



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA

---

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA CONFORME

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

ÁNGEL RODRÍGUEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

PUEBLA, PUEBLA. 2015.



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA**

---

**MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA CONFORME**

**TESIS**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A:

**ÁNGEL RODRÍGUEZ SÁNCHEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA**

PUEBLA, PUEBLA. 2015.



**Jurado asignado:**

Presidente: Dra. Patricia Domínguez Soto

Secretario: M.C. Julio Erasto Poisot Macías

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Fernando Macías Romero

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Alexander I. Bikov Barabanov

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM)  
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Director de tesis:

---

**M.C. Juan Francisco Estrada García.**



# Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a mi maestro y amigo el M.C. Juan Francisco Estrada García por su estupenda labor como director de tesis. La tesis que ahora presento es la culminación de dos años de trabajo en los que ha sabido motivarme, orientarme con sus acertados consejos y, en cualquier caso, ofrecerme su entera disponibilidad. El apoyo que me ha mostrado ha sido fundamental para el buen término de esta tesis.

Quiero mostrar también mi agradecimiento a los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, en particular agradezco a los profesores de la carrera en Matemáticas quienes me formaron como matemático.

Doy también testimonio de mi gratitud hacia la Dra. Patricia Domínguez Soto. Gracias a su amable invitación a los distintos eventos en el área de sistemas dinámicos, geometría y dinámica holomorfa (que se llevaron a cabo en el periodo en el que estudié la maestría), que han sido de gran ayuda para mi formación.

Con especial cariño, quisiera agradecer a mi familia su incondicional apoyo.

Finalmente, quiero hacer extensivo mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACyT**), por el apoyo brindado para poder realizar mis estudios de maestría.



A  
mi familia



así

como también a todos los que me apoyaron.



Nadie puede enfrentarse al infinito sin sentir vértigo.  
Nadie puede experimentarlo sin sentir un desconcierto profundo.  
¡Es normal!

*Gustavo Mosquera*

A mis soledades voy,  
de mis soledades vengo,  
porque para andar conmigo  
me bastan mis pensamientos.

*Lope de Vega*

Aprender matemáticas es un acto de soledad, escuchar a un maestro o leer un libro ayudan, y quizá explicar a alguien, o discutir, sirva más; pero a final de cuentas requiere un proceso íntimo de creación y recreación. Un texto matemático, por decirlo así, nos presenta su voz por un rato, pero aprender, o entender, es poder referirnos a las matemáticas a las que alude con nuestra propia voz, ser capaces de verlas con nuestros propios ojos.

*Javier Bracho*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Superficies Regulares y Variedades Diferenciables . . . . .	5
1.2. Métricas de Riemann . . . . .	20
1.3. Transformaciones de Möbius en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	29
<b>2. Estructuras Conformes</b>	<b>39</b>
2.1. La forma conforme de la métrica en una Superficie . . . . .	39
2.2. Estructuras conformes en variedades diferenciables . . . . .	48
<b>3. Estructuras de Möbius</b>	<b>63</b>
3.1. Estructuras de Möbius en superficies de Riemann . . . . .	63
3.2. Cambio conforme de una métrica y estructuras de Möbius en variedades . . . . .	64
3.3. Teorema de Liouville . . . . .	68
3.3.1. Los grupos $M(n)$ y $M(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	70
3.3.2. El modelo lineal de $M(n)$ . . . . .	73
3.3.3. La conexión con la geometría Hiperbólica . . . . .	74
3.4. Construcción de variedades de Möbius . . . . .	79
<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Apéndices</b>	<b>83</b>
<b>A. Geometría diferencial en variedades diferenciables</b>	<b>85</b>
A.1. Campos vectoriales . . . . .	85
A.2. Corchete de Lie de campos vectoriales . . . . .	86
A.3. Concepto de conexión afín . . . . .	88
A.3.1. Conexiones de Riemann . . . . .	90
A.4. La segunda forma fundamental . . . . .	90
A.5. Curvatura . . . . .	92
A.5.1. Teorema de Cartan para la determinación de la métrica por medio de la curvatura . . . . .	94
<b>B. Espacios cubrientes</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>103</b>



# Introducción

La geometría conforme surge históricamente con el estudio de las transformaciones en superficies diferenciables en  $\mathbb{R}^3$  que preservan ángulos orientados. Posteriormente al generalizar este estudio a variedades de Riemann, la teoría requiere de algunos conceptos y resultados de la geometría diferencial (donde la conexión de Levi-Civita constituye una herramienta básica), topología diferencial, en el caso particular de superficies de Riemann (variedades diferenciables de dimensión 1 compleja) se requiere de algunos elementos de topología algebraica, algunas de estas herramientas se agregan en los apéndices. Por supuesto, un estudio más avanzado de esta teoría requiere de profundizar en estas teorías y algunas otras como se puede uno percatar al revisar la literatura más reciente. En esta tesis se aborda el estudio de la geometría de las variedades conformes desde el punto de vista de Riemann junto con el enfoque de geometría de Klein, el cual tiene como principio unificador el estudio de las propiedades de un espacio que quedan invariantes bajo la acción de su grupo de automorfismos, es decir, la geometría en el sentido de Klein es, pues, un par  $(X, G)$  donde  $X$  es una variedad y  $G$  es un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre  $X$ .

Los principales objetivos son, hacer un estudio de las variedades que aceptan una estructura conforme y de las variedades que aceptan una estructura de Möbius, así como estudiar la estrecha relación entre ellas, la cual está garantizada por un teorema de Liouville, y también daremos un breve estudio de representación de variedades con tales estructuras.

Cabe destacar que en cada capítulo se comienza con el caso preliminar al de variedades diferenciables, que son las superficies, ya que de estas fueron la motivación para estudiar geometría conforme en dimensión superior.

Además los resultados que se desarrollan en este trabajo fueron extraídos principalmente de las referencias [5], [8], [12] y [15].

El primer capítulo es un compendio de las definiciones y los resultados básicos de nuestros temas de estudio, como son las variedades, así como de los conceptos métricos en ellas y las transformaciones adecuadas que nos permitirán junto con los conceptos métricos dar la estructura que deseamos. Para la escritura de este capítulo fueron utilizadas principalmente las referencias [7], [8], [10], [11] y [14].

En el segundo capítulo nos centramos en el contexto de las variedades de Riemann conformes. En contraste con la geometría métrica de Riemann, una estructura conforme distingue toda una familia de métricas de Riemann isométricas salvo un factor de escala, con esto obtenemos una herramienta muy fuerte que es la isotropía. Para adquirir más estructura en nuestras variedades introducimos el enfoque de Klein de geometría y así obtener otra gran herramienta que es la homogeneidad. Con estas dos herramientas damos modelos de geometría conforme, que incluyen a las geometrías euclidianas y no euclidianas, cabe destacar que no son las únicas geometrías, hay más, pero no profundizaremos en ellas solo se mencionan. La elaboración de este capítulo fue hecha con base en las referencias [1], [4], [5], [11], [12] y [15].

En el tercer y último capítulo estudiamos a las variedades con estructuras conformemente planas desde el punto de vista de la geometría de Riemann y de la teoría de los grupos de Klein, lo cual nos permite introducir la estructura de Möbius que a su vez esta estrechamente relacionada con las estructuras conformes. Esto se garantiza con un resultado fundamental de esta teoría que es el teorema de Liouville. Con este resultado podemos clasificar a los grupos

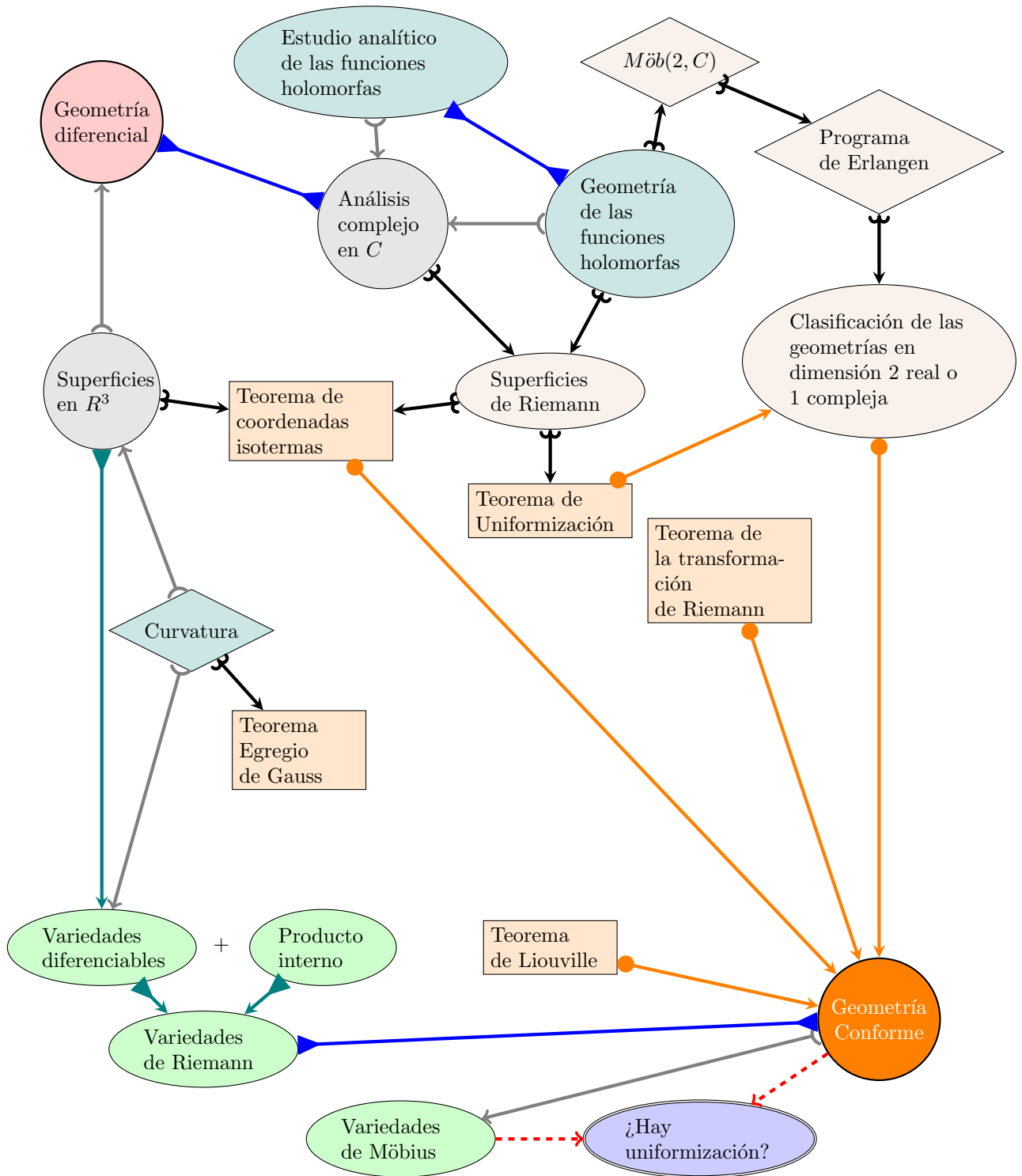
que actúan en el modelo principal (conformemente plano) que es la esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  y además nos permitirá representar algunas variedades por medio del cociente de regiones por los grupos que actúan en estas regiones de manera propiamente discontinua al estilo de la representación clásica de superficies de Riemann vía los grupos de Klein, pero estas estructuras de Möbius son en cierta manera más finas que las conformes y tienen como límite ideal a las variedades hiperbólicas. Para la elaboración de este capítulo utilizamos las referencias [1], [3], [5], [8], [13] y [15].

Como se mencionó al principio, para este trabajo son necesarias la geometría diferencial de variedades y la teoría de espacios cubrientes (de forma introductoria), es por eso que hemos agregado dos apéndices basados en las referencias [6], [11] y [16].

Figura 1: Significado de flechas



Figura 2: Mapa estructural de la tesis.





# Capítulo 1

## Preliminares

Se comienza por revisar algunos resultados importantes sobre curvas y superficies en el espacio euclidiano de dimensión 3, que es el caso preliminar de los conceptos de curvas en variedades diferenciables. Se da la definición de variedad diferenciable y repasamos sus propiedades fundamentales, se da también un teorema muy importante que es el teorema de encaje de **Hassler Whitney**, que garantiza que toda variedad diferenciable se puede encajar en un  $\mathbb{R}^N$  si la dimensión  $N$  es suficientemente grande. Como el propósito es hacer geometría conforme en las variedades, es necesario introducir el concepto de **métrica de Riemann**. Se da un resultado que nos asegura que toda variedad diferenciable acepta una métrica de Riemann. Para definir las transformaciones conformes entre las variedades diferenciables se toma en cuenta que podemos encajar toda variedad diferenciable en un  $\mathbb{R}^N$  adecuado, entonces las transformaciones conformes deben ser transformaciones de  $\mathbb{R}^N$  en sí mismo, por lo tanto se da un breve estudio de las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{R}^N$ , las cuales son transformaciones conformes y con lo que se finaliza este capítulo. Estos temas preliminares son fundamentales para poder desarrollar este trabajo.

### 1.1. Superficies Regulares y Variedades Diferenciables

El estudio diferenciable de las curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$  fue motivado por la búsqueda de entendimiento de ciertas dinámicas como la del calor, de los fluidos, del movimiento de los cuerpos celestes, así como por la construcción de mapas terrestres, de caminos, etc., lo cual constituyó entre otras cosas los primeros resultados en la geometría diferencial. En lo que sigue, se hará un recuento de algunos elementos de esta teoría.

**Definición 1.1.1.** *Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Una curva parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  es una transformación  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciable de clase  $C^\infty$ . La curva es regular si  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .*

Una definición más general de curva parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  exige solo que  $\gamma$  sea continua, mientras que para curvas regulares se impone únicamente que sea de clase  $C^1$ . Sin embargo, para nuestros propósitos (y salvo mención expresa de lo contrario) solo serán consideradas curvas de clase  $C^\infty$ .

Supongamos que tenemos una curva parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  dada de la forma:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

con  $t \in I = [a, b]$  y las  $\gamma_i(t)$  son funciones suaves de  $t$ . El vector *tangente* a la curva  $\gamma$  o vector velocidad de la curva en el instante  $t$  es el vector

$$v(t) = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}(t), \frac{d\gamma_2}{dt}(t), \frac{d\gamma_3}{dt}(t) \right).$$

La longitud de arco de esta curva parametrizada es

$$l = \int_a^b \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle} dt = \int_a^b |v(t)| dt, \quad (1.1)$$

donde  $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es el producto interior usual en  $\mathbb{R}^3$ . Es decir, la longitud de arco de la curva parametrizada está definida como la integral de  $a$  a  $b$  de la norma del vector velocidad de la curva.

Cabe destacar que la longitud de arco, es independiente de la parametrización escogida.

Supongamos que dadas dos curvas parametrizadas  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  se intersectan en un punto cuando  $t = t_0$  (es decir,  $\gamma_i(t_0) = \alpha_i(t_0)$  para cada  $i = 1, 2, 3$ ). Sean

$$v(t) = \left( \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0), \frac{d\gamma_2}{dt}(t_0), \frac{d\gamma_3}{dt}(t_0) \right),$$

$$w(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(t_0), \frac{d\alpha_2}{dt}(t_0), \frac{d\alpha_3}{dt}(t_0) \right),$$

los vectores velocidad de  $\gamma$  y  $\alpha$  en el instante  $t_0$  respectivamente. El ángulo entre las dos curvas parametrizadas en  $\alpha(t_0)$  es el ángulo  $0 \leq \xi \leq \pi$  tal que

$$\cos(\xi) = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|}.$$

El conocimiento de estas relaciones proporciona una base para el cálculo de longitudes de arco, ángulos entre curvas, áreas de superficies y volúmenes de ciertos sólidos, que son los conceptos centrales que subyacen en la geometría y esto es de mucha importancia para este estudio.

Ahora se da la definición de superficie regular.

**Definición 1.1.2.** *Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe una vecindad  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una transformación  $f : U \rightarrow V \cap S$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

1.  *$f$  es diferenciable. Esto significa que si escribimos*

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

*las transformaciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en  $U$*

2.  *$f$  es homeomorfismo. Como  $f$  es continua por la Condición 1, esto significa que tiene una inversa  $f^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que es continua; esto es,  $f^{-1}$  es la restricción de la transformación continua  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida sobre un conjunto abierto  $W$  que contenga a  $V \cap S$ .*

3. *Para cada  $q \in U$ , la diferencial*

$$df_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*es uno a uno.*

La transformación  $f$  se llama parametrización o un sistema de coordenadas (locales) en (una vecindad de)  $p$ . La vecindad  $V \cap S$  de  $p$  en  $S$  se llama una vecindad coordenada. A  $(u, v)$  se les conoce como coordenadas para la superficie o parámetros de la superficie.

Para dar a la condición 3 una forma más familiar, hay que recordar que la matriz asociada a la transformación lineal  $df_q$  es la matriz

$$[df_q] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

Así la condición 3 de la definición 1.1.2 puede expresarse entonces pidiendo que los vectores columna de esta matriz sean linealmente independientes, o de manera equivalente que el producto vectorial de estos vectores sea distinto de cero; o también, que uno de los menores cuadrados de orden 2 de la matriz  $[df_q]$ , esto es, uno de los jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad (1.2)$$

sea distinto de cero.

Un mismo punto de  $S$  puede pertenecer a distintas vecindades coordenadas. Más aún, otros sistemas de coordenadas pueden escogerse en una vecindad de  $p$ . Para que la definición 1.1.2 tenga sentido, es necesario que no dependa del sistema de coordenadas escogido. En otras palabras, debe mostrarse que cuando  $p$  pertenece a dos vecindades coordenadas, con parámetros  $(u, v)$  y  $(\lambda, \mu)$ , es posible pasar de uno de estos pares de coordenadas al otro por medio de una transformación diferenciable. Este problema se soluciona con el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [10, Pag. 70-71].

**Proposición 1.1.3.** *Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $S$ , y sean  $f : U \rightarrow S$  y  $g : V \rightarrow S$  dos parametrizaciones de  $S$  tales que  $p \in f(U) \cap g(V) = W$  entonces la transformación  $h = f^{-1} \circ g : g^{-1}(W) \rightarrow f^{-1}(W)$  es un difeomorfismo; esto es,  $h$  es diferenciable y  $h^{-1}$  es también diferenciable. A  $h$  se le denomina como **cambio de parámetros** o **cambio de coordenadas**.*

En otras palabras, si  $f$  y  $g$  están dadas por

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U \\ g(\lambda, \mu) &= (x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)), \quad (\lambda, \mu) \in V, \end{aligned}$$

entonces el cambio de coordenadas  $h$ , dado por

$$u = u(\lambda, \mu), \quad v = v(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in g^{-1}(W),$$

tiene la propiedad de que las funciones  $u$  y  $v$  tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, y  $h$  puede invertirse, obteniendo

$$\lambda = \lambda(u, v), \quad \mu = \mu(u, v), \quad (u, v) \in f^{-1}(W),$$

donde las funciones  $\lambda$  y  $\mu$  también tienen derivadas parciales de todos los órdenes. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \mu)} \cdot \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(u, v)} = 1,$$

(véase 1.2) esto implica que los jacobianos de  $h$  y  $h^{-1}$  nunca se anulan. En la demostración de la proposición 1.1.3 se hace uso esencial del hecho de que la inversa de una parametrización es continua.

La propiedad que se acaba de enunciar nos dice que cuando dos parametrizaciones se intersectan lo hacen de manera diferenciable, de tal suerte que si nos moviésemos por la superficie no nos daríamos cuenta del paso de una a otra. Esta propiedad será fundamental para comprender la definición del concepto de variedad diferenciable.

Ahora del curso de geometría diferencial, es bien sabido que las superficies en el espacio se dan en tres formas diferentes:

1. (el más simple) como la gráfica de una función de dos variables

$$z = f(x, y);$$

2. más generalmente como como la superficie de nivel de una función del espacio a la recta real

$$F(x, y, z) = 0;$$

3. por ecuaciones paramétricas (análogas a los de una curva)

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v),$$

donde el par  $(u, v)$  recorre una región del plano.

**Definición 1.1.4.** Se dice que una superficie dada por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , tiene un punto no singular  $p = (x_0, y_0, z_0)$  (i.e. se satisface que  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ) en la superficie, si el gradiente de  $F$  en  $p$  es distinto de cero, esto es

$$\frac{\partial F}{\partial x} e_1 + \frac{\partial F}{\partial y} e_2 + \frac{\partial F}{\partial z} e_3 \neq 0,$$

en  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  y donde los  $e_i, i = 1, 2, 3$  son los vectores básicos en  $\mathbb{R}^3$ .

Por el Teorema de la Función Implícita, si decimos que  $\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$ , entonces cerca del punto  $p$  de la superficie, la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  puede ser resuelta para  $z$  como una transformación ( $C^1$ ) de  $x$  e  $y$ , es decir, existe una transformación ( $C^1$ )  $z = f(x, y)$ , tal que  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , y , en una vecindad del punto (que esté contenida en la región de definición de  $F$ )  $(x_0, y_0)$ ,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ . De la definición 1.1.4 y el Teorema de la Función Implícita se sigue que alrededor de un punto no singular de la superficie dada por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , se tiene que existe una vecindad del punto para la cual la pieza que encierra la vecindad es la gráfica de una transformación. Por lo tanto localmente, es decir, en una vecindad de un punto no singular, la superficie está dada por las ecuaciones paramétricas  $z = f(u, v), x = u, y = v$  (alrededor del punto  $x_0 = u_0, y_0 = v_0$ ). Esto se expresa a menudo como sigue: *en una vecindad de un punto no singular de una superficie existen coordenadas locales  $u, v$ .*

Supongamos ahora que una superficie está dada de forma paramétrica

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v). \tag{1.3}$$

**Definición 1.1.5.** Un punto  $p = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  en la superficie dada por 1.3, se dice que es no singular si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \tag{1.4}$$

tiene rango 2.

El siguiente teorema dice que las definiciones 1.1.4 y 1.1.5 son localmente equivalentes, la demostración de este hecho se encuentra en [12, Pag.64].

**Teorema 1.1.6.** Si una superficie esta dada de forma paramétrica (como en 1.3) y el punto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  correspondiente a  $(u_0, v_0)$  es no singular, entonces existe una ecuación  $F(x, y, z) = 0$  que define a la superficie en una vecindad de  $p$  y que tiene la propiedad de que  $(\text{grad } F)_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$ .

Por lo tanto estas tres definiciones de superficies mencionadas son equivalentes localmente, en la vecindad de un punto no singular.

Por un vector tangente a una superficie  $S$ , en un punto  $p \in S$ , entendemos un vector tangente  $\alpha'(0)$  de una curva parametrizada diferenciable  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  con  $\alpha(0) = p$ .

**Proposición 1.1.7.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización de una superficie regular  $S$  y sea  $q \in U$ . El subespacio vectorial de dimensión 2,

$$df_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

coincide con el conjunto de vectores tangentes a  $S$  en  $f(q)$ .

Este hecho se encuentra demostrado en [10, Pág. 83]. En esta proposición, el plano  $df_q(\mathbb{R}^2)$  que pasa por  $f(q) = p$ , no depende de la parametrización  $f$ . Este plano será llamado el **plano tangente** a  $S$  en  $p$  y se denotará por  $T_p S$ . La elección de la parametrización  $f$  determina una base  $\{\frac{\partial f}{\partial u}(q), \frac{\partial f}{\partial v}(q)\}$  de  $T_p S$ , llamada la base asociada a  $f$ . A veces conviene escribir  $\frac{\partial f}{\partial u} = f_u$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v} = f_v$ .

Hasta aquí se ha visto a las superficies desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Pero una pregunta natural que surge es ¿cómo podemos medir longitudes de curva, ángulos entre de vectores tangentes en las superficies, etc.? Para responder esta pregunta tenemos que hablar un poco de la métrica en una superficie del espacio. Sea  $S$  una superficie regular. El producto interior de  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induce en cada plano tangente un producto interior, denotado por  $\langle -, - \rangle_p$ : si  $v_1, v_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ , entonces  $\langle v_1, v_2 \rangle_p$  es igual al producto interior de  $v_1, v_2$  en  $\mathbb{R}^3$ . A este producto interior que es una forma bilineal simétrica (es decir,  $\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle v_2, v_1 \rangle_p$  y  $\langle v_1, v_2 \rangle_p$  es lineal en  $v_1$  y  $v_2$ ) le corresponde una forma cuadrática

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = |v|^2 \geq 0. \quad (1.5)$$

**Definición 1.1.8.** A la forma cuadrática  $I_p$  definida sobre  $T_p S$  por medio de la ecuación 1.5, se le conoce como la **primera forma fundamental** de la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in S$ .

Por consiguiente, la primera forma fundamental simplemente expresa que la superficie  $S$  hereda el producto interior natural de  $\mathbb{R}^3$ . Geométricamente, como se verá en un momento, la primera forma fundamental nos permite medir sobre la superficie sin volver a referirnos al espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$  en el cual se sitúa la superficie. Ahora expresamos la primera forma fundamental en la base  $\{\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \frac{\partial f}{\partial v} = f_v\}$  asociada a la parametrización  $f(u, v)$  en  $p$ . Ya que un vector tangente  $v \in T_p S$  es el vector tangente a una curva parametrizada  $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , con  $\alpha(0) = p = f(u_0, v_0)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle f_u u' + f_v v', f_u u' + f_v v' \rangle_p \\ &= \langle f_u, f_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle f_u, f_v \rangle_p u' v' + \langle f_v, f_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde los valores de las transformaciones involucradas se calculan para  $t = 0$ , y

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle f_u, f_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle f_u, f_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle f_v, f_v \rangle_p, \end{aligned} \quad (1.7)$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{f_u, f_v\}$  de  $T_p S$ . Si  $p$  recorre la vecindad coordenada correspondiente a  $f(u, v)$ , obtenemos funciones  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  que son diferenciables en esa vecindad.

Como se menciono antes, la importancia de la primera forma fundamental  $I_p$  radica en el hecho de que conociendo  $I_p$  podemos hablar de conceptos métricos en una superficie regular sin volver a referirnos al espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Así, la longitud de arco  $l$  de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt = \int_a^b |\alpha'(t)| dt. \quad (1.8)$$

En particular, si  $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$  está contenida en una vecindad coordinada correspondiente a la parametrización  $f(u, v)$ , podemos calcular la longitud de arco de  $\alpha$  entre, digamos 0 y  $t$  por

$$l = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \quad (1.9)$$

También, el ángulo  $\xi$  con el que dos curvas regulares parametrizadas  $\alpha : I \rightarrow S$   $\beta : I \rightarrow S$  se intersectan en  $t = t_0$  esta dado por

$$\cos(\xi) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

En particular, el ángulo  $\vartheta$  de las curvas coordenadas de una parametrización  $f(u, v)$  es

$$\cos(\vartheta) = \frac{\langle f_u, f_v \rangle}{|f_u| |f_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Esto implica que *las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si y solo si  $F(u, v) = 0$  para todo  $(u, v)$* . Tal parametrización se llama una **parametrización ortogonal**.

**Observación 1.1.9.** *Debido a la ecuación 1.9, muchos matemáticos hablan acerca del elemento de longitud de arco  $ds$  de  $S$ , y escriben*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1.10)$$

lo que significa que si  $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$  es una curva sobre  $S$  y  $l$  es su longitud de arco entonces

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

También se dice que 1.10 es la métrica inducida en la superficie.

En resumen, se ha tratado a las superficies  $S \subset \mathbb{R}^3$  como una unión de conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ , organizados de tal manera que cuando dos de estos conjuntos abiertos se intersectan, el cambio de uno al otro se puede hacer de una manera diferenciable. Como consecuencia, tiene sentido hablar de transformaciones diferenciables entre superficies regulares y, así poder, aplicar los métodos del cálculo diferencial. Por lo tanto, estamos muy cómodos tratando con subespacios de  $\mathbb{R}^3$ , pero ¿que pasa si tratamos ahora con espacios métricos o topológicos arbitrarios, tenemos estas mismas ventajas? La respuesta a esta pregunta, es, que debemos tratar con más cuidado a estos espacios arbitrarios y si queremos tener las mismas ventajas debemos exigirle a nuestros espacios algunas cualidades, para aclarar esto conviene que se introduzca el concepto de las variedades diferenciables. He aquí las definiciones que constituyen a tal objeto matemático.

**Definición 1.1.10.** *Una **variedad**  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable, tal que para todo punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U_p$  que es homeomorfa a un subconjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . Tal homeomorfismo*

$$f : U_p \rightarrow V$$

se le llama **carta** (o coordenada).

**Definición 1.1.11.** *Si  $M$  es una variedad, a:*

1.  $U_p$  se le llama **dominio** de la carta.
2.  $(U_p, f)$  se le llama **sistema de coordenadas** (o entorno coordinado) sobre  $U_p$ .

a) Sea  $\rho_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\rho_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , entonces a  $q_i = \rho_i \circ f : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ , se le llamara coordenada  $i$ -ésima. También se usara la notación  $(U_p, f = (q_1, \dots, q_n))$ .

3. Si  $f: U_p \rightarrow V$ , a  $V = f(U_p)$  se llama **imagen de la carta**  $f$ .

4.  $(V, f^{-1})$  se le llama **parametrización** de  $U_p$ .

**Definición 1.1.12.** Dos cartas  $\{U_\alpha, f_\alpha\}$  y  $\{U_\beta, f_\beta\}$  sobre  $M$  son compatibles si  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  o bien si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , los conjuntos  $f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y las transformaciones

$$\varphi_{\alpha\beta} := f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\varphi_{\beta\alpha} := f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son difeomorfismos. A estas transformaciones se les llama cambios de coordenadas.

**Definición 1.1.13.** Un atlas diferenciable sobre una variedad  $M$  es una familia de cartas  $\Lambda = \{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .
2. Para cada  $\alpha, \beta$  las cartas  $\{U_\alpha, f_\alpha\}$  y  $\{U_\beta, f_\beta\}$  son compatibles.
3. Diremos que el atlas  $\Lambda$  determina una estructura diferenciable sobre  $M$  si es maximal para las condiciones anteriores.

Como sobre un mismo conjunto es posible definir diferentes atlas, ¿cómo saber si determinan la misma estructura diferenciable (atlas maximal)?

**Definición 1.1.14.** Dos atlas diferenciables  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  sobre un conjunto  $M$  se dice que son equivalentes si determinan la misma estructura diferenciable sobre  $M$ .

Utilizando la compatibilidad de las cartas es fácil probar que los atlas  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son equivalentes si, y solo si,  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$  constituye un atlas diferenciable.

Llegamos ahora al concepto central de esta sección.

**Definición 1.1.15.** Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un par  $(M, \Lambda)$  formado por un espacio topológico de Hausdorff con base numerable  $M$  y una estructura diferenciable  $n$ -dimensional  $\Lambda$  sobre  $M$ .

O también, podemos definir variedad diferenciable de la siguiente manera:

**Definición 1.1.16.** Una variedad diferenciable real de clase  $C^r$  con  $r \geq 0$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico conexo Hausdorff  $M$  con base numerable, junto con una familia de transformaciones homeomorfas  $x_\alpha : V_\alpha \rightarrow M$  donde  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y tal que

1.  $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(V_\alpha) = M$ .
2. Para cada par  $\alpha, \beta$  con  $x_\alpha(V_\alpha) \cap x_\beta(V_\beta) = W \neq \emptyset$ , se tiene que  $x_\alpha^{-1}(W), x_\beta^{-1}(W)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , y  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  son transformaciones diferenciables de clase  $C^r$ .
3.  $\{V_\alpha, x_\alpha\}$  es maximal relativa a las condiciones 1 y 2.

La condición de maximalidad que aparece en la definición anterior es puramente técnica y podría eliminarse, ya que es fácil demostrar que cualquier atlas se puede completar a un atlas maximal de manera única, es decir, todo atlas diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente un atlas maximal. En efecto, si  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y con una familia  $\Lambda = \{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  que satisface 1 y 2 de la definición anterior y  $\{W, \eta\}$  es otra carta que no pertenece a  $\Lambda$ , decimos que esta carta es compatible con  $\Lambda$  si

para cualquier  $\alpha \in I$  se cumple que  $W \cap U_\alpha \neq \emptyset$ , y las transformaciones  $\eta \circ f_\alpha^{-1}$  y  $f_\alpha \circ \eta^{-1}$  son diferenciables en  $f_\alpha(W \cap U_\alpha)$  y en  $\eta(W \cap U_\alpha)$  respectivamente. Es decir, es posible maximizar a  $\Lambda$  añadiendo las cartas compatibles con  $\Lambda$ . Así pues, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal sobre  $M$ , sino simplemente un atlas diferenciable. Una comparación entre la definición 1.1.16 y la definición de superficie regular 1.1.2 en  $\mathbb{R}^3$  muestra que el punto esencial (excepto por el cambio de dimensión de 2 a  $n$ ) era distinguir la propiedad fundamental del cambio de parámetros (que es un Teorema para superficies en  $\mathbb{R}^3$ ) e incorporarlo como un axioma. Esto es precisamente la condición 2 en la definición 1.1.16. Como veremos más adelante, esta es la condición que nos permite llevar todas las ideas del cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$  a variedades diferenciables.

Pero una pregunta natural podría ser ¿por que se le exige al espacio topológico que sea Hausdorff y con base numerable?

La respuesta a la primera parte de la pregunta es: si queremos desarrollar un cálculo diferencial sobre variedades necesitamos introducir el concepto de límite, y el axioma de separación de Hausdorff ( $T_2$ ) es el que precisamente nos asegura la unicidad de dicho límite. Por esta razón es que partimos de un espacio topológico de Hausdorff para dotarlo de una estructura diferenciable. Exigir esta propiedad es bastante natural, ya que  $\mathbb{R}^n$  la satisface y, en consecuencia, cualquier variedad  $M \subset \mathbb{R}^n$ , que este dotada de la topología relativa, también la satisface.

Ahora, ¿qué podemos decir acerca de la exigencia de que el espacio topológico  $M$  tenga base numerable (segundo axioma de numerabilidad)? La razón para aceptar esta restricción, es para poder garantizar la existencia de familias especiales de funciones diferenciables definidas en  $M$  y con valores en  $\mathbb{R}$ , denominadas particiones diferenciables de la unidad, que resulta ser una herramienta extraordinariamente útil para construir objetos globales a partir de otros definidos localmente, lo cual sera fundamental en nuestro trabajo.

Con ayuda de estas dos exigencias sobre el espacio topológico podemos ahora si, hacer cálculo diferencial en las variedades y en consecuencia se puede hacer geometría en ellas, en particular se puede hacer el cálculo de longitudes de arcos; medir el ángulo entre dos curvas que se intersectan, etc.

**Ejemplo 1.1.17.**  $\mathbb{R}^n$  es una variedad, considerando como carta global la función identidad.

**Ejemplo 1.1.18.** La esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \leq 1\}$ , con su topología heredada de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es una variedad  $n$ -dimensional que al menos tiene dos cartas. Estas son:

$C_1 = \{U_1, \alpha_+\}$ , con  $U_1 = S^n - \{e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)\}$  y el **difeomorfismo**  $\alpha_+$  esta definido como:

$$\alpha_+(x) = \alpha_+[(x_1, \dots, x_{n+1})] = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

cuya inversa está dada por:

$$\alpha_+^{-1}[(y_1, \dots, y_n)] = \left( \frac{2y_1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \right).$$

Análogamente, la segunda carta, ahora sin el polo sur, esta dada por:

$C_1 = \{U_2, \alpha_-\}$ , con  $U_2 = S^n - \{-e_{n+1} = (0, \dots, -1)\}$  y el difeomorfismo  $\alpha_-$  esta definido como:

$$\alpha_-(x) = \alpha_-[(x_1, \dots, x_{n+1})] = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

cuya inversa está dada por:

$$\alpha_-^{-1}[(y_1, \dots, y_n)] = \left( \frac{2y_1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \frac{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \right).$$

Entonces  $S^n = U_1 \cup U_2$  y  $\alpha_+$  y  $\alpha_-$  son difeomorfismos. Recordar que  $\alpha_+$  es la **proyección estereográfica** desde es polo norte y  $\alpha_-$  desde es polo sur.

**Ejemplo 1.1.19.** El espacio proyectivo real  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  que es el conjunto de todas las líneas rectas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que pasan por el origen  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Sea  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , se observa, para empezar, que  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  es el espacio cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por la relación de equivalencia

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}), \lambda \in \mathbb{R} \lambda \neq 0.$$

Los puntos de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  son denotados por  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ . Se observa que, si  $x_i \neq 0$

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[ \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right].$$

Se definen los subconjuntos  $V_1, \dots, V_{n+1}$ , de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ , por

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Geoméricamente,  $V_i$  es el conjunto de todas las líneas rectas reales en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan por el origen y que no pertenecen al hiperplano  $x_i = 0$ . Ahora se muestra que podemos tomar a los  $V_i$ 's como vecindades coordinadas, donde las coordenadas en  $V_i$  son

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para estas vecindades se definen las transformaciones

$$f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i$$

por

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos que la familia  $\{(\mathbb{R}^n, f_i)\}$  es una estructura diferenciable en  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ . De hecho, cualquiera que sea la transformación  $f_i$  es claramente biyectiva, mientras que

$$\bigcup_i f_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}\mathbb{R}^n.$$

Resta demostrar que  $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y que  $f_j^{-1} \circ f_i$  son diferenciables para cada  $j = 1, \dots, n+1$ . Ahora si  $i > j$ , los puntos en  $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  son de la forma

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_j \neq 0\}.$$

Por lo tanto  $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y suponiendo que  $i > j$  (el caso  $j > i$  es similar),

$$\begin{aligned} f_j^{-1} \circ f_i(y_1, \dots, y_n) &= f_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n] \\ &= f_j^{-1} \left[ \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right] \\ &= \left( \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right). \end{aligned}$$

Que es una transformación diferenciable. Por lo tanto  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  es una variedad diferenciable.

**Ejemplo 1.1.20.** Se  $G$  un grupo y  $M$  una variedad diferenciable. Se dice que  $G$  actúa en  $M$  si existe una transformación  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ ,  $\alpha(g, p) := g(p)$  que satisface:

1.  $\alpha(e, p) = p \quad \forall p \in M$ ;
2.  $\alpha(gh, p) = \alpha(g, \alpha(h, p)) \quad \forall g, h \in G, \forall p \in M$ .

La acción es propiamente discontinua si para cada  $p \in M$  tiene una vecindad  $U \subset M$  tal que

$$U \cap g(U) = \emptyset \quad \forall g \neq e.$$

Cuando  $G$  actúa en  $M$ , la acción determina una relación de equivalencia  $\sim$  en  $M$ , en la que si  $g \in G$  entonces  $p_1 \sim p_2$  si y solo si  $p_2 = g(p_1)$ .

Se denota al espacio cociente de  $M$  sobre la relación de equivalencia como  $M/G$ . La transformación  $\pi : M \rightarrow M/G$ , dado por  $\pi(p) = G(p) = \{q \in M : p \sim q\}$  (a  $G(p)$  se le llama la **órbita** de  $p$ ) es la proyección natural de  $M$  en  $M/G$ .

Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  una acción propiamente discontinua. Se muestra ahora que  $M/G$  tiene una estructura diferenciable con respecto de la proyección natural  $\pi$  que es un difeomorfismo local.

Para cada  $p \in M$  escogemos una parametrización  $x : V \rightarrow M$  de  $p$  tal que  $x(V) \subset U$  donde  $U$  es una vecindad de  $p$  tal que  $U \cap g(U) = \emptyset$ ,  $g \neq e$ .

Como  $\pi|_U$  es inyectiva, entonces

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{x} & x(V) \subset U \\ & \searrow y & \downarrow \pi|_U \\ & & \pi(U) \subset M/G \end{array}$$

$y = \pi|_U \circ x$  es inyectiva, entonces la familia  $\{(V, y)\}$  claramente cubre a  $M/G$ . Para que esta familia sea una estructura diferenciable en  $M/G$  es suficiente probar que dadas dos transformaciones  $y_1 : V_1 \rightarrow M/G$   $y_2 : V_2 \rightarrow M/G$  con la cualidad de que si

$$y_1(V_1) \cap y_2(V_2) \neq \emptyset,$$

entonces  $y_1^{-1} \circ y_2$  es diferenciable.

Para esto, sea  $\pi_i$  la restricción de  $\pi$  a  $x_i(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Sea  $q \in y_1(V_1) \cap y_2(V_2)$  y sea  $r = x_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q)$ . Sea  $W \subset V_2$  una vecindad de  $r$  tal que  $\pi_2 \circ x_2(W) \subset y_1(V_1) \cap y_2(V_2)$ . Entonces, la restricción a  $W$  esta dada por

$$(y_1^{-1} \circ y_2)|_W = x_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ x_2.$$

Por lo tanto se tiene que  $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$  es diferenciable en  $p_2 = \pi_2^{-1}(q)$ . Sea  $p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$ . Entonces  $p_1$  y  $p_2$  son equivalentes en  $M$ , de aquí que exista una  $g \in G$  tal que  $g(p_2) = p_1$ . Se sigue fácilmente que la restricción  $\pi_1^{-1} \circ \pi_2|_{x_2(W)}$  coincide con  $\alpha_g|_{x_2(W)}$ , que prueba que  $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$  es diferenciable en  $p_2$ , como se deseaba.

Ahora se define lo que se conoce como transformaciones diferenciables, se comienza por el caso más sencillo que se puede presentar, cuando el conjunto de llegada es el conjunto de los números reales. Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  transformación, sea  $p$  un punto de su dominio y consideremos  $(U, \varphi)$  una carta en  $M$  cuyo dominio contiene a  $p$ . Entonces la transformación  $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina la representante local o representante en coordenadas de  $f$ .

**Definición 1.1.21.** Una transformación  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $p$  de su dominio si una representante local  $F = f \circ \varphi^{-1}$  ( $y$ , por tanto, todas) es diferenciable en  $\varphi(p)$ .

La razón de que la definición anterior sea la correcta puede encontrarse en el siguiente razonamiento. Sean  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  dos cartas en  $M$  cuyos dominios contienen al punto  $p$ , y consideremos  $F = f \circ \varphi^{-1}$  y  $G = f \circ \psi^{-1}$  las representantes locales respectivas. Entonces, utilizando el cambio de cartas, podemos comprobar que  $F = G \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$ , por lo que  $F$  es diferenciable en  $\varphi(p)$  si, y solo si,  $G$  es diferenciable en  $\psi(p)$ . El conjunto de todas las transformaciones (reales) diferenciables definidas en  $M$  es denotado por  $C^\infty(M)$  y es fácil ver que admite estructura de anillo conmutativo.

Ahora el caso general.

**Definición 1.1.22.** Sean  $M^n$  y  $N^k$  dos variedades diferenciables. Una transformación  $f : M \rightarrow N$  se dice que es diferenciable en un punto  $p \in M$  si, dada una parametrización  $\psi : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow N$  en  $f(p)$ , existe una parametrización  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n$  en  $p$  tal que  $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$  y la transformación

$$F = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

es diferenciable en  $\varphi^{-1}(p)$ . La transformación se dice diferenciable en  $M$ , si lo es en todos los puntos de  $M$ .

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \varphi^{-1} & & \downarrow \psi^{-1} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^k \end{array} .$$

Se sigue de la condición 2 de la definición 1.1.16 que lo anterior es independiente de la parametrización escogida. La transformación  $F$  es llamada la expresión de  $f$  en las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$ .

**Definición 1.1.23.** Una transformación  $f : M \rightarrow N$  se dice que es un **difeomorfismo** si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En tal caso, las variedades  $M$  y  $N$  se dice que son **difeomorfas**.  $f$  se dice que es un difeomorfismo local en  $p \in M$  si existen vecindades  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $f(p)$  tal que  $f : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo.

Para superficies en  $\mathbb{R}^3$ , un vector tangente en un punto  $p$  de la superficie está definido como la velocidad en  $\mathbb{R}^3$  de una curva en la superficie que pasa a través de  $p$ .

Ahora para variedades sea  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$ , con  $\alpha(0) = p$ , escribimos

$$K_p(M) = \{\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M : \alpha \text{ es diferenciable y } \alpha(0) = p\}.$$

$K_p(M)$  es el conjunto de curvas contenidas  $M$  que pasan por  $p$ . Establecemos en  $K_p(M)$  una relación de equivalencia  $\sim$  como sigue. Dos curvas  $\alpha$  y  $\gamma$  son equivalentes si para alguna carta  $(U, \varphi)$  de  $p$  se verifica

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma) \right|_{t=0} .$$

Es decir, las curvas son equivalentes si coinciden los vectores tangentes en  $\mathbb{R}^n$  de ambas curvas vistas en coordenadas. Es fácil ver que esta definición es independiente del sistema coordenado escogido.

Se establece la definición de vector tangente de la siguiente manera.

**Definición 1.1.24.** Llamaremos **vector tangente a  $M$  en  $p$**  (como clase de curvas) a cada una de las clases de equivalencia definidas por  $\sim$  en  $K_p(M)$ .

Así, denotaremos por

$$[\alpha] = \{\gamma \in K_p(M) : \exists \varphi \text{ carta tal que } \alpha \sim \gamma\}$$

al vector tangente representado por la curva  $\alpha$ , esto es, la clase de equivalencia de  $\alpha$ . En consecuencia,

**Definición 1.1.25.** Se llama **espacio tangente a  $M$  en  $p$**  al conjunto de vectores velocidad  $K_p(M) / \sim = T_p M$ .

Por simplicidad de notación escribiremos  $\alpha'(0) = [\alpha]$ . Se introduce un nuevo concepto de vector tangente basando en la existencia de un *modo de derivar transformaciones* para cada vector tangente a  $M$  en  $p$ ; es lo que generaliza la derivada direccional en  $\mathbb{R}^n$ . Más concretamente, sea  $\alpha \in K_p(M)$  y sea  $[\alpha]$  su vector tangente asociado. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una transformación diferenciable entonces podemos considerar  $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  y calcular

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}.$$

A este número real lo llamaremos derivada direccional de  $f$  en la dirección del vector tangente  $[\alpha]$ . Esta derivada es independiente del representante escogido en la clase  $[\alpha]$ . Esto es, si  $\alpha \sim \gamma$  entonces  $\left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}$ .

Consideremos el conjunto  $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$ . De manera natural, en este conjunto se pueden definir las operaciones  $f + g$ ,  $fg$  y  $af$ , siendo  $f, g \in C^\infty(M)$  y  $a \in \mathbb{R}$ . De hecho,  $(C^\infty(M), +, \cdot, \mathbb{R})$  tiene estructura de espacio vectorial. Si se fija un vector tangente en  $p$ ,  $[\alpha] = v_p$ , se define la transformación:  $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M). \quad (1.11)$$

La transformación 1.11 verifica las siguientes propiedades:

1. es  $\mathbb{R}$ -lineal

$$\alpha'(0)(af + bg) = a\alpha'(0)(f) + b\alpha'(0)(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Verifica la regla de Leibniz del producto en  $p$

$$\alpha'(0)(fg) = \alpha'(0)(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \alpha'(0)(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Ahora se establece otra definición de vector tangente

**Definición 1.1.26.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. El vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $t = 0$  es una transformación  $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\alpha'(0)(f) = v_p(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M), \quad (1.12)$$

tal que

1. es  $\mathbb{R}$ -lineal

2. Verifica la regla de Leibniz del producto en  $p$

Un **vector tangente en  $p$**  es el vector tangente a  $t = 0$  de alguna curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  se indicará por  $T_pM$ .

Obviamente, cada vector tangente según la anterior definición proporciona un vector tangente como derivación. Más aún, el recíproco también es cierto. Esto es, si se tiene un vector tangente como derivación  $\alpha'(0)(f)$  entonces existe un único vector tangente  $[\alpha]$  tal que:

$$\alpha'(0)(f) = v_p(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}, \quad \forall f \in C^\infty.$$

Existe una manera natural de asociar a cada sistema coordenado  $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$ ,  $n$  vectores tangentes en  $p$  a  $M$ . En efecto, fijado  $i \in \{1, \dots, n\}$  consideremos el vector  $e_i = (0, \dots, 1^{(i)}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Definimos la recta  $r_i$ :

$$r_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \varphi(p) + te_i.$$

Se toma la preimagen por  $\varphi$  de la recta  $r_i$  anterior:

$$\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

$$t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i).$$

Se obtiene así  $n$  vectores tangentes en  $p$ ,  $[\alpha_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , para cada sistema coordenado. Observemos que

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha_i)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi(p) + te_i) \right|_{t=0} = e_i.$$

Es decir, el vector de  $\mathbb{R}^n$  asociado al vector tangente por coordenadas  $[\alpha_i]$  mediante  $(U, \varphi)$  vuelve a ser  $e_i$ .

Observemos además que en este caso la derivación asociada a  $v_p \equiv [\alpha_i]$  es

$$\alpha'_i(0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial q_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \alpha'_i(0)(f) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha_i)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha_i)(t) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) \cdot \left. \frac{d}{dt}q_j \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) \cdot \left. \frac{d}{dt}(q_j + \delta_{ij}t) \right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)), \end{aligned}$$

donde  $q_j = \rho_j \circ \varphi$  (ver definición 1.1.11) y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Esto justifica que de ahora en adelante se siga la notación  $\alpha_i(0) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial q_i} \right|_p$  siempre que  $v_p \equiv [\alpha_i]$ . En resumen, fijado un sistema coordenado  $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$  hemos obtenido  $n$  derivaciones en  $p$ ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_i} \right|_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n.$$

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial q_i}(p)$$

El conjunto  $T_p M$ , con las siguientes operaciones:

la suma, sean  $v_p, w_p \in T_p M$

$$v_p + w_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto v_p(f) + w_p(f),$$

y el producto por un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \lambda v_p(f).$$

Forman un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Y para cada sistema coordenado  $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$  de  $p \in M$  se tiene que  $B_p^\varphi = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n} \Big|_p \right\}$  es una base de  $T_p M$ . Además, si  $v_p \in T_p M$  entonces

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_p(q_i) \frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_p. \quad (1.13)$$

Con esta idea de espacio tangente podemos ahora extender a variedades diferenciables la noción de diferencial entre transformaciones diferenciables, mediante el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [11, Pag. 9].

**Proposición 1.1.27.** *Sea  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de dimensión  $n$  y  $k$  respectivamente y sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una transformación diferenciable para cada  $p \in M$  y para cada  $v \in T_p M$ , escogemos una curva diferenciable  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . Tomamos  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . La transformación*

$$d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$$

dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$  es una transformación lineal que no depende de la elección de  $\alpha$ .

La demostración de esta proposición se encuentra en [11, Pagina 9]. Ahora con esta proposición se puede definir el concepto de diferencial en variedades diferenciables.

**Definición 1.1.28.** *A la transformación lineal  $d\varphi_p$  definida en la proposición 1.1.27 anterior es llamada la **diferencial** de  $\varphi$  en  $p$ .*

Si  $\varphi$  es un difeomorfismo entonces  $d\varphi_p$  es un isomorfismo para cada  $p \in M$ . El siguiente teorema proporciona una manera para identificar difeomorfismos locales, y cuya demostración es una aplicación del teorema de la función inversa en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1.29.** *Sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una transformación diferenciable y sea  $p \in M$  tal que  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  es un isomorfismo, entonces  $\varphi$  es un difeomorfismo local.*

Ahora se enuncia el concepto de subvariedad.

**Definición 1.1.30.** *Sea  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente. Una transformación  $\varphi : M \rightarrow N$  se dice una **inmersión** si  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  es inyectiva para todo  $p \in M$ . Si además,  $\varphi$  es un homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , donde  $\varphi(M)$  tiene la topología inducida por  $N$ , decimos entonces que  $\varphi$  es un **encaje**. Si  $M \subset N$  y la inclusión  $i : M \hookrightarrow N$  es un encaje, decimos que  $M$  es una subvariedad de  $N$ .*

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  es una inmersión, entonces  $n \leq m$  (donde  $n$  y  $m$  son las dimensiones de  $M$  y  $N$  respectivamente), la diferencia  $m - n$  es llamada la **codimensión** de la inmersión.

**Ejemplo 1.1.31.** *Es claro que una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  tiene una estructura diferenciable dada por sus parametrizaciones  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ . Con tal estructura las transformaciones  $f_\alpha$  son diferenciables y, en realidad, son encajes de  $U_\alpha$  en  $S$ , esto es consecuencia inmediata de las condiciones 1 y 2 de la definición 1.1.2 de superficie regular.*

*Ahora se observa que la inclusión  $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  es un encaje, esto es, que  $S$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . En efecto,  $i$  es diferenciable, por que para todo  $p \in S$  existe una parametrización  $f : U \rightarrow S$  de  $S$  en  $p$  y una parametrización  $Id : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $i(p)$  ( $V$  es una vecindad de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $Id$  es la identidad en  $\mathbb{R}^3$ ) tal que  $Id^{-1} \circ i \circ f = f$  es diferenciable. Además por la condición 2 de 1.1.2 se tiene que  $i$  es una inmersión y por 1 de 1.1.2 es un homeomorfismo sobre su imagen, y así tenemos que  $S$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$*

Dada una transformación diferenciable entre dos variedades  $f : M \rightarrow N$ , tenemos que la diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$  que es una transformación lineal que depende del punto  $p$  de  $M$ , así que al cambiar de punto se obtiene, mediante la diferencial de  $f$ , otra transformación

lineal entre los espacios tangentes correspondientes. Esto motiva a definir una transformación del conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en el conjunto de todos los vectores tangentes a  $N$ . Para tal fin, sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y sea

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in T_p M\}. \quad (1.14)$$

Se dará a  $TM$  una estructura diferenciable (de dimensión  $2n$ ); con tal estructura  $TM$  es llamado **haz tangente** de  $M$  (fibrado tangente de  $M$ ).

Sea  $\{V_\alpha, x_\alpha\}$  una estructura diferenciable maximal en  $M$ . Denotamos por  $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  las coordenadas de  $V_\alpha$  y por  $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$  la bases asociadas a los espacios tangentes de  $x_\alpha(V_\alpha)$ . Para cada  $\alpha$ , definimos

$$y_\alpha : V_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM,$$

por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, v_1, \dots, v_n) = \left( x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right),$$

$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  y la segunda entrada de la parte derecha de la igualdad es tomada en el sentido de la ecuación 1.13. Geométricamente, esto significa que estamos tomando coordenadas de un punto  $(p, v) \in TM$  las coordenadas de  $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$  de  $p$  junto con las coordenadas de  $v$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ .

Se muestra ahora que  $\{(V_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable en  $TM$ . Dado que  $\bigcup_\alpha x_\alpha(V_\alpha) = M$  y  $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$ ,  $q \in V_\alpha$ , se tiene que

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(V_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM.$$

Que verifica la condición (1) de la definición 1.1.16. Ahora sea

$$(p, v) \in y_\alpha(V_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(V_\beta \times \mathbb{R}^n),$$

entonces

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)),$$

donde  $q_\alpha \in V_\alpha$ ,  $q_\beta \in V_\beta$ ,  $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = \\ &= ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha)). \end{aligned}$$

Dado que  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  es diferenciable,  $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$  es así. Se sigue de aquí que  $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$  es diferenciable, y con esto se verifica la condición (2) de la definición 1.1.16 y se completa la prueba.

Así  $TM$  es localmente difeomorfo a  $M \times \mathbb{R}^n$ ; de hecho, dos variedades arbitrarias de la misma dimensión  $n$  son localmente difeomorfas (por ser difeomorfas a  $\mathbb{R}^n$  localmente). Sin embargo, no son necesariamente globalmente difeomorfas. Por lo tanto  $TM$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$ . Ahora, retomando las variedades  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $N \subset \mathbb{R}^m$  y  $f$ , una transformación diferenciable entre ellas, podemos definir

$$df : TM \longrightarrow TN$$

$$df(p, v) \mapsto (f(p), df_p(v)).$$

Luego se define la proyección

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

dada por

$$\pi(p, v) = p,$$

entonces se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

De lo anterior se observa que  $M$  está inmerso en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Por lo anterior surge de manera natural la siguiente pregunta ¿Cuándo una variedad está encajada en un  $\mathbb{R}^N$ ? La respuesta a esta pregunta es el teorema de encaje de **Hassler Whitney**, que garantiza que toda variedad diferenciable se puede encajar en un  $\mathbb{R}^N$  si la dimensión  $N$  es suficientemente grande.

**Teorema 1.1.32.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de clase  $C^r$  con  $r \geq 0$  de dimensión  $n$ , entonces existe un difeomorfismo*

$$\tau : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1},$$

tal que  $\tau(M)$  es cerrado en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Una demostración detallada de este importante hecho se encuentra en [7, Capítulo 6]. Con este resultado se termina esta sección.

## 1.2. Métricas de Riemann

En la sección anterior se observó que dada una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , la definición del producto interno en cada punto  $p \in S$  nos conduce, a una forma cuadrática  $I_p$  (1.5), llamada primera forma fundamental de  $S$  en  $p$ , definida en el plano tangente  $T_p S$  por  $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ , con  $v \in T_p S$  y a partir de esto se tiene una manera natural de medir en  $S$ . La definición de  $\langle -, - \rangle_p$  permite medir no sólo las longitudes de curvas en  $S$  sino también el área de los dominios de  $S$ , así como ángulos entre dos curvas y todas las otras ideas métricas usadas en geometría.

De manera análoga usando el producto interior canónico  $\langle -, - \rangle^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . Se puede definir la métrica como  $d(\kappa, \mu) = \sqrt{\langle \kappa - \mu, \kappa - \mu \rangle}$  ( $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^n$ ), y a partir del producto interior  $\langle -, - \rangle$  se puede obtener las mismas ideas "métricas" que se mencionaron para el caso de superficies. Estas ideas, nos llevan a la siguiente definición.

**Definición 1.2.1.** *Una métrica de **Riemann** en una región  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  es una forma cuadrática definida positiva con dominio en el espacio tangente  $T_p \mathbb{R}^n$  con  $p \in D$  y dependiendo suavemente de la variación de  $p$  en  $D$ .*

Esta definición queda más clara si se enuncia de la siguiente forma, pero además se escribe en el contexto de variedades diferenciables, puesto que una variedad diferenciable se puede encajar en un  $\mathbb{R}^n$  (por el Teorema de **Hassler Whitney** 1.1.32).

**Definición 1.2.2.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de clase  $C^r$  con  $r \geq 0$  de dimensión  $n$ . Una métrica de Riemann es una transformación que asocia a cada  $p \in M$  un funcional  $g(-, -)_p = \langle -, - \rangle_p$*

$$g(-, -)_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

con  $p \in M$ , de modo que cumple las siguientes condiciones:

<sup>1</sup>  $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , que se define para cualquiera sean  $\kappa = (x_1, \dots, x_n), \mu = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , como

$$\langle \kappa, \mu \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

1.  $\langle -, - \rangle_p$  es un producto interior, (es decir, una forma simétrica, bilineal y definida positiva) para cada  $p \in M$ .

2.  $\langle -, - \rangle_p$  varía diferencialmente en el siguiente sentido:

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un sistema de coordenadas en un entorno de  $p$ , con  $f(x_1, \dots, x_n) = q \in f(U)$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = df_q(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , entonces la función  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q,$$

es diferenciable.

Esta definición no depende de la elección del sistema coordenado.

Las funciones  $g_{ij}$  son llamadas expresiones de la métrica de Riemann en el sistema coordenado  $f$  y la matriz  $G = (g_{ij})$  es la representación de la métrica de Riemann. Como  $f$  es un difeomorfismo se tiene que  $df_q : \mathbb{R}^n \rightarrow T_qM$  es un isomorfismo y así la matriz  $G = (g_{ij})$  es invertible. Por tanto, toda métrica de Riemann tiene su matriz de representación invertible.

**Nota.** Para definir una métrica de Riemann en un dominio  $T_pM$  de  $\mathbb{R}^n$  es suficiente mostrar las funciones matriciales  $g_{ij}$  o la matriz  $G = (g_{ij})$ .

Entonces en una variedad diferenciable  $M$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 0$  de dimensión  $n$  se puede definir el producto interior de la siguiente forma

$$\langle u, v \rangle = \sum_{ij=1}^n g_{ij}u_i v_j = \langle Gv, w \rangle, \quad (1.15)$$

donde  $G = (g_{ij})$  es la matriz que representación de la métrica de Riemann.

Esta definición aparece de manera natural al realizar un cambio de coordenadas. En efecto, sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $z = (z_1, \dots, z_n)$  tal que  $x(t) = x(z(t))$ , esto es,

$$x(t) = (x_1(z_1(t), \dots, z_n(t)), \dots, x_n(z_1(t), \dots, z_n(t))),$$

entonces:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial t} \right), \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Denotando  $v^x = (v_1^x, \dots, v_n^x)$  y  $v^z = (v_1^z, \dots, v_n^z)$ , donde  $v_i^x = \frac{dx_i}{dt}$  y  $v_i^z = \frac{dz_i}{dt}$ , se tiene que:

$$\|v^x\| = \langle v^x, v^x \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2.$$

Como

$$\begin{aligned} \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} v_j^z \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x_i}{\partial z_j} v_j^z \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_k} v_k^z \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_k} v_k^z \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \right) v_j^z, \end{aligned}$$

entonces

$$\|v^x\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} v_k^z \right) v_j^z,$$

conmutando sumandos

$$\|v^x\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \right) v_k^z v_j^z.$$

Haciendo un cambio de  $k$  por  $i$  e  $i$  por  $k$  obtenemos:

$$\|v^x\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial z_j} \frac{\partial x_k}{\partial z_i} \right) v_i^z v_j^z,$$

definiendo  $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial z_j} \frac{\partial x_k}{\partial z_i}$  se tiene finalmente que

$$\|v^x\| = \langle v^x, v^x \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i^z v_j^z = \langle Gv^z, v^z \rangle.$$

Queda claro que un cambio en el sistema de coordenadas no altera las métricas. En efecto, si  $v = G^{\frac{1}{2}}w$  tenemos que:

$$\langle v, v \rangle = \langle G^{\frac{1}{2}}w, G^{\frac{1}{2}}w \rangle = \langle Gw, w \rangle = \langle w, w \rangle.$$

Si en el dominio  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$  esta definida una métrica de Riemann  $G(z) = (g_{ij}(z))$  y en las coordenadas de  $z$  está definida una curva suave  $z_i = z_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $t \in [a, b]$ , entonces la longitud de curva se define por:

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz_i}{dt} \frac{dz_j}{dt}} dt.$$

Estas métricas son de mucha importancia puesto que nos sirven para medir distancias, longitudes de curva, medida de ángulos entre curvas, etc. En nuestras variedades.

Para el caso de superficies tenemos que la primer forma fundamental 1.10 es la métrica inducida en la superficie, y está es una métrica de Riemann cuya matriz asociada es

$$(g_{ij}) = G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

O más explícito se tiene que los

$$g_{ij} = \langle f_{x^i}, f_{x^j} \rangle, \text{ con } x^1 = u \text{ y } x^2 = v, \quad (1.17)$$

como se observo en 1.6 y 1.7. Ahora algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.2.3.** 1. **Coordenadas cartesianas**  $x = (x_1, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{R}^n$ . La matriz  $G(x)$  en las coordenadas de  $x$  tiene la forma  $G(x) = Id_n$ , donde  $Id_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ . Consideremos la transformación identidad de  $\mathbb{R}^n$ . Luego la matriz Jacobiana es la matriz identidad  $Id_n$ . Por lo tanto la longitud de una curva suave  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt.$$

2. **Coordenadas polares**  $(r, \theta)$  en  $\mathbb{R}^2$ . La matriz  $G(x)$  en coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  tiene la forma  $G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$ , es decir  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . El cambio de coordenadas esta dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \sin \theta \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Luego la matriz Jacobiana de esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto  $G(r, \theta)$  esta dada por  $A^t Id_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ . Calculemos ahora la longitud  $l$  de una curva suave  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$  en el sistema polar. Escribamos a  $|\gamma'(t)|$  como

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} & \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} G(r, \theta) \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} & \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Luego

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} dt.$$

3. **Coordenadas esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $(x_1, x_2, x_3)$  coordenadas cartesianas. El cambio de coordenadas esféricas esta dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ x_3 &= r \sin \varphi \sin \theta \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad 0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

La matriz Jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Y la longitud de una curva  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$  está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

4. **Coordenadas cilíndricas**  $(r, \varphi, z)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= z, \\ x_2 &= r \cos \varphi, \\ x_3 &= r \sin \varphi \quad r > 0, \quad -\infty < z < \infty \quad 0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

La matriz Jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y la longitud de una curva  $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$  está dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Con frecuencia, en lugar de la matriz  $G = (g_{ij})$  de la métrica de Riemann se escribirá la diferencial de la longitud de curva  $dl$  o su cuadrado  $dl^2$ .

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , se sabe que la esfera unitaria,

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\},$$

llamada esfera de Riemann, es el modelo requerido para incluir al punto al infinito. Esto vía la conocida proyección estereográfica que se define por la transformación

$$\Phi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = z,$$

con inversa

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Es útil obtener, en términos de  $z$  y  $z'$ , puntos del plano complejo, una fórmula de la distancia entre sus proyecciones en la esfera. Si denotamos éstas por  $(x_1, x_2, x_3)$  y  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , se tiene

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x_3)^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3). \quad (1.19)$$

Ahora usando cada coordenada de 1.18, y sustituyéndolas en 1.19 se sigue que

$$\begin{aligned} &x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{z' + \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) - \left( \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{z' - \bar{z}'}{|z'|^2 + 1} \right) + \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \left( \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} = \\ &= \frac{-2(z - z')(\bar{z} - \bar{z}') + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \end{aligned}$$

(el último paso equipara numerador y denominador).

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 &= 2 - 2 \left( 1 - \frac{2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \right) = \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}. \end{aligned}$$

Esta nueva fórmula de distancia en  $\hat{\mathbb{C}}$  es particularmente novedosa y útil por incluir el punto al infinito. En este caso, si  $z' = \infty$ , se tiene

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

por lo que

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x_3)^2 = 2 - 2 \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{4}{1 + |z|^2}.$$

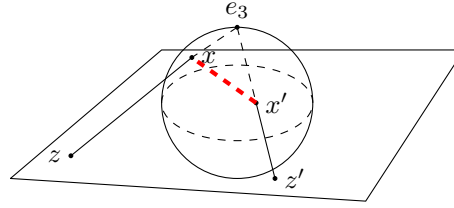


Figura 1.1: Métrica cordal.

Estos cálculos inducen la métrica buscada en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente manera

$$d_C(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases} \quad (1.20)$$

Como  $\mathbb{S}^2$  es un subespacio métrico de  $\mathbb{R}^3$ , esta distancia define en efecto una métrica en  $\hat{\mathbb{C}}$ . El término cordal proviene de que mide cuerdas en la esfera

$$d_C(z_1, z_2) = |\Pi(z_1) - \Pi(z_2)|.$$

Y esta métrica es una métrica de Riemann. Que se conoce como métrica cordal.

**Ejemplo 1.2.5.** Sea  $M$  la variedad definida por el siguiente conjunto:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} = \mathbb{H}.$$

Usamos la parametrización identidad, además  $T_p M = \mathbb{C}$ , con  $p \in M$ . Definimos la transformación:

$$\langle -, - \rangle_p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por:

$$\langle z_1, z_2 \rangle_p = \frac{1}{\text{Im}(p)} \text{Re}(z_1)\text{Re}(z_2) + \text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2).$$

Sea  $q = (q_1, q_2) \in M$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q = df_q e_i = e_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \text{ donde } x_1 = \text{Re}(z) \text{ y } x_2 = \text{Im}(z).$$

Luego  $g_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2} \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\text{Im}(z)} \delta_{ij},$$

son diferenciables en  $M$ . Por lo tanto,  $M$  es una variedad de Riemann con la expresión de la métrica:

$$G(p) = \frac{1}{\text{Im}(p)} (Id_2).$$

Esta métrica es conocida como la métrica hiperbólica en el semiplano superior  $M = \mathbb{H}$ . Sabemos además que el interior del círculo unitario  $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  se envía en  $\mathbb{H}$ , por medio de la transformación  $n : B^2 \longrightarrow \mathbb{H}$  definida por

$$n(z) = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

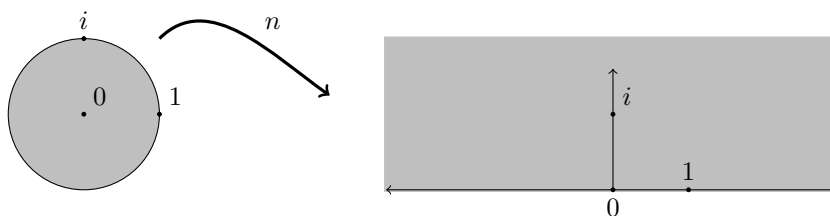


Figura 1.2: transformación de  $B^2$  en  $H$

Esta transformación es holomorfa con inversa holomorfa y por tanto conforme<sup>2</sup>, es decir, transformamos de manera conforme a  $B^2$  en  $H$ . Además podemos transferir nuestro elemento de longitud de arco

$$ds = \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$$

en  $H$  a un elemento de longitud de arco en  $B^2$  mediante  $n$ . Si consideramos una curva  $f : [a, b] \rightarrow B^2$  entonces la longitud de arco de esta curva en  $B^2$  es igual a la longitud de arco de la composición  $n \circ f : [a, b] \rightarrow H$  de  $n$  y  $f$ , es decir,

$$\begin{aligned} l_{B^2}(f) = l_H(n \circ f) &= \int_{n \circ f} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_b^a \frac{1}{\text{Im}(n \circ f(t))} |(n \circ f)'(t)| dt \\ &= \int_b^a \frac{1}{\text{Im}(n(f(t)))} |n'(f(t))| |f'(t)| dt \\ &= \int_f \frac{1}{\text{Im}(n(z))} |n'(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Haciendo cálculos obtenemos que

$$\text{Im}(n(z)) = \text{Im} \left( \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|-z - i|^2},$$

y

$$|n'(z)| = \frac{2}{|z + i|^2},$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\text{Im}(n(z))} |n'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

Luego la métrica de Riemann en  $B^2$  es la inducida por el elemento de longitud de arco

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} |dz|^2.$$

Supongamos que las funciones  $g_{ij} = g_{ji}(z)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  son tales, que la matriz  $G = (g_{ij})$  es no singular, pero la forma  $g_{ij}z_i z_j$  es indefinida. Entonces decimos que las funciones  $g_{ij}$  definen una métrica pseudo-Riemanniana. Como ejemplo se consideran a las métricas llamadas pseudo-Euclidianas

<sup>2</sup>Una transformación de variable compleja, holomorfa en un abierto  $A$ , es una transformación conforme en todos los puntos en los que la derivada es distinta de cero.

**Definición 1.2.6.** La métrica  $g_{ij} = g_{ij}(z)$  se llama pseudo-Euclidiana si existe un sistema de coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i = x_i(z)$ ,  $\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \right) \neq 0$ , tal que

$$g_{ij} = \frac{\partial x_1}{\partial z_i} \frac{\partial x_1}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial x_p}{\partial z_i} \frac{\partial x_p}{\partial z_j} - \frac{\partial x_{p+1}}{\partial z_i} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial z_j} - \dots - \frac{\partial x_n}{\partial z_i} \frac{\partial x_n}{\partial z_j}.$$

En estas coordenadas, un cambio  $g'_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $g'_{ii} = 1$  si  $i \leq p$  y  $g'_{ii} = -1$  si  $i \geq p + 1$ , lo que quiere decir que la matriz  $G$  viene dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Tales coordenadas  $x$  se llaman pseudo-euclidianas.

En  $\mathbb{R}^n$  se puede definir una métrica pseudo-euclidiana definiendo el producto escalar entre dos vectores  $\kappa = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mu = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , como

$$\langle \kappa, \mu \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \left( \sum_{i=p+1}^n x_i y_i \right),$$

para algún  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ . De esta manera las coordenadas  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  se vuelven pseudo-euclidianas y  $\mathbb{R}^n$  con esta métrica se llama espacio pseudo-euclidiano y se denota por  $\mathbb{R}_p^n$ .

**Ejemplo 1.2.7.** Sean  $(x, y, z)$  coordenadas pseudo-euclidianas en  $\mathbb{R}_1^3$  definamos las coordenadas pseudo-esféricas  $(\rho, \chi, \varphi)$  en  $\mathbb{R}_1^3$  así

$$\begin{aligned} x &= \rho \sinh \chi \\ y &= \rho \sinh \chi \cos \varphi \\ z &= \rho \sinh \chi \sin \varphi \quad -\infty < \rho < \infty, \quad 0 < \chi < \infty \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

Entonces  $x^2 - y^2 - z^2 = \rho^2 > 0$  y por lo tanto las coordenadas están definidas en la región donde se cumple la última desigualdad, que es la parte interior del cono  $x^2 = y^2 + z^2$ . En esta región

$$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \sinh^2 \chi d\varphi^2. \quad (1.21)$$

la métrica 1.21 se llama métrica pseudo-esférica.

**Definición 1.2.8.** Una variedad diferenciable  $M$  con una métrica de Riemann  $g$  (o Pseudo-Riemanniana) es llamada una **variedad de Riemann (o Pseudo-Riemanniana)**. Y se denota por el par  $(M, g)$ .

**Definición 1.2.9.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de Riemann. Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  es llamada una isometría si

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \text{para todo } p \in M, \quad u, v \in T_p M \quad (1.22)$$

**Definición 1.2.10.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de Riemann. Un mapeo diferenciable  $f : M \rightarrow N$  es llamada una isometría local en  $p \in M$  si existe una vecindad  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo que satisface 1.22.

Como se menciono antes, la exigencia de que nuestra variedad  $M$  tenga base numerable es para garantizar la existencia de las particiones diferenciables de la unidad, las cuales nos servirán para demostrar el teorema central de esta sección.

**Definición 1.2.11.** El soporte de una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es el siguiente conjunto:

$$\text{sop}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

**Definición 1.2.12.** Una familia  $\{U_i\}_{i \in I}$  de abiertos de  $M$  es localmente finita si todo punto de  $M$  tiene un entorno que intersecta a un número finito de elementos de  $\{U_i\}_{i \in I}$ .

Introducimos ahora el concepto de partición diferenciable de la unidad.

**Definición 1.2.13.** Una colección  $\{f_\alpha : M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}\}_{\alpha \in I}$  de funciones diferenciables se dice que es una partición (diferenciable) de la unidad si satisface las siguientes condiciones:

1. El soporte de  $f_\alpha$  es compacto y está contenido en un entorno coordinado.
2. La colección de los soportes  $\{\text{sop}(f_\alpha)\}$  es localmente finita.
3. Para todo punto  $p$  de  $M$ ,  $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) = 1$ .

Se dice que una partición de la unidad  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  está subordinada a un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  si para cada  $\alpha \in I$  existe un  $i$  tal que  $\{\text{sop}(f_\alpha)\} \subset U_i$ .

Note que en (3), para cada  $p \in M$ ,  $f_\alpha(p) = 0$  excepto para un número finito de  $i$ 's de modo que  $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p)$  es una suma finita para cada  $p$ .

Las particiones de la unidad se utilizan para construir soluciones globales a los problemas a partir de las soluciones locales.

Culminamos esta sección con el teorema que garantiza la existencia de una métrica de Riemann en una variedad diferenciable, el camino para obtener la demostración se basa en tres lemas que son aplicaciones sencillas de las enunciadas particiones diferenciables de la unidad y dos teoremas los cuales, uno garantizan la existencia de tales funciones en la variedad y el otro garantiza que podemos extender funciones diferenciables de un conjunto cerrado en la variedad a toda la variedad.

Los primeros dos lemas son validos sin el supuesto que  $M$  es paracompacta mientras que el tercero es valido para cualquier espacio topológico paracompacto. Las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [14, Apéndice (Particiones de la unidad) Pag.272-274]

**Lema 1.2.14.** Para cualesquiera sea  $p \in M$  y para cada vecindad  $U$  de  $p$ , existe una función diferenciable (de clase  $C^\infty$ ) en  $M$  y tal que

1.  $0 \leq f \leq 1$  en  $M$ ,
2.  $f(p) = 1$  y
3.  $f = 0$  fuera de  $U$ .

**Lema 1.2.15.** Para cada subconjunto compacto  $K$  de  $M$  y para cada vecindad  $U$  de  $K$ , existe una función diferenciable  $f$  en  $M$  tal que

1.  $f \geq 0$  en  $M$ ;
2.  $f > 0$  en  $K$ ;
3. y  $f = 0$  fuera de  $U$ .

**Lema 1.2.16.** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto localmente finito de  $M$ . Entonces existe un refinamiento abierto localmente finito  $\{V_i\}_{i \in I}$  de  $\{U_i\}_{i \in I}$  tal que  $\bar{V}_i \subset U_i$  para todo  $i \in I$

Ahora estamos en posición de enunciar los dos teoremas prometidos, y cuyas demostraciones se obtienen utilizando los lemas anteriores.

**Teorema 1.2.17.** Sea  $\{U_i\}$  un cubrimiento abierto localmente finito de una variedad paracompacta  $M$  tal que cada  $U_i$  tiene clausura  $\bar{U}_i$  compacta. Entonces existe una partición de la unidad  $f_i$  subordinada a  $U_i$

Sea  $f$  una función definida en un subconjunto  $F$  de una variedad  $M$ . Decimos que  $f$  es diferenciable en  $F$  si, para cada punto  $p \in F$ , existe una función diferenciable  $f_p$  en una vecindad abierta  $V_p$  de  $p$  tal que  $f = f_p$  en  $F \cap V_p$ .

**Teorema 1.2.18.** *Sea  $F$  un subconjunto cerrado de una variedad paracompacta  $M$ . Entonces toda función diferenciable  $f$  definida en  $F$  puede ser extendida a una función diferenciable en  $M$*

Con estos resultados en mente podemos ya enunciar y demostrar el teorema central de esta sección

**Teorema 1.2.19.** *Una variedad diferenciable  $M$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 0$  de dimensión  $n$  tiene una métrica de Riemann.*

*Demostración.* Sea  $\{f_\alpha\}$  una partición diferenciable de la unidad en  $M$  subordinada al cubrimiento  $\{V_\alpha\}$  de  $M$  formado por vecindades coordenadas. Esto significa que  $\{V_\alpha\}$  es un cubrimiento localmente finito y  $\{f_\alpha\}$  es una familia de funciones diferenciables en  $M$  que satisfacen:

1.  $f_\alpha \geq 0$ ,  $f_\alpha = 0$  en el complemento del conjunto cerrado  $\bar{V}_\alpha$ .
2.  $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) = 1$  para todo  $p \in M$ .

Podemos definir métricas de Riemann  $\langle -, - \rangle^\alpha$  en cada  $V_\alpha$ : la métrica inducida por el sistema de coordenadas locales. De aquí que si establecemos la forma bilineal en  $T_p M$  por

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha, \quad (1.23)$$

para toda  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$ . Tenemos que para cada  $p \in M$ , solo un número finito de  $\alpha \in I$ ,  $f_\alpha(p) \neq 0$ , entonces la suma de la ecuación 1.23 es finita. Y por construcción es simétrica (ya que cada  $\langle u, v \rangle_p^\alpha$  lo es). Ahora para ver que  $\langle -, - \rangle_p$  es definida positiva, hay que notar que cada  $\langle u, v \rangle_p^\alpha$  lo es. Sea  $I'$  el conjunto de todas las  $\alpha \in I$  tales que  $f_\alpha(p) \neq 0$ . Por definición de una partición de la unidad,  $0 < f_\alpha(p) \leq 1$ . Por lo tanto, para toda  $u \in T_p M$ ,  $\langle u, u \rangle_p \geq 0$ . Además, si  $\langle u, u \rangle_p = 0$ , entonces al menos un sumando de 1.23 es cero. De aquí que debe existir un  $\alpha \in I$  tal que  $\langle u, u \rangle_p^\alpha = 0$ , ya que  $\langle -, - \rangle_p^\alpha$  es definida positiva, tenemos que  $u = 0$ . De aquí que  $\langle u, u \rangle_p$  es definida positiva y por tanto una métrica de Riemann.  $\square$

### 1.3. Transformaciones de Möbius en $\mathbb{R}^n$

En las secciones anteriores se repasaron dos resultados muy importantes sobre las variedades diferenciables. El primero es, que cualquier variedad esta inmersa en el espacio  $\mathbb{R}^n$  para un  $n$  adecuado, y el segundo es, que toda variedad diferenciable acepta una métrica de Riemann. Estos hechos permiten hacer geometría en las variedades diferenciables, pero el objetivo de este trabajo es introducirnos en la geometría conforme y para llevar acabo este propósito necesitamos de aquellas transformaciones de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo con la propiedad de ser conformes, es decir, transformaciones con la propiedad de preservar ángulos. Por esta razón es que se dedica esta sección para estudiar a las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{R}^n$ , que son las adecuadas para nuestro objetivo (esto se aclara de manera precisa en el capítulo 3).

Ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que desempeñan un papel importante en el presente trabajo son:

$$\begin{aligned} H^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \\ B^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \\ S^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \end{aligned}$$

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

y

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = t\} \cup \{\infty\}.$$

Estos conjuntos son, el  $n$ -espacio hiperbólico, la  $n$ -bola unitaria, la  $(n-1)$ -esfera unitaria, la esfera con centro en  $a \in \mathbb{R}^n$ , y de radio  $r > 0$  y el plano con  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  y donde  $\langle -, - \rangle$  denota el producto punto usual en  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente.

También, es conveniente introducir el  $n$ -espacio real extendido:  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Este espacio es homeomorfo a  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (véase ejemplo 1.1.18). Suponemos que  $\hat{\mathbb{R}}^n$  es encajado en  $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$  en la forma del  $n$ -plano extendido  $\{x \in \hat{\mathbb{R}}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ . Este puede ser transformado de manera biyectiva sobre la esfera  $S^n$  haciendo que cada punto  $\bar{x} = (x, 0)$  del plano  $\hat{\mathbb{R}}^n \subset \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$  le corresponda el único punto  $\pi(\bar{x})$  de intersección de la línea recta que pasa por  $\bar{x}$  y  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  con la esfera  $S^n$ . Esta transformación  $\pi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$  es llamada la *proyección estereográfica*. La cual puede ser escrita en la forma  $\pi(\bar{x}) = \bar{x} + t \cdot (e_{n+1} - \bar{x})$ , donde  $t \in \mathbb{R}$  es el número tal que  $|\pi(\bar{x})| = 1$ . Explícitamente,

$$\pi(x) = \begin{cases} \left( \frac{2x_1}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right) & \text{si } x \neq \infty \\ (0, \dots, 0, 1) & \text{si } x = \infty. \end{cases} \quad (1.24)$$

Se observa en particular que  $\pi$  es inyectiva, lo cual permite dotar a  $\hat{\mathbb{R}}^n$  de una métrica, la llamada métrica cordal:  $d_C(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$  (comparar con el ejemplo 1.2.4). Lo que en realidad estamos haciendo, es considerar la longitud de la cuerda que une a las proyecciones de  $x$  e  $y$ . Se puede probar, aunque no se hará aquí, que la métrica cordal tiene una expresión explícita en términos de la métrica Euclidiana, es decir, para cada  $x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$  se tiene

$$d_C(x, y) := \begin{cases} \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, & \text{si } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}, & \text{si } y = \infty. \end{cases} \quad (1.25)$$

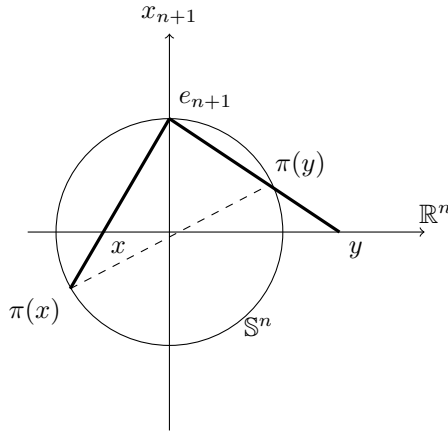


Figura 1.3: Proyección estereográfica.

**Observación 1.3.1.** Veamos que la topología así inducida en  $\mathbb{R}^n$  coincide con la topología inducida por la métrica Euclidiana. Para esto, hay que probar que la transformación identidad

$$Id : \mathbb{R}_E^n \longrightarrow \mathbb{R}_C^n,$$

es un homeomorfismo, donde  $\mathbb{R}_E^n$  es el espacio Euclidiano de dimensión  $n$  provisto de la métrica Euclidiana y  $\mathbb{R}_C^n$  es el mismo espacio con la métrica cordal.

Sean  $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$  una sucesión y un punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , si

$$|x_k - x| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

entonces

$$|\pi(x_k) - \pi(x)| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

ya que  $\pi$  es continua, lo cual prueba que la transformación  $Id$  es continua también. Ahora  $\pi$  tiene como inversa al transformación  $\psi : S^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right), & \text{si } x \neq (0, \dots, 0, 1) \\ \infty, & \text{si } x = (0, \dots, 0, 1) \end{cases}$$

es también continua. Ahora por la continuidad de  $\psi$ , si

$$d_C(x_k, x) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces  $|\pi(x_k) - \pi(x)| \rightarrow 0$  y

$$|\psi(\pi(x_k)) - \psi(\pi(x))| = |x_k - x| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por tanto  $Id$  es un homeomorfismo.

Ahora se considera a la esfera  $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$  con  $a \in \mathbb{R}^n$ , y  $0 < r$ . La reflexión (o inversión) en  $S(a, r)$  es la transformación  $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\varphi(x) = a + \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a). \quad (1.26)$$

En el caso especial  $S(0, 1) (= \mathbb{S}^{n-1})$ , esta fórmula se reduce a

$$\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Si se denota esta reflexión especial por  $x^*$ , se obtiene que la reflexión en cualquier  $S(a, r)$  es de la forma

$$\varphi(x) = a + r^2(x - a)^*.$$

Esta transformación no está definida para  $x = a$ . Sin embargo,  $\varphi$  se puede extender a  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Como  $|\varphi(x)| \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow a$  es natural definir a  $\varphi(a) = \infty$ , y  $\varphi(\infty) = a$ .

Ahora, se considera el plano  $P(a, t) \subset \mathbb{R}^n$ . Por definición,  $\infty$  se encuentra en todos los planos. La reflexión en  $P(a, t)$  es la transformación  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida de la manera habitual, es decir,

$$\psi(x) = x + \lambda a,$$

donde se elige el parámetro real  $\lambda$ , de modo que  $\frac{1}{2}(x + \psi(x))$  está en  $P(a, t)$ . Esto da la fórmula explícita

$$\psi(x) = x - 2[\langle x, a \rangle - t]a^*, \quad (1.27)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , y es claro que  $\psi(\infty) = \infty$ . En [8, Pag.22], se muestra que  $\varphi$  y  $\psi$  son continuas con respecto a la métrica cordal en  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Ambas reflexiones pueden interpretarse geoméricamente. En el caso de la esfera, si  $x \neq a$ ,  $\infty$ ,  $\varphi(x)$ , es el único punto en la semi recta determinada por  $a$  y  $x$  tal que

$$|x - a| \cdot |\varphi(x) - a| = r^2.$$

Para el plano, si  $x \neq \infty$ ,  $\psi(x)$ , es el único punto en la recta ortogonal al plano  $P(a, t)$  que pasa por  $x$ , tal que  $\frac{1}{2}(x + \psi(x)) \in P(a, t)$ . Además, si escogemos al vector  $a$  tal que  $|a| = 1$ , el parámetro  $t$  es la distancia del plano al origen.

Debido al isomorfismo  $\hat{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ , podemos pensar en el plano  $P(a, t)$  como una esfera que pasa por  $\infty$ . Con esta convención nos referimos indistintamente a  $S(a, r)$  y  $P(a, t)$  como esferas.

**Definición 1.3.2.** Una transformación de Möbius en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  es la composición de un número finito de reflexiones en esferas.

Claramente, cada transformación de Möbius en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  es un homeomorfismo de  $\hat{\mathbb{R}}^n$  en si mismo. La composición de dos transformaciones de Möbius es de nuevo una transformación de Möbius y de aquí que la inversa de una transformación de Möbius es también una transformación de Möbius ya que si  $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_m$  (donde cada  $\varphi_i$  es una reflexión) entonces  $\varphi^{-1} = \varphi_m^{-1} \circ \dots \circ \varphi_1^{-1}$ . Finalmente para cada reflexión  $\varphi$  se tiene que  $\varphi^2(x) = x$  y así la transformación identidad es una transformación de Möbius. De aquí obtenemos la siguiente definición.

**Definición 1.3.3.** El grupo de transformaciones de Möbius en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  es llamado el Grupo General de Möbius, y es denotado por  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ .

**Ejemplo 1.3.4.** La traslación  $T(x) = x + a$  con  $a \in \mathbb{R}^n$ , es una transformación de Möbius, pues es la composición de la reflexión en  $P(a, 0)$  seguida de la reflexión en  $P(a, \frac{1}{2}|a|^2)$ . En efecto si denotamos como  $\psi_1$  y  $\psi_2$  a cada una de estas reflexiones respectivamente tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \psi_1(x) &= \psi_2(x - 2\langle x, a \rangle a^*) \\ &= x - 2\langle x, a \rangle a^* - 2[\langle x - 2\langle x, a \rangle a^*, a \rangle - \frac{1}{2}|a|^2]a^* \\ &= x - 2\langle x, a \rangle a^* - 2\langle x, a \rangle a^* + 4\langle x, a \rangle \langle a^*, a \rangle a^* + |a|^2 a^* \\ &= x + a. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.5.** La homotecia  $T(x) = kx$ , con  $0 < k$  es también una transformación de Möbius, puesto que si consideramos ahora las reflexiones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en  $S(0, 1)$  y en  $S(0, \sqrt{k})$  respectivamente, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1(x) &= \varphi_2\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\ &= k \frac{x}{|x|^2} \frac{|x|^4}{|x|^2} \\ &= kx. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.6.** Para el caso particular de  $\mathbb{R}^2$  que a su vez podemos identificar con  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  tenemos que la rotación  $T(z) = e^{i\theta}z$ , con  $\theta \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , es la composición de la reflexión en  $P(i, 0)$  seguida de la reflexión en  $P(ie^{i\frac{\theta}{2}}, 0)$ .

**Ejemplo 1.3.7.** De igual manera la transformación  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $T(z) = \frac{1}{z}$ , es la composición de la reflexión en  $P(i, 0)$  seguida de la reflexión en  $S(0, 1)$ .

**Ejemplo 1.3.8.** Si  $\varphi$  y  $\varphi^*$  denotan las reflexiones en  $S(a, r)$  y  $S(0, 1)$  respectivamente y si  $\psi(x) = rx + a$ , entonces

$$\varphi = \psi\varphi^*\psi^{-1}. \quad (1.28)$$

Como  $\psi$  es una transformación de Möbius, observamos que cualesquiera dos reflexiones en esferas son conjugadas en el grupo  $\text{GM}(\mathbb{R}^2)$ .



es una transformación continua del vector  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  y de aquí que sea una transformación continua de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Como  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  es conexo (puesto que asumimos que  $n \geq 2$ ) entonces  $D$  tiene dos posibilidades, ser positivo para cada  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  o negativo para cada  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Si  $a = e_1$ , entonces  $\psi$  se convierte en

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (-x_1 + 2t, x_2, \dots, x_n),$$

y en este caso  $D = -1$ . Concluimos entonces que para cada  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $D < 0$  y así cada reflexión en el plano invierte la orientación.

Un argumento similar nos sirve para el caso de las reflexiones en esferas. Primero, sea  $\phi$  la reflexión en  $S(0, 1)$ . Entonces para  $x \neq 0$ , los elementos de la matriz de  $\phi'(x)$  son

$$\frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4},$$

así

$$\phi'(x) = |x|^{-2}(I - 2Q_x).$$

Esto muestra (como antes) que  $\phi$  es conforme en cada punto no nulo  $x$ .

Ahora sea  $D(x)$  el  $\det[\phi'(x)]$ . Como  $\phi(\phi(x)) = x$ , la regla de la cadena nos da

$$D(\phi(x))D(x) = 1$$

y así exactamente como arriba,  $D$  tiene dos posibilidades, ser positivo para cada  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  o negativo para cada  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Tomamos  $x = e_1$ , entonces  $D(e_1) = -1$  y así  $D(x) < 0$  para  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Por el ejemplo 1.3.8 tenemos que cualesquiera dos reflexiones son conjugadas en  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^2)$  por tanto mediante conjugación como en 1.28 tenemos el caso general, que demuestra lo que queríamos.  $\square$

Con el Teorema anterior se observa que la composición de un número par de reflexiones en esferas preserva orientación.

Consideremos ahora las transformaciones de Möbius  $f \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  que son directamente conformes (i.e., son conformes y preservan la orientación en  $\hat{\mathbb{R}}^n$ ), definimos.

**Definición 1.3.13.** *El subgrupo de  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  de las transformaciones de Möbius directamente conformes es llamado el Grupo de Möbius en  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Este grupo es denotado por  $\text{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ .*

Se calcula una simple pero útil fórmula. Si  $\sigma$  es la reflexión en la esfera  $S(a, r)$  entonces

$$\begin{aligned} |\sigma(x) - \sigma(y)| &= r^2 |(y-a)^* - (x-a)^*| \\ &= r^2 \left[ \frac{1}{|y-a|^2} - \frac{2\langle(x-a), (y-a)\rangle}{|x-a|^2|y-a|^2} + \frac{1}{|x-a|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{r^2 |y-x|}{|x-a||y-a|}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Esto muestra que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sigma(x+h) - \sigma(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x-a|^2},$$

y esto mide el aumento local de  $\sigma$  en  $x$ .

Puesto que nuestro interés es geométrico, valdría la pena revisar algunas propiedades geométricas de las transformaciones de Möbius, una de las más importantes, es la siguiente propiedad

**Teorema 1.3.14.** *Sea  $\varphi$  alguna transformación de Möbius y  $\Sigma$  cualquier esfera. Entonces  $\varphi(\Sigma)$  es también una esfera.*

La demostración de esta propiedad puede consultarse en [8, Pag. 28], pero las ideas de esta demostración son las mismas a el caso  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

Cualquier discusión detallada de la geometría de las transformaciones de Möbius depende esencialmente del teorema 1.3.14 y el hecho de que las transformaciones de Möbius son conformes. Ahora para toda  $n$ , podemos identificar de manera natural a  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mediante

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto ((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1}).$$

La inclusión  $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  puede escribirse entonces como  $i(x) = (x, 0)$ . Por comodidad, escribiremos  $i(x) = \tilde{x}$ .

Consideremos la reflexión  $\varphi$  en la esfera  $S(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Definimos  $\tilde{\varphi}$  como la reflexión en  $S(\tilde{a}, r)$ . De manera análoga, dada la reflexión  $\psi$  en el plano  $P(a, t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , sea  $\tilde{\psi}$  la reflexión en  $P(\tilde{a}, t)$ . Se tiene entonces para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(i(x)) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) &= \tilde{a} + \left( \frac{r}{|\tilde{x} - \tilde{a}|} \right)^2 (\tilde{x} - \tilde{a}) = \left( a + \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a), 0 \right) \\ &= (\varphi(x), 0) = i(\varphi(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(i(x)) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) &= \tilde{x} - 2[\langle \tilde{x}, \tilde{a} \rangle - t] \frac{\tilde{a}}{|\tilde{a}|^2} = (x - 2[\langle x, a \rangle - t]a^*, 0) \\ &= (\psi(x), 0) = i(\psi(x)). \end{aligned}$$

Ahora, si  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \tilde{a} + \left( \frac{r}{|x - \tilde{a}|} \right)^2 (x - \tilde{a}) \\ \tilde{\psi}(x) &= x - 2[\langle x, \tilde{a} \rangle - t] \frac{\tilde{a}}{|\tilde{a}|^2}. \end{aligned}$$

Si se denota mediante  $[\varphi(x)]_j$  a la  $j$ -ésima coordenada de  $\varphi$ , se sigue de las fórmulas anteriores que

$$[\tilde{\varphi}]_{n+1} = \frac{r^2 x_{n+1}}{|x - \tilde{a}|^2}, \quad (1.32)$$

y

$$[\tilde{\psi}(x)]_{n+1} = x_{n+1}, \quad (1.33)$$

respectivamente. Por tanto, el plano  $x_{n+1} = 0$  y los semi espacios  $x_{n+1} > 0$  y  $x_{n+1} < 0$  son invariantes bajo  $\tilde{\varphi}$  y  $\tilde{\psi}$ .

En general, consideremos  $g \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ ,  $g = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_m$ , donde  $\varphi_j$  es la reflexión en una esfera. La transformación  $\tilde{g} \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ , definida como  $\tilde{g} = \tilde{\varphi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\varphi}_m$ , extiende a  $g$ . Además, esta extensión es única, pues si  $\tilde{g}_1$  y  $\tilde{g}_2$  extienden a  $g$ , entonces  $(\tilde{g}_2)^{-1} \tilde{g}_1$  fija al plano  $x_{n+1} = 0 (= \mathbb{R}^n)$  y mantiene invariante a  $H^{n+1}$ . Se sigue del teorema 3.2.4 que se encuentra en [8, Pág.31], que son iguales.

**Definición 1.3.15.** *La extensión de Poincaré de  $g \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ ,  $g = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_m$  es*

$$\tilde{g} = \tilde{\varphi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\varphi}_m \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1}).$$

La construcción anterior (que se debe a Henri Poincaré) muestra que cualquier transformación de Möbius  $g$  en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  tiene una extensión natural a una transformación  $\tilde{g}$  en  $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ . Por tanto, podemos identificar a  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  como un subgrupo de  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$ .

La construcción tiene una ventaja adicional: Permite demostrar usando 1.32 que

$$\frac{|y - x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}}, \quad (1.34)$$

es invariante bajo cualquier extensión de Poincaré. De este invariante, se sigue que las extensiones de Poincaré son isometrías del espacio hiperbólico  $H^{n+1}$  con la métrica hiperbólica  $\rho$  dada por el elemento de longitud de arco

$$ds = \frac{|dx|}{x_{n+1}}. \quad (1.35)$$

La demostración de estas afirmaciones puede consultarse en [8, Pág. 34].

**Observación 1.3.16.** Consideremos ahora a  $\varphi$  la reflexión en  $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ . Para  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\varphi_0(x) = e_{n+1} + \frac{2}{|x - e_{n+1}|^2}(x - e_{n+1}).$$

Ahora, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tilde{x}) &= e_{n+1} + \frac{2}{1 + |\tilde{x}|^2}((x_1, \dots, x_n, 0) - (0, \dots, 0, 1)) \\ &= \left( \frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que la restricción de  $\varphi_0$  a  $\mathbb{R}^n$  es la proyección estereográfica considerada en 1.24.

La realización de la proyección estereográfica como una reflexión conduce a una prueba fácil de la fórmula para la métrica cordal dada en 1.25. Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$|x - e_{n+1}| = 1 + |x|^2,$$

y esto junto con 1.31 se obtiene (como antes) que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})| \\ &= |\varphi_0(\tilde{x}) - \varphi_0(\tilde{y})| \\ &= \frac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

**Observación 1.3.17.** Volvamos ahora a la reflexión  $\varphi_0$  definida anteriormente. Si  $x \in \hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ , entonces

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)|^2 &= 1 + \frac{4}{|x - e_{n+1}|^2} + \frac{4\langle e_{n+1}, (x - e_{n+1}) \rangle}{|x - e_{n+1}|^2} \\ &= 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}: \end{aligned} \quad (1.36)$$

esto muestra que  $\varphi_0$  manda al semi espacio  $x_{n+1} < 0$  en  $B^{n+1}$ . Si componemos previamente con la reflexión  $\sigma$  en el plano  $x_{n+1} = 0$ , entonces  $\varphi = \varphi_0 \circ \sigma$  manda a el plano  $x_{n+1} = 0$  sobre  $\mathbb{S}^n$  y a  $H^{n+1}$  sobre  $B^{n+1}$ . También, encontramos de 1.31 que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y - x|} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\varphi_0 \circ \sigma(y) - \varphi_0 \circ \sigma(x)|}{|y - x|} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\varphi_0(\sigma(y)) - \varphi_0(\sigma(x))|}{|\sigma(y) - \sigma(x)|} \\ &= \frac{2}{|\sigma(x) - e_{n+1}|^2}. \end{aligned}$$

Si ahora nos fijamos en 1.36, pero con  $x$  remplazado por  $\sigma(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi(x)|^2 &= 1 - |\varphi_0(\sigma(x))|^2 \\ &= \frac{4x_{n+1}}{|\sigma(x) - e_{n+1}|^2}, \end{aligned}$$

y así tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y - x|} = \frac{1 - |\varphi(x)|^2}{2x_{n+1}}.$$

Por lo tanto, se tiene que la métrica hiperbólica  $\rho$  inducida por 1.35 en  $H^{n+1}$  se transforma en la métrica inducida por el elemento de longitud de arco

$$ds = \frac{2 |dx|}{1 - |x|^2}, \quad (1.37)$$

en  $B^{n+1}$  y que las isometrías  $\psi$  de  $H^{n+1}$  transformadas por  $\psi \mapsto \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$  a isometrías de  $B^{n+1}$  con esta métrica. Por tanto, si  $g \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ , entonces  $\varphi \circ \tilde{g} \circ \varphi^{-1}$  mantiene invariante a

$$\varphi(H^{n+1}) = B^{n+1}.$$

Por otra parte, si  $f \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  es tal que  $f(B^{n+1}) = B^{n+1}$ , entonces  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  mantiene invariante a  $H^{n+1}$ . Sea ahora  $h = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi|_{\hat{\mathbb{R}}^n}$ . Ahora se observa que  $\tilde{h}$  y  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  extienden ambas a  $h$ , y por la unicidad de la extensión,  $\tilde{h} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ . Se sigue por tanto que  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  es la extensión de Poincaré de alguna  $h \in \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ , y  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  es conjugado en  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$  al subgrupo que mantiene invariante a  $B^{n+1}$ . Como además  $\varphi$  es composición de un número par de reflexiones, se sigue que  $\text{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  es conjugado en  $\text{M}(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$  al subgrupo de transformaciones de Möbius directamente conformes que mantienen invariante a  $B^{n+1}$ .

**Definición 1.3.18.** Se denotará a los grupos conjugados a  $\text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  y  $\text{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$  mediante  $\pi = \varphi_0 \circ \sigma$ , como  $\text{GM}(B^{n+1})$  y  $\text{M}(B^{n+1})$ , respectivamente.

El siguiente resultado será de mucha utilidad para la demostración de el teorema de Liouville. Puede consultarse la demostración en [8, Pág.38].

**Teorema 1.3.19.** Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(B^n) = B^n$ . Entonces  $\varphi(x) = xA$ , con  $A$  una matriz ortogonal.

Se sigue de este teorema el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.20.** Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene:

1.  $O(n+1) \subset \text{GM}(B^{n+1}) \approx \text{GM}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ .
2.  $SO(n+1) \subset \text{M}(B^{n+1}) \approx \text{M}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ .

Se culmina esta sección estableciendo la siguiente caracterización de las transformaciones de Möbius, cuya demostración puede consultarse en [8, Pág.41], la cual es una forma general de estas transformaciones

**Teorema 1.3.21.** Sea  $\phi$  una transformación de Möbius.

1. Si  $\phi(B^n) = B^n$ , entonces

$$\phi(x) = A[\sigma(x)],$$

donde  $\sigma$  es una reflexión en alguna esfera ortogonal a  $S^{n-1}$  y  $A$  es una matriz ortogonal.

2. Si  $\phi(\infty) = \infty$ , entonces

$$\phi(x) = r(Ax) + x_0,$$

donde  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  es una matriz ortogonal.

3. Si  $\phi(\infty) \neq \infty$ , entonces

$$\phi(x) = r(\sigma(x))A + x_0,$$

para algún  $r, x_0, A$  y alguna reflexión  $\sigma$



## Capítulo 2

# Estructuras Conformes

En este capítulo se estudia geometría en el sentido clásico: las geometrías que aquí se presentan serán análogos a la geometría euclidiana estándar, con conceptos de líneas rectas o geodésicas, ángulos y planos, una medida de la distancia, y un alto grado de homogeneidad. Es decir, se va a capturar la estructura geométrica en una variedad utilizando una métrica de Riemann, puesto que esta permite tener conceptos métricos en la variedad, además de que se puede obtener el conjunto de isometrías en la variedad, que tiene estructura de grupo. Es en este donde se requiere la homogeneidad, es decir, para cualesquiera dos puntos de la variedad, debe haber al menos una isometría que envíe uno en otro. Además de la homogeneidad, las geometrías a considerar en este capítulo deben satisfacer otra propiedad, la isotropía. Un espacio es isotrópico si, al fijar un punto, son equivalentes todas sus direcciones por él.

Con la homogeneidad y la isotropía se puede hacer geometría, pero si se hace actuar el grupo de isometrías en la variedad, y se presta atención en los invariantes bajo esta acción obtendremos más estructura geométrica y así utilizar los enfoques geométricos de Riemann y Klein para hacer geometría conforme.

Se comienza por estudiar la conformidad en la superficies, pasando también por los espacios vectoriales reales de dimensión finita, para con esto poder estudiar la conformidad en variedades, cabe destacar que solo se está trabajando con la geometría conforme, pero hay ejemplos de geometrías no conformes, en las cuales no se profundiza, pero si se hará mención de algunas de ellas (al menos las de dimensión 3).

### 2.1. La forma conforme de la métrica en una Superficie

Se comienza con el estudio de estructuras conformes en las superficies.

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable regular parametrizada por

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v), \quad (2.1)$$

donde  $q = (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  es un dominio de Jordan. Haciendo  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  y  $p = (x, y, z) = \varphi(q)$ , como ya se mencionó en los comentarios acerca de la definición 1.1.2 la regularidad de  $S$  significa que la diferencial  $d\varphi(q) : T_q\mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\mathbb{R}^3$  es uno a uno. Entonces, como ya se observó el producto interno (escalar) en  $\mathbb{R}^3$  induce un producto interno  $\langle -, - \rangle_p$  en cada plano tangente  $T_pS := d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$  de una superficie regular.

**Definición 2.1.1.** *La primera forma fundamental (forma cuadrática)  $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0$  toma la forma;*

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2, \quad (2.2)$$

respecto a la base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$  de  $T_pS$ , donde  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ ,  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$  y  $W^2 := EG - F^2 > 0$ .

**Teorema 2.1.2.** Si  $E, F, G$  funciones analíticas en  $D$  (representables en series de potencias en  $(u, v)$ ) valuadas en  $\mathbb{R}$ . Entonces existen nuevas coordenadas  $w, z$  para  $S$  en términos de las cuales la métrica inducida 2.2 toma la forma

$$ds^2 = f(w, z)(dw^2 + dz^2). \quad (2.3)$$

*Demostración.* Sea  $S$  la superficie regular parametrizada por  $x = \varphi_1(u, v)$ ,  $y = \varphi_2(u, v)$ ,  $z = \varphi_3(u, v)$ , donde  $q = (u, v)$  puede variar en cualesquiera región de Jordan del plano. Supongamos que toda función  $\varphi_i$  con  $i = 1, 2, 3$  es de clase  $C^\infty$ . Una curva  $\alpha$  en  $S$  dada por  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  con  $a \leq t \leq b$ , y en términos del vector  $\bar{x} = (x, y, z)$  el elemento de longitud de arco a lo largo de  $\alpha$  esta dado por

$$ds^2 = \langle d\bar{x}, d\bar{x} \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (2.4)$$

Como se vio en 1.10. Queremos un sistema especial de coordenadas  $(w, z)$  en lugar de  $(u, v)$  en términos de los cuales el elemento de la longitud de arco es

$$ds^2 = f(w, z)(dw^2 + dz^2). \quad (2.5)$$

Estas coordenadas se pueden encontrar en la proximidades de cualquier punto de  $S$ , ya que  $W^2 = EG - F^2$  es siempre positivo, así se puede factorizar 2.4 para obtener

$$ds^2 = \left( \sqrt{E}du + \frac{F+iW}{\sqrt{E}}dv \right) \left( \sqrt{E}du + \frac{F-iW}{\sqrt{E}}dv \right). \quad (2.6)$$

Si podemos encontrar un factor de integración  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$  tal que

$$\sigma \left( \sqrt{E}du + \frac{F+iW}{\sqrt{E}}dv \right) = dw + idz, \quad (2.7)$$

entonces

$$\bar{\sigma} \left( \sqrt{E}du + \frac{F-iW}{\sqrt{E}}dv \right) = dw - idz \quad (2.8)$$

y multiplicando estas dos ecuaciones tenemos que

$$|\sigma|^2 ds^2 = dw^2 + dz^2, \quad ds^2 = |\sigma|^{-2} dw^2 + dz^2. \quad (2.9)$$

Hacemos  $|\sigma|^{-2} = f(w, z)$  esta transformación sirve. Puesto que 2.8 es el conjugado (en el sentido de los números complejos) de 2.7, nuestro problema ahora es el de la búsqueda de las transformaciones  $w(u, v)$ ,  $z(u, v)$  y  $\sigma(u, v)$  que satisfagan la ecuación

$$\sigma \left( \sqrt{E}du + \frac{F+iW}{\sqrt{E}}dv \right) = dw + idz = \left( \frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv, \quad (2.10)$$

o equivalentemente

$$\sigma\sqrt{E} = \frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \sigma \left( \frac{F+iW}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (2.11)$$

Eliminando a  $\sigma$ , tenemos

$$(F+iW) \left( \frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial z}{\partial u} \right) = E \left( \frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial z}{\partial v} \right), \quad (2.12)$$

que es equivalente a tener

$$F \frac{\partial w}{\partial u} - W \frac{\partial z}{\partial u} = E \frac{\partial w}{\partial v}, \quad W \frac{\partial w}{\partial u} + E \frac{\partial z}{\partial u} = E \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{F \frac{\partial w}{\partial u} - E \frac{\partial w}{\partial v}}{W}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{G \frac{\partial w}{\partial u} - F \frac{\partial w}{\partial v}}{W}, \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{E \frac{\partial z}{\partial v} - F \frac{\partial z}{\partial u}}{W}, & \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{F \frac{\partial z}{\partial v} - G \frac{\partial z}{\partial u}}{W}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde las ecuaciones del lado derecho de 2.13 se siguen de la multiplicación de 2.12 por  $(F - iW)$ . Si ahora también exigimos que las funciones  $w, z$  tengan segundas derivadas parciales continuas, tendremos que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u},$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u},$$

y entonces de 2.13 tenemos que  $L(w) = 0$ ,  $L(z) = 0$  donde  $L$  es el operador diferenciable dado por

$$L = \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{F \frac{\partial}{\partial u} - E \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{F \frac{\partial}{\partial v} - G \frac{\partial}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right]. \quad (2.14)$$

La ecuación diferencial parcial  $L(f) = 0$  es conocida como la ecuación de **Beltrami**, y el operador  $L$  como el operador de **Beltrami**. Por lo tanto el resultado es que  $w, z$  son soluciones de la ecuación de Beltrami. Por lo tanto la función  $\sigma$  es determinada usando 2.11. Con esto concluimos la demostración.  $\square$

A las coordenadas con esta propiedad se les llama *isotermas o conformes*. De acuerdo a lo anterior,  $f$  es diferenciable con  $f(w, z) > 0$  en  $D$ .

**Ejemplo 2.1.3.** Consideremos el plano complejo  $\mathbb{C}$  con coordenadas  $z = x + iy$ . La métrica Euclidiana es  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}$  sin duda tiene la forma conforme. dado que las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{C}$  son analíticas (por tanto conformes) debemos esperar que van a preservar la forma conforme de la métrica Euclidiana; y de hecho si

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

es cualquier transformación de Möbius, entonces

$$dw = \left( \frac{1}{(cz + d)^2} \right) dz,$$

así que

$$ds^2 = dzd\bar{z} = |cz + d|^{-4} dw d\bar{w},$$

como se esperaba.

**Definición 2.1.4.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$ . Un difeomorfismo  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  es llamado una **transformación conforme** si para todo  $p \in S_1$  y todo  $v_1, v_2 \in T_p S_1$  tenemos

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p, \quad (2.15)$$

donde  $\lambda^2$  es una función diferenciable que no se anula en  $S_1$ ; en tal caso las superficies  $S_1$  y  $S_2$  son llamadas **conformes**.

**Definición 2.1.5.** Una transformación  $\varphi : V \rightarrow S_2$  de una vecindad  $V$  de  $p \in S_1$  en  $S_2$  es una **transformación conforme local** en  $p$  si existe una vecindad  $W$  de  $\varphi(p)$  tal que  $\varphi : V \rightarrow W$  es una transformación conforme. Si para cada  $p \in S_1$ , existe una transformación conforme local en  $p$ , la superficie  $S_1$  se dice que es **localmente conforme a  $S_2$** .

El significado geométrico de la definición anterior, es que los ángulos son preservados por transformaciones conformes. Efectivamente, sean  $\alpha : I \rightarrow S$  y  $\beta : I \rightarrow S$  dos curvas en  $S$  las cuales se intersectan en, digamos,  $t = 0$ . Su ángulo  $\theta$  en  $t = 0$  está dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'| |\beta'|}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Una transformación conforme  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  envía esas curvas en las curvas  $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow S_2$ ,  $\varphi \circ \beta : I \rightarrow S_2$ , las cuales se intersectan para  $t = 0$ , haciendo un ángulo  $\theta_1$  dado por

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle d\varphi(\alpha'), d\varphi(\beta') \rangle}{|d\varphi(\alpha')| |d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\lambda^2 |\alpha'| |\beta'|} = \cos \theta,$$

como se había afirmado.

En términos de los coeficientes de las primeras formas fundamentales se puede establecer la conformidad local como sigue.

**Proposición 2.1.6.** *Sean  $x : U \rightarrow S$  y  $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$  parametrizaciones tales que  $E_1 = \lambda^2 E_2$ ,  $F_1 = \lambda^2 F_2$ ,  $G_1 = \lambda^2 G_2$  en  $U$ , donde  $\lambda^2$  es una función diferenciable que no se anula en  $U$ . Entonces la transformación  $\varphi = \bar{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \bar{S}$  es una transformación conforme local.*

*Demostración.* Sea  $p \in x(U)$  y  $w \in T_p S$ . Entonces  $w$  es tangente a la curva  $x(\alpha(t))$  en  $t = 0$ , donde  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  es una curva en  $U$ ; Por tanto podemos escribir a  $w$  en  $t = 0$  como

$$w = x_u u' + x_v v'.$$

Por definición, el vector  $d\varphi_p(w)$  es el vector tangente a la curva  $\bar{x} \circ x^{-1} \circ x(\alpha(t))$ , es decir a la curva  $\bar{x}(\alpha(t))$  en  $t = 0$ . Por lo tanto

$$d\varphi_p(w) = \bar{x}_u u' + \bar{x}_v v',$$

dado que

$$I_p(w) = E_1(u')^2 + 2F_1 u' v' + G_1(v')^2,$$

y

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = E_2(u')^2 + 2F_2 u' v' + G_2(v')^2,$$

de aquí que

$$I_p(w) = \lambda^2 E_2(u')^2 + 2\lambda^2 F_2 u' v' + \lambda^2 G_2(v')^2.$$

Luego

$$I_p(w) = \lambda^2 I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para toda  $p \in x(U)$  y para todo  $w \in T_p S$ ; de aquí que  $\varphi$  es una transformación conforme local.  $\square$

Es inmediato que la conformidad local entre superficies, es una relación de equivalencia; es decir, si  $S_1$  es localmente conforme a  $S_2$  y  $S_2$  es localmente conforme con  $S_3$ , entonces  $S_1$  es localmente conforme con  $S_3$ .

La propiedad más importante de las transformaciones conformes está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.7.** *Cualesquiera dos superficies regulares son localmente conformes.*

*Demostración.* Por el teorema de coordenadas isotermas 2.1.2 sabemos que podemos parametrizar una vecindad de cualquier punto de una superficie regular de tal manera que los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = f(w, z) > 0, \quad F = 0, \quad G = f(w, z).$$

Es decir, que  $\varphi_u, \varphi_v$  son ortogonales, y esto nos implica que la superficie  $S_1$  es localmente conforme a un plano, de igual manera tenemos que  $S_2$  es localmente conforme a un plano, por composición tenemos que las superficies  $S_1$  y  $S_2$  son localmente conformes.  $\square$

El siguiente resultado es un cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie de dimensión 3, en términos de las coordenadas isotermas (conformes) en la superficie.

**Teorema 2.1.8.** *Si  $w, z$  son las coordenadas isotermas para una superficie en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , en términos de las cuales la métrica inducida toma la forma*

$$ds^2 = f(w, z)(dw^2 + dz^2), \quad (2.16)$$

entonces la curvatura de Gauss de la superficie esta dada por

$$K = -\frac{1}{2f(w, z)}\Delta \ln f(w, z), \quad (2.17)$$

además el operador de Laplace toma la forma  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  respecto a las coordenadas isotermas.

*Demostración.* En notación compleja la métrica  $ds^2 = f(w, z)(dw^2 + dz^2)$ , tiene la forma (haciendo  $\zeta = w + iz$ )

$$ds^2 = f(\zeta, \bar{\zeta})d\zeta d\bar{\zeta}. \quad (2.18)$$

Se define el operador de Laplace con respecto de la métrica 2.18 por

$$\Delta := \frac{4}{f} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (2.19)$$

De aqui que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \beta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{\partial} \beta}{\partial w} - i \frac{\partial \bar{\partial} \beta}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial w} + i \frac{\partial^2 \beta}{\partial w \partial z} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial w} + i \frac{\partial^2 \beta}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial w} + i \frac{\partial^2 \beta}{\partial w \partial z} - i \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial w} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial w} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por lo tanto

$$\Delta \beta = \frac{\partial^2 \beta}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \beta \right), \quad (2.21)$$

Ahora teniendo esta forma del operador de Laplace para las coordenadas isotermas. Se puede suponer que en términos de las coordenadas isotermas  $w, z$ , la superficie esta dada (localmente) por

$$r(w, z) = (x = \varphi_1(w, z), y = \varphi_2(w, z), z = \varphi_3(w, z)). \quad (2.22)$$

Dado que la métrica en la superficie en términos de estas coordenadas esta dado por  $ds^2 = f(w, z)(dw^2 + dz^2)$  tenemos que

$$\langle r_w, r_w \rangle = \langle r_z, r_z \rangle = f(w, z), \quad \langle r_w, r_z \rangle = 0. \quad (2.23)$$

Diferenciando estas ecuaciones con respecto de  $w$  y  $z$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f(w, z)}{\partial w} &= \langle r_{ww}, r_w \rangle = \langle r_{wz}, r_z \rangle, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} &= \langle r_{zz}, r_z \rangle = \langle r_{wz}, r_w \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\langle r_{ww}, r_z \rangle + \langle r_w, r_{wz} \rangle = 0 = \langle r_{wz}, r_z \rangle + \langle r_w, r_{zz} \rangle.$$

Definimos los vectores unitarios  $e_1, e_2, n$  por

$$e_1 = \frac{r_w}{\sqrt{f(w, z)}}, \quad e_2 = \frac{r_z}{\sqrt{f(w, z)}}, \quad n = [e_1, e_2], \quad (2.25)$$

donde  $[-, -]$  es el producto vectorial en el espacio de dimensión 3. Por 2.23 y las propiedades del producto vectorial, el marco  $\{e_1, e_2, n\}$  es ortonormal a cada punto en la superficie; además los vectores son tangentes a la superficie, y el vector  $n$  es normal a esta. Por definición, los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie son

$$b_{11} = L = \langle r_{ww}, n \rangle, \quad b_{12} = M = \langle r_{wz}, n \rangle, \quad b_{22} = N = \langle r_{zz}, n \rangle. \quad (2.26)$$

Se sigue de 2.24 y 2.26 que relativo a la base  $\{e_1, e_2, n\}$  las componentes de los vectores  $r_{ww}, r_{wz}, r_{zz}$  son las siguientes

$$\begin{aligned} r_{ww} &= \left( \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial w}, -\frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial z}, L \right) \\ r_{wz} &= \left( \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial z}, -\frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial w}, M \right) \\ r_{zz} &= \left( -\frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial z}, N \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde por supuesto que  $f = f(w, z)$ . De aquí que

$$\langle r_{ww}, r_{zz} \rangle - \langle r_{wz}, r_{wz} \rangle = LN - M^2 - \frac{1}{2f} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 \right],$$

de esto y de 2.24 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} &= \langle r_{wwz}, r_z \rangle + \langle r_{wz}, r_{wz} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \langle r_{ww}, r_z \rangle - \langle r_{ww}, r_{zz} \rangle + \langle r_{wz}, r_{wz} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - (LN - M^2) + \frac{1}{2f} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Se sabe que la curvatura de Gauss esta dada por

$$K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(f_{ij})} = \frac{LN - M^2}{(f(w, z))^2}.$$

Por lo tanto de 2.28 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{LN - M^2}{f^2} &= \frac{1}{2f^3} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2f^2} \Delta f \\ &= -\frac{1}{2g} \left\{ \frac{1}{f} \Delta f - \frac{1}{f^2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2f} \Delta \ln f &= -\frac{1}{2f} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial w^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) (\ln f) \right] \\ &= -\frac{1}{2f} \left\{ \left[ \frac{\partial f}{\partial w^2} \frac{1}{f} + \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 \frac{-1}{f^2} \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial z^2} \frac{1}{f} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \frac{-1}{f^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2f} \left\{ \frac{1}{f} \Delta f - \frac{1}{f^2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De 2.29 y 2.30 se tiene que

$$K = \frac{LN - M^2}{(f(w, z))^2} = -\frac{1}{2f(w, z)} \Delta \ln f(w, z).$$

Poniendo la métrica 2.16 en notación compleja 2.18, la formula para la curvatura de Gauss de la superficie con esta métrica esta dada por

$$K = -\frac{2}{f} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} (\ln f). \quad (2.31)$$

Con lo que se concluye la demostración del teorema.  $\square$

**Ejemplo 2.1.9.** Para la esfera  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se obtuvo la métrica 1.20 que toma la forma en su longitud de arco

$$ds^2 = \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2} |dz|^2,$$

así se tiene que  $f(z, \bar{z}) = \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2}$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \left( \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) &= \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 - 4x(1 + x^2 + y^2)}{4(1 + x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{-4x(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4x}{1 + x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left( \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-4x}{1 + x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{-4(1 + x^2 + y^2) + 8x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

de manera análoga se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \left( \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{-4(1 + x^2 + y^2) + 8y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Por 2.21 se obtiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}'} (\ln f) = \frac{-2}{(1 + |z|^2)^2}$$

y por tanto

$$K = -\frac{2}{f} \frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}'} (\ln f) = -\frac{(1 + |z|^2)^2}{2} \frac{-2}{(1 + |z|^2)^2} = 1.$$

**Ejemplo 2.1.10.** Para el modelo hiperbólico  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  se tiene la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} |dz|^2.$$

Entonces

$$K = -\frac{2}{f} \frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}'} (\ln f) = -2(\text{Im}(z)^2) \frac{1}{2(\text{Im}(z)^2)} = -1.$$

Ahora supongamos que la superficie en el espacio de dimensión 3 tiene una métrica (en términos de ciertas coordenadas locales) cuya forma conforme compleja esta dada por  $ds^2 = f(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ . (Por el teorema 2.1.2 las métricas de muchas superficies en el espacio euclidiano de dimensión 3 pueden (a nivel local) ponerse en esta forma). Dado que  $f(z, \bar{z}) > 0$  se puede definir una nueva función  $\phi(z, \bar{z})$  para la cual se pueda definir sin ambigüedad a  $f(z, \bar{z}) = e^\phi$ .

En términos de  $\phi$ , las formulas 2.17 y 2.31 para la curvatura de Gauss quedan de la siguiente forma

$$K = -\frac{1}{2}e^{-\phi}\Delta\phi, \quad K = -2e^{-\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}}. \quad (2.32)$$

Si  $K$  es constante, entonces las siguientes ecuaciones se conocen como **ecuaciones de Liouville**:

$$\Delta\phi = -2Ke^\phi, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} = -\frac{K}{2}e^\phi. \quad (2.33)$$

Una pregunta natural que surge es ¿existen superficies en el espacio Euclidiano de dimensión 3 cuyas métricas inducidas sean la cordal (esférica), o la Euclidiana o la hiperbólica? Resulta que la respuesta es afirmativa y se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.11.** *Una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 3 con métrica  $ds^2 = f(z, \bar{z})dzd\bar{z}$ , y con curvatura de Gauss constante  $K$  es localmente isométrica a:*

1. la esfera si  $K > 0$ ;
2. el plano Euclidiano si  $K = 0$ ;
3. el plano hiperbólico si  $K < 0$ .

*Demostración.* De 2.32, con la hipótesis de que  $K$  es constante, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{K}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\phi} \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} \right) = e^{-\phi} \left( \frac{\partial^3\phi}{\partial z^2\partial\bar{z}} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} \right) \\ &= e^{-\phi} \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

de manera que la transformación  $\psi(z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2$  es analítica. Bajo un cambio de coordenadas  $z = g(w)$  la métrica toma la forma

$$ds^2 = f(z, \bar{z}) \left| \frac{dg}{dw} \right|^2 dwd\bar{w} = \tilde{f}(w, \bar{w}) dwd\bar{w}.$$

Si luego se define  $\tilde{\phi}(w, \bar{w})$  por  $\tilde{f}(w, \bar{w}) = e^{\tilde{\phi}}$ , resulta que

$$\tilde{\phi}(w, \bar{w}) = \phi(z, \bar{z}) + \ln \frac{dg}{dw} + \ln \frac{d\bar{g}}{d\bar{w}}. \quad (2.34)$$

Por supuesto, ya que  $\tilde{\phi}$  se definió por completo de manera análoga a  $\phi$ , la función  $\tilde{\psi}(w) = \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial w^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial w} \right)^2$  es también analítica (como una función de  $w$ ). De esto y de 2.34, se tiene

$$\tilde{\psi}(w) = \psi(z)(g')^2 + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2,$$

donde  $g' = \frac{dg}{dw}$ . Se quiere elegir la función  $g$  que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''}{g'} \right)^2 = -\psi(g(w))(g')^2. \quad (2.35)$$

Se puede demostrar usando la teoría de ecuaciones diferenciales que 2.35 tiene una solución analítica; no vamos a dar esta prueba (en la teoría de funciones de variable compleja, el lado

derecho de 2.35 es conocida como la **derivada de Schwarz**). Con  $g$  escogida para satisfacer 2.35, se tiene que  $\tilde{\psi}(w) \equiv 0$ , de donde

$$\frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}}}{\partial w^2} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial w^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial w} \right)^2 \right) = 0. \quad (2.36)$$

Si se pone a  $w = u + iv$ , y se analiza el significado de 2.36 en términos de la definición original del operador  $\frac{\partial^2}{\partial w^2}$ , se tiene que 2.36 es equivalente a

$$\frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}}}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}}}{\partial v^2}.$$

Se sigue de esta ecuación que

$$e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}} = a(u^2 + v^2) + \text{una transformación de } u \text{ y } v, \quad (2.37)$$

que en la notación compleja toma la forma

$$e^{-\frac{\tilde{\phi}}{2}} = aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c,$$

donde  $a, c$  son reales. De aquí con la nuevas coordenadas  $w, \bar{w}$  la métrica está dada por

$$ds^2 = \frac{dwd\bar{w}}{(aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \quad (2.38)$$

De la primera fórmula de 2.32 (con el remplazo de  $\tilde{\phi}$  por  $\phi$ ), y 2.37, se sigue que la curvatura de Gauss es  $K = 4(ac - b\bar{b})$ . Por medio de una transformación de Möbius, la fórmula 2.38 puede ser llevada a las formas:

1.  $\frac{4R^4 dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$  si  $K = 4(ac - b\bar{b}) > 0$ ;
2.  $dzd\bar{z}$  si  $K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$ ;
3.  $\frac{4R^4 dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$  si  $K = 4(ac - b\bar{b}) < 0$ ,

que son las formas de la métrica de la esfera, del plano Euclídeo y la del plano hiperbólico respectivamente.  $\square$

**Observación 2.1.12.** *Ahora se considera a  $S$  una superficie de Riemann (es decir, una variedad analítica de dimensión uno compleja). Un atlas  $\{U_\alpha, z_\alpha\}$  ( que satisface la Definición 1.1.13) en una superficie de Riemann  $S$  es llamado conforme si las transformaciones*

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

*son holomorfas. Una carta ( $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ) es compatible con un atlas conforme si al añadirla al atlas, este es de nuevo un atlas conforme. Una estructura conforme es obtenida al agregar todas las cartas compatibles con un atlas conforme.*

*Además se puede construir una superficie de Riemann simplemente conexa  $\hat{S}$  y un mapeo  $\varphi : \hat{S} \longrightarrow S$  con las propiedades de ser holomorfa, un homeomorfismo local y la de levantar los arcos.<sup>1</sup> Estas propiedades están diciendo que  $(\hat{S}, \varphi)$  es una superficie de Riemann simplemente conexa que cubre a  $S$ , es decir,  $\hat{S}$  es el espacio cubriente universal de  $S$  y tiene la propiedad de que su grupo fundamental  $\Pi_1(\hat{S}, p_0)$  con punto base  $p_0 \in \hat{S}$ , sea el trivial.*

<sup>1</sup> Se dice que una transformación continua  $\rho : Y \longrightarrow X$  tiene la propiedad, de **levantar los arcos** si para todo arco  $\sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ , y para todo  $y_0 \in Y$  tal que  $\rho(y_0) = \sigma(0)$  existe un levantamiento  $\hat{\sigma} : [0, 1] \longrightarrow Y$  de  $\sigma$  tal que  $\hat{\sigma}(0) = y_0$ ;  $\hat{\sigma}$  es un arco en  $Y$ . Así que  $\sigma = \rho \circ \hat{\sigma}$ .

Si  $S$  es una superficie de Riemann y  $\pi : \hat{S} \rightarrow S$  es su recubrimiento universal, se llama grupo de recubrimiento  $\Gamma$  de  $S$  (asociado a  $\pi$ ) al grupo de transformaciones biholomorfas  $\gamma : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$  tales que  $\pi \circ \gamma = \pi$  (lo que equivale a decir que  $p$  y  $\gamma(p)$  tienen la misma proyección).

El grupo  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua y sin puntos fijos y  $S$  es conformemente equivalente  $\hat{S}/\Gamma$ . En sentido recíproco, dado cualquier grupo  $\Gamma$  de transformaciones biholomorfas  $\gamma : \hat{S} \rightarrow \hat{S}$  que actúe de manera propiamente discontinua y sin puntos fijos,  $\hat{S}/\Gamma$  es una superficie de Riemann y  $\pi : \hat{S} \rightarrow \hat{S}/\Gamma$  es su recubrimiento universal. Dada una superficie de Riemann  $S$ , su espacio cubriente universal  $\hat{S}$  ha de ser una superficie de Riemann simplemente conexa. El Teorema de uniformización de Poincaré y Koebe dice que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a uno y solo uno de los dominios canónicos, es decir.

**Teorema 2.1.13. (Teorema de Uniformización).** Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a una y sólo una de las siguientes:

$$\hat{\mathbb{C}}; \quad \mathbb{C}; \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}.$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [1, Capítulo 10, secciones 10-4 y 10-5]. Si  $\hat{S} = \hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $S$  es necesariamente  $\hat{\mathbb{C}}$ , ya que  $\hat{\mathbb{C}}$  solo puede ser espacio cubriente de sí mismo (El grupo de recubrimiento es trivial, es la única acción sin puntos fijos).

Si  $\hat{S} = \mathbb{C}$ , el grupo de recubrimiento ha de estar formado necesariamente por transformaciones del tipo  $\gamma(z) = az + b$  para que no haya puntos fijos en  $\mathbb{C}$ . Como además, el grupo debe actuar de manera propiamente discontinua,  $\Gamma$  ha de ser o bien el grupo trivial o bien debe tener uno o dos generadores. Por tanto  $S$  tiene que ser conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , o a  $\mathbb{C} - \{0\}$ , o a un toro, respectivamente. Notese a modo de ilustración que en el caso  $S = \mathbb{C} - \{0\}$  podemos tomar como transformación cubriente a la función exponencial.

Por último, todas aquellas superficies  $S$  que tienen como espacio cubriente universal al hemiplano superior  $\mathbb{H}$  (o a  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ) se llaman superficies hiperbólicas.

Ahora entonces por el teorema de coordenadas isotermas 2.1.2, si  $S$  es una superficie de Riemann podemos introducir en  $S$  una métrica de Riemann completa, y si la curvatura es constante, por el teorema 2.1.11, tenemos que la curvatura es positiva para cuando  $\hat{\mathbb{C}}$  es el espacio cubriente universal de  $S$ , cero si  $\mathbb{C}$  es el espacio cubrimiento universal de  $S$  y negativa en caso que  $\mathbb{H}$  sea el espacio cubriente universal de  $S$ .

Por todo lo revisado anteriormente se puede decir que los modelos geométricos en dimensión 2 son solo tres y son precisamente: el modelo geométrico esférico, el Euclidiano y el hiperbólico y que además estos son **modelos geométricos conformes**, es decir, estos modelos tiene la propiedad de preservar ángulos bajo la acción de su grupo de isometrías.

## 2.2. Estructuras conformes en variedades diferenciables

Esta sección esta basada principalmente en el artículo de Ravi S. Kulkarni [15] y en el primer capítulo del libro de Boris N. Apanasov [5].

Se comienza esta sección definiendo lo que es un estructura conforme en un **espacio vectorial** lo cual permitirá definir las estructuras conformes en variedades.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Dos productos internos  $g_1, g_2$  en  $V$  se llaman conformes si  $g_1 = \lambda g_2$  para algún número real positivo  $\lambda$ .

**Observación 2.2.1.** *Está relación de conformidad entre productos internos es de equivalencia. En efecto, sean  $g_i$  productos internos, con  $i = 1, 2, 3$ .*

*Reflexiva:*  $g_1 = g_1$  es decir, que  $\lambda = 1 \in \mathbb{R}_+$ .

*Simétrica:* Tenemos que  $g_1 = \lambda g_2$  entonces  $g_2 = \frac{1}{\lambda} g_1$  con  $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}_+$ .

*Transitiva:* Supongamos que  $g_1 = \lambda g_2$  y que  $g_2 = \lambda^* g_3$  con  $\lambda, \lambda^* \in \mathbb{R}_+$ , entonces  $g_2 = \frac{1}{\lambda} g_1 = \lambda^* g_3$  entonces  $g_1 = \lambda \cdot \lambda^* g_3$  luego  $\lambda \cdot \lambda^* \in \mathbb{R}_+$  entonces  $g_1 = \Lambda g_3$  donde  $\Lambda = \lambda \cdot \lambda^*$ .

Teniendo en cuenta la observación anterior tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.2.2.** Una clase de equivalencia

$$\bar{g} = \{h \text{ productos internos en } V \mid h = \lambda g \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

conforme de productos internos en  $V$  es llamada una **estructura conforme** en  $V$ .

La siguiente proposición proporciona una caracterización del grupo de transformaciones conformes que preservan una estructura conforme.

**Proposición 2.2.3.** Si  $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ , entonces el grupo de automorfismos lineales de  $V$  que preservan una estructura conforme en  $V$  es isomorfo a  $\mathbb{R}_+ \times O(n)$ .

*Demostración.* Sea

$$G = \{T : V \longrightarrow V \text{ lineal invertible} \mid g(v, w) = \lambda g(T(v), T(w)), \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

(el poner el mismo producto interno es por que estamos en la clase de equivalencia de este producto interno) y sea

$$\Theta = \mathbb{R}_+ \times O(n).$$

Queremos definir un homomorfismo de grupos  $\phi$  que a cada transformación lineal invertible  $T$  que preserva una estructura conforme le asocie un número real positivo  $\lambda$  y una matriz ortogonal  $\bar{T}$  (que dependa únicamente de la transformación  $T$ ). Es decir,

$$\phi : G \longrightarrow \Theta ,$$

dada por

$$T \mapsto (\lambda \in \mathbb{R}_+, \bar{T} \in O(n)).$$

Puesto que  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita (sobre  $\mathbb{R}$ )  $n$  con producto interno, entonces  $V$  tiene una base ortogonal (note que esta base depende del producto interno y en nuestro caso estamos trabajando en clases de equivalencia de productos internos).

Basta ver que este hecho se cumple para una base ortogonal  $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ , pues si se cumple para los básicos se cumple para cualesquiera vectores  $v, w \in V$ .

Sean  $T \in G$  y  $x_i, x_j \in \beta$  con  $i \neq j$ . Entonces por hipótesis se tiene que

$$g(x_i, x_j) = \lambda' g(T(x_i), T(x_j)),$$

pero como  $x_i, x_j \in \beta$  e  $i \neq j$  se cumple que

$$0 = g(x_i, x_j) = \lambda' g(T(x_i), T(x_j)).$$

Para cualquier transformación lineal invertible  $T : V \longrightarrow V$  se tiene, por definición, la fórmula

$$g(T(x_i), T(x_j)) = g(T^t(T(x_i)), x_j) = \frac{g(x_i, x_j)}{\lambda'} = 0. \quad (2.39)$$

Luego se tiene que  $g(T^t(T(x_i)), x_j) = \frac{g(x_i, x_j)}{\lambda'}$  lo cual implica que  $T^t(T(x_i))$  y  $\frac{1}{\lambda'} x_i$  son paralelos por lo tanto existe  $\alpha \neq 0$  tal que  $T^t(T(x_i)) = \alpha(\frac{1}{\lambda'} x_i)$  si hacemos a  $\lambda = \frac{\alpha}{\lambda'}$ , entonces se tiene que  $T^t(T(x_i)) = \lambda x_i$  de aquí que

$$T^t T = \lambda Id \quad \Rightarrow \quad T = \lambda(T^t)^{-1}. \quad (2.40)$$

Si se hace a  $\bar{T} = \frac{T}{\sqrt{\lambda}}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{T}^t \bar{T} &= \left( \frac{T}{\sqrt{\lambda}} \right)^t \frac{T}{\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{1}{\lambda} (T^t T) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda} Id = Id. \end{aligned}$$

De aquí que  $\bar{T} \in O(n)$  y depende de la elección de  $T$  y de  $\lambda$ . Ahora si se toma en cuenta el lado izquierdo de la implicación en 2.40 y se calcula el determinante se tiene que  $\det(T^t T) = \det(\lambda Id)$  luego se tiene que  $\det^2(T) = \lambda^n > 0$ .

De aquí que para cada  $T \in G$  le corresponde una  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  y una  $\bar{T} \in O(n)$  que solo depende de la elección de  $T$ .

Ahora se define a  $\phi : G \rightarrow H$  como  $\phi(T) := (\lambda, \bar{T})$ , veamos que es homomorfismo de grupos Sean  $S, T \in G$ , entonces se cumple que si:

$$g(u, v) = \lambda g(T(u), T(v))$$

aplicando  $S$  y se tiene que

$$g(S(u), S(v)) = \lambda g(S(T(u)), S(T(v)))$$

pero como  $S \in G$  entonces se tiene que

$$g(S(u), S(v)) = \frac{g(u, v)}{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

lo cual implica

$$\frac{g(u, v)}{\alpha} = \lambda g(S \circ T(u), S \circ T(v)) \Rightarrow g(u, v) = \alpha \lambda g(S \circ T(u), S \circ T(v)).$$

Ahora se aplica  $\phi$  a  $S \circ T$  y se obtiene  $\phi(S \circ T) = (\alpha \lambda, \bar{S}\bar{T})$ . Por otro lado  $\phi(S) = (\alpha, \bar{S})$ , y  $\phi(T) = (\lambda, \bar{T})$  luego entonces

$$\phi(S) * \phi(T) = (\alpha, \bar{S}) * (\lambda, \bar{T}) = (\alpha \lambda, \bar{S}\bar{T}).$$

Por lo tanto  $\phi$  es un homomorfismo de grupos y por los argumentos de arriba es un homomorfismo biyectivo, luego

$$G \approx H = \mathbb{R}_+ \times O(n).$$

□

Ahora sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , sabemos que el espacio tangente  $T_p M$  de  $M$  en un punto  $p \in M$ , tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $n$ , y que una métrica de Riemann es una forma cuadrática definida positiva con dominio en el espacio tangente  $T_p M$  con  $p \in M$  y que depende suavemente de la variación de  $p \in M$ . Por lo tanto la discusión anterior sobre estructuras conformes en espacios vectoriales la podemos trasladar al contexto del espacio tangente  $T_p M$  de  $M$  en  $p$ . Luego una *estructura conforme suave* en  $M$  es una familia suave de estructuras conformes en los espacios tangentes  $T_p M$ , cuando  $p$  varía en  $M$ . Así, una estructura conforme en  $M$  se constituye de una cubierta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de subconjuntos abiertos de  $M$  (formada por vecindades coordenadas) y de métricas de Riemann  $g_\alpha$  en  $U_\alpha$  tales que en las intersecciones no vacías  $U_\alpha \cap U_\beta$  se tienen funciones positivas suaves

$$f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}_+, \tag{2.41}$$

con  $g_\alpha = f_{\alpha\beta} g_\beta$ .

Una métrica de Riemann suave en  $M$  define un ambiente de estructura conforme suave, y dos métricas de Riemann tienen la misma estructura conforme ambiente si, y solo si, ellas son conformes entre sí, es decir, dos métricas de Riemann  $g_1, g_2$  en  $M$  se llaman conformes o **compatibles** si existe una transformación diferenciable y positiva  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $p \in M$  y para todo  $u, v \in T_p M$  se cumple que  $g_1(u, v)_p = \lambda(p)g_2(u, v)_p$ . Esta relación es una relación de equivalencia, y la demostración de este hecho es análoga a la hecha en el caso de espacios vectoriales (ver la observación 2.2.1).

Por lo tanto una **estructura conforme** en  $M$  es una clase de equivalencia

$$[g] = \{\hat{g} \text{ métricas de Riemann en } M \mid \hat{g} = \lambda g, \lambda \in C^\infty(M) \text{ y } \lambda > 0\},$$

donde  $C^\infty(M) = \{\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \text{ es diferenciable}\}$ .

**Definición 2.2.4.** Una variedad conforme es un par  $(M, [g])$ , donde  $M$  es una variedad de Riemann y  $[g]$  es la clase de equivalencia de la métrica de Riemann  $g$ .

En una variedad conforme geoméricamente nos estamos olvidando de la noción de longitudes (de vectores tangentes y de curvas) y manteniendo bajo transformaciones diferenciables solo la noción de medidas de ángulos (entre vectores tangentes y curvas). Y como se vio en la proposición 2.2.3 estas transformaciones forman un grupo isomorfo a  $\mathbb{R}_+ \times O(n)$ .

Para cualquier variedad de Riemann  $(M, g)$  existe una variedad conforme  $(M, [g])$ , es lo que afirma la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.5.** Una estructura conforme suave en  $M$  es ambiente de una métrica de Riemann suave.

*Demostración.* Sean  $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  la familia de métricas que definen la estructura conforme. Escojamos una partición de la unidad suave  $\{\varphi_\alpha\}$  subordinada a  $U_\alpha$ . Entonces

$$g = \sum_\alpha \varphi_\alpha g_\alpha, \quad (2.42)$$

es una métrica de Riemann, y la estructura conforme es ambiente de esta.  $\square$

Sea  $M$  una variedad con una estructura conforme suave. Un *marco conforme* en un punto  $p \in M$  es una base ortogonal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  tal que  $e_i$  tiene longitud igual a uno (respecto a una métrica de Riemann y por tanto respecto a cualquiera compatible). Una estructura conforme es **integrable** si cada punto  $p \in M$  tiene una vecindad coordenada con coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  es un marco conforme definido localmente. Si la estructura es integrable llamaremos a tales coordenadas **admisibles**. De lo cual se sigue que si  $\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_n\}$  son dos sistemas de coordenadas admisibles definidos ambos en un subconjunto abierto  $U$  entonces  $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}] : U \rightarrow \mathbb{R}_+ \times O(n)$  define una transformación (donde  $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}]$  es la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas).

En términos de un sistema de coordenadas admisible  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una métrica de Riemann compatible tiene la forma

$$\lambda(x) \sum_i dx_i^2,$$

donde  $\lambda$  es una función suave valuada en  $\mathbb{R}_+$ . Así, una variedad con una estructura conforme integrable, puede también ser considerada como una variedad **Euclidiana localmente conforme**. Por brevedad la llamaremos simplemente variedad **conformemente plana**.

La definición de **transformación conforme** entre variedades conformes, se generaliza directamente del caso de superficies.

Un ejemplo de una variedad conformemente plana es  $S^n$ , lo cual esta garantizado por el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.6.**  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  con su métrica inducida estándar es conformemente plana.

Se darán tres demostraciones.

*Demostración.* (I)

Sea  $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\Upsilon$  un hiperplano de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  paralelo a  $T_p S^n$  pero diferente de  $T_p S^n$ . Dado  $q \in S^n - \{p\}$  la línea recta determinada por los puntos  $p$  y  $q$  corta a  $\Upsilon$  en exactamente un punto  $\bar{q}$ . La afirmación es que la *proyección estereográfica* (cf.1.24)

$$\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \Upsilon, \quad \pi(q) = \bar{q},$$

es un homeomorfismo conforme.

Tomemos dos vectores tangentes orientados  $v, w$  en  $q$ . Entonces  $\{p, v\}, \{p, w\}$  determinan planos de dimensión 2 que cortan a  $\Upsilon$  en líneas orientadas  $\ell_v, \ell_w$  respectivamente. Es suficiente mostrar

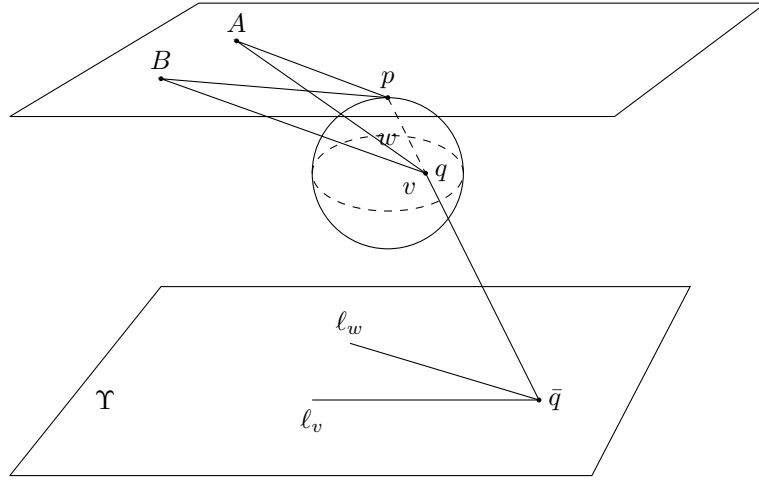


Figura 2.1: Demostración I

que los ángulos  $\angle(v, w)$  y  $\angle(l_v, l_w)$  son iguales, y por continuidad es suficiente demostrar esto para  $v$  y  $w$  genéricos. Ahora para  $v$  y  $w$  genéricos las líneas tangentes  $Rv, Rw$  cortan a  $T_p S^n$  digamos en los puntos  $A$  y  $B$ . Las líneas orientadas  $pA, pB$  son paralelas a  $l_v, l_w$  respectivamente, así  $\angle(pA, pB) = \angle(l_v, l_w)$ . También  $|Ap| = |Aq|$  ya que esas son longitudes de los segmentos tangentes de  $A$  a  $S^n$ . De manera semejante  $|Bp| = |Bq|$ . Así los triángulos  $ApB, AqB$  son congruentes. Por lo cual

$$\angle(v, w) = \angle(pA, pB) = \angle(l_v, l_w).$$

Finalmente, es claro que  $\pi$  puede ser expresada por funciones racionales en coordenadas apropiadas, así que esta es de hecho analítica real. Con esto termina la primer demostración.  $\square$

*Demostración.* (II) En la segunda prueba se hace también vía la proyección estereográfica  $\pi$  (cf. 1.24) y la métrica cordal (cf. 1.25). Por la observación 1.3.1 la topología que induce la métrica cordal es equivalente a la topología inducida por la métrica Euclidiana. Por lo cual, transformaciones continuas en  $\mathbb{R}^n$  son también continuas en  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . También es fácil de verificar que la transformación  $\pi$  es continua con la métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ .

La proyección estereográfica  $\pi$  es un homeomorfismo conforme analítico real. Una aplicación directa de esto es el hecho que la esfera  $S^n$  con su métrica estándar inducida es conformemente plana. Así, podemos identificar  $S^n$  con  $\hat{\mathbb{R}}^n$ .  $\square$

*Demostración.* (III) La tercera prueba demuestra que la imagen  $\pi(S^p)$  (cf. 1.24) de una  $p$ -esfera redonda  $S^p$ , es una esfera redonda en la esfera  $\mathbb{S}^n$  (una  $p$ -esfera redonda en  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es la intersección transversa de  $\mathbb{S}^n$  con un  $(p+1)$ -plano conformemente plano) donde en  $\mathbb{R}^n$  considerado como  $S^n - \{\infty\}$ , un  $p$ -plano es considerado como una  $p$ -esfera que pasa por  $\infty$ . Una *inversión* (cf.1.26) en una  $n$ -esfera redonda  $S^n$  en  $\mathbb{S}^{n+1}$  es la transformación  $P \mapsto Q$ , donde  $|0P| \cdot |0Q| = r^2$  con el caso especial  $0 \mapsto \infty$  y  $\infty \mapsto 0$ . No es difícil ver que la inversión envía  $p$ -esferas redondas en  $\mathbb{S}^{n+1}$  en  $p$ -esferas redondas. Consideremos ahora la proyección estereográfica del punto  $(0, \dots, 0, 1) = N$  sobre el plano tangente en el punto antípodo  $S = (1, 0, \dots, 0)$ . La figura 2.2 muestra que esta coincide con la restricción a  $\mathbb{S}^n$  de la inversión respecto a la esfera  $\Sigma^n$  con centro  $N$  y radio  $\|NS\|$ .  $\square$

Para tener otros ejemplo de variedades conformemente planas necesitamos, el concepto de curvatura seccional (véase apéndice A, sección A.5, definición A.5.7). Una importante propiedad de los espacios de curvatura constante es que tiene un número suficientemente grande de isometrías locales, en resumen tenemos los siguientes:

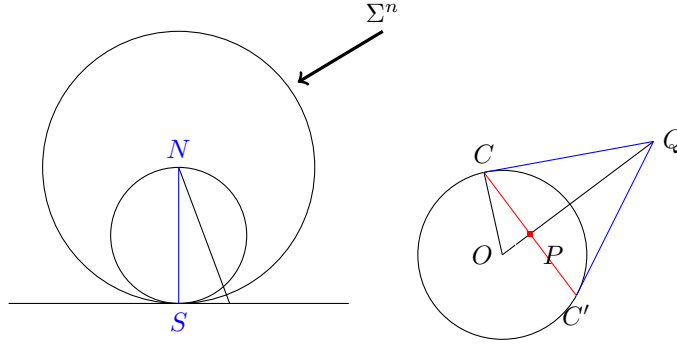


Figura 2.2: Demostración III

**Corolario 2.2.7.** Sean  $M$  y  $\tilde{M}$  espacios con la misma curvatura seccional constante y la misma dimensión  $n$ . Sea  $p \in M$  y  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Escogemos una base ortonormal arbitraria  $\{e_j\}_{j=1}^n \in T_p M$  y  $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Entonces existen vecindades  $V \subset M$  de  $p$ ,  $\tilde{V} \subset \tilde{M}$  de  $\tilde{p}$ , y una isometría  $f : V \rightarrow \tilde{V}$  tal que  $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$ .

**Corolario 2.2.8.** Sea  $M$  un espacio con curvatura constante y sean  $p, q$  puntos de  $M$ . Sean  $\{e_j\}_{j=1}^n$  y  $\{f_j\}_{j=1}^n$  bases ortogonales de  $T_p M$  y  $T_q M$ , respectivamente. Entonces existen vecindades  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $q$ , y una isometría  $g : U \rightarrow V$  tal que  $dg_p(e_j) = f_j$ .

Estos hechos se encuentran demostrados en [11, Páginas 158 y 159]. Los ponemos como corolarios ya que estos resultados se siguen de un famoso teorema debido a **Élie Cartan**, que enunciamos en el apéndice A, sección A.5.1, Teorema A.5.11, que implica, que la métrica esta determinada localmente por la curvatura. Esto nos permitirá hablar de la homogeneidad de la métrica, con el cual podemos clasificar a nuestras variedades, de manera análoga al caso de superficies, es decir, para cualquier dimensión  $n \geq 2$ , se cumple también que las geometrías con curvatura seccional constante  $K (= 1$  o  $0$  o  $-1)$ , son la esférica, la Euclidiana y la hiperbólica, respectivamente. De manera precisa tenemos el siguiente.

**Teorema 2.2.9.** Sea  $M$  una variedad de Riemann de dimensión  $n$  completa con curvatura seccional constante  $K$ . Entonces el espacio cubriente universal  $\tilde{M}$  de  $M$ , con la métrica cubriente, es isométrica a

1.  $\mathbb{S}^n$ , si  $K = 1$ ,
2.  $\mathbb{R}^n$ , si  $K = 0$ ,
3.  $\mathbb{H}^n$ , si  $K = -1$ .

La demostración de este hecho puede consultarse en [11, Pág. 163]. Pero las ideas de la demostración radican en estos dos hechos:

1. Demostrar que dadas  $f_i : M \rightarrow N$   $i = 1, 2$  dos isometrías locales entre las variedades de Riemann  $M$  y  $N$ , con el supuesto de que existe un punto  $p \in M$  tal que  $df_1(p) = f_2(p)$  y  $(df_1)_p = (df_2)_p$ . Entonces  $f_1 = f_2$ .
2. Dada una variedad de Riemann completa  $M$  y sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo local sobre la variedad de Riemann  $N$  que tiene la siguiente propiedad: para todo  $p \in M$  y para todo  $v \in T_p M$ , se tiene  $|df_p(v)| \geq |v|$ . Entonces  $f$  es una transformación cubriente.

Y en el teorema de Cartan A.5.11. Las variedades completas con curvatura seccional constante son llamados **Espacios de forma**. Por lo tanto los Espacios de forma son ejemplos de

variedades conformemente planas.

Ahora podemos considerar en lugar de una métrica de Riemann una métrica pseudo-Riemanniana (es decir, una forma cuadrática indefinida). Así una variedad pseudo-conforme es un par  $(M, [g])$ , donde  $M$  es una variedad pseudo-Riemanniana y  $[g]$  la clase de equivalencia de la métrica pseudo-Riemanniana  $g$ .

Para tener un buen entendimiento de esto veamos el siguiente ejemplo, el cual mencionaremos algunas veces en lo que sigue y que además permite una generalización a dimensión superior que sera de mucha ayuda para dar un modelo lineal de un grupo, como veremos en el siguiente capítulo.

**Ejemplo 2.2.10** (Pseudoesfera). Consideremos a  $\mathbb{R}^3$  con la métrica pseudo-euclidiana (ver definición 1.2.6) inducida por la longitud de arco

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{que es una forma cuadrática indefinida}). \quad (2.43)$$

Podemos considera una esfera en este nuevo espacio pseudo-euclidiano  $(\mathbb{R}_1^3, Q(\bar{x}) = ds^2)$  ( $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ ), es decir, el conjunto de puntos equidistantes del origen, que vamos a llamar **pseudoesfera**. En este caso el radio de la pseudoesfera puede ser real, nulo o imaginario. La ecuación de la pseudoesfera en  $(\mathbb{R}^3, Q(\bar{x}))$  es

$$x^2 - y^2 - z^2 = \rho^2. \quad (2.44)$$

Si  $\rho = 0$  la ecuación 2.44 define un cono de segundo orden en  $\mathbb{R}^3$  con el eje  $x$  como eje del cono. Este cono divide a el espacio en dos regiones: el interior, donde  $\rho^2 = +R^2 > 0$  y el exterior  $\rho^2 = -R^2 < 0$ , con  $R > 0$ .

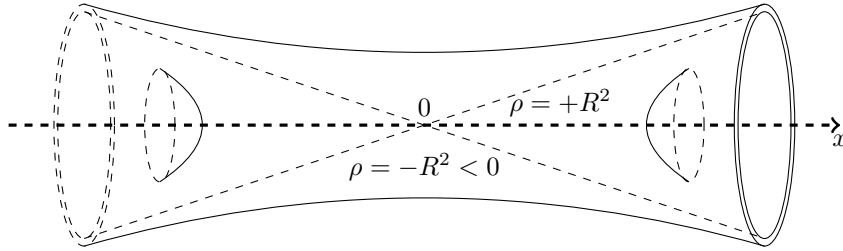


Figura 2.3: Pseudoesfera.

Las pseudoesferas de radio real son hiperboloides de dos mantos  $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$ . Las pseudoesferas con radio imaginario son hiperboloides de un manto  $x^2 - y^2 - z^2 = -R^2$  (ver figura 2.3).

En el caso de  $\mathbb{R}^3$  la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas es  $R = \text{constante}$ . En coordenadas pseudoesféricas la ecuación de la pseudoesfera es  $\rho = \text{constante}$ . Ahora consideremos el problema de calcular la métrica sobre la pseudoesfera de radio real inducida por la métrica 2.43 en  $(\mathbb{R}^3, Q(\bar{x}))$ . La métrica 2.43 en coordenadas pseudoesféricas toma la forma

$$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \sinh^2 \chi d\varphi^2. \quad (2.45)$$

Consideremos la parte derecha de la pseudoesfera donde  $\rho = +R$ ,  $d\rho = 0$ , por lo tanto la métrica 2.45 sobre la pseudoesfera es

$$-ds^2 = \rho^2 + \rho^2 \sinh^2 \chi d\varphi^2. \quad (2.46)$$

De esta manera la métrica 2.46 inducida por la métrica 2.43 de  $(\mathbb{R}^3, Q(\bar{x}))$  sobre la pseudoesfera es definida negativa, es decir es una métrica pseudo-Euclidiana, osea que los vectores tangentes tiene el cuadrado de longitud negativo.

**Definición 2.2.11.** La métrica 2.46 se llama **métrica de Lobachevsky**.

Definamos la geometría sobre la pseudoesfera  $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$   $x > 0$  de la siguiente manera: los puntos son los puntos del hiperboloide y las rectas son las curvas del hiperboloide que se obtiene al cortarlo con los planos  $ax + by + cz = 0$ , que pasan por el origen (ver figura 2.4).

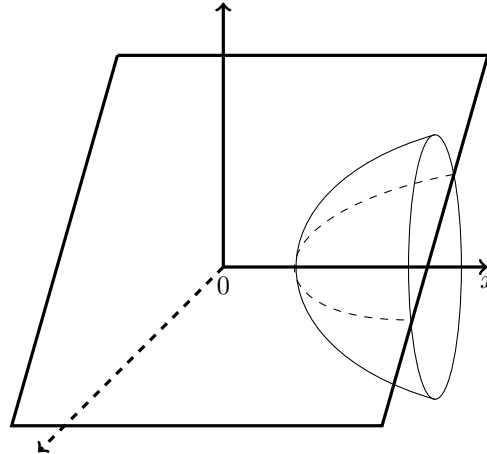


Figura 2.4: Rectas en la pseudoesfera.

Resulta que la geometría de la pseudoesfera obtenida así puede ser estudiada con los métodos de geometría analítica, trazando una analogía con la geometría de la esfera usual. Para ello es necesario tener una transformación análoga a la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano. Consideremos la pseudoesfera con centro en el origen y el polo norte es el punto  $N = (-R, 0, 0)$  (polo sur  $S = (R, 0, 0)$ ), a tal pseudoesfera la denotaremos por  $\mathbb{S}_1^2$ .

Sea  $p$  el punto variable sobre la pseudoesfera  $x > 0$ . tracemos una recta que pasa por  $N$  y por  $p$  esta recta intersecta al plano  $x = 0$  en el punto  $f(p)$  al cual llamaremos imagen de  $p$  bajo la proyección estereográfica  $f : \mathbb{S}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La imagen del manto derecho del hiperboloide cubre el interior del disco de radio  $R$ :  $y^2 + z^2 = R^2$  (el manto izquierdo se proyecta en el exterior del mismo disco). La proyección de todo el hiperboloide cubre todo el plano excepto la circunferencia  $R^2 = y^2 + z^2$ .

El polo norte se proyecta en el infinito como en el caso de la esfera. Encontremos la relación entre las coordenadas de  $p = (x, y, z)$  y  $f(p) = (u, v)$  donde  $u, v$  son coordenadas del plano  $x = 0$ .

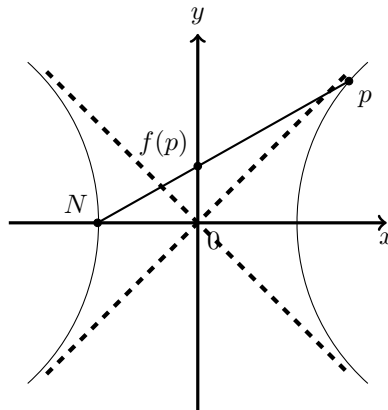


Figura 2.5: Proyección estereográfica de la pseudoesfera.

**Proposición 2.2.12.** Sean  $p = (x, y, z)$  y  $f(p) = (u, v) = \bar{p}$ , donde  $f$  es la proyección estereográfica de la parte derecha del hiperboloide  $x^2 - y^2 - z^2 = R^2$ ,  $x > 0$ . Entonces

$$x = R \frac{R^2 + |\bar{p}|^2}{R^2 - |\bar{p}|^2} \quad y = \frac{2R^2 u}{R^2 - |\bar{p}|^2} \quad z = \frac{2R^2 v}{R^2 - |\bar{p}|^2}.$$

*Demostración.* Consideremos un corte del hiperboloide con un plano que pasa por el eje  $x$ . Las coordenadas de los puntos marcadas en la figura 2.6 son:

$$\begin{aligned} p &= (x, y, z) & q &= (x, y, 0), \\ f(p) &= (u, v) & Y &= (0, y, 0), \\ N &= (R, 0, 0) & T &= (u, 0), \\ X &= (x, 0, 0) & F &= (0, v). \end{aligned}$$

Como  $\triangle NOT \sim \triangle NXq$  se tiene que

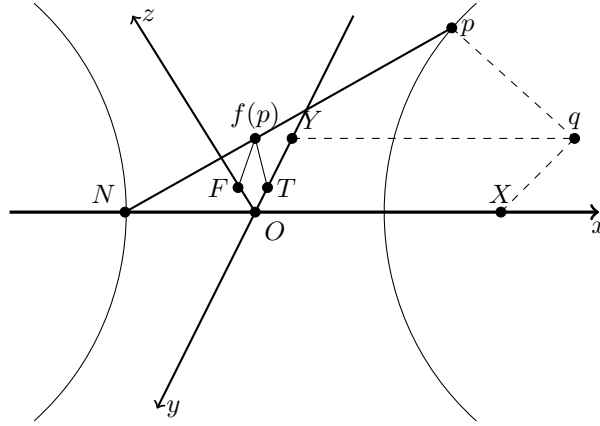


Figura 2.6: Triángulos congruentes en la pseudoesfera.

$$\frac{QX}{TO} = \frac{NX}{NO} \quad \text{o} \quad \frac{y}{u} = \frac{R+x}{R}.$$

Análogamente se tiene que

$$\frac{z}{v} = \frac{R+x}{R}.$$

Luego

$$y = u \frac{R+x}{R} \quad \text{y} \quad z = v \frac{R+x}{R}.$$

Como  $R^2 = x^2 - y^2 - z^2$  entonces  $R^2 = x^2 - (U^2 + v^2) \left(\frac{R+x}{R}\right)^2$  y teniendo en cuenta que  $x - R > 0$  se obtiene que

$$x - R = \frac{x+R}{R^2} |\bar{p}|^2 \quad \text{es decir,} \quad x = R \frac{R^2 + |\bar{p}|^2}{R^2 - |\bar{p}|^2}.$$

Ahora  $x = \frac{Ry}{u} - R$ ,  $z = \frac{v}{u}y$ , luego

$$R^2 = \left(\frac{Ry}{u} - R\right)^2 + y^2 + \left(\frac{v}{u}y\right)^2,$$

y

$$y = \frac{2R^2 u}{R^2 - |\bar{p}|^2}; \quad \text{de manera análoga se tiene que} \quad z = \frac{2R^2 v}{R^2 - |\bar{p}|^2}.$$

□

**Proposición 2.2.13.** *La proyección estereográfica  $f$  define un cambio regular de coordenadas,  $u^2 + v^2 < r^2$ .*

*Demostración.* Sea  $p = (x, y, z)$  que satisface  $R^2 = x^2 - y^2 - z^2$ . Luego  $x = +\sqrt{R^2 + y^2 + z^2}$  es la ecuación del manto derecho del hiperboloide. Consideremos a  $f : (y, z) \mapsto (u, v)$  y su matriz Jacobiana  $J(f)$ . De la proposición anterior se tiene que

$$|J(f)| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{4R^3}{(R^2 - |\bar{p}|^2)^2} x > 0,$$

para todos los puntos  $\bar{p} = (u, v)$  del disco, puesto que  $R > 0$ ,  $x > 0$ ; luego  $|J(f)| = |J(f^{-1})|^{-1} > 0$ .  $\square$

Ahora nos preguntamos en que se transforman las rectas de la geometría definida en el hiperboloide mediante la proyección estereográfica. Y como siempre la respuesta es la siguiente:

**Proposición 2.2.14.** *Las curvas de intersección de  $\mathbb{S}_1^2$  con los planos  $ax + by + cz = 0$  se transforman bajo la proyección estereográfica  $f$  en arcos de circunferencias ortogonales a la circunferencia  $y^2 + z^2 = R^2$ .*

*Demostración.* En la ecuación  $ax + by + cz = 0$  reemplazamos  $x, y, z$  en términos de  $u, v$  suponiendo que, por ejemplo  $a \neq 0$

$$aR \frac{R^2 + |\bar{p}|^2}{R^2 - |\bar{p}|^2} + b \frac{2R^2 u}{R^2 - |\bar{p}|^2} + c \frac{2R^2 v}{R^2 - |\bar{p}|^2} = 0.$$

Luego, agrupando los términos, obtenemos

$$\left(u + \frac{a}{b}R\right)^2 + \left(v + \frac{c}{a}R\right)^2 = \frac{R^2}{a^2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

la expresión que define una circunferencia  $C_2$  con centro  $O' = (-\frac{a}{b}R, -\frac{c}{a}R)$  y radio  $r = \frac{R}{a}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$  (figura 2.7). Luego estas dos circunferencias son ortogonales:  $(OS)^2 + (O'S)^2 = (OO')^2$ .

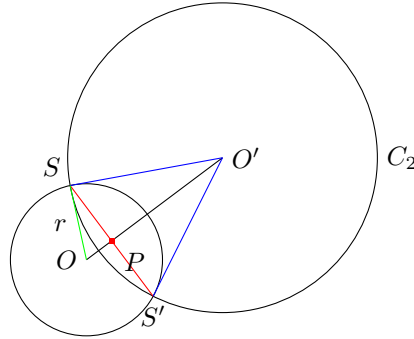


Figura 2.7: Círculos ortogonales.

$\square$

**Conclusión.** *La geometría inducida en la pseudoesfera de radio  $R$  en  $(\mathbb{R}^3, Q(\bar{x}))$ , coincide (después de un cambio apropiado de coordenadas) con la geometría que resulta en el disco de radio  $R$  sobre el plano Euclídeo  $\mathbb{R}^2$  si tomamos como puntos de esta geometría los puntos interiores del disco y como rectas los arcos de circunferencias ortogonales a la frontera del disco. Esta geometría es llamada la geometría de **Lobachevsky** o como mejor la conocemos nosotros, la geometría hiperbólica. El modelo de la geometría de Lobachevsky en el círculo unitario se*

llama modelo de Poincaré de geometría de Lobachevsky.

Ahora calculemos la métrica sobre la pseudoesfera en coordenadas  $(u, v)$  en el círculo  $B^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < R^2\}$ . Utilizando las fórmulas de la proyección estereográfica y reemplazando las expresiones de  $x, y$  y  $z$  en términos de  $u$  y  $v$  en la fórmula  $-ds^2 = -(dx^2 - dy^2 - dz^2)$  obtenemos

$$-ds^2 = \frac{4R^4(du^2 + dv^2)}{(R^2 - |\bar{p}|^2)^2}. \quad (2.47)$$

Si la pseudoesfera tiene radio  $R = 1$  toma la forma, entonces

$$-ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - |\bar{p}|^2)^2}. \quad (2.48)$$

A la métrica 2.48 se llama la métrica de Lobachevsky en el modelo Poincaré en coordenadas cartesianas  $(u, v)$  (o simplemente métrica de Poincaré que ya conocemos). Al plano de Lobachevsky lo denotaremos por  $L^2$ .

Hasta ahora, hemos dotado a nuestras variedades diferenciables (incluyendo el caso de superficies) de estructuras conformes que tienen la propiedad de tener curvatura constante, lo cual implica por los corolarios 2.2.7, 2.2.8 del teorema de Cartan A.5.11, que estos **espacios de forma** tengan un gran número de isometrías, y que además estas isometrías pueden mover un punto en otro y pueden tomar cualquier marco ortonormal en el espacio tangente en un punto a cualquier otro marco ortonormal en ese punto. La homogeneidad y la isotropía juntas son una herramienta muy fuerte para hablar de geometría conforme, pero ahora necesitamos invitar a la teoría de grupos y retomar el enfoque de Klein de geometría.

Para conectar el enfoque de Klein con lo que hemos trabajado y poder añadir más estructura a una variedad  $M$ , es decir, en lugar considerar un atlas diferenciable  $\Lambda = \{U_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$  en la variedad  $M$ , podemos pensar a  $M$  como si estuviera compuesto de piezas de  $\mathbb{R}^n$  pegadas por los cambios de coordenadas  $\varphi_{\alpha\beta} := f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ . Denotamos el conjunto de estos cambios de coordenadas (difeomorfismos) por  $\mathfrak{G}$ , este conjunto satisface las siguientes condiciones, que hacen de  $\mathfrak{G}$  un pseudogrupo de difeomorfismos de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ :

1. la restricción  $\varphi_0$  de un elemento  $\varphi \in \mathfrak{G}$  en un conjunto abierto es un elemento de  $\mathfrak{G}$ ;
2. la composición  $\psi \circ \varphi$  de dos elementos  $\varphi, \psi \in \mathfrak{G}$  (si esta bien definida) es un elemento de  $\mathfrak{G}$ ;
3. el inverso de  $\varphi$  es un elemento de  $\mathfrak{G}$ ;
4. si  $D = \bigcup_i D_i \subset \mathbb{R}^n$  y  $\varphi : D \rightarrow D'$  es un difeomorfismo local tal que  $\varphi_i = \varphi|_{D_i} \in \mathfrak{G}$  para todo  $i$ , entonces  $\varphi \in \mathfrak{G}$ .

Las variedades  $M$  que forman un pseudogrupo de difeomorfismos de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ )  $\mathfrak{G}$  con sus cambios de coordenadas, son llamadas  $\mathfrak{G}$ -variedades.

Una clase importante de  $\mathfrak{G}$ -variedades pueden ser obtenidas utilizando el siguiente pseudogrupo  $\mathfrak{G}$ .

Sea  $X$  variedad fija y  $G$  su grupo de difeomorfismos de  $X$  en si mismo y consideremos un pseudogrupo  $\mathfrak{g}$  consistente de todas las restricciones de los elementos de  $G$  a subconjuntos abiertos en  $X$ . Una variedad  $M$  con una  $\mathfrak{g}$ -estructura es representada como una composición de piezas de  $X$  y por medio de elementos del pseudogrupo  $\mathfrak{g}$  asociado al grupo  $G$ .

**Definición 2.2.15.** Llamamos a tales  $\mathfrak{g}$ -variedades como  $(X, G)$ -variedades o variedades modeladas en la geometría  $(X, G)$ .

Aquí la geometría  $(X, G)$  es en el sentido de **Felix Klein**, es decir, una geometría es una pareja  $(X, G)$  donde se estudian las propiedades que quedan invariantes en  $X$  bajo la acción de  $G$ . A veces, el enfoque de Klein para el estudio de la geometría es equivalente a el enfoque clásico, que puede ser utilizado para estudiar geometrías euclidianas y no euclidianas (como ya lo observamos) así estamos conectando el enfoque de Klein con el enfoque de la geometría de Riemann.

**Ejemplo 2.2.16.** Ahora sea  $X = \mathbb{R}^n$  y  $G = \text{Affi}(\mathbb{R}^n)$  el grupo de transformaciones afines en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, una  $(\mathbb{R}^n, \text{Affi}(\mathbb{R}^n))$ -variedad es una variedad de dimensión  $n$  afín. En particular, una estructura afín se puede definir en un toro de dimensión dos  $T^2 = S^1 \times S^1$  pegando los lados opuestos de un cuadrilátero que no necesita ser un paralelogramo. Este pegado se realiza por medio de dos transformaciones afines en el plano (ver La Figura 1), es decir, por elementos de la pseudogruppo afín, que son restricciones de estas transformaciones afines en correspondientes subconjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^2$  que contienen lados de el cuadrilátero. De manera precisa consideremos a las transformaciones afines  $T_1(z) = z + 1$ ,  $T_2(z) = z + i \in \text{Möb}(2, \mathbb{C})$ . Ahora tomemos todas las posibles composiciones de estas dos transformaciones y sus inversas. El conjunto de todas estas composiciones forman el grupo  $G = \langle T_1, T_2 \rangle$ . La acción de este grupo cuadrícula el plano por medio de rectas verticales separadas por una distancia igual a uno y por rectas horizontales separadas también a distancia uno. Esta cuadrícula es como un rompecabezas infinito. El grupo  $G$  no altera la cuadrícula ya que, si tomamos uno de los cuadrados de la cuadrícula y le aplicamos la transformación  $T_1$  el cuadrado se transforma en el de la derecha (al de la izquierda si se aplica la inversa), del mismo modo si le aplicamos la transformación  $T_2$  a un cuadrado de la cuadrícula se mueve un cuadro hacia arriba (hacia abajo si aplicamos la inversa). Luego la región de discontinuidad del grupo  $G$  es  $\mathbb{C}$ , veamos qué se construye formando el cociente de  $\mathbb{C}$  y  $G$ , es decir,  $\mathbb{C}/G$ .

Si queremos entender las clases de todo el rompecabezas nos podemos quedar con una sola pieza, puesto que cualquier cuadrado esta relacionado con el otro. Quedémonos solamente con un cuadrado al que llamaremos  $\Gamma$ . Sin embargo  $\Gamma$  tiene su frontera que corresponde a dos líneas horizontales y dos verticales.

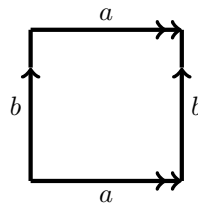


Figura 2.8:  $\Gamma$

Recordemos que el grupo  $G$  es generado por dos elementos  $(T_1, T_2)$  que mueven a la línea vertical izquierda en la de la derecha y la horizontal inferior con la superior. Así que tenemos que pegar las líneas de la frontera de  $\Gamma$  como nos indica el grupo  $G$ , es decir las verticales entre sí y las horizontales entre sí.

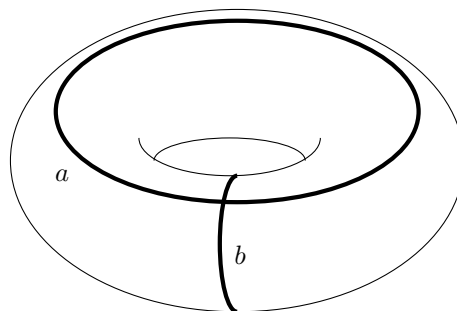


Figura 2.9: Toro complejo

**Ejemplo 2.2.17.** Consideremos el plano de Lobachevsky  $L^2$  del ejemplo 2.2.10. El grupo de isometrías de el plano de Lobachevsky. Es decir, el grupo de todas las transformaciones pseudo-ortogonales del espacio  $\mathbb{R}^3$  que fijan el origen, preservan la forma cuadrática 2.43, y por lo tanto

transforman a la pseudoesfera sobre si misma, el cual es denotado por  $O(1, 2)$ . Sin embargo, dado que el plano de Lobachevsky es el hiperboloide derecho de la pseudoesfera, solo excluimos aquellas transformaciones en  $O(1, 2)$  que intercambien los hiperboloides. Algunas transformaciones que incluye este grupo son:

$$\begin{aligned} \text{traslación } (x \mapsto x + a) &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + 1 & a & -\frac{a^2}{2} \\ a & 1 & -a \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \in O(1, 2), \\ \text{dilatación } (x \mapsto \lambda x, \lambda > 0) &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} & \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \end{pmatrix} \in O(1, 2) \\ \text{inversión } \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(1, 2). \end{aligned}$$

Con lo dicho arriba el teorema 2.2.9 reduce la determinación de los espacios forma a un problema en la teoría de grupos, como mostraremos en lo que sigue.

Antes de ver esto, consideremos a  $M$  una variedad de Riemann y  $G$  su grupo de isometrías, por el ejemplo 1.1.20 sabemos cuando un grupo actúa en una variedad, más aún sabemos cuando un grupo actúa de manera propiamente discontinua. Entonces si consideramos a  $G$  que actúa en  $M$  de manera propiamente discontinua, decimos que  $G$  actúa **libremente** (es decir, sin puntos fijos) en  $M$ , si  $g(x) = x$  entonces  $g = e$ . La órbita de un punto  $x \in M$  es el conjunto

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\} \subset M.$$

La acción se dice transitiva si  $G(x) = M$ , esto es equivalente a decir, que, dados  $x_1, x_2 \in M$  existe  $g \in G$  tal que  $g(x_1) = x_2$ , este hecho induce una relación de equivalencia  $\sim (x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } g(x_1) = x_2)$  de donde sus clase de equivalencia son las órbitas, por lo tanto  $M$  se puede partir en órbitas

$$M = \bigsqcup_{i \in I} G(x_i) \text{ (unión disjunta).}$$

El conjunto de órbitas, es decir, el conjunto cociente  $M/\sim$ , se denota por  $M/G$  (consideramos a  $M/G$  con la topología cociente), existe una proyección natural

$$\rho : M \longrightarrow M/G,$$

dada por  $\rho(x) = G(x)$ . Del hecho que  $G$  actúe de manera propiamente discontinua se sigue que la proyección  $\rho$  es una transformación cubriente regular y  $G$  es el grupo de transformaciones cubrientes. Por el ejemplo 1.1.20 sabemos que  $M/G$  tiene una estructura diferenciable y que  $\rho$  es un difeomorfismo local. Además podemos dotar a  $M/G$  de una métrica de Riemann de tal manera que  $\rho$  es una isometría local. De hecho dado  $p \in M/G$ , escogemos a  $\tilde{p} \in \rho^{-1}(p)$ ; para cada par  $u, v \in T_{\tilde{p}}(M/G)$ , definimos

$$\langle u, v \rangle = \langle d\rho^{-1}(u), d\rho^{-1}(v) \rangle_{\tilde{p}}.$$

Ya que  $\rho$  es un una transformación cubriente regular,  $G$  es transitivo en  $\rho^{-1}(p)$ . Por lo tanto, dado cualquier  $\tilde{q} \in \rho^{-1}(p)$ , existe  $g \in G$  con  $g(\tilde{p}) = \tilde{q}$ , y la definición de arriba no depende de la elección de  $\tilde{p} \in \rho^{-1}(p)$ ; tal métrica se llama la métrica inducida por el cubrimiento  $\rho$ . Observamos que  $M/G$  es completo si y sólo si  $M$  lo es y que  $M/G$  tiene curvatura constante si y sólo si  $M$  tiene curvatura constante. Tomamos a  $M = \mathbb{S}^n$  o  $\mathbb{R}^n$  o  $H^n$ , concluimos entonces que  $M/G$  es una variedad completa con curvatura constante 1 (si  $M = \mathbb{S}^n$ ), 0 (si  $M = \mathbb{R}^n$ ) o  $-1$  (si  $M = H^n$ ).

Ahora si vamos a demostrar que de esta manera se obtiene todas esas variedades.

**Proposición 2.2.18.** *Sea  $M$  una variedad Riemann completa con curvatura seccional constante  $K(= 1$  o  $0$  o  $-1)$ . Entonces  $M$  es isométrica a  $\tilde{M}/\Gamma$  donde  $\tilde{M}$  es  $\mathbb{S}^n$  (si  $K = 1$ ),  $\mathbb{R}^n$  (si  $K = 0$ ), o  $H^n$  (si  $K = -1$ ),  $\Gamma$  es un subgrupo del grupo de isometrías de  $\tilde{M}$  que actúa de manera propiamente discontinua en  $\tilde{M}$ , y la métrica en  $\tilde{M}/\Gamma$  es la inducida de la transformación cubriente  $\rho : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ .*

*Demostración.* Consideremos el cubriente universal  $\varphi : \tilde{M} \rightarrow M$ , y dotamos a  $\tilde{M}$  de la métrica cubriente, que es aquella, que hace a  $\varphi$  una isometría local. Sea  $\Gamma$  el grupo de transformaciones cubrientes de la transformación cubriente  $\varphi$ . Entonces  $\Gamma$  es un subgrupo del grupo de isometrías de  $\tilde{M}$  y en  $\tilde{M}$  actúa de manera propiamente discontinua. Por lo tanto es posible introducir una métrica de Riemann inducida por  $\rho : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ . Dado que  $\varphi$  es regular, dados  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$  entonces  $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{y})$  si y sólo si  $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$  que es equivalente a  $\rho(\tilde{x}) = \rho(\tilde{y})$ . Las clases de equivalencia dadas por  $\varphi$  y  $\rho$  en  $\tilde{M}$  son, por lo tanto, las mismas, y esto induce una biyección  $\xi : M \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$  tal que  $\rho = \xi \circ \varphi$ . Puesto que  $\rho$  y  $\varphi$  son isometrías locales,  $\xi$  también lo es, y como es biyección, se sigue que es una isometría de  $M$  sobre  $\tilde{M}/\Gamma$   $\square$

La proposición anterior reduce el problema de encontrar todos los espacios de forma a el problema de determinar todos los subgrupos del grupo de isometrías que actúa de manera propiamente discontinua en cada uno de los modelos simplemente conexos ( $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  y  $H^n$ ). A la luz de ese hecho surgen las siguientes preguntas ¿Para dimensión  $n > 2$ , hay más geometrías que las tres mencionadas? ¿Son conformes? La respuesta a la primera pregunta es afirmativa, y para responder la segunda tenemos que al menos para el caso  $n = 3$ , hay cinco nuevas geometrías (distintas de las tres ya mencionadas), que resultan no ser conformes y fueron estudiadas por **William P. Thurston**, el cual da un famoso teorema de clasificación de las ocho geometrías en dimensión 3. Se enuncia, pero no se demuestra este teorema con la finalidad de evidenciar que existen otras geometrías que no son conformes.

**Teorema 2.2.19. (Modelos Geométricos en dimensión 3).** *Existen ocho modelos geométricos  $(G, X)$  en dimensión 3 y son los siguientes:*

1. *Si los estabilizadores de cada punto tienen dimensión 3,  $X$  es  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  ó  $H^3$ .*
2. *Si los estabilizadores de cada punto tiene dimensión 1,  $X$  fibra sobre uno de los modelos geométricos de dimensión 2, en el sentido de que es invariante bajo  $G$ . Existe una métrica de Riemann  $G$ -invariante en  $X$  tal que la conexión ortogonal de la fibras tiene curvatura 0 ó 1.*
  - a) *Si la curvatura es cero,  $X$  es  $S^2 \times \mathbb{R}$  o  $H^2 \times \mathbb{R}$ .*
  - b) *Si la curvatura es 1 tenemos a la geometría **Nil** (que fibra sobre  $\mathbb{R}^2$ ) ó la geometría  $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  (que fibra sobre  $H^2$ ).*
3. *La geometría que tiene estabilizadores de dimensión cero es la geometría **Sol**, que fibra sobre la línea.*

Este teorema se encuentra demostrado en [17, Pág. 182-184]. Una descripción breve de estas geometrías puede consultarse en [5, Pág. 26-31], de manera más profunda en [17, Sección 3.8, páginas 179-190]. Con esto culminamos este capítulo.



## Capítulo 3

# Estructuras de Möbius

En este capítulo veremos la estrecha relación entre las estructuras conformemente planas y las estructuras de Möbius, el puente entre estas estructuras está garantizado por el **Teorema de Liouville**, que es un resultado fundamental de este trabajo, puesto que asegura que toda transformación conforme entre subconjuntos abiertos y conexos de la esfera es la restricción de una transformación de Möbius. Comenzamos por dar una breve descripción de las estructuras de Möbius en las superficies de Riemann. Damos un lema que garantiza el cambio conforme de una métrica para el cual necesitamos algunos conceptos de la geometría diferencial en variedades los cuales están descritos en el Apéndice A. Este lema tiene como germen el famoso **Teorema de la Transformación de Riemann**. Con este resultado podemos identificar los cambios conformes de métricas en subconjuntos distinguidos de nuestro modelo conformemente plano  $\mathbb{S}^n$ , luego podremos caracterizar nuestras transformaciones conformes entre estos subconjuntos para así obtener el Teorema de Liouville. Teniendo estos resultados daremos la descripción del grupo de transformaciones conformes en la esfera  $\mathbb{S}^n$ , el hecho impresionante es que estas estructuras de Möbius tienen una conexión muy estrecha con las variedades hiperbólicas, culminamos con una breve construcción de variedades de Möbius.

### 3.1. Estructuras de Möbius en superficies de Riemann

Como ya es costumbre comenzaremos considerando el caso de superficies, solo que ahora trataremos con un caso particular de estas que ya mencionamos en el capítulo pasado que son las superficies de Riemann.

Sea  $S$  una superficie de Riemann, es decir, una variedad diferenciable de dimensión uno compleja (o de dimensión dos real). Siguiendo la terminología de R.C. Gunning en [13] diremos que el atlas  $\{U_\alpha, z_\alpha\}$  que satisface la Definición 1.1.13, es un *cubrimiento coordinado complejo analítico* de  $S$ . Dos cubrimientos coordinados complejos analíticos se dicen equivalentes si la unión de ellos es de nuevo un cubrimiento coordinado complejo analítico, una clase de equivalencia de tales cubrimientos es llamada una *estructura compleja* en  $S$ . Ahora si consideramos a cada  $z_\alpha$  como elementos del grupo de las transformaciones de Möbius complejo

$$Möb(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Tenemos por tanto que los cambios de coordenadas (transiciones)

$$f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

también son elementos de  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ . Entonces decimos que  $\{U_\alpha, z_\alpha\}$  es un *cubrimiento coordinado de Möbius*, de manera similar decimos que dos cubrimientos coordinados de Möbius son

equivalentes si su unión es de nuevo un cubrimiento coordinado de Möbius, una clase de equivalencia de estos cubrimientos es llamada una **estructura de Möbius** en  $S$ .

Un método de construcción de superficies de Riemann, es formando el espacio cociente de una región (de discontinuidad) y un subgrupo del grupo de transformaciones de Möbius que actúa de manera propiamente discontinua en un punto de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

De manera precisa.

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $G$  un grupo de Klein con región de discontinuidad  $\Omega$ , entonces  $S = \Omega/G$  es una superficie de Riemann.*

La demostración de este hecho puede consultarse en [8, Pagina 118]. Por lo tanto el estudio de las estructuras de Möbius en una superficie de Riemann dada, contiene como un subconjunto propio a ese de sus “uniformizaciones” utilizando grupos de Fusch y de Klein. El estudio de las estructuras de Möbius en el disco unitario de  $\mathbb{R}^2$ , contiene como un subconjunto propio la teoría de funciones univalentes. Así, la noción de estructura de Möbius provee del soporte geométrico de esas grandes clásicas teorías, y provee de una dirección en la cual esas teorías admiten una provechosa generalización a dimensiones mayores. En el contexto de superficies de Riemann, una estructura de Möbius es más comúnmente conocida como una estructura  $\mathbb{CP}^1$ , cf.[13]. Más adelante hablaremos de la construcción de estructuras de Möbius en las superficies.

## 3.2. Cambio conforme de una métrica y estructuras de Möbius en variedades

Algunas ideas de la naturaleza de las transformaciones conformes se puede adquirir mediante el estudio de transformaciones de variable compleja, pero que presentan severas dificultades en su geometría. Escogiendo una transformación adecuada, el problema puede simplificarse transformando el dominio en el que se plantea el problema en otro de geometría más *accesible*. Esta idea tomada en primer lugar por **Bernhard Riemann**, a quien la teoría de las transformaciones conformes debe su desarrollo moderno en un cambio de énfasis de la teoría funciones a la parte geométrica del problema.

Podemos incluso evitar destacar la función  $f(z)$  y hacernos la siguiente pregunta ¿si, dados dos dominios  $U$  y  $V$ , siempre existe una transformación conforme continuamente diferenciable de  $U$  en  $V$ ?. La respuesta es afirmativa y la idea básica es que un mapeo conforme puede usarse para transformar un dominio dado en un dominio más simple, en el cual el problema puede resolverse mediante inspección. Al regresar otra vez al dominio original, se obtiene el resultado deseado. Que tales transformaciones siempre existen en teoría, es la afirmación del famoso teorema de la transformación de Riemann.

**Teorema 3.2.1 (Teorema de la transformación de Riemann).** *Sea  $A$  un dominio simplemente conexo tal que  $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ . Entonces existe una transformación conforme y biyectiva  $f : A \rightarrow B^2$ , donde  $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Más aún, para cualquier  $z_0 \in A$  fija, podemos encontrar una  $f$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ . Con tales condiciones  $f$  es única.*

La demostración de este hecho puede consultarse en [2, Pagina 222]. Como se vio en el ejemplo 1.2.5 mediante una transformación conforme se pudo transformar a  $H$  en  $B^2$  lo cual nos dice que son conformemente equivalentes (esto también se obtiene mediante el teorema anterior puesto que  $H$  es simplemente conexo), más aún mediante tal transformación se obtuvo una métrica en  $B^2$ , a partir de la métrica en  $H$ , este cambio conforme de métrica se puede hacer para cualquier dominio simplemente conexo que no sea todo el plano, es lo que afirma el teorema de Riemann. Para el caso de variedades se tiene el siguiente lema cuyo germen es el **Teorema de la Transformación de Riemann**, el cual garantiza un cambio conforme de métrica. Para su demostración se utilizan algunos conceptos de la geometría diferencial en

variedades, es por eso que se incluyo un apéndice con estos conceptos. En la demostración del lema se utiliza el concepto de conexión afín (ver apéndice A sección A.3), en particular el de conexión de Riemann (ver subsección A.3.1), y el Teorema de Levi-Civita A.3.7.

**Lema 3.2.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación suave y  $\tilde{g} = e^{2\phi}g$  un cambio conforme de la métrica. Si  $D$  y  $\tilde{D}$  denotan las conexiones compatibles con las métricas  $g$  y  $\tilde{g}$  respectivamente. Sea  $G = \text{grad}(\phi)$ <sup>1</sup> con respecto a  $g$ , y definimos  $S$  en todos los campos vectoriales  $X, Y$  por*

$$\tilde{D}_X Y = D_X Y + S_X Y. \quad (3.1)$$

Entonces

$$S_X Y = X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X, Y)G. \quad (3.2)$$

*Demostración.* Puesto que  $D$  es la conexiones compatible con la métrica  $g$  se tiene que (por el teorema de Levi-Civita A.3.7)  $D$  es simétrica,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M).$$

Esto dice que el tensor de torsión  $T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ , definido por  $T(X, Y) := [X, Y] - D_X Y + D_Y X$  es nulo, por tanto  $D$  es libre de torsión. De manera análoga se prueba que  $\tilde{D}$  es libre de torsión.

De aquí que

$$\begin{aligned} S_X Y - S_Y X &= \tilde{D}_X Y - D_X Y - (\tilde{D}_Y X - D_Y X) \\ &= \tilde{D}_X Y - D_X Y - \tilde{D}_Y X + D_Y X \\ &= \tilde{D}_X Y - \tilde{D}_Y X - (D_X Y - D_Y X) \\ &= [X, Y] - [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto  $S_X Y = S_Y X$ , es decir,  $S$  es libre de torsión. Luego, sean dos campos vectoriales  $V, W \in \chi(M)$  para los cuales  $\tilde{g}(V, W) = 0$ , convenimos en escribir solo  $\tilde{g}$  en lugar de  $\tilde{g}(V, W)$  para abreviar, además de que  $X(\phi) = g(X, G = \text{grad}(\phi))$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{D}_X \tilde{g} = \tilde{D}_X (e^{2\phi}g) &= X(e^{2\phi})g + e^{2\phi} \tilde{D}_X g \\ &= e^{2\phi} (2X(\phi)g + D_X g + S_X g) \\ &= e^{2\phi} (2X\phi g + S_X g). \end{aligned}$$

Esto implica que  $S_X g = -2X(\phi)g$  Así

$$(S_X)g(Y, Z) = -g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z) = -2X(\phi)g(Y, Z), \quad (3.3)$$

$$(S_Y)g(X, Z) = -g(S_Y X, Z) - g(X, S_Y Z) = -2Y(\phi)g(X, Z), \quad (3.4)$$

$$(S_Z)g(X, Y) = -g(S_Z X, Y) - g(X, S_Z Y) = -2Z(\phi)g(X, Y). \quad (3.5)$$

Sumando 3.3 y 3.4 se tiene que

$$\begin{aligned} (S_X)g(Y, Z) + (S_Y)g(X, Z) &= -g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z) - g(S_Y X, Z) - g(X, S_Y Z) \\ &= -2X(\phi)g(Y, Z) - 2Y(\phi)g(X, Z). \end{aligned}$$

Como  $S_X Y = S_Y X$  se sigue que

$$-2g(S_X Y, Z) - g(Y, S_X Z) - g(X, S_Y Z) = -2X(\phi)g(Y, Z) - 2Y(\phi)g(X, Z). \quad (3.6)$$

Ahora si restamos 3.5 de 3.6 se tiene que

$$-2g(S_X Y, Z) = -2X(\phi)g(Y, Z) - 2Y(\phi)g(X, Z) + 2Z(\phi)g(X, Y),$$

<sup>1</sup>Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  el **gradiente** de  $\phi$  se define como un campo vectorial  $\text{grad}(\phi)$  sobre  $M$  definido por  $g(\text{grad}(\phi)(p), v) = d\phi_p(v)$ ,  $p \in M$   $v \in T_p M$

dividendo por  $-2$  se obtiene que

$$\begin{aligned}
 g(S_X Y, Z) &= X(\phi)g(Y, Z) + Y(\phi)g(X, Z) - Z(\phi)g(X, Y) \\
 &= X(\phi)g(Y, Z) + Y(\phi)g(X, Z) - g(Z, G = \text{grad}(\phi))g(X, Y) \\
 &= X(\phi)g(Y, Z) + Y(\phi)g(X, Z) - g(g(X, Y)G, Z) \\
 &= g(X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X, Y)G, Z).
 \end{aligned}$$

Y de aquí se sigue 3.2 □

Para lo que sigue se utilizaran conceptos enunciados en el apéndice A sección A.4. Sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann y  $W^m$  una subvariedad con la métrica inducida por  $g$ . Sean  $D, \nabla$  las conexiones de Riemann de  $g$  y  $g|_W$  respectivamente. Si  $X, Y$  son los campos vectoriales tangenciales a  $W$ , entonces

$$D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad (3.7)$$

donde  $\nabla_X Y$  coincide con la componente de  $D_X Y$  tangencial a  $W$  y  $\alpha(X, Y)$ , por definición es la componente normal de  $D_X Y$ , esta es una forma bilineal simétrica y esta es la segunda forma fundamental de  $W$ .

Ahora sea  $\bar{g} = e^{2\phi}g$  el cambio conforme de la métrica como en 3.2.2 y se define a  $S$  y  $\sigma$  (ver 3.1), por

$$\begin{cases} \bar{D}_X Y &= D_X Y + S(X, Y) \\ \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $\bar{D}$  y  $\bar{\nabla}$  denotan las conexiones de Riemann inducidas por las métricas  $\bar{g}$  y  $\bar{g}|_W$  respectivamente. A lo largo de  $W$  descomponemos a  $G = \text{grad}(\phi)$  (calculado con respecto a  $g$ ) como

$$G = G_0 + G_1, \quad (3.9)$$

donde  $G_0$  es la componente tangencial y  $G_1$  la componente normal. Se sigue de 3.2.2 que

$$S(X, Y) = \sigma(X, Y) - \langle X, Y \rangle G_1 \quad (3.10)$$

para todos los campos vectoriales tangentes a  $W$ . Si  $\bar{\sigma}$  denota la segunda forma fundamental de  $W$  con respecto a  $\bar{g}$ . Combinando 3.7, 3.8 y 3.10 se obtiene

$$\begin{cases} \bar{\alpha}(X, Y) &= \bar{D}_X Y + \bar{\nabla}_X Y \\ &= D_X Y - \nabla_X Y + S(X, Y) - \sigma(X, Y) \\ &= \alpha(X, Y) - \langle X, Y \rangle G_1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Si  $v$  es cualquier campo vectorial normal entonces de 3.11 se sigue que la forma bilineal real  $\langle \bar{\alpha}, v \rangle, \langle \alpha, v \rangle$  difieren por un escala y así las multiplicidades de los valores propios son las mismas, y por lo tanto son invariantes conformes de  $W$  como subvariedad de  $M$ . En particular las hipersuperficies totalmente umbilicales (es decir,  $m = n - 1$  y todos los valores propios de  $\langle \bar{\alpha}, v \rangle$  son iguales) son nociones de invariantes conformes.

**Observación 3.2.3.** *Una inmersión  $x : N^{n-1} \rightarrow M^n$  es totalmente umbilical si para todo  $p \in N$ , la segunda forma fundamental  $B$  (ver definición A.4.3 en el apéndice A) de  $x$  en  $p$  satisface*

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo  $X, Y \in \chi(N)$  y para un campo vectorial unitario  $\eta$  normal a  $x(N)$ . Además si  $M$  tiene curvatura seccional constante, entonces  $\lambda$  no depende de  $p$ .

Se afirma que para  $n \geq 3$  las superficies totalmente umbilicales en  $\mathbb{R}^n$  son precisamente los subconjuntos abiertos de hiperplanos y de las  $(n - 1)$ -esferas redondas. Las ideas de la demostración de esta afirmación son las siguientes:

como  $\mathbb{R}^n$  tiene curvatura seccional constante igual a 0 (ver observación A.5.2 en el apéndice A), entonces  $\lambda = \text{constante}$ . Si  $\lambda = 0$ , entonces  $\langle \nabla_X \eta, Y \rangle = 0$  para todo  $X, Y \in \chi(N)$  y todo  $\eta \in \chi(N)^\perp$ . Se sigue que  $x(N)$  está contenido en un  $n$ -plano afín contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\lambda \neq 0$ , consideramos la transformación  $y : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$y(p) = x(p) - \frac{\eta(p)}{\lambda}, \quad p \in N.$$

Sean  $T, Y \in \chi(N)$ . Observamos que

$$\langle \nabla_T y, Y \rangle = \langle T, Y \rangle - \frac{1}{\lambda} \langle \nabla_T \eta, Y \rangle = 0.$$

Se sigue que  $y(N)$  se reduce a un punto, llamémoslo  $x_0$ , y que  $x$  satisface que

$$|x(p) - x_0| = \frac{1}{\lambda^2},$$

esto es,  $X(N)$  está contenido en una esfera de centro en  $x_0$  y radio  $\frac{1}{\lambda}$ .

Una mejor expresión de este hecho es la declaración: las hipersuperficies totalmente umbilicales en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  son precisamente los subconjuntos abiertos de las  $(n-1)$ -esfera redondas (ver la demostración 2.2).

El hecho 3.2.2 es la base de la rigidez en una estructura conformemente plana en la dimensión  $n \geq 3$ . Para ello se utilizan las transformaciones conformes definidas localmente en  $\mathbb{R}^n$  y que en una variedad conformemente plana  $M$ , hay una familia distinguida de subvariedades, a saber, la noción de un subconjunto abierto de una  $(n-1)$ -esfera redonda (y por lo tanto, también la noción de un abierto de una  $p$ -esfera redonda,  $1 \leq p \leq n-1$ ) tiene un significado en  $M$ . En particular una transformación conforme entre  $n$ -variedades conformemente planas, conserva estas  $p$ -esferas redondas, que es lo que nos asegura la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.4.** *Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  conformemente plana, con  $n \geq 3$ . El grupo de los difeomorfismos conformes de  $M$  consiste precisamente de esos que transforman  $(n-1)$ -esferas redondas en sí mismas.*

*Demostración.* Sea  $C_0$  el grupo de todos los difeomorfismos conformes y  $C$  el grupo de aquellos difeomorfismos que preservan  $p$ -esferas redondas, como sabemos  $C_0 \subset C$ . Sea  $f \in C$ . Nuestro problema es demostrar que en un punto  $p$  de  $M$  la diferencial  $df_p$  es una homotecia. Ya que la cuestión es local podemos suponer que  $f$  fija a  $p$  y por otra parte una vecindad de  $p$  es identificada conformemente con una vecindad de el origen de  $\mathbb{R}^n$ , y así  $p$  está identificado con el origen.

Ahora usaremos la **descomposición polar** de  $df_p$ , la cual nos dice que podemos escribir a la matriz asociada a  $df_p$  como

$$[df_p] = DU,$$

donde  $D$  es una matriz simétrica definida positiva y  $U$  una matriz ortogonal, dado que  $df_p$  es un difeomorfismo esta descomposición es única. El significado geométrico de la descomposición polar es muy sencillo. Indica precisamente que la acción de la transformación lineal  $df_p$  del espacio  $T_p M$  puede ser representada de la forma siguiente: primero el espacio  $T_p M$  se dilata en  $n$  direcciones recíprocamente ortogonales con un coeficiente de dilatación concreto, real y no negativo, en cada una de las direcciones y después gira alrededor del origen de coordenadas.

Entonces

$$[df_p]U^t = D$$

como  $D$  es simétrica positiva sabemos del álgebra lineal que existe  $Q \in O(n)$  y  $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  matriz diagonal tal que

$$D = Q\Sigma Q^t,$$

de aquí que

$$[df_p]U^t = Q\Sigma Q^t \Rightarrow Q^t[df_p]U^tQ = \Sigma.$$

Es decir, podemos tomar a  $[df_p]$  como una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

en términos de un sistema de coordenadas estándar. Ahora ya que  $f$  preserva  $(n - 1)$ -esferas redondas, y  $M$  es conformemente plana, se sigue que la acción de  $df_p$  en  $T_pM$  también preserva estas  $(n - 1)$ -esferas redondas, entonces se tiene que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n,$$

es decir,  $df_p$  es una homotecia, que es lo que se quería demostrar. □

Este hecho es de gran importancia puesto que lo utilizaremos en la demostración del Teorema de Liouville.

Si denotamos por  $M(n)$  el grupo de todos los difeomorfismos de  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$  que envía  $(n - 1)$ -esferas redondas en si mismas. Por 3.2.4 para  $n \geq 3$  este grupo coincide con  $C(\mathbb{S}^n)$  el grupo de los difeomorfismos conformes.

Ahora sabemos bien que mediante la proyección estereográfica podemos identificar a  $\mathbb{S}^n$  con  $\hat{\mathbb{R}}^n$  y en la sección 1.3 estudiamos la transformaciones de Möbius directamente conformes en  $\hat{\mathbb{R}}^n$  (véase definición 1.3.13). Entonces, las transformaciones de Möbius envían  $(n - 1)$ -esferas redondas en si mismas, por lo tanto tenemos que

$$C(\mathbb{S}^n) = M(n) = M(\hat{\mathbb{R}}^n).$$

Por lo tanto  $M(n)$  es el grupo de transformaciones de Möbius de dimensión  $n$ , y sus elementos son transformaciones de Möbius.

### 3.3. Teorema de Liouville

En dimensión  $n \geq 3$ , las transformaciones de Möbius agotan todas las transformaciones conformes. Es lo que garantiza el siguiente Teorema debido a **Liouville**. La demostración de este teorema esta basado en el hecho 3.2.4.

**Teorema 3.3.1** (Liouville). Sean  $U, V$  subconjuntos abiertos conexos de  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 3$  y  $f : U \rightarrow V$  una transformación conforme. Entonces  $f$  es la restricción de una transformación de Möbius  $\tilde{f}$ . Además  $\tilde{f}$  se determina únicamente por  $f$ .

*Demostración.* Sabemos que el grupo  $M(n)$  es no vacío ya que la clase entera de isometrías en  $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ , (ver 2.1.2) esta contenida en  $M(n)$ , es decir, al menos todo  $O(n + 1) \subset M(n)$ .  $M(n)$  actúa transitivamente sobre  $p$ -esferas redondas y  $p$ -esferas redondas cerradas ( $1 \leq p \leq n - 1$ ), esto por 3.2.4.

Ahora sea  $B$  una  $(n - 1)$ -bola redonda contenida en  $U$ . Entonces  $f(B)$  es una  $(n - 1)$ -bola redonda en  $V$  por 3.2.4. Luego si componemos por un elemento de  $M(n)$  podemos asumir que  $f$  transforma a  $B$  en si mismo, como se indica en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & f(B) \\ & \searrow & \downarrow \mu \\ & & B \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma \in M(n) \end{array}$$

Además podemos suponer que  $B$  es la semi esfera superior (cf. Observación 1.3.16). Geométricamente podemos interpretar a  $\partial B$  como un meridiano en la esfera  $\mathbb{S}^n$ . Sea  $r : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  la reflexión en el meridiano  $\partial B$ .

Entonces para  $x \notin B$ , la fórmula

$$\tilde{f}(x) = r(f(r(x))), \quad (3.12)$$

define una extensión conforme de  $f$  a  $\mathbb{S}^n$ . Por otra parte una extensión de  $f$  a una pequeña vecindad de  $B$  es única ya que cualquier punto en una vecindad de este tipo es un punto de intersección de segmentos de arcos circulares que se encuentran en el interior  $\text{int}B$  de  $B$  y  $f$  envía estos arcos circulares en sí mismos. Por la conexidad de  $\mathbb{S}^n$  tenemos que  $f$  tiene una única extensión conforme a  $\mathbb{S}^n$ . Así  $\tilde{f}$  es esta extensión y  $\tilde{f}$  coincide con  $f$  en el dominio de definición de  $f$ .  $\square$

Hay un gran interés en la determinación de los requisitos de suavidad óptimos en la transformación para la validez del Teorema de Liouville. Por el momento, se puede tomar el argumento anterior para transformaciones  $C^\infty$ . Observe que, dado que  $\tilde{f}$  coincide con  $f$  en una vecindad de  $B$ ,  $\tilde{f}$  sería  $C^\infty$  junto con  $f$ . Un cuidadoso examen de la prueba se muestra que la prueba anterior es válida para transformaciones  $C^3$  en la cual no hondearemos. Por lo general, en las pruebas disponibles en la literatura se supone que  $f$  debe ser  $C^4$  (véase [12, Pagina 138] y [11, Pagina 170]). La noción de una transformación conforme tiene sentido para transformaciones  $C^1$  también. Pero no hay ninguna demostración sencilla conocida del Teorema de Liouville asumiendo que  $f$  sea únicamente  $C^1$ . En el contexto de la teoría de homeomorfismos cuasiconformes es natural definir transformación conforme como una transformación 1-cuasiconforme. Una demostración de la validez del teorema de Liouville para transformaciones 1-cuasiconformes se debe a Bojarski e Iwaniec [9].

**Observación 3.3.2.** *Notese de nuevo la diferencia entre el caso  $n = 2$  y  $n \geq 3$ . En la prueba del Teorema de Liouville esta basada fuertemente en la proposición 3.2.4 para  $n \geq 3$ . Por el contrario para el caso  $n = 2$ , el cual podemos identificar con el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$ , la prueba muestra que una transformación en un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{S}^2$  que envía arcos circulares en sí mismos es la restricción de una transformación de Möbius (en  $\hat{\mathbb{C}}$  esta es una propiedad geométrica característica de las transformaciones de Möbius). Por otro lado, es bien conocido que las transformaciones conformes entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{S}^2$  no son solo las de Möbius si no que hay una rica familia de transformaciones conformes y son aquellas transformaciones holomorfas o antiholomorfas con derivada no nula, es decir que para el caso  $n = 2$  tenemos que*

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \text{M}(2) \subsetneq \text{C}(\mathbb{S}^2) = \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}),$$

donde  $\text{Hol}(\hat{\mathbb{C}})$  denota el conjunto de todas las funciones de variable compleja holomorfas con derivada no nula. En este sentido, el teorema de la transformación de Riemann 3.2.1 garantiza si  $A$  y  $B$  son dos dominios simplemente conexos con  $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ ,  $B \neq \hat{\mathbb{C}}$ , entonces existe una transformación conforme y biyectiva  $g : A \rightarrow B$ . En efecto, si  $f : A \rightarrow \Delta$  y  $h : B \rightarrow \Delta$  son las transformaciones de Riemann de  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces si tomamos  $g = h^{-1} \circ f$ , entonces  $A$  y  $B$  son conformemente equivalentes vía la transformación  $g$ . Por lo tanto dos dominios simplemente conexos (distintos de  $\hat{\mathbb{C}}$ ) son conformemente equivalentes, pero no necesariamente  $g$  es una transformación de Möbius. Lo que es igual de notable es que todavía a nivel global las transformaciones conformes de  $\mathbb{S}^2$  preservan círculos redondos. Debemos también observar que la rigidez dada por el teorema de Liouville para  $n \geq 3$  contrasta con la propiedad de rigidez que se tiene del teorema de la transformación de Riemann 3.2.1.

**Observación 3.3.3.** *El contenido de el Teorema de Liouville es que una variedad conformemente plana de dimensión  $n \geq 3$  admite una estructura de Möbius. Así la noción de una variedad conformemente plana y una variedad de Möbius, son equivalentes para  $n \geq 3$ .*

**Observación 3.3.4.** *Para el caso de superficies de Riemann tenemos el Teorema 3.1.1, el cual nos garantiza que podemos construir tales superficies mediante un cociente entre la región de*

discontinuidad de un grupo de Klein por este grupo, lo cual provee a estas superficies de una estructura de Möbius, como vimos en la primera sección de este capítulo, de manera análoga una clase importante de variedades de Möbius surge como sigue. Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{S}^n$  y  $\Gamma$  un subgrupo del grupo  $M(n)$  que deja invariante a  $\Omega$  y que actúa de manera propiamente discontinua y libremente en  $\Omega$ . Entonces  $\Omega/\Gamma$  tiene una estructura de Möbius. A estas variedades les llamaremos **variedades de Klein**. Con tal  $\Gamma$  uno construye, de hecho, el mayor subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{S}^n$  en el que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua. Estas variedades son de mucha importancia para ver la conexión de estructuras de Möbius con la geometría hiperbólica.

### 3.3.1. Los grupos $M(n)$ y $M(\mathbb{R}^n)$

Antes de continuar recordaremos una serie de conceptos, que se dan a partir de la definición de acción de un grupo en un espacio (cf. 1.1.20).

**Definición 3.3.5.** Dada una acción  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$ . Para todo  $g \in G$  la transformación  $\gamma_g : X \rightarrow X$  definida por  $\gamma_g(x) = \alpha(g, x) = g(x)$  se llamara **transición**.

Esta función es biyectiva.

**Definición 3.3.6.** Sean  $H$  y  $N$  grupos tales que hay una acción  $\alpha : H \times N \rightarrow N$  dada por automorfismos ( $\alpha_h \in \text{Aut}(N)$ ,  $\forall h \in H$ ). El producto semidirecto de  $N$  y  $H$ , es el conjunto  $N \times H$  con la operación

$$(n, h) * (n', h') = (n\alpha_h(n'), hh').$$

Se Denota a este grupo como

$$H \triangleright N.$$

La identidad es  $(e_N, e_H)$ .

Dado  $(n, h) \in H \triangleright N$  definimos  $(n, h)^{-1} = (\alpha_h^{-1}(n^{-1}), (h)^{-1})$ .

Otro concepto importante es el de **Grupo de Lie**.

**Definición 3.3.7.** Un grupo  $G$  es un grupo de Lie si  $G$  es un variedad diferenciable y las funciones

$$\eta_1 : G \times G \rightarrow G; \eta_1(g, h) = g \cdot h$$

$$\eta_2 : G \rightarrow G; \eta_2(g) = g^{-1}$$

multiplicación e inversión respectivamente, son diferenciables.

**Observación 3.3.8.** Con estos conceptos en mente, consideremos a los grupos  $\text{GL}(n)$  y  $\text{Tr}(n)$  que son el grupo de todas las transformaciones regulares de  $\mathbb{R}^n$  (o en términos de matrices es el grupo de matrices con determinante distinto de cero) y el grupo de las traslaciones de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Definamos una acción

$$\alpha : \text{GL}(n) \times \text{Tr}(n) \rightarrow \text{Tr}(n),$$

dada por  $\alpha(A, \tau_b) = \tau_b \circ A = Ab$ .

Dada esta acción  $\alpha$  por 3.3.5 tenemos la transformación transición

$$\gamma_A : \text{Tr}(n) \rightarrow \text{Tr}(n),$$

dada por  $\gamma_A(\tau_b) = \tau_b \circ A = Ab$ . Además tenemos el siguiente homomorfismo de grupos

$$\varphi_\alpha : \text{GL}(n) \rightarrow \text{Aut}[\text{Tr}(n)] \text{ definido por } \varphi_\alpha(A) = \gamma_A.$$

Entonces tenemos una acción  $\alpha$  dada por automorfismos  $\gamma_A \in \text{Aut}[\text{Tr}(n)]$ . Luego por la definición 3.3.6 podemos definir el producto semidirecto de  $\text{Tr}(n)$  y  $\text{GL}(n)$ , como el conjunto  $\text{Tr}(n) \times \text{GL}(n)$  con la operación

$$(\tau_b, A) * (\tau_a, B) = (\tau_b \gamma_A(\tau_a), AB) = (b + Aa, AB),$$

a este grupo lo denotaremos por

$$\mathrm{GL}(n) \triangleright \mathrm{Tr}(n).$$

Ahora consideremos a el grupo

$$\mathrm{Affi}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + b, A \in \mathrm{GL}(n), b \in \mathbb{R}^n \text{ fijo}\}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{GL}(n) \triangleright \mathrm{Tr}(n) &\longrightarrow \mathrm{Affi}(\mathbb{R}^n) \\ (\tau_b, A) &\mapsto f(x) = Ax + b. \end{aligned}$$

Veamos que  $\Psi$  es isomorfismo de grupos. Primero veamos que  $\Psi$  es homomorfismo. Si  $(\tau_b, A), (\tau_a, B) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \triangleright \mathrm{Tr}(n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \Psi[(\tau_b, A) * (\tau_a, B)] &= \Psi[(\tau_b \gamma_A(\tau_a), AB)] \\ &= \Psi[(b + Aa), AB] \\ &= ABx + Aa + b. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \Psi[(\tau_b, A)] \circ \Psi[(\tau_a, B)] &= f(x) \circ g(x) \\ &= f(Bx + a) \\ &= ABx + Aa + b. \end{aligned}$$

De aquí que  $\Psi$  es homomorfismo, veamos la inyectividad. Supongamos que

$$\Psi[(\tau_b, A)] = \Psi[(\tau_a, B)].$$

Entonces

$$Ax + b = Bx + a,$$

por tanto

$$A = B \text{ y } b = a \Rightarrow \tau_a = \tau_b,$$

por tanto  $\Psi$  es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto  $\mathrm{GL}(n) \triangleright \mathrm{Tr}(n) \cong \mathrm{Affi}(\mathbb{R}^n)$ .

El espacio  $\mathbb{R}^n$  tiene una estructura de Möbius (puesto que es conformemente plana). Si  $M(\mathbb{R}^n)$  denota el grupo de todos los difeomorfismos de Möbius (isometrías euclidianas) de  $\mathbb{R}^n$ . Fijando el origen 0. Claramente  $M(\mathbb{R}^n)$  contienen a

$O(n)$  = Las isometrías que fijan el origen.

$R_+$  = las homotecias  $x \mapsto \lambda x \lambda \in \mathbb{R}_+ x \in \mathbb{R}^n$

$Tr(n)$  = las traslaciones.

De manera análoga a la observación 3.3.8 si consideramos a  $O(n)$  y  $Tr(n)$ , podemos definir una acción

$$\alpha : O(n) \times \mathrm{Tr}(n) \longrightarrow \mathrm{Tr}(n),$$

dada por  $\alpha(A, \tau_b) = \tau_b \circ A = Ab$ .

Dada esta acción  $\alpha$  por 3.3.5 tenemos la transformación transición

$$\gamma_A : \mathrm{Tr}(n) \longrightarrow \mathrm{Tr}(n),$$

dada por  $\gamma_A(\tau_b) = \tau_b \circ A$ . De la cual podemos tener el siguiente homomorfismo de grupos

$$\varphi_\alpha : O(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}[\mathrm{Tr}(n)] \text{ definido por } \varphi_\alpha(A) = \gamma_A.$$

Entonces tenemos una acción  $\alpha$  dada por automorfismos  $\gamma_A \in \text{Aut}[\text{Tr}(n)]$ . Luego por la definición 3.3.6 podemos definir el producto semidirecto de  $\text{Tr}(n)$  y  $\text{O}(n)$ , como el conjunto  $\text{Tr}(n) \times \text{O}(n)$  con la operación

$$(\tau_b, A) * (\tau_a, B) = (\tau_b \gamma_A(\tau_a), AB),$$

a este producto semidirecto lo denotaremos por

$$\text{O}(n) \triangleright \text{Tr}(n).$$

Por el Teorema 1.3.10 sabemos que toda isometría  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  es de la forma

$$f(x) = Ax + b,$$

donde  $A$  es una matriz ortogonal y  $b \in \mathbb{R}^n$  fijo. Sea  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  el grupo de todas las isometrías de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos

$$\begin{aligned} \psi : \text{O}(n) \triangleright \text{Tr}(n) &\longrightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \\ (\tau_b, A) &\mapsto f(x) = Ax + b. \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos por la observación 3.3.8 que  $\psi$  es isomorfismo de grupos. De aquí obtenemos la siguiente observación.

**Observación 3.3.9.** *El grupo de las isometrías en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ , es isomorfo al producto semidirecto  $\text{O}(n) \triangleright \text{Tr}(n)$ .*

Ahora si definimos  $\text{O}(n) \cdot \mathbb{R}_+ = \{A \cdot \lambda : A \in \text{O}(n) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ , y damos la acción

$$\alpha : \text{O}(n) \cdot \mathbb{R}_+ \times \text{Tr}(n) \longrightarrow \text{Tr}(n),$$

dada por  $\alpha(A \cdot \lambda, \tau_b) = \tau_b \circ A \cdot \lambda$ . Obtenemos de manera análoga una acción dada por automorfismos, entonces podemos obtener el producto semi directo

$$(\text{O}(n) \cdot \mathbb{R}_+) \triangleright \text{Tr}(n).$$

**Teorema 3.3.10.** *Para  $n \geq 2$  tenemos que  $M(\mathbb{R}^n) \cong (\text{O}(n) \cdot \mathbb{R}_+) \triangleright \text{Tr}(n)$ .*

*Demostración.* Si denotamos por  $M_0$  el lado derecho del isomorfismo y escribimos  $M$  en lugar de  $M(\mathbb{R}^n)$ . Por la observación 3.3.9 tenemos que  $M_0 \subset M$ .

Consideramos a  $\mathbb{S}^n = \hat{\mathbb{R}}^n$ , vía la proyección estereográfica el grupo  $M(\mathbb{R}^n)$  puede ser identificado como el subgrupo de  $M(n)$  que fija a el punto  $\infty$  (ver (2) en el Teorema 1.3.21). Además una  $(n-1)$ -esfera redonda que pasa por  $\infty$  corresponde a un  $(n-1)$ -plano en  $\mathbb{R}^n$ . Se sigue de la proposición 3.2.4 que los elementos de  $M$  envían  $(n-1)$ -planos en si mismos, así por el llamado teorema fundamental de la geometría proyectiva valido para  $n \geq 2$  se sigue que  $M$  esta contenido en el grupo afín  $\text{Affi}(\mathbb{R}^n)$  de transformaciones de  $\mathbb{R}^n$ . Luego por la observación 3.3.8 tenemos que

$$\text{GL}(n) \triangleright \text{Tr}(n) \cong \text{Affi}(\mathbb{R}^n). \quad (3.13)$$

Luego

$$M(\mathbb{R}^n) \bigcap \text{GL}(n) \cong \text{O}(n) \cdot \mathbb{R}_+. \quad (3.14)$$

Y de aquí que  $M \cong M_0$ . □

Dado que  $M(\mathbb{R}^n)$  es el subgrupo de isotropía de  $M(n)$  en el punto  $\infty$ , se sigue que  $M(\mathbb{R}^n)$  es un grupo de Lie y consiste de transformaciones analíticas reales.

### 3.3.2. El modelo lineal de $M(n)$

Se comienza, observando que la esfera  $S^n$  de radio  $R$  es la frontera de una bola abierta  $B^{n+1}$  de radio  $R$ . En esta bola se puede definir la métrica de Lobachevsky, dada por

$$h_{ij} = \frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2} \delta_{ij}, \quad r^2 = \sum_{i=0}^{n+1} (x_i)^2 < R^2. \quad (3.15)$$

Se puede demostrar que el grupo de isometrías de  $B^{n+1}$  con esta métrica (que podemos llamar espacio de Lobachevsky, y denotarlo por  $L^{n+1}$ ) es  $O(1, n+1)$ . Claramente  $O(n+1)$  es un subgrupo de  $O(1, n+1)$  (a saber es el subgrupo que esta constituido por aquellas transformaciones que fijan a  $x_0$  y ortogonales con  $x_1, \dots, x_{n+1}$ ). Note que, como en  $L^2$  (ver ejemplos 2.2.10 y 2.2.17), el espacio  $L^{n+1}$  se puede realizar como al superficie cuadrática en  $\mathbb{R}^{n+2}$  definida por la ecuación

$$Q(x) = x_0^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2,$$

y con métrica

$$ds^2 = dx_0^2 - \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2.$$

Por lo tanto, la relación entre los sistemas coordenadas  $x_1, \dots, x_{n+1}$  y  $u_0, \dots, u_n$  (como para el caso  $L^2$ ) de la superficie cuadrática y  $L^{n+1}$  esta dada por

$$x_\alpha = \frac{2R^2 u_{\alpha-1}}{R^2 - r^2} \quad \alpha = 1, \dots, n+1, \quad (3.16)$$

$$\text{donde } r^2 = \sum_{\alpha=1}^{n+1} (u_{\alpha-1})^2.$$

Sea  $O(Q) = \{\text{el grupo de todas las isometrías lineales de } (\mathbb{R}^{n+2}, Q)\}$ .  $O(Q)$  preserva la forma cuadrática

$$X(Q) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid Q(x) = 0\},$$

que es un cono esférico derecho en  $\mathbb{R}^{n+2}$  con vértice en el origen. Los subgrupos que preservan el hemiespacio  $x_0 > 0$  contiene dos de las cuatro componentes. Siguiendo la notación de Ravi S. Kulkarni en [15, Pag. 15] denotaremos a este subgrupo por

$$O_{\frac{1}{2}}(Q) = \{g \in O(Q) \mid g \text{ preserva } x_0 > 0\}.$$

Ahora  $O_{\frac{1}{2}}(Q)$  también actúa en el espacio de rayos en  $X(Q)$  de el origen en el hemiespacio  $x_0 > 1$ .

Este espacio de hemirayos en turno puede ser identificado con

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid Q(x) = 0, x_0 = 1\} = \mathbb{S}^n.$$

Las  $(n-1)$ -esferas redondas en  $\mathbb{S}^n$  son precisamente la intersección transversa de  $(n+2)$ -planos en  $\mathbb{R}^{n+2}$  que pasan por el origen. Se sigue que  $O_{\frac{1}{2}}(Q)$  actúa en  $\mathbb{S}^n$  enviando esferas redondas en si mismas. Así por la proposición 3.2.4

$$M(n) \cong O_{\frac{1}{2}}(Q). \quad (3.17)$$

Esto identifica a  $M(n)$  como un grupo de Lie. En resumen tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.11.** *El grupo  $O_{\frac{1}{2}}(Q)$  actúa en el espacio de Lobachevsky  $L^{n+1}$ , induce transformaciones en la esfera  $S^n$  (como por ejemplo, en el modelo  $L^{n+1}$  o en  $B^{n+1}$  con frontera  $S^n$  y métrica 3.15). Esto induce transformaciones todas distintas en  $S^n$ , conformes en la métrica estándar en  $S^n$  ( $\bar{h}_{ij} = \frac{R^4}{(R^2+r^2)^2}\delta_{ij}$ ), no tiene singularidades, e incluye a las transformaciones conformes básicas (traslaciones, rotaciones, dilataciones y la composición de ellas). Como consecuencia el grupo de todas las transformaciones de la métrica Euclidiana (o de la esfera  $S^n$ )  $n \geq 3$ , es isomorfo a  $O_{\frac{1}{2}}(Q)$ .*

### 3.3.3. La conexión con la geometría Hiperbólica

Con el Teorema de Liouville podemos ahora si describir las isometrías de el espacio hiperbólico usando el modelo  $H^n$  con la métrica  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ .

**Proposición 3.3.12.** *Las isometrías de  $H^n$  son la restricción a  $H^n \subset \mathbb{R}^n$  de las transformaciones conformes de  $\mathbb{R}^n$  que toman a  $H^n$  en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $n \geq 3$ . Sea  $f : H^n \rightarrow H^n$  una isometría con la métrica  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ . Por el teorema de Liouville 3.3.1,  $f$  se extiende a una transformación conforme de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica Euclidiana  $g'_{ij} = \delta_{ij}$  (delta de Kronecker). Dado que  $H^n$  es completo con la métrica  $g_{ij}$ ,  $f$  envía a  $H^n$  sobre sí mismo.

Recíprocamente, sea  $f : H^n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow H^n$  una transformación conforme de  $H^n$  sobre  $H^n$  sea  $\{e_i\}_{i=1}^n$  un marco ortonormal en la métrica  $g_{ij}$  en un punto  $p \in H^n$ . Dado que  $f$  y  $g_{ij}$  son conformes, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\langle df_p(e_i), df_p(e_j) \rangle = \lambda^2 \delta_{ij},$$

donde  $\langle -, - \rangle$  denota el producto interior en la métrica  $g_{ij}$ .

Por lo tanto la base  $\{\frac{df_p(e_i)}{\lambda}\}_{i=1}^n$  es también ortonormal en  $f(p)$  y por el Corolario 2,3 del teorema de Cartan que se encuentra en [11, Pág. 159], tenemos que existe una isometría  $g$  de  $H^n$  que toma a  $p$  y lo envía  $f(p)$  con  $dg(e_i) = \frac{df_p(e_i)}{\lambda}$ . De lo que fue demostrado en la primera parte, tenemos que  $g$  es conforme. De aquí que si  $h = g^{-1} \circ f$  es la restricción a  $H^n$  de una transformación conforme de  $\mathbb{R}^n$  que toma a  $H^n$  sobre sí mismo, dejando fijo a  $p$  y satisfaciendo que  $dh_p = \lambda Id$ .

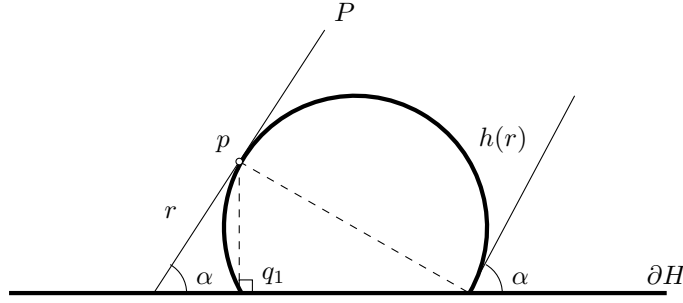
La prueba se completa si mostramos que  $h = Id$ . En otras palabras, debemos mostrar que si  $h$  es una transformación conforme de  $\mathbb{R}^n$  que toma a  $H^n$  sobre sí mismo, dejando fijo a un punto  $p \in H^n$  y es tal que  $dh_p = \lambda Id$ , entonces  $h = Id$ .

Para ver esto, sea  $P$  un hiperplano que pasa por  $p$ . del Teorema de Liouville,  $h(P)$  es un hiperplano o una esfera que pasa por  $p$ . Por que  $dh_p$  es un múltiplo de la identidad tenemos que  $P$  y  $h(P)$  son tangentes en  $p$ . Ya que  $h$  toma la frontera  $\partial H^n$  de  $H^n$  en sí misma, y como  $h$  es conforme el ángulo que forma  $P$  con  $\partial H^n$  es el mismo ángulo que forma  $h(P)$  con  $\partial H^n$ .

Afirmamos que  $h(P) = P$ . Consideremos una línea recta  $r_1$  que pasa por  $p$  y que es perpendicular a  $\partial H^n$ , y se  $q_1 = r_1 \cap \partial H^n$ . Ya que la imagen  $h(r_1)$  de  $r_1$  es una línea recta o una circunferencia y tomando el mismo ángulo que forman  $r_1$  con  $\partial H^n$ , por lo tanto  $h(r_1) = r_1$  de aquí que  $h(q_1) = q_1$ . Esto muestra que si  $P$  es perpendicular a  $\partial H^n$  entonces  $h(P) = P$ .

Si  $P$  no es perpendicular a  $\partial H^n$ , consideremos a  $r$  una línea contenida en  $P$ . De nuevo  $h(r)$  es un círculo o una línea. Si suponemos que  $h(r)$  es un círculo, tenemos el mismo ángulo  $\alpha$  con  $\partial H^n$  que hace  $r$  con  $\partial H^n$ , es necesario que  $q_1 \in h(r)$  (ver figura 3.1), que contradice el hecho de que  $h(q_1) = q_1$ . De aquí que  $h(r)$  debe de ser una línea, y puesto que  $r$  era arbitraria en  $P$ , se tiene que  $h(P) = P$ , como se afirmaba.

Se sigue entonces que  $h$  no puede ser una inversión o una isometría distinta de la identidad. Por el Teorema de Liouville se tiene que  $h$  debe de ser una dilatación, pero  $h$  manda a  $H^n$  sobre sí mismo, por lo tanto  $h$  debe ser la identidad.  $\square$


 Figura 3.1:  $\mathbb{H}^n$ 

Con este resultado en mente, identificaremos algunas importantes hipersuperficies del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ . Se demuestra igual que para el caso  $n = 2$ , que la intersección con  $\mathbb{H}^n$  de hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ , ortogonales con  $\partial\mathbb{H}^n$  y la intersección con  $\mathbb{H}^n$  de esferas de  $\mathbb{R}^n$ , con centro en  $\partial\mathbb{H}^n$ , son subvariedades totalmente geodésicas de  $\mathbb{H}^n$ . Ahora determinaremos la intersección con  $\mathbb{H}^n$  de planos y esferas de  $\mathbb{R}^n$  en cualquier posición.

**Observación 3.3.13.** Como vimos en la observación 1.3.17 de la sección 1.3 podemos considerar el otro modelo hiperbólico que es el modelo de la bola. Además en esta misma observación vemos que podemos obtener la isometrías de la bola mediante las isometrías de  $\mathbb{H}^n$ . Para aclarar esto y para otros propósitos, es conveniente dar una isometría explícita entre  $\mathbb{H}^n$  y la bola

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2\}, \quad p = (x_1, \dots, x_n).$$

Por la observación 1.3.17 tenemos la métrica en  $B^n$  dada por

$$h_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{2}|x|^2\right)^2}.$$

Proponemos a la transformación  $f : B^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  dada por

$$f(x) = 4 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} - (0, \dots, 0, 1), \quad \text{donde } x_0 = (0, \dots, -2). \quad (3.18)$$

Veamos que es una isometría. En efecto si  $v$  es un vector en  $x$  y  $\langle -, - \rangle$  denota el producto interior en la métrica Euclidiana,

$$\langle df_x(v), df_x(v) \rangle = \frac{16 \langle v, v \rangle}{|x - x_0|^4}.$$

Por otro lado, si ponemos a  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , obtenemos

$$f_n(x) = \frac{4(x_n + 2)}{|x - x_0|^2} - 1 = \frac{4 - |x|^2}{|x - x_0|^2},$$

por lo tanto,

$$\frac{\langle df_x(v), df_x(v) \rangle}{(f_n(x))^2} = \frac{16 |x - x_0|^4 \langle v, v \rangle}{(4 - |x|^2)^2 |x - x_0|^4} = \frac{\langle v, v \rangle}{\left(1 - \frac{1}{4}|x|^2\right)^2}.$$

Puesto que  $f$  es inyectiva concluimos que  $f$  es isometría de  $B^n$  sobre  $\mathbb{H}^n$ . Observe que  $f$  toma  $\partial B^n - \{x_0\}$  en  $\partial\mathbb{H}^n$ .

Notese que, por el Teorema de Louville 3.3.1, una transformación  $g : B^n \rightarrow B^n$  es una isometría de  $B^n$  con la métrica  $h_{ij}$  si y sólo si  $g$  es la restricción a  $B^n$  de una transformación de Möbius de  $\mathbb{R}^n$  que toma a  $B^n$  en si mismo.

Ahora sea  $S \subset \mathbb{H}^n$  una  $(n-1)$ -esfera de el espacio Euclidiano completamente contenida en  $\mathbb{H}^n$ . Afirmamos que  $S$  es una esfera geodésica de  $\mathbb{H}^n$  en la métrica  $g_{ij}$ . Para ver esto, sea  $f^{-1}(S)$  la imagen de  $S$  por la isometría  $f^{-1} : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n$  dada en 3.18. Luego por 3.2.4  $f^{-1}(S)$  es una  $(n-1)$ -esfera redonda completamente contenida en  $B^n$ . Es posible transformar el centro (Euclidiano) de  $S$  sobre el origen de  $B^n$  por una isometría de  $B^n$ . Dado que la métrica  $h_{ij}$  de  $B^n$  es simétrica con respecto de el origen, la esfera así obtenida es una esfera geodésica en  $B^n$  y lo mismo pasa con su imagen isométrica  $S \subset \mathbb{H}^n$ .

Consideremos ahora una  $(n-1)$ -esfera Euclidiana  $S$  tangente a  $\partial\mathbb{H}^n$  en  $p$  y tal que  $S - \{p\} \subset \mathbb{H}^n$ . Por una inversión de  $\mathbb{R}^n$  en  $p$  (que es una isometría en  $\mathbb{H}^n$ ),  $S$  se transforma en un hiperplano  $P$  paralelo a  $\partial\mathbb{H}^n$ . Dado que la métrica inducida en  $P$  de  $\mathbb{H}^n$  es un múltiplo de la métrica Euclidiana,  $P$  es una variedad de curvatura constante igual a cero, lo mismo pasa con su imagen isométrica  $S - \{p\}$ . Tales variedades son llamada **horoesferas** de  $\mathbb{H}^n$ .

Consideremos finalmente una esfera Euclidiana  $S$  que corta a  $\partial\mathbb{H}^n$  con un ángulo  $\alpha$ , y denotamos la intersección  $S \cap \mathbb{H}^n$  con  $\mathbb{H}^n$  por  $\Sigma$ . Por una inversión de  $\mathbb{R}^n$  en un punto de  $S \cap \mathbb{H}^n$ ,  $\Sigma$  es transformada isométricamente en la intersección, con  $\mathbb{H}^n$ , de un hiperplano  $P$  que corta a  $\partial\mathbb{H}^n$  en un mismo ángulo  $\alpha$ . Considere el hiperplano  $Q$  que es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^n$  y que contiene a  $P \cap \partial\mathbb{H}^n$ . Probemos que  $P$  es un hiperplano equidistante de la hipersuperficie totalmente geodésica  $Q$ . Para esto, sea  $\gamma_r$  una geodésica, representada en  $\mathbb{H}^n$  por un semicírculo de radio  $r$ , con centro  $o$  en  $P \cap \partial\mathbb{H}^n$  y en el plano perpendicular a  $P \cap \partial\mathbb{H}^n$ . Ya que existe una homotecia con centro  $o$  que toma el círculo de radio  $r$  en el círculo de cualquier radio, la longitud de  $\gamma_r$  entre los puntos de intersección de  $\gamma_r$  con  $P$  y  $Q$  no depende de  $r$ . Concluimos que  $P$ , o su imagen isométrica  $\Sigma$ , son obtenidas por tomar geodésicas perpendiculares a una hipersuperficie totalmente geodésica  $Q$  y que se encuentra a una distancia fija. Tales hipersuperficies son llamadas **superficies equidistantes** (hiperesferas).

Por las observaciones 1.3.16 y 1.3.17 de la sección 1.3 se tiene que  $B^n$  y  $\mathbb{H}^n$  son conformemente equivalentes y por el teorema de Louville 3.3.1 son variedades de Möbius equivalentes. Ahora

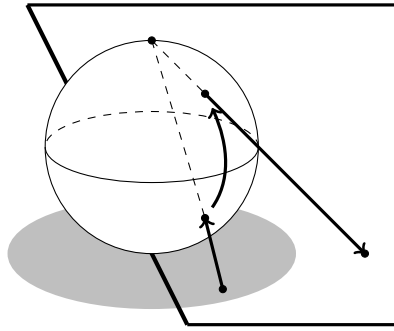


Figura 3.2:  $B^n$  y  $\mathbb{H}^n$  variedades de Möbius equivalentes.

si denotamos por  $M(\mathbb{H}^n)$  y  $M(B^n)$  los grupos de difeomorfismos que preservan la estructura de Möbius de  $\mathbb{H}^n$  y  $B^n$  respectivamente, luego por la proposición 3.3.12 y la observación 3.3.13 tenemos que  $M(\mathbb{H}^n)$  es transitivo en  $\mathbb{H}^n$ , en resumen tenemos.

**Proposición 3.3.14.**  $B^n$  y  $\mathbb{H}^n$  son variedades de Möbius equivalentes. Además  $M(\mathbb{H}^n)$  actúa de manera transitiva en  $\mathbb{H}^n$ .

Como observamos en el capítulo 3.  $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  admite una métrica de Riemann y que además tiene curvatura constante igual a  $-1$ . Luego vimos una generalización para  $\mathbb{H}^n$ , la cual no demostramos, pero ahora y con el enfoque que hemos adoptado podemos enunciar y demostrar una notable propiedad de  $B^n$ .

**Proposición 3.3.15.**  $B^n$  admite una métrica de Riemann invariante bajo  $M(B^n)$ . Esta métrica es completa y tiene curvatura constante negativa.

*Demostración.* Es conveniente considerar a  $B^n$  como la semiesfera superior en  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (véase 1.3.16 y 1.3.17):  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_{n+1} > 0\}$ . La proyección estereográfica de  $N = (0, \dots, 0, 1)$  sobre  $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$  transforma  $\partial B^n$  sobre la esfera unitaria

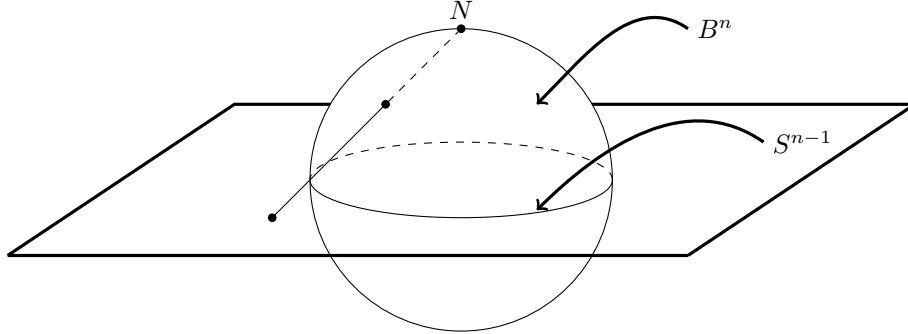


Figura 3.3:  $B^n$  como semi esfera.

$S^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Luego si  $G$  denota el subgrupo de isotropía de  $M(\mathbb{S}^n)$  en  $N$ . Entonces podemos identificarlo con  $M(\mathbb{R}^n)$ . Así el subgrupo de isotropía  $K$  de  $M(B^n)$  en  $N$  es igual a  $G \cap M(B^n)$ . Así  $K$  puede ser identificado con el subgrupo de  $M(\mathbb{R}^n)$  que deja invariante a  $S^{n-1}$ . De la descripción de  $M(\mathbb{R}^n)$  en el Teorema 3.3.10 y por el primer inciso de el Teorema 1.3.21 tenemos que  $K \cong O(n)$ . En particular  $K$  es compacto. Así tomamos una métrica  $K$ -invariante en el espacio tangente  $T_p(B^n)$ , luego al trasladarla por  $M(B^n)$ , obtenemos una métrica de Riemann  $M(B^n)$ -invariante en  $B^n$ . Dado que  $O(n)$  es transitivo en los subespacios de dimensión 2 de  $T_p(B^n)$ , se sigue que la métrica de Riemann tiene una curvatura constante, y como esto es cierto para cualquier métrica de Riemann completa, tenemos que esta métrica es completa. Puesto que  $B^n$  y  $H^n$  son isométricos y como  $H^n$  es el espacio hiperbólico con curvatura constante negativa, se sigue que  $B^n$  también.  $\square$

Ahora  $M(B^n)$  es un grupo de Lie para  $n \geq 2$ . Podemos identificar a  $B^n$  con una bola redonda  $\Sigma$  en  $\mathbb{S}^n$ . Así por el Teorema de Liouville para  $n \geq 3$  tenemos que

$$M(B^n) = \{g \in M(\mathbb{S}^n) : g(\Sigma) = \Sigma\}.$$

Es conveniente ahora usar el modelo lineal de  $M(n)$  (cf. 3.3.2). En este modelo podemos tomar a

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid Q(x) = 0, x_0 = 1, x_{n+1} > 0\}.$$

Así,

$$M(B^n) = \{g \in O_{\frac{1}{2}}(Q) : g \text{ preserva } x_{n+1} > 0\}. \quad (3.19)$$

Obviamente el lado derecho de 3.19 puede ser identificado con  $O_{\frac{1}{2}}(Q_0)$  donde  $Q_0$  es de la forma  $x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que es considerado como un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+2}$  con  $x_{n+1} = 0$ . Por lo tanto tenemos.

**Proposición 3.3.16.**  $M(B^n) \approx 2$  de las cuatro componentes de  $O(1, n) \cong M(n-1)$  donde para  $n = 2$   $M(1)$  es interpretado simplemente como dos componentes apropiadas de  $O(1, 2)$ .

Ahora consideremos la situación anterior desde un ángulo diferente. Consideremos a  $\mathbb{S}^n$  como  $\partial B^{n+1}$ . Entonces lo anterior significa que el grupo de Möbius,  $M(n)$ , se extiende únicamente a  $B^{n+1}$ , y en  $B^{n+1}$  actúa como el grupo de todas las isometrías de  $B^{n+1}$  con respecto a la métrica hiperbólica. Esto establece una relación fundamental entre la geometría conforme y la hiperbólica. Por un lado, una variedad hiperbólica, es decir, una variedad de Riemann de curvatura constante negativa tiene una estructura canónica de Möbius. Por otro lado, una variedad de Möbius es un límite ideal de alguna variedad hiperbólica.

Por la observación 3.3.4 sabemos como construir variedades de Klein, ahora consideremos a  $H^{n+1}$ . Si  $f \in \text{Aut}(H^{n+1})$  entonces por el teorema de Liouville se tiene que  $f \in M(n+1)$ , para  $n \geq 2$ . Luego por la proposición 3.3.12 tenemos que

$$\text{Isom}(H^{n+1}) = \text{Aut}(H^{n+1}) = \{f \in M(n+1) : f(H^{n+1}) = H^{n+1}\}.$$

Es claro de la definición de extensión de Poincaré 1.3.15 que

$$M(n) < \text{Aut}(H^{n+1}).$$

Por otro lado, si  $f \in \text{Aut}(H^{n+1})$ , entonces  $f(\hat{\mathbb{R}}^n) = \hat{\mathbb{R}}^n$  y luego la restricción de  $f$  a  $\hat{\mathbb{R}}^n$  es un automorfismo conforme de este y luego una transformación (extendida) de Möbius cuya extensión de Poincaré es exactamente ella misma, es decir,

$$\text{Aut}(H^{n+1}) = M(n) = \text{Isom}(H^{n+1}).$$

De aquí vemos ya una relación entre el grupo  $M(n-1)$  y el grupo de isometrías de  $H^n$ . Ahora estamos en condiciones de entender la relación entre las variedades hiperbólicas con las variedades de Möbius. Primero, una variedad hiperbólica  $M^n$  de dimensión  $n$  es una variedad que se obtiene como cociente de  $H^n$  por un grupo  $G$  de isometrías que no tiene torsión (es decir, no contiene elementos elípticos), es decir  $M^n = H^n/G$ . Por otro lado, como  $G$  es un grupo de transformaciones de Möbius de la esfera  $\mathbb{S}^n$ , podemos mirar el cociente  $M^n = \Omega/G$ , donde  $\Omega$  es la región de discontinuidad de  $G$  en  $\mathbb{S}^n$ . Es claro que tenemos en este caso  $H^n \cup \sigma(H^n) \subset \Omega$ , donde  $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ . Tenemos entonces que  $M^n$  es una variedad diferenciable cuyos cambios de coordenadas son restricciones de transformaciones de Möbius, es decir, una variedad de Möbius. También debemos considerar otra variedad de Möbius asociada al grupo  $G$ . Como  $G$  deja también invariante a  $\mathbb{S}^{n-1}$  (el borde del espacio hiperbólico), podemos considerar el cociente  $M^{n-1} = (\Omega \cap \mathbb{S}^{n-1})/G$  (en caso que  $\Omega \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \emptyset$ ). Tenemos que la variedad  $M^{n-1}$  está conformemente incrustada en la variedad de Möbius  $M^n$  como una subvariedad de codimensión 1. Esta subvariedad divide a  $M^n$  en dos variedades  $M$  y  $\bar{M}$ , ambas hiperbólicas y anticonformemente equivalentes (el automorfismo anticonforme está inducido por la reflexión en el hiperplano  $\{x_n = 0\}$ ). Por supuesto, está el caso en que  $\Omega \cap \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$ , en cuyo caso  $M^n$  consiste de dos componentes conexas  $M$  y  $\bar{M}$  como antes. Ejemplos de este último caso corresponde a las variedades hiperbólicas de volumen finito y, en particular, compactas. En el caso que  $G$  contiene elementos elípticos, ya no obtenemos variedades hiperbólicas, en su lugar aparecen los orbifolds hiperbólicos. Teniendo esto en mente podemos ahora si enunciar la siguiente proposición

**Proposición 3.3.17.** *Sea  $M = \Omega/\Sigma$  una variedad de Klein (véase la observación 3.3.4) tal que  $\Sigma$  es libre de torsión. Entonces, existe una variedad  $N^{p+1}$  con frontera  $= M$  tal que  $\text{int}(N^{p+1})$  admite una métrica hiperbólica completa.*

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $M = \Omega/G$  donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{S}^n$ , y  $G < M(n)$ , tal que  $G$  deja invariante a  $\Omega$  y además actúa de manera propiamente discontinua y libre aquí. Consideramos a

$$\tilde{N} = \Omega \cup B^{n+1}.$$

Como se explico anteriormente la acción de  $G$  en  $\Omega$  se extiende canónicamente en  $\tilde{N}$ , y en efecto  $G$  actúa como grupo de isometrías en  $B^{n+1}$ . Ya que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega$  este grupo es discreto (en la topología compacto abierta) como un grupo de homeomorfismos de  $B^{n+1}$ . Ahora un grupo discreto actúa de manera propiamente discontinua. Ya que  $G$  es libre de torsión entonces la acción en  $B^{n+1}$  es libre y propiamente discontinua así  $B^{n+1}/G$  es una variedad hiperbólica plana. Luego  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\tilde{N}$ . Así si definimos a  $N^{p+1} = \tilde{N}/G$  es una variedad con frontera que cumple con las propiedades requeridas.  $\square$

A la luz de este hecho podemos considerar a un grupo  $G$  de isometrías de el espacio hiperbólico  $H^n$  de dimensión  $n$  que actúa en la esfera al infinito  $S^{n-1} = \partial H^n$  como un subgrupo del grupo de Möbius  $M(n-1)$ . Esta acción es propiamente discontinua en  $H^n \cup \Omega(G)$  donde  $\Omega(G) \subset S^{n-1}$  es la región de discontinuidad de  $G$ , y uno puede así definir una variedad de Klein  $M(G)$  como el espacio cociente

$$M(G) = [H^n \cup \Omega(G)]/G = [\bar{H}^n - \Lambda(G)]/G.$$

La proyección natural  $\pi : H^n \cup \Omega(G) \rightarrow M(G)$  induce una estructura conforme en  $M(G)$  que coincide con la estructura hiperbólica en el  $int(M(G)) = H^n/G$ .

### 3.4. Construcción de variedades de Möbius

Consideremos el caso  $n = 2$  (real) identificado con  $\mathbb{C}$ , entonces un homeomorfismo es holomorfo si, y solo si, este es conforme y preserva orientación. Por lo tanto una isimetría que preserva orientación de el modelo de Poincaré de el disco (o de  $H$ ) es biholomorfo, y así toda superficie orientable hereda la estructura de una variedad compleja, además sabemos que todo elemento de  $Aut(B^2)$  tiene como forma analítica

$$\gamma(z) = \exp(i\theta) \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha \in B^2,$$

que es un subgrupo del grupo de Möbius

$$Möb(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Pero además  $Aut(B^2)$  es su grupo de isometrías con respecto de la métrica de  $B^2$  entonces toda superficie de Riemann hiperbólica tiene una estructura canónica de Möbius. Ahora si consideramos una región simplemente conexa que no es todo  $\mathbb{C}$ . El teorema de la transformación de Riemann 3.2.1 nos permite obtener el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B^2 \\ \uparrow g & & \downarrow \gamma \\ A & \xrightarrow{f} & B^2 \end{array}$$

Entonces del diagrama,

$$g = f \circ \gamma \circ f^{-1},$$

es decir, todos los automorfismos de un dominio simplemente conexo  $A \neq \hat{\mathbb{C}}$  los obtenemos por medio de la conjugación, vía la transformación de Riemann y los automorfismos del disco unitario  $Aut(A) = f \circ Aut(B^2) \circ f^{-1}$ . Por lo tanto todo dominio simplemente conexo que no es todo el plano tiene asociada una geometría hiperbólica y además una estructura canónica de Möbius.

La proyección estereográfica de la esfera unitaria en  $\mathbb{C}$  es una transformación conforme. Una colección de transformaciones obtenidas por rotaciones de la esfera y luego por la proyección estereográfica de  $\mathbb{C}$  constituyen un atlas para una estructura compleja en  $\mathbb{S}^2$ . Esta estructura es una estructura de Möbius que como habíamos mencionado al principio de este capítulo es una estructura compleja de  $\mathbb{CP}^1$ .

Similarmente, las isometrías que preservan la orientación de  $\mathbb{R}^2$  son holomorfas, y además este grupo de isometrías es un subgrupo del grupo  $Möb(\hat{\mathbb{C}})$ , por tanto también acepta una estructura canónica de Möbius.

Se sigue que una estructura, hiperbólica, Euclidiana o esférica en cualquier superficie orientable puede ser relajada a una estructura analítica compleja y más aún se puede relajar a una

estructura de Möbius. El recíproco de esta afirmación es el ya mencionado **Teorema de uniformización** (véase 2.1.13) que enunciaremos de la siguiente manera, la cual fue extraída del libro [17, Página 117].

*Toda estructura compleja en una superficie  $S$  puede tomar una y solo una estructura, hiperbólica o Euclidiana o esférica, que hace a  $S$  un espacio métrico completo.*

Además cualquier métrica de Riemann en una superficie orientable  $S$  da lugar a una estructura compleja en  $S$ , por que alrededor de cada punto de  $S$  uno puede encontrar coordenadas isotermas (véase Teorema 2.1.2), las transformaciones entre conjuntos de tales coordenadas son conformes.

Dado que toda superficie diferenciable acepta una métrica de Riemann vimos que cualquier superficie orientable tiene una métrica completa de curvatura constante.

En todas las dimensiones construiremos ahora variedades de Klein.

1. Si  $\Omega = S^n$ : dado que  $\Omega$  es compacto un grupo  $\Gamma$  que actúa de manera propiamente discontinua aquí debe ser finito. Luego de la sección 3.3.2 vemos que  $O(n+1)$  es un subgrupo maximal compacto de  $M(n)$ . De aquí que  $\Gamma$  debe de ser conjugado a un subgrupo de  $O(n+1)$ . Así las variedades  $\Omega/\Gamma$  obtenidas de esta forma son precisamente del tipo conforme a espacios forma esféricos.
2. Si  $\Omega = S^n - \{ \text{un punto} \}$  que es una variedad de Möbius equivalente a  $\mathbb{R}^n$ . De la forma descrita para  $M(\mathbb{R}^n)$  vemos que un elemento en  $M(\mathbb{R}^n) - E(n)$  es de orden infinito o tiene un punto fijo, así no esta contenido en ningún  $\Gamma$  que actué libremente y de manera propiamente discontinua en  $\mathbb{R}^n$  entonces se tiene que  $\Gamma < E(n)$ . Así  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  son precisamente aquellas variedades de tipo conforme a los espacios forma Euclidianos.
3. Si  $\Omega = S^n - \{ 2 \text{ puntos} \}$ : de manera alternativa uno puede considerar a  $\Omega$  como  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . El grupo  $M(\Omega)$  tiene un subgrupo de índice 2 que fija el 0 y el  $\infty$ ,  $G \cong R_+ \times O(n)$ , y actúa transitivamente en  $\Omega$  con subgrupo de isotropía en un punto isomorfo a  $O(n-1)$ . Puesto que este grupo es compacto vemos que  $\Omega$  admite una métrica de Riemann invariante bajo  $M(\Omega)$ . En efecto, en términos de coordenadas polares podemos tomar esta métrica como

$$\frac{dr^2}{r^2} + d\sigma_{n-1}^2, \tag{3.20}$$

donde  $d\sigma_{n-1}^2$  es la métrica estándar en  $S^{n-1}$  haciendo a  $\Omega$  isométrico a  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ . Luego un subgrupo discreto de  $M(\Omega)$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega$ . Ahora si tenemos un subgrupo discreto de  $G$  entonces este es finito o contiene un subgrupo  $\Psi \cong \mathbb{Z}$  de índice finito generado por un elemento de la forma  $\lambda A$ ,  $\lambda > 1$  y  $A \in O(n)$  donde  $A = Id$  o es de orden infinito. Entonces  $\Omega/\Psi$  es difeomorfo a  $S^{n-1} \times S^1$ .  $\lambda$  y la rotación  $A$  son ambas invariantes bajo la estructura de Möbius en  $\Omega/\Psi$ . Un espacio cociente compacto de  $\Omega$  por  $\Gamma < M(\Omega)$  que actúa libremente y de manera propiamente discontinua es llamada una **variedad de Hopf**. Como notamos arriba, una variedad de Hopf es finitamente cubierta por variedades difeomorfas a  $S^{n-1} \times S^1$ .

# Conclusiones

La geometría conforme nos permite estudiar a las superficies diferenciables de curvatura constante, y a la vez también podemos estudiar a la geometría Euclidiana y a las no Euclidianas ( $K = \text{constante}$ , si  $K = 0$ , tenemos el modelo Euclidiano, si  $K > 0$ , tenemos el modelo esférico y si  $K < 0$ , tenemos el modelo hiperbólico). Pero la geometría conforme no distingue esta tricotomía. Esta geometría las estudia mediante cambios conformes de métricas y transformaciones conformes que suelen ser también isometrías (con respecto a su métrica correspondiente) y forman un grupo. Esto nos permite hablar de acciones de grupos e invariantes bajo la acción, es decir, estamos utilizando el enfoque de Riemann y el enfoque de Klein juntos para hablar de estructuras conformes. Dado que para el caso  $n \geq 3$  las estructuras conformes y las de Möbius son equivalentes, podemos construir variedades con un método (análogo al caso de construcción de superficies de Riemann), el cual es formando el espacio cociente de una región de discontinuidad (esta región se obtiene de la acción propiamente discontinua de un subgrupo del grupo de transformaciones conformes en un espacio dado) y el grupo que genera esta región. Estas variedades de Klein, tiene una estrecha relación con la geometría hiperbólica y es por eso que esta geometría es la mas rica y complicada de las geometrías conformes.

Con el trabajo aquí expuesto sobre geometría conforme se habrá un panorama muy amplio para poder realizar estudios posteriores. Como por ejemplo

1. Estudiar las posibles uniformizaciones de las variedades que aceptan estructuras conformes, podría pensarse en trabajar una posible generalización parcial del teorema de Uniformización, al menos para este tipo de variedades.
2. Estudiar la conexión con las ecuaciones diferenciables y sus grupos de soluciones con los grupos y espacios que trabaje y así poder obtener una clasificación de estas (otra manera de uniformizar estas variedades).
3. Estudiar la dinámica local de campos vectoriales conformes.



# Apéndice



# Apéndice A

## Geometría diferencial en variedades diferenciables

Este apéndice es para poder entender de manera precisa el lema 3.1 el cual involucra conceptos muy importantes de la geometría diferencial en variedades diferenciables.

### A.1. Campos vectoriales

Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $TM$  su haz tangente y  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica. Un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es una transformación que asigna a cada punto  $p \in M$  un vector tangente a  $M$  en ese punto,  $X_p \in T_pM$ . Esto es, una transformación  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = Id_M$ .

Un campo  $X$  se dice diferenciable (resp. continuo) si  $X$  es diferenciable  $C^\infty$  (resp. continua) como transformación entre variedades. Así, si tomamos coordenadas  $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$  entonces  $X$ , que puede escribirse

$$X_p \equiv X(p) = X_1(p) \left. \frac{\partial}{\partial q_1} \right|_p + \dots + X_n(p) \left. \frac{\partial}{\partial q_n} \right|_p \quad \forall p \in M$$

será diferenciable en  $p_0 \in U$  si y sólo si  $X_1, \dots, X_n$  son aplicaciones diferenciables en  $p_0$ .

En particular, observemos que sobre el abierto  $U$  las coordenadas inducen  $n$  campos vectoriales diferenciables  $\left. \frac{\partial}{\partial q_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial q_n} \right|_p$  (campos coordenados) en función de los cuales podemos expresar cualquier otro campo sobre  $U$ . Como en el caso de variedades y aplicaciones entre variedades, de ahora en adelante supondremos, salvo mención explícita de lo contrario, que los campos vectoriales son “diferenciables”, por lo que omitiremos esta palabra.

Denotaremos por  $\chi(M)$  al conjunto de todos los campos vectoriales sobre  $M$ . Veamos cuáles son las operaciones naturales en  $\chi(M)$ .

1. Suma:

$$\begin{aligned} \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\mapsto X + Y \end{aligned}$$

definida por  $(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad \forall p \in M$ .

2. Producto por números reales:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (a, X) &\mapsto aX \end{aligned}$$

definida por  $(aX)_p = aX_p \quad \forall p \in M$ .

3. Producto por funciones:

$$\begin{aligned} C^\infty(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (f, X) &\mapsto fX \end{aligned}$$

definida por  $(fX)_p = f(p)X_p \forall p \in M$ , donde  $C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es suave}\}$ .

El conjunto  $\chi(M)$  dotado de las dos primeras operaciones tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión  $\infty$  (salvo que  $M$  tenga dimensión 0, en cuyo caso  $\chi(M) \equiv 0$ ). Por otra parte,  $\chi(M)$  con la primera y la tercera operación verifica propiedades formalmente análogas a las de un espacio vectorial sobre  $C^\infty(M)$ . Ahora bien,  $C^\infty(M)$  no es un cuerpo, ya que no existe inverso respecto al producto para funciones que, sin ser idénticamente nulas, se anulen en algún punto de la variedad. De hecho,  $C^\infty(M)$  sólo tiene estructura de anillo conmutativo con uno. Se dice entonces que  $\chi(M)$  es un módulo sobre el anillo  $C^\infty(M)$ .

Fijado un campo vectorial  $X \in \chi(M)$ , para cada función  $f \in C^\infty(M)$  podemos definir la transformación

$$\begin{aligned} X(f) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto X_p(f). \end{aligned}$$

Si tomamos coordenadas  $(U, \varphi = q_1, \dots, q_n)$  y  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}$  entonces

$$X(f) = \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) (f) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \in C^\infty(M).$$

En consecuencia, para cada  $X \in \chi(M)$  tenemos una transformación

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty \\ f &\mapsto X(f). \end{aligned}$$

Es  $\mathbb{R}$ -lineal y verifica la regla de Leibniz, esto es:

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Fijados  $r$  campos vectoriales  $X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$  diremos que son independientes (punto a punto) si el conjunto de vectores  $\{X_1(p), \dots, X_r(p)\} \subset T_pM$  es linealmente independiente para todo  $p \in M$ . En este caso necesariamente  $r \leq n$  ( $n = \dim(M)$ ). Obviamente, si son independientes y  $r = n$  entonces el conjunto  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  es una base de cada espacio tangente  $T_pM$ . En este caso diremos que  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una base (global) de campos vectoriales (o bien una referencia móvil). En general, no tienen por qué existir  $r$  campos independientes sobre toda la variedad, por lo que existen variedades que no admiten una base global de campos.

## A.2. Corchete de Lie de campos vectoriales

Consideremos una base de campos de vectores  $\{X_1, \dots, X_n\}$  sobre un abierto  $U$  de una variedad  $M$ . Fijado un punto  $p \in M$  nos preguntamos si existen coordenadas  $(q_1, \dots, q_n)$  alrededor de  $p$  tales que

$$X_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \tag{A.1}$$

sobre  $U$ . Para responder a esta pregunta consideremos una función  $f \in C^\infty(M)$ . Podemos construir entonces funciones  $X_i(f) \in C^\infty(M)$  y, repitiendo el proceso,  $X_j(X_i(f)) \in C^\infty(M)$ . Si la base de campos proviniese de un sistema de coordenadas entonces se verificaría A.1 y, por tanto,

$$X_j(X_i(f)) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}.$$

Del lema de Schwarz se deduce entonces que

$$X_j(X_i(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} = X_i(X_j(f)).$$

Por tanto, una condición necesaria para que una base de campos vectoriales sea localmente de campos coordenados (esto es, que verifique A.1 en un entorno de cada  $p \in M$ ), es que se verifique:

$$X_i(X_j(f)) = X_j(X_i(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

La justificación de que esta propiedad es suficiente conduce a la siguiente definición.

**Definición A.2.1.** Si  $X, Y \in \chi(M)$ , definimos su corchete de Lie en un punto  $p \in M$  como la transformación

$$\begin{aligned} [X, Y]_p &: C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Observamos que de esta definición se puede deducir fácilmente la identidad de Leibniz para el producto:

$$[X, Y]_p(fg) = f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f).$$

En efecto

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\ &= X_p(gY(f) + fY(g)) - Y_p(gX(f) + fX(g)) \\ &= X_p(g)Y_p(f) + g(p)X_p(Y(f)) + X_p(f)Y_p(g) + f(p)X_p(Y(g)) - \\ &\quad - Y_p(g)X_p(f) - g(p)Y_p(X(f)) - Y_p(f)X_p(g) - f(p)Y_p(X(g)) \\ &= f(p)(X_p(Y(g)) - Y_p(X(g))) + g(p)(X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))) \\ &= f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

Puesto que  $[X, Y]_p$  es también  $\mathbb{R}$ -lineal, se tiene que A.2 define un vector tangente a  $M$  en cada punto  $p$  como derivación. Resumiendo:

**Proposición A.2.2.** Si  $X, Y \in \chi(M)$  entonces  $[X, Y]_p \in T_pM$ . Además

$$\begin{aligned} [X, Y] &: M \longrightarrow TM \\ p &\mapsto [X, Y]_p \end{aligned}$$

es un campo vectorial sobre  $M$ .

Veamos qué expresión adquiere el corchete de Lie en coordenadas locales. Sea  $(U, \phi = (q_1, \dots, q_n))$  un entorno coordinado de  $M$  y sean  $X, Y$  dos campos de vectores sobre  $M$ . Expresados en estas coordenadas se tiene:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Si escribimos en coordenadas  $[X, Y] = \sum_{k=1}^n [X, Y]_k \frac{\partial}{\partial q_k}$ , entonces

$$\begin{aligned} [X, Y]_k &= [X, Y](q_k) = X(Y(q_k)) - Y(X(q_k)) = \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial(Y(q_k))}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial(X(q_k))}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial X_k}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el corchete de Lie en coordenadas locales queda:

$$[X, Y] = \sum_{i,k=1}^n \left( X_i \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_k}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial q_k}.$$

1. El corchete de Lie de campos es un corchete de Lie “abstracto”. Esto quiere decir que es una transformación

$$[-, -] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y].$$

Que verifica las siguientes propiedades:

- a) Es lineal en cada variable, esto es,

$$[aX + bX', Y] = a[X, Y] + b[X', Y]$$

$$[X, aY + bY'] = a[X, Y] + b[X, Y']$$

para todo  $X, X', Y, Y' \in \chi(M)$  y todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- b) Es antisimétrico, esto es

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \chi(M).$$

- c) Verifica la identidad de Jacobi, esto es

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

Un espacio vectorial dotado de una operación que verifique las propiedades mencionadas arriba recibe el nombre de álgebra de Lie. En consecuencia,  $(\chi(M), [-, -])$  es un álgebra de Lie.

2. El corchete de Lie se preserva por transformaciones diferenciables. Es decir, si  $F : M \longrightarrow M'$  es diferenciable, y  $X, Y \in \chi(M)$ ,  $X', Y' \in \chi(M')$  verifican  $X'_{F(p)} = dF_p X_p$ ,  $Y'_{F(p)} = dF_p Y_p$ , para todo  $p \in M$ , entonces  $dF_p [X_p, Y_p] = [X'_{F(p)}, Y'_{F(p)}]$ .

### A.3. Concepto de conexión afín

Hasta ahora, dada una variedad diferenciable arbitraria sabemos derivar una función  $f$  con respecto a una dirección del espacio tangente  $v$ , pero no sabemos derivar un campo de vectores  $Y$ . Un primer intento para definir esta derivación sería el corchete de Lie que, si bien permitiría hablar de la derivada de un campo  $Y$  en la dirección de otro campo  $V$ , no permite derivar en la dirección del vector  $v$  en un punto. Esto es, puede ocurrir que para  $V, \tilde{V} \in \chi(M)$  con  $v = V_p = \tilde{V}_p$  se tenga  $[V, Y]_p \neq [\tilde{V}, Y]_p$ .

Para tratar de definir esta derivación consideremos en primer lugar  $\mathbb{R}^n$  con el sistema usual de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Todo campo de vectores  $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$  puede escribirse como:

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{con } Y_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable } \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Si  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$  entonces podemos definir la derivada de  $Y$  en la dirección de  $v_p$  como

$$v_p(Y) := \sum_{i=1}^n v_p(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Obviamente, esta definición depende del sistema de coordenadas escogido. Así, en una variedad arbitraria  $M$  donde no exista un sistema de coordenadas privilegiado la anterior definición carece de sentido. Por tanto, se hace necesario abstraer las propiedades deseables de esta definición de manera que sea aplicable a una variedad  $M$  arbitraria.

**Definición A.3.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una conexión afín sobre  $M$  es una transformación  $\nabla$ ,

$$\begin{aligned}\nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

que verifica:

1. Es  $\mathbb{R}$ -lineal con respecto a la segunda variable, esto es,

$$\nabla_X(aY + b\bar{Y}) = a\nabla_X Y + b\nabla_X \bar{Y}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, Y, \bar{Y} \in \chi(M).$$

2. Verifica la regla de Leibniz del producto con respecto a la segunda variable:

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \chi(M).$$

3. Es  $\mathbb{R}$ -lineal con respecto a la primera variable, esto es,

$$\nabla_{aX+b\bar{X}}(Y) = a\nabla_X Y + b\nabla_{\bar{X}} Y, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, \bar{X}, Y \in \chi(M).$$

4. Es  $C^\infty(M)$ -lineal con respecto a la primera variable, esto es,

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \chi(M).$$

Si, además, se verifica

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M),$$

entonces se dice que la conexión es simétrica.

Esta definición no es tan transparente como el de la estructura de Riemann. La siguiente proposición, sin embargo, debe aclarar la situación poco.

**Proposición A.3.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , llamada la derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c$ , que cumple

1.  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ .
2.  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , donde  $W$  es un campo vectorial a lo largo de  $c$  y  $f$  es una función diferenciable en  $I$ .
3. Si  $V$  es inducido por un campo vectorial  $Y \in \chi(M)$ , es decir,  $V(t) = Y(c(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ .

La demostración de este hecho importante puede consultarse en [11, Pag. 50-52].

Con este resultado el concepto de paralelismo se sigue de manera natural.

**Definición A.3.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Un campo vectorial a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es llamado paralelo cuando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .

### A.3.1. Conexiones de Riemann

Los siguientes conceptos y resultados son de mucha importancia puesto que sin ellos en mente no podríamos entender el trasfondo de nuestro lema principal.

**Definición A.3.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y con una métrica de Riemann  $g$ . Una conexión se dice compatible con la métrica  $g$ , cuando para cualquier curva  $c$  y cada par de campos vectoriales paralelos  $P$  y  $P'$  a lo largo de  $c$ , tenemos que

$$g(P, P') = \text{constante}.$$

La definición A.3.4 se justifica por la siguiente proposición garantiza que si  $\nabla$  es compatible con  $g$ , entonces somos capaces de diferenciar el producto interno por la regla del producto habitual.

**Proposición A.3.5.** Sea  $M$  una variedad de Riemann. Una conexión  $\nabla$  en  $M$  es compatible con la métrica si y sólo si para cualesquiera campos vectoriales  $V$  y  $W$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  tenemos

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), \quad t \in I.$$

**Corolario A.3.6.** Una conexión en una variedad de Riemann  $M$  es compatible con la métrica si y sólo si

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

Ahora podemos hablar de un teorema muy importante.

**Teorema A.3.7. (Levi-Civita).** Dada una variedad de Riemann  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  en  $M$  que satisface las siguientes condiciones

1.  $\nabla$  es simétrica,
2.  $\nabla$  es compatible con la métrica de Riemann.

Estos resultados se encuentran demostrados en [11, Sec.3 Cap.2].

## A.4. La segunda forma fundamental

Sea  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m=k}$  una inmersión. Entonces, para cada  $p \in M$ , existe una vecindad  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \bar{M}$  es una subvariedad de  $\bar{M}$ . Esto significa que existe una vecindad  $\bar{U} \subset \bar{M}$  de  $f(p)$  y un difeomorfismo  $\varphi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  en un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$ , tal que  $\varphi$  transforma a  $f(U) \cap \bar{U}$  de manera difeomorfa sobre un conjunto abierto del subespacio  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ . Para simplificar la notación, vamos a identificar a  $U$  con  $f(U)$  y a cada vector  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , con  $df_q(v) \in T_{f(q)} \bar{M}$ . Usaremos esta identificación para extender, por ejemplo, un campo vectorial local (que está definido en  $U$ ) en  $M$  a un campo vectorial local (que está definido en  $\bar{U}$ ) en  $\bar{M}$ ; si  $U$  es suficientemente pequeña, tal extensión es siempre posible. Para cada  $p \in M$ , el producto interior en  $T_p \bar{M}$  divide a  $T_p \bar{M}$  en la suma directa

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

donde  $(T_p M)^\perp$  es el complemento ortogonal de  $T_p M$  en  $T_p \bar{M}$ .

Si  $v \in T_p \bar{M}$ ,  $p \in M$ , podemos escribir a

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Llamamos a  $v^T$  **la componente tangencial** de  $v$  y a  $v^N$  **la componente normal** de  $V$ . Tal división es diferenciable, en el sentido de que las transformaciones

$$(p, v) \mapsto (p, v^T) \quad \text{y} \quad (p, v) \mapsto (p, v^N)$$

de  $T_p\bar{M}$  e si mismos son diferenciables.

La conexión de Riemann en  $\bar{M}$  es denotada por  $\bar{\nabla}$ . Si  $X$  y  $Y$  son dos campos vectoriales locales en  $M$ , y  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  sus extensiones locales en  $\bar{M}$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Esta es la conexión de Riemann relativa a la métrica inducida en  $M$ .

Queremos definir la segunda forma fundamental de la inmersión  $f : M \rightarrow \bar{M}$ . Para esto, es conveniente introducir antes la siguiente definición:

**Definición A.4.1.** Si  $X, Y$  son campos vectoriales locales en  $M$ ,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Es un campo vectorial local en  $\bar{M}$  normal a  $M$ .

$B(X, Y)$  no depende de las extensiones  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ , y por lo tanto esta bien definida. En lo que sigue, denotaremos por  $\chi(U)^\perp$  los campos vectoriales en  $U$  que son normales a  $f(U)$ . La siguiente proposición se encuentra demostrada en [11, Pag. 127] la cual nos asegura que  $B$  es una forma bilineal simétrica.

**Proposición A.4.2.** Si  $X, Y \in \chi(U)$ , la transformación  $B : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U)^\perp$  dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

es bilineal y simétrica.

Ahora estamos en posición de definir la segunda forma fundamental. Sea  $p \in M$  y  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . La transformación  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

es por la proposición A.4.2, una forma bilineal simétrica.

**Definición A.4.3.** La forma cuadrática  $II_\eta$  definida en  $T_p M$  por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

es llamada la **segunda forma fundamental** de  $f$  en  $p$  a lo largo del vector normal  $\eta$ .

Observe que la transformación bilineal  $H_\eta$  es asociad a un operador auto adjunto  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  dado por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

La siguiente proposición expresa este operador lineal asociado a la segunda forma fundamental en términos de la derivada covariante.

**Proposición A.4.4.** Sea  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  y  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Sea  $N$  una extensión local de  $\eta$  normal a  $M$ . Entonces

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Este resultado se encuentra demostrado en [11, pagina 128].

## A.5. Curvatura

Aquí se presenta una definición de curvatura que, intuitivamente, mide la cantidad que una variedad de Riemann se desvía de ser Euclidiana, la noción de curvatura seccional obtenida al empezar con esta definición de curvatura generaliza la noción de curvatura de Gauss para superficies y coincide con el concepto introducido por Riemann.

**Definición A.5.1.** *La curvatura  $R$  de una variedad de Riemann  $M$  es una correspondencia que asocia a cada par  $X, Y \in \chi(M)$  una transformación  $R(X, Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$  dado por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Riemann.

**Observación A.5.2.** *Si  $M = \mathbb{R}^n$ , entonces  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$ . De hecho, si el campo vectorial  $Z$  está dado por  $Z = (z_1, \dots, z_n)$ , con las componentes de  $Z$  viniendo de las coordenadas naturales de  $\mathbb{R}^n$ , obtenemos*

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

por lo que

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

lo cual implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

como habíamos establecido. Estamos en condiciones, por lo tanto, de pensar a  $R$  como una manera de medir qué tanto se desvía  $M$  de ser Euclidiana.

Las siguientes propiedades de la curvatura están demostrado en [11, Capítulo 4, pag. 90-93].

**Proposición A.5.3.** *La curvatura  $R$  de una variedad de Riemann tiene las siguientes propiedades:*

1.  *$R$  es bilineal en  $\chi(M) \times \chi(M)$ ; esto es,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

para  $f, g \in D(M)$ ,  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ .

2. *Para cualesquiera  $X, Y \in \chi(M)$ , el operador de curvatura  $R(X, Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$  es lineal; esto es,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

para  $f \in D(M)$ ,  $Z, W \in \chi(M)$ .

Un análisis de la demostración anterior muestra que la necesidad de que aparezca el término  $\nabla_{[X, Y]} Z$  en la definición de curvatura está conectada con el hecho de que queremos que el mapeo  $R(X, Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$  sea lineal.

**Proposición A.5.4.** *(Identidad de Bianchi).*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

**Proposición A.5.5.** *Se cumple lo siguiente:*

1.  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, T, X) + (Z, T, X, Y) = 0$ .
2.  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$ .
3.  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$ .
4.  $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$ .

Íntimamente relacionado con el operador de curvatura es la curvatura seccional (o de Riemann), la cual vamos ahora a definir.

En lo que sigue es conveniente usar la siguiente notación. Dado un espacio vectorial  $V$ , denotamos por  $x \wedge y$  la expresión

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

la cual representa el área de un paralelogramo 2-dimensional determinado por el par de vectores  $x, y \in V$ .

**Proposición A.5.6.** *Sea  $\sigma \in T_p M$  un subespacio 2-dimensional del espacio tangente  $T_p M$ , y sean  $x, y \in \sigma$  dos vectores linealmente independientes. Entonces*

$$K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

no depende de la elección de los vectores  $x, y \in \sigma$ .

**Definición A.5.7.** *Dado un punto  $p \in M$  y un subespacio 2-dimensional  $\sigma \subset T_p M$ , el número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , donde  $\{x, y\}$  es cualquier base de  $\sigma$ , es llamado la curvatura seccional de  $\sigma$  en  $p$ .*

A pesar de que el hecho de que la curvatura seccional tiene interpretaciones geométricas interesantes, su importancia viene del hecho de que conocimiento de  $K(\sigma)$ , para todo  $\sigma$ , determina a la curvatura  $R$  completamente. Este es un argumento puramente algebraico:

**Lema A.5.8.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n \geq 2$ , dotado de un producto interno  $\langle -, - \rangle$ . Sean  $R : V \times V \times V \rightarrow V$  y  $R' : V \times V \times V \rightarrow V$  dos transformaciones trilineales tales que las condiciones de la proposición A.5.5 son satisfechas por*

$$\langle x, y, z, t \rangle = \langle R(x, y)z, t \rangle, \quad \langle x, y, z, t \rangle' = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

Si  $x, y$  son dos vectores linealmente independientes, podemos escribir

$$K(\sigma) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle'}{|x \wedge y|^2}$$

donde  $\sigma$  es el espacio bidimensional generado por  $x$  y  $y$ . Si para todo  $\sigma \subset V$ ,  $K(\sigma) = K'(\sigma)$ , entonces  $R = R'$ .

Las variedades de Riemann que tienen curvatura seccional constante juegan un papel fundamental en el desarrollo de la geometría conforme. El lema anterior nos permite obtener una caracterización de tales variedades a través de las componentes  $R_{ijkl}$  de la curvatura en una base ortonormal. Esto se sigue del lema siguiente.

**Lema A.5.9.** *Sea  $M$  una variedad de Riemann y  $p$  un punto de  $M$ . Defina una transformación trilineal  $R : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  por*

$$\langle R(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo  $X, Y, W, Z \in T_p M$ . Entonces  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a  $K_0$  si y sólo si  $R = K_0 R'$ , donde  $R'$  es la curvatura de  $M$ .

**Corolario A.5.10.** Sea  $M$  una variedad de Riemann,  $p$  un punto de  $M$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $n = \dim(M)$ , una base ortonormal de  $T_p M$ . Definamos  $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ ,  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ . Entonces  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \in T_p M$ , si y sólo si

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En otras palabras,  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \in T_p M$  si y sólo si  $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$  para todo  $i \neq j$ , y  $R_{ijkl} = 0$  en los otros casos.

### A.5.1. Teorema de Cartan para la determinación de la métrica por medio de la curvatura

Sean  $M$  y  $\tilde{M}$  dos variedades de Riemann de dimensión  $n$  y sean  $p \in M$  y  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Escogemos una isometría lineal  $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Sea  $V \subset M$  una vecindad normal<sup>1</sup> de  $p$  tal que  $\exp_{\tilde{p}}$  esta definida en  $i \circ \exp_p^{-1}(V)$ . Definimos la transformación  $f : V \rightarrow \tilde{M}$  por

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q), \quad q \in V.$$

Para todo  $q \in V$  existe una geodésica normalizada  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(t) = q$ . Denotamos por  $P_t$  el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  de  $\gamma(0)$  a  $\gamma(t)$ . Definimos la transformación  $\phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \tilde{M}$  dada por

$$\phi_t(v) = \bar{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v) \quad v \in T_q M,$$

donde  $\bar{P}_t$  es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica  $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$  dada por  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ ,  $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ . Finalmente, denotamos por  $R$  y  $\tilde{R}$  las curvaturas de  $M$  y  $\tilde{M}$ , respectivamente.

**Teorema A.5.11** (E. Cartan). Con la notación de arriba si para toda  $q \in V$  y todos  $x, y, u, v \in T_q M$  tenemos

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle,$$

entonces  $f : V \rightarrow \tilde{M}$  es una isomería local y  $df_p = i$ .

Este teorema debido **E. Cartan** se encuentra demostrado en [11, Pag. 157]. Para nuestros intereses este teorema implica que los espacios con curvatura seccional constante son ricos en isometrías.

<sup>1</sup>Si  $\exp_p$  es un difeomorfismo de una vecindad  $V$  del origen en  $T_p M$ ,  $\exp_p(V) = U$  es llamada una **vecindad normal de  $p$**

# Apéndice B

## Espacios cubrientes

La teoría de los espacios recubridores está estrechamente relacionada con el estudio del grupo fundamental. Muchas cuestiones topológicas básicas sobre espacios recubridores pueden reducirse a cuestiones puramente algebraicas sobre los grupos fundamentales de los distintos espacios involucrados. Esta teoría es importante para la topología, geometría diferencial, grupos de Lie, y superficies de Riemann.

En lo que sigue se supondrá que todos los espacios son *arco-conexos* y *localmente arco-conexos* mientras no se diga lo contrario.

**Definición B.0.12.** Una transformación continua  $\rho : Y \rightarrow X$  entre espacios topológicos es llamada un cubrimiento o más precisamente  $Y$  **cubre** a  $X$  a través de  $\rho$  si se verifica:  
Para todo  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los  $V_j$  son abiertos disjuntos de  $Y$  tal que para todo  $j \in J$ ,

$$\rho|_{V_j} : V_j \rightarrow U \text{ es un homeomorfismo.}$$

En particular,  $\rho$  es un homeomorfismo local. Se designa a veces el cubrimiento  $\rho$  por el triplete  $(Y, \rho, X)$ .

### Ejemplos de cubrimientos topológicos.

**Ejemplo B.0.13.**  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  con  $\rho(t) = e^{it}$  es un cubrimiento. En efecto, tenemos que  $\mathbb{R}$  es un espacio topológico arco conexo. Es claro que  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua.

Sea  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ , supongamos que  $x > 0$  y sea  $U_{(x,y)} := \{(a, b) \in \mathbb{S}^1 | a > 0\} \subset \mathbb{S}^1$  entonces  $U_{(x,y)}$  es un abierto en  $\mathbb{S}^1$  pues  $U_{(x,y)} = \mathbb{S}^1 \cap \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | 0 < a < 2, -1 < b < 1\}$  es un abierto en  $\mathbb{R}^2$ . Además  $(x, y) \in U_{(x,y)}$ . Veamos que  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , con  $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \forall n \in \mathbb{Z}$ , es una partición de  $\rho^{-1}(U_{(x,y)})$  en hojas.

$$\rho^{-1}(U_{(x,y)}) = \{a \in \mathbb{R} | \rho(a) = (\cos 2\pi a, \sin 2\pi a) \in \mathbb{S}^1 \text{ y } \cos 2\pi a > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

con  $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Esto ya que

$$\begin{aligned} \cos 2\pi a > 0 &\Leftrightarrow 2\pi a \in (2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}) \forall n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2\pi a < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \forall n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow (n - \frac{1}{4})2\pi < 2\pi a < (n + \frac{1}{4})2\pi \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n - \frac{1}{4} < a < n + \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow a \in (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) = V_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como  $\text{sen}(2\pi a)$  es estrictamente creciente en cada  $\overline{V_n}$ ,  $\rho$  es inyectivo en cada  $V_n$ . Si  $a \in \overline{V_n} = [n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}] \Rightarrow 2\pi a \in [2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \text{sen}(2\pi a) \in [-1, 1]$ .

Además  $\rho$  mapea cada  $\overline{V_n}$  en  $\overline{U_{(x,y)}}$  y  $V_n$  en  $U_{(x,y)}$ . Como  $\overline{V_n}$  es compacto,  $\rho|_{\overline{V_n}}$  es homeomorfismo de  $\overline{V_n}$  en  $\overline{U_{(x,y)}}$ , en particular  $\rho|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$  es homeomorfismo.

Se aplica un proceso similar en los casos  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ . En estos casos se toma  $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | a < 0\}$ ,  $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | b > 0\}$  y  $U_{(x,y)} := \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | b < 0\}$ , respectivamente.

**Observación.** En el ejemplo anterior, se puede pensar en  $\rho$  como una aplicación que enrolla la recta real alrededor de  $\mathbb{S}^1$ , y el proceso aplica cada intervalo  $[n, n+1]$  sobre  $\mathbb{S}^1$ .

**Ejemplo B.0.14.**  $\rho_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  con  $\rho_n(t) = e^{int}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  es un cubrimiento.

**Ejemplo B.0.15.**  $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$  con  $\rho(z) = z^k$  y  $k \in \mathbb{N}$  es un cubrimiento.

$\rho$  es un homeomorfismo local: para  $b \in \mathbb{C}^*$  y  $a = \rho(b)$ , existen vecindades abiertas  $V_0$  de  $b$  y  $U$  de  $a$  tales que  $\rho|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Si  $w$  es una raíz  $k$ -ésima primitiva de la unidad, entonces

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j,$$

con  $V_j = w^j V_0$ . Si  $z \in V_{j_1} \cap V_{j_2}$ , se tiene  $w^{j_1 - j_2} = 1$ , entonces  $j_1 = j_2$  por lo tanto los  $V_j$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) son ajenos,  $V_j \subset \mathbb{C}^*$  son homeomorfos a  $U$  a través de  $\rho$ .

**Ejemplo B.0.16.**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  con  $\exp(z) = e^z$  es un cubrimiento.

Sea  $a = \exp(b)$ ;  $\exp$  es un homeomorfismo local, por tanto existe una vecindad abierta  $V_0$  de  $b$  y una vecindad abierta  $U$  de  $a$  tal que  $\exp|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Entonces

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

con  $V_n = 2\pi i n + V_0$  y puesto que  $V_0$  debe estar contenida en una banda de longitud  $2\pi i$ , entonces los  $V_n$  son ajenos.

### Contraejemplos.

**Contraejemplo B.0.17.** Sea  $j : Y \rightarrow X$  la inyección canónica de un abierto  $Y$  en un espacio topológico  $X$ , con  $Y \subsetneq X$ ; entonces  $j$  es un homeomorfismo local biyectivo de  $Y$  sobre su imagen, es decir  $\text{Id}_Y$ , pero para todo  $y \in \bar{Y} - Y$  y toda vecindad abierta  $U$  de  $y$  en  $X$ ,  $j^{-1}(U) \cap Y$  es un abierto de  $Y$  que no es homeomorfo a  $U$  a través de  $j$ ; por tanto  $j$  no es un cubrimiento.

**Contraejemplo B.0.18.** Sea  $f : Y \rightarrow X$  un homeomorfismo local sobre  $y$  y sea  $\{y_j\}_{j \in J}$  la fibra  $f^{-1}$  de  $x \in X$ ; todo punto  $y_j$  tiene una vecindad abierta  $V'_j$  tal que  $f|_{V'_j}$  es un homeomorfismo:  $V'_j \rightarrow f(V'_j) = U_j$ . Si  $J$  es finito, entonces  $\bigcap_{j \in J} U_j$  es un abierto  $U$  no vacío y, los  $V_j = V'_j \cap f^{-1}(U)$  son los abiertos tales que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j;$$

si para todo  $x$  los abiertos  $V_j$  son ajenos,  $f$  es un cubrimiento. Pero si  $J$  es infinito, para que sea así, es necesario que  $\bigcap_{j \in J} U_j$  sea un abierto, lo cual no siempre sucede.

**Definición B.0.19.** Se dice que una transformación continua  $\rho : Y \rightarrow X$  tiene la propiedad, de **levantar los arcos** si para todo arco  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ , y para todo  $y_0 \in Y$  tal que  $\rho(y_0) = \sigma(0)$  existe un levantamiento  $\hat{\sigma} : [0, 1] \rightarrow Y$  de  $\sigma$  tal que  $\hat{\sigma}(0) = y_0$ ;  $\hat{\sigma}$  es un arco en  $Y$ . Así que  $\sigma = \rho \circ \hat{\sigma}$ .

**Teorema B.0.20.** Todo cubrimiento  $\rho : Y \rightarrow X$  levanta los arcos.

**Teorema B.0.21.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos **Hausdorff**, siendo  $X$  conexo por arcos y  $\rho : X \rightarrow Y$  un cubrimiento. Entonces el cardinal  $\text{Card}(\rho^{-1}(x))$  es independiente de  $x \in X$ , en particular si  $Y \neq \emptyset$ ,  $\rho$  es sobre.  $\text{Card}(\rho^{-1}(x))$  es llamado el número de hojas de  $\rho$ .

**Contraejemplo B.0.22.** Sea  $\rho : (0, 10) \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $\rho(t) = e^{it}$ , entonces  $\rho$  es un homeomorfismo local que no es un cubrimiento y no tiene la propiedad de levantar arcos.

**Corolario B.0.23.** Si  $\rho : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local que levanta arcos, entonces  $\rho$  es un cubrimiento.

**Teorema B.0.24. (Existencia de un levantamiento)** Sean  $\rho : Y \rightarrow X$  un cubrimiento de espacios  $T_2$ ,  $Z$  un espacio topológico conexo por arcos y simplemente conexo y  $f : Z \rightarrow X$  una transformación continua. Entonces para todo  $z_0 \in Z$ , para todo  $y_0 \in \rho^{-1}(f(z_0)) \subset Y$ , existe un levantamiento único  $\hat{f} : Z \rightarrow Y$  de  $f$  a  $Y$  tal que  $\hat{f}(z_0) = y_0$ .

Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow \rho \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**Definición B.0.25.** Un espacio cubriente universal de  $X$  es un espacio cubriente  $(Y, \rho)$  con  $Y$  simplemente conexo.

A menudo uno abusa de la notación y dice que  $Y$  es un espacio cubriente universal de  $X$  cuando  $Y$  es simplemente conexo.

**Ejemplo B.0.26.** El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  es un espacio cubriente universal de  $\mathbb{S}^1$

Para un estudio más detallado de los espacios cubrientes y sus propiedades véase [16, Capítulo X].







# Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V.: *Conformal invariants*. McGraw-Hill, 1973.
- [2] Ahlfors, Lars V. : *Complex Analysis*. McGraw-Hill Third Edition, 1966.
- [3] Ahlfors, Lars V. y Sario, Leo: *Riemann surfaces*. Princeton Math. Ser. No. 26, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [4] Anderson, James W.: *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 1999.
- [5] Apanasov, Boris N.: *Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds*. Gruyter Expositions in Mathematics 32, (2000).
- [6] Apostol, Tom M.: *Análisis matemático*. Editorial Reverté, 1976.
- [7] Auslander, Louis and Mackenzie, Robert E.: *Introduction to Differentiable Manifolds*. McGraw-Hill 1963.
- [8] Beardon, Alan F.: *The geometry of discrete groups*. SpringerVerlag, 1983.
- [9] Bojarski, B. and Iwaniec, T.: *Another approach to Liouville Theorem*. Math. Nachr. 107 (1982), 253-262.
- [10] Do Carmo, Manfredo P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Ney Jersey, 1976.
- [11] Do Carmo, Manfredo P.: *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications, 1992.
- [12] Dubrovin, B. A. Fomenko, A. T. and Novikov, S. P.: *Modern geometry. Methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*. Springer Graduate texts in Mathematics, second edition, 1984, 1992.
- [13] Gunning, R.C.: *Special co-ordinate coverings of Riemann surfaces*. Math. Ann. 170 (1967), 67-86.
- [14] Kobayashi, S. y Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry. Volume I*. Interscience tracts in pure and applied Mathematics, number 15, 1963.
- [15] Kulkarni, Ravi S.: *Conformal Structures and Möbius Structures*. Aspects of Mathematics, a publication of the Max-Plank-Institut für Mathematik vol 12, Bonn (1988), 2-39.
- [16] Rotman, Joseph J.: *An introduction to algebraic topology*. SpringerVerlag, 1991.
- [17] Thurston, William P.: *Three-Dimensional Geometry and Topology. Volume I*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1997.







# Índice alfabético

- acción, 13
  - discontinua, 13
  - libre, 57
  - órbita de una, 57
- atlas diferenciable, 11
- cambio de coordenadas, 7
- campo vectorial, 83
- carta, 10
  - compatibles, 11
- codimensión, 17
- componente normal, 89
- componente tangencial, 89
- conexión de Riemann, 88
- conexión afín, 87
- corchete de Lie, 85
- curvatura, 41
  - de Gauss, 41
  - de una variedad de Riemann, 90
  - seccional, 91
- diferencial, 17
- espacio
  - cubriente universal, 95
- Espacios de forma, 51
- estructura conforme
  - suave, 48
- estructura conforme, 46
- estructura diferenciable, 11
- extensión, 34
  - de Poincaré, 34
- forma cuadrática, 9
- grupo, 31
  - de Lie, 68
  - de Möbius, 31
    - conforme, 33
  - producto semidirecto de, 68
- haz tangente, 17
- isometría
  - Euclidiana, 31
  - isometría, 26
- marco conforme, 48
- métrica, 19
  - cordal, 23
  - de Lobachevsky, 52
  - de Poincaré, 55
  - de Riemann, 19
    - conforme, 48
  - hiperbólica, 24
  - esférica, 26
  - pseudo-Euclidiana, 25
  - pseudo-Riemanniana, 25
- parametrización, 11
- particiones de la unidad, 26
- plano tangente, 9
- primera forma fundamental, 9
- proyección estereográfica, 29
- pseudoesfera, 51
- segunda forma, 89
- subvariedad, 17
- superficie, 6
  - de Riemann, 45
  - en forma paramétrica, 8
  - regular, 6
- Teorema
  - coordenadas conformes, 38
  - transformación de Riemann, 62
  - de Levi-Civita, 88
  - de Liouville, 66
  - de Uniformización, 45
  - de Whitney, 18
- transformación
  - conforme, 39
  - cubrimiento, 93
  - de Möbius, 30
  - difeomorfa, 15
  - diferenciable
    - real, 14
    - soporte de una, 26
  - variedades, 14

- transición, 68
- variedad, 10
  - conformemente plana, 49
  - de Klein, 68
  - de Riemann, 26
  - diferenciable, 11
- vector tangente, 8
  - de una variedad, 15