



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Teoría Cuántica de Campos para representaciones
del grupo de Poincaré con Espín continuo

Tesis presentada al

Postgrado en Física Aplicada

Como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias en Física Aplicada

por

Lic. Mario Aldair Pérez de León

Asesorado por

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz

Dr. Jens Erler

Puebla, Pue.
Julio 2017

Título: Teoría Cuántica de Campos para representaciones del grupo de Poincaré con Espin continuo.

Estudiante: MARIO ALDAIR PÉREZ DE LEÓN

COMITÉ

Dr. Arturo Fernández Tellez
Presidente

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Secretario

Dr. Gilberto Tavares Velazco
Vocal

Dr. Javier Miguel Hernández López
Suplente

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz
Asesor

Dr. Jens Erler
Asesor

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Introducción	XI
1. Teoría Cuántica de Campos, un aspecto histórico	1
1.1. QFT los primeros desarrollos	1
1.2. El problema de los infinitos	1
1.3. El control de los infinitos	2
1.4. El Modelo Estándar de la física de partículas elementales	2
1.5. Formalismo canónico	3
2. El grupo de Poincaré y de Lorentz	9
2.1. Transformaciones de Lorentz	9
2.2. Álgebra de Poincaré	12
3. Representaciones del Grupo de Poincaré	17
3.1. Método de representaciones inducidas	17
3.2. Operadores de Casimir del grupo de Poincaré	20
3.3. Forma covariante del Little group	20
3.3.1. Caso masivo	21
3.3.2. Caso sin masa	21
3.3.3. Álgebra de Lie para el caso sin masa	22
3.3.4. Helicidad λ	25

4. Representaciones de Espín continuo	27
4.1. ¿Se puede tener un campo para partículas de espín continuo?	27
5. Conclusiones	33
Bibliografía	35
A. Matrices y generadores del grupo de Lorentz	37
A.1. Generadores del grupo de Lorentz	38
A.2. Generadores de Boost	38
B. Relaciones de conmutación entre los operadores de Cassimir del grupo de Poincaré y sus generadores	39
C. Grupo de Poincaré un punto de vista alternativo	43
C.1. Grupo de Lorentz Homogeneo	43
C.1.1. Grupo de Lorentz Homogeneo	44
C.1.2. Traslaciones	44
C.1.3. Transformaciones de Lorentz homogeneas	45
C.1.4. Representaciones de $SO(3,1)$	45
C.2. Representaciones del grupo de Poincaré	46
C.2.1. Representaciones manifiestamente covariantes	46
C.2.2. Representaciones unitarias	47
C.2.3. Propiedades de transformación	50

Agradecimientos

Te agradezco a ti papá por todo el apoyo que desde niño me has brindado incondicionalmente. Porque siempre has tenido palabras de aliento cuando parecía que las cosas me salían mal.

Te agradezco a ti mamá por ser siempre mi confidente, en todos mis asuntos, por confiar siempre en las decisiones difíciles que he tenido que tomar.

Te agradezco a ti Erbin, por estar siempre a mi lado, porque como hermano siempre has confiado en mí, porque a pesar de que aveces peleamos siempre encontramos la forma de contentarnos.

A mi tía Zulmi, que a pesar de la distancia siempre ha estado pendiente de mi desarrollo como estudiante, apoyandome economicamente y espiritualmente, gracias por todo tía te quiero mucho.

A mi asesor el Dr. Díaz Cruz, al cual tuve la bendición de encontrar en mi camino al principio de la maestría, porque confío en mí desde un principio, logrando motivarme y adentrandome en el hermoso mundo de la física de partículas.

A mi querida Tere, que desde que la conocí ha estado para apoyarme o regañarme cuando lo necesité, gracias por todos los momentos que hemos pasado.

A mis amigos de las palapas, por todos los instantes que vivimos cuando estudiamos la licenciatura, aunque estemos separados siempre tendrán un lugar en mi corazón.

A mis hermanos de Rock y ciencia, Daniel, Saúl y Oscar, gracias por todas las palabras de aliento y los momentos divertidos que hemos pasado durante el tiempo de esta maestría, y los casi 7 años que tenemos de conocernos.

Al buen Charly, al cuál no tuve la oportunidad de agradecerle con una tesis de licenciatura, te agradezco por tu apoyo y amistad a lo largo de estos años.

A mis profesores, y ahora amigos Bryan y Ulises, gracias por compartir sus conocimientos, y sobre todo su amistad.

A mi jurado de titulación, Dr. Hernández, Dr. Tavarez, Dr. Téllez y Dr. Toscano, gracias por sus valiosos comentarios, que se bien, me ayudaran en mi desarrollo como futuro físico.

Al Conacyt por el valioso apoyo durante estos dos años otorgandome la beca de posgrado.

Resumen

En una primera parte se habla sobre los éxitos de la Teoría Cuántica de Campos, así como la importancia que tuvo en la creación del modelo estándar de las partículas elementales, el descubrimiento de los bosones w z , el quark top o el bosón de Higgs, por mencionar algunos. Después entrando en el cuerpo de esta tesis se hace un repaso de los grupos de Lorentz y de Poincaré, deduciendo paso a paso el álgebra de Lie correspondiente, y con esto enunciar los operadores de Cassimir del grupo. Luego se hace una conexión entre el grupo de Poincaré y estados de una partícula llevándolos a las *Representaciones del grupo de Poincaré*, introduciendo el concepto de *Little Group*. Se enuncia la importancia de determinar dichas representaciones y cómo solo basta encontrar las correspondientes al Little group, ya sea de partículas masivas o sin masa. Posteriormente se deduce el Little group que corresponde al caso masivo y sin masa, empatando lo que se conoce del grupo $SO(3)$ y momento angular y/o espín. Enseguida para el caso no masivo se estudia la propuesta de un campo que crea partículas sin masa de espín continuo, las cuales en un capítulo anterior se deduce su surgimiento. Finalmente se dan las conclusiones mostrándose que el formalismo nos da pauta a la existencia de partículas que aparentan tener espín continuo y sin embargo el campo propuesto parece no respetar causalidad.

Introducción

El estudio de la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés), es quizá el primer escalón para describir el mundo de las partículas elementales, como es sabido su primer gran logro fue la *cuantización del campo electromagnético*. Poco a poco fue madurando en formalismo y estructura, llegando a la teoría que probablemente simboliza el ingenio de los físicos en su máxima expresión: la concepción del Modelo Estándar de la física de partículas elementales. Con esto las predicciones del W , Z , posteriormente se logra predecir la masa del quark top y la masa probable del bosón de Higgs, y esto solo por enunciar algunos de los éxitos de QFT.

De forma tradicional, QFT se formula de la siguiente manera, primero se construye el Lagrangiano o densidad lagrangiana clásica, luego se proponen los conmutadores entre los campos y sus conjugados, (cuantización canónica), posteriormente se define la *Matriz-S* y finalmente se evalúan procesos físicos mediante el uso de las reglas de Feynman.

Sin embargo desde un punto de vista más conceptual, es válido preguntarnos ¿Realmente qué es la QFT?. ¿Es posible construir los estados de QFT de manera fundamental? Wigner nos dice que sí, el estudió por primera vez el grupo de Lorentz y Poincaré a fondo, encontrando que la masa y el espín son las dos propiedades que caracterizan a los sistemas invariantes bajo el grupo de Poincaré. El hecho de tener como operadores de Casimir a P^2 y W^2 , donde P es el operador de 4-momento de una partícula dada y W es el denominado vector de Pauli-Lubanski, nos permite clasificar los estados de manera correcta. Dicho estudio nos lleva a las representaciones del grupo de Poincaré para el caso masivo y sin masa.

Al introducir el concepto de *Little Group*, el cual actúa sobre un 4-momento de referencia, de tal manera que este 4-momento se mantiene invariante, se obtiene para el caso masivo que, el Little group correspondiente es $SO(3)$ retomando todo lo que ya se sabe de teoría de momento angular. Por otra parte para el caso sin masa, se llega al concepto de *helicidad*, sin embargo como veremos ésta última representación admite también estados de espín continuo, los cuales no se han visto en la naturaleza y por lo cual se dejaron de estudiar, pero recientemente se ha profundizado nuevamente en el estudio de estas representaciones.

Nuestro trabajo es investigar cómo surgen estas representaciones, cómo se pueden trabajar y sus posibles implicaciones. La estructura de ésta tesis es como sigue: en el capítulo I hacemos un repaso histórico de QFT, el capítulo II se centra en estudiar al grupo de Lorentz y de Poincaré, pasando primero por las transformaciones de Lorentz hasta llegar al álgebra de Lie del grupo de Poincaré.

En el capítulo III, se hace una conexión entre el grupo de Poincaré y los estados de una sola partícula, se construyen los operadores de Casimir del grupo de Poincaré, posteriormente se llega a la llamada *rotación de Wigner*, es decir aquellas transformaciones que dejan el 4-momento invariante. Dichas transformaciones forman al *Little Group*, el tema central de este capítulo es clasificar la representaciones de este Little Group, tanto para el caso masivo como para el caso

sin masa, resaltando la gran utilidad que tiene determinar dichas representaciones. Una vez encontrado el Little group para el caso sin masa, llegamos a los estados con espín continuo, y en un determinado límite recuperamos el número cuántico de helicidad.

En el capítulo IV se estudia la propuesta de un campo que crea partículas o estados de espín continuo, y que transforma bajo el grupo de Lorentz, y se examina si esta propuesta respeta causalidad. Finalmente se dan las conclusiones respecto a los resultados de ésta tesis, resultando en que el campo estudiado aparentemente no respeta causalidad, sin embargo no es prueba suficiente para dejar de lado el estudio de representaciones de espín continuo.

Para lo anterior es necesario mencionar el lenguaje y notación que se usa en esta tesis. Se usará la suma de índices repetidos, índices latinos i, j, k corren de 1 a 3, e índices griegos α, β, γ , etc corren de 0 a 4, donde el índice 0 se refiere a una coordenada temporal, y (1,2,3) a las coordenadas espaciales.

$$\sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha x_\alpha = x^\alpha x_\alpha = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \quad (1)$$

La métrica del espacio tiempo $\eta_{\mu\nu}$ es diagonal, con $\eta_{00} = 1$, y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.

El tensor de *Levi-Civita* $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es definido totalmente antisimétrico, con $\epsilon^{0123} = +1$.

3-vectores espaciales son simbolizados con letras en negrita. $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Un gorro sobre cualquier vector corresponde al vector unitario, es decir: $\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos, un aspecto histórico

1.1. QFT los primeros desarrollos

El desarrollo histórico de QFT ha resultado ser muy ilustrativo, partiendo desde sus orígenes hasta nuestros días. Su primer logro, *La cuantización del campo electromagnético* permanece como uno de los ejemplos de una QFT exitosa. Como se sabe Mecánica Cuántica (MC) de principios no puede dar una cuenta de fotones, los cuales constituyen el primer caso de partículas relativistas. Los fotones al tener masa cero en reposo viajan en el vacío a la velocidad de la luz c lo cual descarta que una teoría no relativista como lo es M. C. pueda dar una descripción aproximada. Sin embargo, solo el formalismo de QFT contiene una descripción explícita de los fotones, he aquí un ejemplo de la importancia de QFT. De hecho muchos tópicos en el desarrollo temprano de una teoría cuántica, fueron relacionados con la interacción de radiación y materia, los cuales debieron ser tratados por métodos de QFT.

1.2. El problema de los infinitos

QFT se inició con un marco teórico construido de manera análoga a M.C. Aunque no existía una teoría única y desarrollada, las herramientas de QFT podían aplicarse a procesos concretos, tales como la dispersión de la radiación por los electrones libres (*dispersión Compton*), la colisión entre electrones relativistas o la producción de pares de electrón-positrón por fotones. Los cálculos a primer orden tuvieron mucho éxito. Pero mucha gente que trabajaba en ésta área pensaba que QFT aún tenía que sufrir un cambio. Por un lado algunos cálculos de efectos para rayos cósmicos claramente diferían de las mediciones, por otro lado, desde un punto de vista teórico, un tratamiento de los cálculos a órdenes más altos de las series perturbativas producían resultados infinitos. Tanto la energía propia del electrón como las fluctuaciones del vacío del campo electromagnético parecían ser infinitas. Las expansiones de perturbación no convergieron a una suma finita e incluso muchos términos individuales divergieron.

Dejando a un lado la sensación de que QFT fuese imperfecta y con falta de rigor, sus métodos fueron extendidos a nuevas áreas de aplicación. En 1933 la teoría de Fermi del decaimiento Beta,

empezó con ideas que describían la emisión y absorción de fotones, analizó la aniquilación y creación de electrones y neutrinos (interacción débil). Aplicaciones posteriores de QFT se dieron en física nuclear (interacción fuerte). En 1934 un nuevo tipo de campos (campos escalares), descritos por la ecuación de Klein-Gordon, pudieron ser cuantizados. Ésta nueva teoría fue aplicada tiempo después para campos de materia para describir nuevas partículas tales como los piones.

1.3. El control de los infinitos

Después del fin de la Segunda Guerra Mundial, métodos más confiables y efectivos para lidiar con los infinitos en QFT, fueron desarrollados, es decir surgieron reglas para realizar cálculos teóricos de campos, y se propuso una teoría general de la renormalización. A finales de los años cuarenta, habían dos formas de encaminar el problema de las divergencias, una descubierta por Feynman, y la otra (basada en un formalismo de operadores) por Schwinger y Tomonaga de manera independiente. En 1949 Dyson mostró que estas dos aproximaciones eran equivalentes, por lo que estos cuatro científicos se convirtieron en los inventores de la Teoría de la Renormalización (T.R.). El suceso experimental más impresionante de la teoría de la renormalización fue el cálculo del momento magnético anómalo del electrón y el desplazamiento de las líneas en el espectro del hidrógeno.

La idea central en la T. R. es hacer que las divergencias que aparecen en los cálculos no influyeran en las cantidades físicas. Dyson pudo demostrar que un reescalamiento de la carga y masa (renormalización) es suficiente para remover todas las divergencias en QED para todos los órdenes de teoría de perturbación. En general una QFT es renormalizable, si todos los infinitos pueden ser absorbidos en una redefinición de un número finito de constantes de acoplamiento y masas.

1.4. El Modelo Estándar de la física de partículas elementales

Al inicio de la década de los cincuenta QED, se había convertido en una teoría confiable, pero tomó varios años para que QFT, pudiera ser aplicada a problemas físicos de interés. El nuevo desarrollo hizo posible aplicar QFT para describir no solo la fuerza electromagnética, sino también la interacción débil y fuerte, las Lagrangianas debían contener nuevas clases de partículas o campos cuánticos. Nuevos conceptos tuvieron que ser introducidos, conectados principalmente con teorías de gauge no Abelianas y rotura espontánea de la simetría. Hoy día existen teorías confiables de la interacción fuerte, débil y electromagnética de las partículas elementales, las cuales tienen una estructura similar a QED, tal como el Modelo Estándar (ME). Ésta teoría asociada con el grupo de Gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ es considerada la teoría de la física de las partículas elementales. De acuerdo al ME, existen, seis tipos de Leptones (e.g. el electrón y su neutrino) y seis tipos de quarks, los cuales son todos fermiones con espín $\frac{1}{2}$, también existen partículas de espín 1 (bosones), que median la interacción entre partículas elementales y las fuerzas fundamentales, estas son, el fotón para la interacción electromagnética, dos bosones W y uno Z para la interacción débil, y 8 gluones para la interacción fuerte.

1.5. Formalismo canónico

La teoría de campos cuánticos general fue primero tratada en 1929, en un par de artículos de Heisenberg y Pauli. El punto de partida de estos trabajos fue la aplicación del formalismo canónico a los campos, de hecho fue a los coeficientes de los modos normales que aparecían en los campos. Heisenberg y Pauli tomaron la lagrangiana como la integral espacial de una función local de campos y sus derivadas espacio-temporales; las ecuaciones de campo fueron entonces determinadas con el principio de mínima acción $\int L dt$; y las relaciones de conmutación fueron determinadas usando la derivada temporal del Lagrangiano. Ellos también aplicaron este formalismo general a los campos electromagnéticos y de Dirac, y exploraron las distintas leyes de invariancia y conservación, incluyendo la conservación de la carga, momento y energía, así como la invariancia de Lorentz y de Gauge.

Veamos ahora un ejemplo de lo que al principio de hizo.

Usando el formalismo de Heisenberg-Pauli, para un campo escalar complejo libre $\phi(x)$ la Lagrangiana es

$$L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi) - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (1.1)$$

Si sometemos a $\phi(x)$ a una variación infinitesimal $\delta\phi(x)$, la lagrangiana es cambiada por la cantidad

$$\delta L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{\phi}^\dagger - c^2 \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \delta \phi - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \delta \phi^\dagger - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \delta \phi - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi \delta \phi^\dagger \right]. \quad (1.2)$$

Es asumido que usando el principio de acción estacionaria que la variación en los campos debe desvanecerse en las fronteras de la región del espacio-tiempo de integración. Por lo que, utilizando la afirmación anterior en la acción $\int L dt$, podemos integrar por partes, y escribir

$$\delta \int L dt = c^2 \int d^4x \left[\delta \phi^\dagger \left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi + \delta \phi \left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi^\dagger \right]. \quad (1.3)$$

Pero esto debe desvanecerse para cualquier $\delta\phi$ y $\delta\phi^\dagger$, entonces ϕ debe satisfacer la ecuación de onda relativista conocida

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (1.4)$$

y su adjunta respectivamente (\square se conoce como *D'Alambertiano*). Los momentos canónicamente conjugados a los campos ϕ y ϕ^\dagger están dados para derivadas variacionales de L con respecto a $\dot{\phi}$ y $\dot{\phi}^\dagger$, los cuales podemos deducir de (1.3) como

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad (1.5)$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (1.6)$$

Éstas variables de campo satisfacen las relaciones de conmutación usuales, con una función delta

de Dirac en lugar de una delta de Kronecker

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = -i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.7)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (1.8)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (1.9)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (1.10)$$

El Hamiltoniano aquí es dado por la suma de todos los momentos canónicos producto con las derivadas temporales de los correspondientes campos, menos la Lagrangiana:

$$H = \int d^3x \left[\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger \right] - L \quad (1.11)$$

entonces usandon (1.1),(1.5) y (1.6):

$$H = \int d^3x \left[\pi^\dagger\pi + c^2(\nabla\phi)^\dagger \cdot (\nabla\phi) + \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right) \phi^\dagger\phi \right]. \quad (1.12)$$

Después de los artículos de Heisemberg y Pauli, un elemento permanecía sin resolver, antes de que QFT alcanzara su formalismo casi completo: una solución al problema de estados de energía negativa. En los tiempos de los trabajos de Heisemberg y Pauli, Dirac había propuesto que los estados de energía negativa de el electrón esten llenos, pero sólo con los agujeros en el mar observable de energía negativa, mas que con los electrones de energía negativa por si mismos. Después la idea de Dirac, fue aparentemente confirmada por el descubrimiento del positrón en 1932, su teoría de agujero fue usada para calcular ciertos procesos al nivel mas bajo de teoría de perturbaciones, incluyendo producción y dispersión del par electrón-positrón.

Al mismo tiempo, mucho trabajo fue puesto en el desarrollo de un formalismo en el cual la invariancia de Lorentz sería explicita. El esfuerzo mas influyente fue el muy *socorrido* formalismo de Dirac, Vladimir Fock y Boris Podolski, en el cual los vectores de estado fueron representados por una función de onda dependiente de las coordenadas del espacio tiempo y espín, de todos los electrones, de energía positiva y negativa. En este formalismo, el número total de electrones de energía positiva o negativa se conserva; por ejemplo, la producción de un par electrón-positrón es descrita como la excitación de un electrón de energía negativa a un estado de energía positiva, y la aniquilación de un electrón y un positrón es descrita como la correspondiente desexcitación. Éste formalismo tuvo la ventaja de una manifiesta invariancia de Lorentz, así como también ciertas desventajas: en particular, hubo una profunda diferencia entre el tratamiento del fotón descrito en términos de un campo electromagnético cuantizado, y que el de un electrón y el de un positrón. Aunque no todos los físicos sintieron que esto fuese una desventaja; el campo de electrón a diferencia del campo electromagnético no tuvo un límite clásico, por lo que hubo dudas acerca de su significado físico.

Por otro lado Dirac al estar convencido de que los campos eran la forma de observar partículas, no esperaba que las partículas y campos fueran descritas en los mismos términos. Aun así usar este formalismo resultó ser difícil para describir un proceso como el decaimiento nuclear beta, en el cual un electrón y un antineutrino son creados sin un compañero del positrón o neutrino. El cálculo exitoso hecho por Fermi, de la distribución de energía en el decaimiento beta, merece ser contado como uno de los primeros triunfos de teoría cuánticas de campos.

La idea esencial que fue necesitada para demostrar la equivalencia de la teoría de agujero de

Dirac con la teoría cuántica de campos de el electrón fue generada por Fock y por Wendell Furry y Oppenheimer en 1933. Para apreciar esta idea desde un punto de partida moderno, supongamos que tratamos de construir un campo del electrón análogamente con el campo electromagnético o el campo de Born-Heisenberg-Jordan. Como los electrones llevan una carga, no nos gustaría mezclar operadores de aniquilación y creación, entonces podemos tratar de escribir el campo como

$$\psi(x) = \sum_k u_k(x) e^{-i\omega_k t} a_k \quad (1.13)$$

donde $u_k(x) e^{-i\omega_k t}$ son un conjunto completo de soluciones de ondas plana ortonormales de la ecuación de Dirac. (con k ahora etiquetando el 3-momento, espín y el signo de la energía):

$$\mathcal{H} u_k = \hbar\omega_k u_k, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{H} \equiv -i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \alpha_4 m c^2, \quad (1.15)$$

$$\int u_k^\dagger u_l d^3x = \delta_{kl}, \quad (1.16)$$

y a_k son los correspondientes operadores de aniquilación, que satisfacen las relaciones de anticonmutación de Jordan-Wigner.

$$\begin{aligned} a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k &= \delta_{jk}, \\ a_k a_j + a_j a_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

De acuerdo con las ideas de la segunda cuantización para el procedimiento de cuantización de Heisenberg y Pauli, la hamiltoniana es formada al calcular *el valor de expectación* de \mathcal{H} con una función de onda reemplazada por el campo cuantizado (1.13)

$$H = \int d^3x \phi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.18)$$

El problema es, por supuesto, que este no es un operador positivo. La mitad de ω_k es negativo mientras que $a_k^\dagger a_k$ toman solo los eigenvalores positivos 1 y 0. A fin de sanar estas *dolencias* Furry y Oppenheimer tomaron la idea de Dirac, en la cual el positrón es la ausencia de un electrón de energía negativa; las relaciones de anticonmutación son simétricas entre operadores de creación y aniquilación, entonces ellos definieron los operadores de creación y aniquilación del positrón como los correspondientes operadores de creación y aniquilación para electrones de energía negativa

$$b_k^\dagger \equiv a_k, \quad b_k \equiv a^\dagger \quad (\text{para } \omega_k < 0) \quad (1.19)$$

donde la etiqueta k en b denota un modo del positrón de energía positiva con momento y espín opuesto a aquellos del electrón de modo k . El campo de Dirac puede entonces ser escrito

$$\phi(x) = \sum_k^{(+)} a_k u_k(x) + \sum_k^{(-)} b_k u_k(x), \quad (1.20)$$

donde $(+)$ y $(-)$ indican sumas sobre modos normales k con $\omega_k > 0$ y $\omega_k < 0$, respectivamente, y $u_k(x) \equiv u_k(x) e^{-i\omega_k t}$. Similarmente, usando las relaciones de anticonmutación para las b 's, podemos reescribir el operador de energía como

$$H = \sum_k^{(+)} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^{(-)} \hbar|\omega_k| b_k^\dagger b_k + E_0, \quad (1.21)$$

donde E_0 es un número c infinito

$$E_0 = - \sum_k^{(-)} \hbar |\omega_k|. \quad (1.22)$$

A fin de que esta redefinición sea mas que una mera formalidad, es necesario también especificar que el vacío físico es un estado $|0\rangle$ del electrón que no contiene electrones o positrones de energía positiva:

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (\omega_k > 0), \quad (1.23)$$

$$b_k |0\rangle = 0 \quad (\omega_k < 0). \quad (1.24)$$

Entonces (1.244) da la energía del vacío como E_0 . Si medimos todas las energías relativas a la energía del vacío E_0 , entonces el operador de energía físico es $H - E_0$; y (1.21) muestra que este es un operador positivo.

El problema de estados de energía negativa para una partícula cargada de espín cero, fue también resuelto en 1934, por Pauli y Weisskopf, en un artículo en partefue para desafiar la imagen de Dirac de estados de energía negativa llenos. Aquí los operadores de creación y aniquilación satisfacen relaciones de conmutación mas que de anticonmutación, entonces no es posible intercambiar los roles de estos operadores libremente, como fue el caso para fermiones. En su lugar debemos regresar al formalismo canónico de Heisemberg-Pauli para decidir cuáles coeficientes de los varios modos normales son operadores de creación o aniquilación.

Pauli y Weisskopf expandieron el campo escalar libre cargado en ondas planas en un cubo de volumen espacial $V \equiv L^3$:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.25)$$

con los números de onda restringidos por la condición de periodicidad, dónde las cantidades $k_j L/2\pi$ para $j = 1, 2, 3$ deben ser un conjunto de tres enteros positivos o negativos. Similarmente la variable canónicamente conjugada (1.5) fué expandida como

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.26)$$

El signo menos es puesto en el exponente aquí, por lo que (1.5) ahora se convierte en :

$$p(\mathbf{k}, t) = q^\dagger(\mathbf{k}, t). \quad (1.27)$$

Las formulas inversas de Fourier nos permiten ver que

$$q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.28)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.29)$$

y por lo tanto las relaciones de conmutaciones (1.7)-(1.10) dejan para q 's y p 's:

$$[p(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] = \frac{-i\hbar}{V} \int d^3x e^{i\cdot\mathbf{x}} e^{-i\cdot\mathbf{x}} = -i\hbar \delta_{kl} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} [p(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] &= [p(\mathbf{k}, t), p(\mathbf{l}, t)] = [p(\mathbf{k}, t), p^\dagger(\mathbf{l}, t)] \\ [q(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] &= [q(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

junto con otras relaciones que pueden ser derivadas de estas, tomando sus adjuntas hermitianas.

Insertando (1.25) y (1.26) en la formula (1.12) para la hamiltoniana, podemos tambien escribir este operador en términos de p 's y q 's:

$$H = \sum_k [p^\dagger(\mathbf{k}, t)p(\mathbf{k}, t) + \omega_k^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t)q(\mathbf{k}, t)], \quad (1.32)$$

donde

$$\omega_k^2 \equiv c^2 \mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2. \quad (1.33)$$

Las derivadas temporales de las p 's están dadas por la ecuación hamiltoniana

$$\dot{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k}, t)} = -\omega_k^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (1.34)$$

(y su adjunta), un resultado el cual a decir de la eq (1.27) es justamente equivalente a la ecuación de onda de Klein-Gordon-Schrodinger (1.4).

Vemos que, justo como en el caso de el modelo de Born de 1926, Heisemberg y Jordan, el campo libre se comporta como un número infinito de osciladores armónicos acoplados. Pauli y Weisskopf pudieron construir operadores p y q los cuales satisfacían las relaciones de conmutación (1.30)-(1.31), al introducir operadores de creación y aniquilación, a , b , a^\dagger , b^\dagger de dos diferentes tipos, correspondientes a partículas y antipartículas:

$$q(\mathbf{k}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [a(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t) - b^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_k t)] \quad (1.35)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} [b(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k t) + a^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_k t)] \quad (1.36)$$

donde

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.37)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = 0, \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] &= [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] \\ &= [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Es sencillo revisar que estas relaciones de conmutación satisfacen las relaciones deseadas (1.30),(1.31),(1.27) y (1.34). El campo (1.25) puede ser escrito

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [a(\mathbf{k}) \exp(i \cdot \mathbf{x} - i\omega_k t) - b^\dagger(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_k t)] \quad (1.40)$$

y la hamiltoniana (1.32) toma la forma

$$H = \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k [b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})] \quad (1.41)$$

o usando (1.37)-(1.39)

$$H = \sum_k \hbar\omega_k [[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})] + E_0], \quad (1.42)$$

donde E_0 es un número c infinito

$$E_0 \equiv \sum_k \hbar\omega_k. \quad (1.43)$$

La existencia de dos diferentes tipos de operadores a y b , los cuales aparecen precisamente en la misma forma en la Hamiltoniana, muestra que esta es una teoría con dos tipos de partículas con la misma masa. Como fué enfatizado por Pauli y Weisskopf, estas dos variantes pueden ser identificadas como partículas y las correspondientes antipartículas, y si están cargadas tienen cargas opuestas. Por lo que como se ha dicho, bosones de espín cero así como fermiones de espín $1/2$ pueden tener distintas partículas, las cuales para bosones no pueden ser identificadas como agujeros en un mar de partículas de energía negativa.

Ahora podemos decir cual de los a y b o a^\dagger y b^\dagger son los operadores de aniquilación, tomando los valores de expectación de las relaciones de conmutación en el estado del vacío $|\Psi_0\rangle$. Por ejemplo, si a_k^\dagger fuese un operador de aniquilación, el nos daría cero cuando lo aplicáramos al estado del vacío, entonces el valor de expectación del vacío de (1.37) daría

$$- (|a(\mathbf{k})\Psi_0\rangle)^2 = \langle\Psi_0|[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]\Psi_0\rangle = +1 \quad (1.44)$$

en conflicto con el requerimiento de que el lado izquierdo debe ser definido negativo. En esta manera podemos concluir que si son a_k y b_k los operadores de aniquilación, y por lo tanto

$$a(\mathbf{k})|\Psi_0\rangle = b(\mathbf{k})|\Psi_0\rangle = 0. \quad (1.45)$$

Esto es consistente con todas las relaciones de conmutación. Así, el formalismo canónico fuerza que el coeficiente de $e^{+i\omega t}$ en el campo (1.35) sea un operador de creación, como es también en el formalismo de Furry-Oppenheimer para espín $1/2$.

Las ecuaciones (1.41) y (1.45) ahora nos dicen que E_0 es la energía del estado del vacío. Si medimos todas las energías relativas a E_0 , entonces el operador de energía es $H - E_0$, y (1.42) muestra otra vez que es positiva.

Hasta ahora hemos pasado por una revisión histórica de QFT, llegando al primer formalismo empleado, conocido como *cuantización canónica*, (Lagrangiana, conmutadores, hamiltoniana etc.) Sin embargo desde un punto de vista más conceptual nos podemos preguntar ¿Qué es QFT? ¿Se puede estudiar desde aspectos más fundamentales? La respuesta recae en estudiar el grupo de Poincaré y sus representaciones. Como es sabido, las transformaciones homogéneas de Lorentz forman un grupo, el llamado grupo de Lorentz compuesto por las tres rotaciones en el espacio, y tres boost. Si a éste grupo le agregamos las traslaciones a través de un 4-vector constante, formamos el grupo Inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré. Fue Wigner en quien realizó 1939^[1] el primer análisis de este grupo, en una publicación que a posteriori se convertiría en un clásico. Él encontró que la masa y el espín son dos propiedades las cuales caracterizan sistemas invariantes bajo el grupo de Poicaré, y que el espín corresponde también al grupo de rotación simétrico $SU(2)$, pero solo si $M^2 > 0$, es decir si el momento es temporaloide. Para el caso de $M = 0$, $SU(2)$ no describe al espín, y esto, es debido a que los estados de polarización de una partícula no masiva con espín J son únicamente $J_z = \pm J$. Así por ejemplo, los fotones físicos no existen en un estado $m = 0$. Para el caso de un momento espacialoide $M < 0$, nuevamente el espín es diferente, y de hecho corresponde a un parámetro continuo.

¿Existen tales estados en espectro físico? ¿Se puede formular QFT para estas representaciones? no se sabe, pero recientemente se ha estudiado de nuevo. Nosotros queremos entender como y por qué surgen tales representaciones y como se pueden trabajar en una QFT consistente, sí esto es posible.

Capítulo 2

El grupo de Poincaré y de Lorentz

2.1. Transformaciones de Lorentz

El principio de la relatividad de Einstein dice que las leyes de la Física tienen la misma forma en diferentes sistemas de referencia inerciales. Si x^μ representa las coordenadas en un sistema de referencia (con $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ y $x^0 = t$ la coordenada temporal, la velocidad de la luz igual a la unidad), entonces en cualquier otro sistema inercial las coordenadas x'^μ deben satisfacer:

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

o de forma equivalente

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Como se menciona en el capítulo 1 utilizamos el tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -, -, -)$ en la diagonal. Utilizamos la convención de suma de índices μ, ν repetidos dos veces, una vez arriba, una vez abajo, tomando valores de cero a tres.

Estas transformaciones tienen la propiedad de que la velocidad de la luz es la misma (con $c = 1$) en todos los sistemas inerciales.

Veamos este enunciado:

Una onda de luz viajando a velocidad 1 satisface $|d\vec{x}| = dt$ i.e.

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = 1 &\Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 = 1 \Rightarrow d\vec{x} \cdot d\vec{x} - dt^2 = 0 \Rightarrow d\vec{x}^2 - dt^2 = 0 \\ &\Rightarrow dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \Rightarrow \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Luego de (2.1) se tiene que

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0 \Rightarrow dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0 \quad (2.4)$$

por lo que aplicando el proceso inverso de este razonamiento obtenemos que

$$\left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = 1. \quad (2.5)$$

Cualquier transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que satisfice (2.2) es lineal, entonces tenemos la siguiente expresión:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (2.6)$$

con a^μ constantes arbitrarias y $\Lambda^\mu{}_\nu$ una matriz constante que satisface la condición

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.7)$$

Estas transformaciones forman un grupo. Si primero realizamos una transformación de Lorentz (2.6), y luego una segunda transformación de Lorentz

$$x'^\mu \rightarrow x''^\mu \text{ donde } x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho x'^\rho + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho (\Lambda^\rho{}_\nu x^\nu + a^\rho) + \bar{a}^\mu. \quad (2.8)$$

Entonces el efecto es el mismo que el de una transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x''^\mu$ con

$$x''^\mu = (\bar{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu) x^\nu + \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho a^\rho + \bar{a}^\mu. \quad (2.9)$$

Nótese que si $\Lambda^\mu{}_\nu$ y $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$ satisfacen (2.7) entonces $\bar{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu$ también.

Las transformaciones $T(\Lambda, a)$, que son una representación del grupo satisfacen la regla de composición

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (2.10)$$

Tomando el determinante en (2.7) obtenemos que

$$\det(\eta\Lambda\Lambda) = \det \eta \Rightarrow \det \eta \det \Lambda \det \Lambda = \det \eta \quad (2.11)$$

$\Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1$ ya que $\det \eta = -1$.

$$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (2.12)$$

Podemos entonces concluir que $\Lambda^\mu{}_\nu$ tiene inversa, la cual denotamos por $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho$. De (2.7) podemos encontrar la forma de la matriz inversa, al multiplicar por $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu$ entonces

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\beta} \Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \Lambda^\beta{}_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \\ \Rightarrow \eta_{\mu\beta} \delta^\mu{}_\nu \Lambda^\beta{}_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \\ \Rightarrow \eta^{\rho\sigma} \eta_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\sigma &= (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

por lo que

$$\Lambda_\nu{}^\rho = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu. \quad (2.14)$$

Se debe cumplir que la inversa de la transformación $T(\Lambda, a)$ a partir de (2.10) sea $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, y la transformación identidad $T(\mathbf{1}, \mathbf{0})$.

$$T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)T(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}\Lambda, -\Lambda^{-1}a + \Lambda^{-1}a) = T(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \quad (2.15)$$

ahora multiplicamos por la *inversa* propuesta i.e.

$$T(\Lambda, a)T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = T(\Lambda\Lambda^{-1}, \Lambda(-\Lambda^{-1}a) + a) = T(\mathbf{1}, -a + a) = T(\mathbf{1}, \mathbf{0}), \quad (2.16)$$

así nos convencemos que la transformación propuesta es la inversa.

La sección 2.2 del libro de Weiberg *The Quantum Theory of Fields*, así como en el artículo sobre transformaciones unitarias de Wigner, el cuál se convirtió en un clásico para estos tópicos, muestra que la transformación $T(\Lambda, a)$ induce una transformación lineal unitaria sobre vectores en el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica. i.e.

$$|\Psi\rangle \rightarrow U(\Lambda, a) |\Psi\rangle. \quad (2.17)$$

Los operadores U deben satisfacer la regla de composición siguiente:

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \quad (2.18)$$

El grupo de transformaciones $T(\Lambda, a)$ es propiamente conocido como *El Grupo Inhomogeneo de Lorentz* ó *El Grupo de Poincaré*. Para este caso tomaremos aquellas transformaciones donde $a^\mu = 0$, las cuales forman un subgrupo pues

$$T(\bar{\Lambda}, \mathbf{0})T(\Lambda, \mathbf{0}) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \mathbf{0}), \quad (2.19)$$

dicho subgrupo es conocido como *El Grupo Homogeneo de Lorentz*.

De (2.12) retomamos que $\det \Lambda = \pm 1$, fijandonos en las transformaciones con $\det \Lambda = +1$ podemos ver que forman un subgrupo del grupo de Lorentz tanto homogeneo como inhomogeneo, pues si tenemos dos transformaciones Λ_1 y Λ_2 con $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$ y $\det \Lambda_1 = \det \Lambda_2 = +1$

$$\Rightarrow \det \Lambda_1\Lambda_2 = \det \Lambda_1 \det \Lambda_2 = +1 = \det \Lambda_3. \quad (2.20)$$

Ahora si tomamos (2.7) podemos ver que para la componente 00,

$$\eta_{00} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_0\Lambda^\nu_0 = \eta_{00}\Lambda^0_0\Lambda^0_0 + \eta_{ij}\Lambda^i_0\Lambda^j_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \Lambda^i_0\Lambda^i_0. \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0\Lambda^i_0 = 1 + \Lambda^0_i\Lambda^0_i \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq +1 \text{ o bien } \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (2.23)$$

Las transformaciones con $\Lambda^0_0 \geq +1$ forman un subgrupo, i.e. Podemos probar que si Λ^μ_ν y $\bar{\Lambda}^\mu_\nu$ son transformaciones con Λ^0_0 y $\bar{\Lambda}^0_0 \geq 1 \Rightarrow (\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq 1$.

Se tiene que

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 + \bar{\Lambda}^0_1\Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^2_0\Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^3_0\Lambda^3_0; \quad (2.24)$$

la anterior relación no es nada mas que el producto interior de la primera fila de $\bar{\Lambda}$ con la primera columna de Λ . Con (2.22) vemos que la longitud de los 3-vectores $(\bar{\Lambda}^1_0, \bar{\Lambda}^2_0, \bar{\Lambda}^3_0)$ y $(\Lambda^0_1, \Lambda^0_2, \Lambda^0_3)$ es $\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}$ y $\sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}$ respectivamente. Entonces de la desigualdad de Schwarz;

$$|\bar{\Lambda}^0_1\Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^2_0\Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^3_0\Lambda^3_0| \leq \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}\sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}, \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}\sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \leq \bar{\Lambda}^0_1\Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^2_0\Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^3_0\Lambda^3_0. \quad (2.26)$$

Luego

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 - \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}\sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}. \quad (2.27)$$

Si $\Lambda^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0 = 1$ es claro que $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = 1$, de igual manera es fácil ver que si $\Lambda^0_0 > 1$ y $\bar{\Lambda}^0_0 = 1$ o bien $\Lambda^0_0 = 1$ y $\bar{\Lambda}^0_0 > 1$ entonces $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 > 1$, por lo que el caso a considerar es cuando Λ^0_0 y $\bar{\Lambda}^0_0 > 1$.

Para esto proponemos $\Lambda^0_0 = 1 + \epsilon$ y $\bar{\Lambda}^0_0 = 1 + \alpha$ con $1 \gg \epsilon > 0$ y $1 \gg \alpha > 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 (\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 &\geq (1 + \alpha)(1 + \epsilon) - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 1}\sqrt{(1 + \epsilon)^2 - 1} \\
 &= 1 + \alpha + \epsilon + \alpha\epsilon - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}\sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon} \\
 &= 1 + \alpha + \epsilon + \alpha\epsilon - \alpha\epsilon\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}\sqrt{1 + \frac{2}{\epsilon}} \\
 &\approx 1 + \alpha + \epsilon + \alpha\epsilon - \alpha\epsilon\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \\
 &= 1 + \alpha\epsilon + \alpha + \epsilon - 2\sqrt{\alpha\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Por otro lado si $x, y > 0 \Rightarrow (x - y)^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 > 4xy \Rightarrow x + y > 2\sqrt{xy} \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} > 0$. De esta manera utilizando esta desigualdad podemos concluir que $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq 1$. Así verificamos que aquellas transformaciones con $\det \Lambda = +1$ y $\Lambda^0_0 \geq +1$ forman un subgrupo de las transformaciones de Lorentz y es conocido como *El Grupo de Lorentz propio ortocrono*.

Ya que no es posible saltar del $\det \Lambda = +1$ a $\det \Lambda = -1$, o de $\Lambda^0_0 \geq +1$ a $\Lambda^0_0 \leq -1$ a través de un cambio continuo de parámetros, cualquier transformación de Lorentz que pueda ser obtenida por un cambio continuo de parámetros debe ser tal que el $\det \Lambda$ y Λ^0_0 deben tener el mismo signo que el de la identidad, y por lo tanto pertenecer al Grupo de Lorentz propio ortocrono.

2.2. Álgebra de Poincaré

Se sabe que la información alrededor de cualquier grupo de simetría de Lie está contenida en las propiedades de los elementos del grupo cercanos a la identidad. En el caso del grupo de Lorentz Inhomogeneo, la identidad es la transformación $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, $a^\mu = 0$, entonces nuestro interés se centrará en estudiar aquellas transformaciones con

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \tag{2.29}$$

donde ω^μ_ν y ϵ^μ tomarán valores infinitesimales.

Tomando (2.7), es decir la condición de Lorentz y sustituyendo la anterior expresión en ella tenemos:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho)(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) = \eta_{\mu\nu}\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu}\delta^\mu_\rho\omega^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu}\omega^\mu_\rho + \eta_{\mu\nu}\omega^\mu_\rho\omega^\nu_\sigma \\
 &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\nu\rho}\omega^\nu_\sigma \\
 &\Rightarrow -\omega_{\rho\sigma} = \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\nu\rho}\omega^\nu_\sigma
 \end{aligned}$$

Ya que solo conservaremos términos a primer orden en ω obtenemos la propiedad de antisimetría de $\omega_{\mu\nu}$, esto es:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{2.30}$$

Un tensor de segundo rango antisimétrico en cuatro dimensiones tiene $(4 \times 3)/2 = 6$ componentes independientes, entonces incluyendo las 4 componentes de ϵ^μ , cualquier transformación de Lorentz Inhomogénea es descrita por 10 parámetros.

Para una transformación de Lorentz infinitesimal, $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)$ se puede realizar una expansión de Taylor como sigue:

$$U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (2.31)$$

Donde $J^{\rho\sigma}$ y P^ρ son operadores independientes de ω y ϵ , y los puntos suspensivos denotan términos de orden más alto en ω y/o ϵ .

A fin de que $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)$ sea unitario bajo esta expansión, los operadores $J^{\rho\sigma}$ y P^ρ deben ser hermitianos, esto es:

$$(J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}, (P^\rho)^\dagger = P^\rho. \quad (2.32)$$

Como $\omega_{\rho\sigma}$ es antisimétrico, los coeficientes $J^{\rho\sigma}$ deben ser antisimétricos también. $\Rightarrow J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$.

P^1, P^2 y P^3 son las componentes del operador de momento, así como J^{23}, J^{31} y J^{12} son las componentes del operador de momento angular, y P^0 es el operador de energía o el *Hamiltoniano*.

Consideremos el producto $U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$, donde $\Lambda^\mu{}_\nu$ y a^μ son los parámetros de una nueva transformación sin relación con ω y ϵ . Recordemos que se demostró que $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ es el inverso de $U(\Lambda, a)$.

Sustituyendo $U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$ en la expresión (2.18) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda, a)U((\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, -(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) = U(\Lambda(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda(-(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) + a) \\ &= U(\Lambda(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \\ &\Rightarrow U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \end{aligned}$$

Entonces quedándonos a primer orden en ω y ϵ , tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)[\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho]U^{-1}(\Lambda, a) &= \mathbf{1} + \frac{i}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\nu\mu} - i(\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu \\ \Rightarrow U(\Lambda, a)[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho]U^{-1}(\Lambda, a) &= \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\nu\mu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\nu\mu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu = \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu J^{\nu\mu} - (\Lambda_\mu{}^\rho\epsilon_\rho - \Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu a^\nu)P^\mu, \quad (2.33)$$

entonces igualando coeficientes de $\omega_{\rho\sigma}$ y ϵ_ρ se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2}U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\rho(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu J^{\nu\mu} + \Lambda_\mu{}^\rho(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu a^\nu P^\mu \quad (2.34)$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu \quad (2.35)$$

Podemos ver que (2.34) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) &= \frac{1}{2}\Lambda_{\mu}{}^{\rho}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}J^{\nu\mu} + \Lambda_{\mu}{}^{\rho}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}a^{\nu}P^{\mu} \\ &= \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}J^{\nu\mu} + 2\Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}a^{\nu}P^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}(J^{\nu\mu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}). \end{aligned}$$

Para transformaciones de Lorentz Homogeneas (con $a^{\mu} = 0$) estas reglas de transformación, muestran que $J^{\mu\nu}$ es un tensor y P^{μ} es un vector. Para traslaciones puras ($\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$), nos damos cuenta que P^{ρ} es un invariante ante estas traslaciones pero $J^{\rho\sigma}$ no.

Ahora apliquemos (2.34) y (2.35) con $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ y $a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$, recordando que $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu}$.

Para la relación (2.34) quedandonos a primer orden se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) &= (\delta_{\mu}{}^{\rho} + \omega_{\mu}{}^{\rho})(\delta_{\nu}{}^{\sigma} + \omega_{\nu}{}^{\sigma})(J^{\nu\mu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}) \\ &= \delta_{\mu}{}^{\rho}\delta_{\nu}{}^{\sigma}(J^{\nu\mu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}) + \delta_{\mu}{}^{\rho}\omega_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu} + \omega_{\mu}{}^{\rho}\delta_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu} \\ &= J^{\rho\sigma} - \epsilon^{\rho}P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma}P^{\rho} + \omega_{\nu}{}^{\sigma}J^{\rho\nu} + \omega_{\mu}{}^{\rho}J^{\mu\sigma}. \end{aligned}$$

Ahora veamos el lado izquierdo, nuevamente quedandonos a primer orden tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) &= (\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu})J^{\rho\sigma}(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}P^{\mu}) \\ &= J^{\rho\sigma} + i(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma} - \omega_{\mu\nu}J^{\rho\sigma}J^{\mu\nu}) + i(\epsilon_{\mu}J^{\rho\sigma}P^{\mu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}J^{\rho\sigma}) \\ &= J^{\rho\sigma} + i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] - i[\epsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = J^{\rho\sigma} + i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma}\right]. \end{aligned}$$

Por lo que igualando las relaciones encontradas llegamos a la siguiente regla de conmutación:

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma}\right] = \omega_{\mu}{}^{\rho}J^{\mu\sigma} + \omega_{\nu}{}^{\sigma}J^{\rho\nu} - \epsilon^{\rho}P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma}P^{\rho} \quad (2.36)$$

Para la ecuación (2.35) usamos el mismo método, entonces llegamos a nuestra segunda regla de conmutación

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, P^{\rho}\right] = \omega_{\mu}{}^{\nu}P^{\mu} \quad (2.37)$$

Igualando coeficientes de $\omega_{\mu\nu}$ y ϵ_{μ} en ambos lados de este conjunto de ecuaciones, podemos encontrar las siguientes reglas de conmutación

$$i) \quad i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + J^{\rho\mu} \quad (2.38)$$

$$ii) \quad i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho} \quad (2.39)$$

$$iii) \quad [P^{\mu}, P^{\rho}] = 0 \quad (2.40)$$

Las anteriores reglas de conmutación forman el llamado *Álgebra de Lie del grupo de Poincaré*

En mecánica cuántica un rol especial es jugado por aquellos operadores que son *conservados*, i.e. que conmutan con el operador de energía $H = P^0$, si revisamos las expresiones (2.38) y

(2.39), vemos que aquellas componentes que cumplen con lo anterior son:

$$\bar{P} = \{P^1, P^2, P^3\} \quad (2.41)$$

y

$$\bar{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad (2.42)$$

Donde \bar{P} y \bar{J} representan los 3-vectores de momento y momento angular respectivamente. Claramente, el operador de energía conmuta con si mismo. Los generadores restantes forman al que es llamado el *3-vector de boost*.

$$\bar{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\} \quad (2.43)$$

Éstas componentes no son conservadas, entonces no usamos sus eigenvalores para etiquetar estos físicos. En notación tridimensional, las reglas de conmutación (2.39-2.40), pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, k_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, P_j] &= -iH\delta_{ij} \\ [K_i, H] &= iP_i \\ [J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Las traslaciones puras $T(\mathbf{1}, a)$ forman un subgrupo de grupo inhomogeneo de Lorentz, cuya regla de multiplicación del grupo es:

$$T(\mathbf{1}, \bar{a})T(\mathbf{1}, a) = T(\mathbf{1}, \bar{a} + a). \quad (2.45)$$

Es posible ver que las traslaciones finitas, son representadas en un espacio de Hilber físico por:

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-ip^\mu a_\mu). \quad (2.46)$$

De la misma manera, se puede verificar que una rotación $R_{\vec{\theta}}$ por un angulo $|\vec{\theta}|$ alrededor de la dirección de $\vec{\theta}$ está representada en un espacio de Hilbert físico por

$$U(R_{\vec{\theta}}, 0) = \exp(i\vec{J} \cdot \vec{\theta}) \quad (2.47)$$

Capítulo 3

Representaciones del Grupo de Poincaré

3.1. Método de representaciones inducidas

Consideremos ahora la clasificación de los estados de una partícula en base a su transformación bajo el grupo Inhomogeneo de Lorentz.

Las componentes del 4-vector de energía momento conmutan entre todas ellas, por lo que es natural expresar vectores de estado físico en términos de eigenvectores del 4-momento. Introduciendo una etiqueta σ para denotar todos los demas grados de libertad, podemos entonces considerar vectores de estado $|p, \sigma\rangle$ con

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle. \quad (3.1)$$

Para estados generales que contienen por ejemplo varias partículas no unidas, la etiqueta σ tendría que ser permitida de incluir valores continuos al igual que discretos.

Para ser concretos, tomaremos como parte de la definición del *Estado de una partícula* que, la etiqueta σ es puramente discreta, y nos limitaremos solo a ese caso.

La ecuaciones (2.46) y (2.47) nos dicen como los estados $|p, \sigma\rangle$ transforman bajo las traslaciones.

$$U(\mathbf{1}, a) |p, \sigma\rangle = e^{-ip \cdot a} |p, \sigma\rangle \quad (3.2)$$

Debemos ahora considerar como cambian estos estados bajo la acción de las transformaciones de Lorentz homogneas. De (2.35) podemos observar que el efecto que una transformación homognea tiene al actuar sobre $|p, \sigma\rangle$, es producir un eigenestado del 4-momento con eigenvalor Λp . Esto es

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) [U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)] |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) ((\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho P^\rho) |p, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) (\Lambda^\mu{}_\rho P^\rho) |p, \sigma\rangle = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda) |p, \sigma\rangle. \\ \Rightarrow P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por lo tanto $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$ debe ser una combinación lineal de los vectores de estados $|\Lambda p, \sigma'\rangle$:

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (3.4)$$

En general es posible a través de usar combinaciones lineales apropiadas de $|p, \sigma\rangle$, escoger las etiquetas σ en tal forma que la matriz $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ sea diagonal a bloques; i.e, tal que el estado $|p, \sigma\rangle$ con σ dentro de un bloque cualquiera por si mismos proporcionen una representación del grupo inhomogeneo de Lorentz.

Es natural identificar los estados de un tipo específico de partícula con las componentes de una representación del Grupo inhomogeneo de Lorentz, las cuales son irreducibles, en el sentido de que no puede ser descompuesta de esta forma.

Lo que se busca es trabajar en la estructura de los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ en representaciones irreducibles del grupo inhomogeneo de Lorentz. Notemos que las únicas funciones de p^μ , que son dejadas invariantes por todas las transformaciones propias ortócronas de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ son $p^2 = \eta_{\nu\sigma} p^\mu p^\nu$, y el signo de p^0 para $p^2 \leq 0$.

Por lo tanto para cada valor de p^2 (para $p^2 \leq 0$) y para cada signo de p^0 , podemos escoger un 4-momento estándar, por ejemplo k^μ , y expresar cualquier p^μ de esta clase como

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p) k^\mu. \quad (3.5)$$

donde $L^\mu{}_\nu$ es alguna transformación de Lorentz estándar que depende de p^μ y también implícitamente de nuestra elección de k^μ . Podemos entonces definir los estados $|p, \sigma\rangle$ de momento p por

$$|p, \sigma\rangle = N(p) U(L(p)) |k, \sigma\rangle, \quad (3.6)$$

donde $N(p)$ es un factor de normalización, el cual puede ser determinado después. Sin embargo no se ha mencionado algo respecto a como las etiquetas σ estan relacionadas para diferente momento.

Haciendo actuar sobre (3.6) una transformación homogenea de Lorentz arbitraria $U(\Lambda)$, encontramos:

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) N(p) U(L(p)) |k, \sigma\rangle = N(p) U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle \\ &= N(p) U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle = N(p) U(\Lambda L(p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

El punto importante del último paso es que la transformación de Lorentz $U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p))$ toma k y lo manda a p es decir, $L(p)k = p$ y luego a Λp , para después regresar a k , entonces esta transformación pertenece al subgrupo del grupo homoganeo de Lorentz, el cual consiste en aquellas transformaciones de Lorentz $W^\mu{}_\nu$ que dejan k^μ invariante, esto es

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu. \quad (3.8)$$

Este sugbrupo es llamado *Little Group*. Para cualquier W que satisfaga la ecuación anterior se tiene

$$U(W) |k, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W) |k, \sigma'\rangle. \quad (3.9)$$

Los coeficientes $D(W)$ forman una representación del Little Group, i.e. para cualquier elemento

\bar{W}, W tenemos los siguiente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) |k, \sigma'\rangle = U(\bar{W}W) |k, \sigma\rangle \\
& = U(\bar{W})U(W) |k, \sigma\rangle = U(\bar{W}) \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W) |k, \sigma\rangle \\
& = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W) D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W}) |k, \sigma\rangle \\
& \Rightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W) D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W}) \\
& \Rightarrow \text{para cada elemento } D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) \text{ se tiene que} \\
& D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W}) D_{\sigma''\sigma}(W). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (3.10) a la transformación del Little Group $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$, entonces (3.7) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
& U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \\
& = N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle = N(p)U(L(\Lambda p)) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle \\
& = N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p)) |k, \sigma'\rangle, \\
& \Rightarrow U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Dejando de lado el problema de la normalización, la tarea de determinar los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}$ en la regla de transformación (3.4), se ha reducido al problema de encontrar las representaciones del Little Group. Esta aproximación de derivar representaciones de un grupo como el grupo Inhomogeneo de Lorentz, a partir de las representaciones de un Little Group, es llamado *Método de representaciones inducidas*.

Caso	k^μ	Little Group
(a) $p^2 = M^2 > 0, p^0 > 0$	$(M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$
(b) $p^2 = M^2 > 0, p^0 < 0$	$(-M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$
(c) $p^2 = 0, p^0 > 0$	$(\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$
(d) $p^2 = 0, p^0 < 0$	$(-\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$
(e) $p^2 = -N^2 > 0$	$(0, 0, 0, N)$	$SO(1, 2)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$SO(1, 3)$

Momento estándar y el little group correspondiente.

La tabla anterior nos dá una elección conveniente del momento estándar k^μ y su correspondiente *Little Group*, para varias clases de 4-momento. Solo las clases (a), (c) y (f) tienen alguna interpretación conocida en términos de estados físicos. Para el caso (f) no hay mucho que decir,

éste describe al vacío el cuál es invariante trivialmente ante $U(\Lambda)$.

3.2. Operadores de Casimir del grupo de Poincaré

El álgebra de Lie del grupo de Lorentz, se puede escribir de una manera unificada definiendo:

$$J_{\mu\nu} = \begin{cases} J_{ij} = -J_{ji} = \epsilon_{ijk} J_k \\ J_{i0} = -J_{0i} = -K_i \end{cases} \quad (3.12)$$

Con lo anterior tenemos que $J_{\mu\nu}$ y P_μ son los generadores de transformaciones de Lorentz puras y traslaciones espacio temporales respectivamente. Por lo que se propone que

$$P^2 = P_\mu P^\mu, \quad (3.13)$$

es un operador de Cassimir del álgebra de Poincaré.

Posteriormente se define el llamado vector de Pauli-Lubanski

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu J^{\rho\sigma} \quad (3.14)$$

Y resulta que

$$W^2 = W_\mu W^\mu \quad (3.15)$$

es el segundo operador de Cassimir del álgebra de Poincaré.

3.3. Forma covariante del Little group

Las transformaciones de Lorentz que dejan al momento invariante como bien sabemos son las que forman al little group el cual denotamos como LG_k , y los elementos de grupo son generados por las componentes independientes de

$$w^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K_\nu J_{\rho\sigma}. \quad (3.16)$$

Es posible ver la similitud de w con el vector de *Pauli – Lubanski*, reemplazando P_ν por su eigenvalor K_ν , el cual cumple con las siguientes reglas de conmutación

$$[W_\mu, J_{\alpha,\beta}] = -i(\eta_{\beta\nu} W_\alpha - \eta_{\alpha\nu} W_\beta) \quad (3.17)$$

$$[W^\mu, W^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma \quad (3.18)$$

$$[W^\mu, P^\nu] = 0. \quad (3.19)$$

Se puede demostrar que tanto P^2 como W^2 conmutan con todo los generadores del grupo de Poincaré, lo cual resulta sencillo si damos por verdaderas las reglas de conmutación anteriores.

3.3.1. Caso masivo

Para el caso masivo y siguiendo la metodología de representaciones inducidas, elegimos un 4 – momento estándar $k = (m, 0, 0, 0)$ donde $k^2 = k^\mu k_\mu = m^2$ y m es la masa de una partícula en reposo entonces los generadore de los elementos del LG_k son

$$\begin{aligned} w^\mu &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}K_\nu J_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma}K_0 J_{\rho\sigma} \\ &= -m\frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\rho\sigma}J_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Entonces las componentes distintas de cero seran de la siguiente manera

$$\begin{aligned} w^1 &= -\frac{m}{2}(\epsilon^{1023}J_{23} + \epsilon^{1032}J_{32}) = mJ_{23} = mJ_1, \\ w^2 &= -\frac{m}{2}(\epsilon^{2013}J_{13} + \epsilon^{2031}J_{31}) = -mJ_{13} = -mJ_2, \\ w^3 &= -\frac{m}{2}(\epsilon^{3012}J_{12} + \epsilon^{3021}J_{21}) = mJ_{12} = mJ_3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo que w^μ se reduce a $w^0 = 0$ y $w^i = mJ^i$, lo que implica que el Little group tiene la estructura $SO(3)$.

Haciendo una conexión entre el formalismo de Little group y lo que usualmente se hace para deducir las representaciones del Grupo de Lorentz inhomogeneo para el caso masivo, tenemos lo siguiente:

Definimos los siguientes generadores \mathbf{A} y \mathbf{B} en terminos de $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ y $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ como sigue

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(J + iK), \mathbf{B} = \frac{1}{2}(J - iK). \quad (3.22)$$

Usando las relaciones de conmutación (2.44), se tiene:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \quad (3.23)$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \quad (3.24)$$

$$[A_i, B_j] = 0 \quad (3.25)$$

Lo anterior muestra que tanto \mathbf{A} como \mathbf{B} generan un grupo $SU(2)$, y los dos grupos comutan. El grupo de Lorentz al cual conocemos como $SO(1,3)$ es esencialmente $SU(2) \times SU(2)$, y la transformación de estados para estar bien definida, será descrita por dos etiquetas de momento angular (j, j') , el primero corresponde a \mathbf{A} , y el segundo a \mathbf{B} . Donde $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, por lo que tendremos representaciones, escalares, vectoriales o espinoriales.

3.3.2. Caso sin masa

En éste caso tenemos $k^2 = 0$, i. e., elegimos nuestro 4 – momento estándar como $k^\mu = (m, 0, 0, m)$, al igual que en el caso masivo, partimos del vector de Pauli-Lubanski, para encontrar, entonces, los generadores de los elementos del LG_k .

$$\begin{aligned}
 w^\mu &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K_\nu J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu 0\rho\sigma} K_0 J_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu 3\rho\sigma} K_3 J_{\rho\sigma} \\
 &= \frac{m}{2} (\epsilon^{\mu 0\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \epsilon^{\mu 3\rho\sigma} J_{\rho\sigma})
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Cada una de las componentes de W^μ , son distintas de cero, por lo que es importante calcular una por una.

$$w^0 = -\frac{m}{2} \epsilon^{\mu 3\rho\sigma} J_{\rho\sigma} = -\frac{m}{2} (\epsilon^{0312} J_{12} + \epsilon^{0321} J_{21}) = -\frac{m}{2} J_{12} (\epsilon^{0312} - \epsilon^{0321}) = -m J_{12} = -m J_3 \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 w^1 &= \frac{m}{2} (\epsilon^{10\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \epsilon^{13\rho\sigma} J_{\rho\sigma}) = \frac{m}{2} (\epsilon^{1023} J_{23} + \epsilon^{1032} J_{32} - \epsilon^{1302} J_{03} - \epsilon^{1320} J_{20}) \\
 &= m (-J_{23} + J_{02}) = m (-J_1 + K_2) = -m (K_2 - J_1),
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 w^1 &= \frac{m}{2} (\epsilon^{20\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \epsilon^{23\rho\sigma} J_{\rho\sigma}) = \frac{m}{2} (\epsilon^{2013} J_{13} + \epsilon^{2031} J_{31} - \epsilon^{2301} J_{01} - \epsilon^{2310} J_{10}) \\
 &= m (J_{13} - J_{01}) = -m (J_{31} + J_{01}) = -m (K_1 + J_2),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$w^3 = \frac{m}{2} \epsilon^{3012} J_{12} + \frac{m}{2} \epsilon^{3021} J_{21} = -m J_{12} = -m J_3. \tag{3.30}$$

Haciendo que \vec{J} sea el generador de rotaciones y \vec{K} el generador de boost, los generadores del little group son J_3, L_1 y L_2 con

$$L_1 = K_1 + J_2, \tag{3.31}$$

$$L_2 = K_2 - J_1. \tag{3.32}$$

3.3.3. Álgebra de Lie para el caso sin masa

Los generadores para el caso no masivo obedecen el siguiente álgebra,

$$\begin{aligned}
 [L_1, L_2] &= 0 \\
 [J_3, L_1] &= iL_2 \\
 [J_3, L_2] &= -iL_1.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

¿Físicamente es posible ver por qué esta combinación de generadores deben ser los elementos del little group?

Utilizando los generadores propuestos y trabajando con la representación matricial de éstos, podemos operar sobre el 4-momento de referencia y ver el efecto de dichos generadores sobre este 4-vector.

3.3. FORMA COVARIANTE DEL LITTLE GROUP

La representación matricial de los generadores involucrados está dada de la siguiente manera:

$$J_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

$$J_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

El momento estándar o de referencia es el vector columna

$$K = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Los operadores correspondientes para los generadores L_1 y L_2 a primer orden son $U(L_1) = 1 - i\phi_1 L_1$ y $U(L_2) = 1 - i\phi_2 L_2$, entonces actuando sobre el momento de referencia se tiene lo siguiente:

$$U(L_1)K = K + \phi_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.37)$$

$$U(L_2)K = K + \phi_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.38)$$

Lo anterior nos muestra que estos generadores efectivamente si dejan invariante al momento, mas aun, físicamente, una parte de L_1 crea una componente x y al mismo tiempo otra parte la anula, de manera similar L_2 crea una componente y pero tambien la anula. En el caso de J_3 , resulta claro que deja al momento invariante, pues como bien sabemos es el generador de rotaciones al rededor del eje 3 o eje Z .

Entonces el elemento del little group para el caso sin masa mas general esta dado como

$$W(\theta, \alpha, \beta)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (3.39)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha \\ \alpha & -\theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Así el operador asociado a este elemento de grupo queda de la siguiente manera

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 - i\alpha L_1 - i\beta L_2 - i\theta J_3 \quad (3.41)$$

Podemos verificar que los generadores L_1 y L_2 deben ser de la siguiente manera $L_1 = K_1 + J_2$, $L_2 = K_2 - J_1$, como se muestra en las eqs.(3.31) y (3.32).

Esto es

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 - i\alpha(K_1 + J_2) - i\beta(K_2 - J_1) - i\theta J_3. \quad (3.42)$$

A continuación comprobaremos que la anterior combinación de generadores en forma de matriz, es la correcta.

$$\begin{aligned} U(W(\theta, \alpha, \beta)) &= 1 + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha \\ \beta & -\theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

La representación matricial de los generadores L_1 y L_2 entonces estará dada como:

$$L_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Ahora podemos calcular los tres conmutadores entre estos generadores.

$$[L_1, L_2] = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} [J_3, L_1] &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = iL_2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

por último tenemos el siguiente conmutador,

$$\begin{aligned} [J_3, L_2] &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iL_1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3.4. Helicidad λ

Como L_1 y L_2 son operadores hermitianos que conmutan, estos pueden ser diagonalizados simultaneamente a través de estados $|k, l_1, l_2\rangle$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_1 |k, l_1, l_2\rangle &= l_1 |k, l_1, l_2\rangle, \\ L_2 |k, l_1, l_2\rangle &= l_2 |k, l_1, l_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aquí nuestra sorpresa es que si encontramos tal conjunto de eigenvalores distintos de cero de L_1 y L_2 , entonces encontramos todo un continuo, veamos lo anterior.

Tenemos que $U(W(\theta, \alpha, \beta)) = \mathbf{1} - i\alpha L_1 - i\beta L_2 - i\theta J_3$, entonces por un lado:

$$U(R(\theta))U(W(\theta, \alpha, \beta))U^{-1}(R(\theta)) = \mathbf{1} - i(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)L_1 - i(\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta)L_2 - i\theta J_3. \quad (3.49)$$

Por otro lado se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} U(R(\theta))U(W(\theta, \alpha, \beta))U^{-1}(R(\theta)) &= \mathbf{1} - i\alpha U(R(\theta))L_1U^{-1}(R(\theta)) \\ &\quad - i\beta U(R(\theta))L_2U^{-1}(R(\theta)) - i\theta U(R(\theta))J_3U^{-1}(R(\theta)). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Así llegamos al siguiente par de ecuaciones.

$$\begin{aligned} U(R(\theta))L_1U^{-1}(R(\theta)) &= L_1 \cos \theta - L_2 \sin \theta \\ U(R(\theta))L_2U^{-1}(R(\theta)) &= L_1 \sin \theta + L_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las ecuaciones de eigenvalores respectivas para L_1 y L_2 quedarán como sigue:

$$L_1 |k, l_1, l_2, \theta\rangle = (l_1 \cos \theta - l_2 \sin \theta) |k, l_1, l_2, \theta\rangle \quad (3.52)$$

y

$$L_2 |k, l_1, l_2, \theta\rangle = (l_1 \sin \theta + l_2 \cos \theta) |k, l_1, l_2, \theta\rangle. \quad (3.53)$$

Donde $U^{-1}(R(\theta)) |k, l_1, l_2\rangle = |k, l_1, l_2, \theta\rangle$ para un θ arbitrario.

De esta manera los estados estándar estarán caracterizados por un parámetro fijo l y un ángulo variable ϕ [2], con

$$\begin{aligned} L_1 |k\hat{z}, l, \phi\rangle &= l \cos \phi |k\hat{z}, l, \phi\rangle \\ L_2 |k\hat{z}, l, \phi\rangle &= l \sin \phi |k\hat{z}, l, \phi\rangle \\ e^{-i\theta J_3} |k\hat{z}, l, \phi\rangle &= |k\hat{z}, l, \phi + \theta\rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como cualquier representación del grupo de Poincaré puede ser uni o bi-valuada, tomamos para $n = 1, 2$

$$|k\hat{z}, l, \phi + 2\pi n\rangle = |k\hat{z}, l, \phi\rangle. \quad (3.55)$$

En el límite $l \rightarrow 0$ los estados con diferentes valores de ϕ se degeneran hasta una fase.

$$|k\hat{z}, 0, \phi + \theta\rangle = e^{-i\theta\lambda} |k\hat{z}, 0, \phi\rangle. \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow \theta = 2\pi n,$$

en base a la ecuación (8)

$$e^{-i2\pi\lambda} |k\hat{z}, 0, \phi\rangle \Rightarrow \lambda = 1$$

y

$$e^{-i2\pi(2)\lambda} |k\hat{z}, 0, \phi\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Esto es entonces el número cuántico usual de helicidad.

Capítulo 4

Representaciones de Espín continuo

4.1. ¿Se puede tener un campo para partículas de espín continuo?

Los estados con momento \vec{k} caracterizados por un ángulo ϕ azimutal, un ángulo α polar y un parámetro $\gamma = \ln\left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right)$, los cuales se obtienen a partir del ket estándar por medio de transformación de Lorentz apropiada [2].

$$|\vec{K}, l, \phi\rangle = \left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right) e^{-i\phi J_3} e^{-i\alpha J_2} e^{-i\gamma K_3} |\kappa \hat{z}, l, \phi\rangle \quad (4.1)$$

Como la variación del ángulo ϕ es continua, partículas sin masa con $l \neq 0$, no pueden ser creadas o destruidas por cualquier operador de campo $\Phi_\sigma(x^\mu)$ con un número finito de componentes.

Entonces analizamos la propuesta [2] de introducir un campo $\Phi(x^\mu, \theta_n)$ dependiente de un conjunto de variables continuas θ_n . Bajo una transformación de Lorentz arbitraria $U(\Lambda)$

$$U(\Lambda)\Phi(x^\mu, \theta_n)U^{-1}(\Lambda) = \Phi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \Gamma_{mn}(\Lambda^{-1})\theta_m), \quad (4.2)$$

donde se asume la suma sobre índices repetidos. Las matrices Γ_{mn} forman una representación del grupo de Lorentz, ya que

$$\Gamma_{mn}(\Lambda_1^{-1})\Gamma_{nl}(\Lambda_2^{-1}) = \Gamma_{ml}((\Lambda_2\Lambda_1)^{-1}) = \Gamma_{ml}(\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}). \quad (4.3)$$

Si los θ_n transforman de acuerdo a una representación del grupo de Lorentz designada por (A,B), los generadores de rotación y boost para los Γ_{mn} están dado por

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}^{(A)} + \vec{\mathcal{J}}^{(B)}, \quad \vec{\mathcal{K}} = -i(\vec{\mathcal{J}}^{(A)} + \vec{\mathcal{J}}^{(B)}), \quad (4.4)$$

donde $\mathcal{J}^{(\mathcal{A})}$ y $\mathcal{J}^{(\mathcal{B})}$ pueden ser escritos simplemente en terminos de matrices de espín ordinarias A y B . Los generadores de la matriz correspondientes a L_1 y L_2 son

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \mathcal{K}_1 + \mathcal{J}_2 = -i(\mathcal{J}_+^{(\mathcal{A})} - \mathcal{J}_-^{(\mathcal{B})}), \\ \mathcal{L}_2 &= \mathcal{K}_2 - \mathcal{J}_1 = -(\mathcal{J}_+^{(\mathcal{A})} + \mathcal{J}_-^{(\mathcal{B})}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Donde $\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2$.

Tomamos $\Phi(x, \theta_n)$ y lo forzamos a ser un operador de campo libre, creando o destruyendo únicamente partículas solas. Los elementos de la matriz de una partícula pueden ser escritos como

$$\langle 0|\Phi(x, \theta_n)|\vec{K}, l, \phi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-iK \cdot x}}{(2|\vec{K}|)^{\frac{1}{2}}} F(\vec{K}, l, \phi; \theta_n).\tag{4.6}$$

Estos están relacionados con los elementos de la matriz de estado estándar a través de una transformación de Lorentz

$$U(\Lambda(\vec{K})) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\alpha J_2} e^{-i\gamma K_3}.\tag{4.7}$$

De (4.1) podemos ver que

$$\langle 0|\Phi(x, \theta_n)|\vec{K}, l, \phi\rangle = \left(\frac{K}{|\vec{K}|}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 0|U^{-1}(\Lambda(\vec{K}))\Phi(x, \theta_n)U(\Lambda(\vec{K}))|\kappa\hat{z}, l, \phi\rangle\tag{4.8}$$

Usando (4.1), (4.2) y (4.6)

$$F(\vec{K}, l, \phi; \theta_n) = F(\kappa\hat{z}, l, \phi; \Gamma_{mn}(\Lambda(\vec{K}))\theta_m)\tag{4.9}$$

donde $\Lambda(\vec{K}) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\alpha J_2} e^{-i\gamma K_3}$.

Veamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-iK \cdot x}}{(2|\vec{K}|)^{\frac{1}{2}}} F(\vec{K}, l, \phi; \theta_n) &= \left(\frac{K}{|\vec{K}|}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 0|U^{-1}(\Lambda(\vec{K}))\Phi(x, \theta_n)U(\Lambda(\vec{K}))|\kappa\hat{z}, l, \phi\rangle \\ &= \left(\frac{K}{|\vec{K}|}\right)^{\frac{1}{2}} \langle 0|\Phi(\Lambda(\vec{K})^\mu{}_\nu x^\nu, \Gamma_{mn}(\Lambda(\vec{K}))\theta_m)|\kappa\hat{z}, l, \phi\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-iK \cdot x}}{(2|\vec{K}|)^{\frac{1}{2}}} F(\kappa\hat{z}, l, \phi; \Gamma_{mn}(\Lambda(\vec{K}))\theta_m) \\ &\Rightarrow F(\vec{K}, l, \phi; \theta_n) = F(\kappa\hat{z}, l, \phi; \Gamma_{mn}(\Lambda(\vec{K}))\theta_m)\end{aligned}$$

La función $F(\kappa\hat{z}, l, \phi; \theta_n)$ puede ser obtenida considerando (3.52), y escribiendo para ϵ_1 y ϵ_2 infinitesimales

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle 0|(\mathbf{1} - i\epsilon_1 L_1 - i\epsilon_2 L_2)\Phi(x, \theta_n)(\mathbf{1} + i\epsilon_1 L_1 + i\epsilon_2 L_2)|\kappa\hat{z}, l, \phi\rangle \\ = (1 + i\epsilon_1 l \cos \phi + i\epsilon_2 l \sin \phi) \langle 0|\Phi(x, \theta_n)|\kappa\hat{z}, l, \phi\rangle.\end{aligned}\tag{4.10}$$

De (4.2) y (4.6) se puede llegar a las siguientes ecuaciones

$$\left\{ [\mathcal{L}_1]_{mn} \theta_m \frac{\partial}{\partial \theta_n} - l \cos \phi \right\} F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0, \quad (4.11)$$

$$\left\{ [\mathcal{L}_2]_{mn} \theta_m \frac{\partial}{\partial \theta_n} - l \sin \phi \right\} F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0. \quad (4.12)$$

o bien usando las formas explicitas de (4.5) después de sumar y restar

$$\left\{ [\mathcal{J}_-^{(A)}]_{mn} \theta_m \frac{\partial}{\partial \theta_n} - \frac{1}{2} i l e^{-i\phi} \right\} F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0, \quad (4.13)$$

$$\left\{ [\mathcal{J}_+^{(B)}]_{mn} \theta_m \frac{\partial}{\partial \theta_n} + \frac{1}{2} i l e^{-i\phi} \right\} F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0. \quad (4.14)$$

Estas ecuaciones al parecer no pueden ser resueltas para $L \neq 0$ si ya sea A o B son cero. Esta descarta cualquier regla de transformación escalar o espinorial de dos componentes para θ_n . Sin embargo, si tomamos θ como un espinor de 4 componentes

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Entonces esto nos dejará

$$\left(\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} i l e^{-i\phi} \right) F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0, \quad (4.16)$$

y

$$\left(\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_4} + \frac{1}{2} i l e^{-i\phi} \right) F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta_n) = 0, \quad (4.17)$$

con solución

$$F(\kappa \hat{z}, l, \phi; \theta) = f(\theta_2, \theta_3) \exp \left[\frac{1}{2} i l \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} e^{-i\phi} - \frac{\theta_4}{\theta_3} e^{-i\phi} \right) \right] \quad (4.18)$$

La función puede $f(\theta_2, \theta_3)$ puede ser determinada especificando el límite $l \rightarrow 0$ de la teoría de campos particular que se este discutiendo. Si para $l = 0$, los estados de espín continuo van a un estado de helicidad λ , $f(\theta_2, \theta_3)$ debe ser proporcional a factores de acoplamiento de $\theta_2^p \theta_3^q$ con $\lambda = (q - p)/2$. Lo anterior permite reproducir las funciones de onda de estados de helicidad convencionales con $l = 0$, de teorías de campo sin masa, multiplicadas por factores de θ .

Como ejemplo, consideremos

$$f(\theta_2, \theta_3) = \theta_2 = \delta_{n2} \theta_n \quad (4.19)$$

Entonces realizando una transformación de Lorentz como en (4.9)

$$F(\vec{k}, 0, \phi; \theta) = \delta_{n2} \Gamma_{mn} (\Lambda(\vec{K}) \theta_m) = u_m(k)_m \quad (4.20)$$

donde $u_m(k)$ es justamente el espinor de helicidad $\frac{1}{2}$ usual. La propiedad de estados de espín continuo están enteramente contenidas en el factor exponencial de (10). Es posible eliminar los factores extra de θ en $f(\theta_2, \theta_3)$ introduciendo el campo con multicomponentes $\Phi_\sigma(x, \theta)$

$$\langle 0 | \Phi_\sigma(x, \theta) | \vec{k}, l, \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ik \cdot x}}{(2|\vec{k}|)^{\frac{1}{2}}} u_\sigma(k) g(\vec{k}, l, \phi; \theta). \quad (4.21)$$

donde $u_\sigma(k)$ es la función de onda convencional correspondiente al estado de helicidad particular obtenido de los estados de espín continuo en el límite $l \rightarrow 0$. La función $g(\vec{k}, l, \phi; \theta)$ es justamente el término exponencial en (4.18) una vez transformado bajo (4.9).

Explícitamente

$$g(\vec{k}, l, \phi; \theta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[G_1(\vec{k}, \theta) e^{-i(\alpha+\phi)} + G_2(\vec{k}, \theta) e^{i(\alpha+\phi)} \right] \right\}. \quad (4.22)$$

donde

$$G_1(\vec{k}, \theta) = \frac{\left(\frac{\kappa}{|\vec{k}|}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_1 \cos \frac{1}{2}\beta + \left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_2 \sin \frac{1}{2}\beta}{\left(\frac{\kappa}{|\vec{k}|}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_2 \cos \frac{1}{2}\beta - \left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_1 \sin \frac{1}{2}\beta} \quad (4.23)$$

$$G_2(\vec{k}, \theta) = -\frac{\left(\frac{\kappa}{|\vec{k}|}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_4 \cos \frac{1}{2}\beta - \left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_3 \sin \frac{1}{2}\beta}{\left(\frac{\kappa}{|\vec{k}|}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_3 \cos \frac{1}{2}\beta + \left(\frac{|\vec{k}|}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_1 \sin \frac{1}{2}\beta} \quad (4.24)$$

con α y β los ángulos azimutal y polar respectivamente.

Las derivaciones anteriores pueden repetidas para los estados de antipartículas creadas por $\Phi_\sigma(x, \theta)$ para los cuales

$$\langle \vec{k}, l, \phi | \Phi_\sigma(x, \theta) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ik \cdot x}}{(2|\vec{k}|)^{\frac{1}{2}}} v_\sigma(k) g(\vec{k}, l, \phi + \pi; \theta) \quad (4.25)$$

donde $v_\sigma(k)$ es la función de onda convencional para antipartículas. El valor de expectación del vacío del conmutador o anticonmutador del campo libre, es obtenido insertando conjuntos completos de estados de partículas y antipartículas, usando entonces (4.21) y (4.25)

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [\Phi_\sigma(x, \theta), \Phi_{\sigma'}^\dagger(x', \theta')]_{\pm} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \Phi_\sigma(x, \theta) \Phi_{\sigma'}^\dagger(x', \theta') | 0 \rangle \pm \langle 0 | \Phi_{\sigma'}^\dagger(x', \theta') \Phi_\sigma(x, \theta) | 0 \rangle \\ &= \int d^3k \int d\phi \langle 0 | \Phi_\sigma(x, \theta) | \vec{k}, l, \phi \rangle \langle \vec{k}, l, \phi | \Phi_{\sigma'}^\dagger(x', \theta') | 0 \rangle \\ & \pm \int d^3k \int d\phi \langle 0 | \Phi_{\sigma'}^\dagger(x', \theta') | \vec{k}, l, \phi \rangle \langle \vec{k}, l, \phi | \Phi_\sigma(x, \theta) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \int d\phi [u_\sigma(k) u_{\sigma'}^*(k) g(\vec{k}, l, \phi; \theta) g^*(\vec{k}, l, \phi; \theta') e^{ik \cdot (x' - x)} \\ & \quad \pm v_\sigma(k) v_{\sigma'}^*(k) g(\vec{k}, l, \phi; \theta) g^*(\vec{k}, l, \phi; \theta') e^{-ik \cdot (x' - x)}] \end{aligned} \quad (4.26)$$

El factor $u_\sigma(k) u_{\sigma'}^*(k)$ es un polinomio en el 4-vector k y satisface [3]

$$u_\sigma(k) u_{\sigma'}^*(k) = (-1)^{2\lambda} v_\sigma(-k) v_{\sigma'}^*(-k). \quad (4.27)$$

4.1. ¿SE PUEDE TENER UN CAMPO PARA PARTÍCULAS DE ESPÍN CONTINUO?

Entonces utilizando la expresión anterior y teniendo en cuenta que K podemos verlo como los generadores de traslaciones en el espacio

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [\Phi_\sigma(x, \theta), \Phi_\sigma^\dagger(x', \theta')]_\pm | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} u_\sigma(i\partial_x) u_{\sigma'}^*(i\partial_x) \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \{e^{i\vec{k}\cdot(x'-x)} - e^{-i\vec{k}\cdot(x'-x)}\} \int d\phi g(\vec{k}, l, \phi; \theta) g^*(\vec{k}, l, \phi; \theta') \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si hacemos

$$C(\vec{k}, l; \theta, \theta') = \int d\phi g(\vec{k}, l, \phi; \theta) g^*(\vec{k}, l, \phi; \theta') \quad (4.29)$$

entonces

$$C(\vec{k}, l; \theta, \theta') = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} il \right)^n \frac{1}{n!} \right]^2 \{ [G_1(\mathbf{K}, \theta) - G_2^*(\mathbf{K}, \theta')] [G_2(\mathbf{K}, \theta) - G_1(\mathbf{K}, \theta')] \}^n. \quad (4.30)$$

Por ejemplo, para un caso especial

$$\theta = \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$C(\mathbf{k}, l; \theta, \theta') = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} il \right)^n \frac{1}{n!} \right]^2 \left[- \left(\frac{4|\mathbf{K}|}{\left(\frac{|\mathbf{K}|^2}{\kappa} - \kappa \right) + \left(\frac{|\mathbf{K}|^2}{\kappa} + \kappa \right) \cos \beta} \right)^2 \right]^n \quad (4.32)$$

De la anterior expresión se puede observar que $C(\mathbf{k}, l; \theta, \theta')$ no es en general un polinomio de orden finito en k , y tampoco es simétrico i.e.

$$C(\mathbf{k}, l; \theta, \theta') \neq C(-\mathbf{k}, l; \theta, \theta') \quad (4.33)$$

Entonces a fin que esta teoría de campos para partículas no masivas con índices de espín continuo sea causal. (4.28) debe desaparecer en tiempos iguales i.e. $x'_0 = x_0$. Luego cambiando \mathbf{k} a $-\mathbf{k}$, la integral a resolver queda como

$$\int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} e^{-i\vec{k}\cdot(x'-x)} [C(\mathbf{k}, l; \theta, \theta') - C(-\mathbf{k}, l; \theta, \theta')] \quad (4.34)$$

Esta integral debe desaparecer para todo $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$. Esto requiere entonces que el factor que multiplica a la exponencial debe ser un polinomio de orden finito en k , lo cual no sucede, entonces podemos concluir que (4.26) no desaparece, excepto para $l = 0$. Por lo que el campo propuesto no respeta causalidad, al menos mediante éste método.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis

- Se ha estudiado la estructura del grupo de Poincaré (álgebra de Lie).
- Se han identificado los operadores de Casimir del grupo de Poincaré definido como W^2 y P^2 , i.e. $[J_{\mu\nu}, W^2] = 0$, $[P_\mu, W^2] = 0$, $[J_{\mu\nu}, P^2] = 0$ y $[P_\mu, P^2] = 0$.
- Se ha identificado la acción del grupo de Poincaré sobre los estados cuánticos. por medio de la construcción del *Little Group*.
- Se han discutido los casos masivos y sin masa, identificando la clasificación de estados por medio de m^2 y espín en el caso masivo y por medio de la helicidad en el caso sin masa.
- Se han identificado las representaciones con espín continuo que aparecen en el caso sin masa, haciendo un primer intento sobre las dificultades para construir una Teoría de campos cuántica para la misma.

Bibliografía

- [1] Quantum Field Theory- S. Weinberg (material avanzado de QFT)
- [2] *Phys.Rev. D*13 (1976) 2291 Massless Particles with Continuous Spin Indices
- [3] Quantum Field Theory- L. Ryder (material básico de QFT)
- [4] arXiv: 1302.477 [hep-th](this is about string theory stating the general absence of these irreps in the perturbative spectrum)
- [5] [hep-th]/0205145 Lars Brink, Abu M. Khan, Pierre Ramond, Xiaozhen Xiong (Continuous Spin Representations of the Poincaré and Super-Poincaré Groups)
- [6] [hep-th]/0410107 Abu M. Khan, Pierre Ramond (Florida U., Inst. Fund. Theor.)
- [7] arXiv:1302.1198 [hep-th] On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes Philip Schuster, Natalia Toro (Perimeter Inst. Theor. Phys.)
- [8] Eugene P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Annals Math.* 40, 149-204 (1939).
- [9] arXiv:1302.1577 [hep-th]. Philip Schuster and Natalia Toro, On the Theory of Continuous-Spin Particles: Helicity Correspondence in Radiation and Forces, (2013),
- [10] Philip Schuster and Natalia Toro, Experimental Constraints on a Continuous-Spin Photon, to appear (2013).
- [11] arXiv:1302.3225 [hep-th],Philip Schuster and Natalia Toro, A Gauge Field Theory of Continuous-Spin Particles (2013)

Apéndice A

Matrices y generadores del grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz se compone de tres rotaciones al rededor de los tres ejes espaciales x, y y z representadas por una matriz R_i y tres boosts representadas por una matriz B_i , con $i = x, y, z$. Los generadores se obtienen mediante las siguientes fórmulas:

$$J_i = \frac{1}{i} \frac{dR_i}{d\theta} \quad (\text{A.1})$$

$$K_i = \frac{1}{i} \frac{dB_i}{d\psi} \quad (\text{A.2})$$

Donde por ejemplo la matriz al rededor del eje z está dada por:

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Un boost en la dirección x i.e. B_x está dada por la siguiente matriz:

$$B_x = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Donde $\cosh \psi = \gamma$, por lo que $\sinh \psi = -\beta\gamma$ además

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

De una manera similar se pueden obtener las matrices restantes tanto de rotaciones como de boosts.

A.1. Generadores del grupo de Lorentz

Generadores de Rotaciones.

$$\begin{aligned}
 J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 & J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2. Generadores de Boost

Generadores de Boosts

$$\begin{aligned}
 K_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 & K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Apéndice B

Relaciones de conmutación entre los operadores de Cassimir del grupo de Poincaré y sus generadores

Definimos el vector de Pauli-Lubanski como:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma} \quad (\text{B.1})$$

Es importante calcular las siguientes reglas de conmutación

$$[W^\mu, W^\nu] = -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma \quad (\text{B.2})$$

$$[W^\mu, P^\alpha] = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$[W^2, J_{\rho\sigma}] = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$[W^2, P^\rho] = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$[P^2, P^\rho] = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$[P^2, J_{\rho\sigma}] = 0 \quad (\text{B.7})$$

Para comprobar (B.2), es necesario usar el siguiente conmutador

$$[W_\mu, J_{\alpha\beta}] = -i(\eta_{\mu\beta} W_\alpha - \eta_{\mu\alpha} W_\beta) \quad (\text{B.8})$$

Veamos la anterior igualdad

$$\begin{aligned}
[W_\mu, J_{\alpha\beta}] &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[P^\nu J^{\rho\sigma}, J_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}[P^\nu J_{\rho\sigma}, J_{\alpha\beta}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}(P^\nu[J_{\rho\sigma}, J_{\alpha\beta}] + [P^\nu, J_{\alpha\beta}]J_{\rho\sigma}) \\
&= i\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}(\eta_{\rho\alpha}J_{\sigma\beta} - \eta_{\rho\beta}J_{\sigma\alpha} - \eta_{\sigma\alpha}J_{\rho\beta} + \eta_{\sigma\beta}J_{\rho\alpha}) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\eta^{\nu\gamma}[P_\gamma, J_{\alpha\beta}]J_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}P^\nu(\eta_{\rho\alpha}J_{\sigma\beta} - \eta_{\rho\beta}J_{\sigma\alpha} - \eta_{\sigma\alpha}J_{\rho\beta} + \eta_{\sigma\beta}J_{\rho\alpha}) - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\eta^{\nu\gamma}(\eta_{\beta\gamma}P_\alpha - \eta_{\alpha\gamma}P_\beta)J_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{i}{2}P^\nu(\epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma J_{\sigma\beta} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\sigma J_{\sigma\alpha} + \epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho J_{\rho\beta} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho J_{\rho\alpha}) - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\delta^\nu{}_\beta P_\alpha J_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\delta^\nu{}_\alpha P_\beta J_{\rho\sigma} \\
&= -iP^\nu(\epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho J_{\rho\beta} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho J_{\rho\alpha}) - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma}P_\alpha J_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma}P_\beta J_{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ahora nos concentramos solo en el término $\epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho J_{\rho\beta} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho J_{\rho\alpha}$, usando propiedades del tensor de Levi-Civita se tiene que:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho J_{\rho\beta} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho J_{\rho\alpha} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho \left(-\frac{1}{4}\epsilon_{\rho\beta\tau\kappa}\epsilon^{\tau\kappa\mu\nu} J_{\mu\nu} \right) - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho \left(-\frac{1}{4}\epsilon_{\rho\alpha\tau\kappa}\epsilon^{\tau\kappa\mu\nu} J_{\mu\nu} \right) \\
&= -\frac{1}{4}[\epsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\rho\epsilon_{\rho\beta\tau\kappa} - \epsilon_{\mu\nu\beta}{}^\rho\epsilon_{\rho\alpha\tau\kappa}]\epsilon^{\tau\kappa\mu\nu} J_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\{-\eta_{\mu\beta}(\eta_{\nu\tau}\eta_{\alpha\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\eta_{\tau\alpha}) - \eta_{\mu\tau}(\eta_{\nu\kappa}\eta_{\beta\alpha} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\kappa\beta}) - \eta_{\mu\kappa}(\eta_{\nu\beta}\eta_{\alpha\tau} - \eta_{\nu\tau}\eta_{\beta\alpha}) \\
&\quad - [-\eta_{\mu\alpha}(\eta_{\nu\tau}\eta_{\beta\kappa} - \eta_{\nu\kappa}\eta_{\tau\beta}) - \eta_{\mu\tau}(\eta_{\nu\kappa}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\nu\beta}\eta_{\kappa\alpha}) - \eta_{\mu\kappa}(\eta_{\nu\alpha}\eta_{\beta\tau} - \eta_{\nu\tau}\eta_{\alpha\beta})]\}\epsilon^{\tau\kappa\mu\nu} J_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}[-\eta_{\mu\beta}\epsilon_{\nu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\beta}\epsilon_{\alpha\nu}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\nu\alpha}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\beta}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \\
&\quad - \eta_{\nu\beta}\epsilon_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\alpha}\epsilon_{\beta\mu}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\nu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\beta\nu}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}] \\
&= -\frac{1}{2}[\eta_{\nu\beta}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\beta}\epsilon_{\nu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\nu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\nu\alpha}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

De las relaciones anteriores se ve que:

$$\begin{aligned}
[W_\mu, J_{\alpha\beta}] &= -\frac{i}{2}P^\nu[\eta_{\nu\beta}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\beta}\epsilon_{\nu\alpha}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\nu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} - \eta_{\nu\alpha}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}] \\
&\quad - \frac{i}{2}(\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma}P_\alpha J_{\rho\sigma} - \epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma}P_\beta J_{\rho\sigma}) \\
&= -\frac{i}{2}\eta_{\mu\beta}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\beta\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma} - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma}P_\beta J_{\rho\sigma} \\
&\quad + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma}P_\alpha J_{\rho\sigma} - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\beta}{}^{\rho\sigma}P_\alpha J_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha}{}^{\rho\sigma}P_\beta J_{\rho\sigma} \\
&= -i\eta_{\mu\beta}\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma} + i\eta_{\mu\alpha}\frac{1}{2}\epsilon_{\beta\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma} \\
&= -i(\eta_{\mu\beta}W_\alpha - \eta_{\mu\alpha}W_\beta)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Ahora procedemos a verificar (B.2)

$$\begin{aligned}
[W^\mu, W^\nu] &= [W^\mu, \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha J_{\beta\gamma}] = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}[W^\mu, P_\alpha J_{\beta\gamma}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\eta^{\mu\rho}(P_\alpha[W_\rho, J_{\beta\gamma}] + [W_\rho, P_\alpha]J_{\beta\gamma}) \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\eta^{\mu\rho}P_\alpha(\eta_{\mu\beta}W_\alpha - \eta_{\mu\alpha}W_\beta) \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha\delta^\mu{}_\gamma W_\beta + \frac{i}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha\delta^\mu{}_\beta W_\gamma \\
&= -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Veamos ahora la relación (B.3)

$$\begin{aligned}
[W^\mu, P^\alpha] &= W^\mu P^\alpha - P^\alpha W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(P_\nu J_{\rho\sigma} P^\alpha - P^\alpha P_\nu J_{\rho\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}(P_\nu J_{\rho\sigma} P_\beta - P_\beta P_\nu J_{\rho\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}(P_\nu J_{\rho\sigma} P_\beta - P_\nu P_\beta J_{\rho\sigma} + P_\nu P_\beta J_{\rho\sigma} - P_\beta P_\nu J_{\rho\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}(P_\nu[J_{\rho\sigma}, P_\beta] + [P_\nu, P_\beta]J_{\rho\sigma}) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}P_\nu[P_\beta, J_{\rho\sigma}] = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}P_\nu(\eta_{\beta\rho}P_\sigma - \eta_{\beta\sigma}P_\rho) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\delta^\alpha{}_\rho P_\nu P_\sigma - \delta^\alpha{}_\sigma P_\nu P_\rho) = \frac{i}{2}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}P_\nu P_\sigma - \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}P_\nu P_\rho) \\
&= \frac{i}{2}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}P_\nu P_\sigma + \epsilon^{\mu\rho\alpha\nu}P_\rho P_\nu) = \frac{i}{2}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\rho}P_\nu P_\rho + \epsilon^{\mu\rho\alpha\nu}P_\rho P_\nu) \\
&= \frac{i}{2}(-\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}P_\rho P_\nu - \epsilon^{\mu\rho\nu\alpha}P_\rho P_\nu) = \frac{i}{2}(\epsilon^{\mu\rho\nu\alpha}P_\rho P_\nu - \epsilon^{\mu\rho\nu\alpha}P_\rho P_\nu) = 0.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

(B.5) y (B.6) se cumplen trivialmente, porque P conmuta consigo mismo, y acabamos de calcular el conmutador de W con P . Por lo que las relaciones de interés son (B.4) y (B.7), veamos

$$\begin{aligned}
[W^2, J_{\rho\sigma}] &= [W^\mu W_\mu, J_{\rho\sigma}] = W^\mu[W_\mu, J_{\rho\sigma}] + [W^\mu, J_{\rho\sigma}]W_\mu \\
&= -iW^\mu(\eta_{\mu\sigma}W_\rho - \eta_{\mu\rho}W_\sigma) + \eta^{\mu\gamma}[W_\gamma, J_{\rho\sigma}]W_\mu \\
&= -iW^\mu(\eta_{\mu\sigma}W_\rho - \eta_{\mu\rho}W_\sigma) - i\eta^{\mu\gamma}(\eta_{\gamma\sigma}W_\rho - \eta_{\gamma\rho}W_\sigma)W_\mu \\
&= -i(W_\sigma W_\rho - W_\rho W_\sigma) - i(W_\rho W_\sigma - W_\sigma W_\rho) = 0.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Dada la similitud entre el conmutador de W_μ con $J_{\rho\sigma}$ y el conmutador de P_μ y $J_{\rho\sigma}$, por un argumento similar al anterior, es posible verificar la relación (B.7), simplemente $W \rightarrow P$.

*CAPÍTULO B RELACIONES DE CONMUTACIÓN ENTRE LOS OPERADORES DE
CASSIMIR DEL GRUPO DE POINCARÉ Y SUS GENERADORES*

Apéndice C

Grupo de Poincaré un punto de vista alternativo

C.1. Grupo de Lorentz Homogeneo

El frente de onda para una señal de luz expandiéndose desde una fuente en el origen de coordenadas, para observadores S y S' obedece la ecuación (la métrica empleada en lo siguiente, es diagonal con componentes (1,1,1,1) donde la primer entrada es temporal, y las restantes son espaciales)

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (\text{C.1})$$

Esto requiere que las coordenadas (ct, x, y, z) y (ct', x', y', z') para los observadores S y S' estén relacionadas por una transformación de Lorentz homogénea

$$\begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

La matriz de transformación $\Lambda_{4 \times 4}$ pertenece al grupo de Lie $so(3,1)$. Los generadores infinitesimales de una operación de grupo en $SO(3,1)$ son

$$\Lambda \rightarrow I_4 + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -ib_1 & -ib_2 & -ib_3 \\ ib_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ ib_2 & -\theta_3 & 0 & +\theta_1 \\ ib_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} = I_4 + \epsilon(\theta \cdot \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}) \quad (\text{C.3})$$

Las transformaciones de Lorentz Homogéneas dejan invariante el producto interno $k \cdot a = \Lambda k \cdot \Lambda a$, donde k y a son 4-vectores y $\Lambda \in SO(3,1)$. Los generadores infinitesimales \mathbf{J}, \mathbf{K} satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [J_i, J_k] &= -\epsilon_{ijl} J_l \\ [J_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= +\epsilon_{ijk} J_k \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

C.1.1. Grupo de Lorentz Homogeneo

Los intervalos son preservados por el grupo de Lorentz Inhomogeneo:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (ct_2 - ct_1)^2 = \text{invariante} \quad (\text{C.5})$$

El grupo de Lorentz Inhomogeneo es formado por las transformaciones de Lorentz homogeneas Λ , junto con traslaciones desde el origen. Las transformaciones de grupo generales pueden ser escritas como una matriz 5×5 , en términos de un 4-vector $a = (ict, x, y, z)$,

$$\{\Lambda, a\} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & ct \\ & & & & x \\ & & & & y \\ & & & & z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (\text{C.6})$$

La regla de composición del grupo es la multiplicación de matrices usual, los resultados siguientes son inmediatos:

$$\begin{aligned} \{\Lambda_2, a_2\}\{\Lambda_1, a_1\} &= \{\Lambda_2\Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1\} \\ \{I, a\}\{\Lambda, 0\} &= \{\Lambda, a\} = \{\Lambda, 0\}\{I, \Lambda^{-1}a\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

El grupo de Lorentz Inhomogeneo es el producto semidirecto del grupo de Lorentz homogeneo y el subgrupo invariante conmutativo de traslaciones en el origen del espacio-tiempo. Los generadores para este subgrupo invariante son $(i\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

El grupo de las transformaciones de Lorentz Inhomogeneas tiene entonces dos subgrupos importantes, el subgrupo de las Transformaciones homogeneas de Lorentz $\{\Lambda, 0\}$, y el subgrupo invariante de traslaciones espacio-temporales $\{I, a\}$. Sus representaciones juegan un rol en la derivación de ecuaciones de campo covariantes relativistas.

C.1.2. Traslaciones

El subgrupo de traslaciones es abeliano, entonces todas sus representaciones unitarias irreducibles son de dimensión 1, y de hecho

$$\Gamma^k(\{I, a\}) = e^{ik \cdot a} \quad (\text{C.8})$$

donde k es un 4-vector que parametriza las representaciones de dimensión 1. Podemos definir un estado base para la representación 1-D Γ^k de $\{I, a\}$ como $ketk$:

$$\{I, a\} |k\rangle = |k'\rangle \langle k'| \{I, a\} |k\rangle = |k'\rangle \delta(k' - k) \Gamma^k(\{I, a\}) = |k\rangle e^{ik \cdot a}. \quad (\text{C.9})$$

Físicamente, k tiene una interpretación natural como el 4-momento del fotón.

C.1.3. Transformaciones de Lorentz homogneas

El álgebra de Lie $D_2 = A_1 + A_1$ es semisimple: es la suma directa de dos álgebras de Lie de tipo A_1 . Podemos construir combinaciones lineales de los generadores infinitesimales \mathbf{J}, \mathbf{K} de $SO(3, 1)$, que son mutuamente conmutativos y que satisfacen relaciones de conmutación de momento angular. Éstas son

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{(1)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}), \\ \mathbf{J}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}).\end{aligned}\tag{C.10}$$

Los cuales satisfacen

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}^{(1)}, \mathbf{J}^{(1)}] &= -\epsilon_{ijk}\mathbf{J}^{(1)} \\ [\mathbf{J}^{(2)}, \mathbf{J}^{(2)}] &= -\epsilon_{ijk}\mathbf{J}^{(2)} \\ [\mathbf{J}^{(1)}, \mathbf{J}^{(2)}] &= 0\end{aligned}\tag{C.11}$$

El álgebra $\mathbf{J}^{(1)}$ tiene representaciones irreducibles D^j de dimensión $2j+1$ mientras que $\mathbf{J}^{(2)}$ tiene representaciones irreducibles $D^{j'}$ de dimensión $2j'+1$. Cualquier elemento en $SO(3, 1)$ puede ser expresado en una representación $D^{jj'}$ de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$ como sigue

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}) &= \exp[(\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(1)} + (\boldsymbol{\theta} - i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(2)}] \\ &= D^j[(\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(1)}]D^{j'}[(\boldsymbol{\theta} - i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(2)}]\end{aligned}\tag{C.12}$$

C.1.4. Representaciones de $SO(3, 1)$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ es isomorfo al álgebra de Lie para el grupo de matrices 2×2 $SL(2; \mathbb{C})$. Tenemos los siguientes dos isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \frac{i}{2}\sigma & \mathbf{J} &= \frac{i}{2}\sigma \\ \mathbf{K} &= -\frac{i}{2}\sigma & \mathbf{K} &= +\frac{i}{2}\sigma\end{aligned}\tag{C.13}$$

Éstos dos isomorfismos nos llevan a los siguientes dos conjuntos inequivalentes de representaciones

$$\begin{aligned}D^{j0} & & D^{0j} \\ \mathbf{K}^{(j)} &= i\mathbf{J}^{(j)} & \mathbf{K}^{(j)} &= -i\mathbf{J}^{(j)}\end{aligned}\tag{C.14}$$

donde \mathbf{J} son las tres matrices de momento angular de $(2j+1)(2j+1)$. Las siguientes matrices estan asociadas con estas representaciones

$$\begin{aligned}D^{j0}[\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}] &= \exp[\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}^{(j)} + \mathbf{b} \cdot (+i\mathbf{J}^{(j)})] = \exp[(\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(j)}] \\ D^{0j}[\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}] &= \exp[\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}^{(j)} + \mathbf{b} \cdot (-i\mathbf{J}^{(j)})] = \exp[(\boldsymbol{\theta} - i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(j)}]\end{aligned}\tag{C.15}$$

Estas representaciones son complejas conjugadas una de otra. La representación mas general de $SO(3, 1)$ es

$$D^{jj'}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{K}) = \exp[(\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(j)}] \exp[(\boldsymbol{\theta} - i\mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}^{(j')}] = D^{jj'}(\Lambda)\tag{C.16}$$

La acción de Λ sobre los estados base a través de la representación $D^{jj'}(\Lambda)$, puede ser calculada como

$$\Lambda |jj'; \mu\mu'\rangle = D_{\nu\nu'; \mu\mu'}^{jj'}(\Lambda) |jj'; \mu\mu'\rangle \quad (\text{C.17})$$

Bajo la restricción de que el subgrupo $SO(3) \subset SO(3, 1)$ ésta representación es reducible en series de Clebsch-Gordon.

$$D^{jj'}(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda \downarrow SO(3)} D^j[SO(3)] \times D^{j'}[SO(3)] = \sum_{j''} D^{jj'}[SO(3)] \quad (\text{C.18})$$

$$|j - j'| \leq j'' \leq j + j'$$

Esta representación permanece irreducible solo si $j' = 0$ o $j = 0$.

C.2. Representaciones del grupo de Poincaré

Construimos dos tipos de representaciones para el grupo de Lorentz inhomogeneo. Estas son las representaciones manifiestamente covariantes y las representaciones unitarias irreducibles.

C.2.1. Representaciones manifiestamente covariantes

Un campo $T_{\mu\nu}$ se dice que es manifiestamente covariante bajo transformaciones del grupo de Lorentz homogéneo $\Lambda \in SO(3, 1)$, si

$$\Lambda T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu'\nu'}(\Lambda x) \Lambda_{\mu'\mu} \Lambda_{\nu'\nu} \quad (\text{C.19})$$

Esto es, las componentes del campo forman una base obvia sobre la cual actúan las transformaciones de Lorentz. El punto en el cual las transformaciones actúan es fijo, pero como el sistema de coordenadas cambia, las coordenadas del punto fijo cambian por $x' = \Lambda x$.

Construimos representaciones manifiestamente covariantes del grupo de Lorentz inhomogeneo, construyendo productos directos de los vectores base

$$|k\rangle \times |jj'; \mu\mu'\rangle \quad (\text{C.20})$$

para los subgrupos $\{I, a\}$ y $\{\Lambda, 0\}$, del grupo de Lorentz inhomogeneo. Definimos la acción del GLI sobre estos estados de producto directos, definiendo la acción de los subgrupos, de las TLH y del de Traslaciones, sobre el momento $|k\rangle$ y los estados de componentes de campo $|jj'; \mu\mu'\rangle$ separadamente.

Definimos la acción de $\{I, a\}$ sobre estos estados por

$$\begin{aligned} \{I, a\} |k\rangle &= e^{ik \cdot a} |k\rangle \\ \{I, a\} |jj'; \mu\mu'\rangle &= |jj'; \mu\mu'\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

La acción de $\{\Lambda, 0\}$ sobre los estados de momento se sigue de

$$\begin{aligned} \{I, a\}[\{\Lambda, 0\} |k\rangle] &= \{\Lambda, 0\}\{I, \Lambda^{-1}a\} |k\rangle \\ &= [\{\Lambda, 0\} |k\rangle] e^{ik \cdot \Lambda^{-1}a} \\ &= [\{\Lambda, 0\} |k\rangle] e^{i\Lambda k \cdot a} = |\Lambda k\rangle e^{i\Lambda k \cdot a}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Si el espacio vectorial que lleva una representación manifiestamente covariante del GLI, tiene los estados

$$|k\rangle |jj'; \mu\mu'\rangle \quad (\text{C.23})$$

entonces todos los estados de la forma

$$|\Lambda k\rangle |jj'; \nu\nu'\rangle \quad (\text{C.24})$$

están también presentes en el espacio vectorial subyacente. La acción de los dos subgrupos sobre los dos tipos de estados se resumen de la siguiente manera

	$ k\rangle$	$ jj'; \mu\mu'\rangle$
$\{I, a\}$	$e^{ik \cdot a} k\rangle$	$\delta_{\nu\nu'; \mu\mu'} jj'; \nu\nu'\rangle$
$\{\Lambda, 0\}$	$ \Lambda k\rangle$	$D_{\nu\nu'; \mu\mu'}^{jj'} jj'; \nu\nu'\rangle$

C.2.2. Representaciones unitarias

Supongamos que tenemos una representación de $\{\Lambda, a\}$ que es unitaria e irreducible. Restrindiéndonos al subgrupo $\{I, a\}$, esta representación se reduce a la suma directa de representaciones irreducibles $\Gamma^k(\{I, a\})$ de $\{I, a\}$. Los estados base son $|k; \xi\rangle$, donde k es definido por la acción de la traslación $\{I, a\}$

$$\{I, a\} |k, \xi\rangle = e^{ik \cdot a} |k; \xi\rangle \quad (\text{C.25})$$

y ξ es un índice de helicidad que distingue diferentes estados con el mismo 4-momento. Una TLH mapea al estado $|k; \xi\rangle$ en un subespacio de estados parametrizados por $k' = \Lambda k$

$$\begin{aligned} \{I, a\}\{\Lambda, 0\} |k; \xi\rangle &= \{\Lambda, 0\}\{I, \Lambda^{-1}a\} |k; \xi\rangle \\ &= e^{ik \cdot \Lambda^{-1}a} \{\Lambda, 0\} |k; \xi\rangle = e^{i\Lambda k \cdot a} \{\Lambda, 0\} |k; \xi\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

como resultado

$$\{\Lambda, 0\} |k; \xi\rangle = M_{\xi, \xi'} |\Lambda k; \xi'\rangle \quad (\text{C.27})$$

donde $M_{\xi, \xi'}$ es una matriz que queda aun por ser determinada. Éste simple cálculo muestra que si el 4-vector k parametriza un estado en un representación irreducible del GLI, entonces los estados k' con

$$k' = \Lambda k \quad (\text{C.28})$$

están también presentes.

Para construir la matriz $M(\Lambda)$, escojemos un 4-vector k^0 para cada uno de los siguientes ca-

sos.

<i>i</i>	$k \cdot k > 0$	$k^0 = (0, 0, 0, 1)$
<i>ii</i>	$k \cdot k = 0, k \neq 0$	$k^0 = (i, 0, 0, 1)$
<i>iii</i>	$k \cdot k < 0$	$k^0 = (i, 0, 0, 0), k^0 = (-i, 0, 0, 0)$
<i>iv</i>	$k \cdot k = 0, k = 0$	$k^0 = (0, 0, 0, 0)$

k^0 es llamado *Little vector*. El efecto de un TLH sobre el estado $|k^0; \xi\rangle$ es determinado escribiendo cada Λ como producto de dos operaciones de grupo

$$\Lambda = C_k H_{k^0} \tag{C.29}$$

donde

$$\begin{aligned} H_{k^0} k^0 &= k^0 \\ C_k k^0 &= k \end{aligned} \tag{C.30}$$

Esto es, H_{k^0} es el *Subgrupo estable* del little vector k^0 y C_k , es un coset representativo que mapea k^0 en k :

$$C_k k^0 = k = \Lambda k^0 \tag{C.31}$$

Los little groups (grupos estables) de los little vectors k^0 son

- (i) $SO(2, 1)$
- (ii) $ISO(2)$
- (iii) $SO(3)$
- (iv) $SO(3, 1)$.

Estos subgrupos son determinados como sigue.

Caso (i), Un elemento arbitrario en el subgrupo de Lie actuando sobre k^0 debe dejarlo invariante. Linealizando, un elemento en el álgebra de Lie debe aniquilar k^0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -ib_1 & -ib_2 & -ib_3 \\ ib_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ ib_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ ib_3 & +\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib_3 \\ -\theta_2 \\ +\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.32}$$

El subálgebra que deja k^0 fijo es definido por $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, y b_1, b_2, b_3 arbitrarios. Éste es el subgrupo de tres dimensiones $SO(2, 1)$ el cual consiste de los generadores de rotaciones alrededor del eje z y boost en las direcciones x e y .

Caso (ii) Aplicando los mismos argumentos, encontramos

$$\begin{pmatrix} 0 & -ib_1 & -ib_2 & -ib_3 \\ ib_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ ib_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ ib_3 & +\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_2 - b_1 \\ +\theta_1 - b_2 \\ -b_3 \\ -ib_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.33}$$

El subálgebra estable es definido por

$$\begin{aligned} b_3 &= 0 \\ b_2 &= +\theta_1 \\ b_1 &= -\theta_2 \end{aligned} \tag{C.34}$$

Un elemento general en esta subálgebra es

$$\begin{pmatrix} 0 & i\theta_2 & -i\theta_1 & 0 \\ -i\theta_2 & 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ i\theta_1 & -\theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & i\theta_2 & -i\theta_1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_i \theta_i Y_i \tag{C.35}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= J_2 + K_1 \\ Y_2 &= J_1 - k_2 \\ Y_3 &= J_3 \end{aligned} \tag{C.36}$$

Los operadores Y_i , obedecen las relaciones de conmutación.

$$\begin{aligned} [Y_3, Y_1] &= -Y_2 \\ [Y_3, Y_2] &= +Y_1 \\ [Y_1, Y_2] &= 0 \end{aligned} \tag{C.37}$$

Estas son las relaciones de conmutación para el grupo $ISO(2)$, el grupo de movimiento inhomogeneo del plano Euclideano R^2 .

Caso (iii) Procediendo de igual manera

$$\begin{pmatrix} 0 & +\theta_3 & -\theta_2 & ib_1 \\ -\theta_3 & 0 & +\theta_1 & ib_2 \\ +\theta_2 & -\theta_1 & 0 & ib_3 \\ -b_1 & ib_2 & -b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.38}$$

El subálgebra definido por $\mathbf{b} = 0$ es generado por los operadores de momento \mathbf{J} . Éste es $\mathfrak{su}(2)$.

Caso (iv) Este es el mas simple caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & +\theta_3 & -\theta_2 & ib_1 \\ -\theta_3 & 0 & +\theta_1 & ib_2 \\ +\theta_2 & -\theta_1 & 0 & ib_3 \\ -b_1 & ib_2 & -b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.39}$$

El little Group de este vector es el grupo homogeneo de Lorentz entero $SO(3, 1)$. La acción del little group sobre el subespacio de estados $ketk^0, \xi$ es ;

$$H_{k^0} |k^0, \xi\rangle = D_{\xi\xi'}(H_{k^0}) |H_{k^0}k^0; \xi\rangle = D_{\xi\xi'}(H_{k^0}) |k^0; \xi\rangle \tag{C.40}$$

La representación del grupo inhomogeneo de Lorentz es unitaria e irreducible si y sólo si la representación $D_{\xi\xi'}(H_{k^0})$ del little group es unitaria e irreducible.

Las representaciones irreducibles unitarias para el grupo $SU(2)$, el cual es el little group para una partícula masiva en reposo, son descritas por un entero o semi-entero $:j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ Recordando que el momento angular j es una propiedad de cada partícula masiva.

Consideramos ahora el caso de partículas de masa cero con mas detalle. Las representaciones unitarias irreducibles de $ISO(2)$ son construídas siguiendo el método del little group. Como $ISO(2)$ tiene un subgrupo invariante de traslación de dos dimensiones, los estados base en una representación irreducible puede ser etiquetados por un vector $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ en un espacio Euclideo de dos dimensiones, $\kappa \in \mathbb{R}^2$, $\kappa \cdot \kappa \geq 0$. Si un estado $|\kappa\rangle$ esta en una representación tal, entonces todos los estados $|k'\rangle$ tambien para los cuales $\kappa' \cdot \kappa' = \kappa \cdot \kappa$. Esto es, $\kappa' = (\kappa'_1, \kappa'_2)$ es relacionado a $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ mediante una rotación: $\kappa' = R(\theta)\kappa$. El intervalo invariante $\kappa \cdot \kappa$ parametriza la representación.

Dos posibilidades surgen

$$\begin{aligned} (i) \quad \kappa \cdot \kappa > 0 & \quad \text{little group} = \text{Identidad} \\ (ii) \quad \kappa \cdot \kappa = 0 & \quad \text{little group} = ISO(2) \end{aligned} \tag{C.41}$$

El primer caso nos presenta dos problemas. Primero κ^2 es un número cuántico continuo, y no existen hasta ahora partículas conocidas con un índice de espín continuo, si $\kappa^2 > 0$ debe haber un número infinito de estados con el mismo índice de espín continuo, para cada valor del 4-momento. Por lo tanto requerimos que $\kappa = 0$, esto nos deja con las siguientes representaciones físicas permitidas del little group ($Y_1 \rightarrow 0, Y_2 \rightarrow 0$)

$$\exp(\theta_3 Y_3 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2) = e^{i\xi\theta_3} \tag{C.42}$$

donde ξ es un entero o semi-entero.

El coset representativo C_k los subespacios de 4-vectores:

$$C_{k'}^{-1} \Lambda C_k = H_{k^0} = \exp(\Theta J_3 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2) \rightarrow e^{i\xi\Theta} \tag{C.43}$$

C.2.3. Propiedades de transformación

El espacio de Hilbert que lleva una representación irreducible unitaria de una partícula sin masa con helicidad ξ contiene todos los estados de la forma

$$\begin{aligned} |k; \xi\rangle, \quad k = \Lambda k^0 \\ k^0 = (0, 0, 1, \pm i) \end{aligned} \tag{C.44}$$

El espacio vectorial que lleva una representación covariante manifiesta de una partícula sin masa con índices de transformación (j, j') contiene todos los estados de la forma

$$\begin{aligned} |k\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle \quad k = \Lambda k^0 \\ k^0 = (0, 0, 1, \pm i) \end{aligned} \tag{C.45}$$

Para comparar estas dos maneras de describir partículas sin masa, comparamos propiedades de transformación de sus estados.

$$\mathbf{A} \{H_{k^0}, 0\} \text{ sobre } |k^0; \xi\rangle \quad \{H_{k^0}, 0\} |k^0; \xi\rangle = e^{i\xi\Theta} \tag{C.46}$$

donde $H_{k^0} = \exp(\Theta J_3 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2)$.

\mathbf{B} $\{H_{k^0}, 0\}$ sobre $|k^0\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle$. El little group mapea k^0 a k^0 pero actúa en una manera no

trivial sobre los estados de espín.

$$\{H_{k^0}, 0\} |k^0\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle = D_{\nu\nu'; \mu\mu'}^{jj'}(H_k^0) |k^0\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle \quad (C.47)$$

La representación del producto directo $D^{jj'}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^{j0}(H_{k^0}) &= \exp\left(\theta_3 J_3^{(j)} + \theta_1(J_1^{(j)} + iJ_2^{(j)}) + \theta_2((J_2^{(j')} - iJ_1^{(j')})\right) \\ &= \exp\left(\theta_2 J_3^{(j')} + (\theta_1 - i\theta_2)(J_1^{(j')} + iJ_2^{(j')})\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{ij\theta_3} & * & * & * & * \\ & e^{i(j-1)\theta_3} & * & * & * \\ & & \ddots & * & * \\ & & & \ddots & * \\ & & & & e^{-ij\theta_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C.48)$$

$$\{H_{k^0}, 0\} |k^0\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle = D_{\nu\nu'; \mu\mu'}^{jj'}(H_k^0) |k^0\rangle |j, j'; \mu\mu'\rangle \quad (C.49)$$

La representación del producto directo $D^{jj'}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^{0j'}(H_{k^0}) &= \exp\left(\theta_3 J_3^{(j')} + \theta_1(J_1^{(j')} - iJ_2^{(j')}) + \theta_2((J_2^{(j)} + iJ_1^{(j)})\right) \\ &= \exp\left(\theta_2 J_3^{(j)} + (\theta_1 + i\theta_2)(J_1^{(j)} - iJ_2^{(j)})\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{ij\theta_3} & & & & \\ * & e^{i(j-1)\theta_3} & & & \\ * & * & \ddots & & \\ * & * & * & \ddots & \\ * & * & * & * & e^{-ij\theta_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C.50)$$

Comparando las anteriores ecuaciones, alcanzamos las siguientes conclusiones.

El estado $|k^0\rangle |j, 0; j, 0\rangle$ transforman idénticamente a $|k^0; \xi\rangle$ si $\xi > 0$ y $j = +\xi$.

El estado $|k^0\rangle |0, j'; 0, -j'\rangle$ transforman idénticamente a $|k^0; \xi\rangle$ si $\xi < 0$ y $j' = -\xi$.

Si $|\Psi\rangle$ es cualquier estado físico, éste puede ser generado en terminos de los estados base de helicidad $|k; \xi\rangle$ o bien en el producto directo de los estados $|k\rangle |j, j'; \mu, \mu'\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{k, \xi} |k; \xi\rangle \langle k; \xi | \psi \rangle \quad (C.51)$$

$$|\psi\rangle = \sum_{k, \mu\mu'} |k\rangle |jj'; \mu\mu'\rangle \langle k; jj'; \mu\mu' | \psi \rangle \quad (C.52)$$

Las amplitudes de la proyección de $|\psi\rangle$ sobre la base de estados son $\langle k; \xi | \psi \rangle$ en el primer caso y $\langle k; jj'; \mu\mu' | \psi \rangle$ en el segundo. En ambos casos la suma se extiende sobre todos los vectores k para los cuales $\Lambda k \cdot \Lambda k = 0, k \neq 0$. En el primer caso la suma se extiende sobre los estados de helicidad apropiados $\xi (\xi = \pm$ para fotones). En el segundo caso sobre los valores apropiados de μ, μ' : $-j \leq \mu \leq +j, -j' \leq \mu' \leq +j'$.

Para cuando $\xi = j > 0$, la amplitud $\langle k^0; j | \psi \rangle$ del estado $|k^0; j\rangle$ en cualquier estado físico $|\psi\rangle$ puede ser arbitraria. Esto es simplemente la amplitud de la partícula sin masa de helicidad j en el estado $|psi\rangle$. La amplitud $\langle k^0; j0; j0 | \psi \rangle$ en el mismo estado físico es la misma. Las amplitudes de los estados $\langle k^0; j0; m0 | \psi \rangle, m \neq j$, debe desaparecer. Estos estados son todos superfluos-

permitidos en la representación covariante manifiesta pero no en el espacio de Hilbert que lleva la representación irreducible unitaria. Una simple manera lineal para reforzar esta condición sobre las amplitudes superfluas es requerir que

$$\left\{ J_3^{(j)} k_3^0 - j k_4^0 I_{2j+1} \right\} \langle k^0; j0; m0 | \psi \rangle = 0 \quad (\text{C.53})$$

Para el caso de estados de helicidad negativa $\xi = -j$ tenemos por un argumento similar

$$\left\{ J_3^{(j)} k_3^0 - j k_4^0 I_{2j+1} \right\} \langle k^0; 0j'; 0m' | \psi \rangle = 0 \quad (\text{C.54})$$