BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CONCEPTO DE LÍMITE

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ING. JOEL VILLALVAZO GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ MARTÍN ESTRADA ANALCO

CO DIRECTORA DE TESIS
DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

TUTOR
DR. ERIC FLORES MEDRANO

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2023

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

JOEL VILLALVAZO GUERRERO

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de junio de 2023, con la tesis titulada:

"DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CONCEPTO DE LÍMITE"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 26 de junio de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA'LAHR/l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

De enero de 2021 a diciembre de 2022

Becario N° de CVU: 1093996

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres por cuidarme y por siempre dar a mí y mis hermanos un hogar lleno de amor y cariño en el que pudimos crecer felices. A mi esposa Karlita por siempre apoyarme y tenerme paciencia, te amo. Agradezco a Aby por su invaluable apoyo, a mis profesores de la maestría: la Dra. Estela, el Dr. Gabriel, el Dr. José Antonio, la Dra. Lidia, el Dr. José Martín y la Dra. Araceli por compartirnos su vasta experiencia y conocimiento. A mis compañeros por su constante apoyo, acompañamiento y las enseñanzas que me brindaron, son un grupo de personas maravillosas. Agradezco en particular a mis grandes amigas Deysi, Ireri y Maya, quienes hicieron de mi paso por la maestría una experiencia divertida y agradable. Agradezco también a mis sinodales la Dra. Estela Juárez Ruíz, la Dra. María Araceli Juárez Ramírez y el Dr. Eric Flores Medrano por su profesionalidad, atención y consejos. Finalmente, me gustaría expresar mi admiración y agradecer especialmente al Dr. José Martín, sin él todo esto no sería posible.

Índice

RESUMEN 8

ABSTRACT 9

INTRODUCCIÓN 10

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES 11

Formulación y planteamiento del problema de investigación 11

Preguntas de Investigación 12

Objetivos de la investigación 12

Justificación 13

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO 16

La Historia de las Matemáticas Como Recurso de Enseñanza y Aprendizaje 16

Breve Análisis Histórico del Concepto de Límite 20

Formación de Conceptos 24

Registros de Representación Semiótica 24

Obstáculos Epistemológicos 27

Obstáculos Epistemológicos en el Aprendizaje del Concepto de Límite 29

Teoría de los significados sistémicos. 32

Ingeniería Didáctica. 35

La Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación 36

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO 37

Tipo de Investigación 37

Categorías 37

Participantes 37

Técnicas de Recolección de Datos e Instrumentos 38

Procedimiento 38

Fase de análisis preliminar. 39

Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. 39

Actividad introductoria 44

Primera actividad 48

Segunda actividad 51

Tercera actividad 56

Cuarta actividad 59

Quinta actividad 63

Fase de experimentación. 65

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS 65

Fase de análisis a posteriori. 65

Actividad introductoria 66

Primera actividad 70

Segunda actividad 73

Tercera actividad 76

Cuarta actividad 79

Quinta actividad 82

Reflexiones generales sobre las actividades 84

Conclusiones 85

REFERENCIAS 87

ANEXOS 91

Índice de tablas

Tabla 1 Síntesis de significados históricos del límite 41
Tabla 2 Categorías de análisis de los elementos del significado 42
Tabla 3 Análisis de los elementos del significado, actividad introductoria 69
Tabla 4 Análisis de los elementos del significado, actividad 1 72
Tabla 5 Análisis de los elementos del significado, actividad 2 75
Tabla 6 Análisis de los elementos del significado, actividad 3 78
Tabla 7 Análisis de los elementos del significado, actividad 4 81
Tabla 8 Análisis de los elementos del significado, actividad 5 83

Índice de figuras

Figura 1 Primer hilo conductor de la secuencia 40
Figura 2 Segundo hilo conductor de la secuencia 40
Figura 3 Representación fraccional del ojo de Horus 49
Figura 4 Figuras para cálculo de área 52
Figura 5 Triángulo inscrito en círculo 52
Figura 6 Método de exhaución 54
Figura 7 Gráfica ejemplo 54
Figura 8 Recta numérica 56
Figura 9 Significado institucional de límite 60
Figura 10 Tabla en hoja de trabajo, E1, actividad 3 77
Figura 11 Tabla en hoja de trabajo, E2, actividad 4 80

RESUMEN

En esta investigación de corte cualitativo con un enfoque interpretativo se presenta el análisis de los significados personales sobre el concepto de límite de una función, que expresan los participantes durante y después de la implementación de la secuencia didáctica diseñada.

Se tomó en cuenta al estudio histórico de la formación del concepto de límite, al análisis de los obstáculos epistemológicos más comunes que el estudiante enfrenta durante la formación del concepto de límite y a la Teoría de Registros de Representación Semiótica para el diseño, la conducción y la contextualización de las actividades.

La identificación y el análisis de los significados personales expresados por los participantes fue realizada a través de la Teoría de los Significados Sistémicos y con base en las categorías elaboradas. Se destaca como una aportación de esta investigación a la tabla: “Síntesis de significados históricos del límite”.

Las tablas elaboradas permitieron recopilar información valiosa sobre los significados expresados por los participantes y se observó que estas pueden utilizarse también como herramienta auxiliar para el diseño o evaluación de una secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de límite. Se considera que la inclusión de elementos históricos, la confrontación directa con los obstáculos epistemológicos y el uso de diferentes registros de representación semiótica tuvieron resultados positivos.

Palabras clave: Límite, Teoría de los Significados Sistémicos, obstáculos epistemológicos, historia como recurso de aprendizaje.

ABSTRACT

This qualitative research with an interpretive approach, presents the analysis of the personal meanings of the concept of limit of a function, expressed by the participants during and after the implementation of the designed didactic sequence.

The historical study of the formation of the concept of limit, the analysis of the most common epistemological obstacles that the student faces during its learning process and the Theory of Semiotic Representation Registers, were used for the design, conduction, implementation, and contextualization of activities.

The identification and analysis of the personal meanings expressed by the participants was carried out through the Theory of Systemic Meanings and based on the elaborated categories. The table: "Synthesis of historical meanings of the limit" stands out as a contribution made by this research.

The designed data tables allowed to collect valuable information about the meanings expressed by the participants, and it was observed that these tables can also be used as an auxiliary tool for the design or evaluation of a didactic sequence designed to learn the concept of limit. The analysis shows that the inclusion of historical elements, the direct confrontation with epistemological obstacles and the use of different registers of semiotic representation had positive results.

Keywords: Limit, Theory of Systemic Meanings, epistemological obstacles, history as a learning resource.

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más complejos que el estudiante debe aprender en las matemáticas del nivel medio superior en México es el de límite. Cornu (2002) se manifiesta en este sentido, señalándolo como una noción particularmente difícil, típica del tipo de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas. Por su parte, Artigue (1995) considera a la conceptualización y la formalización de la noción de límite como una de las dificultades para acceder al cálculo

En esta tesis de maestría se presenta una propuesta de diseño de una secuencia didáctica para iniciar el aprendizaje del concepto de límite de una función y la investigación realizada alrededor de tal secuencia, utilizando como referente de diseño metodológico a la ingeniería didáctica. Se toma en cuenta al estudio histórico de la formación del concepto de límite y al análisis de los obstáculos epistemológicos más comunes que el estudiante enfrenta durante la formación del concepto de límite, para el diseño, la conducción y la contextualización de las actividades.

Se presentan también los resultados del análisis tras la implementación de la secuencia didáctica, utilizando la información obtenida a través de las expresiones orales de los participantes, los productos de aprendizaje y la entrevista semi estructurada. La identificación y el análisis de los significados personales expresados por los participantes se realiza a través de la teoría de los significados sistémicos.

En el primer capítulo se describen los aspectos generales, que dan sustento a la investigación. Se presenta la formulación y planteamiento del problema de investigación, así como las preguntas y objetivos de esta. Posteriormente se incluye una justificación que intenta explicar la validez del estudio a través del recuento de algunos trabajos con objetivos similares y la importancia que tienen los temas centrales que se abordan en el documento.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico, en el que se desarrollan los apartados: la historia de las matemáticas como recurso de aprendizaje, análisis histórico del concepto de límite, formación de conceptos, la Teoría de Registros de Representación Semiótica, los obstáculos epistemológicos, obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto de límite, la Teoría de los Significados Sistémicos, la Ingeniería Didáctica y la ingeniería didáctica como metodología de la investigación. A partir de esta base teórica se realiza el diseño de la secuencia didáctica.

En el tercer capítulo del documento se presenta el diseño metodológico, se habla sobre los participantes y las fuentes de información. En el análisis a priori se diseña la secuencia didáctica usando dos principales hilos conductores: los significados, partiendo de lo intuitivo, pasando por lo geométrico y tabular, hasta llegar a lo algebraico, esto siempre teniendo en cuenta los registros de representación y , por otro lado, los elementos de significado, siendo estos los campos de problemas, algoritmos y procedimientos, elementos lingüísticos, definiciones y propiedades y algunos conceptos relacionados, todo esto mientras se toman en cuenta algunos momentos del desarrollo histórico del concepto de límite.

En el cuarto capítulo se relatan los momentos y expresiones significativas para el estudio, y se analizan los datos obtenidos a través de las diversas fuentes de información, desde la perspectiva de lo estudiado en el marco teórico y con la ayuda de la tabla de categorías, elaborada para este estudio. Se presentan las conclusiones obtenidas a través de la interpretación de la información.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES

Formulación y planteamiento del problema de investigación

En México, de acuerdo con los planes de estudio de referencia del Marco Curricular Común (MCC) de la Educación Media Superior (EMS), de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), el concepto de límite es introducido durante el cuarto semestre de EMS, tanto para el bachillerato general en la asignatura de matemáticas IV, como para el bachillerato tecnológico en la asignatura de cálculo diferencial.

Molfino y Buendía (2010) realizaron un análisis sobre la institucionalización del límite en el contexto escolar y a través de un cuestionario se percataron de que: los profesores identifican al límite como un concepto que permite estructurar la teoría en un curso de cálculo. La importancia de este concepto es innegable, pero ¿los estudiantes realmente entienden lo que significa?

Cornu (2002) afirma que a menudo, los estudiantes resuelven ejercicios con límites, sin entender el formalismo de su definición. Los estudiantes creen que entienden lo que significa, sin verdaderamente haber adquirido todos los significados del concepto formal.

En este trabajo, se reconoce como un problema a la falta de entendimiento del concepto de límite y se sugieren como algunas de sus causas a los obstáculos epistemológicos que enfrentan los estudiantes para su comprensión y al conjunto de prácticas primordialmente algorítmicas que se promueven en el aula. Este problema sirve como punto de partida para realizar la investigación.

Preguntas de Investigación

Pregunta General de Investigación

Se presenta la siguiente pregunta de investigación.

¿Qué significados personales sobre el concepto de límite muestran participantes tras la aplicación de la secuencia didáctica?

Preguntas Específicas

¿Cómo se construye una secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de límite que considere la formación histórica del concepto y los obstáculos epistemológicos de los estudiantes?

¿Qué elementos de significado hacen evidentes los participantes de la investigación?

Objetivos de la investigación

Objetivo General

Analizar los significados personales sobre el concepto de límite de una función, que expresan los participantes durante y después de la implementación de una secuencia didáctica diseñada para su aprendizaje.

Objetivos Específicos

1. Diseñar una secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de límite que considere la formación histórica del concepto y los obstáculos epistemológicos de los estudiantes.
2. Analizar los resultados obtenidos tras la implementación de la secuencia didáctica, tomando como referencia los elementos de significado presentados en la tabla resumen.

Justificación

El cálculo es un área de conocimiento matemático de los que más dificultades presenta para el estudiante de Educación Media Superior, Artigue (1995) reconoce tal dificultad y, entre otras cosas, la relaciona con los nuevos modos de razonamiento a los que debe acceder el estudiante que aprende cálculo, lo cuales pueden ser poco naturales desde la percepción del aprendiz, pues se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes. Neira (2013) sugiere que, en el paso del álgebra escolar al cálculo diferencial, puede haber una ruptura pues existen dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos didácticos o culturales que se manifiestan durante tal transición.

Artigue (1995) agrupa en tres grandes categorías a las dificultades de acceso al conocimiento del cálculo:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización.
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo.
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. (p. 107)

En esta tesis de maestría se pretende aportar en la búsqueda de la superación de las dificultades relacionadas con la segunda categoría, describiendo específicamente a algunas de tales dificultades, con base en estudios sobre el tema realizados por diferentes autores y presentando algunas actividades que el docente de cálculo en EMS puede tomar como base y utilizar en clase cuando se prepara el camino para introducir al estudiante hacia el concepto de límite.

En México, el primer acercamiento al concepto de límite de una función se da en el nivel medio superior. El concepto de límite es fundamental en el desarrollo y entendimiento del cálculo y muy relevante en el aprendizaje de las matemáticas. Steward et al. (2012), en su libro de precálculo, inician el capítulo de límites describiendo a este concepto como la idea central que subyace en el cálculo. Moru (2009) destaca el papel fundamental del límite, argumentando que sin él no es posible la existencia del cálculo, respalda su argumento mencionando algunas de sus aplicaciones.

Artigue (1995) considera que la enseñanza tradicional, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, por lo que estos aspectos son los que se evalúan en el aula de clases. Comúnmente se deja de lado al entendimiento conceptual y al diálogo sobre los significados de los objetos matemáticos, por ejemplo, Vrancken et al. (2006) reconocen como una dificultad en el aprendizaje del límite, al privilegio que se da al rigor algorítmico y al descuido en la construcción del sentido. Neira (2013) afirma que existe una algebrización del cálculo, lo que considera como un enfoque reduccionista, por lo que invita a analizar la actividad matemática en las aulas de clase, las prácticas escolares y la dimensión de significación y sentido de estas prácticas, incluidas las dimensiones didáctica y matemática. Se considera importante propiciar condiciones que permitan al estudiante reconocer al límite como un objeto matemático y no solamente como una serie de procedimientos algebraicos, tratando de que los estudiantes asignen un significado pleno al concepto.

Los conceptos matemáticos atraviesan procesos de formación a lo largo de la historia, hacer referencia a estos procesos y a los problemas que les dieron origen, puede ser de utilidad para apoyar al proceso de aprendizaje de los estudiantes. En este sentido Batanero (2005) afirma que:

> Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los conceptos matemáticos no son inmutables; por el contrario, al igual que en matemáticas u otras ramas de las ciencias, son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetos a evolución. (p. 249)

Tomando como ejemplo al aprendizaje de la probabilidad, Batanero (2005) considera que el docente de matemáticas debe estar consciente de que, durante su proceso de aprendizaje, los estudiantes se encuentran con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que ocurrirían durante el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades.

Durante el desarrollo histórico de las matemáticas hubo diferentes métodos que se acercaban al concepto de límite, sin embargo, no se alcanzó a dar el paso al límite debido a diversas dificultades y a la falta de desarrollo de otros conceptos necesarios para darle formalidad. Enumerar los más relevantes, ver si también se puede mencionar el punto exacto en donde se alcanzó tal concepto.

La utilización de la historia de las matemáticas en el salón de clases no es una idea reciente, Fried (2001) menciona la existencia de evidencia de su uso, por ejemplo, en el trabajo de Barwell en 1913. Publicaciones como las de Boyer (1949), Rívnikov (1987) y Ruíz (2003) han servido de referencia para el profesor de matemáticas que quiere conocer mejor el desarrollo histórico de las matemáticas.

En este documento, se considera de utilidad la inclusión de diferentes momentos de la historia de las matemáticas, entre otras cosas, para contextualizar el aprendizaje de los objetos matemáticos, lo que podría ayudar al estudiante a darse cuenta de que las matemáticas son parte de la historia misma de la humanidad y que se han ido desarrollando para solucionar problemas reales.

Se pretende que las actividades incluidas en el presente documento puedan ampliar un poco las fuentes de ideas para que el docente pueda incluir a la historia de las matemáticas en el desarrollo de sus sesiones de aprendizaje.

Bachelard (2000) propone la existencia de lo que llamó obstáculos epistemológicos, estos aparecen en el mismo acto de conocer. Barrantes (2008) señala que este tipo de obstáculos se presentan en las representaciones propias del estudiante, las que utiliza para apropiarse del conocimiento, en lo que la persona que aprende cree saber sobre lo que está aprendiendo.

Por su parte, Brousseau (2002) señala que es necesario reconocer la existencia de los obstáculos epistemológicos y rechazarlos junto con los estudiantes.

En el proceso de aprendizaje del concepto de límite, el estudiante se enfrenta a diferentes obstáculos epistemológicos, autores como Hitt (2003), Moru (2009) Sierpinska (1987), Tall y Vinner (1981), entre otros, han realizado interesantes investigaciones al respecto.

Para el diseño de algunas de las actividades que conforman la secuencia didáctica que se presenta en este documento, se tomó en cuenta a la existencia de diferentes obstáculos epistemológicos que se presentan durante el aprendizaje del concepto de límite, para intentar enfrentarlos directamente.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La Historia de las Matemáticas Como Recurso de Enseñanza y Aprendizaje

Es común que, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los esfuerzos se enfoquen en la formación y consolidación de los procesos algorítmicos correspondientes a cada etapa de nivel formativo en que se encuentre el estudiante. También es común que este tipo de situaciones promueva una percepción de las matemáticas como algo descontextualizado de la realidad.

Bernal y Lleras (1995) postulan que la visión del egresado de bachillerato respecto a las matemáticas es de un conjunto estático de hechos y procedimientos, esto como secuencia del énfasis que se pone en lo procedimental y no así en lo conceptual, se aprende de forma puramente algorítmica y mecánica.

Parte de la labor del docente de matemáticas es idear estrategias que permitan superar las prácticas tradicionalistas que no promueven el diálogo ni el desarrollo del pensamiento crítico, una de las alternativas es hacer uso de la historia de las matemáticas como recurso de enseñanza y aprendizaje.

Barbin et al. (2020) señalan que por lo menos hace cuarenta años la integración de la historia de las matemáticas en la educación matemática se ha consolidado como un área de estudio, como práctica pedagógica y también en el ámbito de la investigación. Relatan la existencia de grupos académicos en los 60s y 70s para los que la historia se manifestó como una terapia contra el dogmatismo promovido por la educación de la época, pues permitía concebir a las matemáticas no solamente como un lenguaje sino también como una actividad humana.

Como toda creación del intelecto humano, las matemáticas se desarrollan inmersas en la sociedad, por lo que vale la pena tomar en cuenta los contextos históricos en los que ocurrió el surgimiento de los diferentes objetos y métodos matemáticos, Ruiz (2001) asegura que cuando se estudia matemáticas, analizar su historia se ha ido convirtiendo en uno de los instrumentos principales para tal contextualización, lo que favorece al proceso de aprendizaje. Tal autor también confiere a la historia de las matemáticas una gran capacidad explicativa del desarrollo de los conceptos.

Sobre este tema, Chaves y Salazar (2003) le dan a la historia un papel más elevado que el de la recolección de anécdotas, datos y sucesos, consideran que la historia aunada a la didáctica y a la epistemología, forman una fuente teórica de amplia aplicabilidad en los procesos de aprendizaje.

Moru (2009) también concede un papel importante a la historia y sugiere que los conceptos matemáticos son el resultado de desarrollos del pasado, de tal manera que califica para ser usada como una forma de entender los problemas que los estudiantes enfrentan cuando aprenden matemáticas.

Polya (1981) propone que se debiese permitir a los jóvenes recorrer los grandes pasos de la evolución mental de la especie humana, aunque claro, no todos los aciertos y errores cometidos, pues una vida no ajustaría para ello, sólo los momentos realmente relevantes. Esto es transferible al ámbito académico, cuando se quiere fomentar el aprendizaje de algún concepto en particular, pues como él mismo sugiere, cuando se entiende cómo la humanidad ha adquirido el conocimiento de ciertos conceptos, estamos en una mejor posición de juzgar cómo el joven debería adquirir tal conocimiento.

Tras realizar un profundo análisis sobre estos temas y una amplia revisión de literatura relacionada, Fried (2001) sintetiza en tres grupos las razones por las que los educadores están interesados en utilizar a la historia de las matemáticas. El primero de estos grupos está relacionado con la humanización de las matemáticas, el segundo de ellos con hacer a las matemáticas más interesantes, entendibles y accesibles, y el tercer grupo se refiere a la capacidad de la historia de las matemáticas para dar una idea profunda sobre los problemas, conceptos y la resolución de problemas.

Barbin et al. (2020) señalan que la historia de las matemáticas ha llegado a ser un recurso para algunos enfoques epistemológicos como la epistemología histórica de Bachelard, la epistemología genética de Piaget y la epistemología fenomenológica de Freudenthal. Vidal y Quintanilla (2008), realizaron un estudio sobre la incorporación de la historia de la matemática en el aula, en el que revisaron las aportaciones sobre el tema de diversos autores de renombre, de sus hallazgos comparten, entre otras cosas, que cada vez es más frecuente ver a la historia de las matemáticas como componente de la educación matemática, formando incluso una línea de investigación a la que reconocen como análisis histórico-epistemológico. Incluso en el

International Congress on Mathematical Education (ICME) hay un grupo dedicado a la Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HPM).

Barbin et al. (2020) clasifican en tres tipos a las contribuciones relacionadas con la investigación, tanto teórica como experimental, de la historia de las matemáticas en la educación matemática: epistemológica, cultural y didáctica. En cuanto a la contribución epistemológica, entre otras cosas, mencionan que la historia juega un papel crucial al proveer ejemplos específicos y pertinentes de problemas en el contexto en el que los conceptos fueron creados o transformados. En cuanto a lo cultural, entre otras contribuciones, señalan que algunos trabajos encontraron que la historia provee una imagen diferente de las matemáticas, tanto para los estudiantes como para los maestros, que permite una relación más positiva con el conocimiento matemático y su formación. La historia permite ubicar a las matemáticas en el contexto de determinado periodo, por lo que se pueden ligar con la filosofía, el arte y la literatura de la época, así como con las necesidades sociales. Respecto a la contribución didáctica, entre muchas otras cosas, se considera a la historia como algo útil en la formación del futuro docente de matemáticas. Por otro lado, también puede servir como inspiración cuando se elaboran secuencias de enseñanza-aprendizaje y como enlace con múltiples áreas de la ciencia.

Fried (2001) describe dos estrategias básicas para la introducción de la historia de las matemáticas en el salón de clases. A la primera de ellas le llama estrategia de adición, ya que no altera al plan de estudios en cuanto al contenido, sólo provoca un incremento en cuanto al tiempo necesario para abordarlo. Incluye actividades como la introducción de anécdotas históricas, biografías cortas, problemas aislados, etc. Entre sus desventajas se puede mencionar que, si el programa de estudios ya está sobrecargado y existe la presión de terminar con todo el contenido, se hace complicado insertar contenido adicional, pues esto podría reflejarse en el incremento de tiempo de trabajo en casa. A la segunda de ellas le llama estrategia de acomodación, pues consiste en acomodar al plan de estudios a las circunstancias históricas o a un modelo histórico. Esto involucra cambios en la forma en que se presenta el material, por ejemplo, usando un desarrollo histórico en la explicación de una técnica o idea, u organizando la asignatura de acuerdo con un esquema histórico.

Fried (2001) presenta un debate sobre la inclusión de la historia de las matemáticas, un dilema sobre el acercamiento histórico a la educación matemática. Como factor fundamental considera al problema del tiempo, para lo que presenta soluciones en general para ambas estrategias mencionadas, en el caso de la estrategia de adición, menciona que se puede reemplazar un problema ordinario de clase por otro que se refiera al mismo contenido pero que tenga un contexto histórico. En el caso de la estrategia de acomodación, los programas no requieren la inclusión de temas adicionales, sino enseñar los temas de siempre de una nueva manera. Además, Fried relaciona con el problema del tiempo al asunto de la relevancia. Encuentra como un problema a la necesidad de medir continuamente la relevancia pues esto obliga al docente que utiliza el acercamiento histórico en un tipo de "editor de historia", utilizando lo que considera relevante y descartando lo que no es así.

Por otro lado, Fried (2001) resalta el compromiso de los educadores con enseñar matemáticas modernas, las matemáticas que los estudiantes necesitarán en sus carreras profesionales, esto provoca que la historia de las matemáticas se subordine a las matemáticas modernas por lo que la historia de las matemáticas deja de ser algo que se estudia para convertirse en algo que se utiliza. Señala también que cuando la historia es utilizada para justificar, mejorar, explicar y motivar prácticas y temas modernos, se vuelve inevitablemente anacrónica, el presente siendo la medida del pasado, lo que podría trivializar la historia.

Fried (2001) indica que, para humanizar las matemáticas a través de la historia, ésta debe ser tomada muy seriamente, no sólo como una mera herramienta. Recomienda, tanto como sea posible, leer los textos como fueron escritos pues esto podría permitir mirar las matemáticas a través de los ojos y trabajos de quienes los concibieron, con las idiosincrasias de los propios autores y de la comunidad matemática de su época. Esto puede ayudar en la humanización de las matemáticas pues las relaciona con humanos reales en situaciones humanas reales, así como al clima social e intelectual en el que vivieron. Sobre el análisis de textos originales en comparación con los libros de texto, menciona que estos últimos siguen un esquema de presentación y por lo general están cerrados a la indagación, mientras que los textos originales son producto de e invitan a la indagación.

Tras realizar un estudio de la historia de la matemática, como un recurso en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, Chaves y Salazar (2003) entre otras cosas concluyen que tal recurso coadyuva a la contextualización histórica de un concepto, así como al entendimiento de la evolución histórica del mismo. Barbin et al. (2020) consideran que existe la necesidad de una mayor investigación empírica de campo de todos estos temas, pues esta subrepresentada en comparación con la investigación teórica.

En este documento se retoman las ideas de que la historia de las matemáticas permite humanizarlas, situarlas en contexto y entenderlas como algo que no está acabado, sino que ha estado y está en constante desarrollo, se considera que todo esto contribuye a contrarrestar un poco el carácter dogmático con el que pueden ser percibidas y posicionarlas como promotoras del desarrollo del pensamiento crítico.

Si tomamos como ejemplo al concepto de límite en matemáticas, valdría la pena analizar cuáles fueron los campos de problemas que le dieron origen y cómo tal concepto se ha ido construyendo con el paso del tiempo.

Breve Análisis Histórico del Concepto de Límite

La historia del concepto de límite va de la mano de la del cálculo diferencial. Al respecto Boyer (1949) afirma que el cálculo es resultado de un largo proceso, al que se refiere como un tren de pensamiento matemático, que se ha ido desarrollando lentamente y con dificultades, a través de los esfuerzos de muchos pensadores.

Tomando como punto de partida a la Grecia antigua, vale la pena mencionar al trabajo de Euclides, quien de acuerdo con Ruiz (2003), naciera alrededor del año 325 antes de nuestra era, en Alejandría, Egipto. Para Ríbnikov (1987), haber nacido en tal locación representó una situación ventajosa para el desarrollo científico de Euclides, pues al ser Alejandría un importante punto comercial y de perfeccionamiento técnico, sus gobernantes promovieron la creación de lo que se conoce como el Museo, en donde diferentes pensadores de la época, incluido Euclides, encontraron un espacio para desarrollar su trabajo. La obra cumbre de Euclides sería “Los Elementos”, Ruiz (2003) los describe como una serie de trece libros o capítulos, de los cuales, en los seis primeros se aborda la geometría plana, los tres siguientes tratan sobre la teoría de números, el décimo corresponde al estudio de los inconmensurables y los últimos tres a la geometría de sólidos. Para Krantz (2006), el estándar de rigor promovido por los Elementos de Euclides sería un modelo para seguir por los desarrolladores del cálculo, casi dos mil años después.

En la opinión de Boyer (1949), los orígenes del cálculo se encuentran en esta época, en la Grecia Antigua, cuando los matemáticos se encontraron con dificultades lógicas al intentar expresar “sus ideas intuitivas sobre las proporciones de las líneas, las cuales vagamente reconocían como continuas, en términos de números, los cuales ellos consideraban discretos” (p. 4). Esta disparidad conceptual entre lo geométrico y lo numérico, tuvo repercusiones que, como describiremos más adelante, no permitirían alcanzar el concepto del límite en esa época.

En su libro, “La historia del cálculo y su desarrollo conceptual”, Boyer (1949) identifica a Thales como el primer griego relacionado con lo que él denomina una: “Revolución intelectual”, que además de producir matemáticas elementales, revelaría las ya mencionadas dificultades lógicas que propiciarían la realización de estudios que, dentro de los próximos 2500 años, llevarían al desarrollo del cálculo.

Es complicado hablar de la matemática griega sin mencionar a Pitágoras y los Pitagóricos. Boyer (1949) relata que éstos estudiaron las proporciones entre dos superficies, aunque no pudieron llegar a una definición de área, pues no poseían un concepto satisfactorio de número. Se les podría reconocer, por darse cuenta de la necesidad de tal concepto, que es base para el desarrollo de todo el cálculo.

Para Krantz (2006), las matemáticas de la Grecia antigua, “fueron marcadas por un gran hueco, ellos simplemente no pudieron entender el concepto de límite” (p. 43). En este sentido Ruíz (2003), identifica a las dificultades sobre el manejo de lo infinitamente pequeño, como algo presente en las conocidas paradojas de Zenón, a las que conecta con la relación entre lo discreto y lo continuo. Respecto a estas paradojas, Krantz (2006) opina que han sido de importancia para el desarrollo de la noción de los infinitesimales.

Es una historia muy conocida entre los matemáticos y los educadores matemáticos, la más famosa de las paradojas de Zenón, en la que se analiza una suerte de carrera entre Aquiles y una tortuga, el primero debería recorrer una sucesión infinita de segmentos, cada vez más pequeños, para alcanzar a la escurridiza tortuga. Ríbnikov (1987) relata cómo estas paradojas lógicas dieron pie al desarrollo de métodos infinitesimales en la Grecia antigua, él afirma que “para demostraciones exactas y soluciones lógicamente exhaustivas, es necesario elaborar y valerse de métodos que contienen, elementos de paso al límite” (p.75).

Retomando a los Pitagóricos, Boyer (1949) relata que, su búsqueda de la unificación entre la naturaleza y la geometría propició el desarrollo de la teoría de aplicación de áreas, lo que más adelante conduciría al método de exhaución.

Toca el turno de hablar de Eudoxo de Cnido, a quien Ruíz (2003) reconoce como el principal matemático de la Academia de Platón y de quien se afirma, fue el mejor de los matemáticos del periodo clásico y que en toda la antigüedad, sería sólo superado por el famoso Arquímedes. Los trabajos de estos personajes están muy relacionados, sobre todo por el método que describiremos a continuación.

Eudoxo, quien de acuerdo con Boyer (1949) se basó en los trabajos de Antiphon y Bryson, desarrolló el famoso método de exhaución. Ruiz (2003) describe este método como:

> Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano. (p. 96)

Este método permitía hacer aproximaciones que tendrían mayor precisión conforme se incrementa el número de iteraciones, habiendo quienes afirman que es el equivalente de la época al actual concepto de integración. Al respecto, Boyer (1949) comenta que nuestra concepción de límite es numérica, mientras que la noción de Eudoxo es puramente geométrica.

De acuerdo con lo que describe Ruíz (2003), Arquímedes nació en Siracusa en el 287 antes de nuestra era y recibió su formación en Alejandría. Además de las matemáticas, realizó aportes a la física e ingeniería, de los cuales todavía sacamos provecho. Además, es memorable la famosa anécdota del nacimiento del principio que lleva su nombre y de la cual los profesores de física relatan a sus estudiantes, casi siempre con alegría, alguna de sus versiones. Como se ha mencionado, es considerado el matemático más brillante de la antigüedad. Sobre su trabajo, Krantz (2006) menciona que desarrolló métodos para calcular áreas y volúmenes de diferentes figuras geométricas y que manejó muy eficientemente el método de exhaución, de tal manera que algunos de sus cálculos equivaldrían a los cimientos del cálculo integral.

Otra de las aportaciones de Arquímedes relacionadas al desarrollo del cálculo, de acuerdo con Aaboe y Asger (2012), se puede encontrar en la cuadratura de la parábola, en donde “prueba el teorema de que el área de un segmento de la parábola es cuatro tercios la del triángulo con mayor área que se pueda inscribir" (p. 80). Boyer (1949) afirma que al hacer sus pruebas "Arquímedes sigue a sus predecesores al omitir cualquier referencia al infinito y al infinitesimal" (p. 51). Para complementar sobre el resultado de Arquímedes, Boyer (1949) menciona que, para definirlo como la suma de una serie infinita, existiría la necesidad de acceder al concepto de número real, lo cual no se poseía en esa época. En este sentido Ruíz (2003) afirma que Arquímedes, aunque se reconoce como al que más se aproximó, "no llegó a dar el salto hacia el concepto moderno de límite" (p. 95).

Krantz (2006) afirma que los griegos no estaban equipados para responder como podemos hacer ahora, por ejemplo, a las paradojas de Zenón, pues no tenían la notación ni el concepto de número decimal. Pero debemos reconocer su contribución, para fundar las bases que ahora nos permite tener un mayor entendimiento sobre el cálculo y en particular del concepto de límite.

Ruiz (1996) resalta la importancia de cuatro tipos de problema como motivadores directos de la creación del cálculo:

- La determinación de la velocidad y aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo.
- El cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies.
- Determinar cuándo una función (que describe un fenómeno real) alcanza un valor máximo o mínimo.
- Cómo calcular las rectas tangentes y normales a una curva en un punto. (p. xii)

Una de las disputas más conocidas en el mundo de las matemáticas es la que hubo entre Newton y Leibniz sobre los créditos de la invención del cálculo, Sócrates (2006) ubica entre 1665 y 1666 al desarrollo del cálculo por parte de Newton, al que llamó como método de fluxiones, aunque no hizo público su trabajo, de manera independiente Leibniz desarrolló su versión del cálculo alrededor de 1675, el cual pasó una década refinando y para el cual creó un sistema de símbolos y notaciones completamente original. Ruiz (1996) considera que los métodos infinitesimales de Newton y Leibniz resolvían los cuatro tipos de problemas planteados algunas líneas atrás.

En este apartado se describieron algunos de los problemas que dieron origen al desarrollo del cálculo y el límite, conocer al respecto se considera de gran importancia formativa, aunque el recorrido histórico, no es suficiente para lograr la formación de un concepto.

Formación de Conceptos

La formación de un concepto, sobre todo de uno tan complejo como lo es el de límite, no es tarea fácil, ni para la persona que lo está aprendiendo, ni para el profesor que está promoviendo su aprendizaje.

Sobre la construcción de significado, Brousseau (2012) la entiende como un proceso que requiere de la interacción constante entre el estudiante y las situaciones problemáticas, "una interacción dialéctica, en la cual involucra su conocimiento previo, lo somete a revisión y lo completa o rechaza para formar nuevas concepciones" (pp. 82-83).

Duval (2017) señala que para la formación de conceptos es fundamental preguntarse ¿cuál es la naturaleza de la relación entre el objeto y su representación? y basa su planteamiento en dos aspectos: la manera en que su formación está ligada a las representaciones que se obtienen a través de la percepción y, por otro lado, la naturaleza de la relación entre las representaciones y el objeto representado.

Registros de Representación Semiótica

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas involucra diferentes actividades cognitivas, tales actividades están siempre mediadas por diversas formas de comunicación y para llevarse a cabo se utilizan diferentes registros de representación.

Duval (2017) afirma que, al analizar el conocimiento, no sólo se debe considerar la naturaleza de los objetos estudiados, sino también la forma en que se presentan estos objetos y cómo podemos acceder a ellos. De hecho, Duval (2017) considera que el conocimiento comienza cuando se tiene consciencia de la pregunta: Cuando pensamos estar en presencia de un objeto, ¿se trata del objeto en sí o de una representación? Esto se hace especialmente importante en matemáticas pues los objetos con los que se trabaja no pueden señalarse directamente, como cuando se señala a una manzana, por ejemplo.

Duval (2017) declara que, siempre hay diversas representaciones posibles para el mismo objeto, además, hay una diversidad de tipos de representación caracterizados de acuerdo con su origen. Esto también es válido para los objetos matemáticos. Complementando esta idea, Duval (2017) atribuye el origen de esta diversidad de representaciones a la variedad de sistemas físicos o semióticos que pueden producir representaciones.

Respecto a la pregunta planteada líneas atrás, Duval (2017) menciona como una característica distintiva entre la representación y el objeto, la variabilidad de la primera y la invariabilidad del segundo. Las representaciones cambian de acuerdo con la perspectiva considerada y el sistema utilizado para obtener cada representación, esto no ocurre en el caso del objeto.

Sobre el acceso a los objetos y el rol de las representaciones, Duval (2017) plantea que el análisis del conocimiento se enfoca en cómo accedemos a los objetos en sí, en este sentido plantea tres preguntas: ¿tenemos acceso al objeto en sí, independientemente de sus representaciones? ¿cuáles son los sistemas de representación que permiten acceder al objeto? ¿cuál es la naturaleza de su relación? Las dos primeras están muy relacionadas entre sí, la tercera de estas preguntas la considera esencial en la formación de conceptos.

Sobre la noción de signo, Duval (2017) menciona que emergió cuando el análisis del conocimiento se enfocó en cómo una expresión verbal significa algo, en cómo esta comunica algo a alguien. Menciona también que la distinción entre el significante y el significado se refiere a la dualidad de todas las expresiones verbales como producciones intencionales. Resalta que la relación entre los signos y lo que estos significan es una relación de referencia (que resulta de una operación discursiva intencional de designación) y no una relación causal.

En el caso de las matemáticas, Duval (2017) sugiere que la introducción de letras remplazando a cantidades y números plantea por primera vez el asunto del rol de los signos en el pensamiento matemático.

Duval (2017) presenta la necesidad de prestar más atención al rol central de las representaciones y los signos en el conocimiento y su desarrollo. Por otro lado, propone que cuando se trata de producciones que utilizan lo que conocemos como lenguaje matemático, es preferible hablar de representaciones semióticas que de signos y esto lo justifica mencionando que, los signos son unidades elementales de significado, pero carecen de un par de características que las representaciones semióticas sí poseen. En primer lugar, tienen una organización interna que varía de un tipo de representación semiótica a otro, esto lo ejemplifica señalando las diferencias entre un enunciado simple y una ecuación. Por otro lado, dentro de cualquier representación semiótica, siempre hay diversas maneras de distinguir las unidades de significado y niveles de organización. Para un mejor entendimiento presenta un par de ejemplos de gran utilidad para hacer la distinción, si se habla del lenguaje natural las representaciones semióticas son los enunciados y no las palabras, si se habla de lenguaje matemático las representaciones semióticas son las ecuaciones y no los números y letras.

Duval (2017) señala que la importancia de las representaciones semióticas en matemáticas proviene de su potencial intrínseco para transformarse en otras representaciones semióticas nuevas y equivalentes. Las representaciones semióticas se presentan como necesarias para el conocimiento matemático pues atienden a dos problemas: permiten el acceso a los objetos matemáticos, que por su naturaleza no pueden ser percibidos directamente por los sentidos (este problema es epistemológico) y permiten la transformación de las representaciones semióticas en otras nuevas, pero manteniendo la misma denotación (este problema es cognitivo).

Duval (2017) otorga a la semiosis un papel fundamental y la coloca en el centro de los procesos cognitivos del pensamiento matemático, esto lo expresa contundentemente con la frase: *No hay noesis sin semiosis*. Para él no hay pensamiento matemático sin transformación de representaciones semióticas.

Como se ha mencionado, Duval (2017) considera de suma importancia a la transformación de representaciones semióticas, afirma que es la característica clave de la matemática, del trabajo matemático. Considera que una representación semiótica sólo es interesante en la medida en que se pueda transformar en otra representación, y no por el objeto que representa. En este sentido Panizza (2018) afirma que son las transformaciones semióticas las que favorecen que sea posible acceder a un objeto matemático, señala que las diferentes representaciones expresan diferentes propiedades de un objeto y de esta manera proveen distintas descripciones de este, las que en su totalidad hacen posible identificarlo.

Profundizando sobre las transformaciones, Duval (2017) describe dos formas en las que pueden ocurrir. La primera produce una representación del mismo tipo que la inicial, mientras que la segunda produce una representación de otro tipo. A estas les llamó tratamientos y conversiones, respectivamente. Un tratamiento ocurre dentro del mismo registro de representación (intra), por ejemplo, si se presenta el dibujo de un círculo dividido en dos partes iguales, para representar un medio, esto puede mostrarse también dividiendo un cuadrado por la mitad, ambas representaciones están dentro del mismo tipo de registro. Una conversión ocurre cuando pasamos de uno a otro tipo de registro de representación (inter), por ejemplo, el mencionado círculo dividido en dos partes iguales que representa un medio está expresado en un tipo de registro y podemos expresar este mismo objeto matemático a través del numeral fraccionario ½, lo que representa un cambio a otro tipo de registro.

La llamada Teoría de Registros de Representación semiótica ha cobrado popularidad a partir de su surgimiento. Ha sido el tema central de diversos trabajos de tesis y artículos de investigación, siendo un ejemplo destacado el de Mena-Lorca et al. (2015) que es referenciado en diversos apartados de este mismo documento.

Por otro lado, el solo hecho de presentar diferentes registros de representación no garantiza la adquisición del conocimiento, existen diversos factores a tomar en cuenta al hacer la planeación de las sesiones de aprendizaje.

Obstáculos Epistemológicos

Bachelard (2000) propone que "se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización" (p.15). Desde esta manera de pensar, es imposible partir de cero cuando se adquiere un conocimiento, siempre se parte de un saber previo, adquirido a partir de la experiencia o la formación académica, o incluso de lo que cree saberse, por lo que Bachelard (2000) considera que cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu se torna viejo, de la edad de sus prejuicios.

Es común que los estudiantes, o incluso los mismos profesores, presenten errores en el entendimiento de algún concepto en particular, para Brousseau (2002) estos errores no son sólo la consecuencia de la ignorancia, la incertidumbre o de la casualidad, sino que pueden llegar a ser un efecto de algún conocimiento previo o de alguna parte de este, el error es parte del conocimiento adquirido.

Durante el proceso de aprendizaje el estudiante se enfrenta a diferentes tipos de obstáculos externos, ejemplo de ello es la complejidad misma de un concepto. Bachelard (2000) propone la existencia de obstáculos diferentes a los externos, este otro tipo de obstáculos aparecen en el mismo acto de conocer provocando entorpecimientos y confusiones. Afirma que, “en el acto mismo de conocer, mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos *obstáculos epistemológicos*” (p. 15). Esa parte del conocimiento de la que habla Brousseau (2002), la que ahora se presenta como error, podría haber llegado a ser interesante y exitosa en algún momento, pero ante la presencia de conocimiento nuevo se revela como falsa o simplemente no se adapta, de tal manera que constituye un obstáculo.

Brousseau (2002), sobre el obstáculo epistemológico menciona que, este “constituye una parte del conocimiento completo en el sentido de que su rechazo debe ser finalmente hecho indiscutiblemente explícito, y en consecuencia deja marcas, a veces profundas, en el sistema de conocimiento” (p. 97).

Sobre este tema, Barrantes (2008) considera que los obstáculos epistemológicos no se originan en los conocimientos institucionalizados, sino en las representaciones propias del estudiante, las que utiliza para apropiarse del conocimiento. Bachelard (2000), afirma que el experimentador joven, o en este caso el estudiante de matemáticas, respaldado por la seguridad en sí mismo, realiza observaciones de la realidad en función de sus propias teorías. “En la formación de un espíritu científico, el primer obstáculo es la experiencia básica, es la experiencia colocada por delante y por encima de la crítica” (Bachelard, 2000, p. 27).

Por otro lado, los obstáculos epistemológicos también pueden ser provocados por factores como el lenguaje, en este sentido Bachelard (2000) propone que, en una misma palabra, hay conceptos que pueden ser muy diferentes, esto puede provocar confusión e interpretaciones erróneas de un concepto, “la designación es la misma; la explicación es diferente” (p. 20).

Mena-Lorca et al. (2015) identifican las dificultades que el estudiante enfrenta ante un obstáculo epistemológico y las comparan con lo que se puede encontrar en el desarrollo histórico de un objeto matemático, encuentran semejanzas con la propia dificultad que los matemáticos tuvieron que sortear ante situaciones de carácter similar, a pesar de que en la actualidad se cuenta con más información, mejor conceptuación y simbología más clara.

Mena-Lorca et al (2015) afirman que un obstáculo epistemológico se caracteriza principalmente por su persistencia y que esta cualidad le hace reaparecer en diversas situaciones. En su investigación analizaron al infinito actual como obstáculo epistemológico y la evidencia recogida hizo evidente esta persistencia y resistencia, pues se sigue manifestando y tiende a permanecer a pesar de las diversas demostraciones presentadas a los participantes de sus varios estudios.

Brousseau (2002), señala la necesidad de rechazar y clarificar al obstáculo cuando se forma nuevo conocimiento, se hace necesario destruir el conocimiento original, insuficiente y malformado, enfrentarlo directamente para remplazarlo con conceptos nuevos que operen satisfactoriamente en el nuevo dominio.

Para el docente es de utilidad estar al tanto de la existencia de los obstáculos epistemológicos, Barrantes (2008) considera que se puede conducir al profesor a darse a la tarea de indagar en la historia de sus estudiantes para averiguar sobre sus conocimientos previos. Al respecto, Chaves y Salazar (2003) señalan que, ante algún concepto matemático que pueda resultar complejo, el estudio de los obstáculos epistemológicos puede ser de ayuda para explicar lo que no se alcanza a comprender sobre tal concepto. Se entiende entonces, que es posible utilizar el conocimiento sobre la existencia del obstáculo como una herramienta para facilitar el aprendizaje, aunque no es tarea sencilla.

Cornu (2002) propone que la misma naturaleza de los conceptos matemáticos, es causa de los obstáculos epistemológicos. Por lo que se propone examinar, los obstáculos epistemológicos relacionados directamente con la construcción del concepto de límite.

Obstáculos Epistemológicos en el Aprendizaje del Concepto de Límite

En este apartado, se habla exclusivamente sobre obstáculos epistemológicos relacionados con la construcción del concepto de límite. La aproximación se hace desde dos perspectivas, los obstáculos subyacentes en el mismo estudiante y los generados por la instrucción, por la metodología bajo la cual se aprende sobre el tema.

En primer lugar, haremos referencia de nuevo a la influencia del vocabulario, Moru (2009) presenta como un obstáculo epistemológico a la utilización de palabras cotidianas con sentido dual. En el caso del concepto límite, el estudiante generalmente tiene una relación muy cercana con tal palabra cuando se habla sobre el límite de velocidad en una carretera, por ejemplo, o sobre el límite de tiempo que se tiene para entregar una tarea o para inscribirse a un curso, incluso con el empleo de la palabra en el ámbito territorial. En un aspecto relacionado, Hitt (2003) propone que en el estudiante "predomina el carácter inalcanzable del límite, una consecuencia será que, para muchos alumnos, la noción de límite no contiene alguna idea de variación, de movimiento, de aproximación de este límite" (p. 7). El estudiante, y en ocasiones el mismo profesor, pueden poseer concepciones erróneas o misconcepciones al respecto.

Por otro lado, Tall y Vinner (1981) hablan sobre las imágenes conceptuales que el estudiante tiene acerca de los conceptos de límite y continuidad, las cuales son susceptibles a contener factores que se contraponen o tienen conflictos con la definición conceptual formal. Sobre la relación entre estos dos conceptos, Hernández et al. (2017) han detectado que los estudiantes suelen confundirlos, piensan que se refieren a la misma idea.

Moru (2009) resalta la influencia de las conceptualizaciones preexistentes en los estudiantes y propone un conflicto entre ellas y lo que el profesor espera que se aprenda. De manera similar, Hitt (2003) plantea una lucha entre las ideas intuitivas y las promovidas a través de la instrucción. Habla en particular de la idea intuitiva que representa el infinito potencial, que gana la batalla ante la idea del infinito actual que promueve la instrucción. Como se analizó en el desarrollo histórico de los problemas relacionados al nacimiento del concepto de límite, las dificultades que representa el concepto de infinito y la noción de infinitesimal han sido una constante, un obstáculo al que se han enfrentado diversos pensadores. Sobre este par de conceptos y el de número real, Moru (2009) afirma que su poco entendimiento provoca obstáculos en el aprendizaje del concepto de límite, pues "son necesarios para entender procesos del dominio y rango, cercanía a un punto y secuencias que involucran decimales infinitos" (p. 43).

Por otro lado, Vrancken et al. (2006) señalan que generalmente el estudiante utiliza de manera muy limitada las representaciones gráficas, lo que representa un obstáculo para la adquisición del concepto de límite. Otro de los obstáculos detectados por Moru (2009), es el poco desarrollo del concepto de variable. Particularmente, estos dos últimos obstáculos, se extienden a distintas ramas de las matemáticas.

Respecto a los obstáculos epistemológicos, provocados por la metodología en la que se aprende, aspecto en el que tiene mucho peso la intervención del profesor desde lo que plantea en su planeación hasta la forma en que se comunica con sus estudiantes, Vrancken et al. (2006) reconocen como obstáculo al privilegio que se da al rigor algorítmico y al descuido a la construcción del sentido. Para Hitt (2003), el concepto de límite no se puede obtener exclusivamente a través de conocer los algoritmos relacionados con la resolución de ejercicios sobre el tema, es necesario superar los obstáculos que no permiten distinguir los ya mencionados conceptos de infinito potencial e infinito actual.

Tanto para Hernández et al. (2017) como para Vrancken et al. (2006), es necesario que el profesor promueva diferentes registros de representación semiótica, durante el proceso de aprendizaje del concepto de límite.

Otro aspecto detectado por Hernández et al. (2017), se refiere a los ejemplos que presenta el profesor cuando al plantear situaciones de la vida real, para introducir conceptos relacionados a las matemáticas, si tales ejemplos no son bien diseñados, pueden caer en incoherencias lógicas que provocarán una adquisición limitada o errónea del concepto. En un aspecto relacionado, Hitt (2003) se plantea una pregunta sobre si “los profesores de matemáticas han interiorizado el concepto de límite, de manera que puedan proporcionar un acercamiento adecuado a sus alumnos” (p. 8). Del propio conocimiento que el profesor tiene sobre un tema, es de donde surgen los ejemplos que utiliza para compartir con sus estudiantes y si estos contienen errores, estos podrían propagarse a sus estudiantes. Tall y Vinner (1981) presentan la posibilidad de que la definición formal del concepto sea dada de forma imprecisa por el profesor.

Un obstáculo más es el que para Hitt (2003) representa el refuerzo que puede dar el profesor, a las ideas primitivas que los estudiantes han construido, cuando se hace referencia a situaciones que restringen al concepto de límite a situaciones geográficas. En un aspecto de naturaleza similar, Tall y Vinner (1981) afirman que “el acercamiento intuitivo previo a la definición, en ocasiones es tan fuerte que el estudiante percibe el concepto de forma dinámica, con una sensación de movimiento” (p. 10).

Otro aspecto que Tall y Vinner (1981) consideran relevante y que identifican como un obstáculo, es que en las escuelas inglesas (donde realizaron su análisis, pero que sin duda no se limita a ellas), “las nociones de límite de una secuencia, límite de una función y continuidad, raramente son enseñados en un orden lógico” (p. 4).

Como se ha podido verificar a través de esta sección, hay una gran variedad de obstáculos epistemológicos que enfrentan tanto el estudiante como el profesor, cuando se quiere formar el concepto de límite.

Teoría de los significados sistémicos.

Godino y Batanero (1994) presentaron un artículo llamado: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, en tal documento se hace un estudio profundo sobre la noción de significado, se identifica la necesidad de formular una teoría explícita de los objetos matemáticos y se sientan las bases para lo que se conocería como la Teoría de Significados Sistémicos (TSS). Godino y Font (2007) describen a dicha teoría como un sistema de nociones que tratan de dar una respuesta antropológica – pragmatista a la cuestión del significado de los conceptos matemáticos. Godino y Batanero (1994) afirman que el término "significado", en la investigación en educación matemática, se utiliza de manera cercana al lenguaje cotidiano, con un sentido intuitivo o pre-teórico.

Para entender mejor a la teoría puede ser de utilidad conocer la definición de la palabra "sistémico". El diccionario de la Real Academia Española (2014) clasifica a la palabra sistémico como un adjetivo y la describe como: Perteneciente o relativo a la totalidad de un sistema; general, por oposición a local. En el caso de la psicología, por ejemplo, de acuerdo con Galimberdi (2002) la opción sistémica "estudia fenómenos que no se consideran entidades abstractas y aisladas según el principio de causalidad lineal, sino una globalidad que debe estudiarse en la interacción dinámica de las partes" (p. 905).

De esta manera, se puede entender a lo sistémico como un concepto que considera a todo el sistema, a partir del conjunto de sus elementos y las relaciones entre ellos. Este mismo tipo de consideración realiza la Teoría de los Significados Sistémicos.

Godino y Batanero (1994) proponen que los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. De manera similar, Batanero (2005) describe que el objeto matemático emerge del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos.

Otro aspecto importante de esta teoría es la presentación de las nociones de significado institucional y significado personal. Godino y Batanero (1994) definen al significado de un objeto institucional como el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un momento dado. De acuerdo con Batanero (2005), un mismo objeto matemático puede enseñarse con niveles diversos de complejidad, por lo tanto, su significado puede ser diferente en distintas instituciones educativas. Por otro lado, los mismos Godino y Batanero (1994) definen al significado de un objeto personal como el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado. En ambos casos se hace evidente la relación entre la práctica y el concepto. Batanero (2005) advierte que cuando un estudiante se incorpora a un centro educativo, el significado que asigna a un objeto matemático podría no coincidir con el acordado dentro de la institución. Tal situación es una de las razones de la distinción entre el significado personal e institucional. Además, considera como principal finalidad de la enseñanza, al acoplamiento progresivo de los significados personales e institucionales.

Batanero (2005) sostiene que el significado del objeto matemático sería una entidad compuesta, formada por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con el campo de problemas y el sistema de prácticas vinculadas a la resolución de problemas matemáticos, de los que justamente emerge el objeto matemático. La misma autora presenta una propuesta de componentes o elementos de significado que pueden utilizarse para el análisis de un objeto matemático o de su proceso de enseñanza o aprendizaje. Estos elementos se describen a continuación.

1. *El campo de problemas de los que emerge el objeto.* A lo largo de la historia de la humanidad, los diferentes grupos sociales o los individuos se han enfrentado a diversas problemáticas particulares que pueden solucionarse con el uso de las matemáticas. La solución que se genera, inicialmente, es específica para el problema que se está resolviendo, pero existe la posibilidad de que pueda generalizarse a problemas de naturaleza similar. La solución lleva implícito a un objeto matemático, que se puede llegar a convertir en tema de estudio en sí mismo y posteriormente se introduce en la enseñanza. La problemática misma forma parte del significado del objeto matemático pues lo justifica y le provee de sentido. En el caso del límite se tenemos como algunos ejemplos de campos de problemas a los relacionados con el cálculo de áreas, la

cuadratura de la parábola o la necesidad de demostrar la existencia del punto de convergencia, entre otros.

2. *Elementos lingüísticos.* Es innegable la importancia del lenguaje en el entendimiento de problemas u objetos matemáticos. Duval (2017) afirma que el lenguaje natural está cargado de originalidad y poder, pues lleva a cabo la comunicación y todas las funciones cognitivas. Batanero (2005) resalta la necesidad del uso de objetos ostensivos que pueden ser símbolos, palabras o gráficos que pueden servir para representar los datos y soluciones, así como las operaciones y conceptos usados. Estas expresiones pueden servir como sistemas de representación. Se puede hablar también del lenguaje matemático y el papel fundamental que tiene en toda actividad relacionada con las matemáticas. En el caso del límite se podrían mencionar como ejemplos de este tipo de elementos de significado al ya mencionado lenguaje natural, junto con el simbólico y el geométrico, a las gráficas que se utilizan para representar límites, a la notación particular cuando se trabaja con límites o a las letras griegas en la definición formal, entre otros.

3. *Procedimientos y algoritmos.* Alrededor de un objeto matemático existen métodos particulares que permiten resolver situaciones relacionadas con el campo de problemas al que está asociado tal objeto. Estos métodos se pueden convertir en objetos de enseñanza y también pueden hacer surgir nuevos procedimientos. Para el caso del límite existen diversos ejemplos como los cálculos aritméticos, el método de exhaución desarrollado por Eudoxo, la representación algebraica del límite o la interpretación geométrica de la relación Épsilon (Error) – Delta (Distancia).

4. *Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos.* Cuando se hace matemáticas, es necesario hacer uso de conceptos previamente conocidos y que, a través de sus propiedades, sirven para resolver problemas. Una vez que el objeto matemático es reconocido como tal, aparecen diferentes definiciones que permiten distinguirlo de otros. La naturaleza de las matemáticas permite establecer relaciones entre objetos matemáticos. En cuanto a las definiciones y propiedades del límite, tenemos como algunos ejemplos a los límites laterales, la existencia del límite, límites en el infinito, reglas para la suma, resta, multiplicación división y potenciación, entre otros. Como algunos conceptos relacionados se pueden mencionar a la velocidad, la tangente, el área bajo la curva, las sumas de Riemann, continuidad, derivada, integral, entre muchos más.

5. *Los argumentos y demostraciones de estas propiedades*. Para este tipo de elementos, Batanero (2005) resalta la interrelación entre las acciones y objetos que forman parte de la actividad matemática, éstos se ligan entre sí a través de argumentos y razonamientos que son necesarios para justificar la validez de la solución a un problema, así como para comunicarla.

La suma de todos estos elementos permite entender que los conceptos matemáticos tienen una naturaleza compleja, incluso los que se consideran sencillos. La autora propone la consideración de tales componentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, siempre estando conscientes de que un objeto matemático puede aprenderse en diferentes niveles de complejidad, lo que configura el significado institucional pretendido.

Ingeniería Didáctica.

Tras su nacimiento y evolución la educación matemática llegó a ser un campo de investigación genuino, por lo que en el sentir de Artigue (2020) era necesario que desarrollara su propio marco de referencia y prácticas, para dejar de ser sólo un campo de aplicación de otras ciencias como las matemáticas y la psicología.

La ingeniería didáctica fue propuesta por la propia Michéle Artigue en los años ochenta. Artigue (1995) describe a la ingeniería didáctica como una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. En este caso el docente posee conocimiento especializado sobre la asignatura que imparte y, preferentemente, sobre cómo propiciar el aprendizaje de sus estudiantes. El proyecto puede ser, por ejemplo, el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de un concepto o método matemático y el control de tipo científico correspondería, entre otras cosas, al análisis cuidadoso y objetivo de los resultados obtenidos, lo que permitiría obtener conclusiones sobre la calidad del diseño y su replicabilidad, así como de las siempre existentes áreas de oportunidad.

Dado el desarrollo de la didáctica en la época de su nacimiento, la ingeniería didáctica se percibe como el medio para abordar dos cuestiones cruciales (Artigue 1995):

- Las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza.
- El papel que conviene hacerle tomar a las “realizaciones didácticas” en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica.

Artigue (1995) asigna a la ingeniería didáctica una doble función, por un lado, llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase. Y, por otro lado, como una metodología de investigación. Esta última faceta es la que sirve como base para dar forma a la metodología utilizada en la presente investigación.

La Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación

Artigue (2020) señala que a las realizaciones contraladas en el salón de clases se les debe otorgar un papel prominente en las metodologías de la investigación, pues identifican, producen y reproducen fenómenos didácticos, para probar construcciones didácticas. Al tiempo que la ingeniería didáctica se extendía para ser utilizada en otros campos como herramienta de diseño para el profesor, se empezaba a concebir también como metodología de la investigación en educación matemática. Esta metodología fue ganando popularidad y ha servido como base para múltiples investigaciones en diferentes áreas de la educación matemática, pues a decir de Artigue (1995) la ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico.

En la ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases (Artigue 1995), la fase uno de análisis preliminar, la fase dos de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase tres de experimentación y finalmente la fase cuatro de análisis a posteriori y evaluación.

El análisis preliminar, de acuerdo con Artigue (2020) usualmente incluye tres dimensiones: un análisis epistemológico del contenido matemático, un análisis de las condiciones institucionales y las restricciones que enfrentará la ingeniería didáctica, y un análisis de lo que la investigación educativa tiene para ofrecer soporte al diseño. Esta fase es importante pues proporciona un punto de partida y las bases para plantear la investigación.

En la segunda fase, el diseño y análisis a priori, se involucra a las hipótesis de investigación en el proceso. Artigue (2020) señala que el análisis a priori no tiene como objetivo anticipar los comportamientos personales de los participantes, sino construir una referencia a través de la cual las realizaciones en clase puedan ser contrastadas en el análisis a posteriori.

La fase de experimentación es justo lo que su nombre indica, en ella se aplica el diseño realizado en la fase previa.

En el análisis a posteriori se recopilan los datos obtenidos para contrastarlos con el análisis a priori, Artigue (1995) señala que, en la confrontación de los dos análisis, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

Tipo de Investigación

La investigación que se presenta en esta tesis de maestría es de corte cualitativo. Se analiza la comprensión del concepto de límite que muestran los participantes, tras la aplicación de una secuencia didáctica diseñada con el objetivo de su aprendizaje. El análisis del significado personal que manifiestan los participantes se hace con base en la información recuperada de sus expresiones orales durante las sesiones de trabajo, lo que plasmaron por escrito en cada actividad y sus respuestas a los planteamientos presentados en las entrevistas semi estructuradas.

Categorías

Para analizar la información recopilada a través del estudio, se tomó como marco de referencia a la Teoría de Significados Sistémicos, tomando en cuenta a los elementos de significado que se muestran organizados en la Tabla 1, que contiene una síntesis de significados históricos del límite.

Participantes

Los participantes fueron cuatro estudiantes de cuarto semestre de bachillerato, del plantel 1 del Colegio de Bachilleres del Estado de Puebla, México. La elección de tal institución se hizo aprovechando las facilidades proporcionadas por un docente de matemáticas de tal plantel quien fue de gran apoyo para acceder a los estudiantes y obtener el permiso de sus tutores para colaborar en la investigación.

Se utilizó una muestra no probabilística, en la que el investigador junto con el profesor del grupo, seleccionaron a los participantes a través de un muestreo por conveniencia, se trabajó con estudiantes que demostraron el deseo de colaborar, no haciendo diferenciación por género y el único requisito de participación fue el de ser estudiantes regulares, de decir, que no tuvieran asignaturas reprobadas.

Técnicas de Recolección de Datos e Instrumentos

Para poder recopilar información se utilizaron diferentes estrategias y herramientas. Durante todo el tiempo de las sesiones de trabajo se realizó una grabación de video, previa autorización de los participantes y sus tutores, con la intención de capturar las interacciones entre todos ellos, así como tener acceso a sus expresiones gestuales y orales. El objetivo de la toma del video fue recuperar los elementos de significado que expresaron los participantes a través de vías diferentes a las hojas de trabajo, así como las reacciones ante los planteamientos que se les presentaron y ante las expresiones del resto de los participantes. Estas grabaciones también son de utilidad para identificar la forma en que el docente se expresa sobre los conceptos y métodos involucrados, lo cual es parte importante de la interacción y podría ayudar a detectar errores conceptuales o de procedimientos, así como comentarios acertados. Además, este tipo de recurso podría ser fuente de información para otro tipo de acercamiento en una investigación o para promover la reflexión personal sobre la forma de conducir las sesiones de aprendizaje.

Otras fuentes de datos utilizadas fueron la información recopilada a través del cuestionario inicial en la sesión introductoria y las producciones escritas por los participantes en las hojas de trabajo durante las sesiones en las que se realizaron las actividades de aprendizaje. Para esta parte del análisis se tomaron en cuenta las producciones de los cuatro participantes, resaltando aquellas que pudieran contener información relevante para el objetivo del estudio.

Una forma más de recopilar información para su análisis fue la realización de entrevistas semi estructuradas con dos de los participantes, estos fueron seleccionados tras haber demostrado mayor interés y haber tenido una mayor participación durante las sesiones de trabajo. Las entrevistas fueron grabadas solamente en audio pues se consideró que la presencia tan cercana de una cámara de video podría ser invasiva.

Procedimiento

La investigación siguió el proceso experimental de la ingeniería didáctica, cumpliendo con las cuatro fases presentadas por Artigue (2020): fase de análisis preliminar, fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, fase de experimentación y fase de análisis a posteriori y evaluación. En el mismo documento Artigue describe a tal método de investigación como uno basado en el diseño controlado y la experimentación de secuencias de enseñanza, que utiliza un modo de validación interna, basado en la comparación de los análisis a priori y a posteriori.

Fase de análisis preliminar.

De acuerdo con Artigue (2020) esta fase de la ingeniería didáctica proporciona un punto de partida y las bases para plantear la investigación de acuerdo con los análisis preliminares. En este caso se considera así a la información estudiada con base en los objetivos de la investigación, la seleccionada para la construcción del marco teórico.

Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.

Las actividades promueven la utilización de diferentes registros de representación semiótica. De acuerdo con Duval (2017) distinguir y clasificar los tipos de representación semiótica usados en matemáticas es el primer paso para desarrollar una herramienta de análisis cognitivo para las actividades matemáticas. Se considera necesario tomar esto en cuenta para el diseño de las actividades pues vale la pena dotar al estudiante de tal herramienta.

De acuerdo con lo que menciona Brousseau (2002), cuando se construyen situaciones didácticas es importante identificar y caracterizar a los obstáculos que están intrínsecamente relacionados con la naturaleza del conocimiento. En el marco teórico de este documento se presentaron diferentes obstáculos epistemológicos que pueden presentarse durante el proceso de aprendizaje de la noción de límite. En el diseño de las actividades se proponen situaciones que permitan enfrentar directamente a algunos de los mencionados obstáculos.

La secuencia didáctica sigue dos principales hilos conductores. Uno de ellos es a través de los significados, partiendo de lo intuitivo, pasando por lo geométrico y tabular, hasta llegar a lo algebraico, esto siempre teniendo en cuenta los registros de representación semiótica. Teniendo en cuenta que, por el nivel educativo, no se trabajó el significado formal, definición E-D.

Significados de límite, progresión en las actividades.

Figura 1 Primer hilo conductor de la secuencia

El otro hilo conductor en la progresión de la secuencia son los elementos de significado que contempla la Teoría de los Significados Sistémicos, siendo estos: los campos de problemas, algoritmos y procedimientos, elementos lingüísticos, definiciones y propiedades y algunos conceptos relacionados. Constantemente se toman en cuenta algunos momentos del desarrollo histórico del concepto de límite.

Elementos de significado, progresión en las actividades.

Figura 2 Segundo hilo conductor de la secuencia

A continuación, se presenta la Tabla 1 que resume diferentes significados históricos, basada en el trabajo de Batanero (2005), los elementos de significado ahí incluidos aún persisten y se usan al resolver problemas o ejercicios con límites, además están inmersos y son utilizados en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Tabla 1 *Síntesis de significados históricos del límite*

SIGNIFICADO DE LÍMITE	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Tabular	Problemas de cálculo de áreas Problemas de velocidad, tangentes	Cálculos aritméticos Relaciones Error - Distancia	Lenguaje natural, Simbólico	Límites laterales Existencia del límite Límite	Velocidad, Aceleración, Tangente
Gráfico	Área del círculo, Cuadratura de la parábola de Arquímedes Tangente de Fermat Tangente a una curva	Método de exhaución de Eudoxo, Adigualdades de Fermat Cociente de Newton	Lenguaje Natural y geométrico, uso de la retórica, Gráficas para representar límites	Área Tangente	Área bajo la curva Tangente a una curva Derivada
Algebraico	Necesidad de demostrar la existencia del punto de convergencia (límite)	Representación de límite	Notación Límites laterales Convergencia Divergencia	Límites laterales Límite Límites infinitos y en el infinito	Cociente de Newton Sumas de Riemann
Formal	Teoría formal	Interpretación geométrica de la relación Épsilon (Error) – Delta (Distancia)	Punto de acumulación Vecindades Representación con letras griegas de la definición E-D, Convergencia, Divergencia	Propiedades del límite: Reglas para la suma, resta, multiplicación, división y potenciación.	Tangente a una curva Derivada Continuidad Área bajo la curva Integral

Fuente: Elaboración propia.

Cada actividad e incluso las diferentes secciones dentro de cada una de las actividades, tienen diferentes intensiones formativas. Para la descripción de lo que se espera que las actividades promuevan, se utilizan las siguientes categorías.

Tabla 2 *Categorías de análisis de los elementos del significado*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP	RL – EL	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP	SA – AP	SA – EL	SA – DP	SA – AR
Definición de límite	DL – CP	DL – AP	DL – EL	DL – DP	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP	SACL – AP	SACL – EL	SACL – DP	SACL – AR

Nota:

RL – CP significa Representación del Límite – Campos de Problemas

RL – AP significa Representación del Límite – Argumentos y Procedimientos

RL – EL significa Representación del Límite – Elementos Lingüísticos

RL – DP significa Representación del Límite – Definiciones y Propiedades

RL – AR significa Representación del Límite – Argumentos

SA – CP significa Situaciones de Aproximación – Campos de Problemas

SA – AP significa Situaciones de Aproximación – Algoritmos y Procedimientos

SA – EL significa Situaciones de Aproximación – Elementos Lingüísticos

SA – DP significa Situaciones de Aproximación – Definiciones y Propiedades

SA – AR significa Situaciones de Aproximación – Argumentos

DL – CP significa Definiciones de Límite – Campos de Problemas

DL – AP significa Definiciones de Límite – Algoritmos y Procedimientos

DL – EL significa Definiciones de Límite – Elementos Lingüísticos

DL – DP significa Definiciones de Límite – Definiciones y Propiedades

DL – AR significa Definiciones de Límite – Argumentos

SACL – CP significa Situaciones Asociadas al Concepto de Límite – Campos de Problemas

SACL – AP significa Situaciones Asociadas al Concepto de Límite – Algoritmos y Procedimientos

SACL – EL significa Situaciones Asociadas al Concepto de Límite – Elementos Lingüísticos

SACL – DP significa Situaciones Asociadas al Concepto de Límite – Definiciones y Propiedades.

SACL – AR significa Situaciones Asociadas al Concepto de Límite – Argumentos

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan las actividades que conforman la propuesta de secuencia didáctica diseñada. Para distinguir a las actividades, se presentan los pasos de la secuencia con un margen diferente al resto del cuerpo de la tesis. Las intervenciones que se propone que haga el docente, una guía de intervenciones orales, se presentan con letra cursiva.

Posteriormente a la presentación de cada actividad en este documento, se incluye un análisis de cada sección, mencionando su intencionalidad y se analizan las categorías presentadas en la Tabla 2 que están involucradas en cada apartado, así como los registros de representación semiótica utilizados.

De manera general, a lo largo de la secuencia didáctica se propone la discusión en plenaria, en la que los participantes intercambian ideas sobre los conceptos involucrados, los cuestionamientos y los ejercicios y problemas presentados. Se promueve el diálogo y el libre intercambio de ideas durante toda la interacción. Se proporciona a los participantes una hoja de trabajo para cada actividad, en la que se responde a los diferentes planteamientos. Estas hojas son también una de las fuentes de información, junto con los videos y las entrevistas realizadas al final de la fase de experimentación.

Este análisis a priori es la base para el contraste en la fase de análisis a posteriori, lo que Artigue (2020) denomina proceso de validación interna, que en este caso se realiza con la intención de verificar la eficacia y validez de la secuencia didáctica, determinar si se logra o no lo pretendido por los objetivos, así como para encontrar áreas de oportunidad que permitan hacer mejoras al diseño.

Actividad introductoria

Dentro de la ingeniería didáctica, esta actividad se lleva a cabo en la fase experimentación, aunque al tener un enfoque diagnóstico, se aprovechó la información recopilada y lo observado durante su aplicación para realimentar a la fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas y evaluar la pertinencia de las actividades posteriores antes de ser aplicadas.

Esta actividad introductoria se trabajó en plenaria, fomentando la interacción entre todos los participantes y proporcionando intervalos de trabajo individual para la generación de los productos individuales que representan las hojas de trabajo.

Como algunos de los objetivos que tiene esta actividad al interior de la secuencia didáctica se contempla analizar lo que los participantes conocen sobre el concepto de infinito, esto se incluye debido a que diferentes autores (citados en el marco teórico) presentan a este objeto matemático como obstáculo epistemológico durante el aprendizaje del concepto de límite. También se pretende identificar si existe algún conocimiento o intuición de la existencia del concepto de infinito actual. Además, se busca analizar lo que el estudiante interpreta cuando se menciona o utiliza la palabra límite, para tener una referencia del significado personal que los participantes le otorgan a esta noción, aunque sea expresada tomando como referencia a otros contextos, desde una perspectiva no matemática.

Se presentan diferentes preguntas en plenaria para dialogar con base en las respuestas o las dudas expresadas por los participantes. Se proporcionan hojas en blanco para realizar cálculos, tomar notas o hacer esquemas. Se proporciona también una hoja de trabajo con algunas preguntas y ejercicios impresos.

Al inicio de la sesión se hace un relato breve de los objetivos de la investigación, se reafirma el compromiso de la protección de su identidad y se ofrece un ambiente agradable para trabajar en el que se motiva a la participación y está permitido equivocarse.

Las preguntas presentadas en la plenaria se realizan siguiendo un guion, pero manteniendo la flexibilidad para dar seguimiento con otras preguntas, generadas al momento, cuando se considere pertinente.

Se relata la paradoja de Zenón, en la que habla sobre Aquiles y la tortuga. El relato se puede acompañar con dibujos para ilustrar las ideas que presenta.

¿Qué opinan al respecto? Se abre el diálogo libre sobre sus opiniones acerca de lo relatado.

¿Ustedes creen que Aquiles alcanzará a la tortuga? ¿Por qué? Se discuten sus opiniones y posteriormente se solicita escribir su respuesta en la hoja de trabajo.

El concepto con el que vamos a iniciar ha fascinado y confundido a filósofos y matemáticos desde la antigüedad, los pensadores griegos, por ejemplo, se pasaban horas y horas pensando sobre él, recordemos que en aquel entonces no había internet.

¿Han escuchado la palabra infinito? ¿En qué situaciones la han escuchado o mencionado? Se abre el diálogo al respecto.

¿Recuerdas cuándo escuchaste esta palabra por primera vez? ¿Fue en clase de matemáticas?

¿Qué es lo primero que se viene a tu mente cuando escuchas la palabra infinito?

¿Consideras que las personas en general entienden lo que significa esa palabra?

Escribe lo que entiendes por infinito. Tras el diálogo sobre las preguntas planteadas se solicita escribir sus comentarios sobre el tema en la hoja de trabajo. Los participantes comparten sus definiciones. En plenaria se analizan las similitudes y las diferencias entre lo que expresa cada participante.

Escribe por favor en tu hojita la división nueve sobre diez y obtén el resultado, puedes sacar la calculadora si así lo requieres.

Después escribe de nuevo 9 sobre 10, pero ahora súmale 9 sobre 100.

Ahora por favor escribe: 9 sobre 10 más 9 sobre 100 más 9 sobre 1000. ¿Cuál es el resultado? Se da el tiempo necesario para que resuelvan el pequeño ejercicio.

Se pregunta a todos los participantes: *¿cuánto es 9 sobre 10,000? Y, ¿cuánto es 9 sobre 100,000?*

Realiza por favor la suma de todos los resultados anteriores. Se da tiempo a los estudiantes para resolver el planteamiento en hoja de trabajo.

¿Qué pasa si se continúa con el patrón de la suma que estamos realizando? Se abre el diálogo para intercambiar puntos de vista.

El resultado (0.99999…) ¿en algún momento puede ser igual a uno? Se solicita que incluyan su respuesta en la hoja de trabajo.

Los participantes comparten sus respuestas. En plenaria se analizan las similitudes y las diferencias entre las respuestas de cada participante. Se busca si alguno de ellos utilizó los tres puntos o alguna otra manera para indicar repetición de un dígito. *¿Por qué sí llegaría a uno? ¿por qué no?*

Podrían contarme: ¿Qué es un punto?

Y ahora, ¿Qué es una recta?

Se presenta en la pantalla una imagen de la recta numérica. *¿Hasta dónde puede extenderse esta recta?*

¿Se extiende igual hacia la izquierda que hacia la derecha? Se escuchan con atención sus respuestas, especialmente sobre si mencionan algo acerca del infinito negativo.

En la pantalla y en la hoja de trabajo se presentan dos líneas paralelas del mismo grosor, pero distinta longitud *¿Cuál de las líneas creen que contiene más puntos?* Se solicita que escriban su respuesta en la hoja de trabajo.

En matemáticas ¿Qué es una función? Los estudiantes responden en su hoja de trabajo y comparten sus respuestas en plenaria.

¿Podrían dar un ejemplo?

¿Se les ocurre alguna situación de la vida cotidiana que pueda expresarse como una función?

¿Han escuchado la palabra límite?

¿En qué situaciones? Se presta especial atención a esta respuesta.

¿Qué es lo primero que se viene a tu mente cuando escuchas la palabra límite?

Escribe lo que entiendes por límite. Respuesta en hoja de trabajo.

Se inicia esta sesión de trabajo platicando sobre la paradoja de Zenón que habla sobre Aquiles y la tortuga, el relato y el diálogo que se genera, además de ayudar para "romper el hielo", pretende confrontar a los participantes con este tipo de problemas que enfrentaron pensadores de la antigüedad, y que siguen causando confusión y fascinación por las contradicciones que presentan, se considera interesante analizar los comentarios que puedan hacer los estudiantes sobre lo que pasaría con el espacio que se puede recorrer en cada paso subsecuente que dan los competidores, así como lo que mencionen sobre el tiempo o la velocidad, entre otras cosas. De acuerdo con lo establecido en la Tabla 2, esta sección se categoriza en SA – CP y se utilizan los registros pictóricos y de lenguaje natural. Hitt (2003) relaciona a la idea de que Aquiles no podrá alcanzar a su competidora con el infinito potencial, pues tendría que recorrer una infinidad de puntos. También afirma que, para formar en la mente la idea de que podrá alcanzar a la tortuga se debe pensar en otra concepción de infinito, el infinito actual, con el cual se es consciente de todos los elementos de un conjunto infinito, de manera simultánea.

En la siguiente sección se aborda el concepto de infinito, partiendo de la premisa de que sí es algo que puede causar confusiones y que así lo ha sido desde la antigüedad. Las preguntas que se plantean a los participantes tienen como objetivo recopilar información sobre lo que los estudiantes entienden sobre este concepto. En este caso se piensa que las preguntas abordan las categorías SACL - EL y SACL – DP, utilizando el registro de lenguaje natural.

En la tercera sección de la actividad introductoria se presenta una serie que representa una Situación de Aproximación y se pretende identificar las ideas que tienen los estudiantes sobre tales procedimientos recursivos. Los procesos propuestos pretenden llegar a un resultado tal que se pueda preguntar si 0.999… es igual a 1, se considera relevante conocer lo que los participantes puedan expresar sobre tal proposición. En cuanto a las categorías trabajadas se considera que se incluyen las SACL – CP, SA – AP y SA- CP.

En la cuarta sección de esta actividad introductoria se pretende evidenciar algunas ideas que tienen los estudiantes sobre la recta numérica y "hasta dónde llega" en ambos lados. Como complemento se presentan dos segmentos del mismo grosor, pero de diferentes longitudes y se pregunta sobre cuál de ellas contiene mayor cantidad de puntos, la intención es explorar si, tras definir lo que es un punto, podrían imaginar que siempre se podrá relacionar a un punto de un segmento de recta con uno solo del otro segmento de recta, visualizarlos como la misma cantidad de puntos. Se considera interesante explorar las respuestas que los participantes podrían dar al respecto, ¿qué tan abiertos están a considerar alternativas diferentes a las que les muestran sus ojos? Se piensa que la información recopilada en esta sección puede incluirse en las categorías SACL – EL y DL – EL, por el análisis de las expresiones que utilizan en relación con la recta numérica y SA – CP junto con SACL – DP por lo relacionado con la comparación de los segmentos de recta.

En una quinta sección de la actividad se explora cómo conceptualizan a una función y se solicita a los participantes que mencionen algunos ejemplos de su uso. Este concepto no es el que representa el objetivo directo de la actividad y de la secuencia en general, pero se considera una noción fundamental como elemento de significado de límite. La información obtenida sobre el tema se puede incluir en las categorías SACL – EL y DL – EL.

En la parte final de la actividad se pregunta a los participantes sobre lo que viene a su mente cuando escuchan la palabra *límite*, sin necesariamente abordarlo como un objeto matemático y desde una perspectiva pre teórica. Este apartado se considera especialmente interesante pues puede permitir conocer las ideas que relacionan con esta palabra, para luego comparar si hay algún cambio en lo que expresan sobre ella, así como para identificar si más adelante estas ideas se presentan como parte de un obstáculo epistemológico. Se considera que la información recopilada en esta sección puede incluirse en las categorías SACL – EL y DL – EL.

Todos los apartados descritos en la actividad introductoria permiten obtener información sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre diversas situaciones asociadas al concepto de límite y representan un punto de partida sobre el que se pueden comparar avances promovidos por la implementación de la secuencia.

Primera actividad

Dentro de la ingeniería didáctica, esta actividad se lleva a cabo en la fase experimentación, como la actividad presentada previamente tiene un enfoque diagnóstico, esta se considera la primera actividad de aprendizaje.

Se sigue el mismo modelo de trabajo que en la actividad previa: en plenaria, fomentando la interacción entre todos los participantes y proporcionando intervalos de trabajo individual para las respuestas individuales en las hojas de trabajo.

Como algunos de los objetivos que tiene esta actividad al interior de la secuencia didáctica se presenta el del manejo de series e introducir la expresión "tienda a". También se propone analizar la forma de pensar de los participantes sobre la serie presentada, si es posible que la suma de fracciones alcance el valor de la unidad.

Se inicia la actividad con una breve explicación de lo que son las fracciones alícuotas y su uso en Egipto. Se propone utilizar como ejemplo un problema de reparto, en particular el problema seis del papiro del Rhind, que podemos encontrar en Estrada (2018), en el que se solicita repartir seis barras de pan entre diez hombres.

¿Cómo representarían la fracción ¾ con ese método? Se da tiempo para la reflexión y para que los estudiantes escriban su respuesta en la hoja de trabajo. Se comentan las respuestas y se resuelve el ejercicio entre todos, es importante que los estudiantes recuerden la suma de fracciones, pues es componente importante del siguiente ejercicio.

Se relata a los participantes la leyenda del ojo de Horus. Se presenta una imagen en la que se muestran los valores de cada "componente del ojo" y se revisan iniciando con el que vale ½.

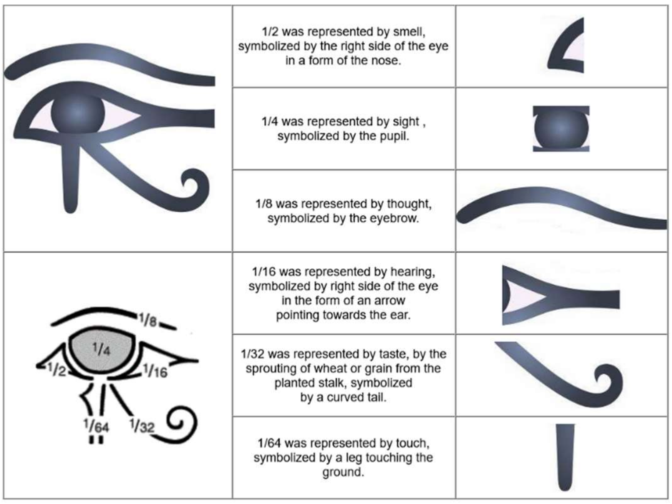


Figura 3 *Representación fraccional del ojo de Horus*

landofpyramids.org (2015)

¿Qué pasa si sumamos las fracciones que hay en la imagen del ojo? Se da tiempo para que los estudiantes realicen la suma en su hoja de trabajo, para algunos de ellos puede resultar complicado hacer la suma de fracciones así que si es necesario se puede proporcionar ayuda sobre la forma de hacerlo. Se resuelve el ejercicio en colectivo y paso a paso, de la fracción más grande hacia la más pequeña, se analiza el resultado obtenido y los resultados parciales en la suma.

¿Qué pasaría si sumamos 1/128 al resultado anterior? Se da tiempo para que los estudiantes respondan, en la hoja de trabajo, a este planteamiento y a las preguntas: ¿Qué puedes notar del resultado? ¿Qué pasa si continuamos con ese mismo patrón? Se comentan las respuestas en plenaria. Al final de este diálogo se puede introducir la expresión: tiende a.

A continuación, se presenta una pregunta que se considera importante para el análisis: *¿Crees que en algún momento la suma llegue a ser uno? ¿Por qué?* Se da tiempo para que los estudiantes respondan en sus hojas de trabajo y se comparten sus respuestas en plenaria.

*Analicemos la siguiente situación, tenemos una cuerda (*se puede mostrar una cuerda pequeña)*, la cortamos a la mitad* (se puede cortar) *y ambas mitades miden un metro, dejamos una de las mitades así y a la otra la cortamos de nuevo justamente a la mitad. Guardamos una de estas últimas mitades y a la otra la cortamos, de nuevo justamente a la mitad.* (Si se cortó la cuerda se puede mostrar cómo quedarían las cuerdas resultantes, si no se tiene el material se puede hacer con GeoGebra). *Si repitiéramos el proceso una cantidad infinita de veces ¿Cuánto mediría en total la suma de todos los fragmentos de cuerda?* Se da tiempo para que los estudiantes respondan en la hoja de trabajo y posteriormente se discuten sus respuestas en plenaria.

Como apertura y para incluir un poco de la historia de las matemáticas, se explica el uso de las fracciones alícuotas en Egipto a través del relato de un problema de reparto. Se les solicita que expresen la fracción ¾ con ese método, el resultado ½ + ¼ será el inicio de una serie, que se seguirá trabajando. Tras un relato breve de la leyenda del ojo de Horus se proporciona una explicación sobre cómo las partes del ojo representan fracciones, y se utilizan tales facciones como pretexto para formar la serie que continuaría la suma del punto anterior, se dialoga respecto a los resultados obtenidos en cada iteración y se plantea la pregunta de si en algún momento la suma llegaría a uno. Se discute acerca de los resultados que propone cada participante. Esta sección de la actividad aporta directamente a las categorías RL – CP, SA – CP y RL – AP.

Respecto a la sección en la cual se presenta la pregunta de si *0.999...* es igual a *1,* Mena-Lorca et al. (2015) hacen un estudio extensivo sobre el tema, con la intención de confrontar al infinito potencial con el infinito actual, el primero que se va progresivamente construyendo y el segundo que es el resultado final de esa construcción, como se menciona en el marco teórico esto se considera como un obstáculo epistemológico que puede tener repercusiones en el aprendizaje del concepto de límite, los autores recopilaron evidencia sobre la persistencia y resistencia de este obstáculo. Se considera que en este bloque de preguntas se abordan sobre todo las categorías SA – AP, SA – CP y SACL –AR.

En el bloque final de la actividad se presenta una situación que involucra a una cuerda, su corte por la mitad y el sucesivo corte por la mitad de una de las partes obtenidas en el paso previo, todo esto para llegar a una pregunta sobre cuánto mediría en total la suma de todos los fragmentos de cuerda. Se considera relevante analizar hacia donde se inclinan las respuestas, qué tanto surge la idea de colocar “infinitamente” trozos podría hacer pensar a los participantes a imaginar una cuerda de longitud infinita o si se identifican las restricciones que representa la longitud inicial de la cuerda. Se considera que en este bloque de planteamientos pertenece a las categorías SA – CP, SACL – CP y SA – AP.

Segunda actividad

En la segunda actividad de la secuencia didáctica se pretende que los participantes tengan un acercamiento al concepto de límite a través del trabajo con procesos recursivos a través del análisis de áreas de diferentes figuras.

Se sigue el mismo modelo de trabajo que en la actividad previa: en plenaria, fomentando la interacción entre todos los participantes y proporcionando tiempo para expresar las respuestas individuales en las hojas de trabajo.

Se presentan en la pantalla diferentes figuras geométricas que tienen bien definida la fórmula para calcular su área como el círculo, triángulo y cuadrado.

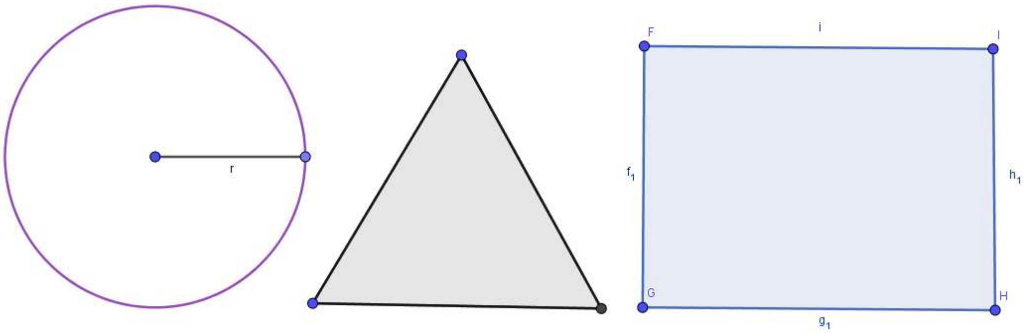


Figura 4 *Figuras para cálculo de área*

Se asignan al azar los valores necesarios para calcularla y entre todos se obtienen las áreas de las figuras.

En la antigüedad, no se conocía la fórmula que acabamos de utilizar para calcular el área del círculo, así que, a un tal Eudoxo que vivió entre 390 a. C. y 337 a. C, basado en las ideas de otros pensadores, se le ocurrió que podía hacerlo utilizando figuras para las cuales ya conocían como calcular el área.

Se dibuja un círculo en GeoGebra y los estudiantes calculan su área con la fórmula que conocen en la hoja de trabajo, posteriormente se comparten resultados.

Se inscribe un triángulo rectángulo en el círculo en GeoGebra, para facilitar el proceso ahí mismo se obtienen los datos necesarios para calcular el área de tal triángulo. Se solicita a los estudiantes que hagan los cálculos y plasmen su respuesta en la hoja de trabajo. Se comentan los resultados obtenidos.

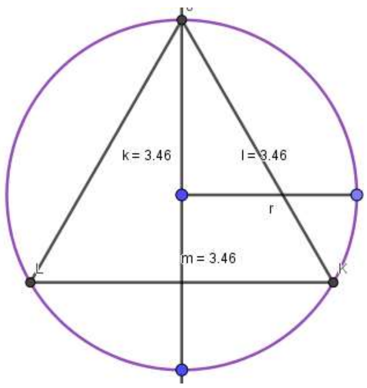


Figura 5 *Triángulo inscrito en círculo*

Posteriormente, se inscribe un cuadrado en el mismo círculo trazado en GeoGebra. Se calcula el área de este cuadrado y se solicita a los estudiantes que plasmen sus cálculos y respuesta en la hoja de trabajo. En plenaria se comparan los resultados, poniendo atención para notar si algún estudiante habla sobre el incremento de área o tiene una idea de lo que ocurre con el incremento de lados del poligono inscrito en el círculo.

A continuación, se inscribe un pentágono dentro del mismo círculo elaborado en GeoGebra. Se obtiene del programa la información necesaria y se calcula el área del pentágono. Se considera importante tener en cuenta que es muy probable que los estudiantes no recuerden la fórmula para calcular el área de un pentágono, lo que ellos mismos pueden investigar en la sesión, a través de sus teléfonos celulares, pero es también importante procurar que quede claro lo que es la apotema. Tras tener un consenso sobre la fórmula para el área del pentágono se hacen los cálculos correspondientes y se propone una respuesta en la hoja de trabajo, para después comentar los resultados.

Se plantea la pregunta *¿Qué ocurre con el área de las figuras inscritas en el círculo conforme se incrementa el número de lados?* Se solicita que escriban su respuesta en la hoja de trabajo y cuando todos la tengan lista se procede a hacer una discusión de las respuestas.

Para continuar se pregunta a los estudiantes *¿Qué ocurre con el área de los "huecos" que hay entre las figuras y el círculo conforme se incrementa el número de lados?* Los estudiantes escriben su respuesta en la hoja de trabajo y se promueve la discusión sobre las respuestas.

Para avanzar en la actividad, se presenta la pregunta a los estudiantes*: ¿Qué pasaría si seguimos incrementando la cantidad de lados de la figura inscrita?* Los estudiantes redactan su respuesta en la hoja de trabajo. Se procede a la discusión de las respuestas, procurando poner mucha atención en lo que expresan e indagar cuando manifiesten algo relevante para los objetivos del estudio.

Se muestra en la pantalla una imagen con la progresión del incremento de lados del polígono inscrito. Y se solicitan comentarios al respecto, resaltando si lo que habían respondido anteriormente se relaciona con lo que ahora comentan tras observar la imagen.

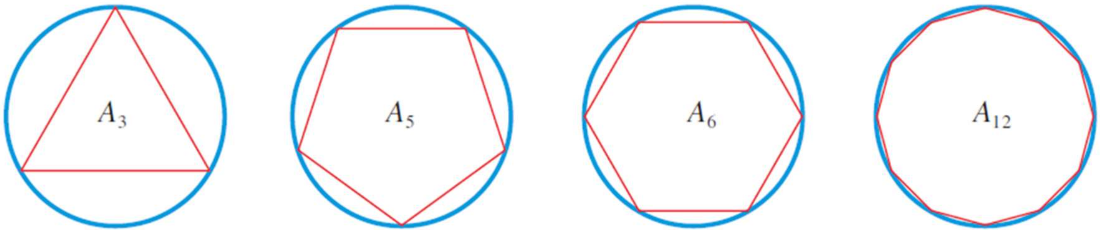


Figura 6 *Método de exhaución*

Steward et al. (2012)

Se explica la idea de que cuando un polígono regular inscrito en un círculo tiene una cantidad de lados que tiende a infinito, la apotema tiende a ser igual al radio de tal círculo y la fórmula para encontrar el área de tales polígonos se puede interpretar como la fórmula para encontrar el área del círculo.

Para seguir avanzado en la actividad se presenta una curva sobre en el plano cartesiano en GeoGebra, puede ser la de un logaritmo o si es necesario podría ser una lineal o cuadrática para que les sea más familiar a los estudiantes.

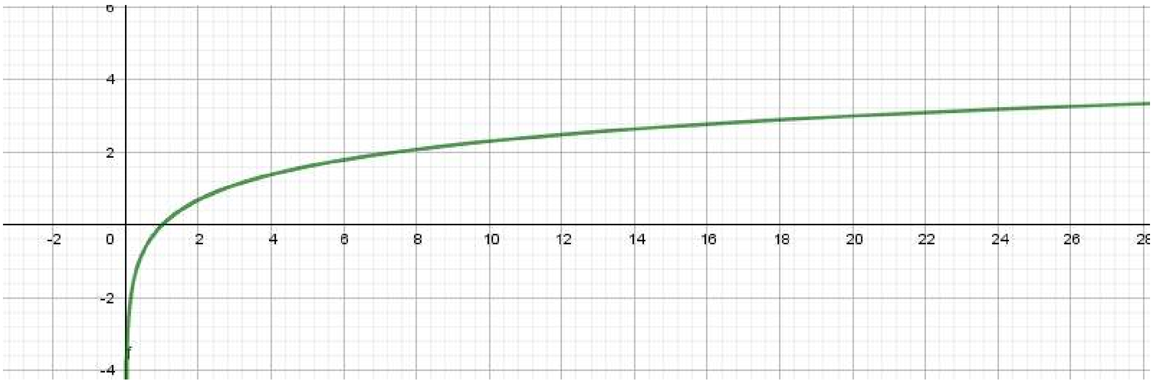


Figura *7 Gráfica ejemplo*

¿Creen que sea posible encontrar el área bajo la curva mostrada? ¿Qué se les ocurre para hacerlo? Se escuchan con atención sus respuestas. Vamos a seleccionar un intervalo de valores para x. El docente puede elegir el intervalo de valores para x que le parezca conveniente o se pueden utilizar los que le sugieran los estudiantes, por ejemplo, entre 4 y 6. ¿Cómo podríamos encontrar el área entre la curva y el eje x? Cuando está delimitada entre los valores 4 y 6 para x. Se escuchan con atención sus opiniones.

A un matemático de apellido Riemann se le ocurrió algo similar a lo que hemos estado trabajando, si llenamos de figuras regulares, para las que podemos conocer su área, y las sumamos todas, podemos encontrar el área que buscamos, o por lo menos aproximarnos a ella. Se escuchan las opiniones de los estudiantes centrando la atención en notar si pueden relacionar lo trabajado en los apartados previos con lo que se muestra en este.

En el límite de la suma de Riemann mientras los subintervalos se hacen más pequeños, cuando el número de rectángulos se hace mayor, podemos obtener el área que buscamos.

¿Qué pasa cuando incrementamos la cantidad de rectángulos bajo la curva? Se solicita a los estudiantes que escriban su respuesta en la hoja de trabajo y después de hacerlo comparten lo que redactaron con el resto de sus compañeros y el docente, se discuten las aportaciones poniendo atención por si hay alguna idea sobre la que valga la pena profundizar o que se tenga que aclarar.

Se explica lo que es y cómo se hace la cuadratura de la parábola, hablando un poco sobre Arquímedes. Se proporciona a los estudiantes una hoja con una parábola y con la ayuda de reglas trazan los triángulos que van disminuyendo cada vez en tamaño. Se hace también el trazo en GeoGebra y se obtienen las áreas de los triángulos para comparar el área del primer triángulo con las sumas de los triángulos más pequeños para analizar la razón entre ambas áreas. ¿Qué opinan sobre la cuadratura de la parábola que realizamos? Los estudiantes comparten su respuesta en la hoja de trabajo y con esto se cierra esta sesión.

En el primer bloque se hace el cálculo de las áreas de diferentes figuras regulares, incluyendo al círculo. Se habla sobre las ventajas que se tienen ahora que conocemos las fórmulas para calcular áreas y se dialoga sobre cómo creen que hayan deducido las fórmulas que conocemos. Se platica un poco sobre Eudoxo de Cnido y el método exhaustivo que utilizó, posteriormente se lleva a la práctica tal método, realizando diversas preguntas sobre lo que pasa al incrementar los lados de las figuras, tanto con el área de estas, como con los huecos que quedarían entre la figura inscrita y el círculo. Se analiza la fórmula de área para el círculo en relación con la del área para polígonos regulares, se discute lo que ocurre cuando la cantidad de lados tiende a infinito y lo que ocurre con la apotema. Se considera que en este bloque se abordan las categorías SA – CP, SA – AR y SACL – CP.

En un segundo bloque, se presenta una curva y se cuestiona a los participantes si basándose en el método del apartado anterior podrían pensar en alguna manera para encontrar el área bajo la curva en un intervalo en particular. Se presenta un acercamiento pre teórico a la suma de Riemann y se hacen diferentes preguntas sobre lo que ocurre al disminuir la base de los rectángulos, haciendo que se acerque a cero, aumentando también su cantidad. Se recomienda utilizar GeoGebra o algún simulador realizado en el programa para visualizar y analizar la situación. Se considera que en este bloque se abordan las categorías SA – AR y SACL – CP.

Se presenta la cuadratura de la parábola, se da a los participantes la oportunidad de realizar algunos trazos siguiendo tal proceso en una parábola impresa en papel, se realiza el cálculo del área y se analiza también en GeoGebra, se promueve el diálogo al respecto. Se considera que las categorías trabajadas son SA – CP y SACL – CP.

Tercera actividad

Dentro de la ingeniería didáctica, esta actividad continúa dentro de la fase de experimentación, se sigue el mismo modelo de trabajo que en las actividades previas: en plenaria, fomentando la interacción y el diálogo entre todos los participantes y proporcionando intervalos de trabajo individual para las respuestas personales en las hojas de trabajo.

Como algunos de los objetivos que tiene esta actividad al interior de la secuencia didáctica, se presenta el de tener un segundo acercamiento al significado de límite, desde las representaciones gráfica y la tabular. Además, se busca consolidar la idea de que podemos acercarnos a un valor por izquierda y por derecha.

¿Recuerdan la recta numérica? En la pantalla se presenta una recta numérica.

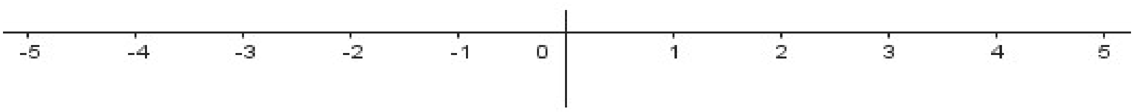


Figura 8 *Recta numérica*

¿Podrían explicar para qué sirve? Se escuchan con atención sus participaciones y se comenta si algo de lo expresado se considera de interés para los objetivos de la secuencia didáctica.

En la recta numérica, el docente parte de un valor y poco a poco se acerca a un valor superior por la izquierda (partimos del 2 y nos acercamos al 4, por ejemplo). Después nos acercamos por la derecha a algún valor (al 4 por ejemplo, pero ahora partiendo del 6).

Se plantea un problema en el que se genera una función lineal. *Un técnico de electrodomésticos me cobra (independientemente del costo del material) $100 por la visita a domicilio y $100 por cada hora de trabajo que necesite para reparar mi refrigerador. ¿Cómo podría representar la situación descrita a través de lenguaje algebraico?* Los estudiantes escriben su respuesta en la hoja de trabajo y se comparten para la discusión en plenaria.

Como saben, lo que encontraron es una relación funcional o simplemente una función, relacionamos a una variable independiente con una variable dependiente. En este caso ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente? Se abre el diálogo sobre el tema.

Ahora vamos a evaluar y graficar la función que obtuvimos, partiendo de un intervalo de valores. En la hoja de trabajo se presenta una tabla con los valores en los que será evaluada la función, a partir de tales valores se genera la gráfica utilizando la cuadrícula de la hoja de trabajo.

Vamos a graficar en GeoGebra la función obtenida. Seleccionamos un tiempo en particular (4 horas, por ejemplo) y colocamos un punto sobre la recta. Colocamos otro punto móvil en 3 horas y lo movemos poco a poco, nos acercamos al punto que hay en 4 horas y vamos viendo cómo cambian los valores para y. Relacionamos este acercamiento con lo que hicimos en la recta numérica (acercamiento por la izquierda) para los valores en x, analizamos la relación que guarda con los cambios en y. *¿Pueden notar cómo van cambiando ambas variables? Cuando x tiende a … y tiende a…* Se analizan un par de valores.

Seleccionamos un tiempo en particular (4 horas, por ejemplo) y colocamos un punto. Colocamos otro punto móvil en 5 horas y lo movemos poco a poco, nos acercamos al punto que hay en 4 horas y vamos viendo cómo cambian los valores para y. Relacionamos este acercamiento con lo que hicimos en la recta numérica (acercamiento por la derecha) para los valores en x, analizamos la relación que guarda con los cambios en y. *De nuevo ¿Pueden notar cómo van cambiando ambas variables? Cuando x tiende a … y tiende a…* Se analiza lo que ocurre en un par de valores.

Vamos a probar con otra función. Se presenta la siguiente función y los estudiantes completan la tabla para los valores de x que ahí se solicitan.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Durante el proceso de solución del ejercicio se apoya a los estudiantes con las dudas que tengan y se puede observar los procesos que realizan y preguntar sobre lo que se considere interesante.

Para finalizar la actividad se analizan los resultados obtenidos y se presentan preguntas del tipo *¿Pueden notar qué es lo que va pasando con los resultados?* Y las que se consideren pertinentes para analizar lo que los estudiantes entienden de este proceso.

Para finalizar la actividad, se grafica la función en GeoGebra y coloca el punto sobre la recta generada, se mueve el punto haciendo que pase a través de diferentes valores para x y se observa lo que ocurre cuando x vale menos uno. *¿Por qué desaparece el puntito de la pantalla cuando x vale menos uno?*

En la primera sección se utiliza la recta numérica, se selecciona un valor en particular y se propone acercarse a tal valor por la izquierda y por la derecha. En este apartado se trabajan las categorías SACL – EL y SA – AP.

Se genera presenta un problema de una relación funcional entre tiempo y costo, se genera la función y se evalúa en algunos valores, se llena la tabla haciendo que la variable tienda a algún valor en particular y se analiza lo que pasa con el valor de la función en cada valor, se grafica a través de los datos obtenidos y posteriormente se hace una aproximación similar en la gráfica, se acerca a un valor por la izquierda y se acerca a un valor por la derecha. En este apartado se trabajan las categorías SA – CP, SA – DP, SA – AP, SA – EL y SACL – EL.

Se presenta una nueva función y se grafica en GeoGebra, de nuevo se hace el acercamiento por izquierda y por derecha, completando la tabla de la hoja de trabajo, en la que se busca acercarse al valor de *x* que provocaría una indeterminación. En este apartado se trabajan las categorías SA – AP, SACL – CP, SA – AR y SACL – AR.

Cuarta actividad

Dentro de la ingeniería didáctica, esta actividad continúa estando en la fase de experimentación, siguiendo el mismo modelo de trabajo que en las actividades anteriores: en plenaria, fomentando la interacción y el diálogo entre todos los participantes, además se proporciona tiempo para el trabajo individual, para que los participantes puedan expresar sus respuestas en las hojas de trabajo.

Como algunos de los objetivos que tiene esta actividad al interior de la secuencia didáctica, se presenta el de tener un tercer acercamiento al significado de límite, e introducir la definición que se maneja comúnmente en el nivel medio superior.

Para iniciar la sesión se recupera la tabla con las cantidades obtenidas en la última función de la actividad anterior y se presenta ante los participantes para dialogar. *¿Recuerdan lo que trabajamos al final de la última sesión? En la primera tabla el valor de **x** va aumentando, nos acercamos a -1 por la izquierda para el valor de **x** y el valor de **f(x)** tiende a -2. En la segunda tabla el valor de **x** va disminuyendo, nos acercamos a -1 por la derecha para el valor de **x** y el valor de **f(x)** también tiende a -2.*

*- De la tabla y gráfica que generamos para la función que trabajamos, podemos ver que cuando **x** es cercana a -1 (a ambos lados de -1), **f(x)** es cercana a -2. Podemos hacer los valores de **f(x)** tan cercanos a -2 como queramos si tomamos **x** suficientemente cercana a -1. Expresamos esto diciendo:*

"el límite de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

*cuando **x** se aproxima a -1 es igual a -2"*

Utilizamos la notación:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

Se presenta en pantalla la definición que propone Steward et al. (2012).

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L"

si podemos hacer los valores de $f(x)$, arbitrariamente cercanos a L (tan cerca de L como queramos) tomando x suficientemente cercana a a, pero no igual a a.

Figura 9 *Significado institucional de límite*

Steward et al. (2012)

*"En términos generales, esto nos dice que los valores de **f(x)** se acercan más y más al número **L** cuando **x** se acerca cada vez más al número **a** (de cualquier lado de a) pero **x** ≠ **a**." (pp. 840-841)*

Se menciona a los estudiantes sobre el límite por derecha (+) y por izquierda (-), recordando los datos de la tabla de la función trabajada, y se comenta que, para que el límite exista ambos límites laterales deben ser iguales.

Se les presenta el siguiente ejercicio, tomado de Steward et al. (2012). *Estima el valor del siguiente límite haciendo una tabla de valores.* Los estudiantes lo responden en la hoja de trabajo, el docente apoya en caso de ser necesario y escucha si hay expresiones relevantes para los objetivos.

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2$$

Se comparten los resultados y se pregunta a los estudiantes sobre cómo interpretan los datos obtenidos, se observa si con capaces de entender lo que ocurre con el resultado conforme se evalúa la función para diferentes valores de ***x***. *Como ya lo hemos hecho, esto mismo se puede representar a través de una gráfica.* Se escribe la función en GeoGebra y se analiza la gráfica obtenida.

Tomando como referencia la definición de Steward et al. (2012) se les plantea la pregunta: *¿Cómo expresarías el resultado del límite solicitado?* Los estudiantes escriben su respuesta en la hoja de trabajo y tras hacerlo se comparten respuestas, se pone atención en las expresiones que utilicen.

Existen funciones en las que podemos encontrar los límites laterales, pero en las que estos son diferentes, por ejemplo, la siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Se traza la función en GeoGebra y se muestra su comportamiento en valores para $\boldsymbol{x}$ cercanos a cero. Se puede preguntar a los participantes si han visto ese tipo de funciones y qué es lo que pueden observar.

Cuando lo trabajen en clases tendrán un desarrollo más amplio de las reglas y el álgebra involucrada, aunque no en muchas ocasiones se hace el trabajo previo que hicimos.

En algunas ocasiones es posible encontrar el límite por sustitución directa. Vamos a evaluar los siguientes límites. Los estudiantes resuelven los ejercicios en su hoja de trabajo, mientras lo hacen se observa los procesos que realizan y se apoya en caso de dudas. Se comparten y comentan los resultados obtenidos.

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$$

Algo muy común que harán en clase de matemáticas cuando trabajen con límites será encontrarlos utilizando álgebra. Se les presenta otro ejercicio. *Encuentra el siguiente límite a través de cancelación de factor común.* Los estudiantes lo resuelven en su hoja de trabajo, se les puede ayudar mencionando que está involucrada la diferencia de cuadrados. Los estudiantes comparten sus respuestas y se analiza cómo es que la expresan.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

Se proporciona un último ejercicio y los estudiantes lo resuelven en su hoja de trabajo. *Encuentra el siguiente límite a través de simplificación.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^2 - 9}{x}$$

En la cuarta actividad se retoma la última función trabajada en la actividad anterior, y se hace un repaso de lo trabajado con ella en la sesión anterior, introduciendo elementos lingüísticos característicos del trabajo con límites, se relata lo que sucede con *y* cuando el valor de *x* tiende al valor elegido y lo relacionamos directamente con el significado institucional pretendido del límite. En este apartado se trabajan principalmente las categorías RL – CP, RL – AP, RL – EL y DL – DP.

Se comparte con los participantes el significado institucional pretendido, partiendo de lo que presenta Steward et al. (2012) para definir al límite de una función y se genera un diálogo al respecto. Se habla sobre sus propiedades y sobre los límites laterales. En este apartado se trabajan las categorías DL – AP, DL – DP y DL – AR.

Se presenta un ejercicio en el que se solicita encontrar el límite a través de una tabla, se hacen también las aproximaciones a través de GeoGebra. Se solicita a los estudiantes verbalizar lo que significa lo que ha encontrado en ambas situaciones. Se considera que se abordan las categorías RL – AP y SA – AP.

Se presenta a los estudiantes una función que tiene límites laterales diferentes cuando *x* tiende a cero, se discute lo que significa que no sean iguales los límites laterales. Se grafica en GeoGebra para poder visualizar el comportamiento de la función. Se considera que en esta sección se abordan las categorías RL – DL, RL – DP, RE – EL y DL – EL.

Se encuentran límites por sustitución directa, cancelación de factor común y simplificación. Por la naturaleza introductoria de las sesiones, no se profundiza mucho en los procesos algebraicos, aunque sí se les comenta a los estudiantes que cuando aborden el tema en sus cursos regulares, muy probablemente realizarán una cantidad considerable de estos tipos de ejercicios. Se aprovecha la ocasión para mencionar que, por la forma de trabajar el tema, es muy común que el concepto de límite se deje de lado y lo que toma su lugar son los procedimientos algebraicos que se utilizan para encontrarlo. Se considera que en esta sección se abordan las categorías RL – AP, DL – AP y SACL – AP.

Para finalizar la actividad se solicita a los estudiantes que escriban lo que entienden por el límite de una función. Se considera que en este apartado entran todas las categorías relacionadas con la Definición de Límite (DL), aunque se espera que no todos expresen las mismas ni que se aborden todas ellas.

Quinta actividad

Esta actividad cierra la fase de experimentación y sigue el mismo modelo de trabajo que en las actividades anteriores: en plenaria, fomentando la interacción y el diálogo entre todos los participantes, además se proporciona tiempo para el trabajo individual, para que los participantes puedan expresar sus respuestas en las hojas de trabajo.

Como algunos de los objetivos que tiene esta actividad se pretende dar cierre a la secuencia y que los estudiantes conozcan algunas aplicaciones del límite.

Con apoyo de una presentación en pantalla se realiza un resumen de algunas de las cosas trabajadas a lo largo de todas las actividades.

Se plantea el siguiente problema a los estudiantes: *Analicemos la siguiente situación: La distancia entre este lugar y el Zócalo de la CDMX es de 141 Km, si nos tomó en llegar un tiempo de 2.5 horas ¿Cuál fue la velocidad promedio del viaje?* Los estudiantes analizan el problema y plasman su respuesta en hoja de trabajo. Cuando terminan de responder se discute el procedimiento que utilizaron y el resultado al que llegó cada uno de ellos. Se puede mostrar en pantalla el recorrido sugerido por Google Maps.

Se pregunta a los estudiantes *¿Durante todo el viaje se mantuvo esa misma velocidad?* Los estudiantes responden en la hoja de trabajo y cuando terminan se platica sobre su opinión y las causas que podrían provocar variaciones en la velocidad.

Se elige entre todos los participantes la hora en la que iniciaría el viaje, se selecciona un intervalo de una hora y se hace una suposición de la distancia que se podía haber recorrido durante ese tiempo, quizás partiendo de la velocidad promedio o dependiendo de la parte del trayecto que se elija. Se recorta el intervalo a media hora, luego a diez minutos, después a cinco minutos, a un minuto, treinta segundos, diez segundos, hasta llegar un segundo. En cada iteración tanto la distancia (en el numerador) como el tiempo (en el denominador) se van haciendo más pequeñitos, se calcula o estima la velocidad promedio en intervalos cada vez menores, que tienden a cero. *¿Podríamos conocer la velocidad instantánea?* Se escuchan sus respuestas. *La velocidad instantánea es un límite de la velocidad promedio conforme el tiempo tiende a cero.*

¿Han escuchado hablar de Isaac Newton y Gottfried Leibniz? De forma breve ¿Qué has escuchado o leído sobre ellos? Se escuchan sus comentarios y se puede hablar un poco de la disputa que tuvieron.

- Seguramente conocen la anécdota de Newton y la manzana, que no sabemos qué tan cierta es, a Newton se le ocurrió que los objetos al estar en caída libre tienen una velocidad y esta se incrementa constantemente. Newton concluyó que los objetos en caída deben tener una velocidad específica en cada instante de su recorrido y se preguntó ¿cómo podría calcularla? La matemática existente no era suficiente para hacerlo. Era necesario encontrar la manera de describir la diferencia entre el valor de una función, en este caso la posición, y la tasa de cambio de tal función, lo que en este caso sería la velocidad.

Leibniz, independientemente de Newton, desarrolló la notación que utilizamos actualmente en el cálculo.

Analicemos esto. Se traza una curva, podría ser una parábola, se genera una secante entre dos puntos que marcan el intervalo de tiempo y se habla sobre la tasa de cambio promedio, de la pendiente de tal recta secante, se acercan los puntos entre sí un poco y se observa lo que pasa con la pendiente de la recta, se repite este proceso hasta que queda una tangente. *Cuando el límite de la distancia entre los dos puntos tiende a cero, la secante llega a ser una tangente y podemos encontrar la tasa de cambio instantánea.*

Se finaliza la sesión, con apoyo de una presentación, hablando sobre cómo el límite nos acerca al cálculo en problemas de tasa de cambio y problemas de área bajo una curva, así como analizar procesos infinitos como objetos finitos.

En la actividad final se busca analizar si se logra relacionar a la definición de límite con lo realizado durante las actividades anteriores. Se dialoga sobre Newton y Leibniz, así como sobre sus aportaciones y su relación con el cálculo. Se presenta un problema de velocidad promedio y se relaciona con la secante, se acorta el intervalo de tiempo haciendo que se acerquen cada vez más los puntos tendiendo hacia la tangente. Se considera que en esta sección se abordan las categorías SACL – CP, SACL – EL, SA – CP y RL – CP.

Se cierra con una presentación que recupera algunas partes de lo trabajado en la secuencia y se dialoga sobre la utilidad de lo aprendido con relación al cálculo diferencial e integral. En este apartado se abordan las categorías SACL – CP, SACL – AP, SACL – EL, SACL – DP y SACL – AR.

Fase de experimentación.

El punto de reunión fue un domicilio particular, con condiciones adecuadas de iluminación y ventilación, así como un espacio suficientemente amplio para mantener una distancia adecuada, de acuerdo con la normativa presentada por la autoridad sanitaria. Se proporcionó todo el material necesario para trabajar y mobiliario adecuado para poder hacerlo cómodamente.

Se realizaron cuatro sesiones en conjunto, en las que se desarrolló la secuencia didáctica. La duración por sesión fue de alrededor de una hora con veinte minutos. Se solicitó la autorización por escrito, a los participantes y a sus padres, de realizar grabación de video en las sesiones, garantizando siempre la confidencialidad de su identidad y del material recopilado.

Tras culminar el ciclo de sesiones en conjunto, se realizó una entrevista clínica semi estructurada a dos de los participantes.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Fase de análisis a posteriori.

En este apartado revisamos la información recopilada a través de los productos de aprendizaje, las interacciones durante el desarrollo de la secuencia didáctica y las entrevistas a dos de los participantes. Se toman como referencia las tablas: *síntesis de significados históricos del límite* y *categorías de análisis de los elementos del significado*, para analizar lo que los participantes muestran entender sobre el concepto de límite, tras participar en las actividades de la secuencia didáctica. Se analiza también lo que Godino y Batanero (1994) definen como sistemas de prácticas personales asociadas a un campo de problemas.

El análisis se realiza por actividad, retomando aportaciones que se consideren relevantes, incluyendo las expresadas verbalmente y a través de cada hoja de trabajo, sin enfocarse directamente en un solo participante.

Actividad introductoria

El planteamiento inicial consistió en el relato de la paradoja de Zenón, en la que se habla de Aquiles y la tortuga, los participantes mencionaron no haber escuchado el nombre de Zenón, ni conocer sobre las paradojas que él propuso. Los participantes inicialmente se ven sorprendidos por tal planteamiento pues de alguna manera desafía al sentido común, representando situaciones contraintuitivas. Sobre la pregunta de si Aquiles alcanzará a la tortuga los participantes E1, E2 y E4 consideran que sí la alcanzará y la rebasará, los tres argumentan sus respuestas con base en la velocidad, así que a pesar de la sorpresa que les causó pensar en la infinita cantidad de longitudes cada vez más pequeñas, lograron concluir que es una distancia total fija, por lo que se puede recorrer en un tiempo finito, imperando el sentido común. Por otro lado, E3 responde que Aquiles no alcanzaría a la tortuga, argumenta en su hoja de respuesta: *"No creo que la alcance ya que en un momento dado va a haber una meta a la cual llegar y la tortuga por idealizarla lleva cierta distancia de ventaja ocasionando que gane*". Esta última expresión denota dependencia de la distancia que se tiene que recorrer, la meta en la carrera podría alcanzarse primero por la tortuga, si de acuerdo con las velocidades de ambos competidores, la distancia del total del recorrido no le es suficiente a Aquiles para poder rebasar a la tortuga a tiempo.

En esta situación de aproximación, los estudiantes recurren a un razonamiento que da la impresión de estar basado en lo empírico y en su percepción, no son "víctimas" de la paradoja que representa el surgimiento recurrente de distancias cada vez menores, pero que se manifiestan infinitamente.

Como propuesta de rediseño para este apartado, se considera la opción de solicitar a los estudiantes que presenten esquemas o dibujos para acompañar su respuesta en la hoja de trabajo, tales dibujos se podrían solicitar después de la explicación verbal y antes de presentar la pregunta de si Aquiles logra alcanzar a la tortuga y podrían proporcionar información sobre la forma en que conciben la situación presentada.

En el siguiente bloque de la actividad se abordó el concepto de infinito que se considera una situación asociada al concepto de límite. Todos los participantes manifiestan haber escuchado o utilizado tal noción, tanto en contextos cotidianos a través del cine y la televisión, por ejemplo, como dentro del aula de matemáticas, relacionando con este concepto a nociones como función, dominio, rango e infinito negativo. La descripción generalizada que presentan por escrito sobre el concepto de infinito es de "*algo que no tiene fin*" y reconocen la existencia del símbolo utilizado para hacer referencia al infinito, mencionan relacionarlo, además de las matemáticas, con situaciones quizás un poco místicas y románticas, un poco a manera de representante de una promesa.

En la siguiente sección se aborda un proceso que se considera como una situación de aproximación, la cuestión de que si la suma 0.9 + 0.09 + 0.009 …, es igual a uno. Los participantes E2, E3 y E4 afirman que esto no es posible, pues siempre hará falta algo, por muy pequeño que sea lo que falte y que siempre se podrá sumar algo más en la secuencia para continuarla indefinidamente. E1 menciona que sí sería igual a uno, pero su argumento es con base en el redondeo, haciendo remembranza a situaciones escolares, afirmando que "*los maestros nos han enseñado que lo redondeas*". A este argumento E4 le responde que si ese fuera el caso se podría redondear desde el 0.99, por ejemplo, y que no tendría sentido seguir la secuencia. El comentario parece tener impacto pues en la hoja de trabajo E1 complementó su respuesta escribiendo: "*pero como es algo infinito nunca llegaría a uno*". Contrastando con el apartado de la paradoja presentada, en el que la respuesta que dieron la mayoría de los participantes se aproxima más al infinito actual, en este apartado no ocurre así y se analiza como un proceso más cercano al infinito potencial, Mena et al. (2015) mencionan que una de las razones de que los estudiantes no acepten tal igualdad es porque se trata de construcciones que obedecen a diferentes estados cognitivos, proceso y objeto.

En la cuarta sección de esta actividad introductoria se plantean las preguntas de: en geometría, ¿qué entiendes por un punto? y ¿qué entiendes por una recta? Se presentan dos segmentos de recta del mismo grosor, pero de diferentes longitudes y se pregunta sobre cuál de ellas contiene mayor cantidad de puntos. Se considera que hubo problemas por parte del profesor para contextualizar las preguntas sobre el punto y los segmentos de recta, pues las respuestas que se obtuvieron no presentaban argumentos geométricos sino cotidianos. Para encaminar la discusión el profesor mencionó que "*quizás podemos expresar una línea como muchos puntitos juntos, uno tras otro*", todos los participantes estuvieron de acuerdo con la idea, sólo E1 complementó mencionando que sí es así pero cuando trazamos una línea en papel no podemos hacerlo punto a punto, gestualizando un trazo imaginario con su mano. Sobre la pregunta de ¿hasta dónde llega la recta numérica? E3 comenta que puede llegar hasta donde la necesitemos que llegue, E4 menciona que puede llegar hasta infinito y E3 complementa que también hasta menos infinito. A la pregunta de ¿qué pasa en GeoGebra cuando "se hace zoom" sobre uno de los ejes? Los participantes respondieron con mucha seguridad que siguen apareciendo números más pequeños y que esto se puede hacer indefinidamente. Esta idea se pretendía utilizar para ver si los participantes relacionaban los puntos que se podían encontrar en una recta, al plantear la pregunta de que en cual de dos rectas, una de mayor longitud que la otra, habría mayor cantidad de puntos. E1, E2 y E3 sin dudarlo respondieron que, en la más larga simplemente por ser más larga, E4 comentó que si la recta más corta tenía puntos más pequeños podría contener una mayor cantidad de puntos. Esta última se considera una respuesta muy interesante y digna de análisis bajo un marco de referencia más amplio. Se considerar que las respuestas de E1, E2 y E3 se generaron puramente desde la percepción y sin tomar en cuenta el carácter adimensional de un punto, no se pensó en la correspondencia uno a uno, aunque tampoco fue una alternativa promovida tan directamente por la instrucción.

Como área de oportunidad para un rediseño de esta sección se propone un acercamiento diferente al planteamiento sobre los segmentos de recta, también se puede considerar colocarlo en otra parte de la secuencia, hablar directamente de la relación uno a uno que existe. Se considera que en esta ocasión no fue explícito y quedó descontextualizado.

Se consideró de utilidad explorar lo que los participantes conciben sobre lo que es una función, pues se trata de un concepto directamente relacionado con el de límite. E2 lo relaciona con lo que se hace al evaluar una variable, el resto de los participantes lo relacionan con la proporcionalidad, con la cantidad necesaria de algún material para lograr cierto resultado, atendiendo directamente a un campo de problemas.

Para cerrar la sesión se preguntó sobre lo que viene a su mente cuando se menciona la palabra límite, esto con la intención de identificar los elementos lingüísticos relacionados con la definición de límite y con situaciones asociadas al concepto de límite, que los estudiantes tienen presentes. De forma oral se expresaron las siguientes ideas: Una línea, una barra, un obstáculo, algo que termina o acaba, cuando ya no hay nada a partir de ahí y una frontera.

Se considera de utilidad incluir textualmente lo que los participantes escribieron al respecto en sus hojas de trabajo. E1 respondió: "*La delimitación de algo, el final e inicio de alguna cosa*". E2 escribió: "*Algo determinado por un inicio y un final, ejemplo, llegué al final de la carretera*".

E3 contestó: "*Puede ser el término de algo diciendo que se concretó o terminó, pero también puede ser el comienzo de algo dependiendo del contexto que se dé*". Finalmente, E4 que fue solamente quien lo relacionó directamente con matemáticas lo expresa como: "*Hasta donde va a llegar algo, o sea el fin, ejemplo de una recta o ecuación*".

En sus respuestas se hace evidente la utilización de la noción de límite como una palabra cotidiana, con sentido dual, estas conceptualizaciones preexistentes en los estudiantes que Moru (2009) presenta como un obstáculo epistemológico, por el conflicto entre ellas y lo que el profesor espera que se aprenda. Las ideas que esta noción provoca se presentan como el conocimiento anterior del cual propone Bachelard (2000), del que se conoce en contra de. En este caso siendo ideas particularmente contrarias a lo que significa el concepto de límite desde la perspectiva de las matemáticas. Se presentan también ideas como las que propone Hitt (2003), que hacen referencia a situaciones que restringen al concepto de límite a situaciones geográficas.

Tabla 3 *Análisis de los elementos del significado, actividad introductoria*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP	RL – EL	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP E1, E2, E3, E4	SA – AP E1, E2, E3, E4	SA – EL E1, E2, E3, E4	SA – DP	SA – AR
Definición de límite	DL – CP	DL – AP	DL – EL E1, E2, E3, E4	DL – DP	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP E1, E2, E3, E4	SACL – AP E1, E2, E3, E4	SACL – EL E1, E2, E3, E4	SACL – DP E1, E2, E3, E4	SACL – AR

Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad introductoria los participantes tienen la oportunidad de interactuar sobre todo con Situaciones de Aproximación y Situaciones Asociadas al Concepto de Límite, las asimilan adecuadamente, mostrando entendimiento de los planteamientos presentados y compartiendo lo que entienden sobre ellas principalmente a través de elementos lingüísticos, sobre todo del tipo verbal.

Primera actividad

Ante el problema de reparto presentado inicialmente los participantes utilizaron la forma moderna de representar la fracción necesaria, como se esperaba que se hiciera. Tras presentar la forma en que los egipcios resolvían este tipo de problemas, los participantes se mostraron muy interesados y comentaron, entre otras cosas, que encuentran ventajas para la repartición pues los cortes que se tendrían que hacer son menos y más sencillos de lograr. Los participantes relatan tener problemas para realizar las sumas de fracciones. La expresión de la fracción ¾, con el método de los egipcios, sirvió un poco como pretexto para presentar una parte de la leyenda del ojo de Horus, sobre la cual los participantes mostraron interés, se presentó a través de imágenes el valor fraccionario que se le asigna a cada parte del ojo. Posteriormente se presentó la tarea de resolver en la hoja de trabajo la suma de fracciones representadas por las partes del ojo, quedando planteada de esta manera:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$$

Inicialmente la suma causó problemas, pero tras tomar ritmo en general se pudo resolver adecuadamente, sólo E4 tuvo un poco más de problemas por lo que E1 le apoyó con una indicación que se considera interesante: "*Puedes verlo así: este son dos de estos, este son dos de estos y así, pásalos todos como si fueran de estos*". E1 identifica que cada denominador en la fracción posterior es de un valor del doble al anterior, explicando con vocabulario muy cotidiano el comportamiento de la serie.

Ante el planteamiento de qué ocurriría si al resultado obtenido se le suma $\frac{1}{128}$, E1 responde de inmediato que se obtendría un entero, pero al resolver la suma se retracta diciendo: "*No, no es cierto, todavía no, nunca se hace el entero*". La idea intuitiva de que la suma podría alcanzar como resultado la unidad, se diluye en la infinitud del proceso.

El seguir sumando términos no causó mayores problemas y cada vez lo hicieron con mayor facilidad, la estrategia la resume E4 quien señala: "*Pues se suman y ya nomas se le quita uno de nuevo*", a lo que E1, que se expresa con un poco de frustración, responde: "*siempre falta uno*".

La continuación de la discusión sobre el tema vino a partir de la pregunta: ¿Qué pasa si continuamos ese mismo patrón? E2 es quien toma la palabra y da voz a lo que todos expresan en sus hojas de trabajo: "*Pasa lo mismo, como lo de la tortuga, va avanzando y avanzando, un cachito y un cachito, pero nunca lo iguala, no sé…, no lo alcanza pues, el numerador no alcanza al denominador*". Esto contrasta con la respuesta que dio en el apartado de la tortuga pues argumentó que Aquiles alcanzaría a la tortuga al tener mayor velocidad que ella.

El culmen de la sección llega con la pregunta: ¿Crees que en algún momento la suma llegue a ser uno? ¿Por qué? Nuevamente se considera de utilidad incluir textualmente lo que todos los participantes escribieron al respecto en sus hojas de trabajo. E1 respondió: "*Yo creo que no, porque siempre va a faltar un poco para llegar al entero*". E2 escribió: "*No, porque no alcanza el valor de la unidad*". E3 contestó: "*No, porque es como una fórmula y nunca cambia"*. Finalmente, E4 expresa: "*No, porque es como si fuera una fórmula o un mismo método a seguir, nunca cambia a menos que haya una variable*".

Mena-Lorca et al (2015) relacionan a razonamientos como los que exponen E1 y E2 con el infinito potencial, con una cuerda infinita de nueves que no termina y que, entre otros autores, Hitt (2003) reconoce como un obstáculo epistemológico al que se enfrenta el estudiante cuando aprende el concepto de límite. En un par de aportaciones que realiza E1 se presenta también lo que Mena-Lorca et al (2015) señalan como resistencia del obstáculo epistemológico, se vislumbra la suma como algo que ha recorrido todas las iteraciones posibles para igualar la unidad, para tener al ojo de Horus completo, pero se regresa a una forma de pensar en la que el proceso continúa indefinidamente, se regresa la atención al proceso potencial.

En el siguiente segmento de la actividad se presentó el planteamiento: "*Tenemos esta cuerda, la voy a cortar, la corto a la mitad. Pongo en la mesa una mitad. Imagínense que la cuerda que quedó en mis manos mide un metro y lo vuelvo a cortar".* Tras la pregunta sobre qué longitud de cuerda quedaría tras un segundo corte, E1 responde que un medio y todos le dan la razón. Se corta por la mitad la cuerda que quedó en la mano y ante la nueva pregunta sobre qué parte quedaría, E1 expresa: "*Cuarto, ¡aaahh! entonces sí llegaba*", refiriéndose a lo trabajado en la sección anterior. Se considera que esta expresión es muestra de avance en la aceptación de situaciones asociadas con el infinito actual. El proceso sigue su curso y hay un diálogo bastante animado sobre lo que ocurre con los trozos de la cuerda, que en este momento están colocados sobre la mesa de mayor a menor longitud. Se hace el planteamiento: *Si pudiéramos seguir cortando los trozos más pequeños, a la mitad y al resultante también la mitad, digamos que infinitamente ¿cuánto va a medir la cuerda?* Tres de los participantes respondieron sencillamente que dos metros, lo que medía antes de cortarla. E4 coincidió, pero añadió una condición adicional: "*dos metros de manera física, e infinito de manera matemática".* Esta expresión hace evidente un avance en la conceptualización del infinito, el participante en la realidad sí visualiza el infinito actual, pero en la matemática, aún lo visualiza como infinito potencial. En este sentido Agudelo et al. (2016) afirman que para superar al obstáculo epistemológico que representa el infinito actual, se requiere hacer una interpretación de la realidad desde perspectivas intuitivas y contraintuitivas y asociarlas, en este caso, al concepto de límite.

Se considera que los planteamientos agrupados en esta actividad son pertinentes en su diseño y secuenciación, que produjeron material de interés para analizar y la oportunidad de enfrentar directamente a los obstáculos epistemológicos.

Tabla 4 *Análisis de los elementos del significado, actividad 1*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP E1, E2, E3, E4	RL – AP E1, E2, E3, E4	RL – EL	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP E1, E2, E3, E4	SA – AP E1, E2, E3, E4	SA – EL	SA – DP	SA – AR
Definición de límite	DL – CP	DL – AP	DL – EL	DL – DP	DL – AR

Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP E1, E2, E3, E4	SACL – AP	SACL – EL	SACL – DP	SACL – AR E1, E2, E3, E4

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla podemos visualizar que se promovieron principalmente los elementos de significado: Campos de Problemas y Algoritmos y Procedimientos, sobre todo en la categoría de Situaciones de Aproximación. Todos los participantes demostraron entendimiento de los planteamientos presentados y realizaron los Algoritmos y Procedimientos requeridos.

Segunda actividad

Para iniciar la sesión se realizaron los cálculos del área para un círculo, un triángulo y un cuadrado, haciendo énfasis en la practicidad que ofrecen las fórmulas utilizadas y a las que tenemos acceso en estos días. Se dibujó un círculo en GeoGebra, teniendo un radio de 4 unidades de longitud y se calculó su área verificando que todos tuvieran clara su magnitud y se presentó la idea de que hubo una etapa de la humanidad en la que no existía tal fórmula para calcular el área del círculo y que esto representó un problema al que se tenía que buscar solución. Tras inscribir un triángulo equilátero dentro del círculo, con GeoGebra se encontró su base y altura, señalando que en la antigüedad no contaban con este tipo de herramientas, así que tenían que buscar soluciones ingeniosas para poder resolver los problemas que se les presentaban.

Se inscribió a continuación un cuadrado y se calculó también su área, se lanzó la interrogante sobre cuál de las dos figuras inscritas tiene un área mayor, a lo que todos respondieron que el cuadrado. Se siguió la tendencia inscribiendo ahora un pentágono regular y calculando también su área, en este caso los participantes tuvieron que investigar la fórmula a través de sus dispositivos móviles. Se les presentó el cuestionamiento: *¿Qué pasa con el área conforme el número de lados aumenta?* Todos reconocieron el incremento que se presentó en cuanto al área, incluso E2 mencionó que: "*va a igualar la forma del círculo*". Sobre la pregunta de qué pasa si se incrementa indefinidamente la cantidad de lados del polígono regular inscrito, todos los participantes confirmaron lo que propuso E2 mencionando que puede llegar a ser un círculo, además reconocen la manera en que los huecos entre la figura y el círculo se van reduciendo. Respecto a la pregunta de si el área del polígono regular y la del círculo podrían ser iguales, los participantes afirmaron que así será, en algún momento o después de un tiempo infinito. En este caso los participantes mostrarían con sus respuestas lo que Mena-Lorca et Al (2015) relacionan con el infinito actual, comparable con aceptar a 0.999… como igual a uno, pues se analiza el resultado cuando se ha desplegado toda la expansión decimal de ese 0.999… Vale la pena detenerse a pensar, ¿qué es lo que provoca que lo hayan expresado así para este caso y no para preguntas anteriores? que presentan una naturaleza similar, ¿es acaso el uso de la representación pictórica? o ¿justamente los planteamientos previos los llevaron a este tipo de pensamiento? E1, por ejemplo, señala que esto le provoca recordar lo trabajado con la cuerda, por lo que se puede reconocer la influencia lo trabajado previamente. Respecto al registro de representación utilizado, además de la inmediatez que se puede obtener de lo visual, Duval (2017) otorga a la transformación de representaciones semióticas un papel de promotora del pensamiento matemático, además de diferentes oportunidades de acceso a los objetos matemáticos. Panizza (2018) señala que las diferentes representaciones expresan diferentes propiedades de un objeto y de esta manera proveen distintas descripciones de este, las que en su totalidad hacen posible identificarlo.

Posteriormente se presentó en GeoGebra la gráfica de logaritmo natural de *x*, se eligió tal función sólo por su forma. Se hizo el planteamiento: *¿Creen que con lo que hemos trabajado hasta ahora podríamos encontrar una manera para encontrar el área bajo la curva?* E4 mencionó que no es posible y los demás afirmaron que sí, E1 propuso además contar los cuadritos de GeoGebra para hacerlo. Se hace un ejemplo adicional y una pregunta similar, pero con una función lineal, a lo que E1 propone que se puede resolver con un cuadrado y un triángulo, dando evidencia de entendimiento del proceso de exhaución. En un simulador se introdujo una función y se seleccionó una cantidad inicial pequeña de rectángulos para irlos incrementando y cuestionar sobre sus efectos, E1 mencionó que el área se hace más exacta y E3 afirmó que se hace más cercana a la que queremos encontrar. Respecto a la reducción de la base de los rectángulos, E2 mencionó que se hace como un punto, E1 presentó la idea de que el rectángulo sería como una línea y E4 que desaparecen los huecos de arriba. Todos coinciden en que la base no podría ser cero y el profesor mencionó que podemos hacer la base tan cercana a cero como queramos y analizar así el área, E1 menciona que "*tiende a entero*". De manera similar a lo ocurrido con los polígonos y el círculo, la percepción generalizada fue que se puede encontrar con precisión el área bajo la curva mostrada en GeoGebra.

Como cierre de la sesión se analizó brevemente el caso de la cuadratura de la parábola como un caso del método de exhaución, los participantes hicieron los trazos necesarios para las primeras iteraciones en la generación de triángulos y reconocen la similitud con los procesos de apartados anteriores.

Se considera que los planteamientos agrupados en esta actividad son pertinentes en su diseño y secuenciación, sin duda produjeron material de interés para analizar. Se hace notorio el abordaje del significado de límite desde lo geométrico, así como el uso del registro de representación gráfico.

Como un área de oportunidad se encontró que, en las actividades introductoria, 1 y 2 se utilizó mucho la expresión: “en la antigüedad” o simplemente se habló de: “antes”; valdría la pena situar con precisión los contextos históricos en los que surgieron los campos de problemas a los que se hace referencia en cada caso, esto daría mayor autenticidad a los sucesos mencionados.

Tabla 5 *Análisis de los elementos del significado, actividad 2*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP	RL – EL	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP E1, E2, E3, E4	SA – AP	SA – EL E1, E2, E3, E4	SA – DP	SA – AR E1, E2, E3, E4
Definición de límite	DL – CP	DL – AP	DL – EL	DL – DP	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP E1, E2, E3, E4	SACL – AP	SACL – EL E1, E2, E3, E4	SACL – DP	SACL – AR

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla podemos ver que se promovió principalmente la categoría de Situaciones de Aproximación con diferentes acercamientos al método de exhaución, los participantes expresaron diferentes Argumentos sobre lo que ocurría en cada caso y utilizaron Elementos Lingüísticos que de manera aún intuitiva se relacionan con Situaciones Asociadas al Concepto de Límite.

Tercera actividad

Para inicial la actividad se presentó de nuevo la recta numérica y se propuso la idea de acercarse a un número por la izquierda y por la derecha, todos los participantes demostraron entendimiento de tal idea.

Los participantes resolvieron un problema que involucra una función lineal, se identificaron las variables involucradas y la relación que hay entre ellas, se completó la tabla correspondiente y se graficó con base en los valores de la tabla. A través de GeoGebra se analizaron, utilizando un punto sobre la recta, los valores que toma la función conforme se acercaban a un valor para la variable independiente, por la izquierda y por la derecha. Los participantes demostraron entendimiento de todo el proceso realizado.

Se planteó un proceso similar, pero con una función un poco más compleja, siendo esta $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ con base en los valores obtenidos para la tabla se preguntó si les es posible ver alguna tendencia en los resultados. E4 comenta: "*De alguna manera es menos uno, menos uno, como que se va, no sé cómo explicarlo*", a pesar de haber utilizado la expresión "tiende a" en repetidas ocasiones, no le es posible en esta ocasión relacionarla con lo que se está trabajando. E1 muestra sorpresa y comenta: "*Ah, ya sé, que si los sumas, lo de arriba y lo de abajo da cuatro*". Este comentario demuestra capacidad para la observación y el análisis, aunque no es algo que se buscaba intencionalmente, la forma de organizar las tablas y en la que cambian los valores le hacen notar tal patrón.

Completa la tabla de valores para la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

x	**-2**	**-1.5**	**-1.25**	**-1.1**	**-1.01**
f(x)	-3	-2.5	-2.25	-2.1	-2.01

x	**0**	**-0.5**	**-0.75**	**-0.9**	**-0.99**
f(x)	-1	-1.5	-1.75	-1.9	-1.99
	-4	-4	-4	-4	-4

Figura 10 *Tabla en hoja de trabajo, E1, actividad 3*

Para dar mayor claridad sobre lo que se pretendía analizar el profesor hace notar que el valor de *x* en la primera tabla es creciente y se hace cada vez más próximo a menos uno, se presentó la pregunta: *¿qué pasa con el resultado?* E1 responde: "*Inicia con menos tres y termina con menos dos punto cero uno*". El profesor pregunta: *"Entonces, ¿qué pueden notar?"* a lo que E2 responde: "*¿Que tienen los mismos decimales*?" y E1 comenta: "*Pues nada más que se le quita uno*". En ese momento pareciera que se perdió la idea de la relación que hay entre las variables. Para recuperar la idea se trazó en GeoGebra la gráfica correspondiente y se acerca el punto sobre la recta hacia menos uno para la variable *x*, se pregunta: *¿qué pasa con la variable y?*, para lo que E1 responde: "*Tiende a menos dos*". Resulta interesante que no se haya podido dar voz al comportamiento de la variable dependiente en la primera tabla hasta que se hizo una transformación en el registro de representación.

Después se analizó otro aspecto en la función: ¿qué pasa cuando x toma el valor menos uno?, en la recta se acerca el punto a ese valor y al tomarlo exactamente el punto desaparece. E1 cuestiona "*¿por qué se vuelve cero?"* A lo que E2 le respondió: "*es una división entre cero, un valor indefinido*", por lo que E1 pregunta: *"¿Nunca va a llegar a menos dos?"* Se cierra la sesión mencionando que este es uno de los beneficios que nos puede dar el trabajar con límites, poder analizar este tipo de situaciones.

***Tabla 6** Análisis de los elementos del significado, actividad 3*

Categorías	Elementos del significado				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP	RL – EL	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP E1, E2, E3, E4	SA – AP E1, E2, E3, E4	SA – EL E1, E2, E3, E4	SA – DP E1, E2, E3, E4	SA – AR E1, E2, E4
Definición de límite	DL – CP	DL – AP	DL – EL E1	DL – DP	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP E1, E2, E3, E4	SACL – AP	SACL – EL E1, E2, E3, E4	SACL – DP	SACL – AR E1, E2

Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad y hasta este punto de la secuencia, analizando lo que promueven las actividades en conjunto, además de lo que se puede inferir de lo recopilado en las tablas, se percibe haber ocurrido algo similar a lo que menciona Cornu (2002), sobre lo común que puede ser que en la enseñanza inicialmente se enfatice el proceso de aproximamiento al límite, en lugar del concepto mismo de límite, podemos notar que la categoría de Situaciones de Aproximación se aborda desde diferentes elementos de significado. Esto no se considera algo negativo, el diseño general de la secuencia propone un acercamiento partiendo de lo intuitivo y pasando por diferentes Situaciones Asociadas al Concepto de Límite, antes de abordar el significado institucional, para propiciar que no se entienda este como algo puramente algorítmico.

Los Elementos Lingüísticos directamente relacionados con la Definición de Límite son poco utilizados por los participantes en esta actividad, a pesar de haber utilizado algunos de ellos en actividades anteriores y que se esperaba que aparecieran aquí, se puede notar que sólo E1 los muestra. Es posible ver también que hay participantes que no proporcionan argumentos, a pesar de que se da la oportunidad directa para expresar ese elemento de significado.

Cuarta actividad

En esta actividad los procesos algebraicos tienen un gran peso. Se inició recordando la función trabajada al final de la actividad anterior y las situaciones interesantes que se encontraron tras analizarla, los valores a los por los que pasaba y a los que tendía la función conforme x se aproximaba a menos uno por ambos lados y la indeterminación generada cuando x valía exactamente menos uno. *El límite de la función cuando x tiende a menos uno, es igual a menos dos*. Finalmente se compartió a través de la pantalla la definición que propone Steward et al. (2012) (2012) en su libro de precálculo.

Se planteó la pregunta ¿Recuerdan cuando hacíamos las sumas de un medio más un cuarto y su continuación? A lo que todos responden que sí, E1 comentó que todavía tiene dudas sobre si el resultado llega a ser la unidad, tal comentario es justamente la razón de recordar esa secuencia y se menciona explícitamente: *podemos seguir el proceso y en el límite de esa suma podemos entender que sí es uno, que sí se alcanza la unidad.*

Se presentó una nueva función, que fue tomada de Steward et al. (2012), siendo $\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2$, explícitamente solicitando encontrar el límite de esa función a través de una aproximación tabular. Tras completar la primera de dos tablas se preguntó a los participantes: *¿De esta primera tabla qué pueden observar?* A lo que E1 responde: "*Tiende a cuatro". Se* da seguimiento a la aportación preguntando: *¿Qué es lo que tiende a 4?* A lo que E2 responde: *"La función". Y* E1 complementa: *"Cuando x tiende a dos el resultado tiende a cuatro".* A pesar de haberlo ejemplificado y de tener ya a la mando el significado institucional pretendido, aún no se utilizó la palabra límite para expresar lo encontrado. En la segunda tabla se realizó un proceso similar, pero acercándose a dos por la derecha, nuevamente se hicieron comentarios sobre lo observado, E2 comentó: "*los dos tienden a cuatro*", E1 expresó: "*Lo que decíamos hace rato*" y E3 señaló con mucha confianza: "*La función por derecha y por izquierda tiende a cuatro*", atendiendo con un poco más de profundidad a las propiedades, tras preguntar bajo qué condición ocurre lo que comentaron, E1 respondió: Si x tiende a 2.

La imagen muestra las respuestas de E2, quien responde adecuadamente. Tras la realización de esta sección de la actividad se considera que podría incrementar la cantidad de iteraciones, que se podría incluir la solicitud de un valor adicional entre el primero y el segundo o entre el segundo y el tercero, para hacer más evidente la forma en que se comporta la función conforme los valores de x se acercan a dos.

Estima el valor del siguiente límite haciendo una tabla de valores.

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2$$

x	f (x)
1	2
1.5	2.75
1.9	3.71
1.99	3.97

x	f (x)
3	8
2.5	5.75
2.1	4.31
2.01	4.03

Figura 11 *Tabla en hoja de trabajo, E2, actividad 4*

Tras la solicitud de que escriban sus respuestas en las hojas de trabajo E1, E2 y E4 plasman correctamente su respuesta en forma de expresión matemática, E2 complementa escribiendo: "*cuando x es 2 la variable tiende a 4"*, confundiendo un poco los conceptos. E4 escribe: "*cuando x tiende a 2 la función tiende a 4".*

Se resolvieron un par ejercicios en los que se tenía que encontrar el límite por sustitución directa y los resultados fueron adecuados, con explicaciones verbales como la de E1: "*Cuando x tiende a menos uno, la función tiende a menos cuatro tercios*".

Posteriormente se presentaron a los estudiantes un par de ejercicios más, en los que se necesitaba un poco más de conocimiento algebraico $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^2-9}{x}$. Durante el tiempo dedicado a su resolución los comentarios sobre las dificultades para emplear el álgebra son los que dirigen la conversación. E1 expresa: "*Yo sé más hacer cosas como la fórmula general que, aunque son muchos pasos pues hay fórmula*". Por su parte, con un poco de frustración E4 comenta: "*Es que cuando estás viendo te dicen: factoriza y pues factorizas y lo sabes hacer, pero ya luego no sabes cómo utilizarlo, no sabes qué hacer*".

Se finaliza la sesión pidiendo que respondieran en la hoja de trabajo a la pregunta: ¿Qué entiendes por límite de una función? Antes de hacerlo E1 comentó: "*Pero no sé qué es, sí entiendo cómo resolverlo, pero no entiendo qué es*". En la hoja de trabajo E1 responde "*Es hasta donde llega por ambos lados una función"*, pareciendo tal respuesta estar más cercana a los conceptos de dominio y rango. E2 escribe "*límite de donde comienza al límite que tiende a llegar*", E3 expresa:

"*que de un lado u otro tiene punto final aún así quede punto y tanto por faltar*" y E4 responde: "*Es hasta dónde llega una recta*". La respuesta que proporciona E3 resulta interesante, pareciera afirmar que a pesar de poder seguir el proceso podemos tratarlo como un resultado en el que el proceso finalizó, acercándose un poco a la concepción actual del infinito.

Para una nueva edición de la secuencia se propone aprovechar las ventajas de utilizar alguna herramienta informática para determinar a qué valor se aproxima una secuencia de números, ya que dedicaría su esfuerzo y energía en tratar de interpretar el concepto estudiado en lugar de completar "a mano" las tablas de valores, cosa que, aunque se considera necesaria que el estudiante pueda lograr, resultó desgastante para los participantes de la investigación por el tiempo invertido en tales procedimientos.

***Tabla** 7 Análisis de los elementos del significado, actividad 4*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP E1, E2, E3	RL – EL E1, E2, E3, E4	RL – DP	RL – AR
Situaciones de aproximación	SA – CP	SA – AP E1, E2, E3	SA – EL E1, E2, E3	SA – DP	SA – AR
Definición de límite	DL – CP	DL – AP E1, E2	DL – EL E1, E2, E3, E4	DL – DP E3	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP	SACL – AP	SACL – EL	SACL – DP	SACL – AR

Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad se trabajó más directamente a los elementos de significado: Algoritmos y procedimientos y Elementos Lingüísticos, en diferentes categorías. Se puede visualizar que al tratarse de procedimientos más complejos hay participantes que ya no se expresan en algunas categorías, incluso basan sus respuestas escritas, sobre todo los Algoritmos y Procedimientos de tipo algebraico, en lo que presentan otros participantes.

Quinta actividad

En la quinta y última actividad, hizo una recapitulación breve sobre lo trabajado, se presentó un problema y se plantearon situaciones que permitirían entender mejor la utilidad del concepto de límite.

Para iniciar la actividad, se presentó un sencillo problema en el que se tenía que calcular la velocidad promedio para un recorrido entre un punto de la ciudad de Puebla (el lugar en el que se trabajó la secuencia) y el Zócalo de la CDMX. Durante su resolución los participantes compartieron las estrategias que estaban utilizando y todos respondieron adecuadamente. E4 se adelantó a lo que se les preguntaría después, comentando: "*¿qué tal si hay mucho tráfico?*". Se planteó la cuestión de si durante todo el trayecto se viajaría a la misma velocidad, a lo que todos comentaron que no sería así, las razones que dieron fueron de diferente naturaleza, E1 comentó: "*Pues normalmente no se mantiene siempre la misma velocidad, también hay semáforos, o se puede atravesar un motociclista*". E2 mencionó: "*Depende del día, el tráfico*". E4 señaló "*Puede que haya un accidente o que esté cerrada la autopista*".

Tras hablar un poco sobre las aportaciones de Newton y Leibniz al desarrollo del cálculo y tomando en cuenta estas aportaciones, con el trayecto mostrado en la pantalla se elige una distancia entre un par de puntos que podría tomar una hora en recorrerse y se habla sobre la velocidad promedio que podría tenerse en tal tiempo, para después reducir progresivamente los intervalos y suponer velocidades promedio en cada uno de ellos, todo esto hasta reducir a un tiempo que tiende a cero y se preguntó si habrá manera de conocer la velocidad en tal instante, a lo que todos responden que no saben, lo cual se considera adecuado de acuerdo a los conocimientos previos que poseen por el punto de su formación.

Se trazó una parábola en GegoGebra, que abriera hacia abajo y se relacionó con una posición. Se habló también sobre el concepto de tasa de cambio, sobre la recta secante como velocidad promedio y se manipulan los puntos que la forman para hacerla más pequeña hasta llegar a ser una tangente. Se menciona el papel del límite en este tipo de situaciones, así como la manera en que se le considera fundamental para el cálculo diferencial y el cálculo integral, todo esto con el apoyo de una presentación. Se mencionó nuevamente a la paradoja de Zenón y algunas otras de las cosas trabajadas, se cerró la sesión y la secuencia comentando: "*Hacemos o imaginamos procesos infinitos y a través del límite podemos obtener respuestas finitas, que sí son manipulables y con las que podemos operar*". Los estudiantes registraron sus respuestas finales en las hojas de trabajo.

A la pregunta de ¿para qué nos sirve utilizar límites? E1 responde en la hoja de trabajo: "*para acercarnos infinitamente, tanto como queramos, a algo"*. E2 relata: "*para acercarnos lo máximo posible a lo que necesitamos*", E3 menciona "*para definir algo que podría seguir y seguir"* y E4 expresa: "*para de alguna manera matemática acercarnos a algo de una manera infinita*".

Respecto al cuestionamiento de ¿qué entiendes por el límite de una función? E1 escribe: "*Es el valor al que se va acercando la función*", E2 responde: "*el número de la variable que tiende a alcanzar el valor de la función, lo máximo posible*" E3 expresa: "*hasta donde puede llegar el valor de x*" y E4 contesta: "*El punto donde ya no puede llegar la recta de cierta manera, pero se va acercando*". Esta respuesta pareciera tener connotaciones geográficas, aunque se distingue un poco de las que se dieron en la actividad introductoria en el sentido de que parece hacer remembranza a las situaciones de aproximación trabajadas.

Finalmente, se les cuestiona: ¿Qué aprendiste a través de todas las sesiones que tuvimos? E1 responde: "*aprendí el cómo resolver un límite y las diversas maneras en que se puede presentar, y también a resolverlo*". Por su parte E2 señala: "*comprender mejor el tema de funciones y limitantes, desde cómo resolverlo, saber su significado e identificar por completo cuanto se trata de este tipo de tema*". E4 comparte: "*El origen y cómo sacar el área de diferentes figuras, también como resolver límites, más de álgebra*".

Tabla 8 *Análisis de los elementos del significado, actividad 5*

Categorías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del límite	RL – CP	RL – AP	RL – EL E1, E2, E3, E4	RL – DP	RL – AR

Situaciones de aproximación	SA – CP E1, E2	SA – AP E2, E4	SA – EL E1, E3, E4	SA – DP	SA – AR
Definición de límite	DL – CP E1, E3	DL – AP E1, E2, E3, E4	DL – EL E1, E4	DL – DP	DL – AR
Situaciones asociadas al concepto de límite	SACL – CP E1, E2, E3, E4	SACL – AP	SACL – EL E1, E2, E3, E4	SACL – DP	SACL – AR

Fuente: Elaboración propia.

La forma en que se manejó la actividad da la oportunidad de que la tabla permita analizar los significados que los participantes expresan en sus respuestas a las hojas de trabajo sobre lo que entienden por límite y los usos que consideran que tiene. Se hace evidente que no se expresan significados relacionados con Definiciones y Propiedades, ni Argumentos.

Reflexiones generales sobre las actividades

El análisis de las expresiones de los participantes, sus acciones, comportamiento y producciones hizo evidentes, entre otras cosas, diferentes situaciones de interés para la Educación Matemática en general, como las siguientes:

- Se percibió la existencia de dificultades al realizar procedimientos algebraicos, al evaluar las funciones para completar las tablas.
- Cuando se utilizaron, los problemas históricos lograron dotar de contexto a las actividades permitiendo enfocar la atención de los estudiantes y motivando su participación.
- Se hizo evidente la confrontación de ambos tipos de infinito que describen Mena-Lorca et al (2015), uno que se va progresivamente construyendo y otro que es el resultado final de esa construcción.
- Se encontró como una dificultad al horario disponible para realizar las sesiones con los participantes, a pesar de su esfuerzo, al llevarse a cabo después de su jornada escolar el cansancio fue factor en la diminución de la energía y motivación. Esto se hizo más evidente en la actividad 5, la de cierre.

- Se percibió como una limitante el desconocimiento del nivel de entendimiento que poseen los participantes sobre los diferentes métodos algebraicos, el uso de representaciones gráficas y de matemáticas en general.

Conclusiones

Sobre el análisis a través de las categorías

Con base en la información recopilada a través de la tabla para la actividad 5, se puede notar que la mayoría de los estudiantes observa actividad cognitiva en todas las categorías y elementos de significado promovidos por la secuencia didáctica y planteados para su análisis. Se hace evidente también cuales fueron las categorías y elementos de significado que no se atendieron más directamente, pues no se expresan significados relacionados con Definiciones y Propiedades relacionadas directamente con el significado institucional promovido, ni Argumentos relacionados con este.

La manera en la que están construidas las tablas y la información que pueden recopilar permiten que se puedan convertir también en una herramienta auxiliar para el diseño o evaluación de una secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de límite.

Sobre el diseño

Las actividades en las que se utilizaron elementos históricos llamaron la atención de los participantes, estos comentan que en clases de matemáticas no se habla al respecto y lo consideraron una estrategia que les gustaría que se utilizara más. Se considera que se pudo mostrar a las matemáticas como en constante evolución, lo que se piensa que puede promover el pensamiento crítico. La historia probó ser de utilidad como auxiliar de la evolución de los significados como hilo conductor, partiendo de lo intuitivo para llegar al significado institucional, a lo que dicen los libros de texto. Para un rediseño se propone atender al consejo de Fried (2001) quien propone la utilización de textos originales.

Se considera que fue de utilidad presentar situaciones que confrontan directamente a los obstáculos epistemológicos. Se promovió que los participantes entraran en contacto con situaciones que favorecen el acercamiento a las dos interpretaciones del infinito, actual y potencial, para reconocer su existencia. Reflexionar y dialogar directamente sobre cómo el sentido en que se puede tomar una palabra o expresión fuera de las matemáticas ayuda a enfrentar a que esto se consolide como un obstáculo epistemológico, se puede hablar también sobre lo que no es el límite en matemáticas, no es una barrera, no es una restricción.

El uso de diferentes registros de representación semiótica presentó resultados positivos, al pasar de situaciones de aproximación en el registro numérico a la oportunidad de visualizar e ir calculando áreas de polígonos regulares con el método de exhaución, los participantes contemplaron, sin así sugerírselos directamente, la posibilidad de que se alcanzara el área del círculo. Se considera que es necesario el uso de diferentes registros de representación semiótica para aprehender el concepto de límite y comprender las situaciones asociadas a él, pues como menciona Duval (2017) el acceso a los objetos matemáticos es semiótico y no empírico, se considera que esto cobra aún mayor relevancia al ser el límite un objeto matemático, que por naturaleza no es ostensivo y que en su desarrollo histórico se mostró particularmente escurridizo, por lo que conviene acercarse a él desde los significados promovidos por diferentes registros de representación.

Para hacer evolucionar la secuencia didáctica se propone incrementar la cantidad de actividades que promuevan la realización de transformaciones con los registros de representación, tanto en tratamiento como en conversión. Duval (2017) propone que en el paso de uno a otro es donde radica una mayor oportunidad de aprendizaje. Incrementar, por ejemplo, las oportunidades de que los participantes realicen representaciones pictóricas.

Las actividades se realizaron como algo externo a las clases de matemáticas que tienen los participantes en su institución educativa, en el caso de tomar como base la secuencia propuesta para aplicarse en un curso regular habría que diseñar más actividades pues diversos temas relacionados no se pudieron abordar.

Se considera que las hojas de trabajo tienen un diseño muy escueto, sería conveniente diseñarlas de tal manera que sean más llamativas para los estudiantes.

Sobre la experiencia

El docente investigador al analizar la grabación en video de una sesión de aprendizaje, además de los objetivos originales de la misma, tiene la oportunidad también para realizar un autoanálisis, este se puede hacer sobre su comportamiento, su desempeño, su forma de expresión, las palabras que utiliza, los significados expresados verbalmente y los subyacentes en las expresiones corporales, entre otras cosas. Esto puede aprovecharse como una gran oportunidad de autodescubrimiento y de crecimiento.

Prospectivas

Se sugiere una investigación más profunda alrededor de los problemas que dieron origen a diferentes objetos y métodos matemáticos, que permita dar cuenta de la relación que se puede hacer entre el elemento histórico y el aprendizaje de las matemáticas; logrando así la generación de un catálogo de problemas de la antigüedad que podrían ser de utilidad para el aprendizaje y la enseñanza de diferentes aspectos de la matemática.

Ser considera de utilidad realizar un análisis de libros de texto, en el que se identifique el uso de la historia de las matemáticas en libros de cálculo de bachillerato. Analizar en qué proporción se utiliza a la historia de las matemáticas y la manera en que esta se utiliza en los libros de texto para la asignatura de cálculo en el nivel Medio Superior.

REFERENCIAS

Aaboe, A. (2012) *Episodes From the Early History of Mathematics*. Mathematical Association of America.

Agudelo, N., Escobar, D. y Albadán, J. (2016). *Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito actual en estudiantes de grado décimo, un medio de aporte al desarrollo del pensamiento crítico en la escuela.* Universidad Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación.

Artigue M. (2020) Didactic Engineering in Mathematics Education. In: *Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/978-3-030-15789-0_44

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2020). Didactic Engineering in Mathematics Education. En: L. Stephen (ed). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 202 - 206). Springer.

Bachelard, G. (2000) *La formación del espíritu científico* (23ª. Ed.). Siglo Veintiuno Editores.

Barrantes, H. (2008) Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1*(2).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *RELIME, 8*(3), 247-263.

Barbin, É., Guillemette, D. & Tzanakis, C. (2020). History of Mathematics and Education. En: L. Stephen (ed). *Encyclopedia of Mathematics Education.* (pp. 333-342). Springer.

Boyer, C. (1949) *The history of calculus and its conceptual development*. Dover Publications.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970 - 1990.* (Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V., Trans.). Kluwer Academic Publishers

Chaves, E. y Salazar, J. (2003). *La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: Una experiencia a nivel secundario*. UNICIENCIA, 20(2), 259-266

Cornu, B. (2002) Limits. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-165). Kluwer Academy Publishers.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Estrada, J. (2018). El papiro del Rhind. *Revista A&H* (7), 24-33

Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education 10*, 391-408.

Galimberdi, U. (2002). *Diccionario de psicología.* Siglo veintiuno editores.

Godino, J. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Hernández, C. A., Prada, R. & Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Perspectivas, 2*(2), 73-83.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual*.

Krantz, G. (2006) *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving*. Mathematical Association of America.

Mena-Lorca, Arturo, Mena-Lorca, Jaime, Montoya-Delgadillo, Elizabeth, Morales, Astrid, & Parraguez, Marcela. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(3), 329-358. https://doi.org/10.12802/relime.13.1832

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 5*(1),27-41. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002

Moru, E. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: a case from the National University of Lesotho. [Thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the School of Science and Mathematics Education in the Faculty of Education, University of the Western Cape]. https://doi.org/10.1007/s10763-008-9143-x

Panizza, M. (2018) *Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos*. Universidad Nacional de Córdoba.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery, On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving.* John Wiley & Sons.

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española. 23.ª ed., [versión 23.5 en línea].* Recuperado el 19 de noviembre de 2022, de https://www.rae.es/

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir.

Ruiz, A. (2001). Asuntos de método en la Educación Matemática. Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 2(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v2i1.2157

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de estudio de referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior.* http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18*, 371–397 https://doi.org/10.1007/BF00240986

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics*, 10(3), 24-36.

Steward, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) *Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.* Cengage Learning.

Tall, D., Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vidal, M. y Quintanilla, R. (2008). La historia de la Matemática y su incorporación en el aula. Una síntesis de algunas propuestas. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Miller, D. y Hecklein, M. (2006) Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Boletín, *Sociedad Argentina de Educación Matemática 29*, 9-19.

ANEXOS

Hoja de trabajo, actividad introductoria.

¿Tú crees que Aquiles alcanzará a la tortuga? ¿Por qué?

¿Qué entiendes por infinito?

¿0.999… es igual a uno?

¿Cuál de las dos líneas contiene más puntos?

A)

B)

¿Qué entiendes por función?

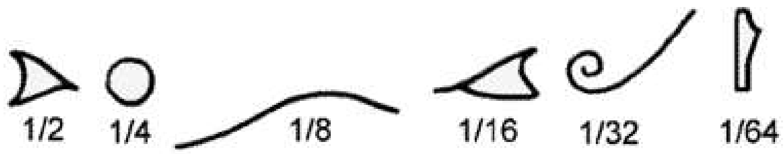
¿Qué entiendes por límite?

Hoja de trabajo, actividad 1

¿Cómo representarías la fracción ¾ con el método de los egipcios?

$\frac{3}{4} =$

Realiza la suma:



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$

Al resultado anterior suma $\frac{1}{128}$*:*

¿Qué puedes notar del resultado?

¿Qué pasa si continuamos con ese mismo patrón?

¿Crees que en algún momento la suma llegue a ser uno? ¿Por qué?

¿Cuánto mediría en total la suma de todos los fragmentos de cuerda?

Hoja de trabajo, actividad 2

Calcula el área del círculo.

Calcula el área del triángulo que está inscrito en el círculo.

Calcula el área del cuadrado que está inscrito en el círculo.

Calcula el área del pentágono que está inscrito en el círculo.

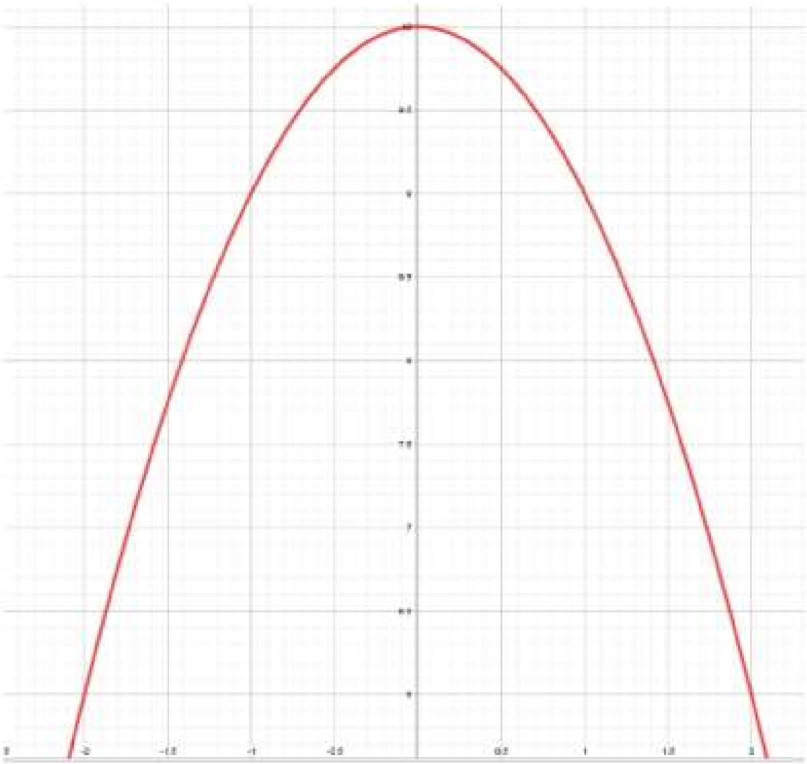
¿Qué ocurre con el área de las figuras conforme se incrementa el número de lados?

¿Qué ocurre con el área de los "huecos" entre las figuras conforme se incrementa el número de lados?

¿Qué pasaría si seguimos incrementando la cantidad de lados en la figura?

¿Qué pasa cuando incrementamos la cantidad de rectángulos bajo la curva?

¿Qué opinas sobre la cuadratura de la parábola que realizamos?

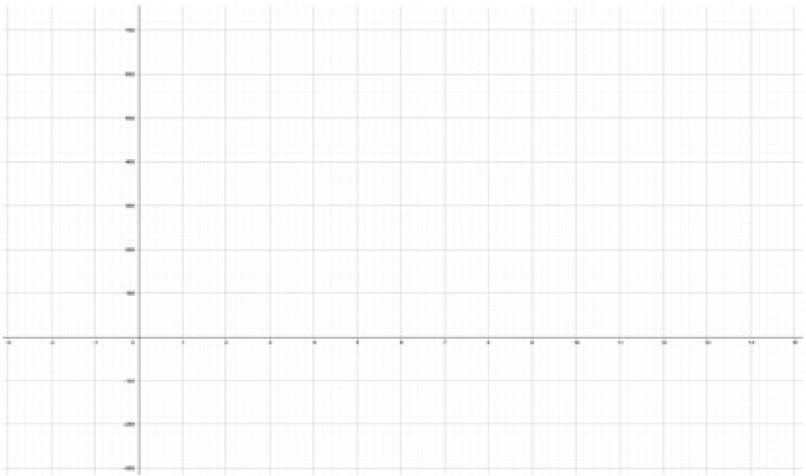

-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2

Hoja de trabajo, actividad 3

Un técnico de electrodomésticos me cobra (independientemente del costo del material) $100 por la visita a domicilio y $100 por cada hora de trabajo que necesite para reparar mi refrigerador. ¿Cómo podría representar la situación descrita a través de álgebra?

Vamos a graficar la función obtenida.

Tiempo	*Costo*
Cero horas (Cuando el técnico llega a tu casa)	
Una hora	
Dos horas	
Tres horas	
Cuatro horas	
5 horas	
6 horas	



Completa la tabla de valores para la función:

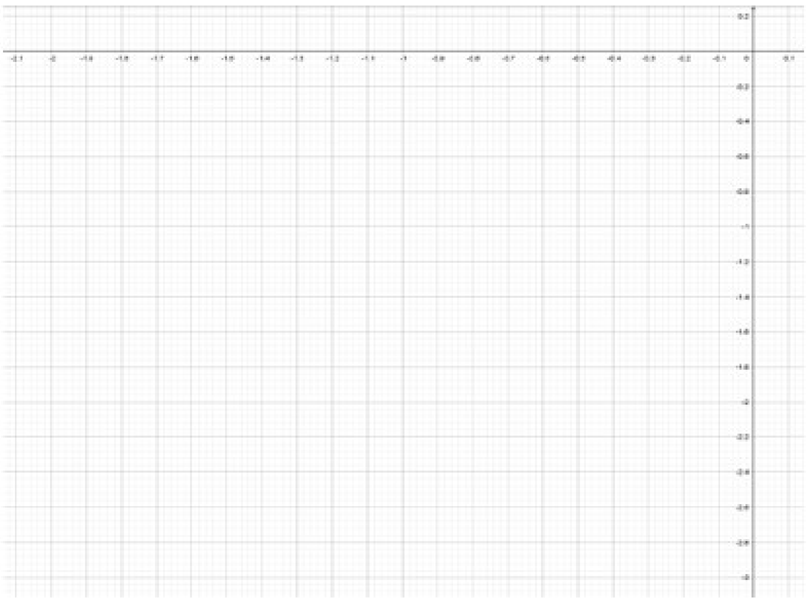
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

x	***-2***	***-1.5***	***-1.25***	***-1.1***	***-1.01***
f(x)					

x	***0***	***-0.5***	***-0.75***	***-0.9***	***-0.99***
f(x)					

¿Qué pasa si x vale -1?

x	***-1***
f(x)	



Hoja de trabajo, actividad 4

Estima el valor del siguiente límite haciendo una tabla de valores.

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2$$

x	*f (x)*
1	
1.5	
1.9	
1.99	

x	*f (x)*
3	
2.5	
2.1	
2.01	

- ¿Cómo expresarías el resultado del límite solicitado?

Evalúa los siguientes límites por sustitución directa.

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$$

- Encuentra el siguiente límite a través de cancelación de factor común.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

- Encuentra el siguiente límite a través de simplificación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3 + x)^2 - 9}{x}$$

- ¿Qué entiendes por límite de una función?

Hoja de trabajo, actividad 5

La distancia entre este lugar y el Zócalo de la CDMX es de 141 Km, si nos tomó en llegar un tiempo de 2.5 horas ¿Cuál fue la velocidad promedio del viaje?

¿Durante todo el viaje se mantuvo esa velocidad?

¿Para qué nos sirve utilizar límites?

¿Qué entiendes por límite de una función?

¿Qué aprendiste a través de todas las sesiones que tuvimos?