) \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (2.26)$$

obsérvese que  $\Theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$  es llamado polinomio de retraso. Es importante verificar que el proceso  $(Y_t)$ , sea invertible y para ello las raíces del polinomio,  $\Theta(B)$ , deberán estar fuera del círculo unitario. Es interesante ver el comportamiento del proceso  $MA(1)$ , ya que ayuda a generalizar las propiedades para el modelo de orden  $q$ , y además es uno de los modelos más utilizados en casos reales.

### Proceso de media móvil de primer orden o MA(1)

Naturalmente, el proceso  $MA(1)$  es un caso particular, es decir, cuando el orden,  $q$ , del proceso de promedios móviles es igual a 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nótese que el polinomio de la ecuación (??) es de primer orden,  $\Theta_1(B) = 1 - \theta_1 B$ , entonces, para encontrar las raíces del polinomio se debe resolver la ecuación  $1 - \theta_1 B = 0$ , es decir,  $\theta_1 B = 1$ , por tanto, su raíz es  $B = 1/\theta_1$ , pero como debe estar fuera del círculo unitario para que el proceso sea invertible, entonces  $\frac{1}{\theta_1} > 1$ , esto implica que  $|\theta_1| < 1$ .

Ahora, dado que  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , es fácil ver que  $E(Y_t) = 0$  y que la varianza es:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \text{Var}(Y_t) \\ &= E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 \\ &= E(\varepsilon_t)^2 + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 - 2\theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2(1 + \theta_1^2) < \infty. \end{aligned}$$

Luego, es posible obtener los valores de la autocovarianza y autocorrelación,

Sea  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E([Y_t - E(Y_t)][Y_{t-1} - E(Y_{t-1})]) \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})] \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1})^2 - \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) \\ &= -\theta_1 \sigma^2 < \infty. \end{aligned}$$

por tanto,

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

Ahora, sea  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3})] \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) - \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

se tiene que,

$$\rho_2 = 0.$$

De igual forma para  $k > 2$ , se cumple que:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})] \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

esto es,

$$\rho_k = 0, \text{ para } k > 2.$$

**Proposición 1.** Dado un proceso de medias móviles de orden 1, las funciones de autocovarianza ( $\gamma_k$ ) y autocorrelación ( $\rho_k$ ) son:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2), & k = 0 \\ -\theta_1 \sigma^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

De la ecuación (??) se tiene que la función de autocorrelación parcial,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{\theta_1(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^4} \\ \phi_{22} &= \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4} \\ \phi_{33} &= \frac{-\rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^6}.\end{aligned}$$

Y en general,

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}, \quad k \geq 1$$

A diferencia de la ACF, la PACF no se corta después del rezago  $k = 1$ , sino que decae exponencialmente dependiendo del signo de  $\theta_1$ .

**Ejemplo 2.1**

Sea el modelo  $MA(1)$  de la forma  $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ , entonces la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -0.44, & k = 1 \\ 0, & k > 1, \end{cases}$$

de forma análoga al sustituir el valor de  $\theta_1$  en la  $PACF$ , se obtiene que:

$$\phi_{kk} = \frac{0.64(0.6)^k}{1 - (0.6)^{2(k+1)}}, \quad k \geq 1,$$

así las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial se pueden observar gráficamente en la Figura ??.

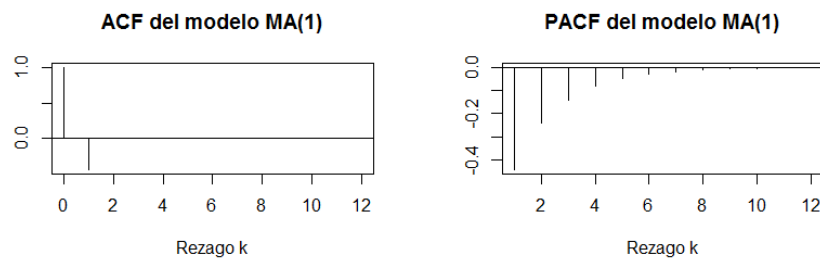


Figura 2.1: ACF y PACF del modelo  $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ .

**Proceso de media móvil de segundo orden o  $MA(2)$** 

Ahora se estudiarán las características más importantes del proceso de promedios móviles de orden 2, el cual se representa como:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \quad (2.28)$$

donde  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco.

Al igual que el proceso  $MA(1)$ , la media para el proceso  $MA(2)$  es igual a cero,  $E(Y_t) = 0$ . La función de varianza es:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \text{Var}(Y_t) \\ &= E(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})^2 \\ &= \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2). \end{aligned}$$

Luego, los valores de la función de autocovarianza y autocorrelación son:  
Cuando  $k = 1$ :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E([Y_t - E(Y_t)][Y_{t-1} - E(Y_{t-1})]) \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})] \\ &= (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2\end{aligned}$$

y

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}.$$

Si  $k = 2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})] \\ &= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) - \theta_1E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})^2 - \theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}) + \theta_1^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}) \\ &= -\theta_2\sigma^2\end{aligned}$$

y

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}.$$

De forma análoga, para  $k > 2$ :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \theta_2\varepsilon_{t-k-2})] \\ &= 0,\end{aligned}$$

esto es,

$$\rho_k = 0, \text{ para } k > 2.$$

**Proposición 2.** Dado un proceso de medias móviles de orden 2, las funciones de autocovarianza ( $\gamma_k$ ) y autocorrelación ( $\rho_k$ ) son:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & k = 0 \\ (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2, & k = 1 \\ -\theta_2\sigma^2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 2 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Es importante verificar que el modelo  $MA(2)$  cumple la condición de invertibilidad. Para lo cual, considérese la ecuación (??) en términos del operador de retraso:

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t. \quad (2.29)$$

Así, el polinomio de medias móviles está dado por  $\Theta_2(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ , para encontrar las raíces del polinomio se tiene que resolver la ecuación  $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ , las raíces son:

$$B_1, B_2 = \frac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}.$$

Entonces la condición de invertibilidad del modelo  $MA(2)$  está dada por:

$$|B_1| = \left| \frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2} \right| > 1$$

$$|B_2| = \left| \frac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2} \right| > 1$$

### Ejemplo 2.2

Considérese el modelo  $MA(2)$  con valores particulares  $\theta_1 = 0.6$  y  $\theta_2 = 0.2$ , es decir, un modelo de la forma  $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$ , entonces la  $ACF$  es:

$$\rho_k = \begin{cases} -0.342, & k = 1 \\ -0.142, & k = 2 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

En seguida se muestra la *función de autocorrelación parcial* de este ejemplo, para los primeros cuatro rezagos:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} -0.342, & k = 1 \\ -0.295, & k = 2 \\ -0.204, & k = 3 \\ -0.103, & k = 4 \end{cases}$$

En la Figura ?? se puede observar el comportamiento de  $ACF$  y  $PACF$ , donde la  $ACF$  se corta después del segundo rezago y la  $PACF$  decrece.

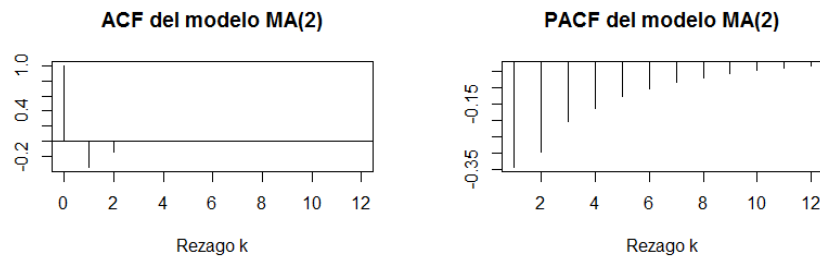


Figura 2.2:  $ACF$  y  $PACF$  del modelo  $Y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$

### ACF y PACF del modelo general $MA(q)$

A partir de los procesos de medias móviles  $MA(1)$  y  $MA(2)$ , es posible generalizar las funciones de autocovarianza y autocorrelación para el proceso  $MA(q)$ .

Autocovarianza de  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$ , donde  $k > 0$ ,

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2), & k = 0 \\ \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q), & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

Función de autocorrelación para las variables  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$ ,

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

Esta característica es muy útil para identificar el modelo  $MA$  y el orden que debe considerarse,  $q$ . En la aplicación no se exige que la correlación entre las variables después del rezago  $q$  sea exactamente igual a cero, en realidad se permite que los valores estén oscilando alrededor de 0 y dentro de un margen de aceptación conocido como desviación estándar de la función de autocorrelación.

### Procesos Autorregresivos (AR)

Se define un proceso autorregresivo como la variable,  $Y_t$ , explicada por las observaciones de ella misma correspondientes a periodos anteriores añadiéndose (como en los modelos estructurales) un término de error.

Los procesos autorregresivos se abrevian con la palabra  $AR$  y entre paréntesis se escribe su **orden** del modelo:  $AR(1)$ ,  $AR(2)$ , ...,  $AR(p)$ . El orden del modelo expresa el número de observaciones retrasadas de la misma variable que se van a considerar en la serie temporal.

**Definición 2.6.** Sea  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , se dice que un proceso es autorregresivo de orden  $p$ , si se puede expresar como:

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \lambda_2 Y_{t-2} + \cdots + \lambda_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.30)$$

Al expresar la ecuación (??) en términos del operador de retraso se tiene que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= (1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2 - \cdots - \lambda_p B^p) Y_t \\ &= \Lambda_p(B) Y_t, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\Lambda_p(B) Y_t = (1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2 - \cdots - \lambda_p B^p)$ .

Dado que el proceso autorregresivo es un caso particular del *proceso lineal* (Def. 2.5), se cumple que:

$$\sum_{i=1}^p |\psi_i| = \sum_{i=1}^p |\lambda_i| < \infty,$$

entonces el proceso siempre será invertible. Para que sea estacionario, las raíces de  $\Lambda_p(B) = 0$ , deben estar fuera del círculo unitario.

Normalmente, se suele trabajar con modelos autorregresivos de órdenes bajos:  $AR(1)$  o  $AR(2)$ , o bien con órdenes coincidentes con la periodicidad de los datos de la serie analizada (si es trimestral  $AR(4)$ , si es mensual  $AR(12)$ , etc.).

### Proceso autorregresivo de primer orden o AR(1)

Se denota al proceso  $AR(1)$  como:

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.32)$$

donde  $(\varepsilon_t)$  es un ruido blanco (con media cero y varianza  $\sigma^2$ ). A este proceso también se le conoce como proceso de Markov.

Al escribir a la ecuación (??) en términos del operador de retraso se tiene que:

$$(1 - \lambda_1 B)Y_t = \varepsilon_t. \quad (2.33)$$

Como se mencionó anteriormente, el proceso autorregresivo de cualquier orden siempre es invertible, pero falta verificar la estacionariedad del proceso  $AR(1)$ , para ello, debe cumplirse que la raíz de la ecuación  $1 - \lambda_1 B = 0$  esté fuera del círculo unitario. Esto implica que  $|\lambda_1| < 1$ .

Por otro lado, es importante notar que el proceso  $AR(1)$  puede escribirse como un proceso de medias móviles de orden infinito, es decir, si se hacen sustituciones sucesivas en la ecuación (??) se obtiene:

$$\begin{aligned} Y_t &= \lambda_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \lambda_1(\lambda_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t \\ &= \lambda_1(\lambda_1(\lambda_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones y ordenar los términos se tiene que:

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \lambda_1 \varepsilon_{t-2} + \lambda_1^2 \varepsilon_{t-3} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \varepsilon_{t-i}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A partir de la expresión (??), es fácil ver que  $E(Y_t) = 0$ , dado que  $(\varepsilon_t)$  es un *ruido blanco*.

Para calcular la varianza del proceso, considérese la ecuación (??), esto es,

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= Var(\lambda_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \lambda_1^2 Var(Y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

como ya se probó la estacionariedad del proceso, se puede decir que  $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1})$ , por tanto la varianza del proceso es:

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \lambda_1^2}.$$

La función de autocovarianza se puede obtener como:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t+k}) \\ &= Cov(Y_t, \lambda_1 Y_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k}) \\ &= \lambda_1 Cov(Y_t, Y_{t+k-1}) + Cov(Y_t, \varepsilon_{t+k}) \\ &= \lambda_1 \gamma_{k-1} + 0 \\ &\vdots \\ &= \lambda_1^k \gamma_0 \\ &= \frac{\lambda_1^k \sigma_\varepsilon^2}{1 - \lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Así la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \lambda_1^k, & k \geq 1 \end{cases}$$

De aquí que, cuando el proceso es estacionario y  $|\lambda_1| < 1$ , la *FAC* decae exponencialmente, si  $\lambda_1 \in (0, 1)$ , entonces las autocorrelaciones son positivas y si  $\lambda_1 \in (-1, 0)$  entonces el decrecimiento de la *FAC* es alternado, es decir, una autocorrelación positiva seguida de una negativa.

De la ecuación (??) se obtiene que la *PACF* del proceso *AR*(1) es:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \lambda_1, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

### Ejemplo 2.3

Considérese el modelo  $AR(1)$  de la forma  $Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , entonces la funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial son:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ (0.4)^k, & k > 0. \end{cases}$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.4, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

En la siguiente figura se ilustra el comportamiento de  $ACF$  y  $PACF$ , en la cual se observa que la  $ACF$  decae exponencialmente pero de forma alternada ya que el valor de  $\lambda_1$  es negativo; por otro lado, la  $PACF$  se corta inmediatamente después del primer rezago.

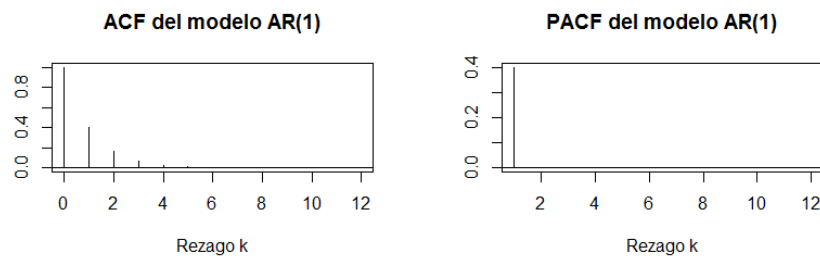


Figura 2.3: ACF y PACF del modelo  $Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t$ .

### Proceso autorregresivo de segundo orden $AR(2)$

Un proceso autorregresivo de orden 2 se representa como:

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \lambda_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (2.36)$$

y en términos del operador de retraso como:

$$(1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2)Y_t = \varepsilon_t. \quad (2.37)$$

Recuérdese que el proceso autorregresivo de cualquier orden es invertible; para que sea estacionario, las raíces del polinomio  $1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2$ ,

$$B_1, B_2 = \frac{\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{-2\lambda_2},$$

no deben estar dentro del círculo unitario, es decir,

$$|B_1| = \left| \frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{-2\lambda_2} \right| > 1$$

y

$$|B_2| = \left| \frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{-2\lambda_2} \right| > 1$$

Para asegurar la estacionariedad del proceso, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- a)  $-2 < \lambda_1 < 2$
- b)  $-1 < \lambda_2 < 1$

Si el radicando,  $\lambda_1^2 + 4\lambda_2$ , es mayor a cero, entonces las raíces son reales y la *ACF* caerá exponencialmente; si es menor a cero, entonces las raíces son complejas y la *ACF* presentará ondas senoidales.

La función del autocovarianza del proceso AR(2), se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t+k}) \\ &= Cov(Y_t, \lambda_1 Y_{t+k-1} + \lambda_2 Y_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k}) \\ &= \lambda_1 Cov(Y_t, Y_{t+k-1}) + \lambda_2 Cov(Y_t, Y_{t+k-2}) + Cov(Y_t, \varepsilon_{t+k}) \\ &= \lambda_1 \gamma_{k-1} + \lambda_2 \gamma_{k-2}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

por tanto, la función de autocorrelación cumple que:

$$\rho_k = \lambda_1 \rho_{k-1} + \lambda_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 1$$

En seguida se muestra la función de autocorrelación para los primeros 5 rezagos,

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_2}, & k = 1 \\ \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2(1-\lambda_2)}{1-\lambda_2}, & k = 2 \\ \frac{\lambda_1^3 + \lambda_1\lambda_2(2-\lambda_2)}{1-\lambda_2}, & k = 3 \\ \frac{\lambda_1^4 + \lambda_1^2\lambda_2(3-\lambda_2) + \lambda_2^2(1-\lambda_2)}{1-\lambda_2}, & k = 4 \\ \frac{\lambda_1^5 + \lambda_1^3\lambda_2(4-\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2^2(3-2\lambda_2)}{1-\lambda_2}, & k = 5. \end{cases} \quad (2.38)$$

A partir de (??) y (??), se puede obtener la función de autocorrelación parcial del modelo AR(2),

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_2}, & k = 1 \\ \lambda_2, & k = 2 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

de donde se observa que la *PACF* se trunca después del segundo rezago.

### Ejemplo 2.4

Considérese el modelo *AR*(2) de la forma  $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ , entonces la funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial son:

$$\rho_k = \begin{cases} 0.857, & k = 1 \\ 0.814, & k = 2 \\ 0.745, & k = 3 \\ 0.691, & k = 4 \\ 0.638, & k = 5 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.8571, & k = 1 \\ 0.3000, & k = 2 \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

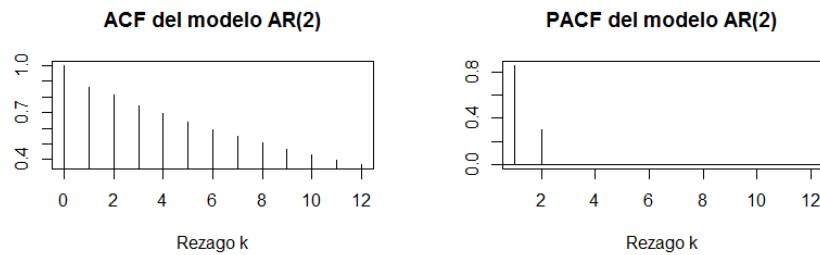


Figura 2.4: ACF y PACF del modelo  $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ .

### ACF y PACF del modelo general de *AR*(*p*)

Para hallar las funciones de autocovarianza y autocorrelación del proceso *AR*(*p*), se multiplica por  $Y_{t-k}$  a ambos lados de la ecuación (??) y se calculan esperanzas:

$$\begin{aligned} E(Y_{t-k}Y_t) &= \lambda_1 E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + \lambda_2 E(Y_{t-k}Y_{t-2}) + \cdots + \lambda_p E(Y_{t-k}Y_{t-p}) + E(Y_{t-k}\varepsilon_t) \\ &= \lambda_1 \gamma_{k-1} + \lambda_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \lambda_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

como  $E(Y_{t-k}Y_t) = E((Y_{t-k} - E(Y_{t-k}))(Y_t - E(Y_t)))$ , entonces:

$$\gamma_k = \lambda_1\gamma_{k-1} + \lambda_2\gamma_{k-2} + \cdots + \lambda_p\gamma_{k-p},$$

y por tanto, la función de autocorrelación para este modelo satisface:

$$\rho_k = \lambda_1\rho_{k-1} + \lambda_2\rho_{k-2} + \cdots + \lambda_p\rho_{k-p}, \quad k \geq 1$$

Ahora, como  $\rho_k = \lambda_1\rho_{k-1} + \lambda_2\rho_{k-2} + \cdots + \lambda_p\rho_{k-p}$  para  $k \geq 1$ , se puede ver que, cuando  $k \geq q$  la última columna de la matriz en el numerador de  $\phi_{kk}$  (Ecuación (??)) puede ser escrita como una combinación lineal de las columnas previas de la misma matriz, por lo que el determinante es igual a cero y la PACF se corta después del rezago  $p$ .

### Proceso Autorregresivo de Promedio Móvil (ARMA)

La combinación de los procesos  $AR(p)$  y  $MA(q)$  da lugar a los procesos mixtos también conocidos como  $ARMA(p, q)$ , los cuales se definen de la siguiente manera:

**Definición 2.7.** Se dice que  $(Y_t)$  es un proceso  $ARMA(p, q)$  si es estacionario y si para cada  $t$ , se cumple:

$$Y_t - \lambda_1 Y_{t-1} - \cdots - \lambda_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.39)$$

donde  $(\varepsilon_t)$  es un proceso de ruido blanco.

Es posible representar la Ecuación (??) en términos del operador de retraso:

$$\Lambda_p(B)Y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (2.40)$$

donde  $\Lambda_p(B) = (1 - \lambda_1 B - \lambda_2 B^2 - \cdots - \lambda_p B^p)$  y  $\Theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)$ .

Como se discutió previamente en los apartados de los procesos  $AR$  y  $MA$ , si las raíces de  $\Theta_q(B) = 0$  están fuera del círculo unitario, entonces el proceso es *invertible* y si las raíces de  $\Lambda_p(B) = 0$  están fuera del círculo unitario, entonces el proceso es *estacionario*.

Nótese que el proceso estacionario e invertible  $ARMA$  puede ser escrito como una representación pura autorregresiva, es decir,

$$\pi(B)Y_t = \varepsilon_t,$$

donde  $\pi(B) = \frac{\Lambda_p(B)}{\Theta_q(B)} = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)$ , o también como un proceso de promedios móviles,

$$Y_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

donde  $\psi(B) = \frac{\Lambda_p(B)}{\Theta_q(B)} = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)$ . Cuando  $p = 0$  entonces el proceso  $ARMA(p, q)$  se reduce a un proceso  $MA(q)$  y cuando  $q = 0$ , entonces el proceso se reduce a un  $AR(p)$ .

### ACF del proceso general $ARMA(p, q)$

Al multiplicar la variable  $Y_{t-k}$  y calcular esperanzas de ambos lados de la ecuación (??), se obtiene:

$$E(Y_{t-k}Y_t) = \lambda_1 E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + \dots + \lambda_p E(Y_{t-k}Y_{t-p}) + E(Y_{t-k}\varepsilon_t) - \theta_1 E(Y_{t-k}\varepsilon_{t-1}) - \dots - \theta_q E(Y_{t-k}\varepsilon_{t-q}),$$

dado que el proceso es estacionario y  $E(Y_{t-k}\varepsilon_{t-i}) = 0$  para  $k > i$  entonces la última ecuación se reduce a:

$$\gamma_k = \lambda_1 \gamma_{k-1} + \lambda_2 \gamma_{k-2} + \dots + \lambda_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq (q+1)$$

Por lo tanto, la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \lambda_1 \rho_{k-1} + \lambda_2 \rho_{k-2} + \dots + \lambda_p \rho_{k-p}, \quad k \geq (q+1)$$

Nótese que la  $ACF$  es similar a la del proceso  $AR(p)$ . Entonces, la  $ACF$  del proceso  $ARMA(p, q)$  decae después del rezago  $q$  como ocurre con el proceso  $AR(p)$ . De forma análoga, como el proceso  $MA$  es un caso particular del proceso  $ARMA$ , la función de autocorrelación parcial será una combinación de un seno amortiguado y una exponencial amortiguada (dependiendo de las raíces de  $\Lambda_p(B)$  y  $\Theta_q(B)$ ).

### ARMA(1,1)

El modelo  $ARMA(1,1)$  se representa como:

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (2.41)$$

donde se asume que  $|\lambda_1| < 1$  y  $|\theta_1| < 1$  para que el proceso sea estacionario e invertible.

**ACF del modelo ARMA(1,1)**

Si se multiplica la variable  $Y_{t-k}$  a ambos lados de la ecuación y se calcula la esperanza, se obtiene la función de autocovarianza:

$$\gamma_k = \lambda_1 \gamma_{k-1} + E(Y_{t-k} \varepsilon_t) - \theta_1 E(Y_{t-k} \varepsilon_{t-1}), \quad (2.42)$$

si  $k = 0$ , la covarianza es:

$$\gamma_0 = \lambda_1 \gamma_1 + E(Y_t \varepsilon_t) - \theta_1 E(Y_t \varepsilon_{t-1}). \quad (2.43)$$

Por otro lado, si se multiplica la variable  $\varepsilon_{t-1}$  a ambos lados de la ecuación (??), se calcula la esperanza y considerando que  $E(Y_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} E(Y_t \varepsilon_{t-1}) &= \lambda_1 E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}) + E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= (\lambda_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

si se sustituye el valor de  $E(\varepsilon_{t-1} Y_t)$  en la ecuación (??), se tiene que:

$$\gamma_0 = \lambda_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\lambda_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.44)$$

Si  $k = 1$ , la autocovarianza es:

$$\gamma_1 = \lambda_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2. \quad (2.45)$$

Del sistema de ecuaciones dado por (??) y (??) se obtienen los valores de  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  en términos de las constantes  $\lambda_1$  y  $\theta_1$ .

Para  $k \geq 2$ , se tiene que la covarianza cumple que:

$$\gamma_k = \lambda_1 \gamma_{k-1}, \quad (2.46)$$

dado que ya se conoce la función de autocovarianza para toda  $k \geq 0$ , la función de autocorrelación del proceso  $ARMA(1, 1)$  es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{(\lambda_1 - \theta_1)(1 - \lambda_1 \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\lambda_1 \theta_1)}, & k = 1 \\ \lambda_1 \rho_{k-1}, & k \geq 2 \end{cases}$$

Tabla 2.2: Características para identificar un modelo *AR* o *MA*

Comportamiento de la <i>ACF</i> y <i>PACF</i> para procesos estacionarios		
Modelo	<i>ACF</i>	<i>PACF</i>
<i>AR</i> ( <b>p</b> )	Cae en forma exponencial o exponencial alternada	Se corta después del rezago <b>p</b>
<i>MA</i> ( <b>q</b> )	Se corta después del rezago <b>q</b>	Cae en forma exponencial o exponencial alternada
<i>ARMA</i> ( <b>p</b> , <b>q</b> )	Cae en forma exponencial o exponencial alternada	Cae en forma exponencial o exponencial alternada

Los resultados que se obtuvieron previamente, se concentran en la Tabla ??,

### Proceso Autorregresivo Integrado de Media Móvil (ARIMA)

Los modelos de series de tiempo analizados hasta ahora se basan en el supuesto de *estacionariedad*, sin embargo, existen casos en los que no se cumple dicho supuesto; por esta razón, mediante la técnica de diferenciación, es posible convertir la serie en estacionaria, y una vez transformada, se puede aplicar el modelo *ARMA*( $p, q$ ). Al realizar dicha transformación, se dice que la serie original es *ARIMA*( $p, d, q$ ) donde  $p$  denota el número de términos autorregresivos,  $d$  el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerla estacionaria y  $q$  el número de términos de media móvil invertible, su representación algebraica es:

$$Y_t^d = \lambda_1 Y_{t-1}^d + \dots + \lambda_p Y_{t-p}^d + \varepsilon_t^d - \theta_1 \varepsilon_{t-1}^d - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}^d. \quad (2.47)$$

El modelo *ARIMA*( $p, d, q$ ) en términos del operador de retraso es:

$$\Lambda_p(B)Y_t^d = \Theta_q(B)\varepsilon_t^d.$$

### Ejemplos para identificar un modelo *AR* o *MA*

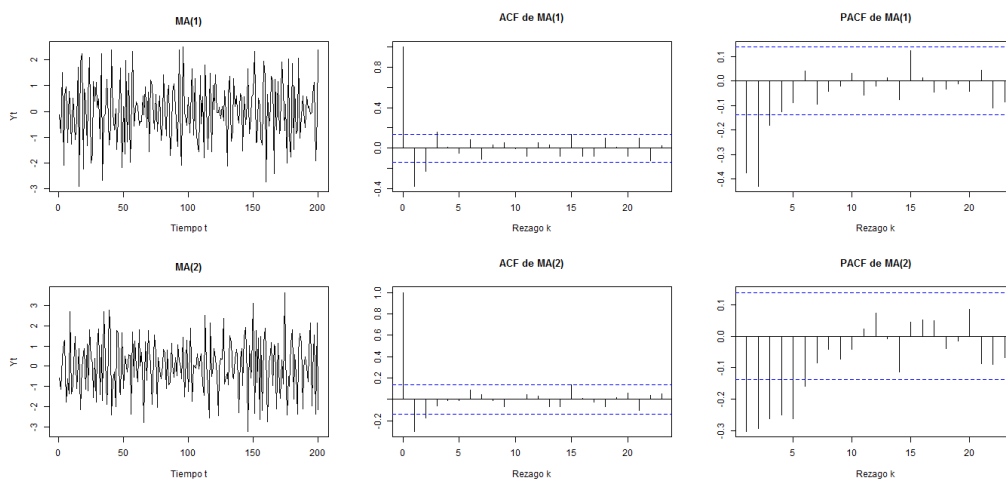
En los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se ilustran los modelos *MA*(1), *MA*(2), *AR*(1) y *AR*(2) respectivamente, para los cuales se consideran parámetros poblacionales, y a partir de estos, se obtienen las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial teóricas; pero en la práctica sólo se tiene una muestra de tamaño  $n$  y se desconocen los parámetros de la serie que representa la muestra. Por esta razón, se realizan cuatro simulaciones donde cada una genera un conjunto de 200 datos provenientes de los modelos

$$MA(1) = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

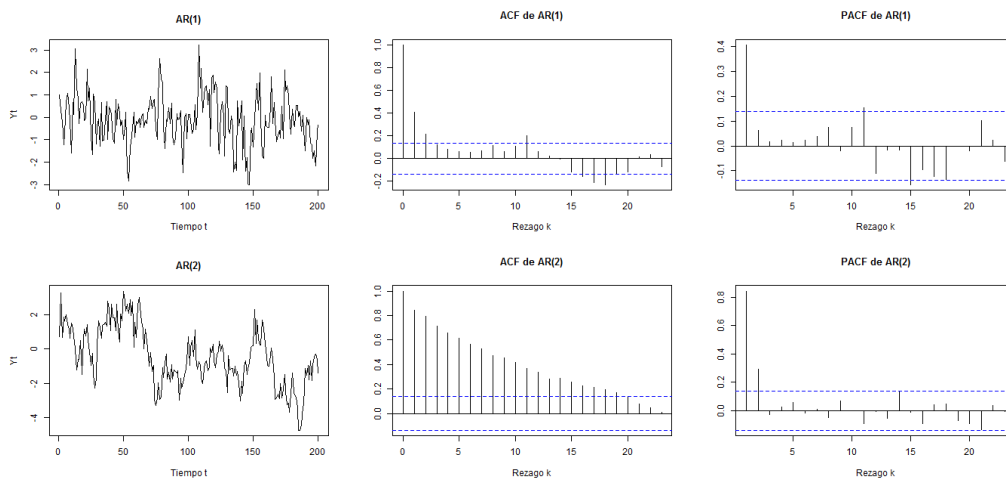
$$MA(2) = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$$

$$AR(1) = 0.4Y_t + \varepsilon_t$$

$$AR(2) = 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$$



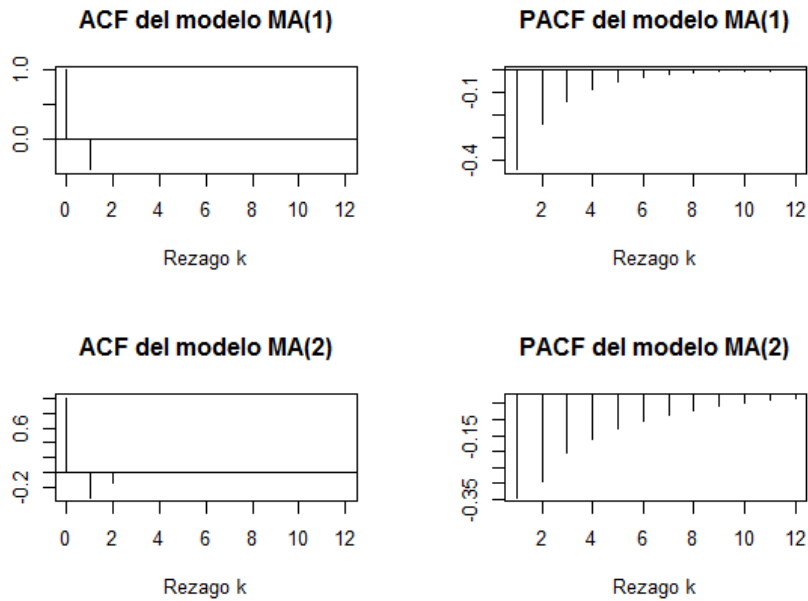
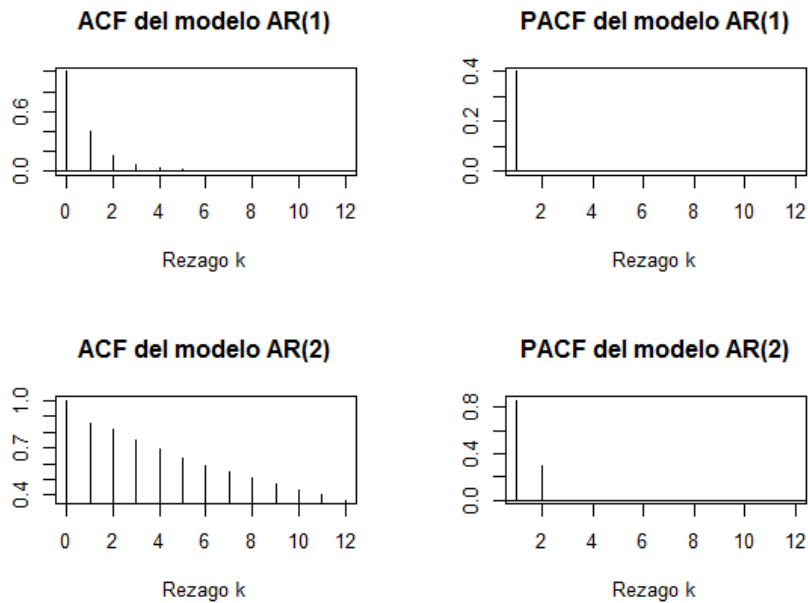
(a) Simulación de los procesos  $MA(1)$  y  $MA(2)$ .



(b) Simulación de los procesos  $AR(1)$  y  $AR(2)$

Figura 2.5: Simulación de los procesos  $MA(1)$ ,  $MA(2)$ ,  $AR(1)$  y  $AR(2)$ .

Las figuras 2.5a y 2.5b muestran el comportamiento de la ACF y PACF de cada simulación, y en las figuras 2.6a y 2.6b se concentran las gráficas de la ACF y PACF de los ejemplos teóricos. Como era de esperarse, el comportamiento de los datos simulados es estadísticamente igual al modelo poblacional que los genera.

(a) Modelos teóricos  $MA(1)$  y  $MA(2)$ .(b) Modelos teóricos  $AR(1)$  y  $AR(2)$ Figura 2.6: ACF y PACF de los modelos teóricos  $MA(1)$ ,  $MA(2)$ ,  $AR(1)$  y  $AR(2)$ .

Nótese que los parámetros de todos los modelos ejemplificados son positivos, pero, naturalmente hay casos en que todos son negativos o alguna combinación de ellos, debido a eso, en el Apéndice A se muestran los gráficos de la ACF y PACF que involucran dichos casos.

Del ejemplo anterior, se puede decir que, cuando se tenga una muestra de tamaño  $n$ , se puede indagar sobre el modelo al que pertenecen los datos mediante los gráficos de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

## Modelos ARIMA estacionales multiplicativos

Anteriormente se introdujo el concepto general de estacionalidad; ahora se define para un proceso ARMA, el cual se representa como  $ARMA(P, Q)_s$ , y tiene la forma

$$\Lambda_P(B^s)Y_t = \Theta_Q(B^s)\varepsilon_t,$$

donde

$$\Lambda_P(B) = (1 - \lambda_1 B^s - \lambda_2 B^{2s} - \dots - \lambda_P B^{Ps}), \quad (2.48)$$

es el operador autorregresivo estacional de orden  $P$ , y

$$\Theta_Q(B) = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}), \quad (2.49)$$

el operador de promedio móvil estacional de orden  $Q$ , ambos operadores con periodo estacional  $s$ .

Como en el caso ARMA no estacional, el modelo  $ARMA(P, Q)_s$  es estacionario si las raíces de  $\Lambda_P(B)$  están fuera del círculo unitario y es invertible si las raíces de  $\Theta_Q(B)$  están fuera del círculo unitario.

En la práctica, son necesarios los modelos que incorporen la no estacionalidad y estacionalidad, por lo cual se define el modelo multiplicativo  $ARMA(p, q)(P, Q)_s$  con periodo  $s$  de la siguiente forma:

$$\Lambda_P(B^s)\Lambda_p(B)Y_t = \Theta_Q(B^s)\Theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (2.50)$$

donde  $\Lambda_P(B)$  y  $\Theta_Q(B)$  representan la parte estacional y  $\Lambda_p(B)$  y  $\Theta_q(B)$  la parte no estacional.

Debido a que un modelo estacional puede ser no estacionario, se define la diferencia estacional de orden  $D$  como

$$\nabla_s^D x_t = (1 - B^s)^D x_t, \quad (2.51)$$

donde  $D = 1, 2, \dots$ , toma valores enteros positivos; generalmente  $D = 1$  es suficiente para que la serie estacional sea estacionaria.

Ahora, al considerar esta transformación, se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.8.** *El modelo multiplicativo estacional autorregresivo integrado de promedio móvil o modelo SARIMA está dado por*

$$\Lambda_P(B^s)\Lambda_p(B)\nabla_s^D \nabla^d Y_t = \Theta_Q(B^s)\Theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (2.52)$$

donde  $(\varepsilon_t)$  es un proceso de ruido blanco.

El modelo general está denotado como  $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ . La componente ordinaria autorregresiva y de promedio móvil está representada por  $\Lambda_p(B)$  y  $\Theta_q(B)$  respectivamente, y la componente estacional autorregresiva y de promedio móvil está representada por  $\Lambda_P(B^s)$  y  $\Theta_Q(B^s)$  respectivamente,  $\nabla^d$  representa la diferencia ordinaria de orden  $d$  y  $\nabla_s^D$  la diferencia estacional de orden  $D$ .

## 2.3. Identificación, estimación, diagnóstico y pronóstico

La construcción de un modelo de series de tiempo debe seguir una metodología que consta de cuatro etapas principales: Identificación, Estimación, Diagnóstico y Pronóstico. Naturalmente, cada etapa pone a juicio ciertas características que aquí se han desarrollado de forma teórica, pero que en la práctica deberán cumplirse estadísticamente. El objetivo es identificar el mejor modelo para describir una serie de tiempo.

### Identificación

En primera instancia, el comportamiento gráfico del conjunto de datos ayuda a decidir si la serie contiene tendencia, estacionalidad, varianza no constante, etc.

Mediante los gráficos de las funciones  $ACF$  y  $PACF$  de la serie original se puede indagar si la serie original es estacionaria, es decir, si la  $FAC$  decrece lentamente y la  $PACF$  se trunca después del primer rezago, entonces la serie es no estacionaria. Claramente esta es una técnica visual que no siempre es eficiente en cuanto a exactitud, por ello, a veces es necesaria la prueba de raíz unitaria, en particular se presenta el Test de Dickey-Fuller, pues se hace uso de esta prueba mediante el software R.

### Test Dickey-Fuller

Considérese el siguiente modelo

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.53)$$

donde  $\varepsilon$  representa un término de error estocástico que presenta los supuestos clásicos, esto quiere decir que tiene una media cero, varianza constante y no esta correlacionada (es un *ruido blanco*).

Como el coeficiente de  $Y_{t-1}$  es 1, surge la raíz unitaria que presenta un escenario de no estacionariedad, también conocido como *caminata aleatoria* o *random walks*.

Ahora, si se establece un parámetro para el coeficiente de  $Y_{t-1}$  de (??), entonces la ecuación estaría representada como:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.54)$$

si  $\rho = 1$  entonces la variable estocástica  $Y_t$  presenta una raíz unitaria, por lo que será necesario diferenciar una vez, es decir restar la variable  $Y_{t-1}$  a ambos lados de la ecuación (??):

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.55)$$

Al reescribir (??) en términos de operador diferencia, se tiene que

$$\nabla Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.56)$$

$$\nabla Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.57)$$

y el test de raíz unitaria es equivalente a probar que  $\gamma = 0$ .

Después se estima la ecuación (??), se divide  $\rho$  entre el error estándar para calcular el estadístico  $\tau$  de Dickey-Fuller, luego se consulta en la tabla de Dickey-Fuller la probabilidad de rechazar la hipótesis nula  $\rho = 1$ .

Las pruebas de Dickey-Fuller pueden ser estimadas de tres formas distintas, bajo tres hipótesis nulas distintas.

- Si  $Y_t$  es una *caminata aleatoria*.  
 $\nabla Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (este modelo no contiene ni tendencia ni intercepto).
- Si  $Y_t$  es una *caminata aleatoria* con intercepto.  
 $\nabla Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (en este modelo se incorpora el intercepto).
- Si  $Y_t$  es una *caminata aleatoria* con intercepto y con tendencia.  
 $\nabla Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$  (este es un modelo más completo).

Ver Ref. [9] Cap. 12.

Cuando se determina que la serie original es no estacionaria, entonces debe emplearse la técnica de diferenciación, es decir, transformar la serie en estacionaria, y así determinar el valor de  $d$  del modelo  $ARIMA(p, d, q)$ ; es importante aclarar que el número de diferencias es directamente proporcional a la deficiencia de la estimación, generalmente la primera o segunda diferencia son suficientes para transformar la serie.

Por otro lado, mediante el cálculo y graficación de la  $ACF$  y  $PACF$  de la serie transformada (estacionaria), se puede identificar la subclase apropiada de los modelos  $ARIMA(p, d, q)$ , es decir los valores  $p$  y  $q$ .

## Estimación de los parámetros para el modelo ARMA(p,q)

Una vez identificado el modelo tentativo  $ARMA(p, q)$ , y dado que se tiene una muestra de  $N$  observaciones  $y_1, y_2, \dots, y_N$ ; lo siguiente es estimar los parámetros  $(\lambda, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$  del modelo lineal,

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \dots + \lambda_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

## Estimación de parámetros del modelo AR(p)

Para estimar  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ , considérese la función de autocorrelación del proceso  $AR(p)$ ,

$$\rho_k = \lambda_1 \rho_{k-1} + \lambda_2 \rho_{k-2} + \dots + \lambda_p \rho_{k-p}, \quad (2.58)$$

Nótese que (??) forma las Ecuaciones de *Yule Walker* (ver Ref. [4] pág. 55), al reemplazar la autocorrelación teórica  $(\rho_k)$  por la estimada  $(\hat{\rho}_k)$  su representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}$$

Así la solución al sistema representada en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p$  del proceso  $AR(p)$ .

En particular, para el modelo  $AR(1)$  se tienen que:

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\rho}_1,$$

y para el modelo  $AR(2)$ :

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\rho}_1(1 - \hat{\rho}_2)}{(1 - \hat{\rho}_1^2)} \quad y \quad \hat{\lambda}_1 = (\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2)(1 - \hat{\rho}_1^2)$$

### Estimación de parámetros del modelo $MA(q)$

Para estimar los parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  del modelo de promedios móviles, se hace uso de métodos numéricos. Obsérvese el caso cuando  $q = 1$ , dado que la función de autocorrelación del modelo  $MA(1)$  es:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

se puede obtener la ecuación cuadrática,  $\rho_1\theta_1^2 + \theta_1 + \rho_1 = 0$ , donde los valores de  $\theta_1$  que satisfacen dicha ecuación son:

$$\theta_1^+ = -\frac{1}{2\rho_1} + \sqrt{\frac{1}{4\rho_1^2} - 1} \quad y \quad \theta_1^- = -\frac{1}{2\rho_1} - \sqrt{\frac{1}{4\rho_1^2} - 1}.$$

De esa forma se encuentra el valor de  $\theta_1$  en términos de  $\rho$ , ahora, si se sustituye  $\rho_1$  por su estimador,  $\hat{\rho}_1$ , entonces se genera el valor de  $\hat{\theta}_1$ . Es importante seleccionar el valor de  $\hat{\theta}_1$  de acuerdo a la condición del modelo poblacional,  $-1 < \theta_1 < 1$ .

En general, considérese el modelo de orden  $q$ ,

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

con función de autocorrelación,

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}, \quad (2.59)$$

nótese que de (??) se pueden obtener  $q$  ecuaciones con  $q$  variables ( $\theta_k$ ) de las cuales, en principio<sup>8</sup>, es posible encontrar los valores de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ .

### Estimadores de Máxima Verosimilitud

Considérese un modelo  $ARMA(p, q)$ ,

$$Y_t = \lambda_1 Y_{t-1} + \cdots + \lambda_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.60)$$

Como  $\varepsilon_t$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , si  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , entonces la función de densidad conjunta está dada por:

$$P(\varepsilon | \lambda, \theta, \mu, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right]. \quad (2.61)$$

Ahora al despejar  $\varepsilon_t$  de (??) se tiene que,

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + Y_t - \lambda_1 Y_{t-1} - \cdots - \lambda_p Y_{t-p},$$

Luego, se puede escribir la función de *Máxima Verosimilitud* en función de los parámetros  $(\lambda, \theta, \mu, \sigma_\varepsilon^2)$ , es decir,  $L(\lambda, \theta, \mu, \sigma_\varepsilon^2)$ , al aplicarle logaritmo se tiene que,

$$\ln [L(\lambda, \theta, \mu, \sigma_\varepsilon^2)] = -\frac{n}{2} \ln (2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \quad (2.62)$$

<sup>8</sup>Mediante el uso de métodos numéricos, tales como el Método de Newton-Raphson.

Para evaluar la función anterior se necesitan las condiciones iniciales conocidas  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ,  $Y^* = (Y_{1-p}, \dots, Y_{-1}, Y_0)$  y  $\varepsilon^* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$ , así (??) se puede reescribir como:

$$\ln [L(\lambda, \theta, \mu, \sigma_\varepsilon^2)] = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} S(\lambda, \theta, \mu) \quad (2.63)$$

donde el término  $S(\lambda, \theta, \mu)$  es la suma de mínimos cuadrados condicionales,

$$S(\lambda, \theta, \mu) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\lambda, \theta, \mu | Y, Y^*, \varepsilon^*) \quad (2.64)$$

Las cantidades que maximizan la función condicional de máxima verosimilitud en  $(\lambda, \theta, \mu)$  serán los estimadores de máxima verosimilitud condicional. Notar que basta minimizar (??) para encontrar estos estimadores.

Una vez obtenidos los estimadores de los parámetros  $\lambda$ ,  $\theta$  y  $\mu$ , el estimador de  $\sigma_\varepsilon^2$  se calcula usando la siguiente relación:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{\mu})}{d.f.}, \quad (2.65)$$

donde  $d.f.$  es el número de grados de libertad que es igual a la cantidad de términos usados en  $S$  menos el número de parámetros estimados.

## Diagnóstico del modelo

Esta etapa de la metodología Box-Jenkins consiste en verificar si el modelo propuesto es adecuado para describir los datos, es decir, que tan alejado está el valor real ( $y_t$ ) proveniente de la muestra, del valor estimado ( $Y_t$ ) obtenido del modelo propuesto, a esta diferencia se le conoce como residual en el tiempo  $t$ . En base a esta idea, debe examinarse cuidadosamente los residuales resultantes hasta que se consiga, en la medida de lo posible, eliminar toda duda acerca de que éstos residuales no obedecen un proceso de *ruido blanco*. Esta verificación es crucial, pues sobre tal supuesto se habrá diseñado la estrategia de estimación y predicción. Cualquier evidencia en contra de la hipótesis básica de *ruido blanco* para los residuales, constituye un indicio de mala elección del modelo.

### Análisis residual

El análisis residual es un método para probar el supuesto básico de que  $(\varepsilon_t)$  es un *ruido blanco* con media cero y varianza constante (donde las  $\varepsilon_t$ 's son no correlacionadas), dado que en la

práctica sólo se tiene una muestra de la población, dicho supuesto se probará usando  $\hat{\varepsilon}_t$ .

Para realizar el análisis residual, se asume que ya se tiene un modelo ajustado ARMA(p,q),

$$Y_t = \hat{\lambda}_1 Y_{t-1} + \dots + \hat{\lambda}_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

del cual se obtienen los residuales,

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\lambda}_1 Y_{t-1} - \dots - \hat{\lambda}_p Y_{t-p} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

En principio se puede calcular  $\frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_\varepsilon}$  y mediante un histograma o un test de normalidad, verificar si  $\frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_\varepsilon} \sim N(0, 1)$

En particular se hace uso de la función *tsdiag(object, gof.lag, ...)* del software R, la cual consiste en analizar los residuales del modelo ajustado; esta instrucción muestra el comportamiento gráfico, la función de autocorrelación y los p-valores de la prueba Ljun-Box de la versión de Pormanteau (ver Ref. [8] Págs. 151-153).

### Estadístico de Ljung-Box

Se utiliza para probar si una serie de observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , en un periodo de tiempo específico son aleatorias e independientes. Si las observaciones no son independientes, una observación puede estar correlacionada con otra observación k unidades de tiempo después, esta relación es denominada autocorrelación, la cual puede afectar la exactitud de un modelo predictivo basado en el tiempo, tal como la gráfica de series de tiempo, y conducir a una interpretación errónea de los datos.

Antes de elegir el modelo de series de tiempo, se debe evaluar la correlación de los residuales entre cada una de las observaciones. El estadístico Ljung-Box prueba la hipótesis nula de que las autocorrelaciones de hasta un desfase k son iguales a cero (es decir, los valores de los datos son aleatorios e independientes hasta un cierto número de desfases). Si el estadístico de Ljung-Box es mayor que un valor crítico especificado, las autocorrelaciones para uno o más desfases pueden ser significativamente diferentes de cero, lo que sugiere que los valores no son aleatorios ni independientes en el tiempo.

De esta forma, se utiliza el estadístico de Ljung-Box para evaluar los supuestos después de ajustar un modelo de series de tiempo, para asegurar que los residuos sean independientes.

Existen diferentes métodos para determinar la calidad un modelo estadístico propuesto, uno de los más utilizados es el criterio de selección de Akaike.

### Criterio de Información de Akaike (AIC)

Este criterio, está basado en la teoría de la información y las propiedades del método de máxima verosimilitud. El concepto de entropía es la esencia de este método, pues, básicamente consiste en recompensar la bondad de ajuste y penalizar la cantidad de parámetros utilizados en el modelo. Dicho criterio se define como:

$$AIC(M) = 2M - 2 \log(L),$$

donde  $L$  corresponde a la verosimilitud y  $M$  es la cantidad de parámetros del modelo. La aplicación de este criterio a un modelo *ARMA* es inmediato. En ((??)) se tiene que la función de verosimilitud para este modelo es

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} S(\lambda, \theta, \mu),$$

si se maximiza respecto a  $\lambda, \theta, \mu$  y  $\sigma_\varepsilon^2$ , se obtiene

$$\ln(\hat{L}) = -\frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) - \frac{n}{2} [1 + \ln(2\pi)]^2$$

Finalmente,

$$AIC = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2M$$

el criterio consiste en seleccionar el modelo de menor valor de AIC (ver Ref. [8], Pág. 52).

## Pronóstico

Estudiar el comportamiento de una serie de tiempo tiene como objetivo principal generar pronóstico sobre observaciones futuras y determinar qué tan preciso es dicho pronóstico, es decir, pronosticar los valores de  $Y_{t+l}$ , a partir de las  $t$  observaciones muestrales,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ , que conforman a la serie temporal,  $Y_t$ , donde  $t$  se conoce como el *origen de la predicción* y  $l$  como el *tiempo del pronóstico*. La estimación de  $Y_{t+l}$  se denota como  $\hat{Y}_t(l)$ .

El criterio estándar para obtener el mejor pronóstico es el error cuadrado medio, para el cual se espera que los valores del error cuadrado medio,

$$E \left[ \left( Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l) \right)^2 \right] = E(e_t(l)^2), \quad (2.66)$$

sean minimizados.

## Pronostico para modelos estacionarios ARMA

El valor de  $\hat{Y}_t(l)$  que minimiza la diferencia de ((??)) es la esperanza condicional de  $Y_{t+l}$  dado que ya se tienen los valores de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ , es decir,

$$\hat{Y}_t(l) = E(Y_{t+l} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t). \quad (2.67)$$

Considérese el modelo general  $ARMA(p, q)$  al tiempo  $t + l$ , es decir,  $l$  periodos en el futuro,

$$\begin{aligned} Y_{t+l} &= \lambda_1 Y_{t+l-1} + \cdots + \lambda_p Y_{t+l-p} + \varepsilon_{t+l} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{t+l-i} + \varepsilon_{t+l} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t+l-i}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

más aún, considérese su representación infinita MA,

$$\begin{aligned} Y_{t+l} &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+l-i} \\ &= \sum_{i=1}^{l-1} \psi_i \varepsilon_{t+l-i} + \sum_{i=l}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+l-i}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde la componente  $\sum_{i=1}^{l-1} \psi_i \varepsilon_{t+l-i}$  representa los errores en el futuro y  $\sum_{i=l}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+l-i}$  involucra los errores del presente y pasado.

Luego, como se asume que  $\varepsilon_{t+l-i}$  tiene media cero y es independiente de  $Y_1, \dots, Y_t$ , entonces se tienen la siguiente propiedad,

$$E(\varepsilon_{t+l-i} | Y_1, \dots, Y_t) = \begin{cases} 0, & i < l \\ \varepsilon_{t+d}, & i \geq l \end{cases} \quad (2.70)$$

Así, se puede mostrar que el mejor pronóstico es,

$$\hat{Y}_t(l) = E(Y_{t+l} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t) = \sum_{i=l}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+l-i} \quad (2.71)$$

Subsecuentemente, dado que ya se conoce el valor de  $Y_{t+l}$  y  $\hat{Y}_t(l)$ , el error del pronóstico es:

$$e_t(l) = Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l) = \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i \varepsilon_{t+l-i}.$$

Como el error del pronóstico es una combinación de errores aleatorios, se tiene que,

$$E[e_t(l)] = 0$$

$$Var[e_t(l)] = Var \left[ \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i \varepsilon_{t+l-i} \right] = \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2 Var(\varepsilon_{t+l-i}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2(l) = \sigma^2(l), \quad l = 1, 2, \dots$$

Obsérvese que la varianza del error del pronóstico aumenta cuanto más grande es el valor de  $l$ . Evidentemente una mayor varianza implica menor precisión del pronóstico. Por otra parte, si se asume que los errores  $\varepsilon_{t+l-i}$  son distribuidos normalmente,  $N(0, \sigma^2)$ , entonces los errores del pronóstico,  $e_t(l)$ , también son distribuidos normalmente con  $N(0, \sigma^2(l))$ . De esta forma se puede obtener el  $100(1 - \alpha)$  por ciento del intervalo de predicción para  $Y_{t+l}$  como,

$$P(\hat{Y}_t(l) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma(l) < Y_{t+l} < \hat{Y}_t(l) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma(l)) = 1 - \alpha$$

donde  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  es tal que  $P(Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$  con  $Z \sim N(0, 1)$  (Ver Ref. [15], Cap. 5). Por tanto el intervalo de confianza de nivel  $100(1 - \alpha)$  para la predicción  $Y_{t+l}$  es

$$[\hat{Y}_t(l) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma(l), \hat{Y}_t(l) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma(l)].$$

# Capítulo 3

## Caso de estudio

Puebla es una de las 32 entidades federativas de México. Se localiza en el centro oriente del territorio mexicano, en la cual viven más de cinco millones de personas, que convierten a este estado en el quinto más poblado del país. La capital del estado es Puebla de Zaragoza, la cuarta ciudad más grande e importante de México por el número de habitantes (sólo después del Distrito Federal, Guadalajara y Monterrey).

Según el CONAPRA<sup>1</sup>, la mayor parte de los vehículos que circulan en el país se concentran en las zonas urbanas. Debido a la fuerte incidencia de accidentes de tránsito en los últimos años, asegurar un vehículo (contratar un seguro de auto) es una actividad cada vez más frecuente, por ello, la industria de seguros de vehículos automotores (automóviles) debe estar en condiciones óptimas para cubrir dicho riesgo, ya que es la causa principal por la cual se efectúa un seguro de auto.

La ocurrencia de un accidente vial es un evento fortuito, por esta razón, uno de los objetivos básicos de este trabajo es hacer pronóstico respecto al número de accidentes, mediante la herramienta estadística de series de tiempo y en particular de la metodología Box-Jenkins.

Las series a modelar corresponden al número de accidentes de tránsito en Puebla registrados de forma mensual en el INEGI<sup>2</sup> durante el periodo de 1997 a 2014. Dado que el precio de un seguro de automóvil se determina de acuerdo a diferentes criterios, el análisis sobre el número de accidentes de tránsito se hará de forma general y de acuerdo a características como fatalidad del accidente (fatales, no fatales o sólo daños) y tipo de vehículo (Automóvil, Camioneta de pasajeros o Microbús).

Las series que se modelarán en las diferentes clasificaciones, corresponden a los registros de los últimos años (2003-2014), pero para evaluar el ajuste del pronóstico que se realizará, se omiten los últimos 3 valores, es decir los meses de octubre, noviembre y diciembre del 2014.

En principio se modelará, el número de accidentes de tránsito en general y posteriormente para cada característica mencionada anteriormente.

Para realizar el análisis de los datos<sup>3</sup>, se hace uso del software  $R$ <sup>4</sup>, ya que las instrucciones que se utilizan, están sustentadas en la teoría aquí presentada.

---

<sup>1</sup>Consejo Nacional para la Prevención de Accidentes.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Estadística y Geografía.

<sup>3</sup>Los datos están concentrados en el Apéndice B.

<sup>4</sup>El código que se utiliza en dicho programa está en el Apéndice C.

### 3.1. Total de accidentes

En ésta sección se realiza el análisis del total de accidentes viales. En la Figura ?? se muestra el comportamiento del número de accidentes para cada mes,

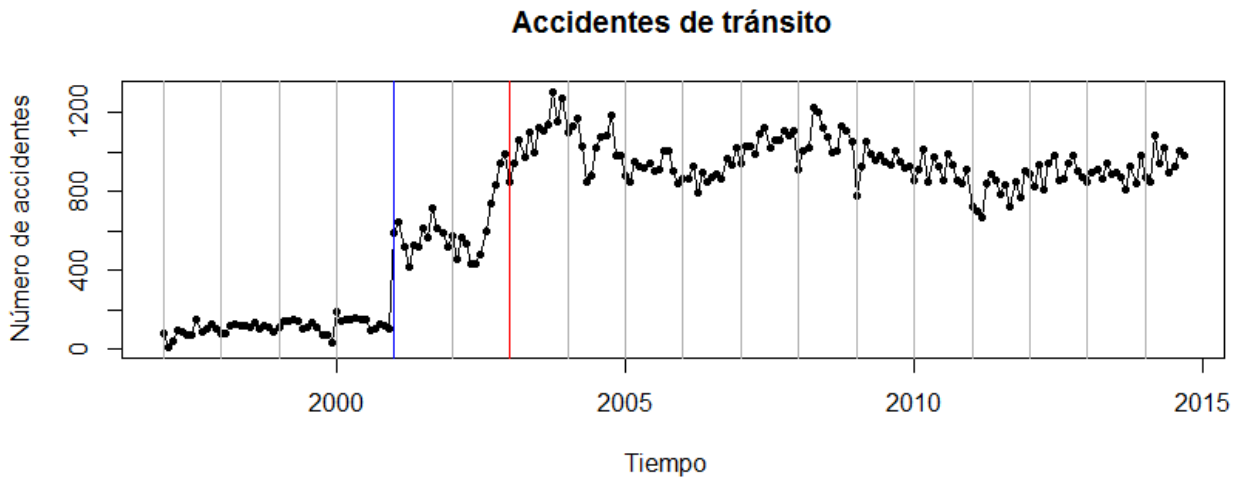


Figura 3.1: Accidentes de tránsito *Totales*.

en la cual se observa que los datos están agrupados en tres niveles (delimitados por las líneas azul y roja) y muestran una tendencia creciente en forma escalonada, es decir, la media de los datos no es constante, lo cual indica que la serie es no estacionaria.

Afortunadamente se cuentan con registros desde 1997 a 2014, sin embargo, obsérvese en la Figura ?? que a partir del año 2003 (línea roja), los datos tienden a estabilizarse. Al tener en cuenta que el número de vehículos ha aumentado y que en los últimos 11 años los datos se han *estabilizado*, es conveniente considerar la serie con intervalo de tiempo del 2003 al 2014 para realizar el análisis, siendo ahora este conjunto de datos la *serie original*. El comportamiento de los datos se puede observar en la Figura ?? y las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial en la Figura ??, en donde  $Y_t$  representa los datos originales.

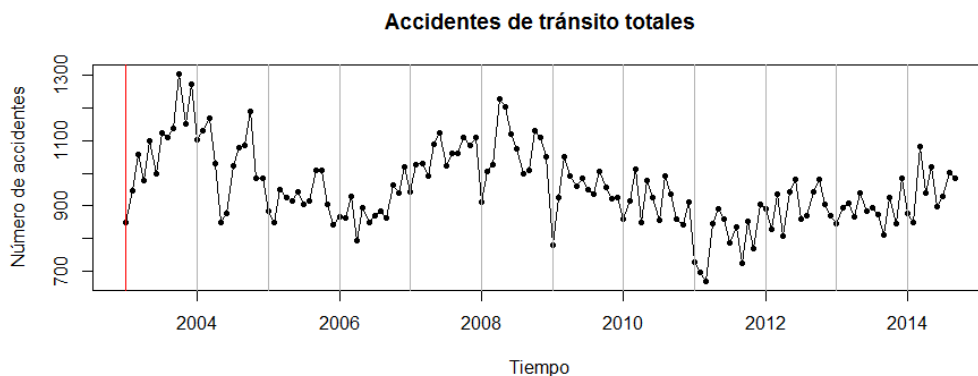


Figura 3.2: Accidentes Totales en Puebla (periodo 2003-2014).

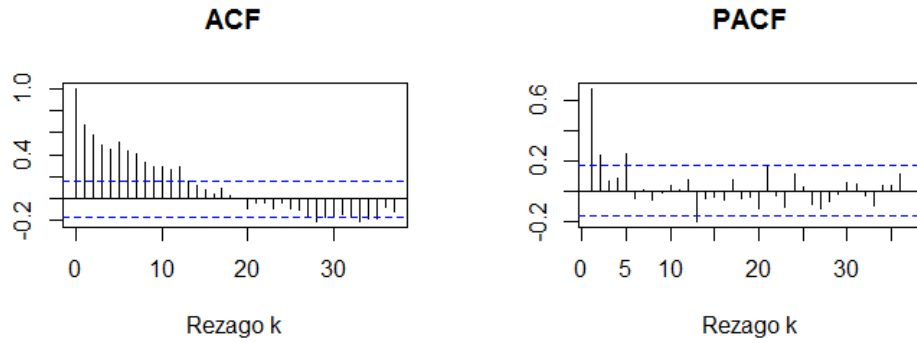


Figura 3.3: *ACF* y *PACF* de la serie original.

En la Figura ?? se observa que la *ACF* decae lentamente, es decir, la serie original es no estacionaria, además el test de Dickey-Fuller realizado en el programa *R* mediante la instrucción *adf.test()* proporciona un *p* – *valor* de 0.38, es decir, no se rechaza la hipótesis nula de no estacionariedad. Para de aplicar la metodología Box-Jenkins, se requiere transformar la serie no estacionaria en una estacionaria, para lo cual se calculan sus primeras diferencias, obteniendo un *p* – *valor* de 0.01, es decir, la serie ya es estacionaria. Ahora bien, las funciones de autocorrelación generadas a partir de las primeras diferencias, se pueden observar en la Figura ??,

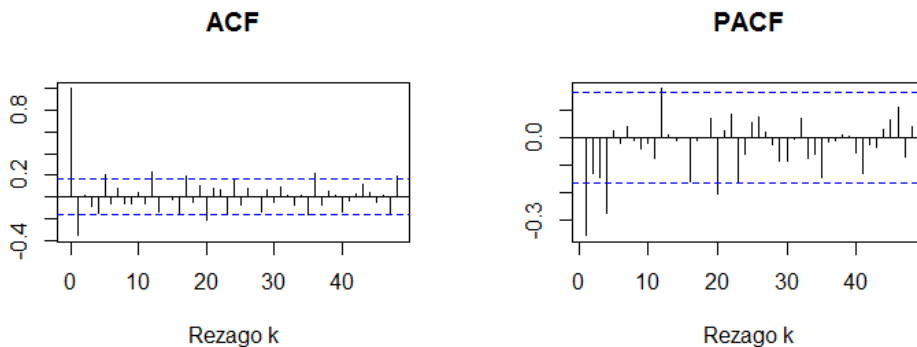


Figura 3.4: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias

notándose que la *ACF* decrece lentamente en los rezagos 12, 24, 36 y 48, lo que indica la necesidad de realizar una diferenciación estacional de los datos (de periodo 12). Para apoyar la propuesta de que existe estacionalidad, observese el comportamiento de cada mes durante los años 2003-2014 en la Figura ??.

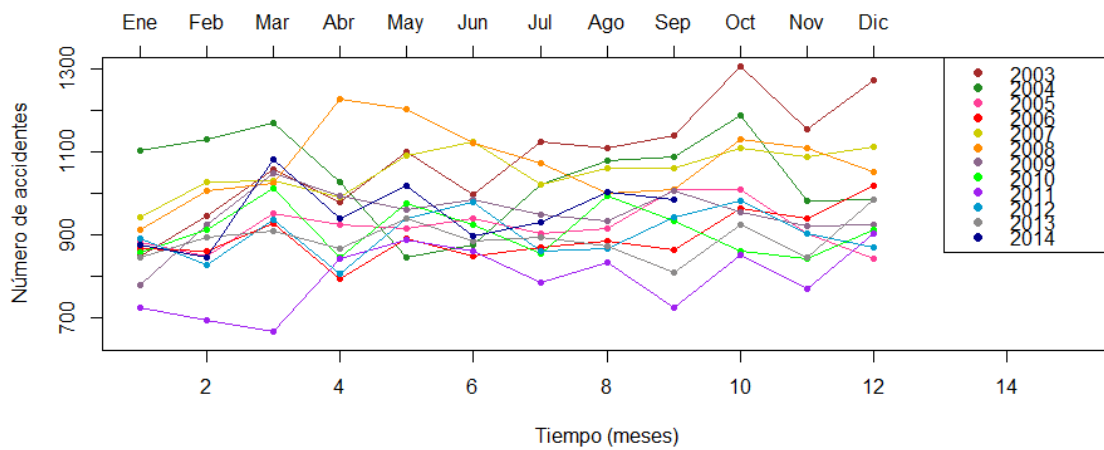


Figura 3.5: Datos estacionales de periodo 12

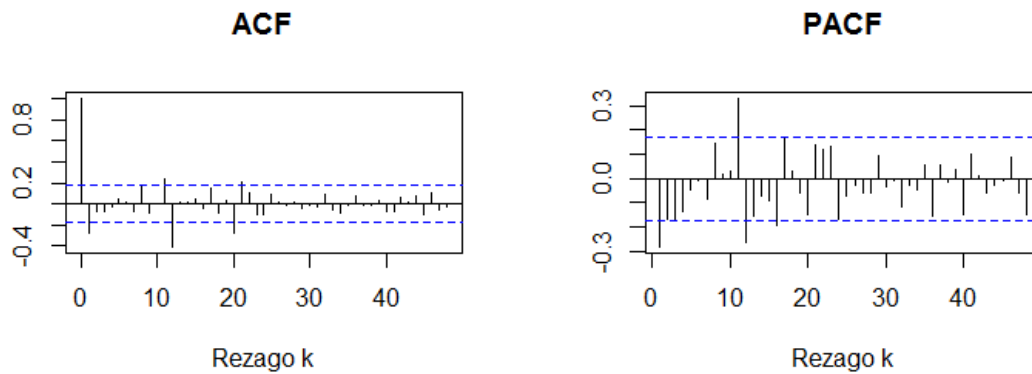


Figura 3.6: ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12

En la Figura ?? se puede observar que de acuerdo a las gráficas de las funciones de autocorrelación de las primeras diferencias regulares<sup>5</sup> y primeras diferencias estacionales, la serie es estacionaria, pues la ACF se extingue con rapidez tanto en el nivel no estacional como en el estacional.

Ahora, es posible proponer tentativamente algunos modelos a partir de la ACF y PACF; en el nivel estacional se observa que hay espigas en la ACF en los rezagos 12, 20 y 21, debido que las espigas en 20 y 21 no corresponden a algún nivel (estacional o no estacional), estas se omiten, es decir, se amplian el nivel de error y de esta forma se consideran estadísticamente igual a 0. Por otra parte, se observa que la PACF tiene espigas en los rezagos 12 y 17, como la espiga del rezago 17 es pequeña, se considera estadísticamente igual a cero, claro, se asume que el nivel de error aumenta un poco. Una vez considerado las espigas tanto de la ACF como de la PACF, se proponen los modelos MA(1), AR(1) y ARMA(1,1).

Ahora bien, nótese que se detectan espigas tanto en el nivel no estacional como en el estacional, por lo que se sugieren modelos para ambos niveles, para los rezagos en el nivel no estacional ( $k=1, \dots, 11$ ) las funciones de autocorrelación (ACF y PACF) se cortan justamente

<sup>5</sup>Se hace referencia a las diferencias en el nivel no estacional

después del primer rezago, por lo que se propone el modelo  $ARIMA(1,1,1)$  para este nivel. Al combinar los modelos de la parte estacional y no estacional, se identifican tentativamente los modelos  $ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$ ,  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{12}$  y  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$ .

En la Tabla 3.1 se pueden comparar las características de los tres modelos propuestos (los cuales están ordenados de acuerdo al criterio de Akaike); en base a dichas características, se elige al modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  como el de mejor ajuste, pues, aunque el criterio de Akaike selecciona al modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$  como el mejor, la varianza de los residuales del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  es significativamente menor que la del resto de los modelos.

Los gráficos de los pronósticos de los modelos  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  y  $ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$ , se puede observar en las Figuras ?? y ??.

Tabla 3.1: Se identifica al modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  como el de mejor ajuste para accidentes *Totales* (de acuerdo al valor de los residuales)

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
$ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$	$Y_t = 0.356Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.737\varepsilon_{t-1} - 0.925\varepsilon_{t-12}$	5080.92	1496.66
<b><math>ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}</math></b>	<b><math>Y_t = 0.353Y_{t-1} + 0.06Y_{t-12} + \varepsilon_t - 0.736\varepsilon_{t-1} - 0.99\varepsilon_{t-12}</math></b>	<b>4795.29</b>	<b>1498.32</b>
$ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{12}$	$Y_t = 0.293Y_t + \varepsilon_t - 0.706\varepsilon_{t-1} - 0.457Y_{t-12}$	7223.10	1523.26

Considérese el modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  en términos de polinomios de retraso y operadores diferencia para describir el proceso utilizado para la selección del modelo.

$$\Lambda_1(B^{12})\Lambda_1(B)\nabla_{12}^1\nabla^1Y_t = \Theta_1(B^{12})\Theta_1(B)\varepsilon_t.$$

En la Figura ?? se muestran algunas características de los residuales del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$ , en la cual se observa que la correlación es estadísticamente igual a cero en cualquier rezago, además de que los  $p$ -valores aceptan la hipótesis de que los residuales no están correlacionados. Para verificar el supuesto de independencia, basta probar que los residuales tienen distribución normal, para lo cual, se utiliza el test de *Shapiro* ( $shapiro.test(r1)$ \$p.value\$) en R; con un  $p$ -valor = 0.1207 se acepta la hipótesis nula, es decir, los residuales provienen de una población normalmente distribuida, y de esta forma se concluye que los residuales son un *ruido blanco*

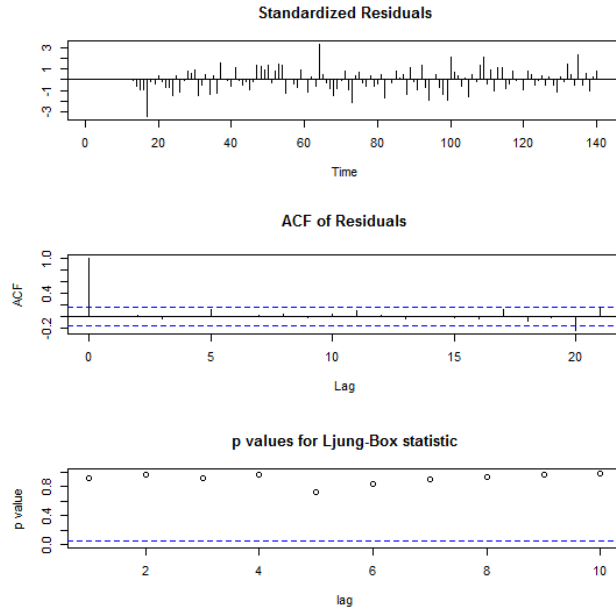


Figura 3.7: Residuales del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$

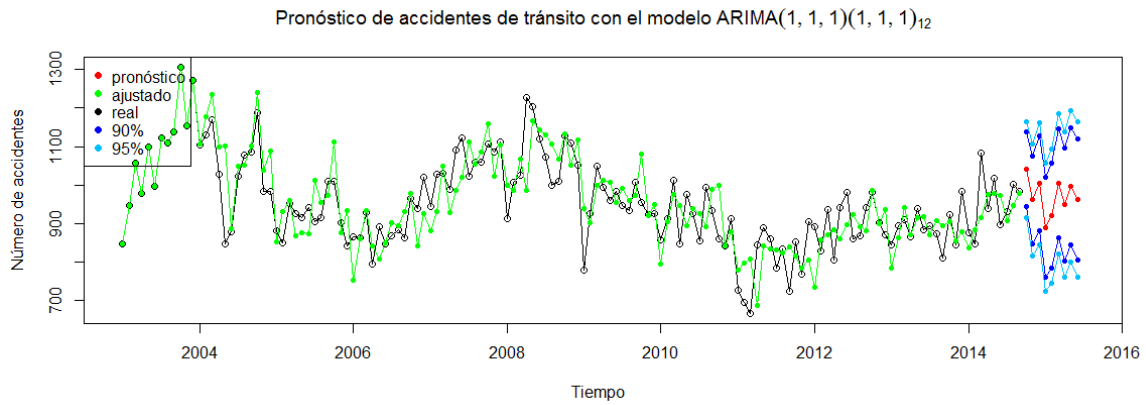


Figura 3.8: Pronóstico de accidentes de tránsito *Totales* con el modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$

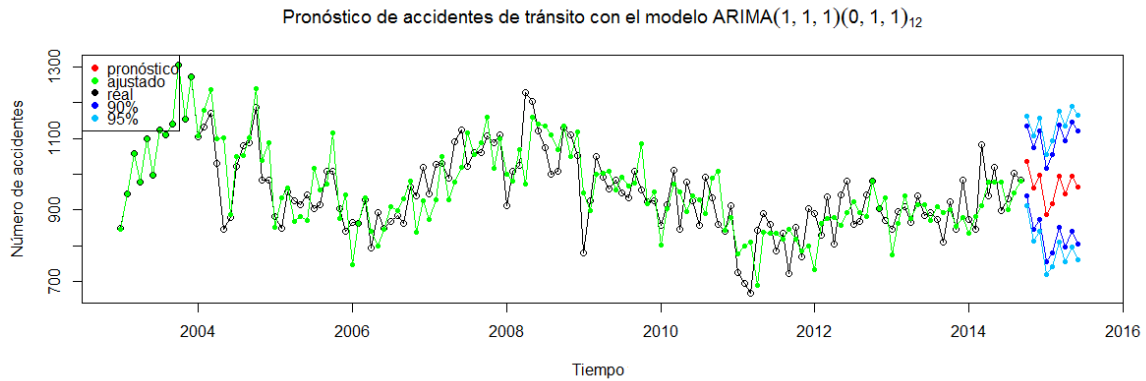


Figura 3.9: Pronóstico de accidentes de tránsito *Totales* con el modelo  $ARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$

Se mencionó la omisión de los tres últimos datos correspondientes a los meses de octubre, noviembre y diciembre; dado que ya se propuso algún modelo ajustado, en la Tabla 3.2 se pueden comparar los valores reales con los ajustados.

Tabla 3.2: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	$ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$	$Y_t - \hat{Y}_t$	$ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	1008	1041	-33 (-3.2%)	1037	-29 (-2.8%)
Nov	1014	961	53 (5.2%)	960	54 (5.32%)
Dic	1024	1004	20 (1.9%)	998	26 (2.5%)

## 3.2. Fatalidad del accidente

Actualmente, las compañías de seguros ofrecen diversos esquemas de aseguramiento, los cuales dependen del tipo de riesgo que se asegure; por ello en este apartado se estudia la fatalidad del accidente, la cual se divide en tres categorías: fatales, no fatales y sólo daños.

### 3.2.1. Fatales

Considérese el percance vial en el que resultan pérdidas de vidas humanas, heridos y consecuentemente daños materiales, estos pueden ser a la propiedad del estado y/o particular. Es pertinente señalar, que el registro del evento se realiza en el lugar del suceso, por lo que si una persona herida fallece posteriormente, quedó registrada como herida.

En la Figura ?? se puede observar el comportamiento del número de accidentes de tránsito clasificados como fatales, en la cual se observa que los datos pueden ser estacionarios; para determinar si efectivamente se trata de una serie estacionaria, obsérvese el comportamiento de las funciones de autocorrelación en la Figura ??

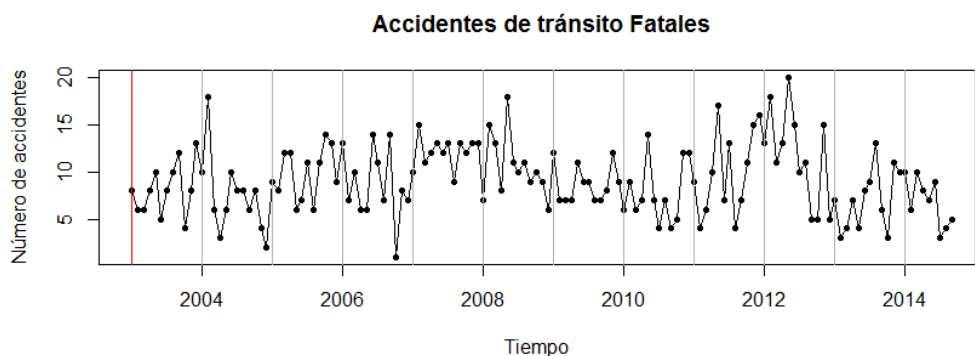


Figura 3.10: Accidentes de tránsito *Fatales*

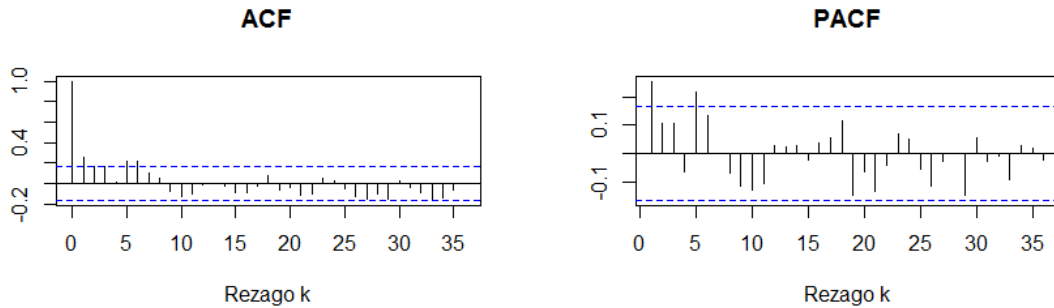


Figura 3.11: ACF y PACF de serie datos originales

En la Figura ?? se observa como la ACF decrece y se corta justo después del rezago 6, ésto indica que la serie es estacionaria, además la PACF se trunca después del rezago 5; se identifican tentativamente los modelos  $ARIMA(1,0,0)$ ,  $ARIMA(0,0,1)$  y  $ARIMA(1,0,1)$ , no se consideran las espigas de los rezagos 5 y 6 de la ACF, ni la espiga del rezago 5 de la PACF, puesto que las espigas son pequeñas y las espigas intermedias son estadísticamente igual a cero. Debido a que hay confusión en cuanto a la estacionariedad de la serie, considérese la prueba de Dickey-Fuller, de la cual se obtiene un  $p - valor = 0.052$ , es decir con un nivel de error del 5% no se rechaza la hipótesis de no estacionariedad.

Con el fin de encontrar al modelo que mejor se ajuste a la serie, se calculan sus primeras diferencias, el comportamiento de la ACF y PACF se puede observar en la Figura ??, la cual muestra que la ACF se corta y la PACF decrece, por lo tanto, se propone el modelo  $ARIMA(0,1,1)$ , nótese que no se considera la espiga de la ACF en el rezago 4, pues es pequeña y además los valores intermedios son cero. Nuevamente, al aplicar la prueba de Dickey-Fuller para determinar si existe raíz unitaria, se obtiene un  $p - valor = 0.01$ , es decir, se comprueba que, después de aplicar primeras diferencias, la serie se transforma en estacionaria.

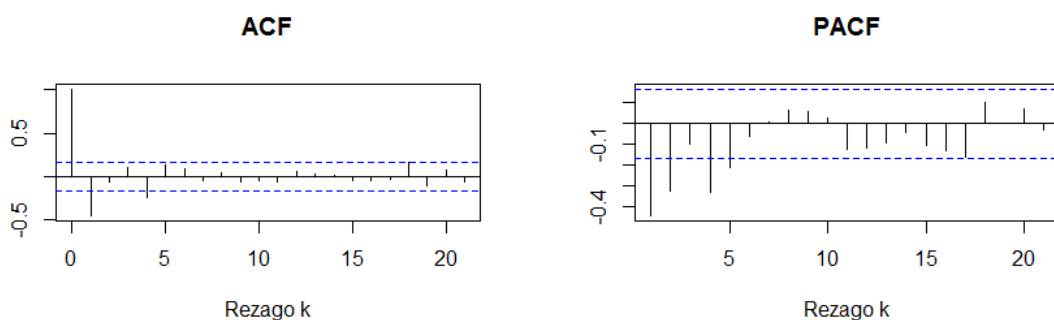


Figura 3.12: ACF y PACF de primeras diferencias

Las características de los modelos propuestos se pueden observar en la Tabla 3.3, en la cual están los valores de la varianza de los residuales y los modelos ordenados de acuerdo al criterio de Akaike. Se selecciona al modelo  $ARIMA(0,1,1)$  como el de mejor ajuste, y antes de utilizarlo para realizar pronóstico, se someten a pruebas los residuales generados con este modelo (ver Fig. ??), los resultados muestran que se cumple el supuesto de distribución como *ruido blanco*.

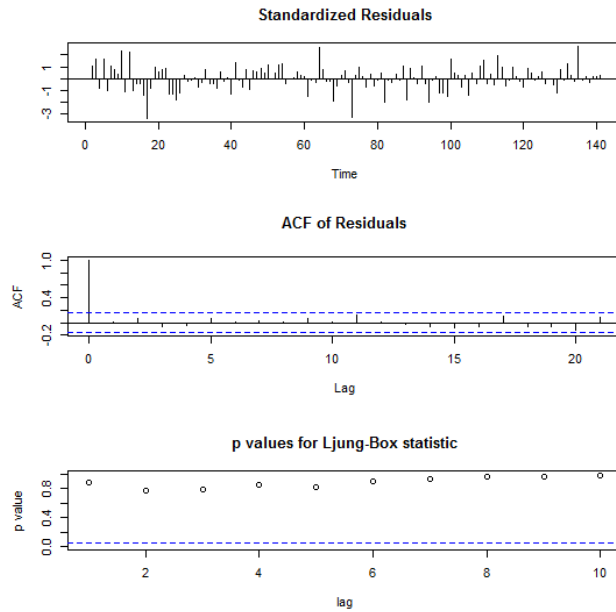


Figura 3.13: Residuales del modelo  $ARIMA(0, 1, 1)$

Tabla 3.3: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
<b>ARIMA(0, 1, 1)</b>	<b><math>Y_t = 9.12 + \varepsilon_t - 0.79\varepsilon_{t-1}</math></b>	<b>12.97</b>	<b>761.14</b>
$ARIMA(1, 0, 1)$	$Y_t = 9.01 + 0.82Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.63\varepsilon_{t-1}$	12.36	761.89
$ARIMA(1, 0, 0)$	$Y_t = 9.11 + 0.25Y_{t-1} + \varepsilon_t$	12.73	763.98
$ARIMA(0, 0, 1)$	$Y_t = 9.12 + \varepsilon + 0.21\varepsilon_{t-1}$	12.88	765.63

En las Figuras ?? y ?? se puede observar el comportamiento de los pronósticos de cada modelo y en la Tabla 3.4 los valores puntuales reales y pronosticados, en la cual se observa que el modelo  $ARMA(0,1,1)$  (seleccionado como el mejor), efectivamente se ajusta mejor a los datos de octubre, noviembre y diciembre del 2014.

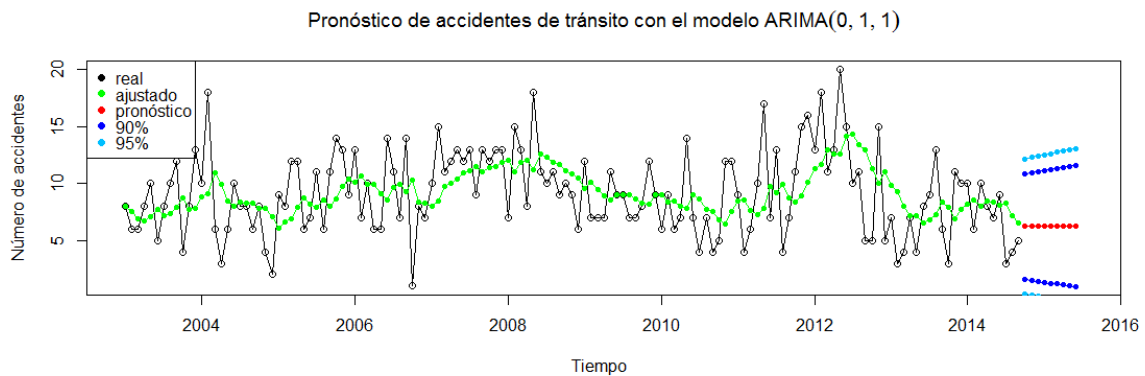


Figura 3.14: Pronóstico de accidentes de tránsito *Fatales* con el modelo  $ARIMA(0,1,1)$

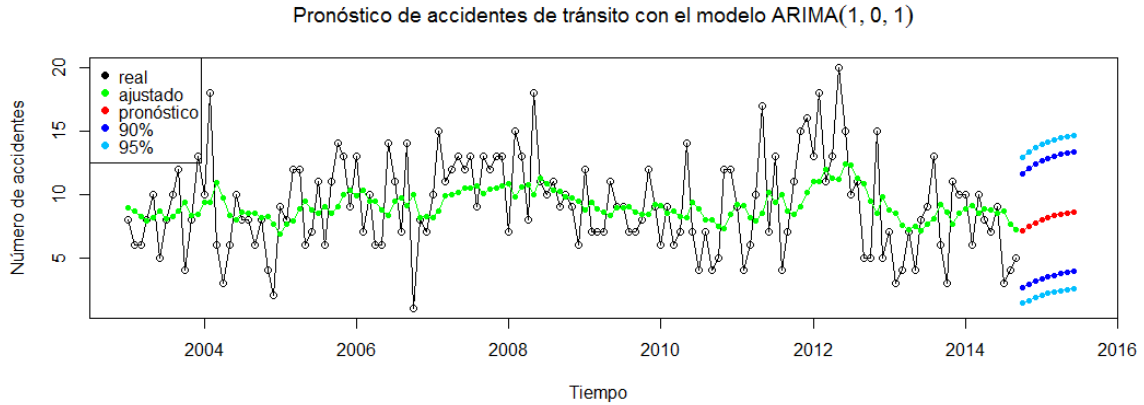


Figura 3.15: Pronóstico de accidentes de tránsito *Fatales* con el modelo ARMA(1,1)

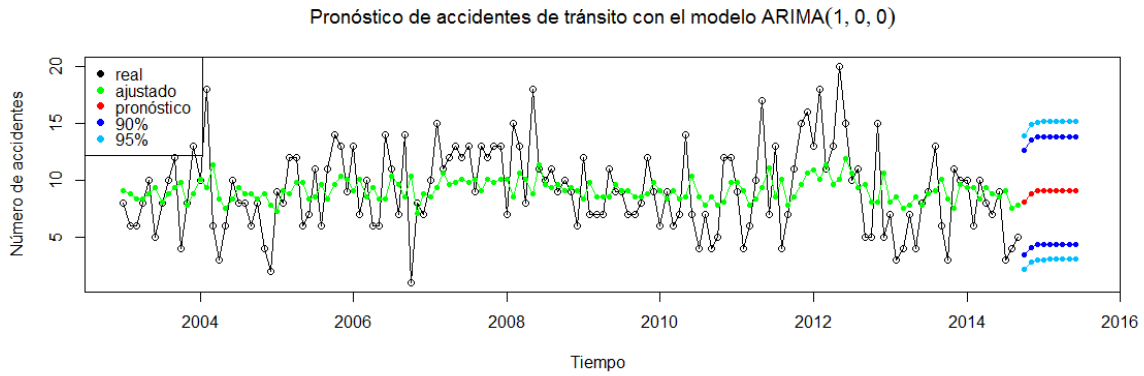


Figura 3.16: Pronóstico de accidentes de tránsito *Fatales* con el modelo AR(1)

Tabla 3.4: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	ARIMA(0,1,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$	ARIMA(1,0,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	5	6.23	-1.23 (-24%)	7.1	-2.1 (-42%)
Nov	6	6.23	-0.23 (-3.8%)	7.4	-1.4 (-23%)
Dic	4	6.23	-2.23 (-55%)	7.7	-3.7 (-92%)

### 3.2.2. No fatales

Un accidente de tránsito clasificado como *no fatal*, comprende el accidente de tránsito en el que no se presenta pérdida de vidas humanas, pero sí lesionados y daños materiales.

En la Figura ?? se muestra el comportamiento de los datos registrados durante el periodo 2003-2014, en dicha figura se puede observar cómo hay una ligera tendencia creciente, es decir, la serie temporal es no estacionaria, para apoyar ésta proposición obsérvese en la Figura ?? como la ACF decrece lentamente,

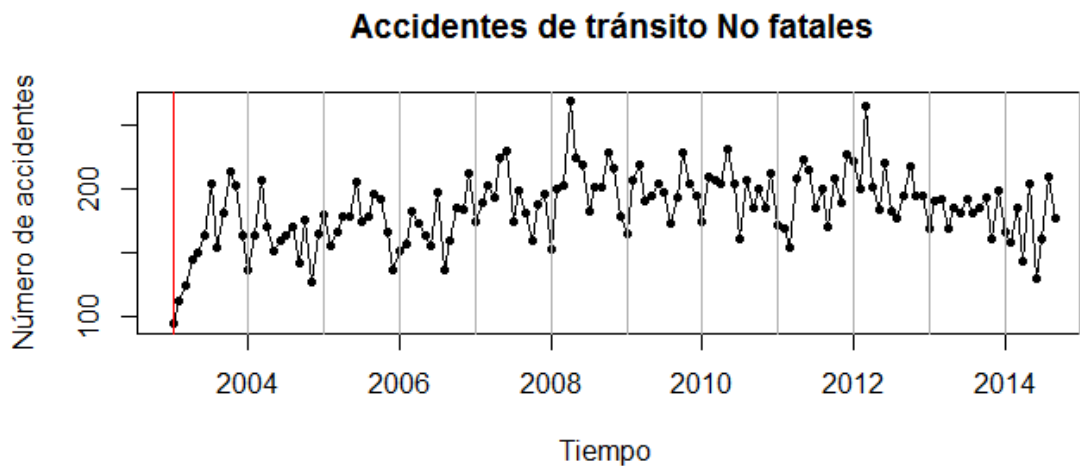


Figura 3.17: Accidentes *No fatales*.

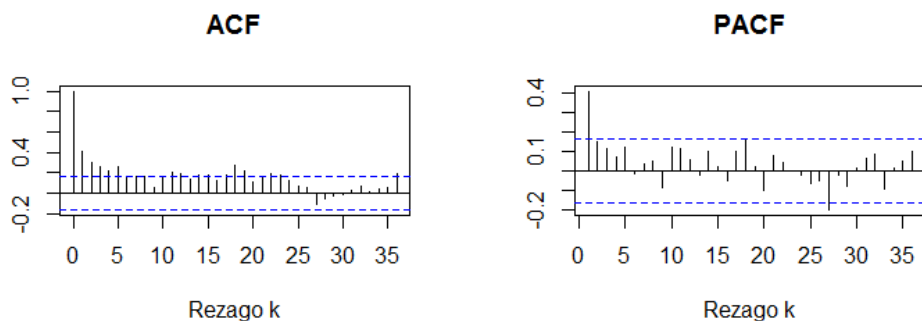


Figura 3.18: ACF y PACF de accidentes de *No fatales*.

por lo que, es necesario calcular primeras diferencias, en la Figura ?? se puede observar que la ACF tiene sólo una espiga en el primer rezago y la PACF muestra cuatro espigas que se extinguen rápidamente, a partir de estas características, se proponen los modelos  $ARIMA(0,1,2)$ ,  $ARIMA(0,1,1)$ ,  $ARIMA(1,1,2)$  y  $ARIMA(3,1,1)$ . Las características de ajuste de los modelos propuestos se enlistan en la Tabla 3.5, donde están los valores de la varianza de los residuales y el valor del criterio de Akaike (los modelos están ordenados de acuerdo este criterio). Se selecciona al modelo  $ARIMA(0,1,2)$  como el de mejor ajuste; pero antes de utilizar dicho modelo para pronosticar, se verifica que los residuales sean aleatorios e independientes (ver Fig. 3.18a).

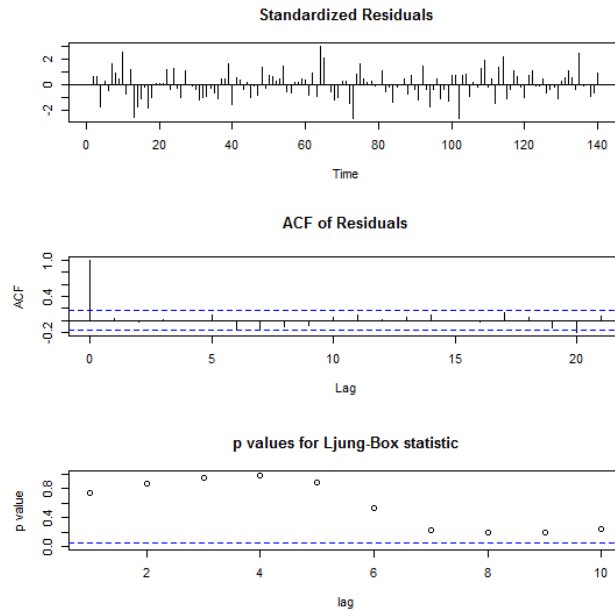


Figura 3.19: Residuales del modelo  $ARIMA(0, 1, 2)$ .

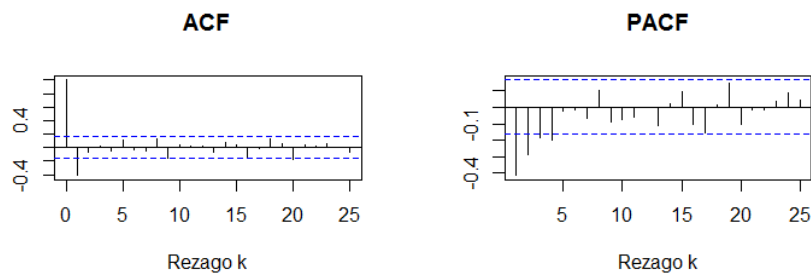


Figura 3.20: ACF y PACF de primeras diferencias.

Tabla 3.5: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
<b>ARIMA(0, 1, 2)</b>	<b><math>Y_t = \varepsilon_t - 0.68\varepsilon_{t-1} - 0.13\varepsilon_{t-2}</math></b>	<b>562.8</b>	<b>1292.41</b>
ARMA(0,1,1)	$Y_t = \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1}$	574.86	1292.68
ARMA(1,1,2)	$Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t - 1.2\varepsilon_{t-1} + 0.27\varepsilon_{t-2}$	559.69	1294.00
ARMA(2,1,1)	$Y_t = 0.19Y_{t-1} + 0.03Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.88\varepsilon_{t-1}$	560.53	1294.09
ARMA(3,1,1)	$Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.03Y_{t-2} + 0.04Y_{t-3} + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$	559.38	1295.91

En las Figuras ??, ?? y ?? se puede observar el pronóstico generado por los tres mejores modelos propuestos. En la Tabla 3.6, se pueden observar los valores puntuales de los pronósticos con los modelos  $ARIMA(0,1,2)$  y  $ARIMA(0,1,1)$ ; al comparar las diferencias se observa que son casi iguales en ambos modelos, sin embargo el pronóstico del modelo  $ARIMA(0, 1, 2)$  es todavía más acertado.

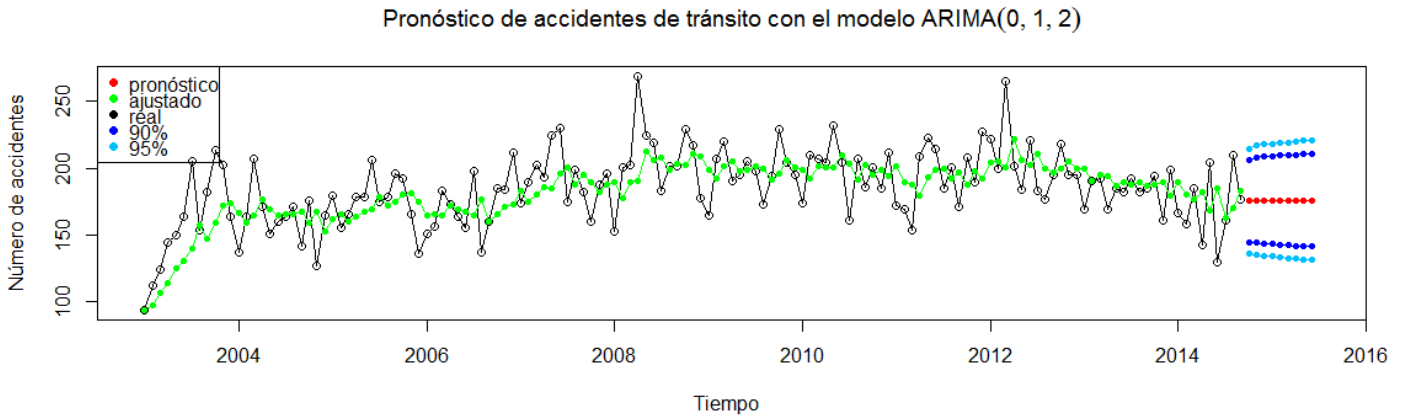


Figura 3.21: Pronóstico de accidentes de tránsito *No fatales* con el modelo ARIMA(0,1,2)

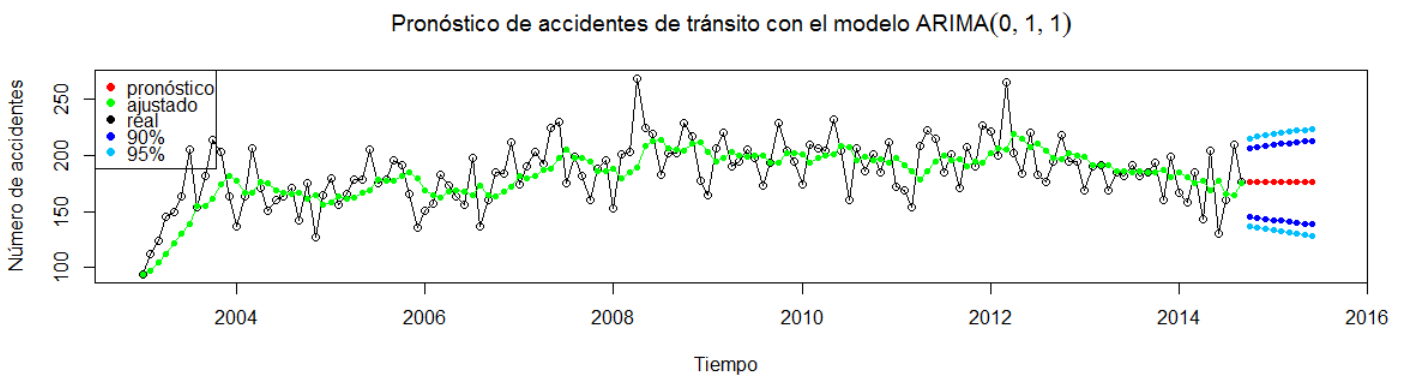


Figura 3.22: Pronóstico de accidentes de tránsito *No fatales* con el modelo ARIMA(0,1,1)

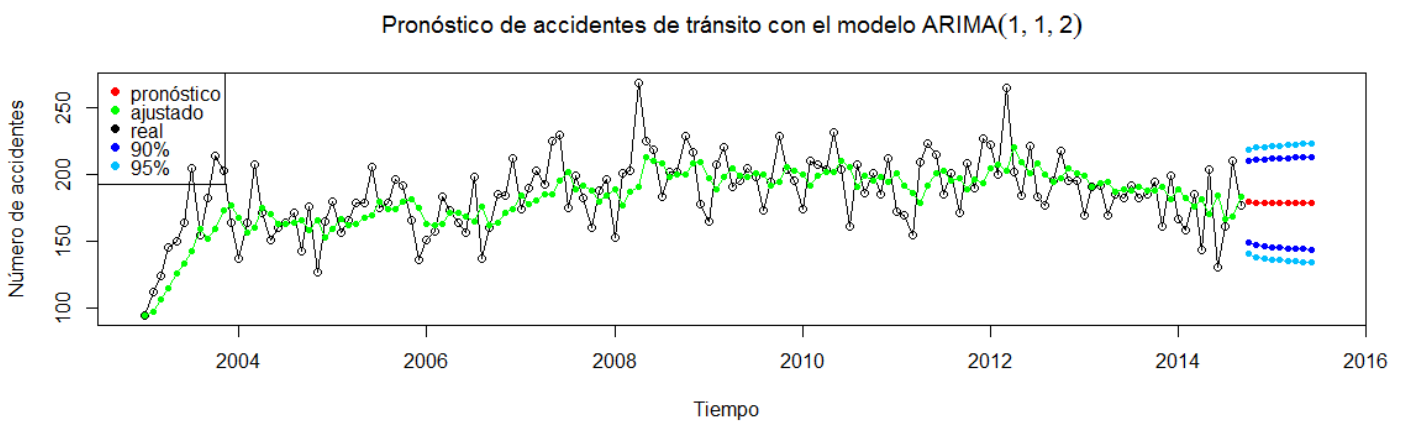


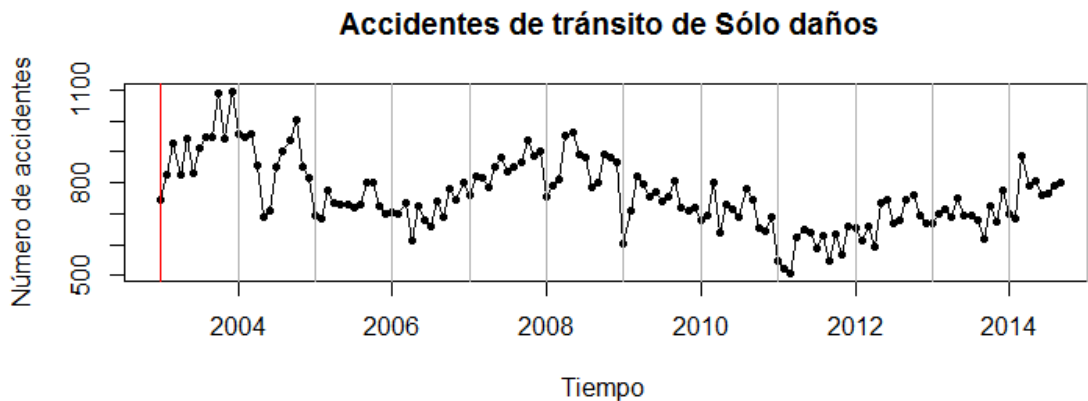
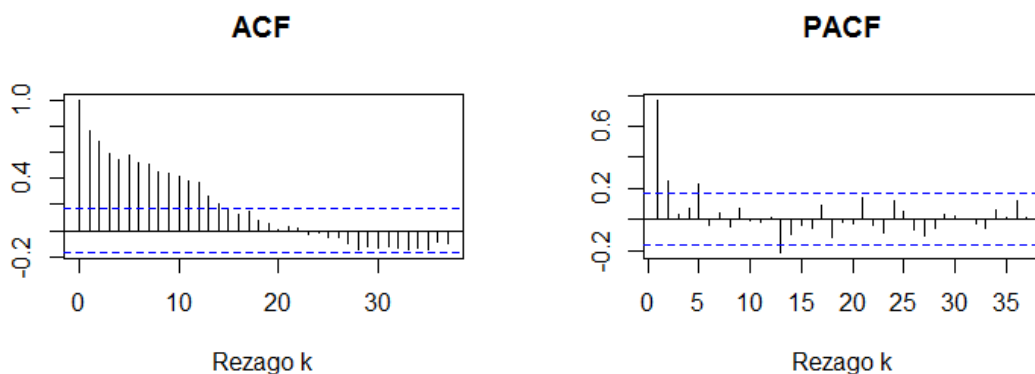
Figura 3.23: Pronóstico de accidentes de tránsito *No fatales* con el modelo ARIMA(1,1,2)

Tabla 3.6: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	ARIMA(0,1,2)	$Y_t - \hat{Y}_t$	ARIMA(0,1,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	173	175.4	-2.4 (-1.3%)	176.1	-3.1 (-1.7%)
Nov	208	176.2	31.8 (15.2%)	176.1	31.9 (15.3%)
Dic	211	176.2	34.8 (16.4%)	176.1	34.9 (16.5%)

### 3.2.3. Sólo daños

En la Figura ?? se muestra el comportamiento de los accidentes clasificados como *Sólo daños*, en donde se observa una ligera tendencia decreciente, y por tanto, la no estacionariedad de la serie, este hecho puede comprobarse mediante su función de autocorrelación (ACF), la cual se extingue lentamente (ver Figura ??).

Figura 3.24: Accidentes de tránsito *Sólo daños*Figura 3.25: *ACF* y *PACF* de serie sólo daños

Para transformar los datos en una serie estacionaria, se calculan primeras diferencias. Sus funciones de autocorrelación se pueden observar en la Figura ??.

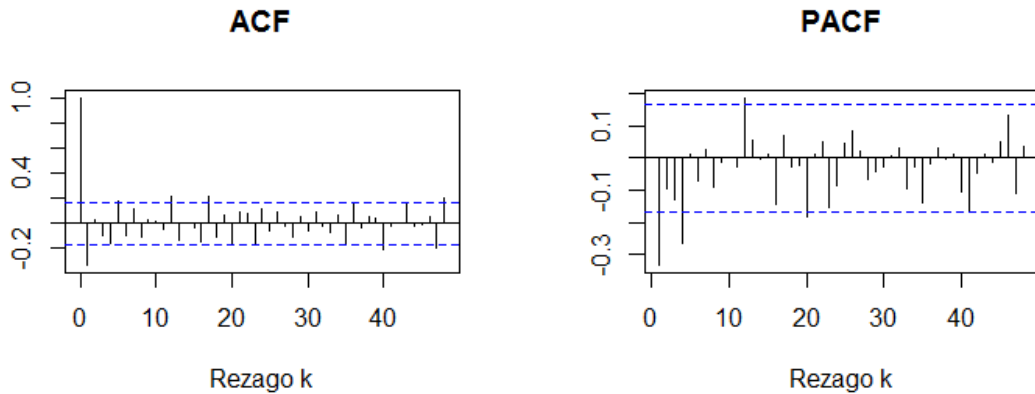


Figura 3.26: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias

En dicha figura se observa que la PACF tiene una espiga en el rezago 12, es decir la serie presenta estacionalidad de periodo 12, además, la ACF decrece lentamente en el **nivel estacional**, es decir, en los rezagos 12, 24, 36 y 48, esto indica la necesidad de diferenciación estacional; para apoyar esta proposición, obsérvese en la Figura ?? el comportamiento de los datos por año.

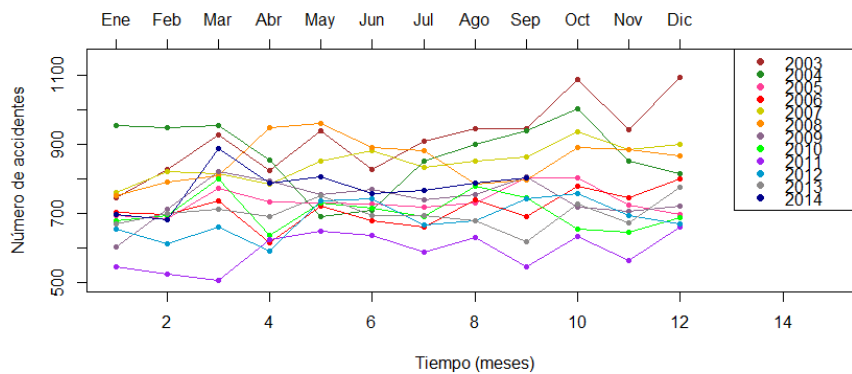


Figura 3.27: Datos estacionales de periodo 12

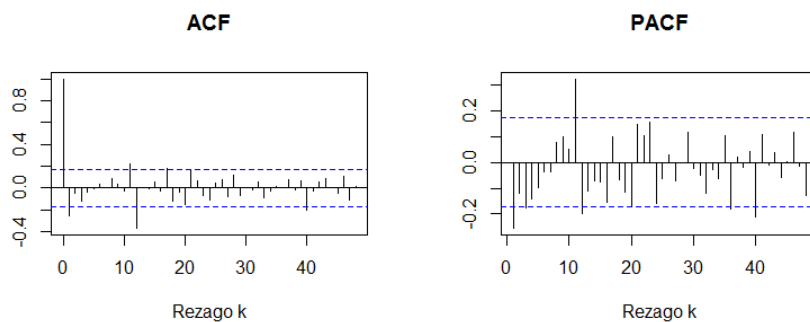


Figura 3.28: ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12

La Figura ?? muestra las gráficas de las funciones de autocorrelación de la diferenciación estacional, en donde se observa que la ACF tiene una espiga en el rezago 12 y sin espigas en

los rezagos 24, 36 y 48; también se puede observar que la PACF tiene una espiga en el rezago 12 y los rezagos 24, 36 y 48 son estadísticamente iguales a cero; por lo tanto, se propone el modelo  $ARIMA(1,0,1)$  a **nivel estacional**. Por otra parte, para los rezagos no estacionales ( $k=1,\dots,11$ ), la ACF y PACF se cortan después del primer rezago, por lo que, se propone el modelo  $ARIMA(1,1,1)$  para el **nivel no estacional**. En resumen, el modelo propuesto es  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$ .

La Tabla 3.7 contiene características de ajuste del modelo propuesto (varianza de los residuales y valor del criterio de Akaike). La gráfica del pronósticos del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$ , se puede observar en la Figura ??.

Tabla 3.7: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
$ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	$Y_t = 0.39Y_{t-1} + 0.99Y_{t-12} + \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1} - 0.94\varepsilon_{t-12}$	3937.2	1577.62

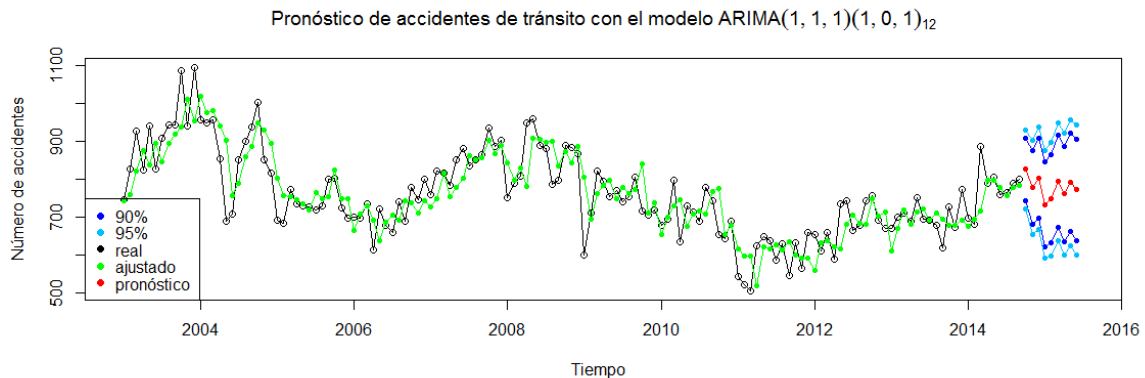


Figura 3.29: Pronóstico de accidentes de tránsito *Sólo daños* con el modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$

Anteriormente se mencionó la omisión de los tres últimos valores los cuales son para comprobar la aproximación del modelo, en seguida se comparan los últimos tres valores omitidos con el pronosticado (ver Tabla 3.8)

Tabla 3.8: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	$ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	830	826.7	3.3 (0.39%)
Nov	800	778.6	21.4 (2.6%)
Dic	809	802.9	6.1 (0.75%)

### 3.3. Tipo de vehículo

#### 3.3.1. Automóvil

En la Figura ?? se observa el comportamiento de los accidentes de tránsito de *Autos*, en la cual se observa una ligera tendencia decreciente de los datos, y por tanto, indicios de no estacionariedad; por otra parte, la Figura ?? muestra como la ACF decrece lentamente, es decir, la serie no es estacionaria.

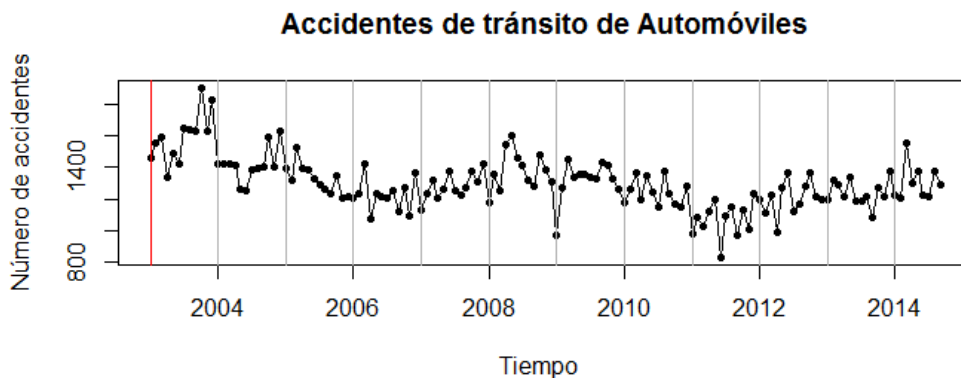


Figura 3.30: Accidentes de tránsito de *Automóviles*

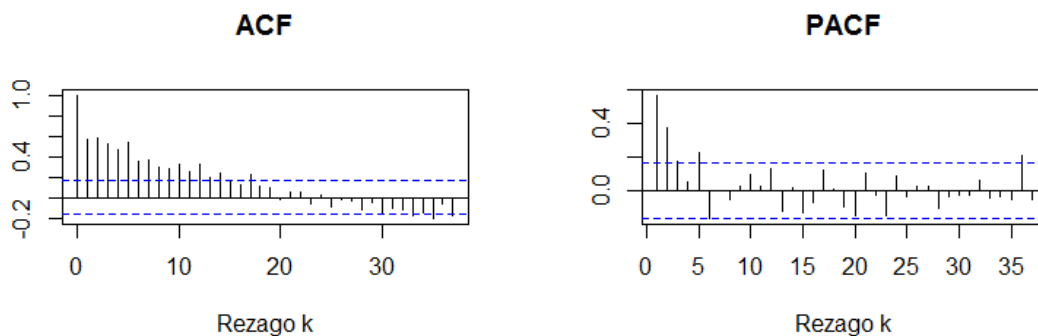


Figura 3.31: *ACF* y *PACF* de serie accidentes de automóviles

Para transformar los datos en una serie estacionaria, se calculan primeras diferencias, sus funciones de autocorrelación se pueden observar en la Figura ??,

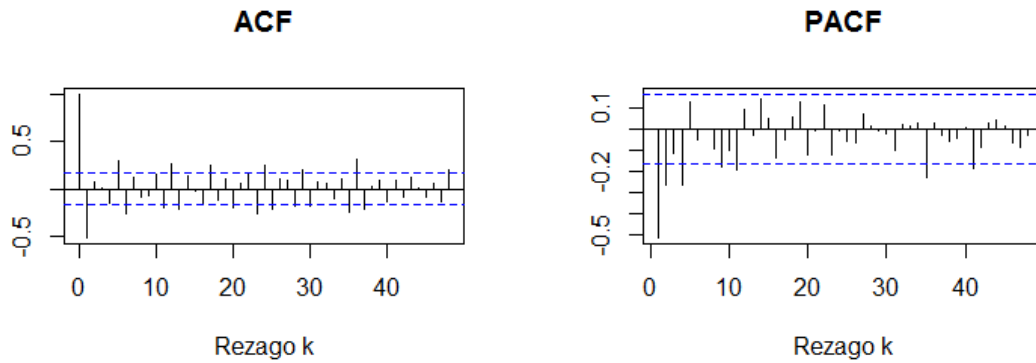


Figura 3.32: Función de autocorrelación y autocorrelación parcial de primeras diferencias

En dicha figura se observa que la PACF tiene una espiga en el rezago 12, es decir la serie presenta estacionalidad de periodo 12, esto indica la necesidad de diferenciación estacional; la Figura ?? proporciona una idea gráfica de la existencia de estacionalidad.

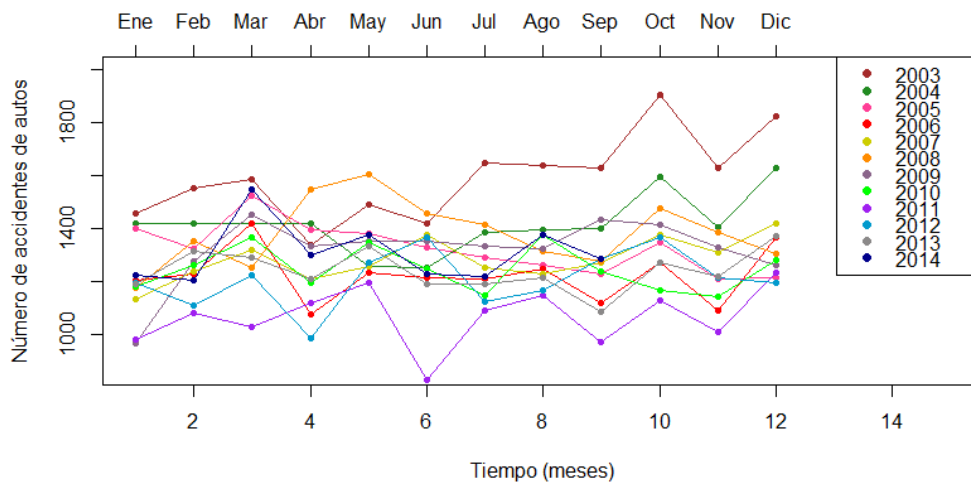


Figura 3.33: Datos estacionales de periodo 12

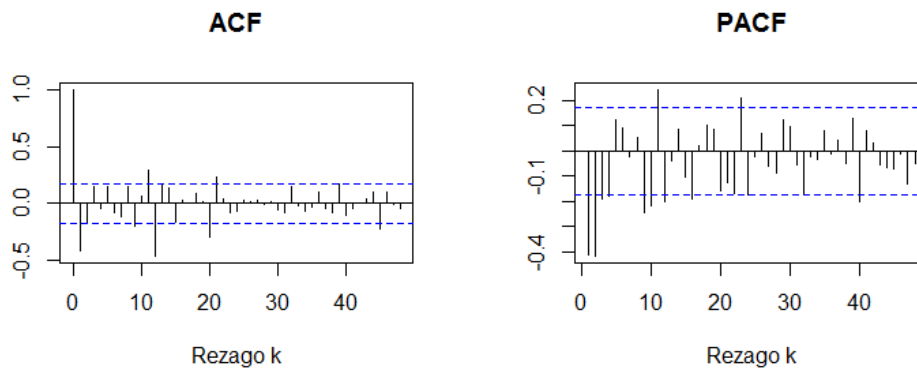


Figura 3.34: ACF y PACF de datos estacionales de periodo 12

La Figura ?? muestra las gráficas de las funciones de autocorrelación de la diferenciación estacional, en donde se observa que la ACF tiene una espiga en el rezago 12 y sin espigas en los rezagos 24, 36 y 48; también se puede observar que la PACF tiene una espiga en el rezago 12 y ninguna en los rezagos 24, 36 y 48; por lo tanto, se propone el modelo  $ARIMA(1,0,1)$  a **nivel estacional**. Por otra parte, para los rezagos no estacionales ( $k=1, \dots, 11$ ), la ACF se corta después del primer rezago (a excepción de la espiga en el rezago 10, pero como la espiga se detecta después de rezagos iguales a cero, entonces no se considera); por otro lado, la PACF tiene espigas en los primeros rezagos y en los rezagos 9 y 10, entonces se puede decir que la PACF decrece; por ello, se propone el modelo  $ARIMA(0,1,1)$  en el **nivel no estacional**. En resumen, el modelo propuesto es el  $ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$ .

La Tabla 3.9 contiene características de ajuste del modelo propuesto (varianza de los residuales y valor del criterio de Akaike). La gráfica de pronóstico del modelo  $ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$ , se puede observar en la Figura ??.

Tabla 3.9: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
$ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	$Y_t = 0.99Y_{t-12} + \varepsilon_t - 0.61\varepsilon_{t-1} - 0.92\varepsilon_{t-12}$	11995.73	1731.35

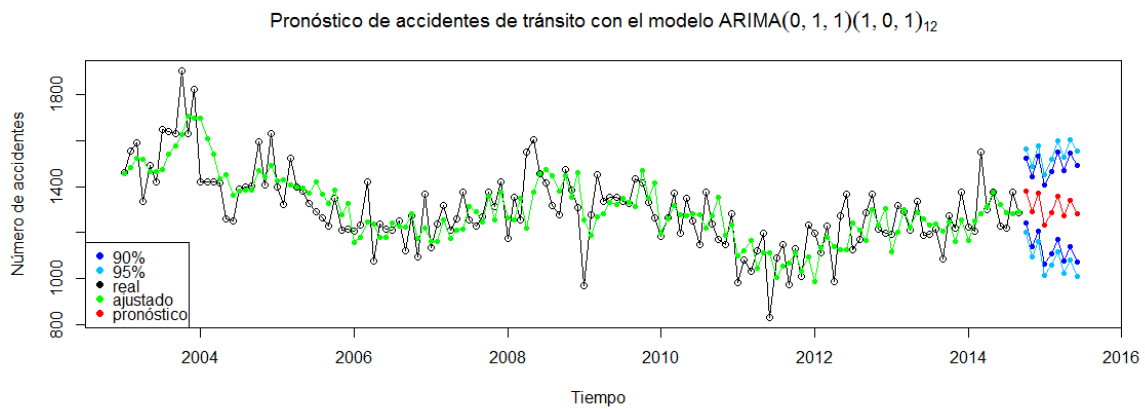


Figura 3.35: Pronóstico

Anteriormente se mencionó la omisión de los tres últimos valores, los cuales son para comprobar la aproximación del modelo, enseguida se comparan los últimos tres valores omitidos contra los pronosticados (ver Tabla 3.10)

Tabla 3.10: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	$ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	1395	1382.4	12.6 (0.9%)
Nov	1366	1291.0	75 (5.4%)
Dic	1442	1369.6	72.4 (5%)

### 3.3.2. Camioneta

En esta sección se analiza el comportamiento del número de camionetas involucradas en accidentes de tránsito, de la Figura ?? se concluye que los datos no son estacionarios, para sustentar ésta afirmación, obsérvese en la Figura ?? que la ACF decrece lentamente, por ello se calculan primeras diferencias.

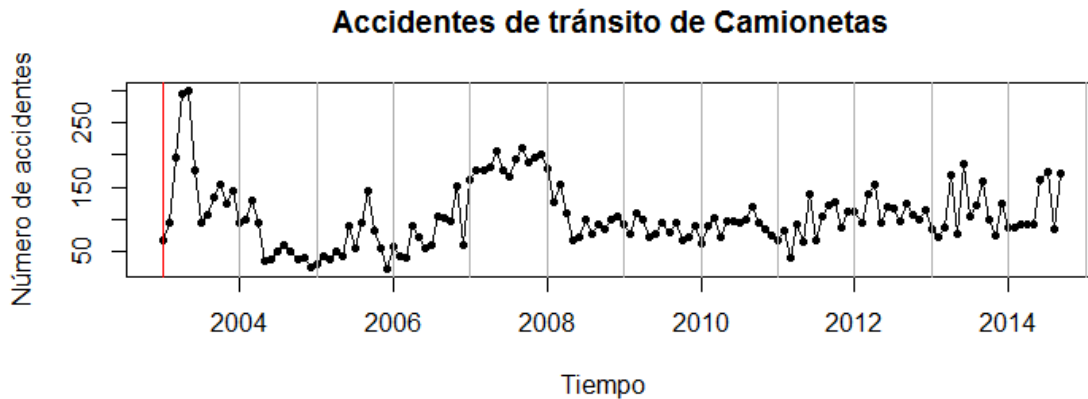


Figura 3.36: Accidentes de tránsito de *Camionetas*

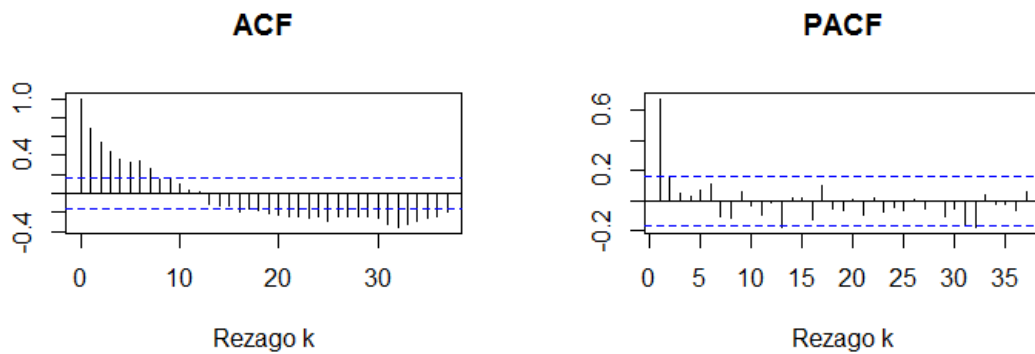


Figura 3.37: ACF y PACF del número de camionetas que han sido implicadas en un accidente de tránsito

La Figura ?? contiene las gráficas de las funciones de autocorrelación obtenidas a partir de las primeras diferencias, en la cual se observa como ambas funciones se truncan justo después del primer rezago, por lo cual, se propone el modelo ARIMA(1,1,1). En la Tabla 3.11 se encuentran las características del modelo propuesto.

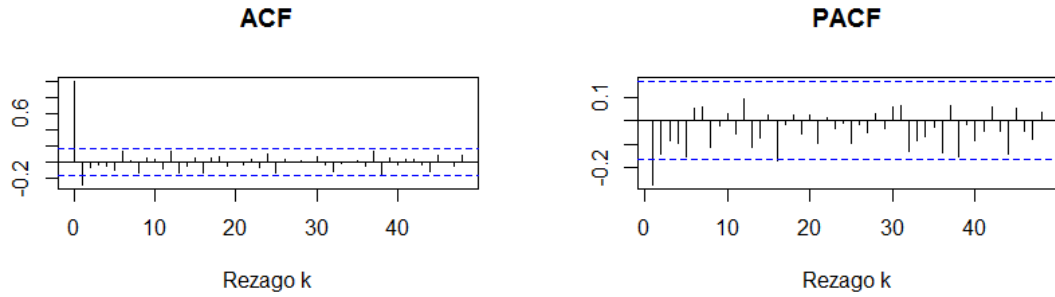


Figura 3.38: ACF y PACF de primeras diferencias

Tabla 3.11: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
ARIMA(1,1,1)	$Y_t = 0.38Y_t + \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1}$	1316.6	1409.3

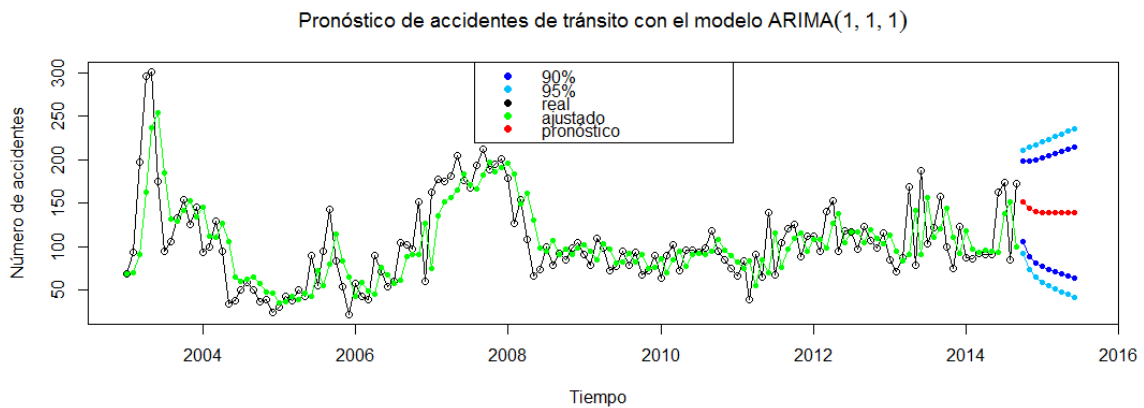


Figura 3.39: Pronóstico

En la Tabla 3.12 se pueden comparar los valores reales y pronosticados (por el modelo ajustado); al considerar la proporción del error respecto del total de accidentes reales, podría considerarse que el ajuste no es bueno, sin embargo, obsérvese que la función de autocorrelación de los residuales en la Figura ?? se corta desde el primer rezago, es decir los residuos son independientes (test Ljun-Box), por esta razón se determina al modelo  $ARIMA(1, 1, 1)$  como el de mejor ajuste.

Tabla 3.12: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	ARIMA(1,1,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	146	151.6	-5.6 (-3.8%)
Nov	77	143.7	-66.7 (-86%)
Dic	83	140.7	-57.7 (-69%)

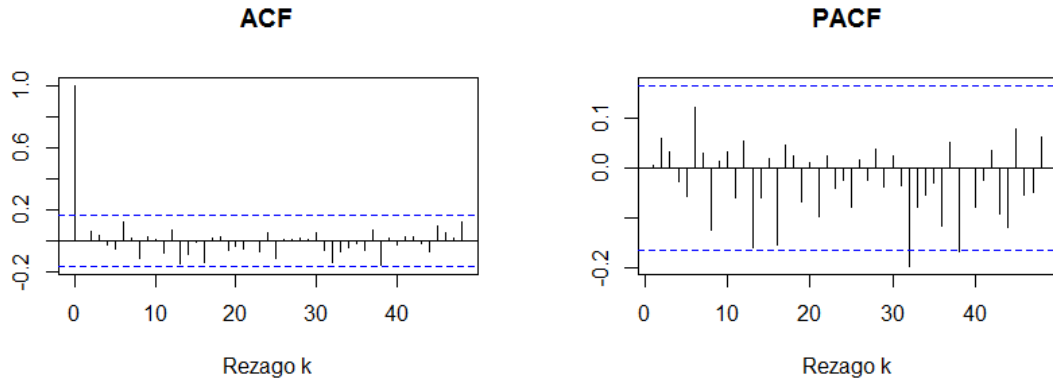


Figura 3.40: ACF y PACF de residuales del modelo ajustado  $ARIMA(1, 1, 1)$

### 3.3.3. Microbús

En esta sección se analiza el comportamiento del número de vehículos tipo Microbús involucrados en accidentes de tránsito, en la Figura ?? se observa la tendencia de los datos, la cual muestra indicios de no estacionariedad, para comprobar esto, obsérvese la función de autocorrelación en la Figura ??, la cual se extingue lentamente confirmando la no estacionariedad de la serie, por tanto, es necesario calcular primeras diferencias.

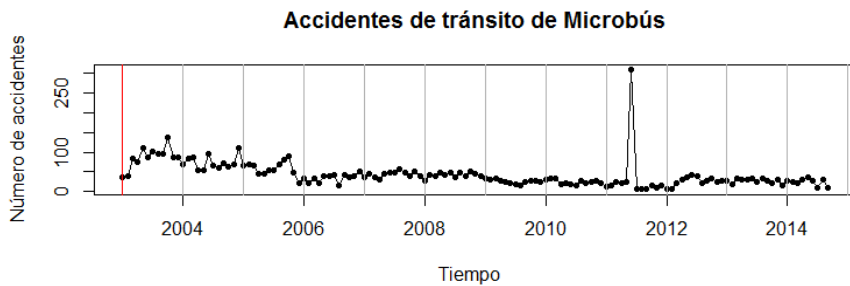


Figura 3.41: Accidentes de tránsito de *Microbús*

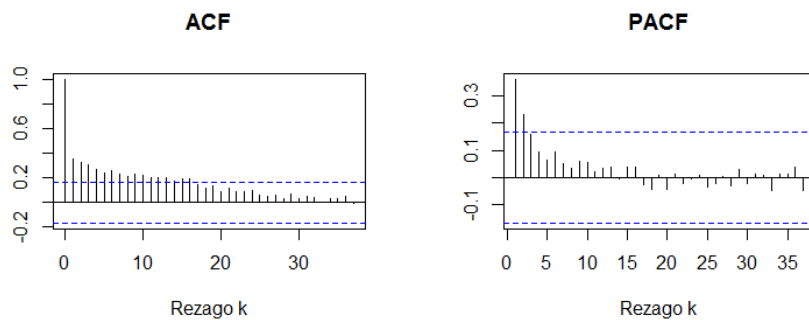


Figura 3.42: ACF y PACF del número de accidentes de tránsito en donde han sido involucrados vehículos del tipo Microbús

La Figura ?? contiene las gráficas de las funciones de autocorrelación de las primeras diferencias, en la cual se observa como la ACF se corta justo después del primer rezago y la PACF

se corta después de la segunda espiga en el segundo rezago, por lo cual, se proponen los modelos ARIMA(1,1,1) y ARIMA(2,1,1), sus características se pueden comparar en la Tabla 3.13.

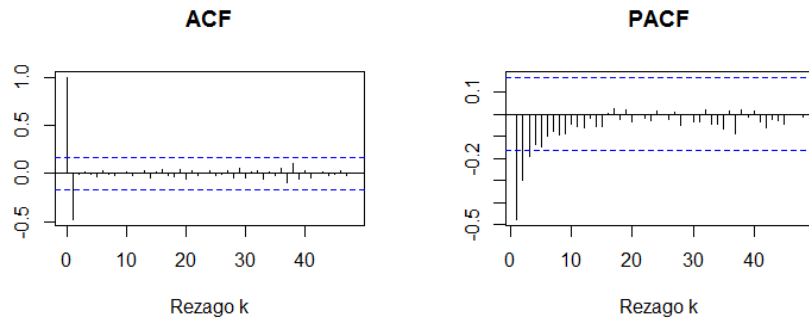


Figura 3.43: ACF y PACF de primeras diferencias

Tabla 3.13: Modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
ARIMA(1, 1, 1)	$Y_t = 0.07Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.89\varepsilon_{t-1}$	853.9	1350.8
ARIMA(2,1,1)	$Y_t = 0.07y_{t-1} + 0.03Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1}$	853.1	1352.7

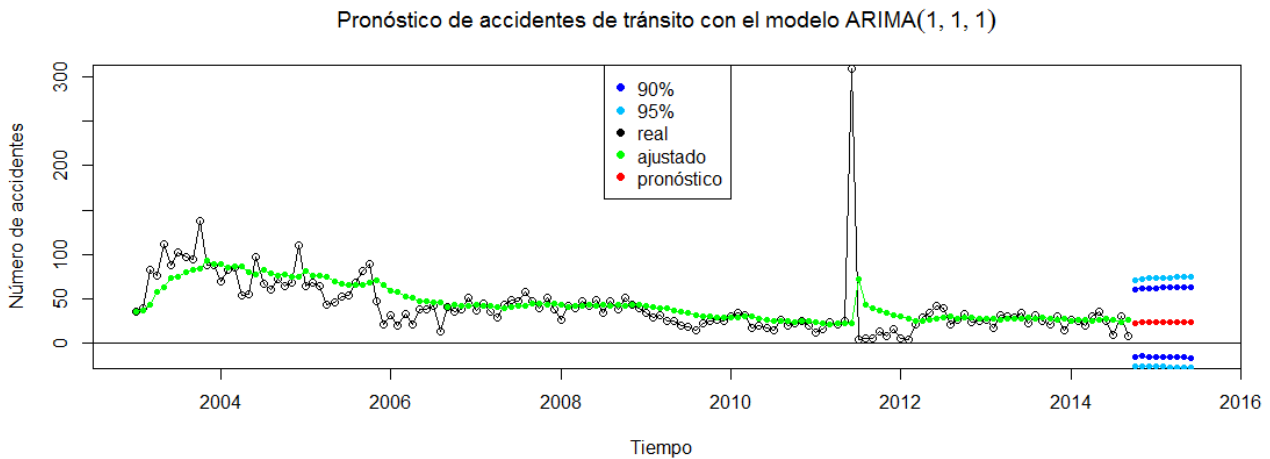


Figura 3.44: Pronóstico

En la Tabla 3.14 se pueden comparar los valores reales de la serie y los valores generados por el modelo ajustado.

Tabla 3.14: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	ARIMA(1,1,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	18	22.9	-4.9 (-27.2%)
Nov	41	23.89	17.11 (41.7%)
Dic	27	23.96	3.04 (11.2%)

Previamente se determinó el mejor modelo ajustado para accidentes de tránsito de *Microbús*, sin embargo, en la Figura ?? se puede observar que en el mes de Junio de 2011 se registró un número elevado de accidentes, tal cifra fue motivo de investigación, debido a que representa una cifra muy alta respecto al resto de los datos; después de buscar algún suceso que haya sido causante de tantos accidentes, no se encontró información que validara dicha suposición, por lo que, se concluyó que ese registro es un dato atípico<sup>6</sup>, por esta razón, se realiza un nuevo ajuste, pero ahora sustituyendo el dato atípico por el promedio de los meses de junio de 2009, 2010, 2012 y 2013, es decir, se reemplazó el valor de 309 por 28 (ver Figura ??).

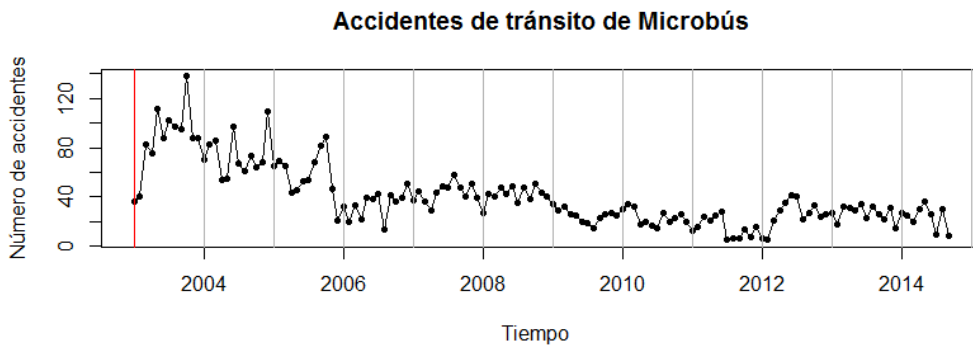


Figura 3.45: Accidentes de tránsito de *Microbús* (sin dato atípico)

En la Figura ?? se puede observar como la ACF decrece lentamente, lo cual indica que la serie es no estacionaria; por lo que se calculan primeras diferencias, el resultado gráfico de las funciones de autocorrelación se muestra en la Figura ??

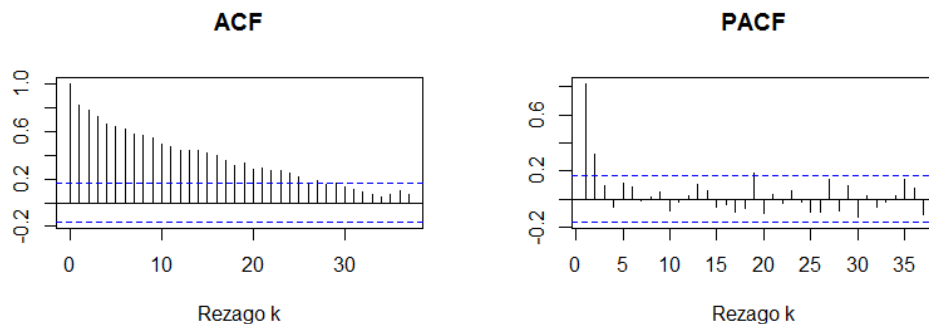


Figura 3.46: Funciones de autocorrelación de *Microbús* (sin dato atípico)

<sup>6</sup>Son valores no razonables respecto al resto de la muestra, los cuales se derivan generalmente de errores de procedimiento

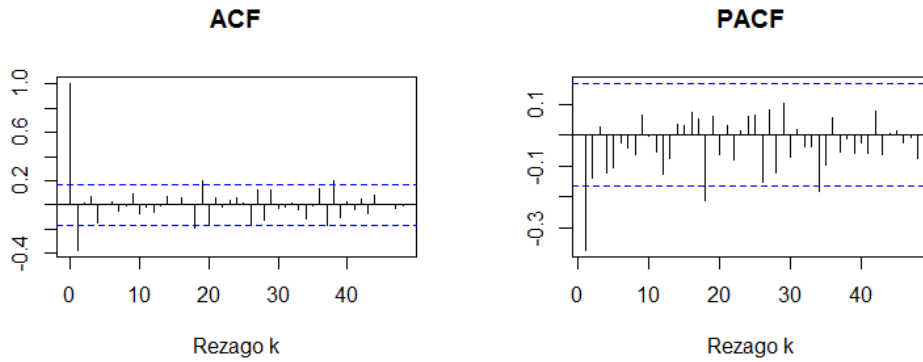


Figura 3.47: ACF y PACF de primeras diferencias de accidentes de tránsito de *Microbús* (sin dato atípico)

Obsérvese en la Figura ?? que las funciones de autocorrelación (ACF y PACF) de primeras diferencias muestran una espiga en el primer rezago y espigas menores en otros rezagos. Después de probar que las espigas en rezagos mayores a uno no indican algún efecto estacional, se proponen modelos (ver Tabla 3.15) a partir de estas funciones.

Tabla 3.15: Valor del criterio de Akaike y residuales de los modelos propuestos

Modelo $Y_t$	Modelo estimado	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	AIC
<b>ARIMA(1, 1, 1)</b>	$Y_t = 0.34Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.78\varepsilon_{t-1}$	177.9	1129.3
ARIMA(2,1,1)	$Y_t = 0.42Y_{t-1} + 0.18Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.89\varepsilon_{t-1}$	173.8	1128.5

Nótese que el valor de los residuales disminuyó considerablemente al ajustar nuevamente el modelo después de eliminar el dato atípico; de acuerdo a los valores del criterio de Akaike y de los residuales, se selecciona al modelo ARIMA(1,1,1) como el de mejor ajuste, por lo que se usa dicho modelo para realizar pronóstico (ver Figura ??)

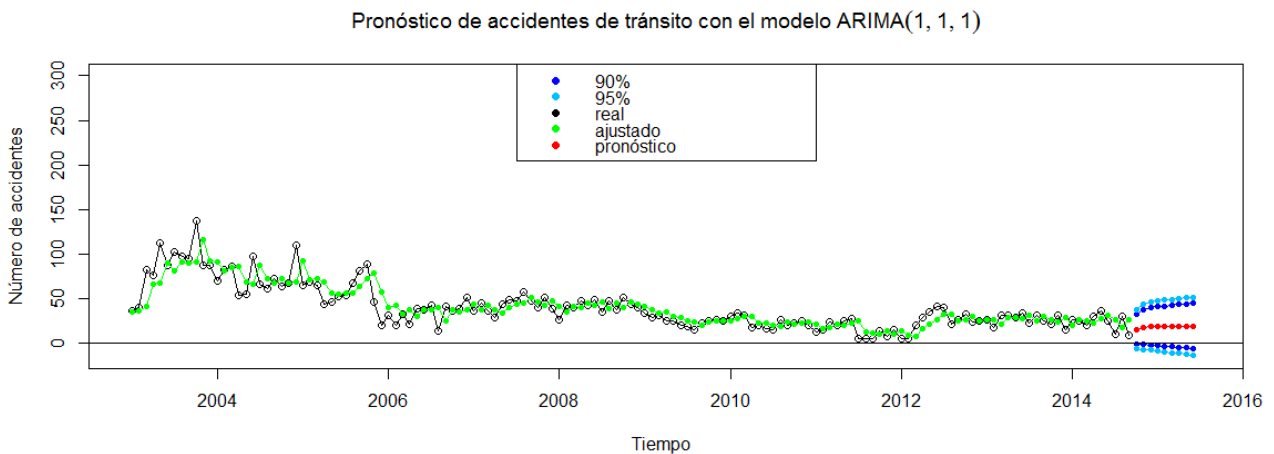


Figura 3.48: Pronóstico de accidentes de tránsito de *Microbús* (sin dato atípico) con el modelo *ARIMA*(1, 1, 1)

En la Tabla 3.16 se puede valorar el ajuste del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)$ , pues se compara el valor real y el pronosticado.

Tabla 3.16: Valores reales y pronosticados de octubre, noviembre y diciembre 2014

Mes	Real	ARIMA(1,1,1)	$Y_t - \hat{Y}_t$
Oct	18	16	2 (11.1 %)
Nov	41	18	23 (56.0 %)
Dic	27	19	8 (29.6 %)

Al comparar los pronósticos y los valores reales del modelo  $ARIMA(1, 1, 1)$  con y sin dato atípico, se observa que el error del pronóstico es más grande cuando se elimina el dato atípico, sin embargo, se selecciona este modelo para realizar pronóstico, pues la varianza de los residuales en general, es considerablemente menor.

### 3.3.4. Modelo de mejor ajuste para cada clasificación

Finalmente, en la Tabla 3.17 se puede observar el modelo que mejor se ajusta a cada una de las clasificaciones que se estudiaron previamente, así como los valores pronosticados para el primer semestre del 2015.

Tabla 3.17: Modelos de mejor ajuste y pronósticos 2015

Clasificación	Modelos	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Total	$ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_{12}$	890	920	1004	950	997	963
Fatal	$ARIMA(0, 1, 1)$	6	6	6	6	6	6
No Fatal	$ARIMA(0, 1, 2)$	176	176	176	176	176	176
Sólo daños	$ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	734	748	795	762	791	773
Automóvil	$ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$	1234	1289	1360	1274	1342	1289
Camioneta	$ARIMA(1, 1, 1)$	140	139	139	139	139	139
Microbús	$ARIMA(1, 1, 1)$	17	17	17	17	16	16

# Conclusiones y trabajo a futuro

## Conclusión

En este trabajo se presentó la teoría correspondiente a *series de tiempo*, mediante la cual, fue posible realizar el pronóstico sobre el número de accidentes de tránsito en la ciudad de Puebla, y de esta forma, se obtuvo la probabilidad de ocurrencia de un accidente ( $P_t$ ), la cual queda determinada por:

$$P_t = \frac{\text{Número de accidentes al tiempo } t}{\text{Total de autos asegurados}},$$

y así, mostrar a la industria del seguro una idea general sobre la probabilidad de ocurrencia de un accidente de tránsito y cómo afecta a la *Prima pura* de un *seguro de auto*.

El análisis se realizó para 7 clasificaciones, la primera corresponde a accidentes totales generales (*Total*), las siguientes tres clasificaciones son de acuerdo a la fatalidad del accidente (*Fatales*, *No fatales* y *Sólo daños*) y las tres últimas corresponden al tipo de vehículo (*Automóvil*, *Camioneta* y *Microbús*).

Para el caso de accidentes totales se identificó al modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$  como el de mejor ajuste, el cual pronostica que para el primer semestre del 2015 habrá un ligero aumento en el número de accidentes respecto al año anterior (2014). Del total de accidentes se observa que la mayor parte ocurre en vehículos tipo *Automóvil* donde el modelo  $ARIMA(0, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$  es el de mejor ajuste y el pronóstico también indica un aumento respecto al año anterior; por otro lado, la fatalidad más frecuente es *Sólo daños*, donde el modelo  $ARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 1)_{12}$  es el que mejor se ajusta y de igual forma, el pronóstico muestra un aumento respecto al año anterior.

En base a estos resultados, se recomienda que las aseguradoras realicen ajustes en el precio del *seguro de auto*, pues deben considerar que el número de accidentes aumentará sin embargo los accidentes fatales disminuyen, y el tipo de vehículo más involucrado en accidentes seguirá siendo el *Automóvil*, pero con mayor frecuencia.

## Trabajo a futuro

Debido a que la probabilidad de ocurrencia de un accidente de tránsito se calcula como el total de accidentes entre el total de vehículos, será necesario conocer el número de vehículos en el tiempo en el que se desea el pronóstico, pues esto ayudará a determinar el precio de un seguro. También será interesante ver como es la relación entre la cantidad de accidentes y el número de vehículos.

Se recomienda actualizar la información histórica tan pronto como sea posible, pues naturalmente, el pronóstico será más acertado.

También se recomienda realizar un análisis de valores extremos.

# Apéndice A

## Gráficos de ACF y PACF

Gráficos de ACF y PACF de los modelos AR(1), AR(2), MA(1), MA(2)

Tabla A.1: Funciones de autocorrelación del modelo AR(1)

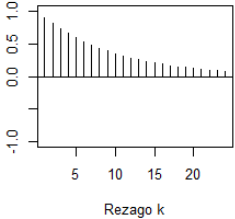
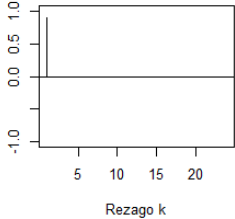
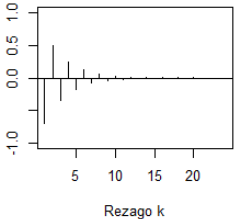
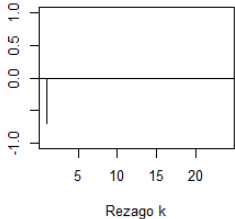
Modelo	ACF	PACF
Modelo AR(1)	$\lambda > 0$ 	$\lambda > 0$ 
	$\lambda < 0$ 	$\lambda < 0$ 

Tabla A.2: Funciones de autocorrelación del modelo AR(2)

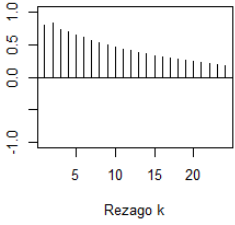
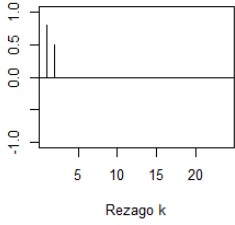
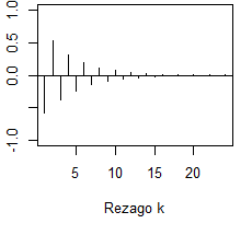
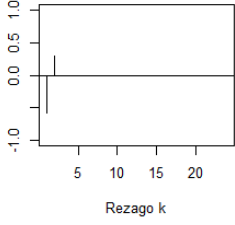
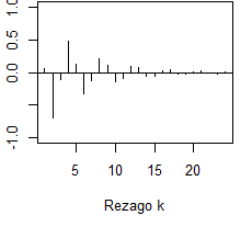
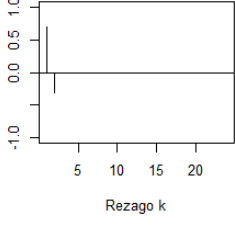
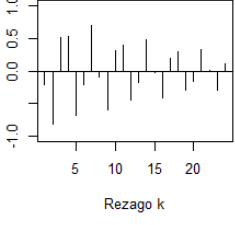
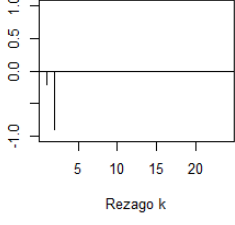
Modelo	ACF	PACF
Modelo AR(2)	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 
	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ 	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ 
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ 	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ 
	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 

Tabla A.3: Funciones de autocorrelación del modelo MA(1)

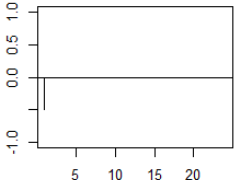
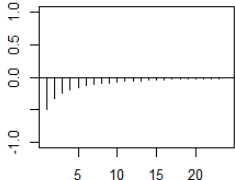
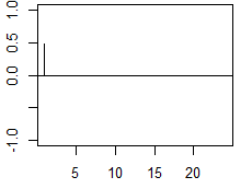
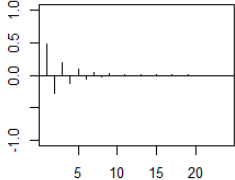
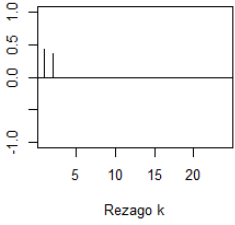
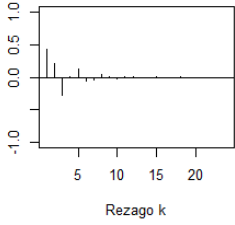
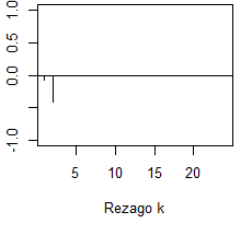
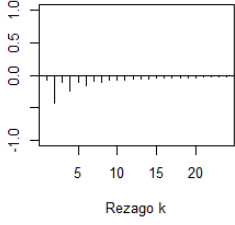
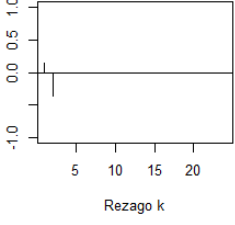
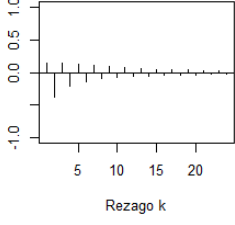
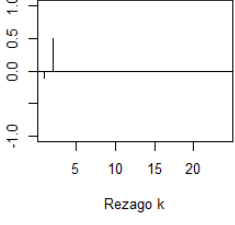
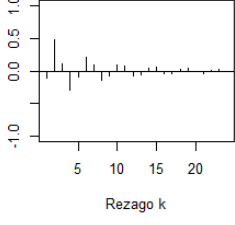
Modelo	ACF	PACF
Modelo MA(1)	$\theta_1 > 0$ 	$\theta_1 > 0$ 
	$\theta_1 < 0$ 	$\theta_1 < 0$ 

Tabla A.4: Funciones de autocorrelación del modelo MA(2)

Modelo	ACF	PACF
Modelo MA(2)	$\theta_1 < 0, \theta_2 < 0$ 	$\theta_1 < 0, \theta_2 < 0$ 
	$\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ 	$\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ 
	$\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$ 	$\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$ 
	$\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$ 	$\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$ 

# Apéndice B

## Datos del Caso de estudio

En esta sección se muestran los datos del número de accidentes de tránsito en sus diferentes clasificaciones (en Ref. [13] está la dirección de internet donde se pueden descargar las bases de datos en formato .xlsx), los cuales fueron fundamentales para el caso de estudio (Cap. 3).

Fecha	Total	Fatales	No fatales	Sólo daños	Automóvil	Camioneta	Microbús
ene-03	848	8	94	746	1459	68	36
feb-03	946	6	112	828	1553	93	40
mar-03	1058	6	124	928	1588	197	83
abr-03	978	8	145	825	1337	296	76
may-03	1100	10	150	940	1492	301	112
jun-03	998	5	164	829	1420	175	88
jul-03	1123	8	205	910	1646	95	102
ago-03	1109	10	154	945	1639	106	97
sep-03	1139	12	182	945	1629	133	95
oct-03	1306	4	214	1088	1903	154	138
nov-03	1153	8	203	942	1630	125	88
dic-03	1272	13	164	1095	1822	145	88
ene-04	1103	10	137	956	1419	93	70
feb-04	1131	18	164	949	1421	99	83
mar-04	1169	6	207	956	1421	129	86
abr-04	1029	3	171	855	1418	94	54
may-04	847	6	151	690	1261	34	55
jun-04	878	10	160	708	1252	38	97
jul-04	1023	8	164	851	1388	50	67
ago-04	1079	8	171	900	1398	59	61
sep-04	1087	6	142	939	1401	50	73
oct-04	1188	8	176	1004	1596	36	64
nov-04	983	4	127	852	1408	39	68
dic-04	984	2	165	817	1628	24	110

Fecha	Total	Fatales	No fatales	Sólo daños	Automóvil	Camioneta	Microbús
ene-05	882	9	180	693	1399	30	65
feb-05	850	8	156	686	1324	43	69
mar-05	951	12	166	773	1523	37	65
abr-05	926	12	179	735	1397	50	44
may-05	916	6	179	731	1382	42	46
jun-05	941	7	206	728	1329	90	53
jul-05	905	11	175	719	1290	55	54
ago-05	915	6	179	730	1264	94	68
sep-05	1009	11	196	802	1231	143	82
oct-05	1009	14	192	803	1350	83	89
nov-05	903	13	166	724	1209	54	47
dic-05	842	9	136	697	1215	22	21
ene-06	866	13	151	702	1205	57	32
feb-06	862	7	157	698	1232	42	20
mar-06	929	10	183	736	1420	39	33
abr-06	794	6	173	615	1078	90	22
may-06	893	6	164	723	1236	71	39
jun-06	848	14	156	678	1216	54	38
jul-06	869	11	198	660	1209	60	43
ago-06	885	7	137	741	1250	105	14
sep-06	864	14	160	690	1121	102	41
oct-06	965	1	185	779	1272	97	36
nov-06	939	8	184	747	1093	151	39
dic-06	1020	7	212	801	1369	60	51
ene-07	944	10	174	760	1136	162	37
feb-07	1027	15	190	822	1238	177	45
mar-07	1030	11	203	816	1319	175	36
abr-07	990	12	193	785	1211	181	29
may-07	1090	13	225	852	1260	205	44
jun-07	1123	12	230	881	1376	176	49
jul-07	1023	13	175	835	1255	167	48
ago-07	1060	9	199	852	1230	193	58
sep-07	1060	13	182	865	1271	212	48
oct-07	1108	12	160	936	1376	189	40
nov-07	1087	13	188	886	1312	195	51
dic-07	1111	13	196	902	1421	201	39
ene-08	913	7	153	753	1177	179	27
feb-08	1007	15	201	791	1355	127	43
mar-08	1025	13	203	809	1254	154	40
abr-08	1227	8	269	950	1548	108	48
may-08	1204	18	225	961	1603	66	43
jun-08	1121	11	219	891	1456	73	49
jul-08	1074	10	183	881	1416	100	35
ago-08	999	11	202	786	1317	78	48
sep-08	1009	9	202	798	1278	92	38
oct-08	1129	10	229	890	1476	84	51
nov-08	1110	9	217	884	1386	98	44
dic-08	1052	6	178	868	1307	104	40

Fecha	Total	Fatales	No fatales	Sólo daños	Automóvil	Camioneta	Microbús
ene-09	779	12	165	602	969	91	34
feb-09	925	7	207	711	1277	78	29
mar-09	1050	7	220	823	1451	109	32
abr-09	993	7	191	795	1336	98	26
may-09	960	11	195	754	1355	72	25
jun-09	984	9	205	770	1355	77	20
jul-09	948	9	198	741	1334	94	19
ago-09	935	7	173	755	1327	79	15
sep-09	1007	7	194	806	1435	93	23
oct-09	955	8	229	718	1414	67	26
nov-09	923	12	204	707	1331	72	27
dic-09	925	9	195	721	1265	90	25
ene-10	858	6	174	678	1183	63	30
feb-10	914	9	210	695	1265	89	34
mar-10	1012	6	207	799	1370	102	32
abr-10	847	7	204	636	1198	72	18
may-10	977	14	232	731	1349	96	20
jun-10	925	7	204	714	1249	96	17
jul-10	856	4	161	691	1148	93	15
ago-10	993	7	207	779	1378	98	27
sep-10	935	4	186	745	1238	118	20
oct-10	860	5	201	654	1170	94	23
nov-10	842	12	185	645	1147	85	26
dic-10	913	12	212	689	1282	75	20
ene-11	726	9	172	545	982	66	13
feb-11	696	4	169	523	1081	83	16
mar-11	667	6	154	507	1032	39	24
abr-11	844	10	209	625	1123	91	21
may-11	890	17	223	650	1197	65	25
jun-11	860	7	215	638	832	139	309
jul-11	785	13	185	587	1092	67	5
ago-11	835	4	201	630	1148	105	6
sep-11	724	7	171	546	974	121	6
oct-11	852	11	208	633	1131	126	14
nov-11	770	15	190	565	1012	88	8
dic-11	904	16	227	661	1233	112	16
ene-12	891	13	222	656	1196	112	6
feb-12	829	18	200	611	1113	94	5
mar-12	936	11	265	660	1227	140	21
abr-12	806	13	202	591	987	153	29
may-12	941	20	184	737	1274	95	35
jun-12	980	15	221	744	1366	118	42
jul-12	860	10	183	667	1126	117	40
ago-12	868	11	177	680	1170	97	22
sep-12	943	5	195	743	1286	123	27
oct-12	981	5	218	758	1366	107	33
nov-12	903	15	195	693	1214	98	24
dic-12	871	5	195	671	1198	115	26

Fecha	Total	Fatales	No fatales	Sólo daños	Automóvil	Camioneta	Microbús
ene-13	846	7	169	670	1194	85	27
feb-13	895	3	191	701	1317	71	18
mar-13	909	4	192	713	1293	87	32
abr-13	866	7	169	690	1213	169	31
may-13	940	4	185	751	1334	78	29
jun-13	885	8	182	695	1190	187	34
jul-13	894	9	192	693	1193	103	23
ago-13	874	13	182	679	1214	122	32
sep-13	810	6	185	619	1086	158	26
oct-13	924	3	194	727	1273	100	22
nov-13	845	11	161	673	1219	75	31
dic-13	984	10	199	775	1374	123	15
ene-14	875	10	167	698	1226	87	27
feb-14	847	6	158	683	1207	86	25
mar-14	1083	10	185	888	1550	92	20
abr-14	940	8	143	789	1302	91	30
may-14	1018	7	204	807	1378	91	36
jun-14	898	9	130	759	1230	162	26
jul-14	930	3	161	766	1220	174	10
ago-14	1003	4	210	789	1377	84	30
sep-14	984	5	177	802	1288	172	9
oct-14	1008	5	173	830	1395	146	18
nov-14	1014	6	208	800	1366	77	41
dic-14	1024	4	211	809	1442	83	27

# Apéndice C

## Código en R

### C.0.5. Código para accidentes *Totales*

```
# TOTAL
library(forecast)
datosf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralsin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosf)

y1 = ts(Total,frequency=12,start=c(2003,01))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito totales", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(Total, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(Total, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(Total), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(Total), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#diferencias estacionales de periodo 12
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(diff(Total),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(diff(Total),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(0,1,1), period=12))
a2<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,1,1), period=12))
a3<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,1,0), period=12))
```

Figura C.1: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

p1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
p2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
p3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(0,1,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(p1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(p1.predict$pred + 1.281551566*p1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p1.predict$pred - 1.281551566*p1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p1.predict$pred + 1.644853627*p1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(p1.predict$pred - 1.644853627*p1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(1,1,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(p2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(p2.predict$pred + 1.281551566*p2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p2.predict$pred - 1.281551566*p2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p2.predict$pred + 1.644853627*p2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(p2.predict$pred - 1.644853627*p2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(1,1,0)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(p3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(p3.predict$pred + 1.281551566*p3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p3.predict$pred - 1.281551566*p3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(p3.predict$pred + 1.644853627*p3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(p3.predict$pred - 1.644853627*p3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

```

Figura C.2: Código para generar gráficos de modelos ajustados

## C.0.6. Código para accidentes *Fatales*

```

library(forecast)
# FATALES
datosf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralsin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosf)

y1 = ts(Fatales,frequency=12,start=c(2003))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito Fatales", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

#Calcula las funciones de autocorrelación de la serie original
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(Fatales, 36, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(Fatales, 36, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
dd1=diff(Fatales)
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(dd1, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(dd1, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Segundas diferencias
dd2=diff(dd1)
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(dd2, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(dd2, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(0,1,1))
a2<-arima(y1,order=c(1,0,1))
a3<-arima(y1,order=c(1,0,0))

```

Figura C.3: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Predecir valores de acuerdo a cada modelo
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

#Grafica el primer modelo ajustado
win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,1))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("real", "ajustado", "pronóstico", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("gray0", "green",
"red", "blue", "deepskyblue1"))

#Grafica el segundo modelo ajustado
win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,0,1))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("real", "ajustado", "pronóstico", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("gray0", "green",
"red", "blue", "deepskyblue1"))

#Grafica el tercer modelo ajustado
win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,0,0))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("real", "ajustado", "pronóstico", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("gray0", "green",
"red", "blue", "deepskyblue1"))

```

Figura C.4: Código para generar gráficos de modelos ajustados

### C.0.7. Código para accidentes *No fatales*

```

# NO FATALES
library(forecast)
datosf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralsin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosf)

y1 = ts(Nofatales,frequency=12,start=c(2003))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito No fatales", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(Nofatales, 36, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(Nofatales, 36, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))

acf(diff(Nofatales), 25, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(Nofatales), 25, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(0,1,2))
a2<-arima(y1,order=c(0,1,1))
a3<-arima(y1,order=c(1,1,2))
a4<-arima(y1,order=c(3,1,1))
a5<-arima(y1,order=c(2,1,1))
a6<-arima(y1,order=c(4,1,1))

```

Figura C.5: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Pronosticar con los tres mejores modelos (de acuerdo al AIC)
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,2))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,1))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,2))))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.281551566*y3.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.281551566*y3.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.644853627*y3.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.644853627*y3.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("topleft", legend=c("pronóstico", "ajustado", "real", "90%", "95%"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("red", "green",
"gray0", "blue", "deepskyblue1"))

```

Figura C.6: Código para generar gráficos de modelos ajustados

## C.0.8. Código para accidentes *Sólo daños*

```

# SÓLO DAÑOS
library(forecast)
datosf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralSin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosf)

y1 = ts(Solodaños,frequency=12,start=c(2003,01))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito de sólo daños", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(Solodaños, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(Solodaños, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(Solodaños), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(Solodaños), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#diferencias estacionales 12
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(diff(Solodaños),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(diff(Solodaños),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))
a2<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(2,0,1), period=12))
a3<-arima(y1,order=c(0,1,2), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))

```

Figura C.7: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Pronosticar con los tres modelos propuestos
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(1,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(2,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,2)(1,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

```

Figura C.8: Código para generar gráficos de modelos ajustados

### C.0.9. Código para accidentes *Automóvil*

```

#AUTO
library(forecast)
datosnf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralsin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosnf)

y1 = ts(auto, frequency=12, start=c(2003,01))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito de Automóviles", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(auto, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(auto, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(auto), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(auto), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#diferencias estacionales 12
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(diff(auto),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(diff(auto),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(0,1,1), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))
a2<-arima(y1,order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))
a3<-arima(y1,order=c(2,1,1), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))

```

Figura C.9: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Pronosticar con los tres modelos propuestos
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,1)(1,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19),
col=c("blue", "deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)(1,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(2,1,1)(1,0,1)[12]))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.281551566*y3.predict$sse, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.644853627*y3.predict$sse, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("bottomleft", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

```

Figura C.10: Código para generar gráficos de modelos ajustados

## C.0.10. Código para accidentes *Camioneta*

```

#CAMIONETA
library(forecast)
datosnf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralSin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosnf)

y1 = ts(camioneta, frequency=12, start=c(2003,01))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito de camionetas", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

win.graph()
par(mfrow=c(1,2))

acf(camioneta, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(camioneta, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(camioneta), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(camioneta), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#diferencias estacionales 12
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(diff(camioneta),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(diff(camioneta),12), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos Propuestos
a1<-arima(y1,order=c(1,1,1))
a2<-arima(y1,order=c(0,1,1))
a3<-arima(y1,order=c(1,1,0), seasonal=list(order=c(1,0,1), period=12))

```

Figura C.11: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Pronosticar valores con los tres primeros modelos
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("top", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,1)))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("top", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(0,1,1)))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a3), col="green", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.281551566*y3.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.281551566*y3.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred + 1.644853627*y3.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y3.predict$pred - 1.644853627*y3.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
legend("top", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19), col=c("blue",
"deepskyblue1", "gray0", "green", "red"))

```

Figura C.12: Código para generar gráficos de modelos ajustados

## C.0.11. Código para accidentes *Automóvil*

```

# MICROBUS
library(forecast)
datosf <- read.csv(file="c:/users/Lila/Desktop/MGeneralsin3.csv", header=TRUE, sep=",")
attach(datosf)

y1 = ts(microbus,frequency=12,start=c(2003,01))
win.graph()
plot(y1, main="Accidentes de tránsito de Microbús", xlab="Tiempo t", ylab="Número de accidentes", type="o", pch=20)

#ACF y PACF de serie original
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(microbus, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(microbus, 37, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Primeras diferencias
win.graph()
par(mfrow=c(1,2))
acf(diff(microbus), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="ACF")
pacf(diff(microbus), 48, xlab="Rezago k", ylab="", main="PACF")

#Modelos propuestos
a1<-arima(y1,order=c(1,1,1))
a2<-arima(y1,order=c(2,1,1))
a3<-arima(y1,order=c(3,1,1))
a4<-arima(y1,order=c(2,1,2))

```

Figura C.13: Código para generar gráficos de funciones de autocorrelación

```

#Pronosticar valores con los tres primeros modelos
y1.predict=predict(a1, n.ahead=9)
y2.predict=predict(a2, n.ahead=9)
y3.predict=predict(a3, n.ahead=9)
y4.predict=predict(a4, n.ahead=9)

win.graph()
plot(y1, ylim=c(-15,300), xlim=c(2003,2015.5), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(1,1,1)))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a1), col="green", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.281551566*y1.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred + 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y1.predict$pred - 1.644853627*y1.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
abline(h=0)
legend("top", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue", "deepskyblue1",
"gray0", "green", "red"))

win.graph()
plot(y1, xlim=c(2003,2015.5), ylim=c(-15,300), type="o", main=(expression(paste("Pronóstico de accidentes de tránsito con el modelo ",
ARIMA(2,1,1)))), ylab="Número de accidentes", xlab="Tiempo t")
points(fitted(a2), col="green", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred, col="red", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.281551566*y2.predict$se, col="blue", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred + 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
lines(y2.predict$pred - 1.644853627*y2.predict$se, col="deepskyblue1", type="o", pch=20)
abline(h=0)
legend("top", legend=c("90%", "95%", "real", "ajustado", "pronóstico"), pch=c(19,19,19,19,19), col=c("blue", "deepskyblue1", "gray0",
"green", "red"))

```

Figura C.14: Código para generar gráficos de modelos ajustados

# Apéndice D

## Significancia de los coeficientes

### Principio de parsimonia

Sea  $\phi$  cualquier parámetro del modelo de Box-Jenkins,  $\hat{\phi}$  la estimación puntual de  $\phi$  y  $\hat{S}_{\hat{\phi}}$  el error estándar de la estimación puntual de  $\phi$ . Entonces, el valor  $t$  asociado con  $\hat{\phi}$  es

$$t_{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{\hat{S}_{\hat{\phi}}},$$

para ver si el parámetro es relevante en el modelo, se plantea el siguiente juego de hipótesis:

$H_0$ :  $\phi = 0$  (no es significativo en el modelo)

$H_0$ :  $\phi \neq 0$  (si es significativo en el modelo).

Supóngase que el modelo Box-Jenkins en estudio utiliza  $n_p$  parámetros, se define el estadístico de prueba como:

$$t_{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{\hat{S}_{\hat{\phi}}},$$

así, se rechaza  $H_0$  si

$$|t_{\phi}| > t_{(n-n_p, \alpha/2)},$$

de esta forma, se pueden omitir parámetros que no sean significativos en el modelo.



# Bibliografía

- [1] B. L. BOWERMAN, R. T. O'CONNELL y A. B. KOEHLER, *Pronósticos, series de tiempo y regresión: un enfoque aplicado*, 4a ed. (Thomson, México D.F., 2007).
- [2] L. RINCON, *Introducción a los procesos estocásticos*, 1a ed. (UNAM, México D.F., 2012).
- [3] C. L. JENNINGS, M. KULACHI and D. C. MONTGOMERY, *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*, 1st ed. (John Wiley & Sons, New Jersey, 2008).
- [4] G. E. P. BOX and G. M. JENKINS, *Time series analysis forecasting and control*, 2nd ed. (Holden-Day, San Francisco, 1976).
- [5] W. MENDENHALL, R. L. SCHEAFFER and D. D. WACKERLY, *Estadística matemática con aplicaciones*, 7a ed. (Cengage Learning Editores, México D.F., 2010).
- [6] A. GUARDIOLA *Manual de introducción al seguro*, 1a ed. (MAPFRE, Madrid, 1990).
- [7] P. J. BROCKWELL and R. A. DAVIS, *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd ed. (Springer, New York, 2002).
- [8] R. H. SHUMWAY and D.S. STOFFER, *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*, 3rd ed. (Springer, New York, 2011).
- [9] D. N. GUJARATI y D. C. PORTER, *Econometría*, 5a ed. (McGraw-Hill/Interamericana editores, México D.F., 2010).
- [10] V. GUERRERO, *Modelos estadísticos para series de tiempo univariadas* (CINVESTAV, Patzcuaro Michoacán, 1987).
- [11] J. C. VARGAS, *Fundamentos para el desarrollo de Productos de daños*, [http : //www.cnsf.gob.mx/Eventos/Premios\\_2014/X\\_Seguros\\_3.pdf](http://www.cnsf.gob.mx/Eventos/Premios_2014/X_Seguros_3.pdf).
- [12] L. MOLINARIO y A. MINZONI, *Lecciones de técnica actuarial de los seguros contra los daños* (UNAM, México D.F., 1976).
- [13] INEGI, *Bases de datos*, ([http : //www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/bd/continuas/transporte/accidentes.asp?s=est&c=13159&proy=atus\\_accidentes](http://www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/bd/continuas/transporte/accidentes.asp?s=est&c=13159&proy=atus_accidentes)).
- [14] M. F. TRIOLA, *Estadística*, 10a ed. (Pearson Educación, México D.F., 2009).
- [15] W. W. S. WEI, *Time series analysis univariate and multivariate methods*, 2nd ed. (Pearson Education, Inc., United States of América, 2006).