



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterización polarimétrica de un vórtice parcialmente
coherente.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Salvador Hernández Morales

Asesorado por

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría

Dr. Andrey S. Ostrovsky

Puebla Pue.
Marzo del 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterización polarimétrica de un vórtice parcialmente
coherente.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Salvador Hernández Morales

Asesorado por

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría

Dr. Andrey S. Ostrovsky

Puebla Pue.
Marzo del 2023

Título: Caracterización polarimétrica de un vórtice parcialmente coherente.

Estudiante: SALVADOR HERNÁNDEZ MORALES

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo
Carrasco
Presidente

Dr. Carlos Ignacio Robledo
Sánchez
Secretario

Dra. María del Rosario
Pastrana Sánchez
Vocal

Dra. Rosibel Carrada
Legaria
Vocal

Dra. Areli Montes Pérez.
Suplente

Dr. Miguel Ángel Olvera
Santamaría
Dr. Andrey S. Ostrovsky
Asesor

*“Astrónomos comprendiendo el enigmático universo,
a partir de la radiación electromagnética de estrellas
y su interacción con cuerpos celestes; quizás principios.
Biólogos estudiando la evolución de sistemas orgánicos,
con capacidad sensorial a campos electromagnéticos,
esenciales para sustentar la vida; quizás casualidad.
Aun así, a través de mis efímeros ojos procuro
comprender la naturaleza de la materia
y de la luz; quizás un pasante.”*
Hernández Morales, Salvador.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre Leticia Morales Maya y a mi padre Salvador Hernández Martínez, por su apoyo incondicional que me han aportado y lo seguirán haciendo. Sin su arduo esfuerzo, dedicación, orientación y lecciones de vida en mi formación como persona, no habría podido llegar a la culminación de esta etapa extraordinaria de mi vida. Asimismo, agradezco a mi hermana Monserrat Hernández Morales, por su compañía y su cariño, además, de su apoyo como compañera en este sendero académico. También, quiero darle un agradecimiento especial a mi mejor amiga Paulina Davila Arroyo por el incondicional apoyo emocional en los años que nos hemos conocido.

No menos importante, les agradezco a todos los miembros de mi jurado: Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco, Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez, Dra. Rosibel Carrada Legaria y Dra. Areli Montes Pérez. Más allá de su compromiso en la revisión de este trabajo, agradecerles también por ser parte de los docentes que inculcaron y moldearon el conocimiento fundamental en mi formación como estudiante.

Por supuesto, un gran agradecimiento en particular a mis asesores Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría y Dr. Andrey S. Ostrovsky, por el tiempo dedicado a mi como pasante para la culminación de este proyecto. De igual manera, por su vivaz forma de ser al transmitir sus conocimientos como docentes.

A pesar de las adversidades que tuvimos que pasar en esta época, no me queda más que decir muchas gracias a mi familia, amigos, compañeros y profesores.

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	2
2. Coherencia y polarización de campos ópticos	4
2.1. Proceso estocástico y características estadísticas	4
2.1.1. Estacionariedad y ergodicidad	6
2.2. Función de correlación y grado de coherencia	6
2.2.1. Función característica	7
2.2.2. Función de correlación	7
2.2.3. Señal analítica y señal óptica	8
2.2.4. Coherencia óptica	10
2.2.5. Grado de coherencia complejo de una señal analítica	13
2.3. La propagación de la coherencia mutua en el espacio libre	16
2.4. Estado de polarización	17
2.4.1. Polarización	17
2.4.2. Estados de polarización a partir elipse de polarización	18
2.5. Matriz de densidad espectral cruzada de un haz electromagnético estocástico . . .	22
2.6. Evolución de la polarización de haces de luz al propagarse	23
3. Fuente secundaria parcialmente coherente con vórtice	26
3.1. Vórtices ópticos parcialmente coherentes	26
3.1.1. Fuente secundaria parcialmente coherente en modos Bessel con vórtice . . .	27
3.2. Campos parcialmente coherentes invariantes en propagación	29
3.3. Técnica de generación para una fuente secundaria parcialmente coherente con estructura modal Bessel	29
4. Evolución de la polarización de un vórtice en propagación	34
4.1. Propagación de vórtices ópticos parcialmente coherentes	34
4.2. Caracterización polimétrica mediante polarimetría de Stokes	35
4.2.1. Parámetros de Stokes	36
4.2.2. La matriz columna de Stokes	37
4.3. Polarimetría de Stokes	39
4.3.1. Procedimiento de Stokes	39
4.3.2. Procedimiento de Collett	41
5. Resultados y simulaciones numéricas	42
5.1. Metodología de la síntesis numérica para la caracterización polarimétrica de la fuente generada	43
5.2. Resultados	47
5.2.1. Generación del campo en el plano de entrada	47

5.2.2. Generación del campo en el plano de Fourier	49
5.2.3. Polarimetría del campo de entrada	52
5.2.4. Polarimetría del vórtice en el plano de Fourier	54
5.3. Análisis de resultados	55
6. Conclusiones	59
A. Apéndice	61
A.1. Realizaciones por pasos	61
A.2. Pruebas y proceso de Bernoulli	61
A.3. Pruebas y proceso de Poisson	62
A.4. Proceso de Gauss	63
A.5. El teorema de van Cittert-Zernike	64
A.6. Polarización de un haz electromagnético cuasimonocromático	66
A.7. Grado de polarización	66
A.8. Parámetros globales para caracterizar polarización total	67
Bibliografía	71

Índice de figuras

2.1. Diagrama ilustrativo del interferómetro de Michelson donde S es la fuente, D el divisor de haz, M espejos y $\mathfrak{B}$ el plano de observación.	11
2.2. Diagrama ilustrativo del experimento de interferencia de Young donde S es la fuente, P_1 y P_2 son aberturas en el plano $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ el plano de observación.	12
2.3. Diagrama de la notación relacionada al experimento de interferencia de Young. . .	13
2.4. Diagrama de los parámetros que describen la elipse de polarización. La luz se propaga en dirección fuera del papel.	20
2.5. Diagrama de Lissajous para la elipse de polarización. La luz se propaga en dirección fuera del papel.	21
2.6. Diagrama de un haz electromagnético estocástico a través del experimento de interferencia de Young.	23
2.7. Esquema de la notación usada.	24
3.1. Esquema del sistema óptico para generar una fuente con vórtice parcialmente coherente.	30
3.2. Esquema de los planos focales de una lente convergente.	31
3.3. Densidad espectral $S(\mathbf{r})$, obtenida a partir de la ecuación (3.30), para varias combinaciones de ν y de relación σ/R . Derecha, resultados teóricos, izquierda, resultados experimentales.	33
5.1. Esquema general de la síntesis numérica de una fuente secundaria con vórtice parcialmente coherente.	42
5.2. Esquema de la caracterización polarimétrica a simular correspondiente al plano de entrada.	44
5.3. Distribución de fase de los campos obtenidos en el sistema de transformada de Fourier de una realización, para $\nu = 30$ con $\sigma/R = 1.00$	45
5.4. Esquema de la caracterización polarimétrica a simular correspondiente al plano de salida.	45
5.5. Diagrama del proceso de síntesis numérica y la caracterización polarimétrica de un vórtice óptico parcialmente coherente.	46
5.6.1. Resultado de la simulación del vórtice discreto generado para una carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1,00$	47
5.6.2. Resultados de la simulación del vórtice de entrada generado para distintas cargas topológicas ν y distintos valores de σ/R	48
5.7.1. Resultado de la simulación del vórtice óptico generado para una carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1,00$	49
5.7.2. Resultados de la simulación del vórtice óptico generado para distintas cargas topológicas ν y distintos valores de σ/R	50

5.8. Intensidad espectral $S(\mathbf{r})$ normalizada y sus correspondientes patrones $2D$ para diferentes valores de carga topológica ν con $\sigma/R = 1.00$, en el plano de Fourier. Arriba, numéricamente, abajo, teóricamente.	51
5.9. Intensidades correspondientes a la parte polarizada de un vórtice óptico parcialmente coherente con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1.00$, empleados en el cálculo de los parámetros de Stokes.	52
5.10. Resultados de la caracterización polarimétrica del vórtice óptico en el plano de entrada para diferentes valores de carga topológica ν y distintas razones de σ/R . .	53
5.11. Resultados de la caracterización polarimétrica del vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel, para diferentes valores de carga topológica ν y distintas razones de σ/R en el plano de Fourier.	54
5.12. Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 0.50$	55
5.13. Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con carga topológica $\nu = 30$ y distintas razones de σ/R	56
5.14. Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con razón $\sigma/R = 0.50$ y diferentes valores de carga topológica ν	56
5.15. Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 0.50$ en el plano de Fourier.	57
5.16. Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con carga topológica $\nu = 30$ y distintas razones de σ/R en el plano de Fourier.	58
5.17. Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con diferentes cargas topológicas ν y $\sigma/R = 0.50$ en el plano de Fourier.	58
A.1. Diagrama ilustrativo del proceso de Bernoulli.	62
A.2. Ilustrando la notación relacionada con el teorema de van Cittert-Zernike.	65

Resumen

Un campo óptico parcialmente coherente puede representarse como una superposición de modos completamente coherentes y no correlacionados entre sí. Dicha representación ha permitido generar experimentalmente una amplia gama de campos incluyendo vórtices parcialmente coherentes. En particular los, así llamados, modos de Bessel han sido aplicados para generar vórtices invariantes en propagación. Sin embargo, la invariancia de la coherencia ante propagación puede no implicar la invariancia de otras propiedades del campo. En este trabajo investigamos la evolución de la distribución de polarización transversal de un vórtice parcialmente coherente, con estructura modal Bessel, al propagarse en el espacio libre. Para ello empleamos un método *in silico* basado en la medición de los parámetros de Stokes con resolución espacial y a partir de ellos determinar los estados de polarización en toda la sección transversal del campo. Este método conocido como Polarimetría de Stokes se aplica a las intensidades de vórtices generados a partir de un ensamble de realizaciones del campo, en el plano de observación. Los resultados revelan que en general la polarización no es invariante ante propagación, los estados de polarización en la sección transversal del campo cambian en propagación, pero en la vecindad de la singularidad correspondiente a la región de mínimos de intensidad, la polarización es completamente lineal y uniforme. Analizamos algunas posibles causas y consecuencias de este fenómeno.

Capítulo 1

Introducción

A principios de los años sesenta, con la invención del *láser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, por sus siglas en inglés LASER), el campo de la física del láser determinó que la luz que emite posee propiedades únicas como coherencia, direccionalidad, monocromaticidad e intensidad. Además, al pasar de los años, sus aplicaciones permitieron tener grandes aplicaciones tanto en la ciencia como en la vida cotidiana. Por ejemplo, fue posible estudiar con mayor detenimiento la presión de la radiación utilizando haces de luz intensos y colimados [1].

La estructuración de la luz láser para atrapar y manipular partículas dieléctricas dio origen a las “*pinzas ópticas*”, dada la capacidad de la luz para ejercer fuerza o presión de radiación, desarrolladas originalmente en la década de los sesenta en los trabajos pioneros de Arthur Ashkin [2]. Para 1986, poco después de sus primeras implementaciones, Ashkin se dio cuenta de inmediato de su posible aplicabilidad a los sistemas biológicos, lo que lo llevó a orientar sus futuras investigaciones en dicha área [1].

Por otra parte, en 1989, Pierre Coullet y colaboradores encontraron las soluciones con vórtice a partir de las ecuaciones de Maxwell-Bloch dando origen al concepto de *vórtice óptico*, inspirados en los vórtices hidrodinámicos [3]. Como nota, la analogía entre la física del láser y la física de los fluidos/superfluidos ya se reconocía en 1970, al reducir las ecuaciones de láser a ecuaciones complejas de Ginzburg-Landau. Por ello, muchas de las características hidrodinámicas se estudiaron análogamente en campos ópticos y se observaron en sistemas de láser. Una característica importante de un vórtice óptico es que tiene una fase helicoidal con una singularidad y posee carga topológica, que físicamente se manifiestan como un cero de intensidad en el punto singular y una región oscura en la vecindad de tal punto [4].

En 1992, Les Allen y colaboradores propusieron el momento angular orbital en haces con vórtice que se propagan en la aproximación paraxial [5], lo que reveló una nueva comprensión de la conexión entre la óptica macroscópica y los efectos cuánticos. Por ende, los haces con vórtice están caracterizados por el factor de Hilbert ($\exp(i\ell\theta)$), por ejemplo, los modos Laguerre-Gaussiano pueden transportar el momento angular orbital equivalente a $\ell\hbar$ por fotón (ℓ es un número entero), y este momento angular puede ser mucho mayor que el momento angular del espín relacionado con el giro del fotón [4].

Para el año 2010, ya existía un gran avance de las teorías sobre la manipulación de partículas clásicas (como las aportadas por el grupo de Dholakia en 2002 [6]) y aplicaciones cuánticas (como el entrelazamiento de los estados de momento angular orbital de los fotones propuesta por el grupo de Zeilinger en 2001 [7]). También se destacaron aplicaciones en astrometría (como lo publicado por Harwit en 2003 [8]), microscopia (en 2005 el grupo de Ritsch-Marte publicó el uso del momento angular orbital en microscopia [9]) y aplicaciones biomédicas (Zhuang publicó en 2003 como usar haces con vórtice para ensamblar ADN [10]). Más aún, para el uso de comunicaciones ópticas (por ejemplo, la tecnología para codificar propuesta por Barreiro y su grupo en 2008 [11]).

En la actualidad, se han continuado desarrollando las teorías que caracterizan vórtices y sus dife-

rentes aplicaciones, incluso los métodos de generación con el fin de controlar y definir sus variables características [4]. Estudios han demostrado que los campos que portan vórtice ocurren en sistemas coherentes, que tienen una fase bien definida, o parcialmente coherentes donde se requieren herramientas estadísticas para cuantificar los efectos de las fases aleatorias [12]. Aunque, el problema de la elaboración experimental de una fuente secundaria, con propiedades estadísticas de coherencia y polarización controladas, es un problema abierto. Debido a que comercialmente no existen fuentes ópticas parcialmente coherentes que posean propiedades estadísticas controlables [13], por ejemplo, la fuente comúnmente utilizada en la práctica óptica es el láser de gas cuya radiación es casi completamente coherente y polarizada [14]. Ya han demostrado que se puede emplear el modulador espacial de luz (SLM) de cristal líquido (LC) controlado por computadora para este fin. De modo que, para generar el vórtice parcialmente coherente es posible utilizar un sistema óptico de *Transformada de Fourier* con un LC-SLM controlado por computadora en su entrada. Sin embargo, no todos los vórtices parcialmente coherentes generados mediante esta técnica mantienen su forma, es decir, el sistema está limitado por difracción y en consecuencia el vórtice puede cambiar al propagarse en el espacio [13].

En particular, estudios previos ya han presentado una nueva familia de vórtices ópticos que se propagan de forma adifraccional dentro de ciertos límites. Esto fue posible mediante la teoría conocida como “*Representación en Modos Coherentes*”, en donde el campo puede representarse como una superposición incoherente de modos ortogonales no correlacionados entre si pero completamente correlacionados con ellos mismos [15]. Con esta técnica es posible la realización de una fuente secundaria parcialmente coherente con vórtice, con estructura modal Bessel, la cual se puede generar aproximadamente por medio de un sistema óptico de Transformada de Fourier que incorpora a un LC-SLM, controlado por computadora que opera en modo de modulación de solo fase. En este caso, el campo de entrada es un haz Gaussiano completamente coherente con un ancho de haz controlable en la región transversal, para modificar la coherencia del vórtice óptico [13]. Esto significa que se han explorado las propiedades teóricas y prácticas de los vórtices ópticos formados con luz parcialmente coherente [12].

Por otra parte, un resultado fundamental en Óptica indica que la polarización de un haz de luz, en general, cambia mientras el haz se propaga en el espacio libre [16]. Entonces, en general, un campo óptico parcialmente coherente sufrirá cambios de polarización al propagarse. Por lo que es posible suponer que para un vórtice óptico parcialmente coherente invariante en propagación, su polarización sufra cambios en propagación.

Por estas razones, se decidió realizar vía *in silico* la caracterización polarimétrica de una fuente secundaria con vórtice parcialmente coherente, con estructura modal Bessel, utilizando la técnica de “*Polarimetría de Stokes*”. La finalidad de este trabajo es determinar los estados de polarización del vórtice óptico la región transversal del campo óptico, en el plano del haz Gaussiano modulado y en el plano de Fourier. Asimismo, esta técnica polarimétrica nos permitirá analizar la polarización que posee el vórtice óptico tanto en su anillo como en la singularidad de fase o núcleo, para identificar posibles cambios en términos de su coherencia y carga topológica.

Capítulo 2

Coherencia y polarización de campos ópticos

Básicamente, todos los procesos ópticos tienen carácter aleatorio, la razón de ello es posible justificarlo considerando el proceso de formación de imágenes. Primero, la radiación óptica generada por cualquier fuente real tiene un carácter aleatorio, si se trata de una fuente térmica la luz que emite se debe al movimiento caótico de las moléculas, en caso de un láser continuo su luz emitida se determina por las transiciones cuánticas de los electrones. Luego, la luz al propagarse en un medio sufre cambios por las fluctuaciones aleatorias de las características ópticas del medio. Prosiguiendo, la interacción de la luz con la materia tiene un carácter estadístico. Por último, cualquier detector de luz posee ruidos internos propios que causan alteraciones aleatorias a la imagen registrada. Por ende, todos los factores mencionados influyen en la calidad de la imagen formada por un sistema óptico. No obstante, hay modelos matemáticos adecuados de los procesos de generación, propagación y detección de radiación óptica. El desarrollo de tales modelos, expresados en términos de estadísticas matemática, constituye precisamente el objetivo principal de la Óptica Estadística [17]. De modo que es necesario revisar parte de la teoría de probabilidad y estadística para estudiar a la luz como un proceso estocástico [18].

2.1. Proceso estocástico y características estadísticas

Cuando uno estudia experimentos aleatorios es necesario considerar la teoría de probabilidad para comprender sus resultados, pues pueden ser representados por variables aleatorias. Aunque, por lo general, el enfoque de las variables aleatorias se aplica a los problemas aleatorios que no son necesariamente en función de un parámetro temporal [19], varias aplicaciones prácticas de la probabilidad tienen que ver con procesos aleatorios que evolucionan en la dimensión espacio-temporal, suponiendo que no presentan alguna restricción para que la evolución del proceso pueda continuar [20].

Sabemos que las variables aleatorias son el mapeo de algún evento $s \in S$, donde S es algún espacio muestral, para algún valor real $X(s)$ [19]. En consecuencia, una variable aleatoria $X(s)$ es una función del tiempo si $X(s, t)$ o $X[s(t)]$, con $t \in T$ siendo T el *parámetro del conjunto* del proceso. Por ende, el ensamble o familia de todas las variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad dado, indexada por el *parámetro temporal* t , se le denomina *proceso aleatorio* o *proceso estocástico* [19, 21].

De esta manera, el concepto de un *proceso aleatorio* o *estocástico*, debe representar una generalización de la idea de un conjunto de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \dots\}$, cuando el conjunto ya no es contable y las variables forman un continuo [18]. Por lo tanto, por simplicidad, los procesos estocásticos que trataremos se limitan a evolucionar en una sola dimensión, siendo la dimensión

temporal a la cual le asociamos por definición *el tiempo* t [20].

Definición 2.1 Sea un espacio de probabilidades $(S, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, donde S es el espacio muestral de todos los posibles resultados s tal que $s \in S$, $\mathcal{F}$ es el campo o espacio de eventos donde se define el álgebra, por ejemplo, el campo de números reales $\mathbb{R}$, y $\mathcal{P}$ una función de medida de probabilidad. Un *proceso aleatorio o estocástico* es cualquier ensamble de variables aleatorias X asociadas a eventos s , definidas en el espacio de probabilidades, tal que $\{X(s_1, \dots, s_j; t_1, \dots, t_j) \mid 0 < t_j \in T\}$ siendo t_j la variable dependiente del tiempo definido en un conjunto índice temporal T . Donde j puede determinar si el proceso es discreto o continuo, también, si la cantidad de eventos son contables o incontables [19, 20, 22].

En la vida real, uno no esta tan interesado en los resultados de los eventos s en el espacio muestral S , sino en los resultados numéricos reales asociados a dichos eventos, porque se pueden obtener las medidas correspondientes a sus probabilidades. De acuerdo con la definición de un proceso estocástico, denotamos al proceso como $X(t) = \{X_1(t_1), \dots, X_j(t_j)\}$, siendo t_j el tiempo, donde $X_j(t_j)$ es una realización muestral para cualquier punto s en el espacio muestral S [19, 20]. De modo que, a dichas variables aleatorias del proceso se le asocian funciones muestrales, denotadas como $x_j(t_j) = X_j(t_j)$. Por lo tanto, un proceso estocástico se puede definir como el conjunto de todas las funciones muestrales posibles $X(t) = \{x_1(t_1), \dots, x_j(t_j)\} = \{x(t)\}$, con la medida correspondiente de sus probabilidades [17].

Las principales características de un proceso estocástico son: Primero, el espacio de estado corresponde al dominio de todas las variables aleatorias X_j , puede ser discreto o continuo. Segundo, los parámetros del conjunto de eventos aleatorios, por ejemplo, dependiendo en la cantidad de elementos en T los procesos estocásticos tendrán componentes finitas o infinitas. Por último, las relaciones de dependencia entre varias variables aleatorias X_j , es decir, la existencia de una distribución conjunta descrita por probabilidades o densidades de probabilidad que definen por completo el sistema [20, 22].

Si consideremos algún proceso estocástico es discreto, entonces la función de distribución de probabilidad conjunta, denotada por F de j -ésimo orden, es tal que

$$F_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1, \dots, t_j) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_j \leq x_j). \quad (2.1)$$

Aún más, si el proceso estocástico es continuo, se define la densidad de probabilidad conjunta ρ , como

$$\rho_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1, \dots, t_j) = \frac{\partial^j}{\partial x_1 \dots \partial x_j} F_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1, \dots, t_j). \quad (2.2)$$

Continuando con el caso continuo, nos permite definir la esperanza matemática y varianza del proceso estocástico, como:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \rho_X(x, t) dx, \\ Var[X(t)] &= \sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - m_X(t)|^2 \rho_X(x, t) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cuando las esperanzas y varianzas coinciden entre realizaciones, se tiene una propiedad importante para poder distinguirlas. Para ello, sean dos observables $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$ de un proceso estocástico con sus funciones muestrales $x_1(t_1)$ y $x_2(t_2)$ respectivamente, definidos en el mismo espacio de probabilidad, requerimos aplicar la función de correlación [17, 19, 21], esto es

$$\Gamma(x_1, x_2; t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_2(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)\rho_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2. \quad (2.4)$$

Observamos, si los tiempos t_1 y t_2 son muy cercanos, entonces las variables aleatoria X_1 y X_2 son muy correlacionados, debido a que la función muestra no puede cambiar tan rápido para ser muy diferente. Caso contrario, si los tiempos t_1 y t_2 son muy lejanos, obtendríamos poca correlación entre

los valores de las variables aleatorias X_1 y X_2 . Notamos que hasta ahora las funciones muestrales $x(t)$ tienen valores reales, pero puede darse el caso que proceso estocástico requiera de asociarlo con números complejos y deben considerar sus conjugados [17].

2.1.1. Estacionariedad y ergodicidad

Es posible simplificar la descripción de un proceso estocástico si satisface ciertas condiciones como *estacionariedad* y *ergodicidad*. Un proceso estacionario está definido en uno de los dos sentidos *estricto* o *amplio*. Para el caso de un *proceso estacionario en el sentido estricto* se debe cumplir que todas sus funciones de distribución de probabilidad conjuntas son invariantes bajo transformaciones de desplazamiento en el tiempo. Para el caso discreto, la función de distribución de probabilidad conjunta F deberá satisfacer que

$$F_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1, \dots, t_j) = F_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1 - \tau, \dots, t_j - \tau). \quad (2.5)$$

Cuando las funciones de distribución de probabilidad conjunta son diferenciables, tenemos el caso continua y se tiene una misma condición para las densidades de probabilidad conjunta ρ , esto es:

$$\rho_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1, \dots, t_j) = \rho_{X_1, \dots, X_j}(x_1, \dots, x_j; t_1 - \tau, \dots, t_j - \tau). \quad (2.6)$$

Donde τ es cualquier valor definido en el mismo dominio que t_j .

Pero para llamarlo un *proceso estacionario en el sentido amplio* se tienen que cumplir las siguientes condiciones, siendo $X = \{X_1, \dots, X_j\}$:

- 1) $m_X(t) = E[X(t)] = \text{const.}$
- 2) $\sigma_X^2(t) = \text{Var}[X(t)] = E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 = \text{const.}$
- 3) $\Gamma_X(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_2^*(t_2)] = E[X_1(t_1)X_2^*(t_1 + \tau)] = \Gamma_X(\tau), \tau = t_2 - t_1.$

Notamos que la última propiedad está asociada con la *función de correlación* que resulta muy importante para otros análisis [17, 19, 21].

Por último, se le denomina *proceso ergódico* a un proceso estocástico si todos los promedios de tiempo son equivalentes a los promedios estadísticos correspondientes [19]. En otras palabras, un proceso aleatorio se le denomina ergódico solamente si es estacionario en el sentido estricto. Asimismo, si el promedio sobre el conjunto $\{x(t)\}$ es igual al promedio en el tiempo de la función muestra $x(t)$ [17], esto es

$$E[X(t)] = m_X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt. \quad (2.8)$$

Es decir, un proceso aleatorio ergódico es un proceso estacionario donde cada elemento del ensamble se comporta estadísticamente de manera similar que el propio conjunto. De modo que, es posible determinar el comportamiento estadístico del conjunto examinando solo con una función muestral típica [21].

2.2. Función de correlación y grado de coherencia

Dado la complejidad de describir procesos estocásticos especificando todas sus funciones de distribución finitas o sus densidades de probabilidad, se opta por aplicar la teoría de las funciones de momentos [23]. Pues puede utilizarse para encontrar los momentos de una variable aleatoria [19] y, a partir de estos momentos, podemos obtener lo que se denomina *correlación*. Habitualmente estamos más familiarizados con los momentos de primer orden, es decir, el promedio. Aún más, si obtenemos el segundo orden, obtenemos la varianza [23]. Pero dependen de algún valor, por ejemplo, u siendo un parámetro real. Sin embargo, hay una forma alternativa de encontrar los momentos de una variable aleatoria que se introduce a continuación [19].

2.2.1. Función característica

La función característica de una variable aleatoria es una poderosa herramienta para analizar la distribución de sumas de variables aleatorias independientes. De la misma manera que la función generadora de momentos se relaciona con la transformada de Laplace, tenemos que la función característica se asocia con la transformada de Fourier [18, 22].

Definición 2.2.1 Consideremos a X como un variable aleatoria. La función característica, denotada por ϕ_X , está definida como

$$\phi_X(\omega) := E[e^{i\omega X}], \quad (2.9)$$

donde ω es una variable de frecuencia, pero no asociado alguna característica física. De modo que la función característica es una función compleja, $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ [19, 21, 22].

Para el caso en que X es una variable discreta, la función característica se expresará como [19, 21]

$$\phi_X(\omega) = \sum_j e^{i\omega x} \cdot p_X(x). \quad (2.10)$$

Si X es una variable aleatoria continua tendrá asociada una función de densidad de probabilidad $\rho_X(x)$, en consecuencia la función característica [18, 19, 21, 22], será tal que

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \rho_X(x) dx. \quad (2.11)$$

Notamos que si para todo $\omega \in \mathbb{R}$, entonces se satisface que

$$\phi_X(-\omega) = \phi_X^*(\omega). \quad (2.12)$$

Además, para este caso de continuidad, podemos observar que la función característica siempre existe como una función ordinaria, porque es simplemente la transformada de Fourier de una función absolutamente integrable [18, 22].

2.2.2. Función de correlación

En la **Sección** 2.1, comentamos que el promedio y la varianza pueden coincidir entre realizaciones, por lo que no siempre proporcionan la información completa de todo lo que ocurre en la dinámica de algún sistema o proceso. Por ello, se busca alguna cantidad que permita medir la influencia de un valor de x a un tiempo t_1 sobre el valor x al tiempo $t_1 + \tau$, con $\tau = t_2 - t_1$ [24]. Primero, la función de auto-correlación es una medida de similitud entre dos observaciones de un proceso aleatorio, $X(t) = \{X_j(t_j)\}$, en diferentes puntos del tiempo t_1 y $t_1 + \tau$. Así, la función de auto-correlación de $X(t_1)$ y $X(t_1 + \tau)$ se denota por $R_{XX}(t_1, t_1 + \tau)$ y se define como:

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) := E[X(t_1)X^*(t_1 + \tau)], \quad (2.13)$$

donde el parámetro τ se denomina a veces como *tiempo de retardo* (o tiempo de retraso). [21]

La cual satisface las siguientes propiedades principales:

$$\begin{aligned} 1) & |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \\ 2) & R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \\ 3) & R_{XX}(0) = E[X^2(t)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos procesos aleatorios, definidos en el mismo espacio de probabilidad y con medias $m_X(t)$ y $m_Y(t)$, respectivamente. La *función de correlación cruzada* $R_{XY}(t_1, t_1 + \tau)$ de los dos procesos aleatorios [21] y se define como [19, 21]:

$$R_{XY}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)Y(t_1 + \tau)]. \quad (2.15)$$

La función de correlación cruzada mide esencialmente la similitud de dos procesos diferentes (o señales) cuando uno de ellos se desplaza en el tiempo con respecto al otro. Donde sus propiedades son análogas a las de la función de auto-correlación [21].

Algunas de las propiedades relevantes que satisface la función de correlación cruzada son [19, 21]:

$$\begin{aligned} 1) & R_{XY}(t_1, t_1 + \tau) = 0 \text{ entonces son ortogonales.} \\ 2) & R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \\ 3) & |R_{XY}(\tau)| = \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otra parte, las funciones aleatorias en el tiempo suelen tener la propiedad de que el carácter de las fluctuaciones no cambia con el tiempo, aunque cualquier realización del ensamble $X(t)$ cambie continuamente en el tiempo. Recordamos, llamamos a un proceso aleatorio estacionario si todas las densidades de probabilidad ρ_X , que gobiernan las fluctuaciones, son invariantes bajo una traslación arbitraria del origen del tiempo [18]. Por ello, conocer su función de correlación es de gran importancia, la cual es denotada por la función Γ [17, 18] y definida como

$$\Gamma_X(\tau) = E[X(t_1)X^*(t_1 + \tau)], \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2.17)$$

Además, si consideramos dos realizaciones en distintos tiempos, pueden no ser necesariamente iguales a pesar de que su varianza y valor esperado sean equivalentes. Por lo tanto, su función de correlación [17, 18] será tal que

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_2(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)\rho_X(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2. \quad (2.18)$$

También, en caso de ser un proceso estocástico complejo $Z(t)$, la función de correlación Γ está definida como

$$\Gamma_Z(t_1, t_2) = E[Z_1^*(t_1)Z_2(t_2)] = \int z_1^*(t_1)z_2(t_2)\rho(z_1(t_2), z_2(t_1))d^2z_1(t_1)d^2z_2(t_2), \quad (2.19)$$

donde z hace referencia a ser complejo, ρ es la densidad de probabilidad y $d^2z = dxdy$. Por ende, debe satisfacer la condición de *Hermiticidad*, esto es

$$\Gamma(t_2 - t_1) = \Gamma^*(t_1 - t_2). \quad (2.20)$$

Notamos, cuando $x(t)$ es tal que su media $m_X(t)$ es independiente de t y su función de auto-correlación depende de t y $t + \tau$ sólo a través de la diferencia de los dos argumentos temporales, se dice que el proceso es estacionario en sentido amplio [18]. Por supuesto, se puede extrapolar en el sentido de una función de correlación-cruzada. Incluso, pueden ser aplicados a señales analíticas de un método análogo [17, 18].

2.2.3. Señal analítica y señal óptica

En el análisis de señales, la idea de una transformación es aproximar adecuadamente las señales, que suelen tener perfiles de amplitud arbitrarios y difíciles de analizar en su forma original, en términos de señales base bien definidas (como las señales coseno y seno). De este modo, interpretarlas es más fácil, al igual que analizarlas, transmitir las y registrarlas [25].

Normalmente, hay dos dominios teóricos que describen las *señales aleatorias*, el primero es el *dominio temporal* y el segundo es el *dominio frecuencia*. Es decir, dada una señal aleatoria (un proceso estocástico) real $x(t)$, podemos definir una transformación lineal tal que se obtiene el segundo dominio que corresponde a las frecuencias ω , esto es

$$x(t) \xrightarrow{F[x(t)]} \hat{x}(\omega), \quad (2.21)$$

donde al operador F se le conoce como la *transformada de Fourier* de x , es decir, $\hat{x}$ es el *espectro de Fourier* de x [25, 26, 27].

Consideremos que la variable real t está definida en el rango $-\infty < t < \infty$, entonces podemos suponer que la función $x(t)$ satisface una *integrable cuadrática*, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.22)$$

De modo que, la transformada de Fourier de x será

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i \omega t} dt. \quad (2.23)$$

Análogamente, es posible obtener su transformada inversa de Fourier, esto es

$$x(t) \xleftarrow{F^{-1}[x(t)]} \hat{x}(\omega), \quad (2.24)$$

Lo cual permite representar a la función $x(t)$ como una transformada de Fourier de $\hat{x}$, es decir

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{-2\pi i \omega t} d\omega. \quad (2.25)$$

Observamos que es conveniente considerar señales definidas para todos los instantes de t , $-\infty < t < +\infty$, en lugar de sólo para t positivo, debido a que facilita el calculo matemático correspondiente que permite emplear el análisis de Fourier. Aun así, cuando se le aplica un sentido físico a la variable t como el tiempo (y a la variable ω con la frecuencia angular), todas las definiciones anteriores solo se reajustan con facilidad considerando algunas propiedades del calculo [18, 25, 26].

Dada la naturalidad de la frecuencia, podemos realizar una generalización de lo expuesto con anterioridad al caso de *variables complejas*, ya que no habría perdida de información. Así, sea $z(t)$ una función compleja, entonces

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(\omega) e^{-2\pi i \omega t} d\omega, \quad (2.26)$$

donde

$$\hat{z}(\omega) = \begin{cases} \hat{x}(\omega) & \text{cuando } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } \omega < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Así, a la función $z(t)$ se le denomina *señal analítica compleja* [18, 25].

Teorema de Plancherel Sea $x(t)$ una función indefinidamente diferenciable, entonces [25]

$$\|x(t)\| = \|\hat{x}(\omega)\|. \quad (2.28)$$

Si consideramos el teorema de *Plancherel*, podemos concluir que la función $\hat{x}(\omega)$ también satisface una integrable cuadrática y es una función *Hermítica*, $\hat{x}(-\omega) = \hat{x}^*(\omega)$. Análogamente, se sigue que $\hat{z}(\omega)$ es una función *Hermítica* y también es una integrable cuadrática [18, 25].

Observemos que siendo $\hat{x}(t)$ una función Hermítica, podemos expresar la ecuación (2.25) de la siguiente forma

$$x(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos[\phi(\omega) - 2\pi\omega t] d\omega. \quad (2.29)$$

donde

$$a(\omega) e^{i\phi(\omega)} = 2\hat{z}(\omega), \quad [a(\omega), \phi(\omega) \text{ son reales}]. \quad (2.30)$$

Entonces, la señal analítica compleja $z(\omega)$ se puede expresar como

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(\omega) e^{i[\phi(\omega) - 2\pi\omega t]} d\omega. \quad (2.31)$$

Notamos que las variables espaciales son implícitas dado que solo se están considerando procesos estocásticos, de modo que las señales x y z dependen solamente del tiempo. Por otra parte, que la señal analítica compleja (2.31) es una generalización natural de la representación compleja que se utiliza frecuentemente en relación con los campos de *onda monocromáticos reales* [18].

Veamos el caso de un tipo de señal en particular, consideremos un campo *electromagnético cuasi-monocromático estacionario* (como el haz de un láser de gas), en un punto del espacio $\mathbf{r} = (x, y, z)$, dado un momento t y *linealmente polarizado*, que puede representarse por la expresión:

$$V(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \cos[2\pi\omega_0 t + \phi(\mathbf{r}, t)], \quad (2.32)$$

donde A es la amplitud y ϕ la fase, recalando que cambian lentamente con el tiempo t en contraste a la frecuencia ω .

Sin embargo, tiene mayor ventaja trabajar con su expresión compleja y como no representa ninguna alteración en la interpretación física del fenómeno, se tiene que la expresión (2.32) se puede expresar como

$$V(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} e^{i2\pi\omega_0 t}. \quad (2.33)$$

Observamos que el termino $e^{i2\pi\omega_0 t}$ tendrá que ser igual en cualquier punto del espacio. Sin embargo, el resto de los términos describen una *envolvente compleja* tal que

$$U(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.34)$$

donde la función $U(\mathbf{r}, t)$ se le denomina *señal óptica* [17, 18].

2.2.4. Coherencia óptica

Todos los campos electromagnéticos que se encuentran en la naturaleza llevan asociadas algunas fluctuaciones, aunque por regla general son demasiado rápidas las fluctuaciones para ser observadas directamente. Sin embargo, deducir su existencia es posible a partir de ciertos experimentos adecuados, siendo aquellos que proporcionen información sobre las correlaciones entre las fluctuaciones en dos o más puntos del espacio-tiempo [18].

Las manifestaciones más sencillas de las correlaciones en los campos ópticos son los conocidos efectos de *interferencia*, que surgen cuando se superponen dos haces de luz que proceden de la misma fuente y dan la posibilidad de generar franjas de intensidad [18, 28]. En óptica física, el término *coherencia* ha sido utilizado con regularidad para referirse a la capacidad de la radiación electromagnética para producir fenómenos de interferencia. Hoy en día, la noción de coherencia se define por las propiedades de correlación entre las cantidades de un campo óptico. Debido a razones históricas, existen dos casos límite de una descripción más general: la coherencia temporal y la espacial. Además, sus realizaciones experimentales no representan gran complejidad [28, 29]. Dado que la *luz monocromática* es una idealización teórica, tal que no es posible encontrarla en la naturaleza o reproducirla en un laboratorio. Suponemos un campo *electromagnético cuasi-monocromático*, es decir, un campo cuyas fluctuaciones pueden representarse como un proceso aleatorio estacionario, donde su período medio y su tiempo de correlación son mucho más cortos que el intervalo promedio necesario para realizar una observación. En otras palabras, para la luz cuasi-monocromática su amplitud y fase, dependientes del tiempo y fluctúan aleatoriamente, variarán muy lentamente en cualquier intervalo de tiempo Δt , siendo corto comparado con el recíproco del ancho de banda $\Delta\omega$ de la luz. Además, podemos definir la propiedad de que su ancho de banda efectivo $\Delta\omega$ es mucho menor que su frecuencia media $\bar{\omega}$, lo que implica que el haz sea estable a una escala macroscópica [30].

Partimos primero del concepto de *coherencia temporal*, consideramos un campo *electromagnético cuasi-monocromático* en forma de haz que emerge de una fuente de luz S . Posteriormente, dicho campo se propaga en un *interferómetro de Michelson* donde el campo pasa por una placa semi-transparente que actúa como un *divisor de haz* D ubicada en el punto P , generándose dos haces de luz con menor amplitud, cada uno de estos haces incide sobre los espejos M_1 y M_2 recíprocamente,

por efecto del espejo cada haz de luz vuelve a pasar por el divisor de haz D y los campos resultantes se superponen en el plano de observación $\mathfrak{B}$ (ver **Figura 2.1**). De modo que obtendremos una *diferencia de camino óptico* $\Delta l = c\Delta t = c(t_2 - t_1)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío [18, 30].

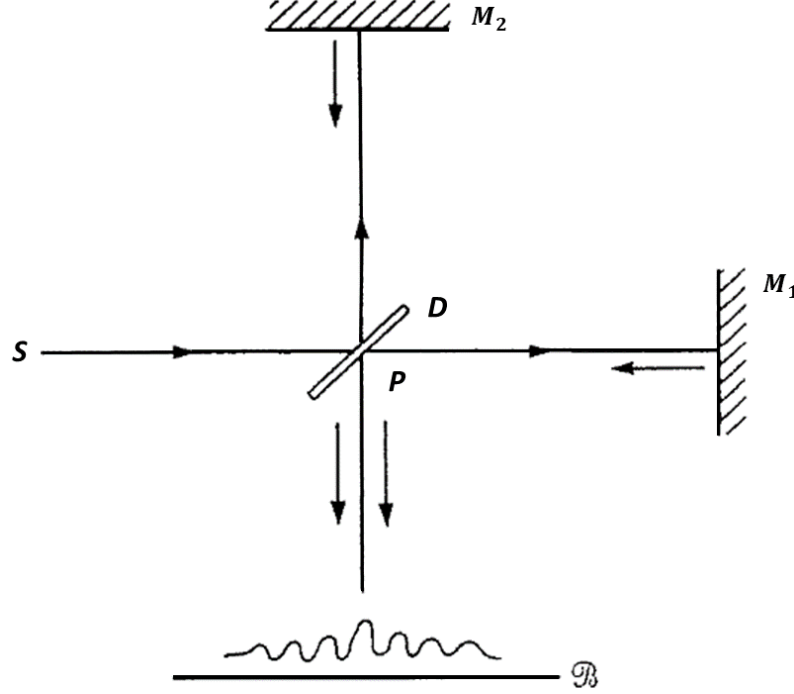


Figura 2.1: Diagrama ilustrativo del interferómetro de Michelson donde S es la fuente, D el divisor de haz, M espejos y $\mathfrak{B}$ el plano de observación [18].

Para el caso en que Δl es lo suficientemente pequeño se obtendrán franjas de interferencia en el plano de observación $\mathfrak{B}$. Así, dicho resultado corresponde a la manifestación de *coherencia temporal*, es decir, debido a un retraso temporal Δt siempre y cuando

$$\Delta t \Delta \omega \leq 1 \Rightarrow \Delta t \approx \frac{1}{\Delta \omega}. \quad (2.35)$$

Una posible explicación del por qué ocurre el efecto de coherencia temporal es partiendo del concepto de correlación, donde una función muestral de una perturbación luminosa cuasi-monocromática (siendo un proceso aleatorio estacionario) puede representarse como una sucesión de trenes de ondas lentamente modulados, cuya frecuencia media coincide con la frecuencia media de la luz y cuya duración es del orden del recíproco del ancho de banda de la luz, es decir, del orden del tiempo de coherencia. Cuando dicho campo pasa por el divisor D del haz del interferómetro de Michelson, se divide cada tren de ondas en dos trenes de ondas con la misma forma general pero de amplitudes reducidas. Los trenes de ondas de los dos haces parciales, al incidir en el plano de observación $\mathfrak{B}$, se superponen después de haber introducido un tiempo de retardo entre ellos. Notamos que habrá una fuerte correlación entre las fluctuaciones de los dos haces en B , si el tiempo de retardo introducido es corto comparado con $1/\Delta \omega$, es decir, corto comparado con el tiempo de coherencia de la luz. Caso contrario, habrá una débil correlación entre ellos cuando el retardo sea mucho mayor que $1/\Delta \omega$. La formación o la ausencia de franjas de interferencia en el plano de observación $\mathfrak{B}$ está directamente relacionada con la correlación o la falta de correlación, respectivamente, entre las fluctuaciones de los dos haces parciales que llegan a $\mathfrak{B}$ [18].

Por otra parte, considerando otro tipo de experimento de interferencia, el experimento de interferencia de Young con un campo *electromagnético cuasi-monocromático* proveniente de una fuente S pero ahora es *luz térmica extendida* [18], ver **Figura 2.2**. La luz emitida por la fuente térmica extendida pasa por dos aberturas situadas en P_1 y P_2 , colocadas en el plano $\mathfrak{A}$ de forma transversal y muy cercanas al eje de simetría axial, lo que resulta en dos ondas esféricas [18, 29]. Así, en el plano de observación $\mathfrak{B}$ resultaran franjas de interferencia al superponerse las dos ondas esféricas, cuyo resultado es descrito por *coherencia espacial* al existir una correlación por la separación entre las aberturas [18, 29].

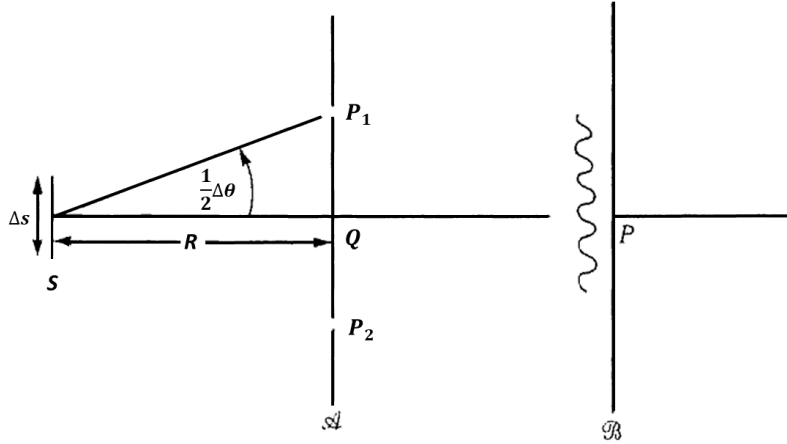


Figura 2.2: Diagrama ilustrativo del experimento de interferencia de Young donde S es la fuente, P_1 y P_2 son aberturas en el plano $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ el plano de observación [18].

Si suponemos que la fuente S tiene la forma de un cuadrado de lados Δs y su separación entre el plano $\mathfrak{A}$ es lo suficientemente grande, se tiene una condición para que aparezcan franjas de interferencia en el plano de observación $\mathfrak{B}$ cerca del punto P . Dicha condición esta dada como

$$\Delta\theta\Delta s \leq \bar{\omega}, \quad (2.36)$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo formado entre la separación de las aberturas P_1 y P_2 con la fuente S como origen, y $\bar{\lambda} = c/\bar{\omega}$ es la longitud de onda media de la luz. Para poder observar franjas en la vecindad de P , considerando que la distancia entre el plano de la fuente y el plano que contiene las aberturas está denotada por R , las dos aberturas deben estar situadas dentro de una región alrededor del punto axial Q en el plano $\mathfrak{A}$. Lo que nos permite determinar un área efectiva ΔA para observar franjas, denominada *área de coherencia*, dada por

$$\Delta A \approx (R\Delta\theta)^2 \quad (2.37)$$

Aun más, el área de coherencia puede ser independiente de la distancia R si se considera el *ángulo sólido* $\Delta\Omega$, de modo que

$$\Delta\Omega \approx (\bar{\lambda}/\Delta s)^2 \Rightarrow \Delta A \approx R^2\Delta\Omega. \quad (2.38)$$

Cada punto de la fuente da lugar a un patrón de interferencia en el plano de observación, dado que se puede suponer que las fluctuaciones de la luz procedentes de diferentes puntos de una fuente térmica son independientes entre sí, por lo tanto, no tienen una relación de fase fija entre sí. La distribución de la intensidad en el plano $\mathfrak{B}$ se obtiene sumando, en cada punto, las intensidades de los patrones individuales generados por los diferentes puntos de la fuente S [18].

2.2.5. Grado de coherencia complejo de una señal analítica

Cualquier haz de luz que sea experimentalmente realizable, puede ser descrito por una función fluctuante del tiempo, siendo un elemento propio de un ensamble que consta de todas las posibles realizaciones del campo. Para analizar el campo es más conveniente considerarlo en términos de una señal analítica asociada $V(\mathbf{r}, t)$, con $\mathbf{r}$ un vector de posición y t el tiempo. Notamos que esta función puede representar, por ejemplo, una componente cartesiana del campo eléctrico o del potencial vectorial. Por lo que, por el momento, no especificaremos la naturaleza de V con más detalle, ya que el análisis principal es independiente de cualquier elección particular de la variable del campo. Suponemos que la *luz cuasi-monocromática* puede ser representada por un ensamble estacionario estático de una señal analítica $V(\mathbf{r}, t)$, recordando que el ancho de banda $\Delta\omega$ efectivo es más pequeño comparado con el promedio de su frecuencia $\bar{\omega}$, esto es

$$\frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1. \quad (2.39)$$

No obstante, medir a V en función del tiempo es casi imposible con los detectores ópticos convencionalmente usados dadas las altas frecuencias de *vibración óptica*. Pero sí se pueden realizar cálculos de las *correlaciones* del campo en dos o más puntos en el espacio-tiempo en términos de valores de intensidad, siempre y cuando se consideren tales mediciones cuando el campo óptico sea un haz de luz cuasi-monocromático *bien colimado*.

Las ondas del campo en consideración suponemos que pasan a través de dos aberturas de una pantalla opaca $\mathcal{A}$, situados en los puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$ separadas entre ellas por una distancia a , ver **Figura 2.3**, notamos que se trata del experimento de interferencia de Young. De modo que en el plano de observación $\mathcal{B}$ resultara una distribución de intensidad debido a la superposición de la luz emergida por las dos aberturas, donde el campo instantáneo en el punto P es expresada con buena aproximación como

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t - t_2), \text{ con } t_1 = R_1/c \text{ y } t_2 = R_2/c, \quad (2.40)$$

siendo los tiempos t_1 y t_2 que necesita la luz para viajar desde las aberturas en P_1 y P_2 al punto P en el plano de observación $\mathcal{B}$, respectivamente. Además, las aberturas P_1 y P_2 están a una distancia R_1 y R_2 del punto P en el plano de observación $\mathcal{B}$, respectivamente. Siendo c la velocidad de luz en el vacío, los factores constantes K_1 y K_2 son imaginarios de acuerdo con la teoría de *difracción*, que dependen del tamaño de las aberturas y la geometría. Notamos que el tiempo t implica que la luz es emitida simultáneamente de las aberturas en P_1 y P_2 [18].

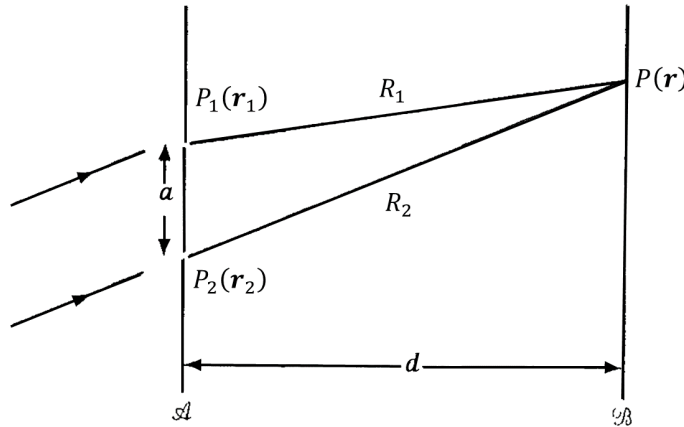


Figura 2.3: Diagrama de la notación relacionada al experimento de interferencia de Young [18].

Si consideramos el promedio de la intensidad $I(\mathbf{r}, t)$ sobre todo el ensamble de diferentes realizaciones del campo [18], puede ser definido como

$$\begin{aligned}\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \\ &\quad + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \langle V^*(\mathbf{r}_1, t - t_1)V(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle\}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Sin embargo, de acuerdo a lo descrito en la **Figura 2.3**, los trenes de ondas procedentes de las dos aberturas que inciden en un mismo punto lejano al eje simétrico de la pantalla son diferentes, es decir, cuando las dos ondas se superponen están desplazadas en el tiempo. Para tratar este caso más general, se introduce la noción de coherencia *espacio-temporal* [29]. Por ende, se recurre a la función de correlación cruzada del proceso estocástico $V(\mathbf{r}, t)$ [18, 29], descrito de la forma:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle.\tag{2.42}$$

También, si consideramos que el campo es ergódico el promedio del ensamble será independiente del tiempo, así la función de correlación cruzada del ensamble dependerá de la diferencia $\tau = t_2 - t_1$, esto es:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt,\tag{2.43}$$

De modo que la expresión (2.41), queda expresada como

$$\begin{aligned}\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle \\ &\quad + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1 - t_2)\},\end{aligned}\tag{2.44}$$

donde el último término denota la superposición de los haces y da como resultado la interferencia. Incluso, la expresión (2.44) es más conocida como la *función de coherencia mutua* (Wolf, 1955), siendo una cantidad central de la teoría elemental de la coherencia óptica [18].

Veamos un caso más, ahora podemos representar el promedio de la intensidad en un punto $\mathbf{r}$ como

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0).\tag{2.45}$$

Pero es conveniente *normalizar* la función de coherencia mutua, de modo que tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0)]^{1/2}[\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; 0)]^{1/2}} \\ &= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle]^{1/2}[\langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle]^{1/2}}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Notamos que hasta ahora, estas deducciones son posibles por considerar el experimento de interferencia de Young con un campo electromagnético cuasi-monocromático y cuyos resultados de interferencia son descritos por coherencia (o coherencia parcial) espacial. Es decir, siendo consecuencia de que la luz es emitida de las aberturas en P_1 y P_2 simultáneamente al tiempo t y solo dependa del camino óptico hacia el punto P . Por lo tanto, la función $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ es denominada como el *grado de coherencia compleja* de las vibraciones de la luz en los puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$. Además, el grado de coherencia compleja satisface la desigualdad [18, 29]

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1, \text{ para todos los valores de } \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \text{ y } \tau.\tag{2.47}$$

Por otro lado, si retomamos la señal analítica $V(\mathbf{r}, t)$ que representa una fluctuación óptica en el espacio-tiempo, considerando que el campo óptico es estacionario (al menos en el sentido amplio) y ergódico, podemos representar a $V(\mathbf{r}, t)$ como una integral de Fourier, esto es

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \tilde{V}(\mathbf{r}, \omega) e^{-2\pi i \omega t} d\omega.\tag{2.48}$$

Ahora, la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ de las ligeras perturbaciones en los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en la frecuencia ω puede ser descrita del siguiente modo:

$$\langle \tilde{V}^*(\mathbf{r}_1, \omega) \tilde{V}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (2.49)$$

donde el lado izquierdo de la ecuación (2.49) es el promedio tomado de todas las realizaciones del campo y del derecho δ es la función *delta de Dirac*.

Considerando que al campo óptico estacionario $V(\mathbf{r}, t)$ está definido en algún dominio cerrado finito D en el espacio libre, con su función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$. Suponemos que la función $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ decrece tan rápido con τ a medida que $|\tau| \rightarrow \infty$ para asegurar que la función de coherencia mutua sea absolutamente integrable con respecto a τ , para todos los puntos $\mathbf{r}_1 \in D$ y $\mathbf{r}_2 \in D$ [18]. Es decir, debe satisfacer la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| d\tau < \infty. \quad (2.50)$$

Posteriormente, tomando en cuenta el teorema integral de Fourier, la función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ tiene una transformada de Fourier, denominada la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, tal que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{2\pi i \omega \tau} d\tau, \quad (2.51)$$

donde $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ es continua en ω [18].

Además, el absoluto integrable de la función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ implica su cuadrado integrable, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2 d\tau < \infty. \quad (2.52)$$

En consecuencia, por la *relación de Parseval*, la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ es de cuadrado integrable con respecto a ω , es decir

$$\int_0^{\infty} |W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la expresión (3.3) es invertible, tal que

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^{\infty} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) e^{2\pi i \omega \tau} d\omega, \quad (2.54)$$

observamos que el límite inferior de la integral es 0 porque la función de coherencia mutua es una señal analítica. El resultado anterior se le conoce como la generalización del teorema de *Wiener-Khintchine*, es decir, la función de coherencia mutua y la función de densidad espectral cruzada están relacionadas por medio de la transformada de Fourier [18].

Otro dato relevante es el siguiente, si consideramos el caso especial donde los dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son iguales, la función de densidad espectral cruzada es representada por la *densidad espectral* (o también llamada como el espectro de potencia) de la luz, es decir,

$$S(\mathbf{r}, \omega) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega). \quad (2.55)$$

Por supuesto, satisfacen ciertas propiedades: Primero, la función de densidad espectral cruzada satisface la propiedad Hermítica y además cumple con la definición de función no negativa. Por lo que implica que la densidad espectral es no negativa, es decir

$$S(\mathbf{r}, \omega) \geq 0. \quad (2.56)$$

También, normalizando la función de densidad espectral cruzada, se obtiene que

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{[W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)]^{1/2}[W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)]^{1/2}} \\ &= \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{[S(\mathbf{r}_1, \omega)]^{1/2}[S(\mathbf{r}_2, \omega)]^{1/2}}.\end{aligned}\quad (2.57)$$

Donde el termino $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ se le denomina como el *grado de coherencia espectral a frecuencia ω* y satisface la desigualdad:

$$0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| \leq 1. \quad (2.58)$$

Como observación, a pesar de que exista cierta analogía entre las definiciones de los grados complejos de coherencia γ y μ , incluso el hecho de que las funciones Γ y W forman un par de transformadas de Fourier. No implica que γ y μ , en general, sean transformadas de Fourier entre sí [18].

2.3. La propagación de la coherencia mutua en el espacio libre

Retomando una función muestral del proceso aleatorio real que caracteriza la perturbación luminosa fluctuante en la posición $\mathbf{r}$ al tiempo t , puede considerarse como una señal analítica compleja $V(\mathbf{r}, t)$ y, además, consideramos al campo como estacionario al menos en el sentido amplio y ergódico. Si identificamos a V con una componente cartesiana, por ejemplo, de un campo eléctrico o de un potencial vectorial, obedecerá a la *ecuación de onda* en el espacio libre:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.59)$$

con c siendo la constante de la velocidad de la luz en el vacío.

Uno puede llegar a esta deducción partiendo de que podemos representar a $V(\mathbf{r}, t)$ como una integral de Fourier, es decir, satisface la expresión (2.48). Si a dicha ecuación le aplicamos el operador $\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ a ambos lados [18], obtenemos

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \int_0^\infty [\nabla^2 \tilde{V}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \tilde{V}(\mathbf{r}, \omega)] e^{-2\pi i \omega t} d\omega. \quad (2.60)$$

Pero se sabe que $\tilde{V}$ satisface la ecuación de *Helmholtz*, esto es

$$\nabla^2 \tilde{V}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \tilde{V}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (2.61)$$

donde ∇^2 es operador *Laplaciano* y $k = 2\pi\omega/c$. Así, se llega a la ecuación (2.59), lo que muestra que la señal analítica compleja $V(\mathbf{r}, t)$ satisface la ecuación de onda.

Por otra parte, si consideramos el conjugado complejo de V evaluado respecto a un punto $\mathbf{r}_1$ a un tiempo t_1 y multiplicando por $V(\mathbf{r}_2, t_2)$ ambos lados de la ecuación (2.59), tenemos que

$$\nabla_1^2 [V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2)]. \quad (2.62)$$

Luego, si consideramos el promedio del ensamble sobre las diferentes realizaciones del campo, entonces obtenemos en ambos lados de la expresión (2.62) lo siguiente

$$\nabla_1^2 \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (2.63)$$

Asimismo, dado que el campo es estadísticamente estacionario (al menos en el sentido amplio) y ergódico, es posible utilizar la definición (2.42) de la función de correlación de segundo orden, obteniendo la ecuación:

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\partial \tau^2}, \text{ con } \tau = t_2 - t_1. \quad (2.64)$$

Análogamente, por un proceso estricto muy similar, en el caso de considerar ahora desde el punto $\mathbf{r}_2$ se obtiene que

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\partial \tau^2}, \text{ con } \tau = t_2 - t_1. \quad (2.65)$$

Por lo tanto, encontramos el resultado de que en el espacio libre la función de correlación de segundo orden $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ de un campo óptico obedece a las dos ecuaciones de onda (2.64) y (2.65).

Nos percatamos de que con las consideraciones y las relaciones en (2.50), a partir de las ecuaciones (2.64) y (2.65) obtenemos las siguientes expresiones:

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0, \quad (2.66)$$

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0. \quad (2.67)$$

Donde se demuestra que la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ también satisface la ecuación de *Helmholtz* en el espacio libre.

De modo que el problema de determinar la función de coherencia mutua y la densidad espectral cruzada en cualquier par de puntos en un dominio en el espacio libre, delimitado por una superficie cerrada, ahora se reduce a un problema estándar en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Por consiguiente, para resolver tales problemas son bien conocidas numerosas técnicas, tanto exactas como aproximadas [18, 30].

2.4. Estado de polarización

Es sabido que la luz, emitida por fuentes de radiaciones térmicas y fuentes de láser, fluctúa tanto espacialmente como temporalmente. Para el caso de las fuentes térmicas de luz habituales, las fluctuaciones espaciales se originan desde del tamaño finito de la fuente y en la incoherencia espacial de las ondas emitidas desde las distintas partes de la fuente, además, las fluctuaciones temporales se deben al amplio espectro de cuerpo negro emitido por dicha fuente. Si nos limitamos a luz estrictamente monocromática, en el sentido de trenes de ondas infinitamente largos, es decir, de ancho espectral cero, está debe ser completamente polarizada.

Sin embargo, una fuente física real tiene un ancho de banda de frecuencia finito, aunque el espectro de frecuencia puede ser bastante estrecho, razón por el cual se estudian principalmente las ondas cuasi-monocromáticas. Asumimos que el ancho de banda de la luz, concretamente el ancho de su espectro de potencia $\Delta\omega$, es muy pequeño en comparación con la *frecuencia central* ω_0 ($\Delta\omega \ll \omega_0$). Una señal cuasi-monocromática puede resultar de la superposición de un gran número de pulsos estadísticamente independientes, cronometrados aleatoriamente con la misma frecuencia central. El concepto de polarización parcial se vuelve significativo para tal onda cuasi-monocromática [31].

2.4.1. Polarización

Sabemos que el plano de polarización está perfectamente bien definido, siendo el plano geométrico que contiene un vector que describe la dirección de vibración y la dirección de propagación, dicho vector se denomina como "*vector de polarización*". El cual es caracterizado por su geometría en el plano de polarización como "lineal", "circular" y "elíptica". Dado que cualquier fenómeno de polarización implica un movimiento ondulatorio transversal, cualquier descripción matemática de ellos requiere una teoría vectorial, por ejemplo, el vector magnético o eléctrico.

Antes de la teoría electromagnética y del conocimiento de que estaban involucrados dos vectores en la descripción de la luz, en términos de un “vector de luz”. Posteriormente, se encontró que para el vector de luz tal como lo definieron, solo la componente en el plano de incidencia se reflejaba desde un dieléctrico cuando la luz incidía en el ángulo de *Brewster*. Por tanto, el “vector de luz” correspondía a lo que posteriormente surgió como componente magnética. Sólo relativamente hace poco tiempo, debido a su papel dominante en la medición óptica, el vector eléctrico se ha visto favorecido en la descripción de los fenómenos de polarización.

Por otro lado, se observa que dos haces de luz aparentemente idénticos con el mismo rango de frecuencia y distribución de intensidad, dentro de ese rango, pueden interactuar de manera diferente con ciertos elementos ópticos. La diferencia generalmente se manifiesta después de la interacción como una desigualdad de las intensidades de los haces, un cambio en su dirección de propagación, una modificación de sus espectros o una combinación de estos. Esta característica de la luz, a la que es sensible el elemento óptico, se conoce como polarización.

Ya que se ha establecido el uso del vector eléctrico para realizar los análisis pertinentes en haces de luz. Veamos que las características de orientación de este vector en el tiempo y el espacio se denominan polarización de la onda. Si fijamos nuestra atención en un punto particular a medida que pasa la onda, el lugar geométrico de la punta del vector eléctrico en ese punto es una medida de la polarización. Por ejemplo, para la onda clásica, este lugar es una línea recta y, por lo tanto, se dice que la onda está polarizada linealmente. La orientación angular de la línea recta se conoce como la dirección de vibración de la onda [32].

Christian Huygens fue el primero en proponer que la luz no era una cantidad escalar, basándose en sus trabajos sobre la propagación de la luz a través de los cristales, sino que tendría una naturaleza vectorial denominada polarización. Si seguimos la mecánica y equiparamos un medio óptico a un medio elástico isótropo, debería ser capaz de admitir tres oscilaciones independientes. Por lo tanto, en un sistema cartesiano se necesitan tres ecuaciones de onda independientes para describir la propagación de la perturbación óptica: $u_x(r, t)$, $u_y(r, t)$ y $u_z(r, t)$. Donde las componentes $u_x(r, t)$ y $u_y(r, t)$ son las componentes transversales, $u_z(r, t)$ correspondería a la componente longitudinal; esto cuando la propagación sea en la dirección z . Sin embargo, en 1818, Fresnel y Arago realizaron una serie de investigaciones sobre el experimento de interferencia de Young al utilizar luz polarizada. Concluyendo que la componente longitudinal $u_z(r, t)$ no existía. Es decir, la luz estaba formada únicamente por las componentes transversales $u_x(r, t)$ y $u_y(r, t)$ [33].

2.4.2. Estados de polarización a partir elipse de polarización

Suponemos que el campo eléctrico de un haz de luz uniforme electromagnético plano se propaga en la dirección positiva del eje z del sistema de coordenadas cartesianas. También suponemos que el campo posee un espectro de potencia de banda estrecha de anchura $\Delta\omega \ll \omega_0$ que es su frecuencia central [31]. A partir de que la luz consiste en únicamente dos componentes transversales que son perpendiculares entre ellas y se propagan en una dirección z [33]. Sabemos por convención que podemos expresar el campo óptico en forma compleja, pues facilita el análisis matemático de dicho campo, entonces si el campo óptico transversal se propaga en la dirección z [29], tenemos que

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y} = E_{0x}e^{i(\theta+\phi_x)}\hat{x} + E_{0y}e^{i(\theta+\phi_y)}\hat{y}. \quad (2.68)$$

Donde $\theta = \omega t - kz$ es el *propagador* siendo ω la frecuencia angular, k el número de onda definido como $k = 2\pi/\lambda$ y λ la longitud de onda. Luego, E_{0x} y E_{0y} corresponden a las amplitudes máximas correspondientes a cada componente de vibración, además ϕ_x y ϕ_y denotan una fase arbitraria independiente del tiempo para cada eje [29, 32, 33].

Si consideremos la representación real de cada componente del campo eléctrico $\mathbf{E}(z, t)$, se obtiene que

$$E_x := \text{Re}[E_x(z, t)] = E_{0x} \cos(\theta + \phi_x), \quad E_y := \text{Re}[E_y(z, t)] = E_{0y} \cos(\theta + \phi_y), \quad (2.69)$$

que describen un lugar geométrico de puntos en el espacio. Notamos que, en todo momento, las amplitudes y los factores de fase fluctúan lentamente en comparación con las rápidas vibraciones de los cosinusoides [32, 33].

Considerando propiedades trigonométricas, reescribimos las expresiones (2.69), obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\theta) \cos(\phi_x) - \sin(\theta) \sin(\phi_x), \quad (2.70)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\theta) \cos(\phi_y) - \sin(\theta) \sin(\phi_y). \quad (2.71)$$

Si despejamos el término $\sin(\theta)$ de la expresión (2.71), lo sustituimos en la expresión (2.70) y simplificando la expresión resultante con algunas operaciones algebraicas (análogamente para el caso del término $\cos(\theta)$) [33]. Obtenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin(\phi_y) - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin(\phi_x) = \cos(\theta) \sin(\phi_y - \phi_x), \quad (2.72)$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi_y) - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos(\phi_x) = \sin(\theta) \sin(\phi_y - \phi_x). \quad (2.73)$$

Finalmente, las expresiones anteriores las elevamos al cuadrado y las sumamos, resultando en la ecuación siguiente [31, 32, 33]:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi), \quad \text{donde } \phi = \phi_y - \phi_x. \quad (2.74)$$

Así la ecuación (2.74) es denotada como la *elipse de polarización*, pues muestra que en cualquier instante de tiempo el lugar geométrico de los puntos descritos por el campo óptico a medida que se propaga es una elipse. Notamos que la presencia del producto cruzado es simplemente un reflejo del hecho de que los ejes de referencia no coinciden con los ejes mayor y menor de la elipse. Observamos que el propagador se elimina entre las componentes transversales, es decir, solo depende de los términos E_{0x} , E_{0y} , ϕ_x y ϕ_y para describir toda la elipse [32, 33].

Notamos que la elipse de polarización descrita en (2.74) es referente al caso de radiación cuasimonocromática, pues las cantidades de amplitudes E_0 y fases ϕ varían lentamente en función del tiempo siendo constantes. Por otra parte, el término $E_x(t)E_y(t)$ implica que la elipse de polarización del campo eléctrico en general este rotado a un ángulo ψ [31, 32].

De modo que el ángulo ψ se le denomina *ángulo azimutal* (o *ángulo de rotación*), el cual se puede calcular a partir de la siguiente ecuación:

$$\tan(2\psi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos(\phi), \quad (2.75)$$

donde el ángulo ψ se encuentra definido en el rango $0 \leq \psi \leq \pi$.

Así, otro parámetro importante es el *ángulo de elipticidad* χ y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\sin(2\chi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin(\phi), \quad (2.76)$$

donde el ángulo χ está definido en el rango $-(\pi/4) \leq \chi \leq \pi/4$ [31, 32, 33].

Esto permite considerar parámetros más convenientes para describir la elipse de polarización, observar la **Figura 2.4**, es decir: (1) la intensidad total $I_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$ que determina el tamaño de la elipse, (2) el ángulo de elipticidad χ definido a partir del arcotangente entre el radio mayor y el radio menor de la elipse, (3) el ángulo azimutal ψ que esta entre el eje x y el eje mayor de la elipse, y por último (4) el sentido de rotación del punto final del campo eléctrico [31, 32].

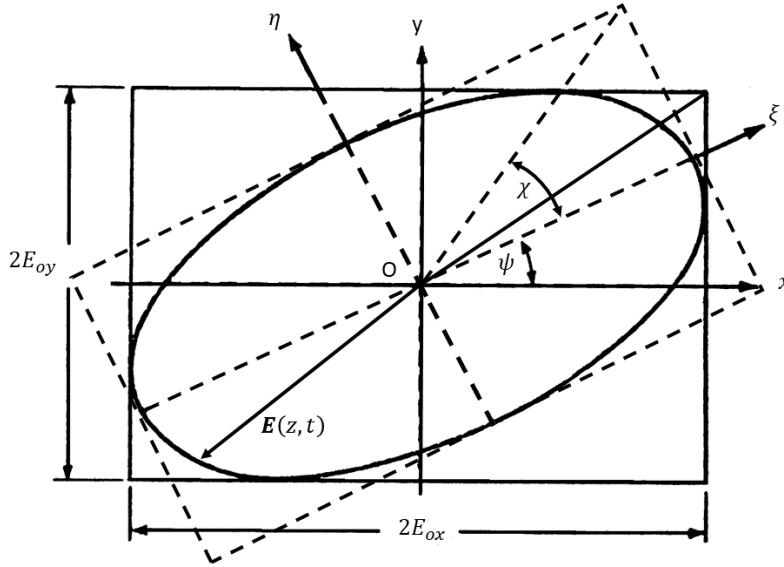


Figura 2.4: Diagrama de los parámetros que describen la elipse de polarización. La luz se propaga en dirección fuera del papel [31, 33].

En general, se puede decir que la luz completamente polarizada tiende a ser descrita con una polarización elíptica. Sin embargo, a partir de la ecuación (2.74), observamos que de acuerdo con los valores que tomen E_{0x} , E_{0y} y ϕ resultaran formas especiales o formas degeneradas de la elipse de polarización, siendo encontradas continuamente en el estudio de la luz polarizada. Por lo que se tendrán los siguientes casos:

- I. Cuando E_{0y} es cero solamente, tenemos que solo hay oscilación del campo eléctrico en la dirección x y se le denota como *polarización lineal horizontal*. De manera análoga, en el caso cuando E_{0x} equivale a cero y la otra componente es distinta de cero, se denomina *polarización lineal vertical*.
- II. Si $\phi = 0$ o $\phi = \pi$, la ecuación (2.70) se reescribe como:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \mp 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = 0. \quad (2.77)$$

Notamos que el lado izquierdo de la ecuación (2.73) corresponde a la forma de un binomio al cuadrado perfecto y al estar igualado a cero, podemos reducir la expresión como

$$E_y = \pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x. \quad (2.78)$$

Observamos que corresponde a la ecuación de una línea recta con una pendiente $\pm(E_{0y}/E_{0x})$ donde su signo es determinado por el valor de ϕ (si es 0 será una pendiente positiva, si es π será una pendiente negativa). Como caso particular, cuando $E_{0x} = E_{0y}$ obtendremos una *polarización lineal a $\pm 45^\circ$* .

- III. Para el caso de que $\phi = \pi/2$ o $\phi = 3\pi/2$, la ecuación (2.70) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1. \quad (2.79)$$

Siendo la ecuación estándar de una elipse, idéntica para los dos casos de $\phi = \pi/2$ y $\phi = 3\pi/2$.

IV. Considerando que $\phi = \pi/2$ o $\phi = 3\pi/2$, también tomamos que $E_{0x} = E_{0y} = E_0$. La ecuación (2.70) se reduce a

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1. \quad (2.80)$$

Lo cual corresponde a la ecuación de un círculo. En un sentido de reloj, se le denota *polarización circular a derecha* para el caso de $\phi = \pi/2$ y *polarización circular a izquierda* para el caso de $\phi = 3\pi/2$.

Observamos que a partir de la expresión (2.79) y (2.80) no es posible determinar a qué valor de δ corresponde. Por ello, otra forma de determinar si es a derecha o a izquierda es considerando lo siguiente: Si $\sin(\phi) > 0$, es decir, $0 < \chi \leq \pi/4$ entonces es *a derecha*. Caso contrario, si $\sin(\phi) < 0$, es decir, $-(\pi/4) \leq \chi < 0$ entonces es *a izquierda*. También, existen métodos experimentales que lo permiten determinar, pero en este texto no se abordaran [33].

Aun así, se muestran en la **Figura 2.5** los posibles valores que puede tener el ángulo azimutal, que definen los caminos trazados por la punta del vector eléctrico giratorio durante un período del campo de ondas. Suponiendo que el vector se propaga hacia fuera de la hoja por ello denotamos la fase con ϕ' . Tenemos dos casos donde puede ser lineal cuando (a) $\phi = 0$ y (e) $\phi = \pi$. Los demás casos son elípticos pero tiene cierta orientación cuando (b) $0 < \phi < \pi/2$, (c) $\phi = \pi/2$, (d) $\pi/2 < \phi < \pi$, (f) $\pi < \phi < 3\pi/2$, (g) $\phi = 3\pi/2$ y (h) $3\pi/2 < \phi < 2\pi$. Y se tendrá solo polarización circular cuando $\phi = \pi/2$ o $\phi = 3\pi/2$ si $E_{0x} = E_{0y}$ [31, 33].

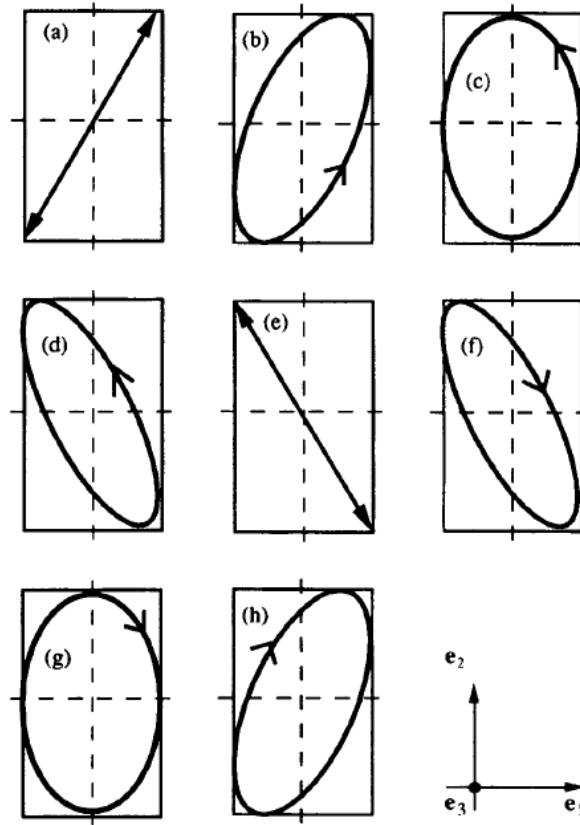


Figura 2.5: Diagrama de Lissajous para la elipse de polarización. La luz se propaga en dirección fuera del papel [31].

No obstante, de acuerdo al supuesto de que la onda forma una banda estrecha alrededor de una gran frecuencia central, notamos que una sola realización de la señal analítica estocástica no posee un significado físico relevante, por lo que muchos de los problemas significativos se reducen a la determinación de la correlación del campo en diferentes puntos espacio-temporales. Esto es consecuencia directa al hecho de que el vector eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, en un punto determinado por la posición del vector $\mathbf{r}$ y en el tiempo t , es una función rápidamente fluctuante del tiempo. Además, las fluctuaciones en dos puntos cualesquiera, generalmente, no serán las mismas. Por ende, suponemos que las fluctuaciones pueden ser descritas por un ensamble que es estacionario, al menos en el sentido amplio, ergódico y que tiene media cero, lo que permite una descripción estadística de las fluctuaciones de un campo óptico parcialmente polarizado [31].

2.5. Matriz de densidad espectral cruzada de un haz electromagnético estocástico

Suponiendo que las fluctuaciones de los vectores de campo eléctrico y magnético se caracterizan por ensambles estadísticamente estacionarios, al menos en sentido amplio. La cantidad básica de la *teoría unificada de coherencia y polarización* de haces electromagnéticos estocásticamente estacionarios, es la denominada *matriz de densidad espectral cruzada eléctrica* $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$. Siendo introducida formalmente como la transformada de Fourier de la *matriz de coherencia mutua eléctrica*

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t) E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t) E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \\ \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t) E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t) E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

donde E_x y E_y son las componentes complejas del campo vectorial eléctrico $E(\mathbf{r}, \omega)$, representadas como señales analíticas [30].

Retomando la densidad espectral cruzada, tenemos que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \\ W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.82)$$

Por otra parte, la matriz de densidad espectral cruzada también puede ser expresada como una matriz de correlación, esto es

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = [W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)] = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \\ \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

donde $E_x(\mathbf{r}, \omega)$ y $E_y(\mathbf{r}, \omega)$ son elementos de ensambles estadísticos adecuadamente contruidos [30, 31].

A partir de las representaciones anteriores, consideremos un haz electromagnético estocástico siendo estadísticamente estacionario que se propaga a lo largo del eje z y pasa a través de una rendija con dos orificios, como se muestra en la **Figura 2.6**. Siendo expresado como un ensamble $\{E(\mathbf{r}, \omega)\}$, donde cada realización está en términos de sus componentes $E(\rho_1, \omega)$ y $E(\rho_2, \omega)$, tal que

$$E(\mathbf{r}, \omega) = K_1 E(\rho_1, \omega) e^{ikR_1} + K_2 E(\rho_2, \omega) e^{ikR_2}, \quad (2.84)$$

con K_1 y K_2 constantes, k el número de onda, R_1 y R_2 la distancia entre los orificios y el punto P [30].

Podemos definir el *grado de coherencia espectral* de las fluctuaciones del campo eléctrico mediante la expresión siguiente

$$\eta(\rho_1, \rho_2, \omega) = \frac{\text{Tr}[W(\rho_1, \rho_2, \omega)]}{\sqrt{\text{Tr}[W(\rho_1, \rho_1, \omega)]} \sqrt{\text{Tr}[W(\rho_2, \rho_2, \omega)]}} = \frac{\text{Tr}[W(\rho_1, \rho_2, \omega)]}{\sqrt{S(\rho_1, \omega)} \sqrt{S(\rho_2, \omega)}}, \quad (2.85)$$

donde $S(\rho, \omega)$ es la *densidad espectral* y la podemos identificar con la densidad de energía eléctrica promedio en ese punto. Además, debe satisfacer la desigualdad [17, 30]

$$0 \leq |\eta(\rho_1, \rho_2, \omega)| \leq 1. \quad (2.86)$$

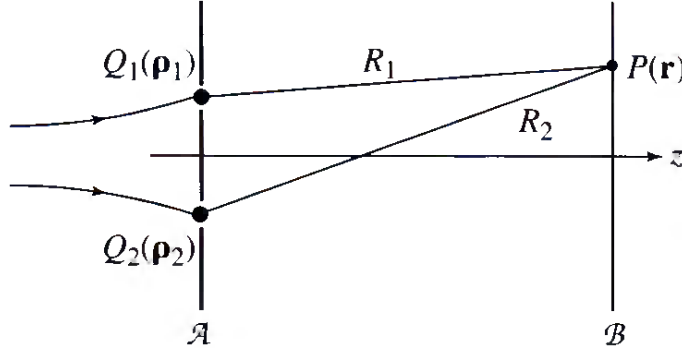


Figura 2.6: Diagrama de un haz electromagnético estocástico a través del experimento de interferencia de Young [30].

Observamos que el grado de coherencia depende solamente de W_{xx} y W_{yy} , los cuales componen a $\mathbf{Tr}(W)$ y es debido a que las componentes del campo eléctrico son mutuamente ortogonales por lo cual no interfieren; este se justifica con la *ley de interferencia de Fresnel-Arago* [30]. De modo que los elementos de la matriz de densidad espectral cruzada W_{xy} y W_{yx} contribuyen a las propiedades de polarización, específicamente en el *grado de polarización espectral* $P(\mathbf{r}, \omega)$ [30, 31, 34], esto es

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det}[W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)]}{[\text{Tr}[W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)]]^2}}. \quad (2.87)$$

Notamos que el determinante $\text{Det}(W)$ es donde tendremos incluidos los términos W_{xy} y W_{yx} . Por lo que se concluye que el grado espectral de coherencia depende del comportamiento del campo eléctrico en dos puntos, en cambio el grado espectral de polarización depende del comportamiento del campo eléctrico en un solo punto. Aun más, el grado de polarización de la luz está definido como la relación entre la intensidad de la parte polarizada y la intensidad total en el punto considerado, es decir, como la parte del campo que está polarizada en una dirección específica [30].

2.6. Evolución de la polarización de haces de luz al propagarse

Suponemos que un campo óptico se puede describir como un proceso estocástico estacionario, propagándose en el espacio libre como un haz a lo largo del eje z y cuya densidad espectral cruzada, denominada *tensor espectral cruzado eléctrico* [16, 18], es descrita como

$$W_{ij}(\rho_a, \rho'_a, z_a, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_i^*(\rho_a, z_a, t) \times E_j(\rho'_a, z_a, t + \tau) \rangle \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad (2.88)$$

donde $E_i(\rho_a, z_a, t)$ es la i -ésima componente de la representación de la señal analítica del campo eléctrico en un punto $\mathbf{r}_a = (\rho_a, z_a)$ en el tiempo t ; $i, j = 1, 2$ designan las componentes x y y respectivamente, ver **Figura 2.7**. Recordamos que los paréntesis angulares denotan el promedio sobre todas las realizaciones del ensamble.

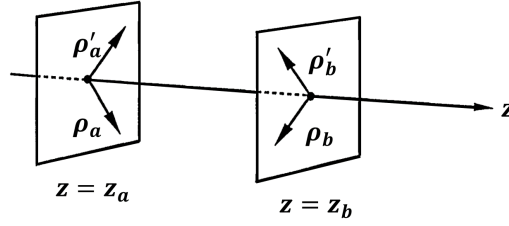


Figura 2.7: Esquema de la notación usada [16].

Luego, de acuerdo con la condición de que se propaga como un haz el campo óptico, utilizamos la aproximación paraxial para describir la propagación. Es decir, el tensor espectral cruzado en algún plano $z = z_b$, tal que $z_b > z_a$, está dado como

$$W_{ij}(\rho_b, \rho'_b, z_b, \omega) = \iint W_{ij}(\rho_a, \rho'_a, z_a, \omega) \times K^*(\rho_b - \rho_a, z_b - z_a, \omega) \times K(\rho'_b - \rho'_a, z_b - z_a, \omega) d^2 \rho_a d^2 \rho'_a. \quad (2.89)$$

Siendo $K(\rho_b - \rho_a, z_b - z_a, \omega)$ el kernel para la propagación paraxial de la luz de frecuencia ω descrito por la ecuación

$$K(\rho_b - \rho_a, z_b - z_a, \omega) = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp[ik(z_b - z_a)]}{z_b - z_a} \times \exp\left[\frac{ik(\rho_b - \rho_a)^2}{2(z_b - z_a)}\right], \quad (2.90)$$

donde $k = \omega/c$.

Además, tenemos que la matriz de coherencia para algún punto está relacionada con el tensor espectral cruzado eléctrico W_{ij} , esto es

$$J_{ij}(\rho, z, \omega) \equiv W_{ij}(\rho, \rho, z, \omega). \quad (2.91)$$

Por lo que el *grado de polarización* del campo se puede describir en términos de la matriz de coherencia (2.91) [16, 18], como

$$P(\rho, z, \omega) = \left(1 - \frac{4\text{Det}[J_{ij}(\rho, z, \omega)]}{\{\text{Tr}[J_{ij}(\rho, z, \omega)]\}^2}\right)^{1/2}, \quad (2.92)$$

donde $\text{Det}[J_{ij}]$ es el determinante y $\text{Tr}[J_{ij}]$ es la traza de la matriz de coherencia J_{ij} .

Ahora continuamos considerando un modelo simple que describe haz de luz parcialmente coherente y con polarización parcial propagándose a lo largo del eje z . Cuando en el plano de la fuente sea $z = z_a$, el tensor espectral cruzado eléctrico será diagonal y de la forma

$$W_{ij}(\rho_a, \rho'_a, z_a, \omega) = I(\rho_a, \rho'_a, \omega) \times \begin{bmatrix} \exp\left[-\frac{(\rho_a - \rho'_a)^2}{2l_1^2}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\frac{(\rho_a - \rho'_a)^2}{2l_2^2}\right] \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

siendo l_1 y l_2 son constantes positivas.

Observamos que para que la expresión (2.93) pueda ser equivalente a la expresión (2.91), particularmente debemos tener que $\rho_a = \rho'_a$, lo que resulta en la matriz de coherencia siguiente

$$J_{ij}(\rho_a, z_a, \omega) = I(\rho_a, \rho_a, \omega) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.94) en (2.92), su grado de polarización será tal que

$$P(\rho_a, z, \omega) = 0. \quad (2.95)$$

De modo que la luz en todos los puntos del plano de la fuente está completamente *no-polarizada*. Por otra parte, si consideramos que la función $I(\rho_a, \rho'_a, \omega)$ puede ser descrita como

$$I(\rho_a, \rho'_a, \omega) = S_a(\omega) \exp \left(- \frac{|\rho_a|^2 + |\rho'_a|^2}{2\alpha^2} \right), \quad (2.96)$$

donde α y $S_a(\omega)$ son cantidades positivas, pero suponiendo que α es independiente de la frecuencia angular ω . Notamos que las ecuaciones (2.93) y (2.96), son una generalización natural de una fuente del modelo de *Schell-Gaussiano*; siendo un modelo con bastantes aplicaciones en el estudio de haces de luz parcialmente coherentes.

Continuando con el análisis, con el fin de obtener la matriz de coherencia y grado de polarización en cualquier plano $z = z_b$ ($z_b > z_a$), se tiene que seguir los siguientes pasos. Primero, la ecuación (2.96) la sustituimos en (2.93). Después, lo que resulte junto con la expresión (2.90) se sustituyen en la ecuación (2.89). Por último, después de rigurosos cálculos, se obtiene las siguientes expresiones:

$$J_{ij}(\rho_b, z_b, \omega) = S_a(\omega) \begin{bmatrix} A(\rho_b, z_b, \omega) & 0 \\ 0 & B(\rho_b, z_b, \omega) \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{P}(\rho_b, z_b, \omega) = \frac{|A(\rho_b, z_b, \omega) - B(\rho_b, z_b, \omega)|}{A(\rho_b, z_b, \omega) + B(\rho_b, z_b, \omega)}. \quad (2.98)$$

Siendo $A(\rho_b, z_b, \omega)$ y $B(\rho_b, z_b, \omega)$ definidas como

$$A(\rho_b, z_b, \omega) = \frac{1}{\beta_1^2(z_b)} \exp \left[- \frac{|\rho_b|^2}{2\alpha^2 \beta_1^2(z_b)} \right], \quad (2.99)$$

$$B(\rho_b, z_b, \omega) = \frac{1}{\beta_2^2(z_b)} \exp \left[- \frac{|\rho_b|^2}{2\alpha^2 \beta_2^2(z_b)} \right]. \quad (2.100)$$

Donde

$$\beta_i^2 = 1 + \frac{z^2}{ak^2\alpha^4} + \frac{z^2}{k^2l_i^2\alpha^2}, \quad (i = 1, 2). \quad (2.101)$$

De manera que estos resultados demuestran de manera contundente que la polarización de un haz de luz en general cambia mientras el haz se propague en el espacio libre. Sin embargo, es importante enfatizar que los resultados obtenidos están basados en un modelo específico y está claro que uno esperaría algún cambio en la polarización durante la propagación siempre que las propiedades de coherencia de la fuente dependan de la polarización [16].

Capítulo 3

Fuente secundaria parcialmente coherente con vórtice

Hasta ahora, en este trabajo, aun no se han establecido las condiciones de cómo son generadas las fluctuaciones del campo óptico, es decir, ya sabemos que las fuentes del campo emiten radiación por medio de un mecanismo que nunca es estrictamente determinista y solo puede describirse en términos estadísticos [30]. Por otra parte, para algunas aplicaciones ópticas es más favorable utilizar un haz de luz parcialmente coherente con propiedades estadísticas específicas, debido a la versatilidad que permite a la iluminación aumentar la resolución espacial en imágenes ópticas, obtener los efectos de propagación libre de difracción y auto-reconstrucción en la conformación del haz, o para mejorar la profundidad de enfoque en el *atrapamiento óptico tridimensional* y *micromanipulación*. No obstante, en la actualidad comercialmente no existen fuentes ópticas parcialmente coherentes que posean propiedades estadísticas variables [13]. La fuente comúnmente utilizada en la práctica óptica es el láser de gas, cuya radiación es casi completamente coherente y completamente polarizada [14].

Por tanto, surge el problema de la elaboración experimental de una fuente secundaria con propiedades de coherencia y polarización de la radiación láser. Para resolver el problema anterior, se pueden utilizar los siguientes enfoques. El primer enfoque, es partiendo de una fuente primaria comercialmente disponible completamente incoherente e intentar obtener el resultado deseado debido a los llamados cambios inducidos por correlación del campo en la propagación. Un segundo enfoque, permite obtener el resultado deseado debido a la modulación de la fuente primaria comercialmente disponible completamente coherente mediante el uso de una pantalla dinámica de fase aleatoria. Empero, estos dos enfoques no permiten elegir libremente la estructura estadística de la fuente secundaria generada. Por ultimo, hay un tercer enfoque el cual consiste en generar la fuente deseada en forma de una superposición incoherente (la suma de intensidades ponderadas) de modos completamente coherentes y físicamente realizables. Al cambiar el conjunto de modos coherentes, se puede variar la estructura estadística de la fuente generada y al cambiar las ponderaciones de los modos, se puede variar su grado de coherencia [13]. Se ha demostrado que tales alteraciones se pueden realizar por medio del modulador espacial de luz (SLM) de cristal líquido (LC) controlado por computadora [14].

3.1. Vórtices ópticos parcialmente coherentes

En las últimas décadas, dentro del área de óptica ha habido gran interés en los *vórtices ópticos* debido en parte a las técnicas holográficas o litográficas generadas por computadora que facilitan el crear vórtices al emplear un haz de láser. Los vórtices ópticos se caracterizan por un núcleo oscuro de intensidad (baja intensidad cercana a cero) y una fase armónica azimutal bien definida

con una singularidad, además, pueden considerarse como *haces ópticos coherentes*. No obstante, en el régimen de transición de luz parcialmente coherente, se deben tener en cuenta las propiedades estadísticas de la luz para cuantificar las propiedades de la fase completa. Sabemos que la evolución espacio-temporal de una onda se rige por la topología de su frente de onda, por ejemplo, para una onda que tiene un frente de onda helicoidal puede denominarse “onda con vórtice” debido a la circulación del momento angular alrededor del eje de la hélice. Recientemente, varios grupos de la comunidad científica han explorado las propiedades teóricas y prácticas de los vórtices ópticos formados con luz parcialmente coherente, por ejemplo, para transportar modos de vórtice óptico. Aun más, fue posible predecir que se producirían ceros con y sin una estructura de fase con vórtice en la función de correlación de dos puntos [12].

En adelante, nos centramos en estudiar a un vórtice óptico parcialmente coherente como un campo que posee un frente de onda helicoidal y una singularidad en este frente de onda. En particular, la fase de un vórtice óptico presenta valores que fluctúan espacialmente teniendo efectos en la distribución de intensidad y los estados de polarización en la sección transversal del campo. Físicamente un vórtice tiene la propiedad de que la intensidad asociada al campo es de forma anular con un cero en el origen. Tal campo es descrito matemáticamente por una función exponencial compleja cuya fase es repetida en intervalos de $[0, 2\pi]$, dentro de un ciclo cerrado, por un número entero ν conocido como carga topológica [4].

Definición 3.1 La carga topológica de una singularidad para la distribución de fase Φ viene dada por

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \times \oint_C \nabla \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

donde C es un camino cerrado que rodea la singularidad [4].

Adicionalmente, utilizaremos el tercer enfoque (ya mencionado anteriormente) aplicando una técnica para generar un tipo de fuente secundaria parcialmente coherente, es decir, un vórtice óptico parcialmente coherente con estructura *modal de Bessel* [13].

3.1.1. Fuente secundaria parcialmente coherente en modos Bessel con vórtice

En estudios recientes, ya se han introducido una nueva familia de vórtices ópticos que se propagan sin difracción. Es decir, cualquier miembro de esta familia es un haz parcialmente coherente que puede representarse como una superposición incoherente (la suma de intensidades ponderadas) de modos de Bessel ortogonales totalmente coherentes, con el mismo frente de onda helicoidal [15]. Suponemos que la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ es una función continua de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en todo el dominio D . Entonces el término $|W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2$ necesariamente estará acotado en el dominio D , teniendo que

$$\int_D \int_D |W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2 d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 < \infty. \quad (3.2)$$

Adicionalmente, recordamos que la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ satisface la condición:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = W^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega). \quad (3.3)$$

Incluso, es una función definida no negativa en el sentido que

$$\int_D \int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \geq 0, \quad (3.4)$$

donde $f(\mathbf{r})$ es cualquier función de cuadrado integrable [18]. Como nota, omitimos la dependencia explícita de las magnitudes consideradas con respecto a la frecuencia óptica por brevedad de la notación.

De acuerdo con la condición (3.2), implica que la función de densidad espectral cruzada es un *núcleo* de *Hilbert-Schmidt*. Además, las ecuaciones (3.3) y (3.4) muestran que el núcleo es *hermitiano* y definido *no negativo*, respectivamente [18]. En consecuencia, la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ puede ser representada por la versión multidimensional del *teorema de Mercer* [13, 15, 18], como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n^{\infty} \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2). \quad (3.5)$$

Donde λ_n son los eigenvalores y $\varphi_n(\mathbf{r}_1)$ son las eigenfunciones de la ecuación *integral homogénea de Fredholm* de segunda clase [13, 15]:

$$\int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi_n(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \lambda_n \varphi_n(\mathbf{r}_2). \quad (3.6)$$

Es de suma importancia que todos los eigenvalores λ_n sean necesariamente reales y no negativos, es decir

$$\lambda_n^* = \lambda_n \geq 0. \quad (3.7)$$

Y las eigenfunciones pueden ser escogidas de un conjunto ortonormal, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nm}, \quad (3.8)$$

siendo δ_{nm} la *delta de Kronecker* [13].

Para describir esta representación se consideran las definiciones básicas de la teoría de la coherencia en el dominio espacio-frecuencial [13]. Por otra parte, consideremos el campo estocástico donde cada una de sus realizaciones son de la forma

$$E(\mathbf{r}) = \sum_n c_n \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

donde $\varphi_n(\mathbf{r})$ puede estar asociado con un modo completamente coherente del campo y c_n son variables aleatorias que satisfacen la condición $\langle c_n^* c_m \rangle = \lambda_n \delta_{n,m}$ siendo $\delta_{n,m}$ la *delta de Kronecker*. De modo que podemos reescribir la densidad espectral cruzada de un campo como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E^*(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_2) \rangle = \sum_n \sum_m \langle c_n^* c_m \rangle \varphi_n^*(\mathbf{r}_1) \varphi_m(\mathbf{r}_2), \quad (3.10)$$

como ya se ha mencionado con anterioridad en esta sesión, los *brackets* denotan el promedio estadístico sobre el ensamble de realizaciones aleatorias [15].

Además, se eligen φ_n como funciones de Bessel con el mismo factor exponencial azimutal, esto es

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} r/a)}{\sqrt{\pi} a J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \exp(i\nu\theta), \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3.11)$$

De acuerdo a estas consideraciones, podemos reescribir la expresión (3.10) como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} r_1/a) J_\nu(\alpha_{\nu,n} r_2/a)}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} \times \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (3.12)$$

notamos que el termino exponencial de la expresión (3.12) determina una fase helicoidal asociada a un *vórtice óptico* con carga topológica ν para cada modo $\varphi_n(\mathbf{r})$ [13, 15].

Asimismo, la intensidad espectral $S(\mathbf{r})$ correspondiente al campo obtenido de la ecuación (3.12) cuando $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ es tal que

$$S(\mathbf{r}) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu^2(\alpha_{\nu,n} r/a)}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (3.13)$$

De acuerdo a la teoría de coherencia óptica, las propiedades de coherencia de la luz se caracterizan por la distribución de los valores propios λ_n . Esto es, cuanto más uniforme sea la difusión de esta distribución más incoherente será la luz. En caso contrario, cuanto mayor sea la concentración de la distribución de los valores propios λ_n sobre el valor máximo mayor será la coherencia de la luz. Por tanto, el campo dado por (3.12) con los valores arbitrarios de λ_n describe una clase de fuente secundaria parcialmente coherente que puede denominarse *fente con vórtice con estructura modal Bessel*; siendo la representación de modos coherentes del campo en consideración [15].

3.2. Campos parcialmente coherentes invariantes en propagación

Los campos invariantes en propagación, o *no-difractantes* introducidos por J. Durnin, son una clase de campos para los cuales la distribución de intensidad transversal permanece exactamente igual durante su propagación. El tratamiento original de Durnin se realizó con el enfoque escalar asumiendo una coherencia total y, por lo tanto, se ha extendido mediante análisis electromagnéticos de campos completamente coherentes, así como mediante el análisis escalar de campos parcialmente coherentes [35].

Hay varias formas diferentes de producir campos espacialmente parcialmente coherentes. Mientras que uno de los primeros experimentos se utilizó un láser y una celda acusto-óptica, los experimentos posteriores utilizaron un láser y una placa giratoria de vidrio esmerilado (RGGP) para producir campos con la coherencia espacial parcial deseada. Los métodos más modernos implican el uso de un láser y un modulador de luz espacial (SLM) o un RGGP en combinación con un SLM para lograr el propósito [36].

Probablemente la definición más natural de propagación invariante es la condición de que la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}, \omega)$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, permanezca exactamente igual en cada plano transversal $\mathbf{z} = \text{constante}$, es decir,

$$W(x, y, z + \Delta z; \omega) = W(x, y, z; \omega) \quad (3.14)$$

para todos los valores de Δz . La condición (3.14) también puede expresarse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial z} W(x, y, z; \omega) \equiv 0, \quad (3.15)$$

que a veces es más adecuada [37, 38].

Para un campo de ondas escalares parcialmente coherente, consideramos que se propaga dentro de la mitad del espacio $z > 0$. Su densidad espectral cruzada en los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ podrá ser descrita como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \iint W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \omega) K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \omega) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \omega) d^2\mathbf{r}'_1 d^2\mathbf{r}'_2. \quad (3.16)$$

Donde denotamos la densidad espectral cruzada en el plano $z = 0$ como $W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \omega)$ y $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ como el *propagador en el espacio libre*, una función de transmisión, de la ecuación de Helmholtz [18, 39].

De modo que a partir de la ecuación (3.16) uno podría demostrar que es invariante espacialmente en propagación. Sin embargo, para no calcular directamente la expresión (3.16) en términos de W y su propagador K , en el siguiente capítulo abordaremos un método que simplifica el cálculo mediante la expansión de Mercer.

3.3. Técnica de generación para una fuente secundaria parcialmente coherente con estructura modal Bessel

A continuación, describimos matemáticamente la generación de un vórtice parcialmente coherente empleando la técnica de “Representación en Modos Coherentes” descrita en el **Capítulo 3**,

Sección 3.1.1. En la representación en modos coherentes la densidad espectral se expresa como una superposición incoherente de modos completamente coherentes pero no correlacionados entre sí. Para ello consideramos un sistema experimental como el que se muestra en la **Figura 3.1**.

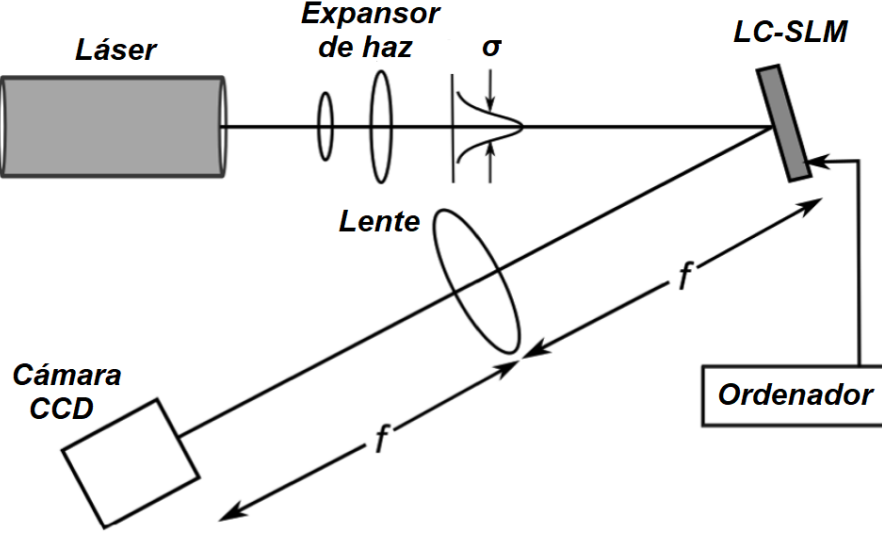


Figura 3.1: Esquema del sistema óptico para generar una fuente con vórtice parcialmente coherente [13].

En este sistema, se considera un haz láser expandido y colimado que ilumina un *modulador espacial de luz de cristal líquido* (LC-SLM por sus siglas en inglés), donde el SLM debe ser de reflexión y que opere en el modo de solo fase. En dicho modulador se despliega un holograma digital con dependencia temporal al que nos referiremos como *señales de vídeo de control*, que consta de una serie de modos en forma de anillos concéntricos, adecuadamente distribuidos, portando un vórtice de carga topológica ν y con fase aleatoria en el tiempo en la coordenada angular. Luego, la luz modulada del láser pasa por un sistema $2f$ de transformada de Fourier en cuyo plano focal posterior, por la hipótesis ergódica, la intensidad óptica se obtiene al calcular el promedio en el ensamble de realizaciones espaciales [13].

Para poder realizar lo descrito anteriormente, para modular la luz y su desplazamiento consideramos la *Transmitancia de amplitud compleja* [40], definida en un dominio circular de radio R en el plano donde se ubica el modulador y contiene un conjunto de N anillos concéntricos bien separados. Cada uno de los anillos son de radio ρ_n y ancho $\Delta\rho_n$ con *transmitancia de fase* en el interior dada por

$$t_n(\rho) = \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)], \quad (3.17)$$

donde $\rho = (\rho, \varphi)$, ν es un entero y ψ_n son las variables aleatorias distribuidas uniformemente en el rango de $[0, 2\pi]$. Además, ψ_n es la variable aleatoria con distribución uniforme que garantiza que el proceso sea estocástico y estacionario, al menos en el sentido amplio. También suponemos que los anillos complementarios entre los principales tienen la *transmitancia de fase* común dada por

$$t'(\rho) = \exp\left(i\frac{k}{f}x'_0x\right), \quad (3.18)$$

siendo k el número de onda de iluminación, f es la longitud focal de la lente y x'_0 es una constante debidamente escogida. Observamos que la transmitancia $t'_n(\rho)$ se denomina *portadora lineal* que da como resultado en la desviación de la amplitud de luz que pasa a través de los anillos complementarios de la dirección axial y, por lo tanto, puede omitirse de nuestras consideraciones posteriores.

Fuente secundaria parcialmente coherente con vórtice

3.3 Técnica de generación para una fuente secundaria parcialmente coherente con estructura modal Bessel

Por lo tanto, si tomamos $\rho_n = \alpha_{\nu,n}R/\alpha_{\nu,N}$ y $\Delta\rho_n = b/\rho_n$ con $\alpha_{\nu,n}$ las n -ésimas raíces (ceros) de la función Bessel. Luego, suponiendo que los anillos principales son lo suficientemente delgados ($b \ll 1$), se puede usar la siguiente aproximación para la *transmitancia total*

$$t(\rho) \propto \sum_{n=1}^N \frac{1}{\alpha_{\nu,n}} \delta\left(\rho - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)], \quad (3.19)$$

donde δ denota la función de delta de Dirac [13].

Consideramos que el sistema es iluminado por un haz Gaussiano completamente coherente con un punto de tamaño variable en la región σ ($\sigma \leq R$). Por lo tanto, el campo óptico de entrada puede ser descrito como

$$E(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^N \frac{1}{\alpha_{\nu,n}} \delta\left(\rho - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)]. \quad (3.20)$$

Posteriormente, recordando que la lente convergente tiene un punto focal en el plano de entrada y otro punto focal en el plano de salida mostrados en la **Figura 3.2**, los campos que estén situados en dichos plano respectivamente estarán relacionados por la *transformada de Fourier*, la cual puede ser expresada en coordenadas polares, esto es

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{E}(\rho, \varphi) \exp\left[-i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right] \rho d\rho d\varphi. \quad (3.21)$$

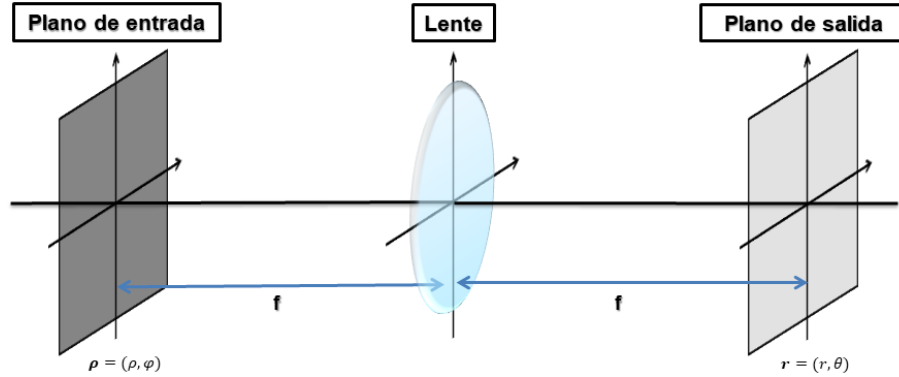


Figura 3.2: Esquema de los planos focales de una lente convergente.

Teniendo en cuenta debidamente las propiedades de filtrado de la función de delta de Dirac y la relación de Bessel:

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\varphi) \exp[ix \cos(\varphi)] d\varphi. \quad (3.22)$$

Al sustituir la expresión (3.20) en (3.21), encontramos la siguiente expresión

$$E(\mathbf{r}) \propto \exp(i\nu\theta) \sum_{n=1}^N \exp(i\psi_n) \exp\left[-\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R r\right). \quad (3.23)$$

Recordamos que las propiedades estadísticas de segundo orden (varianza y función de correlación) de una fuente plana aleatoria (primaria o secundaria) se pueden caracterizar completamente por la

Fuente secundaria parcialmente coherente con vórtice

3.3 Técnica de generación para una fuente secundaria parcialmente coherente con estructura modal Bessel

densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E^*(\mathbf{r}_1)E(\mathbf{r}_2) \rangle$. Entonces la densidad espectral del campo a la salida del sistema óptico en consideración es de la forma

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle \exp(-i\psi_n) \exp(i\psi_m) \rangle \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\alpha_{\nu,m}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \\ &\times J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \mathbf{r}_1\right) J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{\nu,m}}{\alpha_{\nu,N}} R \mathbf{r}_2\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir de aquí, tomamos algunas consideraciones que nos permitirán simplificar la expresión (3.24). Notamos que dada la independencia estadística de las variables ψ_n y ψ_m , es posible considerar la siguiente relación

$$\langle \exp(-i\psi_n) \exp(i\psi_m) \rangle = \delta_{nm}. \quad (3.25)$$

Además, introducimos el termino: $r_0 = (f\alpha_{\nu,N})/(kR)$.

De modo que la densidad espectral cruzada (3.24) será reescrita de forma que

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \\ &\times J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\mathbf{r}_1}{r_0}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\mathbf{r}_2}{r_0}\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Reagrupando términos, podemos expresarla como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \sum_{n=1}^N \mu_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \mathbf{r}_1 / r_0) J_\nu(\alpha_{\nu,n} \mathbf{r}_2 / r_0)}{\pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (3.27)$$

donde

$$\mu_n = J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (3.28)$$

Así finalmente, la expresión (3.27) representa una suma finita que se aproxima a la densidad espectral cruzada (3.12), con una μ_n especificada por (3.28). Por otro lado, cuando $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ obtenemos la densidad espectral $S(\mathbf{r})$ como [13],

$$S(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r})|^2 \rangle. \quad (3.29)$$

Por ende, al sustituir (3.27) en (3.29), se obtiene que

$$S(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{\pi r_0^2} \sum_{n=1}^N J_\nu^2(\alpha_{\nu,n} \mathbf{r} / r_0) \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (3.30)$$

La característica clave de la propuesta consiste en la aplicación de desplazamientos de fase aleatorios dinámicos estadísticamente independientes en diferentes zonas anulares que da lugar a la destrucción parcial de la coherencia en la dirección radial. Además, esto permite variar el grado de coherencia de la fuente generada de forma muy sencilla cambiando la anchura de la fuente primaria. En la **Figura 3.3** se muestra la intensidad resultante a partir de la ecuación (3.30) para varias combinaciones de ν y de relación σ/R , publicadas en "Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator" [13].

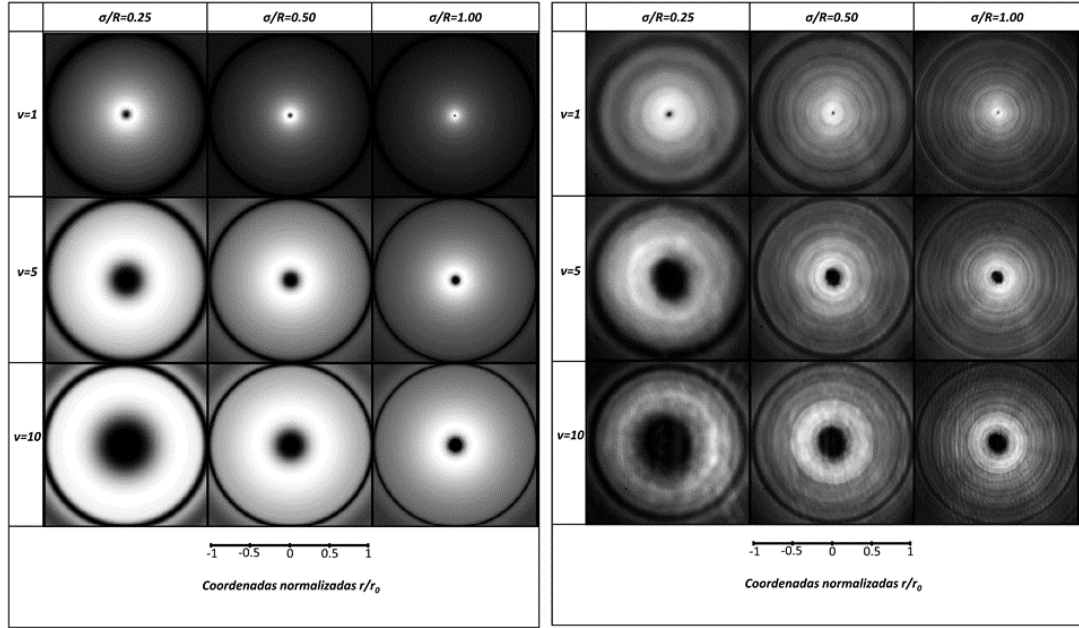


Figura 3.3: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$, obtenida a partir de la ecuación (3.30), para varias combinaciones de ν y de relación σ/R . Derecha, resultados teóricos, izquierda, resultados experimentales [13].

Capítulo 4

Evolución de la polarización de un vórtice en propagación

Cuando uno se adentra en el estudio de la propagación de un haz de luz, por lo general, se asume que su estado de polarización del dicho campo es invariante a medida que el haz se propaga en el espacio libre. Esto es cierto cuando se trabaja en la aproximación de campos tipo haz o paraxial, la cual impone ciertas condiciones, como por ejemplo considerar el hecho de que el campo es completamente coherente y polarizado. Sin embargo, la polarización parcial de un haz de luz implica que los dos componentes del vector de campo eléctrico perpendiculares a la dirección de propagación del haz están parcialmente correlacionados. A continuación describiremos el caso de la generación de un campo parcialmente coherente y parcialmente polarizado, en términos de modos fundamentales que se consideran completamente coherentes. Analizando detenidamente esta idea, notamos que es importante darse cuenta de que los haces de luz no necesitan ser generados por fuentes espacialmente coherentes. De hecho, en la actualidad ya se han realizado muchas investigaciones, tanto teóricas como experimentales, sobre los haces de luz generados por fuentes parcialmente coherentes [16].

4.1. Propagación de vórtices ópticos parcialmente coherentes

Retomando lo descrito en la **Sección 2.3** y la **Sección 3.1.1**, consideremos que las correlaciones entre dos campos esta dada por la densidad espectral cruzada (3.12), con dirección positiva z normal al plano (r, θ) . Por consiguiente, si suponemos que ya se conoce la densidad espectral cruzada para $z = 0$, siendo expresada por (3.12), ahora para algún punto del plano $z = z_1$ ($z_1 > 0$) se quiere conocer la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1)$. Para ello empleamos la representación de modos coherentes, de manera análoga a la expresión (3.5), con nuevos modos $\varphi_n(\mathbf{r}, z_1)$, tal que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1) = \sum_n \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{r}_1, z_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2, z_1). \quad (4.1)$$

Así cada nuevo modo $\varphi_n(\mathbf{r}, z_1)$ puede ser descrito expandiendo cada realización del campo, en el dominio frecuencia espacial, en forma de un espectro angular de ondas planas. Entonces, cada modo $\varphi_n(\mathbf{r}, z_1)$ tendrá una representación en coordenadas cilíndricas (r, θ, z_1) [15, 38], tal que

$$\varphi_n(\mathbf{r}, z_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{k/2\pi} \tilde{\varphi}_n(\rho, \phi, 0) \exp \left[i z_1 \sqrt{k^2 - (2\pi\rho)^2} \right] \times \exp [i 2\pi \rho r \cos(\phi - \theta)] \rho d\rho d\phi, \quad (4.2)$$

donde

$$\tilde{\varphi}_n(\rho, \phi, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi_n(r, \theta, 0) \exp [-i 2\pi \rho r \cos(\phi - \theta)] r dr d\theta \quad (4.3)$$

siendo el espectro angular del modo inicial $\varphi_n(\mathbf{r}, 0)$ en términos de las coordenadas polares (ρ, ϕ) y siendo k el número de onda.

Si consideramos la siguiente relación de Bessel:

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\psi) \exp[ix \cos(\psi)] d\psi. \quad (4.4)$$

Asimismo, tomamos en consideración la propiedad de depuración de la función delta de Dirac:

$$\alpha \int_0^\infty J_\nu(\alpha r) J_\nu(\alpha' r) r dr = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (4.5)$$

Al sustituir la ecuación (3.11) en la expresión (4.3), resolviendo la integral con las consideraciones anteriores, obtenemos que

$$\tilde{\varphi}_n(\rho, \phi, 0) = \frac{i^\nu \exp(i\nu\phi)}{2\pi a J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \delta\left(\rho - \frac{\alpha_{\nu,n}}{2\pi a}\right). \quad (4.6)$$

Posteriormente, sustituyendo (4.6) en la ecuación (4.2), calculando la integral y realizando algunos pasos algebraicos, resulta que

$$\varphi_n(\mathbf{r}, z_1) = \frac{\exp\left[iz_1\sqrt{k^2 - (\alpha_{\nu,n}/a)^2}\right]}{\sqrt{\pi} a J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{r}{a}\right) \exp(i\nu\theta). \quad (4.7)$$

Finalmente, podemos reescribir la densidad espectral cruzada (4.1) con cada modo $\varphi_n(\mathbf{r}, z_1)$, como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1) = \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{r_1}{a}) J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{r_2}{a})}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (4.8)$$

Notamos que al comparar las ecuaciones (3.12) y (4.8), tenemos que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1). \quad (4.9)$$

Siendo un resultado de gran importancia, pues implica que se puede definir a $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ como el concepto de un campo parcialmente coherente invariante en propagación o libre de difracción. A partir de la expresión (4.8) es posible definir una familia de vórtices parcialmente coherentes sin difracción [15].

4.2. Caracterización polimétrica mediante polarimetría de Stokes

Cuando un haz de luz se propaga por el espacio libre hay ciertas limitaciones en su estudio, ya establecidas en la literatura. Para algún plano transversal a la dirección de propagación el vector eléctrico traza una elipse (o alguna forma especial de la misma como un círculo o una línea recta) en un intervalo de tiempo del orden de $10^{-15}s$, siendo este periodo de tiempo extremadamente corto para estudiar el trazado de la elipse de polarización durante su propagación y sólo es correcta en un instante de tiempo determinado. Siendo una limitación seria que en la naturaleza la luz es a menudo no polarizada o parcialmente polarizada [33].

Como es sabido la luz parcialmente polarizada se puede considerar compuesta por dos componentes: totalmente polarizadas y no polarizadas. Un posible método de análisis es utilizar el cálculo de Jones para tratar las componentes totalmente polarizadas y la otra componente es tratada con las propiedades conocidas de la luz no polarizada. Sin embargo, dado que el cálculo de Jones sólo puede tratar la descripción de haces perfectamente polarizados, es necesario otro conjunto de parámetros

que puedan describir los estados de polarización de campos parcialmente coherentes [32].

Asimismo, estas limitaciones condicionan a que se considere una descripción alternativa que represente la luz polarizada en términos de observables [33]. Por fortuna, ya se han descrito este tipo de conjunto de parámetros que pueden describir haces de luz cuando son parcialmente coherentes. Siendo establecidos por *George G. Stokes*, son los denominados *parámetros de Stokes* y se pueden agrupar para formar un vector conocido como *vector de Stokes*. Notamos que este vector no reemplaza al vector de Jones, sino que lo complementa [32].

4.2.1. Parámetros de Stokes

Consideremos un campo electromagnético, no necesariamente monocromático, que se propaga en una dirección z , donde sus fluctuaciones son caracterizadas por un proceso estocástico estadísticamente estacionario, al menos en el sentido amplio [31]. De modo que para cada realización a un tiempo t se describe una señal analítica en términos de sus componentes como

$$E_x(t) = E_{0x}(t)e^{i[\omega t + \phi_x(t)]}, \quad E_y(t) = E_{0y}(t)e^{i[\omega t + \phi_y(t)]}. \quad (4.10)$$

Donde $E_{0x}(t)$ y $E_{0y}(t)$ son las amplitudes instantáneas reales para cada componente, ω es la frecuencia angular instantánea, $\phi_x(t)$ y $\phi_y(t)$ son términos de fase instantáneos. Dado que en todo momento las amplitudes y factores de fase fluctúan lentamente en comparación con las rápidas vibraciones de los cosinusoides, podemos tener una expresión similar a la elipse de polarización que es válida solo en un instante de tiempo dada como

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} \cos[\phi(t)] = \sin^2[\phi(t)], \quad (4.11)$$

donde $\delta(t) = \phi_y(t) - \phi_x(t)$ [33].

En vista de la periodicidad de $E_x(t)$ y $E_y(t)$, necesitamos promediar (4.11) sólo a lo largo de un único período de oscilación, pues esto corresponde a lo observable del campo óptico [33], así tenemos que [31, 33]

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi). \quad (4.12)$$

Observamos que el término $\langle E_x(t)E_y(t) \rangle$ satisface la ecuación (2.8), es decir es por ser un proceso ergódico [33], tal que

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_x(t)E_y(t)dt. \quad (4.13)$$

De acuerdo a la definición para las componentes ortogonales reales del vector del campo eléctrico, sus valores promedios están dados por

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{E_{0x}^2}{2}, \quad \langle E_y^2(t) \rangle = \frac{E_{0y}^2}{2}. \quad (4.14)$$

Al sustituir (4.14) en (4.12) o resolviendo (4.13), se encuentra que

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{E_{0x}E_{0y} \cos(\phi)}{2}. \quad (4.15)$$

De modo que de la ecuación (4.12), se puede reescribir si se multiplica por un factor $4E_{0x}^2E_{0y}^2$, sustituyendo los promedios de las expresiones (4.14) y (4.15), por último realizando una simplificación algebraica se deduce la siguiente ecuación [31, 33]:

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - [2E_{0x}E_{0y} \cos(\phi)]^2 = [2E_{0x}E_{0y} \sin(\phi)]^2. \quad (4.16)$$

Lo que nos permite renombrar los términos en paréntesis de la expresión (4.16) de la siguiente manera

$$S_0 = |E_x(t)|^2 + |E_y(t)|^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (4.17)$$

$$S_1 = |E_x(t)|^2 - |E_y(t)|^2 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (4.18)$$

$$S_2 = 2|E_x(t)||E_y(t)|\cos(\phi) = 2E_{0x}E_{0y}\cos(\phi), \quad (4.19)$$

$$S_3 = 2|E_x(t)||E_y(t)|\sin(\phi) = 2E_{0x}E_{0y}\sin(\phi). \quad (4.20)$$

Observamos que los promedios temporales son independientes del instante de tiempo en el que se toma el promedio, pues son procesos aleatorios estacionarios [31]. Además, los parámetros son cantidades reales expresados en términos de intensidades pues son simplemente los observables de la elipse de polarización, por tanto, del campo óptico. Por ultimo, los parámetros S_0 , S_1 , S_2 y S_3 son denominados como los *parámetros de Stokes* para el plano de una onda [33]. Sabemos que el cuadrado de S_0 es la intensidad total del campo, de modo que podemos establecer la siguiente ecuación:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (4.21)$$

siempre y cuando sea polarización completa o una onda monocromática [31].

Si consideramos luz parcialmente polarizada, vemos que las relaciones dadas por (4.17-4.20) siguen siendo válidas para intervalos de tiempo muy cortos; ya que las amplitudes y las fases fluctúan lentamente. Empleando la desigualdad de Schwarz, se puede demostrar que para cualquier estado de la luz polarizada los parámetros siempre satisfacen la relación [33]:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (4.22)$$

Veamos que cada parámetro describe una característica: S_0 permite describir la intensidad total, S_1 especifica la polarización lineal horizontal o vertical, S_2 detalla la polarización a $\pm 45^\circ$ y por último S_3 determina si es polarización circular a derecha o izquierda [33]. Un punto más, pero no menos importante, es el hecho que los parámetros de Stokes tienen la dimensionalidad de intensidad (o irradiancia), que es una cantidad basada en el Sistema Internacional de Unidades (SI) cuya unidad es vatios por estereorradián. El uso predominante es omitir un factor dimensional constante $\epsilon_0 c/2 = \frac{1}{2}(\epsilon_0/\omega_0)^{1/2}$, la impedancia de espacio libre, común en los cuatro parámetros, en consecuencia, los parámetros de Stokes son adimensionales [31].

Como una observación, el ángulo azimutal ψ y ángulo de elipticidad χ que se introdujeron en las ecuaciones (2.71) y (2.72) recíprocamente, pueden ahora ser determinados en términos de los parámetros de Stokes [31, 33], esto es

$$\tan(2\psi) = \frac{S_2}{S_1}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \quad (4.23)$$

$$\sin(2\chi) = \frac{S_3}{S_0}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (4.24)$$

4.2.2. La matriz columna de Stokes

Es de esperarse que estos parámetros puedan expresarse en otras representaciones. De modo que los parámetros de Stokes pueden expresarse matemáticamente de forma matricial. Para la representación se considera en coordenadas polares, por lo que las componentes del campo óptico son de la siguiente forma:

$$E_x(t) = E_{0x}e^{i[\omega t + \phi_x]} = E_x e^{(i\omega t)} \hat{i}, \quad (4.25)$$

$$E_y(t) = E_{0y}e^{i[\omega t + \phi_y]} = E_y e^{(i\omega t)} \hat{j}, \quad (4.26)$$

Evolución de la polarización de un vórtice en propagación

4.2 Caracterización polimétrica mediante polarimetría de Stokes

donde $E_x = E_{0x}e^{(i\phi_x)}$ y $E_y = E_{0y}e^{(i\phi_y)}$.

De modo que los parámetros de Stokes quedan descritos de la siguiente manera

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (4.27)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (4.28)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* = 2E_{0x}E_{0y} \cos(\phi), \quad (4.29)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) = 2E_{0x}E_{0y} \sin(\phi). \quad (4.30)$$

Finalmente, podemos representar los parámetros de Stokes con la notación matricial, tal que

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \cos(\phi) \\ 2E_{0x}E_{0y} \sin(\phi) \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Notamos que esta estructura matemática de matriz columna es análoga a la de un vector, por ello se acostumbra a referirse a esta representación (4.31) como el *vector de Stokes* [33].

Ahora, a partir del vector de Stokes es posible determinar cuales son los estados de polarización con mayor facilidad, en lugar de determinarlos directamente de la ecuación de la elipse de polarización, siendo [31, 33]:

I) Luz linealmente polarizada horizontal

Consideramos para este caso que sea $E_{0y} = 0$ tal que toda la intensidad total es $I_{0x} = E_{0x}^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} E_{0x}^2 \\ E_{0x}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I_{0x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

II) Luz linealmente polarizada vertical

Consideramos para este caso que sea $E_{0x} = 0$ tal que toda la intensidad total es $I_{0y} = E_{0y}^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} E_{0y}^2 \\ -E_{0y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I_{0y} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

III) Luz linealmente polarizada a $+45^\circ$

Consideramos para este caso que sea $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y donde el ángulo $\phi = 0^\circ$ tal que toda la intensidad total será $I_0 = 2E_0^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 2E_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

IV) Luz linealmente polarizada a -45°

Consideramos para este caso que sea $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y donde el ángulo $\phi = 180^\circ$ tal que toda la intensidad total será $I_0 = 2E_0^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ -2E_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

V) Luz circularmente polarizada a derecha

Consideramos para este caso que sea $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y donde el ángulo $\phi = 90^\circ$ tal que toda la intensidad total será $I_0 = 2E_0^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2E_0^2 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

VI) Luz circularmente polarizada a izquierda

Consideramos para este caso que sea $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y donde el ángulo $\phi = -90^\circ$ tal que toda la intensidad total será $I_0 = 2E_0^2$, entonces

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2E_0^2 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.3. Polarimetría de Stokes

Como se ha mostrado los parámetros de polarización de Stokes son una formulación de intensidad del estado de polarización de un haz óptico, lo que facilita su medición directa [33]. En esta sección, consideraremos un haz de luz que incide en un detector cuyo tiempo de respuesta es mucho mayor que el tiempo de coherencia debido a las capacidades tecnológicas del detector, pues normalmente operan a 60Hz y es mucho mayor que las frecuencias de las fluctuaciones del campo. En la actualidad, hay varias técnicas que han evolucionado a lo largo de los años para evaluar los cuatro elementos del vector de Stokes, siendo métodos que aprovechan cambios sobre la intensidad del haz de luz incidente al emplear elementos ópticos; como compensadores, polarizadores y rotadores [31]. Sin embargo, la técnica clásica para su medición consta de hacer pasar un haz óptico a través de dos elementos ópticos conocidos como *retardador* y *polarizador*. En concreto, el campo incidente se describe en términos de sus componentes, y el campo que emerge de los elementos polarizadores se utiliza para determinar la intensidad del haz emergente [33].

4.3.1. Procedimiento de Stokes

Partimos considerando un haz óptico monocromático, cuyas componentes son descritas como:

$$E_x(t) = E_{0x}e^{i\phi_x}e^{i\omega t}, \quad E_y(t) = E_{0y}e^{i\phi_y}e^{i\omega t}. \quad (4.38)$$

Para medir los parámetros de Stokes, el campo se hace propagar a través de un elemento de desfase, con la propiedad de que la fase de la componente E_x se adelanta en $\phi/2$ y la fase de la componente E_y se retrasa en $\phi/2$. De modo que, las componentes que emergen de la componente del elemento de desfase, denotadas por E'_x y E'_y , son tal que

$$E'_x = E_x e^{i\phi/2}, \quad E'_y = E_y e^{-i\phi/2}. \quad (4.39)$$

Este elemento óptico que produce un desfase se le denomina *retardador*.

Posteriormente el campo, descrito por las componentes (4.40), se hace incidir sobre otro elemento óptico denominado *polarizador*, con la propiedad de que el campo óptico se transmite sólo a lo largo de un eje conocido como *eje de transmisión*. Es decir, el eje de transmisión del polarizador está en un ángulo θ , donde sólo las componentes de E'_x y E'_y en esta dirección pueden transmitirse perfectamente; donde en cualquier otro ángulo las componentes tenderán a cero. Así, el campo emergente del polarizador será tal que

$$E = E'_x \cos(\theta) + E'_y \sin(\theta). \quad (4.40)$$

Recordando que la intensidad del haz de luz es definido por el producto del campo por su conjugado complejo, que denotamos como: $I(\theta, \phi) = E \cdot E^*$. Entonces, sustituyendo (4.40) en (4.41), tenemos que la intensidad será

$$I(\theta, \phi) = E_x E_x^* \cos^2(\theta) + E_y E_y^* \sin^2(\theta) + E_x^* E_y e^{-i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) + E_x E_y^* e^{i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (4.41)$$

Notamos que es posible reescribir la expresión (4.42), usando propiedades trigonométricas de ángulos medios, como

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2}[(E_x E_x^* + E_y E_y^*) + (E_x E_x^* - E_y E_y^*) \cos(2\theta) + (E_x E_y^* + E_y E_x^*) \cos(\phi) \sin(2\theta) + i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \sin(\phi) \sin(2\theta)]. \quad (4.42)$$

Observamos que en la expresión (4.43) hay términos agrupados que coinciden con las ecuaciones definidas en (4.27-30), sustituyendo tenemos que

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2}[S_0 + S_1 \cos(2\theta) + S_2 \cos(\phi) \sin(2\theta) + S_3 \sin(\phi) \sin(2\theta)]. \quad (4.43)$$

La ecuación (4.44) es la famosa fórmula de intensidad de Stokes para medir los cuatro parámetros de Stokes [33].

Para medir los tres primeros parámetros de Stokes se retira el retardador ($\phi = 0^\circ$) y girando el ángulo θ del eje de transmisión del polarizador a 0° , $+45^\circ$, $+90^\circ$ y $+135^\circ$, respectivamente. El último parámetro, S_3 , se mide reinsertando el retardador de un cuarto de onda ($\phi = 90^\circ$) en el camino óptico y ajustando el eje de transmisión del polarizador a $\theta = +45^\circ$ y $\theta = +135^\circ$ [33]. Por consiguiente, se obtienen las siguientes intensidades [31, 33]:

$$I(0^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_1] \quad (4.44)$$

$$I(45^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_2], \quad (4.45)$$

$$I(90^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 - S_1], \quad (4.46)$$

$$I(45^\circ, 90^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 + S_3], \quad (4.47)$$

$$I(135^\circ, 0^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 - S_2] \quad (4.48)$$

$$I(135^\circ, 90^\circ) = \frac{1}{2}[S_0 - S_3]. \quad (4.49)$$

Que corresponden a la polarización: lineal horizontal, lineal diagonal a $+45^\circ$, lineal vertical, circular a derecha, lineal diagonal a $+135^\circ$ y circular a izquierda; respectivamente.

A partir de las intensidades (4.45-4.50), podemos medir los cuatro parámetros de Stokes como [31, 33]:

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ), \quad (4.50)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ), \quad (4.51)$$

$$S_2 = I(45^\circ, 0^\circ) - I(135^\circ, 0^\circ), \quad (4.52)$$

$$S_3 = I(45^\circ, 90^\circ) - I(135^\circ, 90^\circ). \quad (4.53)$$

Recalamos que se está suponiendo un campo electromagnético que se propaga en una dirección z , cuyas sus fluctuaciones son caracterizadas por un proceso estocástico estadísticamente estacionario (al menos en el sentido amplio), de modo que $I(\theta, \phi)$ es una intensidad promedio. Sin embargo,

el uso de los parámetros de Stokes permite tratar directamente con las cantidades medidas en un experimento óptico para describir la luz polarizada en lugar de la formulación de amplitud. Es decir, se realiza el análisis en el dominio de la amplitud, cuyos resultados permiten determinar los parámetros de Stokes, utilizando las ecuaciones (4.51-4.54) [33]. Observemos que los posibles errores asociados con este método de medición pueden deberse a la desalineación del eje rápido del retardador, las propiedades internas (absorción) del material birrefringente y el detector parcialmente polarizado [31].

4.3.2. Procedimiento de Collett

Otra técnica experimental es la siguiente que consiste en simplificar el procedimiento de Stokes al retirar el uso del compensador en dicho procedimiento. Pues solo requiere de un polarizador circular, construido a partir un retardador de cuarto de onda y un polarizador lineal, cuyo eje de transmisión es a 45° con respecto al eje horizontal, colocado en una montura rotatoria. O por otra parte, utilizar un polarizador circular con la propiedad de que por un lado se comporta como un polarizador circular, mientras que por el otro lado se comporta como un polarizador lineal [41]. Análogamente, los parámetros de Stokes se miden en valores seleccionados del ángulo de rotación. Luego, el polarizador circular se gira 180° sobre su eje perpendicular al eje de propagación y los parámetros de Stokes se miden nuevamente en valores seleccionados del ángulo de rotación. En consecuencia, se obtendrá la intensidad promedio de salida que emerge del polarizador circular es

$$I(\theta)_c = \frac{1}{2}[S_0 - \sin(2\theta)S_1 + S_2 \cos(2\theta)], \quad (4.54)$$

donde el subíndice c hace referencia que se está describiendo con el lado circular del polarizador. Suponiendo el polarizador circular con la propiedad ser un polarizador circular de un lado y del otro lado se comporta como un polarizador lineal, cuando es ocupado su lado lineal notamos que dependerá solo de los estados lineales de los parámetros de Stokes. Así, la intensidad promedio de salida del polarizador lineal estará dada como

$$I(\theta)_l = \frac{1}{2}(S_0 + S_3), \quad (4.55)$$

donde el subíndice l hace referencia al lado lineal del polarizador.

Por lo tanto, la intensidad depende únicamente de la componente polarizada circularmente del haz de luz, independientemente del ángulo de rotación. De modo que los parámetros de Stokes pueden ser medido como

$$S_0 = I(0^\circ)_c + I(90^\circ)_c, \quad (4.56)$$

$$S_1 = I(0^\circ)_c + I(90^\circ)_c - 2I(90^\circ)_c, \quad (4.57)$$

$$S_2 = I(0^\circ)_c - I(90^\circ)_c, \quad (4.58)$$

$$S_3 = 2I(0^\circ)_l - I(0^\circ)_c - I(90^\circ)_c. \quad (4.59)$$

Para este procedimiento el posible error más significativo viene del polarizador, en cuestión de calibración, por ello no es posible obtener los cuatro parámetros de Stokes simultáneamente [31, 41].

Con el propósito de utilizar la polarimetría en el siguiente capítulo, no será necesario adentrarnos en estudios adicionales sobre procedimientos de medición de los parámetros de Stokes. Será suficiente considerar lo expuesto en la **Sección 4.3.1**, pues permite utilizar las seis mediciones de intensidad posibles para determinar dichos parámetros. La razón de introducir el procedimiento de Collet es por comparativa y demostración que es posible utilizar otros procedimientos de medición.

Capítulo 5

Resultados y simulaciones numéricas

En este capítulo describiremos los resultados obtenidos en la síntesis numérica de la caracterización polarimétrica de un vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel, en propagación en el dominio espacial. En la **Figura 5.1** se ejemplifica el esquema que utilizamos para la síntesis numérica de la fuente generada.

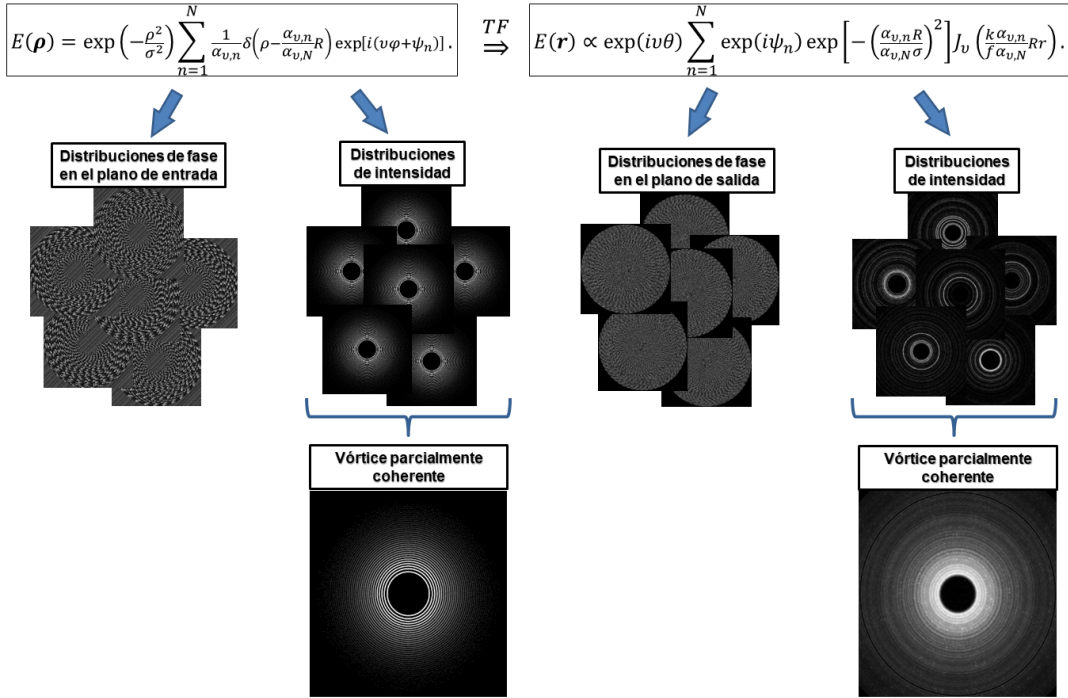


Figura 5.1: Esquema general de la síntesis numérica de una fuente secundaria con vórtice parcialmente coherente.

Hacemos notar que la síntesis numérica que llevamos a cabo requirió de emplear códigos en *Matlab*, disponibles en el *Laboratorio de Óptica de Fourier* de la *Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*, que permiten realizar un análisis numérico considerando los elementos ópticos disponibles en el laboratorio. En particular, fue necesario realizar una simulación numérica de la generación de una fuente secundaria parcialmente coherente con estructura modal Bessel. Es decir, hicimos uso de un código que nos permite sintetizar numéricamente un vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel, un código para calcular las intensidades para la polarimetría y un código para aplicar la técnica de polarimetría de Stokes al campo. De modo que, codificamos un ensamble de *señales de control* y al realizarle una transformada de Fourier a cada realización, es posible calcular sus promedios, para así obtener un *vórtice óptico* parcialmente coherente en el plano de Fourier. A partir de este sistema, realizamos la caracterización polarimétrica correspondiente a los campos ópticos de interés.

5.1. Metodología de la síntesis numérica para la caracterización polarimétrica de la fuente generada

A continuación se detalla el procedimiento que seguimos para realizar la simulación numérica de la caracterización polarimétrica de un vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel, dicho procedimiento se divide en varias etapas. En la primera etapa, planteamos el procedimiento para la simulación donde determinamos las condiciones y parámetros iniciales, por ejemplo, la carga topológica ν , la razón σ/R , las raíces de la función Bessel, el grosor de los anillos moduladores y tamaño de las imágenes generadas.

Prosiguiendo, la segunda etapa consiste en la síntesis numérica del campo óptico resultante al modular la fase del haz Guassiano, a partir de un conjunto de mascarar de fase que denominamos *señales de control*. Para eso, definimos las mascarar de fase, considerando la ecuación (3.19) y la fase de un haz Guassiano, como una superposición incoherente de anillos moduladores completamente coherentes pero no correlacionados entre sí [13]. Aun más, para mostrar de manera efectiva las señales de control, optamos por truncar el número de anillos moduladores en $N = 40$, con una fase aleatoria para cada anillo. También, requerimos de una portadora de fondo en la señal para desplazar los efectos de difracción producidos por la separación entre los anillos moduladores, donde la expresión (3.18) describe a la portadora. Para cada una de las señales de control simuladas se le calcula su campo óptico descrito por (3.20), denominado como una realización, además, a partir de la densidad espectral $S(\rho) = \langle |E(\rho)|^2 \rangle$ obtenemos su distribución de intensidad del campo. Finalmente, al completar el ensamble se realiza un promedio de las distribuciones de intensidad del campo.

Para la tercera etapa, realizamos numéricamente la caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto (ya promediado), como se muestra en la **Figura 5.2**. Con el fin de analizar los posibles cambios de los estados de polarización en la sección transversal del campo, implementamos la técnica de polarimetría de Stokes, es decir, considerando el procedimiento de Stokes determinamos los parámetros de Stokes mediante intensidades. De acuerdo a la síntesis numérica del vórtice se calculan los promedios de la parte real y la parte imaginaria. A partir de los cuales se obtienen las componentes cartesianas del campo, dichas componentes se someten a la acción de las matrices de Jones programadas en el código para calcular secuencialmente el campo que simula pasar a través del polarizador y placa de onda. Con ello se consiguen las seis mediciones de intensidad descritas en la **Sección 4.3.1**, siendo empleadas en el siguiente programa de polarimetría. En este caso se cargan las intensidades y se convierten a valores en escala de grises. Posteriormente, los parámetros de Stokes se calculan y a partir de ellos se obtienen los ángulos de la elipse de polarización para cada punto en la sección transversal del campo. Por último, los resultados se grafican en donde se incluyen el cálculo de las elipses de polarización y se genera un mapa de fases, que para efectos de visualización se superpone con la intensidad final.

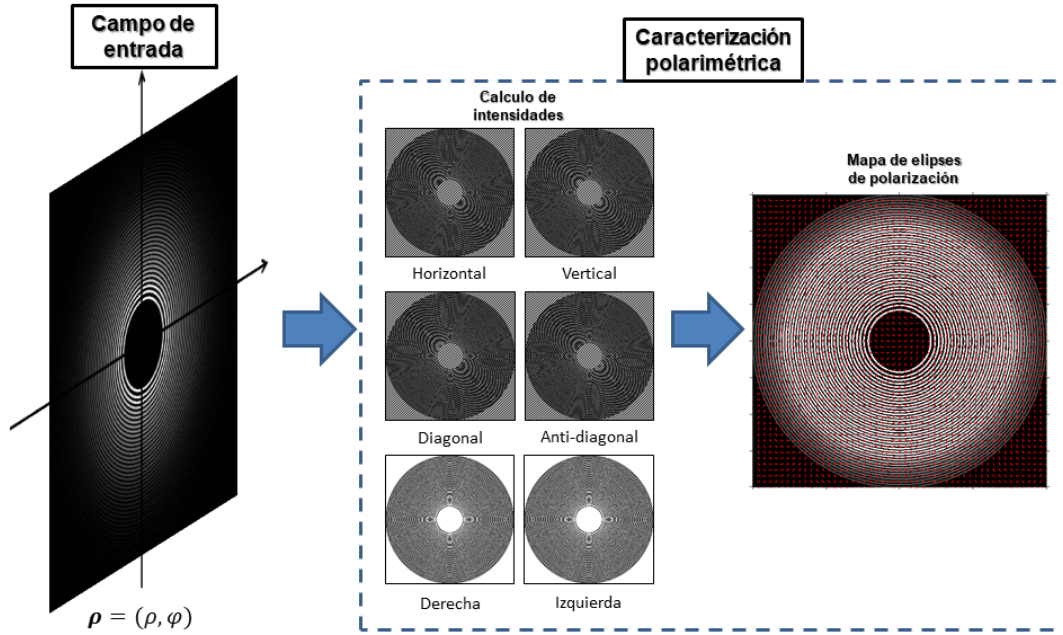


Figura 5.2: Esquema de la caracterización polarimétrica a simular correspondiente al plano de entrada.

Continuando, pasamos a la cuarta etapa donde a cada máscara de fase se le realiza una transformada de Fourier, lo que permite obtener la síntesis numérica del vórtice óptico en el dominio espacio-frecuencia. Es decir, para generar un campo óptico con una densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, dada por la ecuación (3.27), es necesario calcular la transformada de Fourier de cada elemento del ensamble que corresponden a las máscaras de fase en el plano de entrada, a transformada de Fourier de cada elemento del ensamble en el plano de entrada es empleada para generar el promedio del campo en el plano de Fourier. Adicionalmente, fue necesario simular numéricamente un diafragma para filtrar los efectos de difracción producidos por la separación de los anillos moduladores, sin embargo, no se incluyen en los esquemas por simplicidad. En la **Figura 5.3** se ejemplifica que para cada realización del ensamble tiene asociado una distribución de fase, en los planos de entrada y salida del sistema de transformada de Fourier, corresponde al caso de $\nu = 30$ con $\sigma/R = 1.00$.

Finalmente, para la quinta etapa una vez obtenida la síntesis numérica de un vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel, cuya densidad espectral es aproximada a la expresión (3.30). Análogamente a la tercera etapa, simulamos la caracterización polarimétrica del campo generado al aplicar la transformada de Fourier, como se ejemplifica en la **Figura 5.4**. Por lo tanto, siguiendo el mismo procedimiento que en la tercera etapa, a su ensamble $S(\mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r})|^2 \rangle$ asociado se le calculan los promedios de la parte real y la parte imaginaria a partir de los cuales se obtienen las componentes cartesianas del campo. Luego a dichas componentes se someten a la acción de las matrices de Jones programadas, así resultando las seis mediciones de intensidad. Con el siguiente programa de polarimetría se prosiguió a calcular los parámetros de Stokes, posteriormente se obtienen las elipses de polarización, después se grafican los resultados. Finalmente resulta una imagen que incluyen las superposiciones de valores de intensidad o fase con las elipses de polarización.

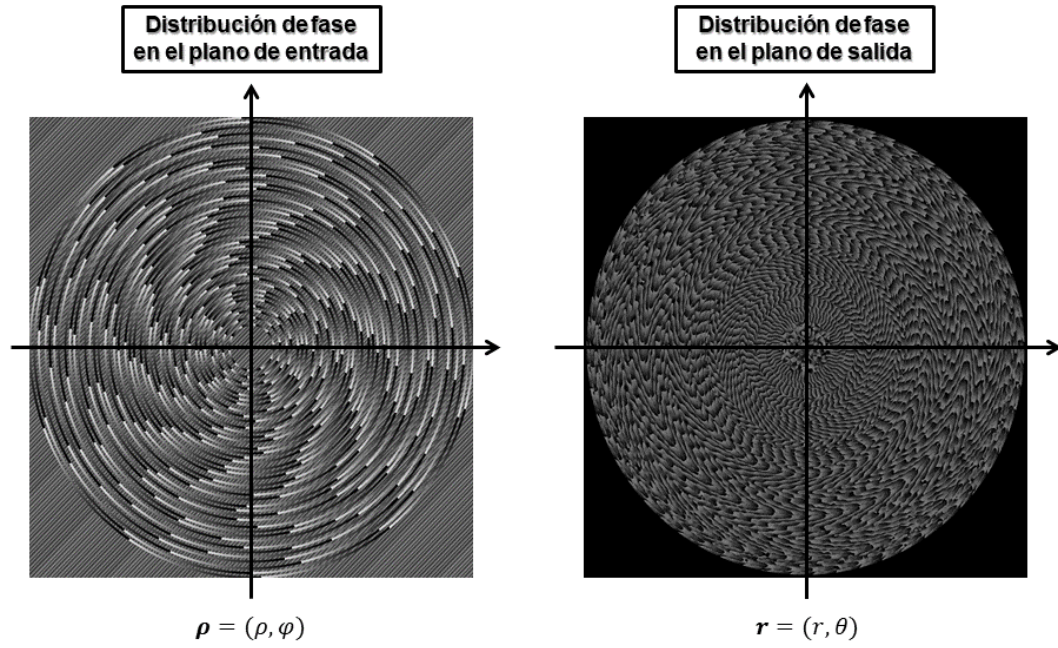


Figura 5.3: Distribución de fase de los campos obtenidos en el sistema de transformada de Fourier de una realización, para $\nu = 30$ con $\sigma/R = 1.00$.

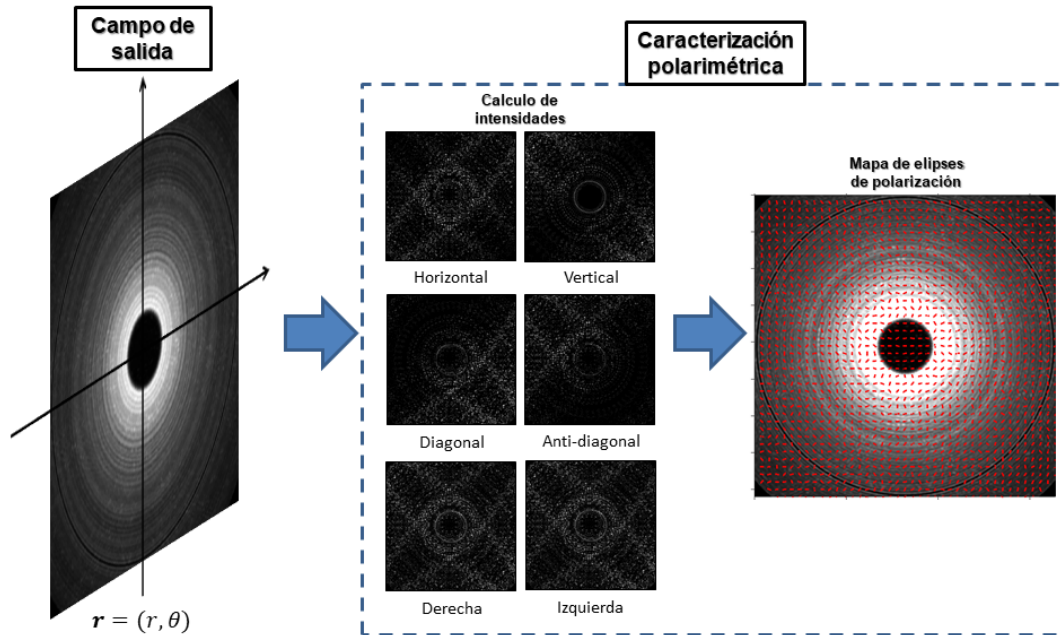


Figura 5.4: Esquema de la caracterización polarimétrica a simular correspondiente al plano de salida.

De forma concisa, en la **Figura 5.5**, mostramos la metodología descrita con anterioridad que seguimos para la caracterización polarimétrica de una fuente secundaria con vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel.

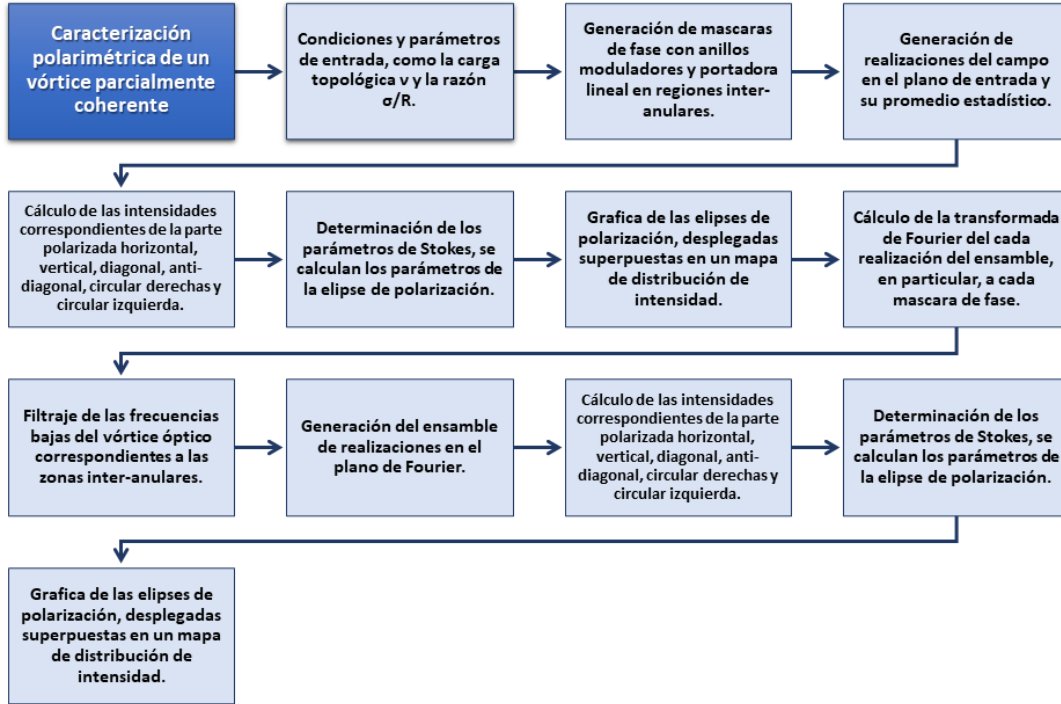


Figura 5.5: Diagrama del proceso de síntesis numérica y la caracterización polarimétrica de un vórtice óptico parcialmente coherente.

5.2. Resultados

5.2.1. Generación del campo en el plano de entrada

Para nuestro caso, tomamos en consideración cargas topológicas de $\nu = 10, 20, 30$ y varios valores de la razón $\sigma/R = 0.25, 0.50, 1.00$, además, fueron generadas 90 realizaciones. Comenzamos con los resultados de la simulación del campo que ha sido modulada su fase. Como se menciona en la segunda etapa de simulación, consideramos que la intensidad puede ser calculada sustituyendo a (3.20) en la expresión (3.29) y posteriormente obtuvimos su densidad espectral $S(\rho)$, por ende, obtuvimos los siguientes resultados correspondientes a la densidad espectral en la **Figura 5.6.1** es un caso particular para una carga topológica $\nu = 30$ con $\sigma/R = 1.00$ y en la **Figura 5.6.2** los demás casos realizados. Hacemos notar que para cada carga topológica ν se mantiene la misma distribución de intensidad a lo largo de la fila, pero en cada columna solo se esta limitando la cantidad de anillos moduladores en la mascara de fase.

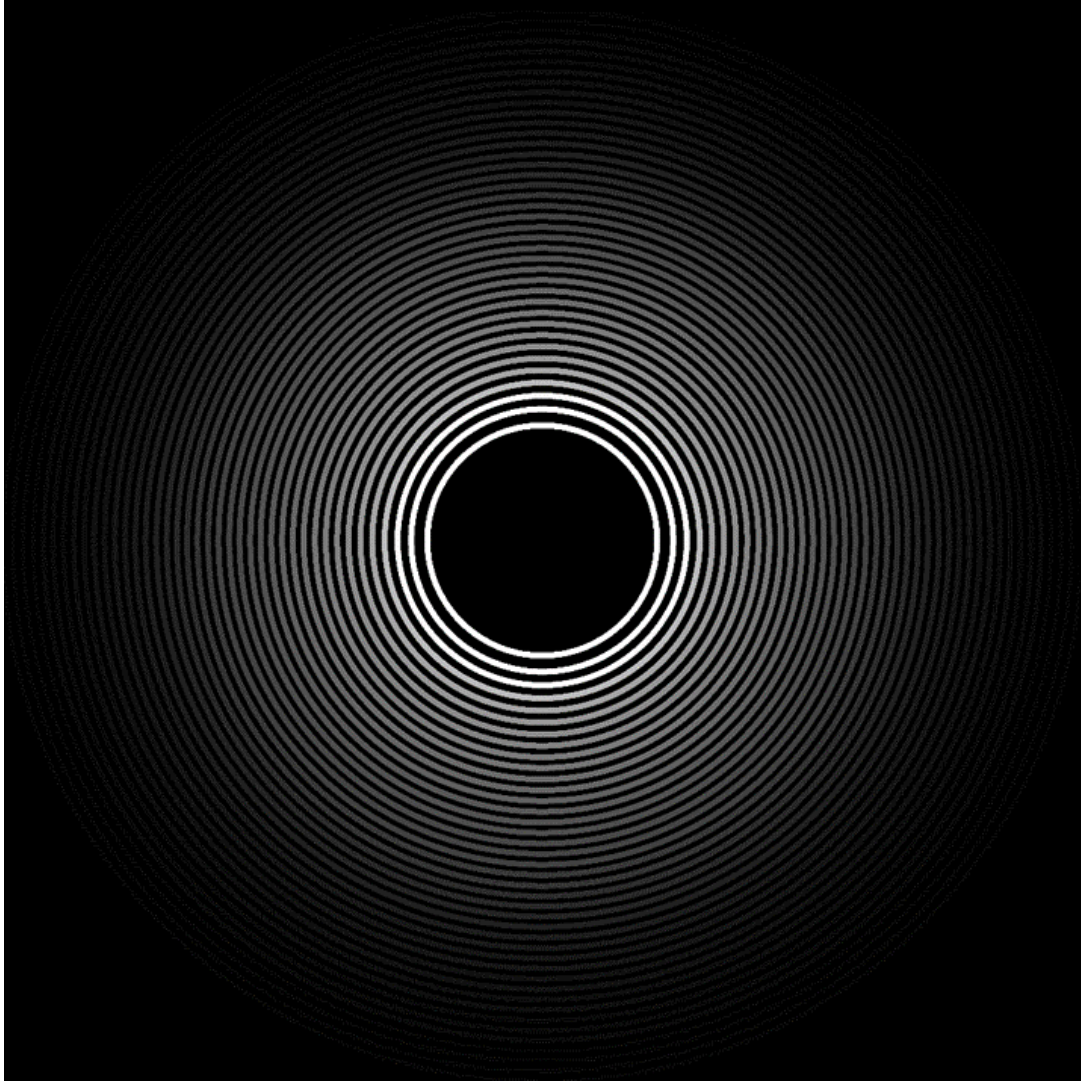


Figura 5.6.1: *Resultado de la simulación del vórtice discreto generado para una carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1.00$.*

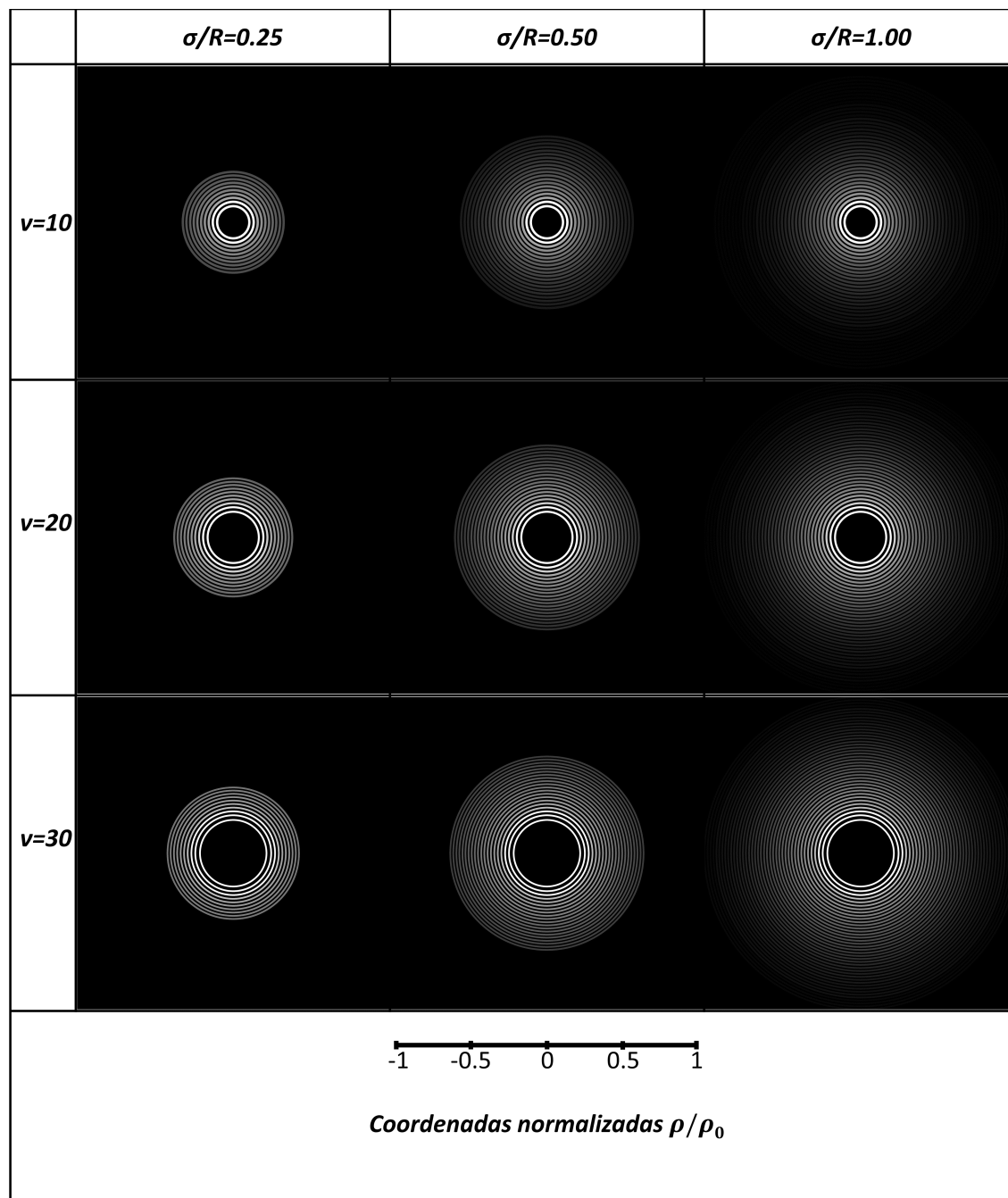


Figura 5.6.2: Resultados de la simulación del vórtice de entrada generado para distintas cargas topológicas ν y distintos valores de σ/R .

5.2.2. Generación del campo en el plano de Fourier

Proseguimos con el caso de los resultados de la simulación del campo descrito por la expresión (5.14). Es decir, el caso del vórtice generado en el plano de Fourier recordamos que las intensidades obtenidas son el promedio de las transformadas de Fourier de cada elemento del ensamble del vórtice óptico discreto. Por lo tanto, obtuvimos los siguientes resultados; en la **Figura 5.7.1** es un caso particular para una carga topológica $\nu = 30$ con $\sigma/R = 1,00$, en la **Figura 5.7.2** son para cada caso de las diferentes cargas topológicas ν y distintos valores de σ/R . Observar que a lo largo de las columnas hay aumento del radio interior de la mancha oscura del centro del vórtice como resultado del aumento de la carga topológica. Por otro lado, la figura también muestra a lo largo de las filas se produjo una disminución del radio interior al disminuir la coherencia de la fuente para cualquier carga topológica dada.

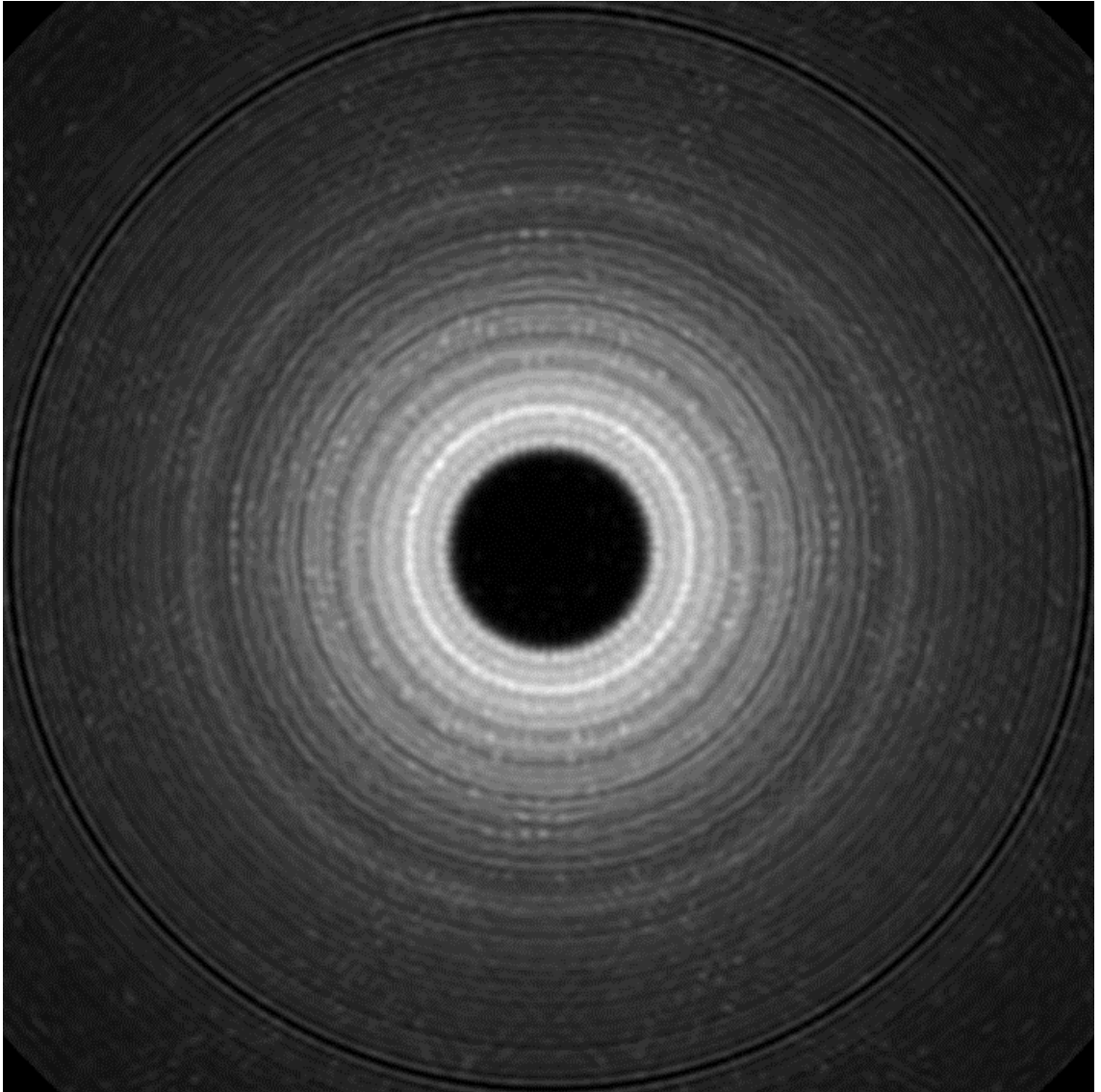


Figura 5.7.1: *Resultado de la simulación del vórtice óptico generado para una carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1,00$.*

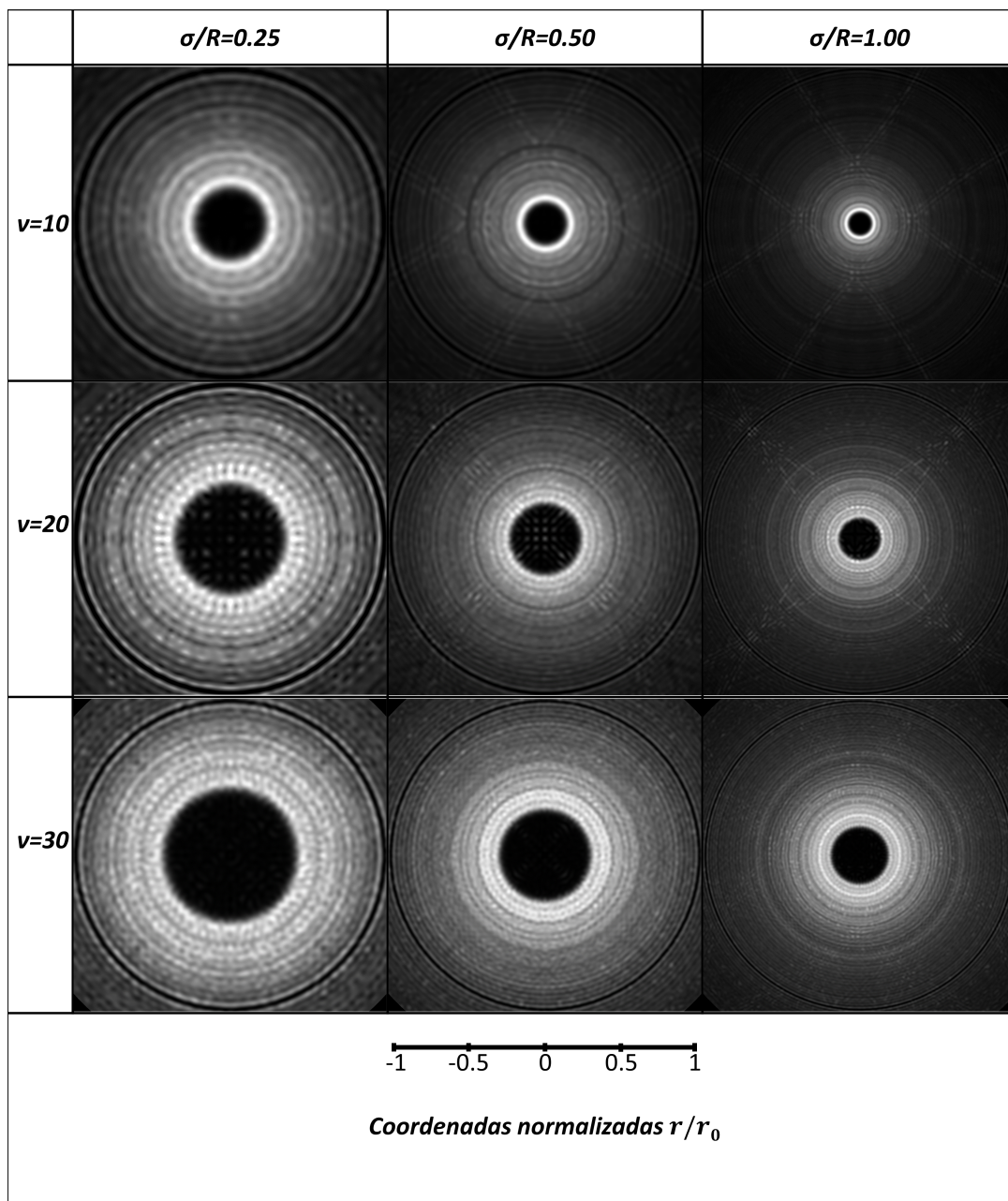


Figura 5.7.2: Resultados de la simulación del vórtice óptico generado para distintas cargas topológicas ν y distintos valores de σ/R .

Adicionalmente, en las siguientes gráfica del perfil de intensidad normalizado, mostradas en la **Figura 5.8**, en la imagen se compara cómo es su distribución de intensidad para la carga topológica $\nu = 10$ con $\sigma/R = 1.00$. Asimismo como podemos observar, el campo en consideración tiene una distribución de intensidad total con forma anular y una región central oscura, cuyo radio aumenta con el aumento de la carga topológica ν . Además, el anillo externo de intensidad cero corresponde al límite superior de la coordenada radial $\mathbf{r}$, y la irregularidad de las curvas calculadas en comparación con el caso continuo presentado en “*Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator*” [13] que se debe a la aproximación de suma finita de la expresión (3.30).

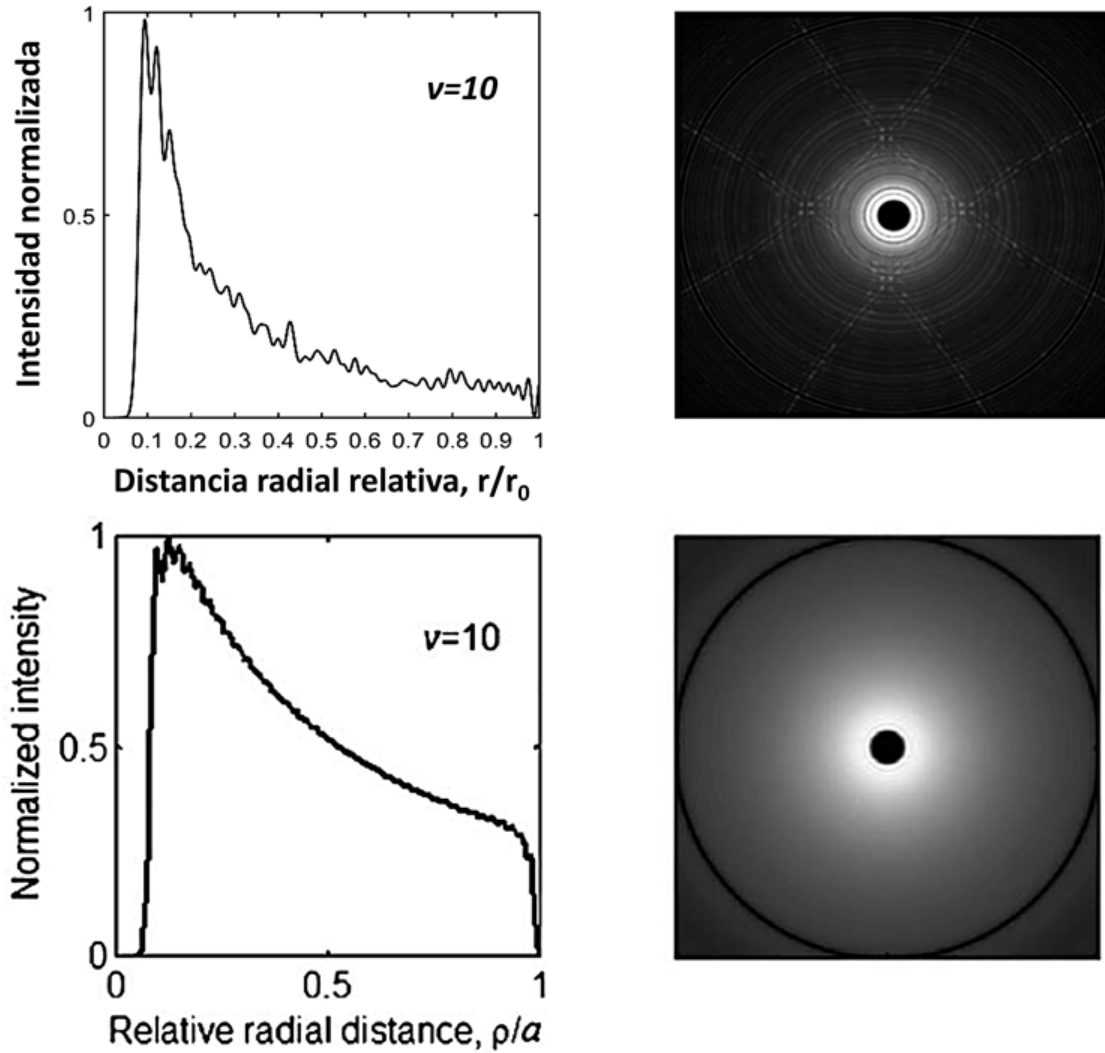


Figura 5.8: Intensidad espectral $S(\mathbf{r})$ normalizada y sus correspondientes patrones 2D para diferentes valores de carga topológica ν con $\sigma/R = 1.00$, en el plano de Fourier. Arriba, numéricamente, abajo, teóricamente [15].

Podemos notar que en las gráficas del perfil de intensidad para los resultados numéricos (mostrados en la parte derecha de la **Figura 5.8**) parecieran indicar que no estén normalizadas, es decir, que la intensidad máxima registrada del vórtice óptico no llega al valor 1 en comparación a lo

registrado en los resultados teóricos (mostrados en el lado izquierdo de la **Figura 5.8**). La razón principal de lo anterior se debe a los efectos producidos por la difracción de la luz al pasar a través de la separación entre los anillos moduladores, aunque son filtrados con la portadora lineal, aun esta presente dicha difracción en los resultados obtenidos de la simulación. Incluso, sus máximos en intensidad son mayores a los propios del vórtice óptico parcialmente coherente.

5.2.3. Polarimetría del campo de entrada

Por otra parte, la caracterización polarimétrica del campo dado por la ecuación (3.20) y del campo en el plano de Fourier definido por (3.23), para cada carga topológica ν y razón σ/R . Consistió en calcular las intensidades del campo de interés correspondientes a los estados de polarización: lineal horizontal, lineal vertical, lineal diagonal a $+45^\circ$, lineal diagonal a $+135^\circ$, circular a derecha y circular a izquierda. En la **Figura 5.9** se ejemplifica los estados de polarización para el caso del vórtice óptico con densidad espectral (3.30) de carga topológica $\nu = 30$ y razón $\sigma/R = 1.00$, en el plano de Fourier.

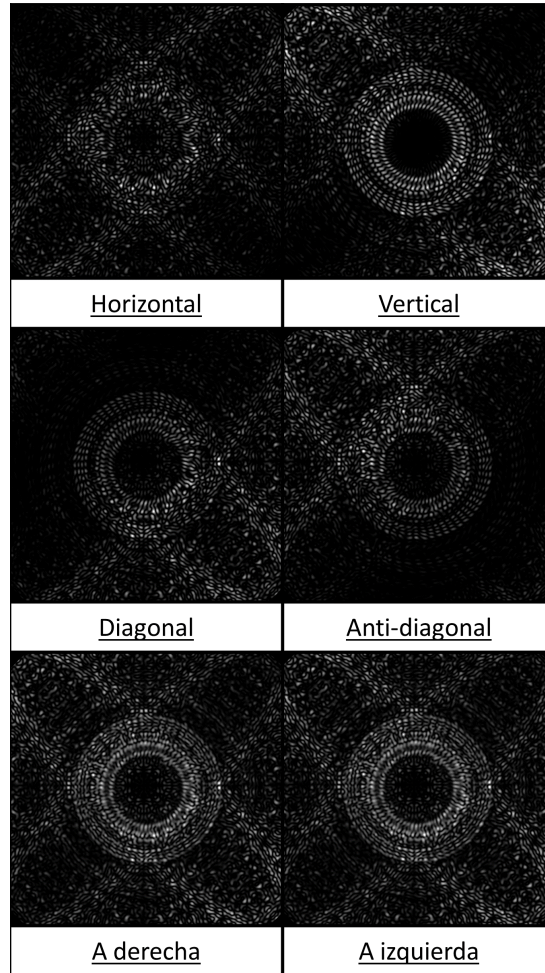


Figura 5.9: Intensidades correspondientes a la parte polarizada de un vórtice óptico parcialmente coherente con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 1.00$, empleados en el cálculo de los parámetros de Stokes.

Lo que se puede observar en la **Figura 5.9**, son las regiones anulares con mayor intensidad que están asociadas a su estado de polarización correspondiente. Sin embargo, esos máximos de intensidad mostrados en la imagen no corresponden a los valores máximos del vórtice óptico, pues se están simulando con la suposición de que están pasando por un polarizador y un retardador. También es posible observar parte de la luz parásita proveniente de los efectos de difracción (previamente mencionados) asociados al estado de polarización correspondiente.

Partiendo de la aproximación del campo eléctrico descrito por la expresión (3.20), generado a partir de codificar varias máscaras de fase, obtuvimos las siguientes distribuciones de intensidad mostradas en la **Figura 5.10**. Notamos que teóricamente se ha observado que el cociente σ/R es un parámetro que controla la coherencia del campo resultante. Físicamente esto corresponde a iluminar cierto número de anillos desplegados en el dominio de entrada y numéricamente corresponde a desplegar una cantidad específica de anillos siempre que σ corresponda al caso simulado (en nuestro caso, corresponde a 40 anillos máximos). Y a partir de los estados de polarización de cada caso, fueron determinados los parámetros de Stokes análogamente para cada situación. Comparando la **Figuras 5.6.2** con la **Figura 5.10**, en general, es posible observar que los estados de polarización dentro del vórtice son arbitrarios, mientras que fuera corresponden a la polarización lineal de la onda plana portadora.

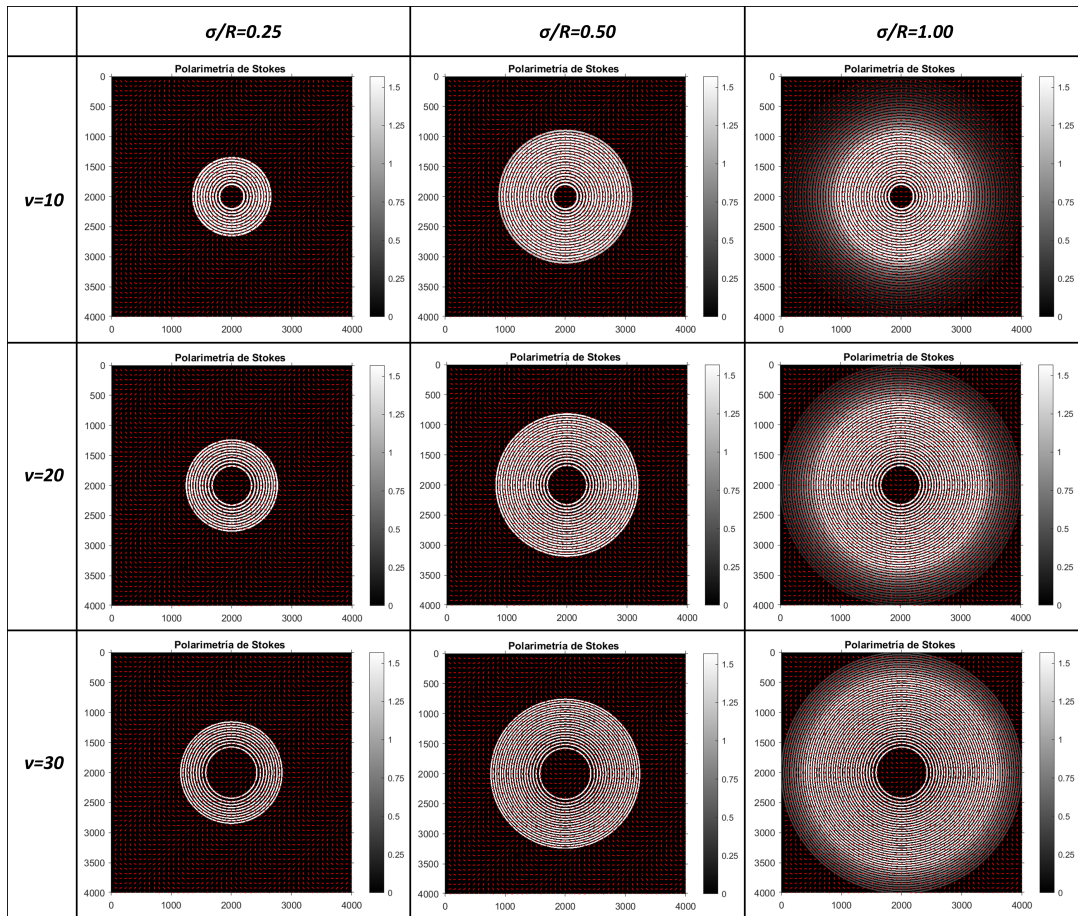


Figura 5.10: Resultados de la caracterización polarimétrica del vórtice óptico en el plano de entrada para diferentes valores de carga topológica ν y distintas razones de σ/R .

5.2.4. Polarimetría del vórtice en el plano de Fourier

Para el siguiente caso, los resultados obtenidos de la caracterización polarimétrica en la región del plano de Fourier de la fuente secundaria con vórtice se muestran en la **Figura 5.11**. Análogamente, se muestran para las distintas cargas topológicas ν y a diferentes razones de σ/R . Por simplicidad y evitar pérdida de información visual, en la **Figura 5.11** no se marcan el radio externo del vórtice, la vecindad de la singularidad y su primer cero. En la **Sección 5.3** analizamos con mas detalle los estados de polarización encontrados en la región de la vecindad de la singularidad y la zona anular de mayor intensidad del vórtice óptico.

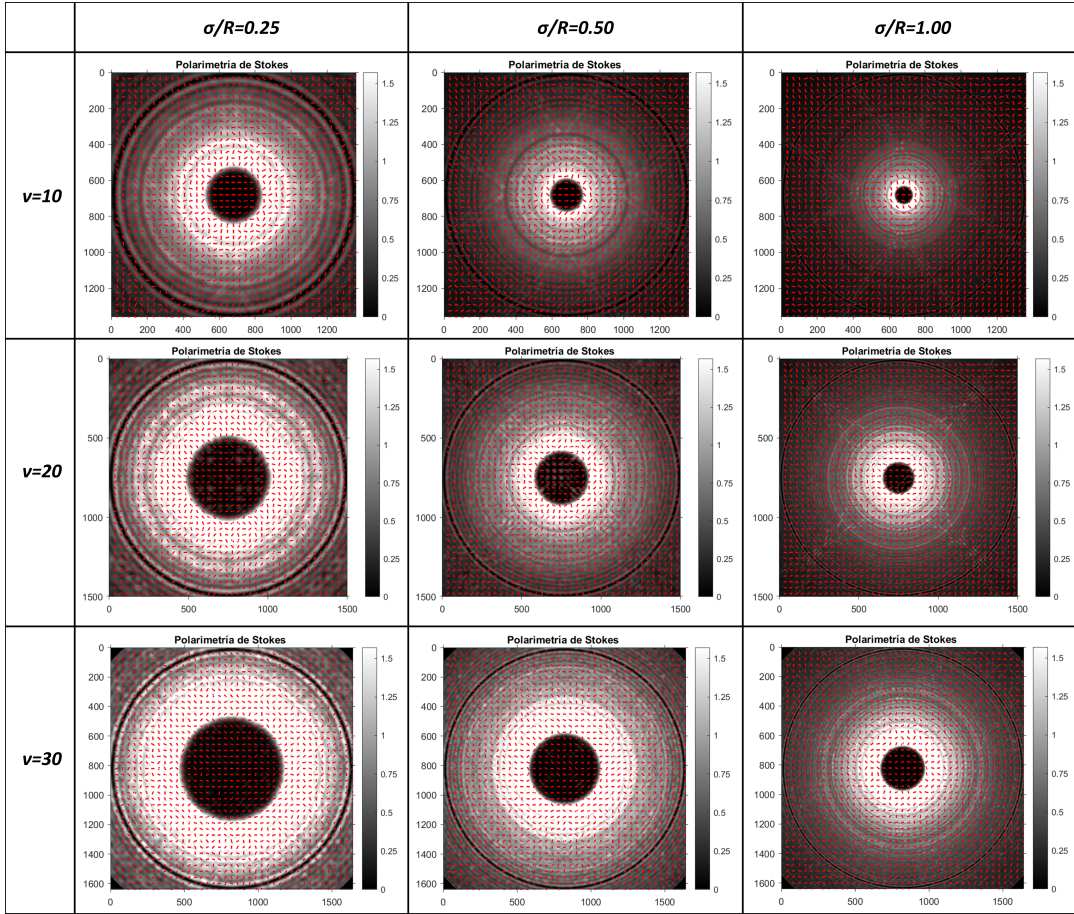


Figura 5.11: Resultados de la caracterización polarimétrica del vórtice óptico parcialmente coherente con estructura modal Bessel, para diferentes valores de carga topológica ν y distintas razones de σ/R en el plano de Fourier.

5.3. Análisis de resultados

Recalcamos que para generar una fuente parcialmente coherente con vórtice partimos de una construcción matemática a partir de modos coherentes que puede ser representada en modos Bessel, entonces los modos corresponden a funciones de Bessel multiplicadas por exponenciales complejas y estos modos se superponen en el plano de Fourier y generan el vórtice, donde su densidad espectral cruzada W está definida por la ecuación (3.27).

Comenzamos analizando los resultados de la caracterización polarimétrica del campo de entrada. Observamos que para el vórtice óptico discreto en sus estructuras anulares presento estados de polarización lineales con orientaciones aleatorias, mientras que fuera de los anillos hay estados de polarización lineales con un patrón bien definido por la portadora. Por ejemplo, como se puede observar para una carga topológica $\nu = 20$ y $\sigma/R = 0.50$ en la **Figura 5.12**.

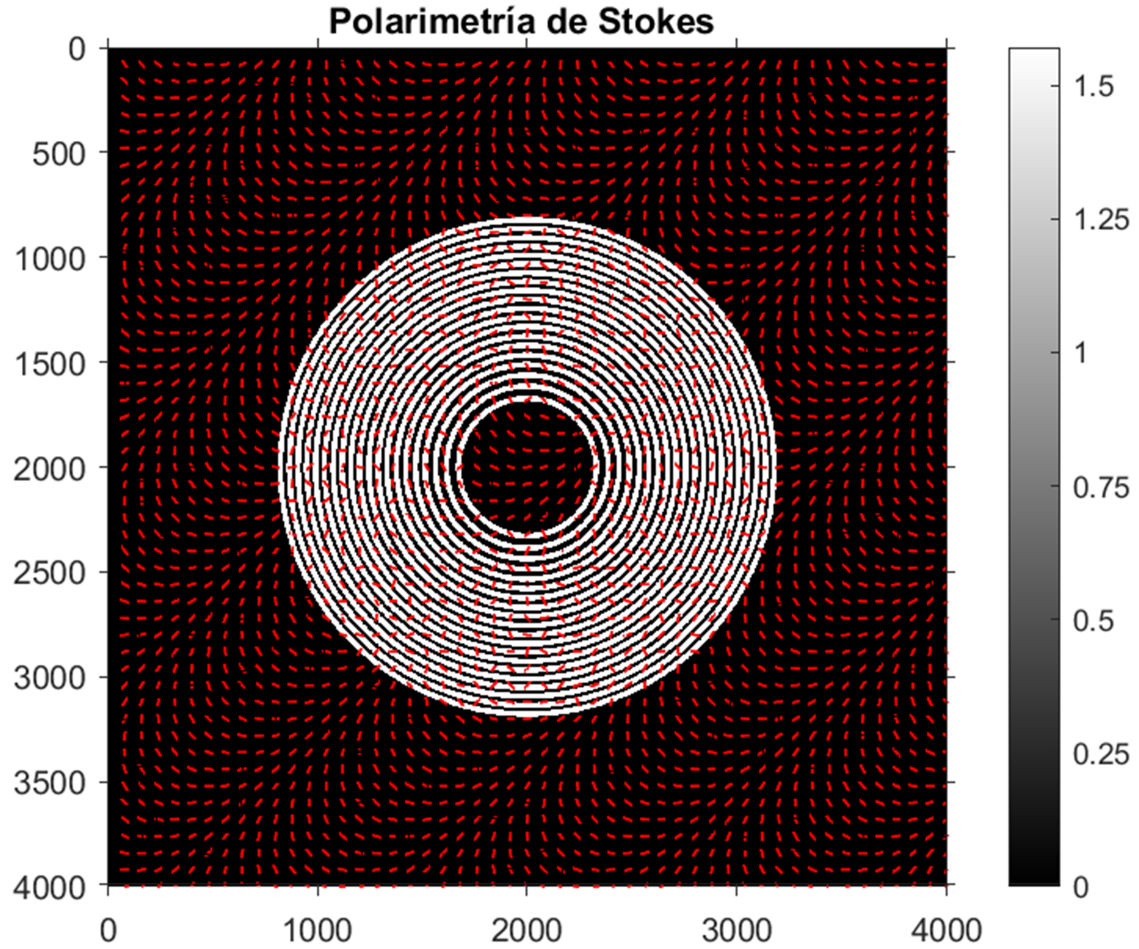


Figura 5.12: Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 0.50$.

Sin embargo, no es suficiente con solo ver un caso particular, por esa razón en la **Figura 5.13** se comparan los resultados para una carga topológica $\nu = 30$ a distintos valores de σ/R . También se observa un número distinto de anillos desplegados a lo largo de cada columna y esto se justifica con las siguientes condiciones. Primero, debido al hecho de que teóricamente la coherencia del campo puede modificarse cambiando el número de modos coherentes que sintetizan el vórtice con la razón σ/R . Segundo, físicamente esto corresponde a iluminar solo una región del modulador cambiando la anchura σ de la fuente primaria de tal forma que solo los anillos iluminados sintetizan al vórtice. Tercero, numéricamente esto se logra controlando el número de anillos que se despliegan (recordamos que nuestro caso son 40 anillos máximos). También, es importante recalcar que la información de la portadora que está en los espacios entre los anillos es independiente de la coherencia o carga topológica que posea la fuente secundaria.

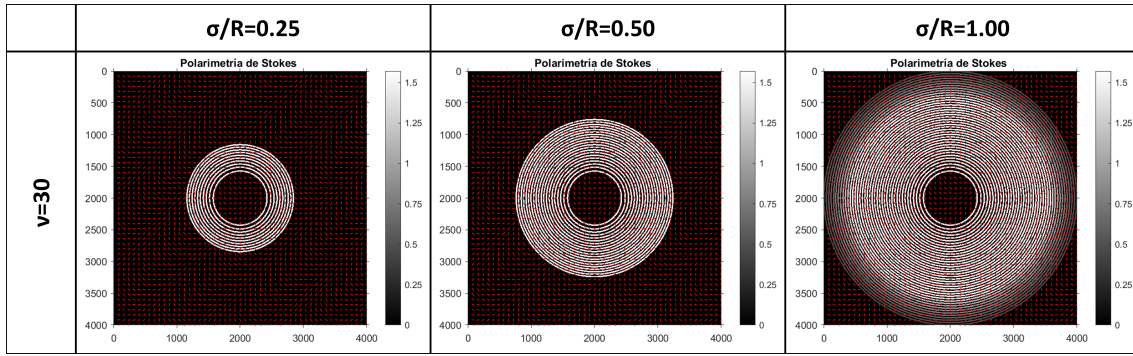


Figura 5.13: Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con carga topológica $\nu = 30$ y distintas razones de σ/R .

En el caso de fijar la razón σ/R y distintos valores de carga topológica ν , por ejemplo, para $\sigma/R = 0.50$ para cualquier caso de la **Figura 5.14** partiendo del centro de la imagen de la distribución de intensidad, sucede que el radio interno del primer anillo aumenta conforme aumenta la carga topológica ν . Este resultado es de esperarse, pues la ecuación (3.20) depende de los ceros de la función Bessel que varían entre cada carga topológica ν , es decir, las distancias entre las raíces de la función cambian con cada valor de la carga topológica ν .

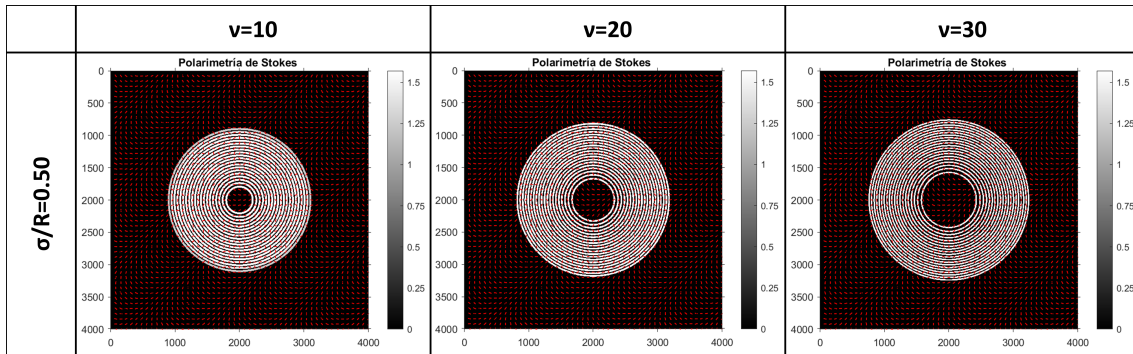


Figura 5.14: Caracterización polarimétrica del vórtice óptico discreto con razón $\sigma/R = 0.50$ y diferentes valores de carga topológica ν .

Analizamos ahora el campo generado en el plano de Fourier, sintetizado a partir de la densidad espectral cruzada (3.27). Veamos de manera particular la caracterización polimétrica del vórtice óptico en el plano de Fourier con carga topológica $\nu = 30$ con $\sigma/R = 0.50$, mostrado en la **Figura 5.15**. Observamos que tiene una región bien definida que se asemeja a un mancha oscura en el centro del vórtice óptico, ha esta región la denominamos como la *vecindad de la singularidad* con un radio interior, luego una zona donde la distribución de intensidad tiene valores muy grandes comparados a la zona anterior y luego la región del anillo externo de intensidad cercana a cero que corresponde al límite superior de la coordenada radial $\mathbf{r}$. Recordamos que la singularidad es un punto ubicado en el centro del vórtice donde la fase no esta definida.

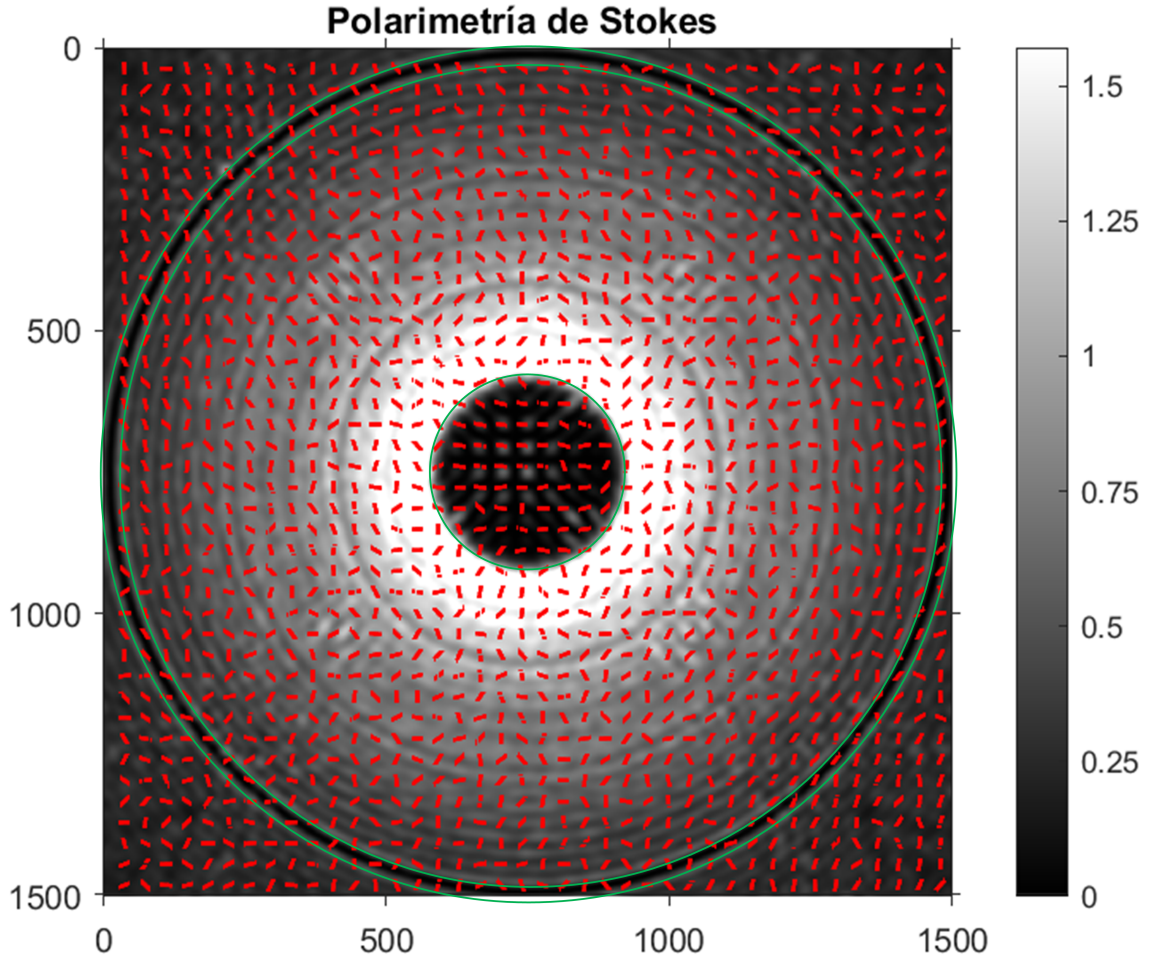


Figura 5.15: Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con carga topológica $\nu = 30$ y $\sigma/R = 0.50$ en el plano de Fourier.

Luego, retomando los resultados obtenidos en la **Figura 5.7.2** y la **Figura 5.8**, se puede observar que hay una disminución del radio interior al disminuir la coherencia de la fuente (al aumentar la razón σ/R) para cualquier carga topológica dada, cuyo comportamiento también se demuestra en [13]. En comparación con lo expuesto en [13] y [15], ocupamos cargas topológicas mayores obteniendo resultados similares. A modo de ejemplo, consideramos los casos para una carga topológica $\nu = 30$, mostrados en la **Figura 5.16**.

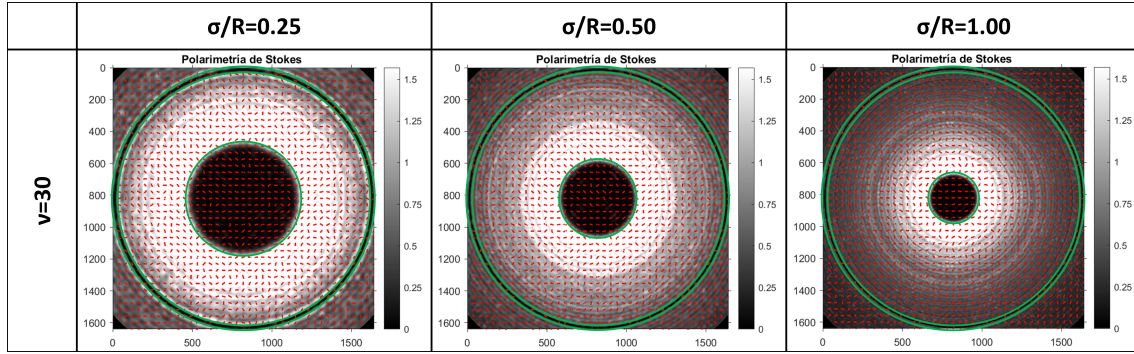


Figura 5.16: Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con carga topológica $\nu = 30$ y distintas razones de σ/R en el plano de Fourier.

Por otro lado, cuando fijamos la razón σ/R para distintos valores de la carga topológica ν , tal como el caso de la **Figura 5.17**, se puede observar que hay aumento del radio interior del vórtice como resultado del aumento de la carga topológica. Estos resultados están en total correspondencia con los resultados ya expuestos en [13] y [15].

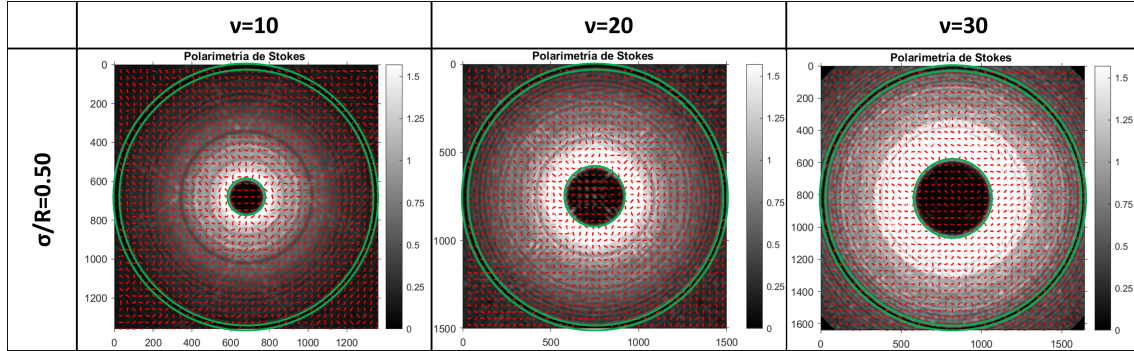


Figura 5.17: Caracterización polarimétrica de una fuente con vórtice parcialmente coherente con estructura modal Bessel con diferentes cargas topológicas ν y $\sigma/R = 0.50$ en el plano de Fourier.

Por último, tomando como referencia la **Figura 5.15** hasta la **Figura 5.17** y partiendo del centro de cada gráfica, se observa que en la región correspondiente a la vecindad de la singularidad del vórtice encontramos que los estados de polarización en dicha zona corresponden a polarización lineal horizontal, además al variar la carga topológica y/o la coherencia de la fuente se mantienen dicha polarización. En la zona anular del vórtice óptico los estados de polarización son lineales pero su orientación es aleatoria.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado a la luz como un proceso aleatorio o estocástico, hemos hecho este análisis usando la teoría de coherencia en el dominio espacio-frecuencia en donde la densidad espectral cruzada W es la cantidad fundamental. En particular, estudiamos a un *vórtice óptico parcialmente coherente* como un campo que posee un frente de onda helicoidal y una singularidad en este frente de onda. Especialmente, la fase de un vórtice óptico presenta valores que fluctúan aleatoriamente teniendo efectos en la distribución de intensidad y los estados de polarización en la sección transversal del campo. Además, estudiamos el estado de polarización como el vector que caracteriza a la superposición de las componentes del campo óptico, el cual define la dirección de oscilación preferente del campo y en general corresponde a una elipse definida por los ángulos de elipticidad χ y el ángulo de orientación azimutal ψ .

La teoría de “Representación en modos coherentes” y un sistema óptico predefinido nos permitió desarrollar una metodología para sintetizar numéricamente el vórtice óptico parcialmente coherente, es decir, la generación numérica de un ensamble de realizaciones que representan a un vórtice con estructura modal Bessel. Posteriormente, aplicamos la técnica “Polarimetría de Stokes” en la sección transversal completa del haz para caracterizar in silico la polarización de dicho vórtice óptico generado.

Por ende, concluimos los siguientes elementos fundamentales. Aun cuando el vórtice parcialmente coherente es invariante en propagación en el sentido de que preserva su distribución de intensidad transversal, en especial, preserva los estados de polarización lineal pero no las orientaciones. Esto significa que la polarización del vórtice es invariante en la elipticidad en el sentido de que preserva el estado de polarización lineal, mientras que el ángulo de orientación azimutal ψ en general sufre cambios. En este sentido el vórtice generado es invariante en propagación, invariante en elipticidad, parcialmente coherente y parcialmente polarizado. En particular, en la vecindad de la singularidad del vórtice óptico, en la región oscura del vórtice, los estados de polarización son lineales y completamente uniformes en la dirección horizontal. En contraparte, en la sección transversal de mayor intensidad del vórtice los estados de polarización son lineales, pero con orientación arbitraria. Consideramos que la no invariancia del ángulo azimutal ψ es una manifestación de la aleatoriedad de las fases en el plano de entrada. Esto se debe a que las relaciones de fase entre los anillos del vórtice son aleatorias y afectan la diferencia de fase entre las componentes del vórtice. Por lo tanto, afectan los estados de polarización horizontal, vertical, diagonal y antidiagonal, en términos los cuales están definidos los parámetros S_1 y S_2 , los cuales definen a su vez el ángulo de orientación azimutal ψ . Por otro lado, la invariancia de la elipticidad es una manifestación de la conservación de energía total entre los modos y la polarización circular constante, parámetros S_0 y S_3 , en términos de los cuales se expresa el ángulo de elipticidad.

Analizamos el efecto de la carga topológica ν y el grado de coherencia en los resultados obtenidos concluyendo que la coherencia tiende a disminuir el crecimiento del radio interno del vórtice generado por el aumento de la carga topológica. Por consiguiente, encontramos que ν tiende a aumentar el radio interno que delimita la región circundante de la vecindad del vórtice mientras que σ contrarresta este efecto al disminuir el radio interno.

Hasta donde sabemos el fenómeno de la homogenización de la polarización en la vecindad de la singularidad del vórtice parcialmente coherente no ha sido reportado aún en la literatura. Aquí hemos demostrado numéricamente que es posible sintetizar un vórtice parcialmente coherente, invariante en propagación, parcialmente polarizado, cuya polarización en la vecindad de la singularidad puede estructurarse como completamente lineal y uniforme. Empero, hasta aquí hemos demostrado un nuevo fenómeno con potenciales aplicaciones en atrapamiento y micromanipulación óptica, microscopía, formación de imágenes de polarización entre otras.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Realizaciones por pasos

A base de la definición 2,1, suponemos un proceso aleatorio X_t definido en algún espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbf{P})$. De igual manera, suponemos que para cada $\omega \in \Omega$ fija encontramos una realización de dicha variable para todas las t 's: $\{X_t(\omega)\}$. Es decir, para cada ω tenemos un conjunto de valores representativos de la realización del proceso estocástico, así una realización del proceso aleatorio es un paso del procesos estocásticos, esto es, $t \mapsto X_t(\omega)$ [22].

Por otra parte, suponiendo que del proceso se conocen todas las posibles probabilidades conjuntas del sistema, de modo que podemos asumir que es un *proceso estocástico separable*. Podemos ejemplificarlo considerando un simple proceso estocástico; el de la independencia completa, esto es:

$$\rho(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i) = \prod_i \rho(x_i, t_i) \quad (\text{A.1})$$

Lo descrito con anterioridad nos permitirá describir los siguientes procesos, que son los más básicos para describir algún proceso estocástico conocido en los fenómenos naturales [24].

A.2. Pruebas y proceso de Bernoulli

Nos referimos a *pruebas de Bernoulli* como el experimento propuesto por el matemático *Jakob Bernoulli*, el cual consiste en repeticiones independientes de un experimento con dos resultados; como una serie de lanzamientos de monedas o el acertar y fallar [19, 21, 42]. De modo que, un *proceso de Bernoulli* es una secuencia de variables aleatorias binarias independientes idénticamente distribuidas [43]. Es decir, se asume que los eventos son independientes y tienen las misma probabilidad de ocurrencia, por lo que la probabilidad de acertar se denota por p y de fallar por $(1 - p)$ [19, 21]. Incluso, visualizamos un proceso de Bernoulli evolucionando en un tiempo discreto [43], es claramente estacionario (y ergódico) [42].

Como es de esperarse podemos realizar un análisis probabilístico, así la probabilidad de que el evento X ocurra k -veces en n -pruebas independientes y estará definida por su *función de probabilidad de masa* (es decir, tiene solo un número finito o contable de posibles valores de muestra), esto es

$$P_X(X_n) = p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (\text{A.2})$$

Siendo X_n es la variable aleatoria independiente de Bernoulli, tal que

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con } p \\ 0 & \text{con } 1 - p \end{cases}. \quad (\text{A.3})$$

Por lo que, estamos asociando los eventos de las pruebas de Bernoulli con una variable aleatoria X_n tal que cuando el resultado del ensayo es un éxito definimos $X_n = 1$ y cuando el resultado es un fracaso definimos $X_n = 0$ [19, 21, 43]. De modo que, un proceso de Bernoulli se puede visualizar como en la *Figura A.1*.

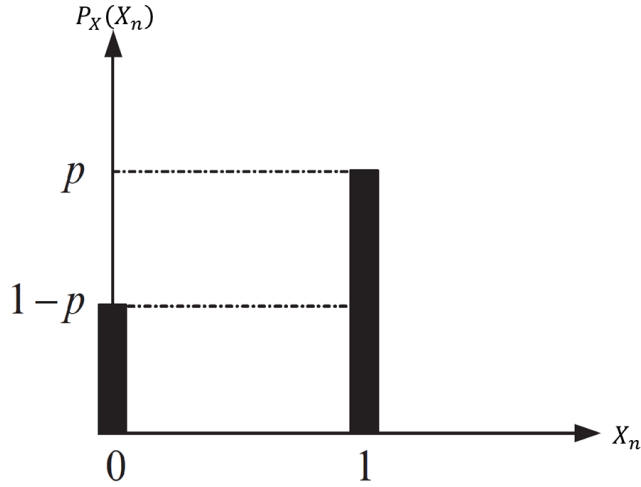


Figura A.1: Diagrama ilustrativo del proceso de Bernoulli. [21]

Por otro lado, como se ha visto anteriormente, notamos que su probabilidad asociada p es un valor constante para $P_X(X_n)$, por consecuencia su densidad de probabilidad será uniforme. Así también su media, varianza y función gamma corresponderán a valores constantes. Como se muestra a continuación [19, 21]:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \mu_{X_n} = 0(1-p) + 1(p) = p = \text{const.} \\
 2) \quad & \sigma_{X_n}^2 = \mu_{X_n^2} - \mu_{X_n}^2 = p(1-p) = \text{const.} \\
 3) \quad & \Gamma_X(t_1, t_2) = \begin{cases} \mu_{X_{n_1} X_{n_2}} & = p \text{ para } n_1 = n_2 \\ \mu_{X_{n_1}} \mu_{X_{n_2}} & = p^2 \text{ para } n_1 \neq n_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.3. Pruebas y proceso de Poisson

Este proceso es nombrado así en honor a *Siméon-Denis Poisson*. Continuando con un espacio de probabilidades $(\Omega, F, \mathbf{P})$, el *proceso de Poisson* es un proceso aleatorio discreto que modela el tiempo de una llegada al ingresar a un sistema. Sin embargo, las llegadas pueden ocurrir en momentos positivos arbitrarios y la probabilidad de una llegada en cualquier instante particular es cero. Así, se vuelve más conveniente definir un proceso de Poisson en términos de una secuencia de tiempos entre llegadas $X_i(t)$; denominado *proceso de llegadas* o *proceso de conteo* [19, 21, 22]. Siendo así las pruebas de Poisson aplicadas en situaciones como: en la detección de errores en equipos en un sistema o en la emisión de electrones a un foto-detector o la llegada de llamadas telefónicas, etc [19, 21, 22]. Existen dos formas de definir a un proceso de Poisson, los cuales son:

Definición A.3.1 Será un *proceso de Poisson* si dado un proceso de conteo $\{X_i(t)\}$ en el cual el número de eventos en cualquier intervalo de longitud Δt tiene una distribución de Poisson con media λt . Esto es, para todo $t, \Delta t > 0$,

$$P[X_i(t + \Delta t) - X_i(t) = n] = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{A.5}$$

Donde $t < \Delta t$ son variables del tiempo, λ se llama *tasa* del proceso así $\lambda\Delta t$ es el número esperado de llegadas en ese intervalo [21].

Definición A.3.2 El *proceso de Poisson* $\{X_i(t)\}$ se define a partir de un proceso de conteo con incrementos estacionarios e independientes, de manera que para una tasa $\lambda > 0$ se cumplen las siguientes condiciones:

- I. $P[X_i(t + \Delta t) - X_i(t) = 1] = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.
- II. $P[X_i(t + \Delta t) - X_i(t) \geq 2] = o(\Delta t)$.
- III. $P[X_i(t + \Delta t) - X_i(t) = 0] = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Donde $t < \Delta t$ son variables del tiempo, λ se llama *tasa* del proceso así $\lambda\Delta t$ es el número esperado de llegadas en ese intervalo. Además, la función $o(\Delta t)$ tienda a cero más rápido que Δt [21].

Por otra parte, observamos que dadas las dos definiciones anteriores es importante resaltar lo siguiente. Primero notamos que, al ser descrito por un proceso de conteo, se tiene que sus elementos $\{X_i(t), t > 0\}$ para cada conjunto de instantes de tiempo $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ los incrementos de la forma $X_i(t_n) - X_i(t_{n-1})$ son idénticamente distribuidos. Así para los *incrementos estacionarios e independientes* del proceso para algún $t_k < t_n$ su media sea de la forma

$$E[X_i(t_k)] = m_X(t_1)t_k = E[X_i(1)]t_k. \quad (\text{A.6})$$

De igual manera, se obtiene que su varianza es tal que:

$$\sigma_{X_i}^2(t_k) = \sigma_{X_i}^2(t_1)t_k = \text{Var}[X_i(1)]t_k. \quad (\text{A.7})$$

De modo que, se destaca que para cada X_i evaluado en t_k es estacionario, pero al variar t_n el proceso de Poisson deja de ser estacionario en el sentido amplio, aún más se corrobora que se tendrá:

- 1) $m_X(t) = \lambda t$.
 - 2) $\sigma_X^2(t) = \lambda t$.
 - 3) $\Gamma_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda[\text{mín}(t_1, t_2)]$, debido a la desigualdad posible entre t_1 y t_2 .
- (\text{A.8})

Así, de acuerdo a la **Definición A.3.1** se deduce que la función de densidad asociada al proceso de Poisson,

$$\rho_{X_i(t)}(x) = \sum_i^{\infty} P[X_i(t)]\delta x, \quad (\text{A.9})$$

no satisface con la definición de estacionariedad en el sentido estricto. Por ende, el proceso de Poisson no es *estacionario* [19, 21, 22].

A.4. Proceso de Gauss

Se le considera uno de los procesos estocásticos más estudiados e importantes por su eficiencia y recurrencia para modelar procesos aleatorios. Se puede considerar para un proceso de Gauss que las principales cualidades son: primero permite realizar un análisis estadístico de manera analítica y segundo se justifica matemáticamente empleando el *teorema de límite central* para modelar resultados de problemas del ámbito físico desde un punto probabilístico. Prosigamos a definir el proceso de Gauss [19, 21].

Definición A.4 Un *proceso Gaussiano* $\{X_i(t); t \in T\}$ es un proceso estocástico, tal que para todos los k-coeficientes reales a_n y la selección de los k-tiempos $t_n \in T$ el conjunto de variables aleatorias $\sum_n a_n X(t_n)$ es un conjunto *mutuamente Gaussiano*.

Veamos que nos referimos a *mutuamente Gaussiano*, al hecho de que las k-variables aleatorias

$X(t_n)$ pueden tener mutuamente una función de densidad de probabilidad [17, 19, 21, 43], tal que

$$f_{X_n}(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_{XX}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu_X)^T C_{XX} (x - \mu_X) \right], \quad (\text{A.10})$$

donde μ_X es un vector de las funciones promedio de $X(t_n)$, C_{XX} es la matriz de funciones de auto-covarianzas, a X lo consideraremos un vector de las $X(t_n)$ [19, 21].

Notamos que si $X(t_n)$ es mutuamente no correlacionado y tienen diferentes varianzas, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} 1) \quad C_{XX}(t_i, t_j) &= \begin{cases} \sigma_k^2 & i = j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \\ 2) \quad f_{X_n}(x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left(\prod_{k=1}^n \sigma_k \right)} \exp \left[-\sum_{k=1}^n \frac{[(x - \mu_X(t_k))]^2}{\sigma_k^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De modo que podemos enunciar dos propiedades muy importantes:

Propiedad 1: Un proceso Gaussiano es tanto estacionario en el estricto como el sentido amplio, por ello no se especifica que estacionariedad tiene.

Propiedad 2: Si en la entrada de un sistema lineal actúa un proceso de Gaussiano $X_i(t)$, el proceso de salida $Y_i(t)$ de dicho sistema también es un proceso Gaussiano [17, 19, 21, 43].

A.5. El teorema de van Cittert-Zernike

Considerando una onda de luz que emerge de un sistema óptico, asumiendo que el proceso es estacionario, al menos en sentido amplio, y también ergódico. Es posible para casos particulares, considerando superficies, deducir las ecuaciones relativas a la propagación de la función de densidad espectral cruzada y la función de coherencia mutua, siendo consecuencias exactas de las ecuaciones diferenciales satisfechas por estas funciones de correlación.

Sin embargo, tales fórmulas tienen un uso limitado ya que requieren el conocimiento de las funciones de Green asociadas con tales superficies y, a excepción de las formas geométricas más simples, las funciones de Green no se pueden obtener de forma cerrada. A pesar de ello, es posible derivar una ley de propagación aproximada que sea bastante adecuada para muchas situaciones que se encuentran con frecuencia en la práctica. La ley aproximada, puede, en cierto sentido, considerarse como una contrapartida del conocido principio de Huygens-Fresnel para la propagación de la luz monocromática.

Uno de los teoremas centrales de la teoría elemental de la coherencia parcial fue formulado por *van Cittert* (1934) y posteriormente, de forma más general, por *Zernike* (1938). Expresa las correlaciones de campo en dos puntos del campo, generadas por una fuente plana, casi monocromática, espacialmente incoherente. Consiste en la siguiente fórmula, a veces llamada *ley de propagación de Zernike* para la intensidad mutua:

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} d^2 \mathbf{r}'_1 d^2 \mathbf{r}'_2. \quad (\text{A.12})$$

Donde $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ es la intensidad mutua $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, con $\bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/c$.

Supongamos ahora que la superficie abierta $\mathcal{A}$ coincide con la superficie radiante σ de una fuente secundaria cuasi-monocromática, plana y espacialmente incoherente. Entonces, para dos puntos cualesquiera $S_1(\mathbf{r}'_1)$ y $S_1(\mathbf{r}'_1)$ en σ , tenemos que

$$J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = I(\mathbf{r}'_1) \delta^{(2)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1). \quad (\text{A.13})$$

Siendo $I(\mathbf{r}')$ una medición de la intensidad en el punto $\mathbf{r}'$ y $\delta^{(2)}$ es la función delta de Dirac en dos dimensiones. Notamos si las correlaciones se extienden sobre distancias que no son mayores que una

longitud de onda media y si las dimensiones lineales de dicha fuente son grandes en comparación con la longitud de onda media, como suponemos ahora, la idealización expresada por la función delta de Dirac, por lo general conduce a una buena aproximación de la intensidad mutua del campo. De modo que, la expresión (A.13) se reescribe como

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\sigma} I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S}-R_{1S})}}{R_{1S}R_{2S}} d^2\mathbf{r}', \quad (\text{A.14})$$

donde R_{1S} y R_{2S} son las distancias desde un punto $S(\mathbf{r}')$ en la fuente hasta los puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$, respectivamente como se muestra en **Figura A-2**.

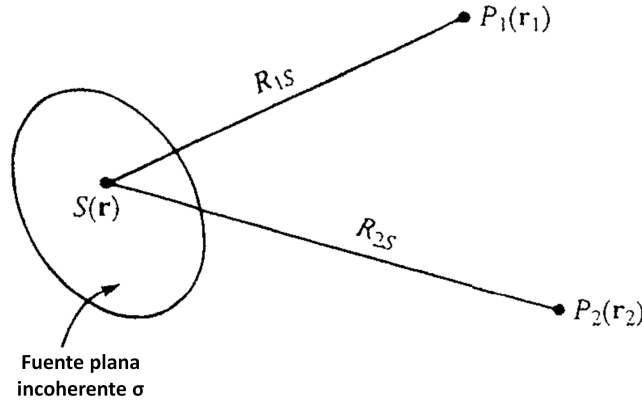


Figura A.2: Ilustrando la notación relacionada con el teorema de van Cittert-Zernike.

Si normalizamos la ecuación (A.14), obtenemos la siguiente expresión para el grado complejo (de igual tiempo) de coherencia del campo generado por nuestra fuente espacialmente incoherente a:

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{[I(\mathbf{r}_1)]^{1/2}[I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}} \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\sigma} I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S}-R_{1S})}}{R_{1S}R_{2S}} d^2\mathbf{r}', \quad (\text{A.15})$$

con la intensidad del campo en el punto $P_i(\mathbf{r}_i)$

$$I(\mathbf{r}_i) = J(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\sigma} \frac{I(\mathbf{r}')}{R_{iS}^2} d^2\mathbf{r}', \quad (i=1,2). \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, la expresión (A.16) es la formulación matemática del *teorema de van Cittert-Zernike*. Pues expresa el grado de coherencia de igual tiempo en dos puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$ en el campo generado por una fuente cuasi-monocromática plana σ , espacialmente incoherente, en términos de la distribución de intensidad $I(\mathbf{r}')$ a través de la fuente y las intensidades $I(\mathbf{r}_1)$ e $I(\mathbf{r}_2)$ en los dos puntos del campo.

Como dato importante, la integral que aparece en la expresión (A.16) tiene la misma forma que la que se encuentra con frecuencia, mediante otras deducciones, en los cálculos de patrones de difracción sobre la base de la teoría de difracción de Huygens-Fresnel-Kirchhoff. Más específicamente, el teorema de van Cittert-Zernike implica que, bajo las condiciones establecidas, el grado de coherencia de igual tiempo $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, es igual a la amplitud compleja normalizada en un cierto patrón de difracción [18, 30].

A.6. Polarización de un haz electromagnético cuasimonocromático

Consideremos un campo electromagnético cuasimonocromático que se propaga en una dirección z , donde sus fluctuaciones son caracterizadas por un ensamble estadísticamente estacionario, al menos en el sentido amplio. De modo que lo podemos expresar como una señal analítica compleja en un punto P , donde sus componentes del campo eléctrico están en direcciones mutuamente ortogonales y son perpendiculares a la dirección de propagación. Así sus componentes están expresadas como:

$$E_x(t) = E_{0x}(t)e^{i[\phi_1(t) - \bar{\omega}t]}, \quad E_y(t) = E_{0y}(t)e^{i[\phi_2(t) - \bar{\omega}t]}. \quad (\text{A.17})$$

Donde las E_0 representan las amplitudes, $\bar{\omega}$ es la frecuencia promedio y ϕ es una función de fase que por ser una señal cuasimonocromática, cambia lentamente con el tiempo en intervalos que son cortos en relación con el tiempo de coherencia $t_c \sim 2\pi/\Delta\omega$, donde $\Delta\omega$ viene siendo la *banda ancha efectiva* de la luz.

Las propiedades de correlación de segundo orden del campo eléctrico en un punto O pueden caracterizarse por una matriz de correlación de 2×2 , es decir,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t) \rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{xx} & \mathbf{J}_{xy} \\ \mathbf{J}_{yx} & \mathbf{J}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Esta matriz $\mathbf{J}$ es comúnmente conocida como la *matriz de polarización*; siendo una matriz de correlaciones de igual tiempo.

Observamos, que la traza de la matriz: $\text{Tr}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}_{xx} + \mathbf{J}_{yy}$, indica la intensidad de la onda de luz. Para el caso de la no-diagonal, cumple con la propiedad Hermítica ($\mathbf{J}_{xy}^* = \mathbf{J}_{yx}$) y determina la correlación entre las componentes del campo eléctrico. Más aun, son definidos no-negativamente, es decir dados dos constantes c_1 y c_2 se tiene que

$$c_1^*c_1\mathbf{J}_{xx} + c_2^*c_2\mathbf{J}_{yy} + c_1^*c_2\mathbf{J}_{xy} + c_2^*c_1\mathbf{J}_{yx} \geq 0. \quad (\text{A.19})$$

Aplicando la condición Hermítica, se obtiene que

$$|\mathbf{J}_{xy}| \leq \sqrt{\mathbf{J}_{xx}}\sqrt{\mathbf{J}_{yy}}. \quad (\text{A.20})$$

Lo que nos permite determinar un coeficiente de correlación entre las dos componentes del campo, tal que

$$j_{xy} = \frac{\mathbf{J}_{xy}}{\sqrt{\mathbf{J}_{xx}}\sqrt{\mathbf{J}_{yy}}}. \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (A.20) y (A.21) obtenemos la desigualdad

$$0 \leq |j_{xy}| \leq 1. \quad (\text{A.22})$$

Recalcando que el extremo 0 representa ausencia de correlación y el extremo 1 corresponde a correlación completa [30].

A.7. Grado de polarización

Existe una relación entre la intensidad de la parte polarizada y la intensidad total, a la cual se le denomina *grado de polarización*. De modo que la parte polarizada en conjunto con el grado de polarización representan el estado de polarización para algún haz de luz. Por lo general cambia el estado de polarización a medida que el haz se propaga o se dispersa al interactuar con un sistema físico, justo estos cambios son de gran interés práctico porque proporcionan información sobre dicho sistema físico.

Consideremos que la matriz de polarización (A.18) puede ser expresada como la superposición de la componente donde toda la luz es completamente polarizada y la componente donde no es polarizada, es decir,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(p)} + \mathbf{J}^{(u)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^* & \mathbf{C} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^* & \mathbf{A} + \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

donde la notación (p) denota polarizada y (u) no polarizada. Además, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son mayores o iguales a cero. Y el determinante de $\mathbf{J}^{(p)}$ es tal que $\text{Det}(\mathbf{J}^{(p)}) = 0$.

Observamos que los términos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ se pueden deducir realizando algunos pasos algebraicos al empelar las definiciones de determinante Det y traza Tr de la matriz $\mathbf{J}$. Esto implica que cualquier haz de luz estadísticamente estacionario puede, en cada punto, considerarse como la suma de dos haces de luz, uno de los cuales está completamente polarizado y el otro completamente no polarizado.

Por otra parte, retomando la definición de la matriz de polarización, su traza es proporcional a la densidad de energía eléctrica promedio y, por lo tanto, puede considerarse como una medida de la intensidad de la luz. De modo que, a partir de las expresiones en (A.23) se deduce que las trazas de cada componente de la matriz $\mathbf{J}$ son tal que:

$$\text{Tr}(\mathbf{J}^{(p)}) = \sqrt{[\text{Tr}(\mathbf{J})]^2 - 4\text{Det}(\mathbf{J})}, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{J}^{(u)}) = \text{Tr}(\mathbf{J}) - \sqrt{[\text{Tr}(\mathbf{J})]^2 - 4\text{Det}(\mathbf{J})}. \quad (\text{A.25})$$

A partir de estas ecuaciones, podemos obtener la expresión de la definición del *grado de polarización* como la porción entre la intensidad de la porción polarizada $I^{(p)}$ y la intensidad total I en el punto considerado, esto es

$$P \equiv \frac{I^{(p)}}{I} = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det}(\mathbf{J})}{[\text{Tr}(\mathbf{J})]^2}}. \quad (\text{A.26})$$

Observamos que el grado de polarización es independiente de la posición que uno determine (en plano $x - y$). Aun más, satisface la desigualdad

$$0 \leq P \leq 1. \quad (\text{A.27})$$

Solo siempre y cuando se cumpla la relación de Hermiticidad $\mathbf{J}_{xy}^* = \mathbf{J}_{yx}$ [30, 31, 33].

A.8. Parámetros globales para caracterizar polarización total

Por otro lado, para describir mediante un solo número la estructura de polarización transversal de un haz, se ha definido en la literatura el llamado grado estándar de polarización de un haz general, P , (definido en términos de Stokes parámetros) cuyo procedimiento de determinación implica mediciones de la *irradiancia* (intensidad promedio) del haz integrado sobre el área de detección completa. Sin embargo, para haces totalmente polarizados no uniformemente, este parámetro no es apropiado: obsérvese, por ejemplo, que P es igual a cero para haces totalmente polarizados radialmente. En consecuencia, en tales casos sería útil introducir nuevos parámetros generales para caracterizar adecuadamente la distribución de la polarización sobre el área de la sección transversal [44].

Consideremos un haz paraxial cuasimonocromático propagándose a lo largo del eje z . El vector del campo eléctrico transversal, $\mathbf{E}$, asociado a un haz polarizado no uniforme, puede ser descrito en el plano de coordenadas polares como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta) = \begin{bmatrix} E_s \\ E_p \end{bmatrix} = E_0(\mathbf{r}, \theta) \begin{bmatrix} f(\mathbf{r}, \theta) \\ g(\mathbf{r}, \theta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

donde s y p denotan las componentes ortogonales del campo transversal al eje z , f y g son funciones deterministas, E_0 es un proceso estocástico, finalmente $\mathbf{r}$ y θ son coordenadas polares [34, 44]. Tomemos los vectores unitarios ortogonales $\mathbf{u}_R$ y $\mathbf{u}_\theta$ en las dirección radial y azimutal, recíprocamente, esto es

$$\mathbf{u}_R = [\cos(\theta), \sin(\theta)] \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{u}_\theta = [-\sin(\theta), \cos(\theta)]. \quad (\text{A.30})$$

De modo que la expresión (4.61), la podemos reescribir tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_R)\mathbf{u}_R + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\theta)\mathbf{u}_\theta = \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, \theta) + \mathbf{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta). \quad (\text{A.31})$$

Notamos que cada término de la ecuación (A.31) representaría el campo a la salida de un dispositivo óptico que solo transmite componentes radiales o azimutales del campo de entrada; siendo un campo $\mathbf{E}_R$ polarizado radialmente y $\mathbf{E}_\theta$ polarizado azimutalmente.

En cada punto del perfil transversal del haz, es posible evaluar el porcentaje de la irradiancia (que debe ser local) asociada a la componente radial y azimutal mediante las siguientes relaciones:

$$\rho_R(\mathbf{r}, \theta) = \frac{\langle |\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle}, \quad (\text{A.32})$$

$$\rho_\theta(\mathbf{r}, \theta) = \frac{\langle |\mathbf{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle}. \quad (\text{A.33})$$

Recordando que los “brackets” denotan el promedio del ensamble. Teniendo esto en cuenta, el contenido de polarización radial y azimutal de un campo totalmente polarizado no uniformemente puede caracterizarse promediando las expresiones (A.32) y (A.33) sobre la región del perfil del haz donde la irradiancia es significativa, de modo que obtenemos

$$\tilde{\rho}_R = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho_R(\mathbf{r}, \theta) \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta} = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho_R(\mathbf{r}, \theta) I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}, \quad (\text{A.34})$$

$$\tilde{\rho}_\theta = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho_\theta(\mathbf{r}, \theta) \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta)|^2 \rangle \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta} = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho_\theta(\mathbf{r}, \theta) I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}. \quad (\text{A.35})$$

Donde $I(\mathbf{r}, \theta)$ consiste en la irradiancia en cada punto de la sección transversal del haz.

Otras expresiones importantes son las dispersiones de los valores ρ_R y ρ_θ a lo largo del perfil del haz, las cuales serian denotadas por las ecuaciones siguientes

$$\sigma_R^2 = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\rho_R(\mathbf{r}, \theta) - \tilde{\rho}_R]^2 I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}, \quad (\text{A.36})$$

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\rho_\theta(\mathbf{r}, \theta) - \tilde{\rho}_\theta]^2 I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta}. \quad (\text{A.37})$$

Veamos que σ_R^2 y σ_θ^2 representan la varianza de ρ_R y ρ_θ a través de la sección transversal del campo, con el valor local de la irradiancia comportándose como una función de densidad. Notamos que si el valor de σ_R^2 o σ_θ^2 es equivalente a cero, significaría que el haz está polarizado uniformemente. En consecuencia, los parámetros σ_R^2 y σ_θ^2 caracterizan globalmente la uniformidad del contenido de polarización radial y azimutal sobre el frente de onda.

Aún más, los términos $\tilde{\rho}_R$ y $\tilde{\rho}_\theta$ están definidos en el rango de 0 a 1, siendo el valor 1 cuando sea completamente radial o azimutal el haz, y deben satisfacer la relación

$$\tilde{\rho}_R + \tilde{\rho}_\theta = 1. \quad (\text{A.38})$$

Lo que implica que el contenido de polarización radial y azimutal de un haz debe entenderse como propiedades complementarias. En la práctica, bastaría entonces con determinar uno de estos parámetros.

Veamos que las ecuaciones descritas anteriormente, en esta misma sección, pueden ser expresados en términos de los parámetros de Stokes. Para ello, tomamos en cuenta las ecuaciones (A.28) y (A.31) para denotar las componentes de campo eléctrico como

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, \theta) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_R) \mathbf{u}_R = E_0(f \cos(\theta) + g \sin(\theta)), \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{E}_\theta(\mathbf{r}, \theta) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\theta) \mathbf{u}_\theta = E_0(-f \sin(\theta) + g \cos(\theta)). \quad (\text{A.40})$$

Entonces los promedios del ensamble para cada componente resulta ser

$$\langle |\mathbf{E}_R|^2 \rangle = I_0 [\cos^2(\theta) \langle |f|^2 \rangle + \sin^2(\theta) \langle |g|^2 \rangle + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \text{Re}(\langle f^* g \rangle)], \quad (\text{A.41})$$

$$\langle |\mathbf{E}_\theta|^2 \rangle = I_0 [\sin^2(\theta) \langle |f|^2 \rangle + \cos^2(\theta) \langle |g|^2 \rangle - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \text{Re}(\langle f^* g \rangle)]. \quad (\text{A.42})$$

Ocupando las identidades trigonométricas de ángulo doble:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad (\text{A.43})$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad (\text{A.44})$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x). \quad (\text{A.45})$$

Siendo $I_0 = \langle |E_0|^2 \rangle$, podemos reescribir y agrupar los términos de las expresiones (A.41) y (A.42) de la siguiente forma

$$\langle |\mathbf{E}_R|^2 \rangle = \frac{1}{2} (I_0 \langle |f|^2 \rangle + I_0 \langle |g|^2 \rangle) + \frac{\cos(2\theta)}{2} (I_0 \langle |f|^2 \rangle - I_0 \langle |g|^2 \rangle) + \sin(2\theta) \left(\frac{I_0 \text{Re}(\langle f^* g \rangle)}{2} \right), \quad (\text{A.46})$$

$$\langle |\mathbf{E}_\theta|^2 \rangle = \frac{1}{2} (I_0 \langle |f|^2 \rangle + I_0 \langle |g|^2 \rangle) - \frac{\cos(2\theta)}{2} (I_0 \langle |f|^2 \rangle - I_0 \langle |g|^2 \rangle) - \sin(2\theta) \left(\frac{I_0 \text{Re}(\langle f^* g \rangle)}{2} \right). \quad (\text{A.47})$$

Nos podemos percatar que los términos en paréntesis, de las ecuaciones (A.46) (A.47), corresponden a los tres primeros parámetros de Stokes, es decir,

$$\langle |\mathbf{E}_R|^2 \rangle = \frac{1}{2} S_0 + \frac{\cos(2\theta)}{2} S_1 + \frac{\sin(2\theta)}{2} S_2, \quad (\text{A.48})$$

$$\langle |\mathbf{E}_\theta|^2 \rangle = \frac{1}{2} S_0 - \frac{\cos(2\theta)}{2} S_1 - \frac{\sin(2\theta)}{2} S_2. \quad (\text{A.49})$$

Donde los parámetros convencionales de Stokes se determinan en cada punto $(\mathbf{r}, \theta)$ del perfil del haz transversal.

Ahora podemos reescribir las expresiones (A.34) y (A.35) en términos de los parámetros de Stokes, para ello sustituimos (A.48) y (A.49) en las ecuaciones (A.32) y (A.33) respectivamente, finalmente se sustituyen en las expresiones de $\tilde{\rho}_R$ y $\tilde{\rho}_\theta$. Por ende después de algunos pasos algébricos simples, obtenemos que

$$\tilde{\rho}_R = \frac{1}{2} + \frac{1}{2P_w} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) S_1(\mathbf{r}, \theta) + \sin(2\theta) S_2(\mathbf{r}, \theta)] \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta, \quad (\text{A.50})$$

$$\tilde{\rho}_\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2P_w} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) S_1(\mathbf{r}, \theta) + \sin(2\theta) S_2(\mathbf{r}, \theta)] \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta. \quad (\text{A.51})$$

Donde $P_w = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S_0(\mathbf{r}, \theta) \mathbf{r} d\mathbf{r} d\theta$ denota la *potencia total* del haz. Recordamos que $I(\mathbf{r}, \theta) = \langle |E|^2 \rangle = S_0(\mathbf{r}, \theta)$.

Con lo expuesto anteriormente, podemos ir concluyendo lo siguiente. Como es bastante evidente en

(A.50-51), $\tilde{\rho}_R$ y $\tilde{\rho}_\theta$ no dependen del parámetro local de Stokes S_3 pues no aporta información para caracterizar el contenido de polarización radial o azimutal de un haz. También, de acuerdo con la definición (4.64) ya se está estableciendo que este comportamiento debería esperarse físicamente, porque S_3 es igual a cero para cualquier campo polarizado radialmente (o azimutalmente). Además, como dato, esto también se aplica al caso particular de un haz polarizado radialmente con frente de onda de vórtice. En tal caso, el factor de fase global que define la carga topológica no altera el término de fase relativo entre las componentes transversales, en consecuencia, el parámetro S_3 permanece igual a cero [34, 44].

Bibliografía

- [1] The Nobel Committee for Physics. Groundbreaking inventions in laser physics optical tweezers and generation of high-intensity, ultra-short optical pulses. Report, The Royal Swedish Academy of Sciences, October 2018.
- [2] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 24:156–159, Jan 1970.
- [3] P. Coullet, L. Gil, and F. Rocca. Optical vortices. *Optics Communications*, 73(5):403–408, November 1989.
- [4] Shen, Yijie, Wang, Xuejiao, Xie, Zhenwei, Min, Changjun, Fu, Xing, Liu, Qiang, Gong, Mali, and Yuan, Xiaocong. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light: Science and Applications*, 8(90), October 2019.
- [5] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 45:8185–8189, Jun 1992.
- [6] L. Paterson, M. P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P. E. Bryant, and K. Dholakia. Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles. *Science*, 292(5518):912–914, May 2001.
- [7] Alois Mair, Alipasha Vaziri, Gregor Weihs, and Anton Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412(6844):313–316, jul 2001.
- [8] Martin Harwit. Photon orbital angular momentum in astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 597(2):1266–1270, nov 2003.
- [9] Severin Fürhapter, Alexander Jesacher, Stefan Bernet, and Monika Ritsch-Marte. Spiral phase contrast imaging in microscopy. *Opt. Express*, 13(3):689–694, Feb 2005.
- [10] Xiaowei Zhuang. Unraveling dna condensation with optical tweezers. *Science*, 305(5681):188–190, 2004.
- [11] Julio T. Barreiro, Tzu-Chieh Wei, and Paul G. Kwiat. Beating the channel capacity limit for linear photonic superdense coding. *Nature Physics*, 4(4):282–286, mar 2008.
- [12] D. M. Palacios, I. D. Maleev, A. S. Marathay, and G. A. Swartzlander. Spatial correlation singularity of a vortex field. *Phys. Rev. Lett.*, 92:143905, Apr 2004.
- [13] M. A. Olvera Santamaría, J. L. Rodríguez Garcíapiña, J. García García, and A. S. Ostrovsky. Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator. *Optics Communications*, 439:312–316, May 2019.
- [14] Andrey S. Ostrovsky, Gustavo Rodríguez-Zurita, Cruz Meneses-Fabián, Miguel Á. Olvera-Santamaría, and Carolina Rickenstorff-Parrao. Experimental generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic source. *Opt. Express*, 18(12):12864–12871, Jun 2010.

- [15] Andrey S. Ostrovsky, Joaquín García-García, Carolina Rickenstorff-Parrao, and Miguel A. Olvera-Santamaría. Partially coherent diffraction-free vortex beams with a besel-mode structure. *Opt. Lett.*, 42(24):5182–5185, Dec 2017.
- [16] Daniel F. V. James. Change of polarization of light beams on propagation in free space. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(5):1641–1643, May 1994.
- [17] Andrey S. Ostrovsky and Gabriel Martínez Niconoff. *Óptica Estadística*. Departamento de Difusión Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, 2000.
- [18] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [19] P.R. Babu. *Probability Theory and Random Processes*. McGraw-Hill Education, 2014.
- [20] Alexander Veretennikov. Stochastic Processes and Models By David Stirzaker: 331 pp., £65.00, ISBN 0-19-856813-4(Oxford University Press, Oxford, 2005). *Bulletin of the London Mathematical Society*, 39(1):167–169, 01 2007.
- [21] O. Ibe. *Fundamentals of Applied Probability and Random Processes*. Elsevier Science, 2014.
- [22] I. Florescu. *Probability and Stochastic Processes*. Wiley, 2014.
- [23] A. M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. Springer Series in Statistics. Springer Verlag New York, 1987.
- [24] C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*. Proceedings in Life Sciences. Springer-Verlag, 1985.
- [25] D Sundararajan. *Fourier Analysis–A Signal Processing Approach*. Springer, 2018.
- [26] W.A. Woyczynski. *A First Course in Statistics for Signal Analysis*. SpringerLink : Bücher. Birkhäuser Boston, 2010.
- [27] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [28] Roy J. Glauber. *Quantum Theory of Optical Coherence*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- [29] W.L.T. Kurz, W. Lauterborn, and T. Kurz. *Coherent Optics: Fundamentals and Applications*. Advanced Texts in Physics. Springer, 2003.
- [30] Emil Wolf. *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [31] C. Brosseau. *Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach*. Wiley, 1998.
- [32] D. Clarke and J. F. Grainger. *Polarized light and optical measurement [by] D. Clarke [and] J. F. Grainger*. Pergamon Press Oxford, New York, [1st ed.] edition, 1971.
- [33] D. Goldstein and D.H. Goldstein. *Polarized Light, Revised and Expanded*. Optical engineering. CRC Press, 2003.
- [34] Rosario Martínez-Herrero, Pedro Mejías, and Gemma Piquero. *Characterization of Partially Polarized Light Fields*, volume 147. 01 2009.
- [35] Jani Tervo. Azimuthal polarization and partial coherence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20(10):1974–1980, Oct 2003.

- [36] Shaurya Aarav, Abhinandan Bhattacharjee, Harshawardhan Wanare, and Anand K. Jha. Efficient generation of propagation-invariant spatially stationary partially coherent fields. *Phys. Rev. A*, 96:033815, Sep 2017.
- [37] Pertti Pääkkönen, Jani Tervo, Pasi Vahimaa, Jari Turunen, and Franco Gori. General vectorial decomposition of electromagnetic fields with application to propagation-invariant and rotating fields. *Opt. Express*, 10(18):949–959, Sep 2002.
- [38] Jari Turunen, Antti Vasara, and Ari T. Friberg. Propagation invariance and self-imaging in variable-coherence optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(2):282–289, Feb 1991.
- [39] G. Gbur and T.D. Visser. *The structure of partially coherent fields*, volume 55, pages 285–341. Elsevier, dec 2010. Available online 25 January 2011.
- [40] Bahaa E A Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics; 2nd ed.* Wiley series in pure and applied optics. Wiley, New York, NY, 2007.
- [41] E. Collett. *Field Guide to Polarization*. Field Guides. Society of Photo Optical, 2005.
- [42] Arthur David Snider. *Random Processes for Engineers: A Primer*. CRC Press, 2017.
- [43] Robert G. Gallager. *Stochastic Processes: Theory for Applications*. Cambridge University Press, 2013.
- [44] R. Martínez-Herrero, P. M. Mejías, G. Piquero, and V. Ramírez-Sánchez. Global parameters for characterizing the radial and azimuthal polarization content of totally polarized beams. *Optics Communications*, 281(8):1976–1980, April 2008.