



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**“Estudio de las avalanchas  
termomagnéticas en superconductores  
anisótropos”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

P R E S E N T A:

**M.C. RAÚL CORTÉS MALDONADO**

Dirigida por:  
**Dr. Felipe Pérez Rodríguez**

Puebla, Pue.

Marzo 2015

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”**

**Estudio de las avalanchas  
termomagnéticas en  
superconductores anisótropos**

Tesis presentada por

**Raúl Cortés Maldonado**

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias  
(Física)**

Dirigida por

**Dr. Felipe Pérez Rodríguez**

Puebla, México  
Marzo 2015

©2015 - Raúl Cortés Maldonado

Derechos Reservados

## Agradecimientos

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y al Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas” por abrirme sus puertas para realizar mis estudios de doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca otorgada para poder llevar a cabo mis estudios de doctorado y por el apoyo parcial recibido a través del proyecto CB-2012-01-183673. A la Vicerrectoría de Estudios de Posgrado de la BUAP y al Cuerpo Académico de Materiales Avanzados del IFUAP por el apoyo parcial recibido a través del proyecto VIEP-BUAP con el número GAVV-EXC 13-I, PIFI 2011 y PIFCA 2012.

Agradezco a los Drs. Roberto Escudero, Adam Nabilek, Umapada Pal por las facilidades brindadas para llevar a cabo las mediciones magnéticas en sus respectivos laboratorios y, al Dr. Viktor Chabanenko por sus valiosas enseñanzas en el ámbito experimental.

De forma particular agradezco al Dr. Felipe Pérez Rodríguez por su invaluable vocación de enseñanza, por su apoyo y consejos.



*Dedicado a  
la memoria de Lalo, a mis padres y hermanos por su apoyo y enseñanzas.  
Dedicado a mi esposa por su amor, comprensión y apoyo incondicional.  
A mi hijo por alegrar y fortalecer mi día a día. A todos aquellos que han  
sido un ejemplo de vida y superación.*



# Estudio de las avalanchas termomagnéticas en superconductores anisótropos

Raúl Cortés Maldonado

Instituto de Física, Ing. Luis Rivera Terrazas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Puebla, México

2015

## Resumen

Esta tesis presenta el estudio teórico y experimental de las propiedades magnéticas de superconductores convencionales de baja temperatura crítica. En el estudio experimental, mediciones magnéticas en geometría paralela y perpendicular se realizan en un superconductor tipo-I de Ta y en un superconductor tipo-II sin enclavamiento de Nb, las dos muestras superconductoras son de forma cilíndrica. Se analiza, en ambos superconductores, el comportamiento irreversible y reversible de la magnetización en geometría paralela y perpendicular, respectivamente. Además, se investiga la dependencia en la temperatura y la influencia de la barrera geométrica en las curvas de magnetización en ambas configuraciones.

En el aspecto teórico, se estudia la respuesta magnética de un bloque superconductor tipo-II duro e irreversible sometido a un campo magnético rotante. El estudio se ha llevado a cabo en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original (MECEO) y elíptico extendido (MECEE) para explicar los resultados experimentales en un disco superconductor de PbBi, el cual rota en presencia de un campo magnético fijo paralelo a sus superficies. Resultados experimentales de la supresión del momento magnético por un campo transversal en la misma muestra, se reproducen teóricamente al aplicar el MECEO y MECEE. Además, se estudia el comportamiento de la magnetización promedio, correspondiente a los estados iniciales diamagnético y paramagnético en un campo transversal específico  $H_z$ . Un estudio similar es llevado a cabo en un bloque superconductor semirreversible tipo-II para explicar los resultados experimentales obtenidos en un disco de PbIn rotando en presencia de un campo

magnético aplicado paralelo a sus superficies. En este estudio, el perfil inicial de la inducción magnética se obtiene después del enfriamiento en campo. Por consiguiente, el perfil es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial.

El estudio teórico de las avalanchas de flujo termomagnético, en un bloque superconductor tipo-II irreversible sometido a campos magnéticos cruzados, se realiza al aplicar el MECEO y al acoplar las ecuaciones de Maxwell con la ecuación de difusión de calor de Fourier con un término asociado a la disipación de calor por efecto Joule. El estudio teórico permite explicar los resultados experimentales en un cubo de NbTi, el cual es magnetizado inicialmente y posteriormente se rota  $90^\circ$  con el fin de aplicar un campo perpendicular a la magnetización remanente. El estudio teórico reproduce, en buen acuerdo con el experimento, los saltos de flujo observados en las curvas de magnetización experimentales. El efecto del corte de líneas de flujo se analiza en términos de los perfiles de la inducción magnética.

# Study of thermomagnetic avalanches in anisotropic superconductors

Raúl Cortés Maldonado

Instituto de Física, Ing. Luis Rivera Terrazas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Puebla, México

2015

## Abstract

This thesis presents the experimental and theoretical study of magnetic properties of conventional superconductors of low critical temperature. In the experimental study, magnetic measurements in parallel and perpendicular geometry were performed in a  $Ta$  type-I superconductor and Nb type-II superconductor, both samples are cylindrical. The irreversible and reversible behavior of the magnetization is analyzed in both geometries and superconductors. In addition, the temperature dependence and the influence of geometric barrier on magnetization curves in both configurations are investigated.

On the theoretical side, the magnetic response of irreversible type-II superconductor slabs subjected to in-plane rotating magnetic field is investigated by applying the original elliptic and extended-elliptic flux-line-cutting critical-state models (OECSM and EECSM, respectively). Specifically, the models have been applied to explain experiments on a PbBi rotating disk in a fixed magnetic field  $\mathbf{H}_a$ , parallel to the flat surfaces. Experimental results of the suppression of the remanent magnetization by a sweeping external transverse magnetic field in the same sample are theoretically reproduced within the frame of OECSM and EECSM. Besides, the behavior of the magnetization, corresponding to diamagnetic and paramagnetic initial states at a static bias field  $H_z$ , is investigated. A similar study is carried out in a semi-reversible type-II superconductor slab to explain experimental results on a PbIn rotating disk in a fixed magnetic field, parallel to its flat surfaces. In this study, the initial profile of magnetic induction is obtained after field cooling. Therefore, the profile is homo-

geneous at  $T > T_c$  and at  $T < T_c$  the profile is altered because of a partial Meissner effect.

The theoretical study of thermomagnetic flux avalanches in an irreversible type-II superconducting slab is carried out by applying the OECSM and coupling Maxwell equations with Fourier's thermal diffusion equation having a dissipative term associated to heat dissipation by Joule effect. This theoretical study allows to explain experimental results for a NbTi cube, which is initially magnetized and, subsequently, is rotated  $90^\circ$  in order to apply a transversal magnetic field to the residual magnetization. The theoretical predictions are in good agreement with experiment. The profiles of the magnetic induction are analyzed to find out the influence of the flux-cutting effect in the generation of thermomagnetic avalanches.

## Publicaciones

- R. Cortés-Maldonado, J. E. Espinosa-Rosales, A. F. Carballo-Sánchez, and F. Pérez-Rodríguez, “Flux-cutting and flux-transport effects in type-II superconductor slabs in a parallel rotating magnetic field”, *Low Temperature Physics*, **37**, 947 (2011).
- R. Cortés-Maldonado, “Respuesta magnética de superconductores tipo-II semi-irreversibles sometidos a campos rotantes”, *Temas actuales de la Física y la Ciencia de Materiales*, (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2013), pág. 15. ISBN: 978-607-487-534-8.
- R. Cortés-Maldonado, O. De la Peña-Seaman, V. García Vázquez, and F. Pérez-Rodríguez, “On the extended elliptic critical-state model for hard superconductors”, *Supercond. Sci. Technol.*, **26**, 125001 (2013).
- V. Chabanenko, E. Kuchuk, V. V. Yurchenko, P. Mikheenko, I. Abal’osheva, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, J. Karpinski, N. D. Zhigadlo, S. Katrych and R. Puźniak, “Magnetic field penetration in MgB2 single crystals: Pinning and Meissner holes”, *Low Temperature Physics*, **40**, 621 (2014).

## Participación en eventos

- The magnetic response of irreversible type-II superconductors in a parallel rotating magnetic field, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, XIX International Materials Research Congress, Cancún, México (2011).
- Response of irreversible and semi-reversible type-II superconductors subjected to rotating magnetic field, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Canadian-American-Mexican (CAM) Graduate Student Physics Conference, Washington, D.C., EUA (2011).

- Response of irreversible type-II superconductors subjected to a parallel rotating and crossed magnetic field, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Innovations in Strongly Correlated Electronic Systems: School and Workshop, Trieste, Italia (2012).
- Magnetic response of type-II superconductors subjected to crossed fields, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Berdyansk State Pedagogical University (BSPU), Berdyansk, Ucrania (2012).
- Respuesta magnética de superconductores tipo II en presencia de campos magnéticos rotantes y cruzados, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Sexto Taller de Física de la Materia Condensada y Molecular, Cuernavaca, Morelos, México (2013).
- Respuesta magnética de superconductores tipo-II en presencia de campos magnéticos rotantes y cruzados, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Reunión del Cuerpo Académico de Materiales Avanzados, IFUAP. 16 de Enero de 2013.
- Magnetic behavior of type-II superconductors of arbitrary shape, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, Canadian-American-Mexican (CAM) Graduate Student Physics Conference, Waterloo, Canadá (2013).
- Hysteresis of magnetic moment of superconducting Nb and Ta cylinders, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, V.V. Chabanenko, S.V. Vasiliev, A. Nabialek, R. Escudero, F. Morales, Yu. F. Revenko, H. Szymczak, XVI National Conference On Superconductivity: Unconventional Superconductivity and Strongly Correlated Systems, Zakopane, Polonia (2013).
- Magnetic field penetration in  $MgB_2$  single crystals: pinning and Meissner holes, V. Chabanenko, E. Kuchuk, V. V. Yurchenko, P. Mikheenko, I. Abal'osheva, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, J. Karpinski, N. D. Zhigadlo, S. Katrych and R. Puźniak, XVI National Conference On Superconductivity: Unconventional Superconductivity and Strongly Correlated Systems, Zakopane, Polonia (2013).

- Manifestation of flux-line cutting and flux-transport in semi-reversible type-II superconductors, R. Cortés-Maldonado, *Advanced Topics in Magnetism and Superconductivity*, Bariloche, Argentina (2014)
- Flux-line cutting effect on thermomagnetic avalanches, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, R. Escudero, F. Morales, V. V. Chabanenko, S.V. Vasiliev, A. Nabialek, *27th International Conference on Low Temperature Physics*, Buenos Aires, Argentina (2014)
- Magnetic properties of NbTi alloy: the structure of boundary between Meissner phase and Bean phase, Meissner holes, R. Cortés-Maldonado, F. Pérez-Rodríguez, O. I. Kuchuk, V. V. Chabanenko, I. Abalosheva, V.F. Rusakov, A. Nabialek, A. Abaloshev, *XXIII International Materials Research Congress*. 17-21 Agosto 2014, Cancún, México.
- Estudio de las avalanchas termomagnéticas en superconductores anisótropos, R. Cortés Maldonado, *Seminario de Estudiantes del IFUAP*, 10 de febrero de 2015.



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| Índice de figuras . . . . .   | XVIII     |
| <b>1. Generalidades del estado superconductor</b>                           | <b>1</b>  |
| 1.1. Propiedades del estado superconductor . . . . .                        | 1         |
| 1.1.1. Resistencia cero . . . . .   | 2         |
| 1.1.2. Efecto Meissner . . . . .  | 2         |
| 1.2. Parámetros críticos . . . . .  | 3         |
| 1.2.1. Temperatura crítica, $T_c$ . . . . .                                 | 4         |
| 1.2.2. Campo crítico, $H_c$ . . . . .                                       | 4         |
| 1.2.3. Densidad de corriente crítica, $J_c$ . . . . .                       | 5         |
| 1.3. Superconductores tipo-I y el estado intermedio . . . . .               | 6         |
| 1.3.1. Superconductores tipo-I ideales . . . . .                            | 6         |
| 1.3.2. Superconductores tipo-I no ideales . . . . .                         | 8         |
| 1.4. Superconductores tipo-II y el estado mixto . . . . .                   | 8         |
| 1.4.1. Superconductores tipo-II ideales . . . . .                           | 9         |
| 1.4.2. Superconductores tipo-II no ideales . . . . .                        | 10        |
| 1.5. Teoría de Ginzburg-Landau . . . . .                                    | 15        |
| 1.5.1. Longitudes características . . . . .                                 | 17        |
| 1.6. Modelos de estado crítico . . . . .                                    | 18        |
| 1.6.1. Modelo de estado crítico de Bean . . . . .                           | 18        |
| 1.6.2. Modelos para la densidad de corriente . . . . .                      | 19        |
| 1.7. Avalanchas de flujo termomagnético . . . . .                           | 20        |
| 1.7.1. Criterios de inestabilidad . . . . .                                 | 23        |
| <b>2. Superconductores tipo-I</b>   | <b>25</b> |
| 2.1. Estructura topológica del estado intermedio en superconductores tipo-I | 26        |
| 2.2. Supra espuma (espuma superconductora) . . . . .                        | 29        |
| 2.3. Resultados experimentales . . . . .                                    | 31        |
| 2.3.1. Curvas de magnetización en geometría paralela . . . . .              | 32        |
| 2.3.2. Curvas de magnetización en geometría perpendicular . . . . .         | 37        |
| 2.3.3. Diagrama de fases . . . . .  | 40        |
| 2.4. Discusión . . . . .  | 42        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>3. Superconductores tipo-II sin enclavamiento</b>   | <b>44</b>  |
| 3.1. Resultados experimentales . . . . .   | 44         |
| 3.1.1. Curvas de magnetización en geometría paralela . . . . .   | 45         |
| 3.1.2. Geometría perpendicular . . . . .   | 49         |
| 3.1.3. <i>Efecto pico</i> en la densidad de corriente crítica . . . . .  | 50         |
| 3.1.4. Diagrama de fases . . . . .   | 52         |
| 3.2. Discusión . . . . .   | 55         |
| <b>4. Superconductores tipo-II con enclavamiento fuerte</b>  | <b>57</b>  |
| 4.1. Respuesta magnética de superconductores duros sometidos a campos rotantes . . . . .                               | 57         |
| 4.1.1. Formalismo teórico . . . . .  | 58         |
| 4.1.2. Revisión de resultados experimentales . . . . .   | 62         |
| 4.1.3. Predicciones teóricas . . . . .   | 65         |
| 4.1.4. Perfiles de inducción magnética . . . . .   | 69         |
| 4.2. Respuesta magnética de superconductores duros sometidos a campos cruzados . . . . .                               | 74         |
| 4.2.1. Formalismo teórico . . . . .  | 74         |
| 4.2.2. Supresión de la magnetización remanente por un campo transversal . . . . .                                      | 76         |
| 4.2.3. Estados iniciales paramagnético y diamagnético . . . . .  | 81         |
| <b>5. Superconductores tipo-II semirreversibles (enclavamiento moderado)</b>   | <b>88</b>  |
| 5.1. Modelos de estado crítico elíptico original y elíptico extendido . . . . .  | 88         |
| 5.2. Formalismo teórico . . . . .  | 89         |
| 5.3. Resultados numéricos y comparación con el experimento . . . . .   | 91         |
| 5.3.1. Predicciones teóricas . . . . .   | 95         |
| 5.4. Discusión . . . . .   | 99         |
| <b>6. Efecto Meissner y la densidad de corriente local en superconductores tipo-II semirreversibles</b>                | <b>100</b> |
| 6.1. Respuesta magnética de superconductores semi-reversibles tipo-II sometidos a campos rotantes . . . . .            | 101        |
| 6.1.1. Formalismo teórico . . . . .  | 101        |
| 6.1.2. Modelo elíptico original . . . . .  | 103        |
| 6.1.3. Resultados numéricos y comparación con el experimento . . . . .   | 104        |
| 6.1.4. Predicciones teóricas y modelado de los parámetros . . . . .  | 107        |
| 6.1.5. Perfiles de la inducción magnética . . . . .  | 110        |
| 6.2. Respuesta magnética de superconductores semirreversibles tipo-II sometidos a campos magnéticos cruzados . . . . . | 115        |
| 6.2.1. Formalismo teórico . . . . .  | 115        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 6.2.2.    | Supresión de la magnetización remanente por un campo magnético transversal . . . . .    | 116        |
| 6.2.3.    | Evolución de los perfiles de la inducción magnética . . . . .                           | 117        |
| <b>7.</b> | <b>Efecto del corte de líneas de flujo en avalanchas termomagnéticas</b>                | <b>120</b> |
| 7.1.      | Avalanchas de flujo en un cubo de NbTi . . . . .  | 121        |
| 7.1.1.    | Formalismo teórico . . . . .  | 121        |
| 7.1.2.    | Resultados numéricos y comparación con el experimento . . .                             | 123        |
| 7.1.3.    | Perfiles de inducción magnética . . . . .   | 128        |
| 7.2.      | Avalanchas de flujo termomagnético en un cilindro de NbTi . . . . .                     | 131        |
| 7.2.1.    | Resultados experimentales . . . . .   | 131        |
| 7.2.2.    | Predicciones teóricas . . . . .   | 133        |
| <b>8.</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>134</b> |
| 8.1.      | General . . . . .   | 134        |
| 8.2.      | Particulares . . . . .  | 135        |
| 8.2.1.    | Capítulo 2 . . . . .  | 135        |
| 8.2.2.    | Capítulo 3 . . . . .  | 135        |
| 8.2.3.    | Capítulo 4 . . . . .  | 136        |
| 8.2.4.    | Capítulo 5 . . . . .  | 138        |
| 8.2.5.    | Capítulo 6 . . . . .  | 138        |
| 8.2.6.    | Capítulo 7 . . . . .  | 139        |
| <b>9.</b> | <b>Apéndices</b>  | <b>141</b> |
| 9.1.      | Curvas de magnetización estándar para un cilindro de Nb en geometría paralela . . . . . | 141        |
| 9.2.      | Programa en ambiente gráfico para el cálculo de curvas de magnetización                 | 143        |
| 9.3.      | Publicaciones . . . . .   | 149        |
| 9.4.      | Artículos en preparación . . . . .  | 186        |
|           | <b>Bibliografía</b>   | <b>199</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Efecto Meissner en un superconductor. . . . .  | 3  |
| 1.2. Dependencia en la temperatura de la resistencia eléctrica. . . . .   | 5  |
| 1.3. Dependencia en la temperatura del campo magnético crítico para a) un superconductor tipo-I y b) un superconductor tipo-II. . . . .   | 6  |
| 1.4. a) Estado intermedio de una hoja de aluminio al aplicar un campo magnético perpendicular. El grosor de la hoja es de $2.9 \times 10^{-5}$ (Tomada de ). b) Diagrama de fase magnético de una película con factor de demagnetización $N = 0.9$ en un campo magnético perpendicular. El valor grande del factor de demagnetización causa que el estado intermedio sea muy amplio (Tomada de ). . . . . | 7  |
| 1.5. a) Curva de magnetización de un SC tipo-I ideal. b) Curva de magnetización de un SC tipo-I ideal con un factor de demagnetización no nulo. . . . .   | 8  |
| 1.6. Curva de magnetización de un SC tipo-I no ideal. . . . .   | 9  |
| 1.7. a) Inducción magnética y b) Magnetización de un superconductor tipo-II ideal en la temperatura $T$ . . . . .   | 10 |
| 1.8. a) Inducción magnética y b) Magnetización de un superconductor tipo-II no ideal en la temperatura $T$ . En el panel $b$ la curva negra corresponde a la curva diamagnética, la roja a la curva paramagnética y la azul a la curva híbrida de la magnetización. . . . .   | 11 |
| 1.9. a) Arreglo de los vórtices en una red triangular b) Red de vórtices triangular en un campo magnético de 200 Oe en una muestra de $MgB_2$ reportada por L. Ya. Vinnikov et al. . . . .  | 12 |

|   |    |
|---|----|
| 1.10. Izquierda. Enclavamiento fuerte debido a defectos individuales que producen un desplazamiento grande en la red de vórtices. El vector $\mathbf{r}$ denota la posición de la red no perturbada, la cual se encuentra lejos con respecto a la impureza; el desplazamiento $\mathbf{u}$ tiene dirección opuesta. Derecha. Enclavamiento débil debido a un desorden puntual. Las fuerzas $f$ procedentes de diferentes impurezas compiten debido a la propiedad elástica de la red de vórtices, por lo tanto las fuerzas se suman aleatoriamente dentro del volumen de enclavamiento colectivo. (Tomada de ) . . . . .  | 14 |
| 1.11. Proceso del corte de líneas de flujo en un modelo de intersección y reconexión (Figura tomada de ). . . . .   | 15 |
| 1.12. Modelo de Bean. (a) Distribución de flujo (parte superior) y su correspondiente distribución de corriente (parte inferior) después de aplicar un campo externo $B_a$ . (b) Situación similar a la presentada en (a) etiquetada como (1); la etiqueta 2 corresponde a un incremento en el campo desde $B_a$ hasta $B_P$ donde el flujo magnético penetra hasta el centro de la muestra, en esta situación toda la muestra se encuentra en el estado crítico; la etiqueta (3) corresponde a un incremento del campo desde $B_a$ hasta $B_m > B_P$ . (c) Efecto producido al disminuir el campo aplicado, casos (1) y (2) para diferentes cantidades (Figura tomada de ) . . . . . | 20 |
| 1.13. Histéresis magnética para una muestra de Nb-50 %Ti en donde se observan saltos de flujo, característicos de los superconductores tipo-II de campo alto medida por Silva y Akachi en . . . . .   | 21 |
| 2.1. Ciclos de magnetización en una muestra con tensiones (imagen superior) y libre de tensiones (imagen inferior). Sobre cada ciclo de histéresis se muestran las imágenes MO obtenidas en los campos magnéticos indicados con las flechas, los números indican el orden en el que se obtuvieron las imágenes (Imagen tomada de ). . . . .   | 26 |
| 2.2. Ciclo de histéresis en una muestra libre de tensiones, los recuadros muestran las imágenes MO. Los círculos muestran las mediciones en ZFC y los cuadros en FC (Imagen tomada de ). . . . .  | 28 |
| 2.3. Estructura del estado intermedio en un disco de Pb a una temperatura de 5 K. (Izquierda) Estructura tubular o topología cerrada del flujo magnético al incrementar el campo magnético después de un proceso ZFC. (Derecha) Estructura laminar o topología abierta al disminuir el campo magnético (Imagen tomada de ). . . . .   | 29 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.4.  | Supra espuma o espuma superconductor en el diagrama H-T de un disco de Pb (diámetro, $d = 5$ mm). La región punteada corresponde al estado intermedio, la región sólida (azul) corresponde a la espuma superconductor. Los recuadros izquierdo e inferior derecho muestran la estructura del flujo en el estado intermedio, fuera de la supra espuma. El recuadro superior derecho muestra la estructura del <i>suprafroth</i> (Imagen tomada de ) . . . . .  | 30 |
| 2.5.  | Imágenes MO para un disco de Pb de diámetro $d = 5$ mm. Renglón superior: dependencia en el campo aplicado del engrosamiento del <i>suprafroth</i> en 6 K (vista de la muestra completa). Renglón inferior: dependencia en la temperatura del engrosamiento del <i>suprafroth</i> en un campo $H = 320$ Oe, imagen mostrada en una región de $1 \times 1$ mm <sup>2</sup> del disco (Imagen tomada de ) . . . . .   | 31 |
| 2.6.  | Dependencia en la temperatura de la magnetización para un cilindro de Ta en la trayectoria ZFC y FC en un campo de 3 mT. La irreversibilidad de la curva ocurre al alcanzar el valor crítico de la temperatura, $T_c$ . . . . .   | 32 |
| 2.7.  | Ciclos de histéresis M(H) medidos a diferentes temperaturas para un cilindro de Ta en geometría paralela. . . . .   | 33 |
| 2.8.  | Geometría paralela: a) Curva de histéresis para un cilindro de Ta. b) Curva de histéresis para un cilindro de Pb de radio $r = 1.5$ mm y altura $h = 3$ mm (Gráfica tomada de ) . . . . .   | 34 |
| 2.9.  | Subciclos de histéresis para T=2.0, 3.0 K cuando el campo aplicado es paralelo al eje del cilindro. Los puntos 1 y 2 corresponden a $h=0.88$ y $h=0.98$ a una temperatura T=2.0 K. El punto 2 corresponde a $h=0.98$ a una temperatura T=3.0 K. El ciclo de histéresis completo para T=1.7 K también se muestra. . . . .  | 35 |
| 2.10. | Curvas de magnetización en la representación reducida para un cilindro de Ta, cuando el campo aplicado es paralelo al eje de la muestra, medidas el 2 y 3 de marzo de 2015 en las instalaciones del IFUAP. a) Curvas de histéresis magnética medidas a diferentes temperaturas. b) Subciclos de histéresis magnética en 2 y 3 K en el estado de Meissner. c) y d) subciclos de histéresis magnética en 2 y 3 K en el estado intermedio. En todas las mediciones se observa un paramagnetismo inicial, el cual se acentúa en temperaturas cercanas a $T_c$ . . . . . | 36 |
| 2.11. | Comportamiento no lineal en campos cercanos a cero para $T < T_c$ y $T = 5.0K > T_c$ . . . . .  | 38 |
| 2.12. | Curvas de magnetización en geometría perpendicular a diferentes temperaturas. . . . .   | 38 |
| 2.13. | Curvas de histéresis en geometría perpendicular en: a) un cilindro de Ta, b) un disco de Pb de grosor $d = 0.2$ mm y área 40 mm <sup>2</sup> (Gráfica tomada de ) y c) cilindro de Pb de radio $r = 1.5$ mm y altura $h = 3$ mm (Gráfica tomada de ) . . . . .  | 39 |

|   |    |
|---|----|
| 2.14. Dependencia en la temperatura del campo magnético. $H_1$ corresponde al inicio del estado intermedio (triángulos) y $H_c$ corresponde al campo crítico termodinámico (círculos). . . . .  | 41 |
| 3.1. Dependencia en la temperatura de la magnetización para un cilindro de Nb en la trayectoria ZFC y FC en un campo de 5 mT. La irreversibilidad de la curva ocurre al alcanzar el valor crítico de la temperatura, $T_c$ . . . . .  | 45 |
| 3.2. Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento como función del campo aplicado paralelo al eje de la muestra para diferentes temperaturas. . . . .   | 46 |
| 3.3. Curvas experimentales de magnetización a) para un cilindro a una temperatura $T = 4.0$ K y b) para un disco a una temperatura de $T = 4.2$ K (Gráfica tomada y adaptada de ). . . . .  | 47 |
| 3.4. Curvas de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento de Nb como función del campo aplicado paralelo al eje de la muestra para diferentes temperaturas, mostradas en una representación reducida en términos de a) $H_{c1}$ y b) $H_{c2}$ . . . . . | 47 |
| 3.5. Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento, como función del campo aplicado perpendicular al eje de la muestra, para diferentes temperaturas. . . . .  | 49 |
| 3.6. Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento, mostradas en una representación reducida en términos de a) $H_{c1}$ y b) $H_{c2}$ , para diferentes temperaturas. . . . .  | 50 |
| 3.7. Efecto pico en la densidad de corriente crítica para un cilindro de Nb. . . . .  | 51 |
| 3.8. Dependencia en la temperatura de los campos críticos para un cilindro de Nb en geometría a) paralela y b) perpendicular. . . . .   | 53 |
| 4.1. Placa infinita de grosor $d$ sobre el eje $x$ . . . . .  | 60 |
| 4.2. Curvas de magnetización virgen (a) para un disco de PbBi, tomada de la Ref. y (b) teórica obtenida con la densidad de corriente crítica $J_{c\perp}(B)$ como en la Ec. (4.24). . . . .   | 62 |
| 4.3. Curvas de magnetización rotacional para un disco de PbBi medidas en . . . . .  | 64 |
| 4.4. Curvas de las componentes de magnetización promedio versus el ángulo de rotación, obtenidas con el MECEO. . . . .  | 68 |
| 4.5. Curvas de las componentes de magnetización promedio versus el ángulo de rotación, obtenidas con el MECEE, con $r = 1$ . . . . .  | 68 |
| 4.6. Perfiles del ángulo $\alpha$ (panel a), magnitud de $B$ (panel b) y componentes de la inducción magnética $B'_y$ (Ec. 4.22, panel c) y $B'_z$ (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en $H_a = 0.5H_P$ . . . . .                      | 70 |

- 4.7. Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B'_y$  (Ec. 4.22, panel c) y  $B'_z$  (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en  $H_a = 1.05H_P$ . . . . . 71
- 4.8. Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B'_y$  (Ec. 4.22, panel c) y  $B'_z$  (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en  $H_a = 2.0H_P$ . . . . . 73
- 4.9. Disco de PbBi magnetizado inicialmente. Posteriormente es rotado  $90^\circ$  con el fin de aplicar un campo magnético transversal al momento magnético remanente. . . . . 78
- 4.10. Panel a: Curvas experimentales de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  vs campo magnético transversal  $H_y$  medidas en la Ref. . Lo círculos negros representan los campos en los cuales un valor particular de  $H_{y,max}$  es alcanzado. Las curvas de magnetización teóricas  $\langle M_z \rangle (H_y)$  obtenidas con el modelo de estado crítico elíptico original (panel b) y el elíptico extendido (panel c). . . . . 79
- 4.11. Evolución de los perfiles de  $B_z$  a medida que el campo magnético transversal  $H_y$  es variado. Los perfiles fueron calculados con el modelo de estado crítico elíptico extendido en  $H_y = 0$  (la curva 0 describe el flujo magnético atrapado a lo largo del eje  $z$ ),  $H_y = H_{y,max}$  (curva 1),  $H_y = 0$  (curva 2),  $H_y = -H_{y,max}$  (curva 3) y finalmente,  $H_y = 0$  (curva 4). Los valores de  $H_{y,max}$  son indicados en cada panel. . . . . 80
- 4.12. Curvas teóricas de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  de la placa de PbBi vs el campo magnético transversal  $H_y$ , las cuales fueron obtenidas con los modelos elíptico original y extendido. Las curvas rojas (azules) fueron calculadas para un estado inicial paramagnético (diamagnético) en  $H_z = H_P$ . . . . . 82
- 4.13. Evolución de los perfiles de  $B_z$  a medida que el campo magnético transversal  $H_y$  oscila mientras el campo  $H_z$  es mantenido constante e igual a  $H_P$ . Las curvas etiquetadas con P0 (D0) corresponden al estado inicial paramagnético (diamagnético) y, las curvas etiquetadas con un número impar (par) fueron calculadas en  $H_y = H_{y,max} = 0.85H_P$  ( $H_y = -H_{y,max}$ ). 83
- 4.14. Curvas teóricas de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  de una placa de PbBi vs el campo magnético transversal  $H_y$ , las cuales fueron obtenidas al aplicar los modelos de estado crítico elíptico original y extendido. Las curvas rojas (azules) fueron calculadas para el estado inicial paramagnético (diamagnético) en  $H_z = 5H_P$ . . . . . 85

|  |     |
|--|-----|
| 4.15. Evolución de los perfiles de $B_z$ conforme el campo magnético transversal $H_y$ oscila en presencia de un campo $H_z = 5H_P$ . Las curvas etiquetadas con P0 (D0) corresponden al estado inicial paramagnético (diamagnético). Las curvas con un número impar (par) fueron calculadas en $H_y = H_{y,\max} = 0.7H_P$ ( $H_y = -H_{y,\max}$ ). . . . . | 87  |
| 5.1. Inducción magnética para un superconductor tipo II obtenida a partir de la Ec. 5.2. . . . .   | 90  |
| 5.2. a) Curvas de magnetización virgen para un disco de PbIn tomada de . b) Curvas de magnetización teóricas obtenidas con una densidad de corriente crítica $J_{c\perp}(B)$ como en la Ec. 5.7. Los círculos muestran los valores de la magnetización después del enfriamiento en campo (efecto Meissner parcial). . . . .                                  | 92  |
| 5.3. Componentes de la magnetización promedio medidas en Ref. para un disco de PbIn. La magnetización $-\langle M_z \rangle(\theta)$ se corre verticalmente hacia el primer cuadrante en una cantidad igual a la magnitud de la magnetización del efecto Meissner parcial, lo cual ocurrió durante el enfriamiento en campo. . . . .                         | 94  |
| 5.4. Curvas de las componentes de la magnetización promedio <i>vs</i> el ángulo de rotación, calculadas en el marco del MECEO. . . . .   | 98  |
| 5.5. Curvas de las componentes de la magnetización promedio <i>vs</i> el ángulo de rotación, calculadas en el marco del MECEE. . . . .   | 98  |
| 6.1. Modelo para $B(H)$ , Ec. (6.2) con $\gamma = 1.35$ y $E(J)$ , Ec. (6.10) con $\sigma = 30$ . . . . .  | 102 |
| 6.2. a) Curva de magnetización virgen para un disco de PbIn medida en $T = 4.2$ K . b) Curva de magnetización teórica obtenida con una densidad de corriente crítica $J_{H,c\perp}(H)$ como en la Ec. 6.16. . . . .  | 105 |
| 6.3. Perfiles de $H$ y $B$ correspondientes a las etiquetas $A - D$ en la Fig. 6.2b. 106   |     |
| 6.4. Componentes de la magnetización para un disco de PbIn medidas en la Ref. . . . .  | 109 |
| 6.5. Curvas de las componentes de la magnetización promedio versus el ángulo de rotación, calculadas en el marco del MECEO. . . . .  | 109 |
| 6.6. Influencia del efecto Meissner en los perfiles del ángulo $\alpha_H$ (panel a), magnitud de $B$ (panel b) y sus componentes $B'_y$ (panel c), $B'_z$ (panel d) en $H_a/H_P = 0.5$ . En el lado derecho de los paneles $b$ y $d$ se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado . . . . .   | 111 |
| 6.7. Perfiles del ángulo $\alpha_H$ , magnitud de $B$ y sus componentes $B'_y$ , $B'_z$ para $H_a/H_P = 1.05$ . En el lado derecho de los paneles $b$ y $d$ se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado. . . . .   | 113 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 6.8.  | Perfiles del ángulo $\alpha_H$ , magnitud de $B$ y sus componentes $B'_y, B'_z$ para $H_a/H_P = 2.0$ . En el lado derecho de los paneles $b$ y $d$ se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado . . . . .  | 114 |
| 6.9.  | a) Curvas de magnetización experimentales $\langle M_z \rangle$ versus el campo magnético transversal $H_y$ reportadas en . b) Curvas de magnetización teóricas $\langle M_z \rangle (H_y)$ obtenidas en el marco del MECEO. Los perfiles de la inducción magnética se analizan en las curvas 2 y 3. . . . .  | 118 |
| 6.10. | Evolución de los perfiles de $B_z(x)$ a medida que el campo magnético transversal $H_y$ es variado. $H_y = 0$ (curva A), $H_y = H_{y,\max}$ (curva B), $H_y = 0$ (curva C), $H_y = -H_{y,\max}$ (curva D) y finalmente, $H_y = 0$ (curva E). Los valores de $H_{y,\max}$ son indicados en cada panel. La gráfica interna muestra los perfiles de $H$ . . . . .  | 119 |
| 7.1.  | Configuración experimental. . . . .   | 123 |
| 7.2.  | Componente $z$ de la magnetización promedio al aplicar un campo magnético longitudinal (curva azul) y transversal al momento magnético remanente (curva roja) en un cubo de NbTi a) experimento (la flecha roja representa el momento magnético atrapado) y b) modelo teórico. c) Predicción teórica de las avalanchas de flujo termomagnético en la componente $y$ de la magnetización promedio. . . . . | 125 |
| 7.3.  | Perfiles del ángulo $\alpha$ (panel a), magnitud de $B$ (panel b) y componentes de la inducción magnética $B_y$ (panel c) y $B_z$ (panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en puntos anteriores y posteriores a los saltos de flujo. Los perfiles iniciales corresponden a las curvas etiquetadas con 0. . . . .   | 130 |
| 7.4.  | Curvas de la magnetización promedio, experimentales y teóricas, para un cilindro de NbTi en diferentes temperaturas. $B_P$ corresponde al campo de penetración determinado a partir de las curvas experimentales. . . . .   | 132 |
| 9.1.  | Curvas de magnetización para un cilindro de Nb a una temperatura $T = 1.7$ K a) experimental y b) teórica. . . . .  | 142 |
| 9.2.  | Curva de magnetización virgen para un disco de PbBi. En la Fig. 4.2 del capítulo 4 se grafica $-\mu_0 M_z$ versus $\mu_0 H_z$ y en el programa se grafica $\mu_0 M_z$ versus $\mu_0 H_z$ . . . . .  | 145 |
| 9.3.  | Curva de magnetización virgen para obtener los perfiles de $B$ en la región diamagnética (D) y paramagnética (P) para un disco de PbBi (ver Secc. 4.2). . . . .   | 146 |
| 9.4.  | Componentes de la magnetización y perfiles de $\alpha, B, B_y$ y $B'_z$ obtenidos con el modelo elíptico original (ver Secc. 4.1). . . . .  | 147 |
| 9.5.  | Componentes de la magnetización y perfiles de $\alpha, B, B_y$ y $B'_z$ (ver Secc. 4.1) obtenidos con el modelo elíptico extendido. . . . .   | 148 |

# Capítulo 1

## Generalidades del estado superconductor

La superconductividad es un área de gran interés en la física moderna. Especialmente, por la gran cantidad de aplicaciones, por su alta eficiencia en el consumo de energía manifiesta en su gran capacidad de conducir corriente. Las aplicaciones prácticas de la superconductividad depende de la máxima densidad de corriente que los materiales superconductores (SC's) pueden llevar, así como de la magnitud del campo magnético máximo que se puede aplicar a estos materiales, por mencionar algunos factores. Antes de abordar el estudio correspondiente a este trabajo de investigación, se describen los parámetros críticos que caracterizan a los superconductores, así como su clasificación de acuerdo a su comportamiento magnético, enfatizando la diferencia entre superconductores ideales y no ideales. Conceptos empleados a lo largo de esta tesis, tales como enclavamiento, corte de líneas de flujo (vórtices), avalanchas de flujo termomagnético, son descritos para un mejor entendimiento de los resultados presentados en capítulos posteriores.

### 1.1. Propiedades del estado superconductor

La superconductividad es un estado termodinámico que poseen ciertos elementos puros y aleaciones; los cuales al ser enfriados por debajo de una temperatura específi-

ca, llamada temperatura crítica o de transición ( $T_c$ ), poseen resistencia eléctrica cero, el decaimiento de la resistencia es abrupto conforme se disminuye la temperatura. Dicho fenómeno fue descubierto por el físico holandés Kamerlingh-Onnes en 1911 en el mercurio (Hg) a la temperatura de transición  $T_c = 4.15$  K [1]. Las propiedades que definen al estado superconductor se definen a continuación.

### 1.1.1. Resistencia cero

La propiedad de resistencia eléctrica cero la exhiben todos los materiales superconductores (elementos puros, aleaciones), es decir, poseen una conductividad infinita. Dicha propiedad aparece abruptamente al enfriar el material por debajo de su temperatura crítica,  $T_c$ . En esta situación, una corriente eléctrica puede fluir a través del material sin disipación de energía.

### 1.1.2. Efecto Meissner

El estado superconductor no está definido únicamente por la propiedad de resistencia eléctrica cero, la cual también está presente en un conductor ideal. Una de las propiedades fundamentales que distingue a un superconductor (SC) de un conductor perfecto es el efecto Meissner, descubierto en 1933 por Meissner y Ochsenfeld, en el cual el SC se comporta como un diamagneto perfecto [1]. Existen dos aspectos relacionados con este diamagnetismo. El primero es la exclusión del flujo: si un material en el estado normal es enfriado en campo cero (trayectoria ZFC<sup>1</sup> en la Fig. 1.1), i.e. se enfría por debajo de  $T_c$  al estado superconductor en presencia de un campo magnético nulo y posteriormente se aplica un campo magnético externo, el campo será excluido del interior del superconductor. El segundo aspecto es la expulsión del flujo: si el mismo material en el estado normal es colocado en presencia de un campo magnético, éste penetra hacia el interior del material, siendo su valor en el interior y en el exterior casi el mismo debido a que la permeabilidad  $\mu$  del material es muy cercana al valor del espacio libre  $\mu_0$ . Posteriormente, en presencia de este campo y

---

<sup>1</sup>la abreviatura ZFC se refiere *zero-field-cooling* en inglés

al enfriar el material por debajo de  $T_c$  (trayectoria FC<sup>2</sup> en la Fig. 1.1), el campo magnético es expulsado del interior de la muestra superconductor; este fenómeno es llamado efecto Meissner. Por otro lado, la superconductividad es destruida cuando el campo magnético aplicado al superconductor es mayor que cierto valor crítico, campo magnético crítico  $H_c(T)$ , separando así al estado superconductor del estado normal (ver Fig. 1.3).

La combinación de resistencia cero y diamagnetismo perfecto define a un superconductor, diferenciándolo así de un conductor perfecto, el cual únicamente presenta resistencia cero.

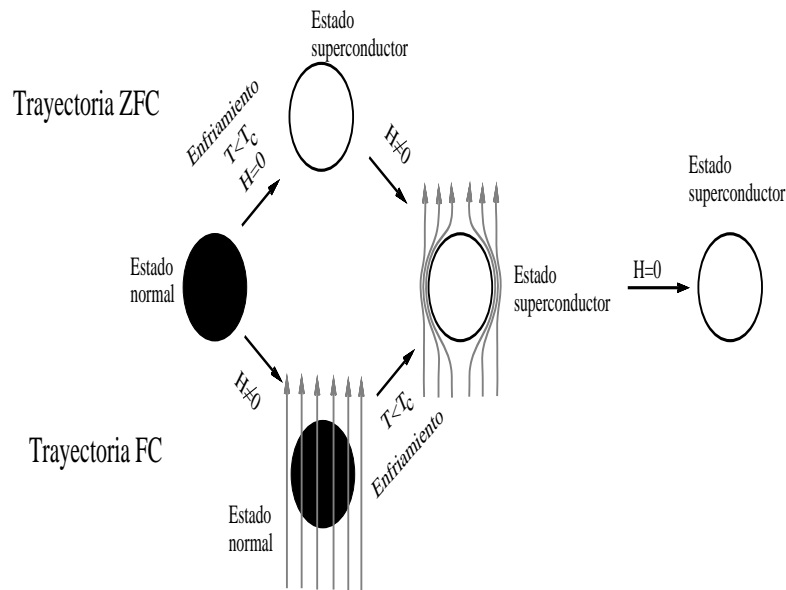


Figura 1.1: Efecto Meissner en un superconductor.

## 1.2. Parámetros críticos

Generalmente, las condiciones en las cuales un superconductor mantiene sus propiedades superconductoras son definidas por sus parámetros críticos. Los parámetros críticos son la temperatura crítica  $T_c$ , el campo magnético crítico  $H_c$  y la densidad de

<sup>2</sup>la abreviatura FC se refiere a *field-cooling* en inglés

corriente crítica  $J_c$ , los cuales dependen del material superconductor en consideración [2].

### 1.2.1. Temperatura crítica, $T_c$

La temperatura crítica de un superconductor es la temperatura en la cual la resistividad de un metal decae abruptamente a cero (transición del estado normal al superconductor). Sin embargo, experimentalmente la transición del estado normal al superconductor ocurre en un intervalo  $\Delta T_c$  alrededor de  $T_c$ . Es posible determinar la temperatura crítica de un superconductor como un valor único de acuerdo a uno de los siguientes criterios [2] :

La temperatura crítica es la temperatura en la cual (ver Fig. 1.2)

- aparece una desviación en la curva  $R$  vs  $T$  de un conductor normal. Esta temperatura es denotada por  $T_{c,onset}$
- la resistencia eléctrica es la mitad de la resistencia ganada . Esta temperatura es denotada por  $T_{c,0.5}$
- la resistencia eléctrica comienza a ser medible y es denotada por  $T_{c,0}$

En metales o aleaciones superconductoras de alta pureza, monocristales o muestras libres de defectos, el intervalo  $\Delta T_c < 10^{-3}$  K [3].

### 1.2.2. Campo crítico, $H_c$

El estado superconductor es destruido cuando a la muestra se aplica un campo magnético mayor que un cierto campo específico, éste valor es llamado el campo crítico o campo crítico termodinámico y es denotado por  $H_c$ . Sin embargo, la superconductividad puede ser recuperada al remover el campo aplicado. El valor del campo crítico  $H_c$  depende de la forma y la orientación de la muestra a una temperatura específica [4]. La dependencia en la temperatura del campo crítico es bien descrita por la fórmula empírica [4]:

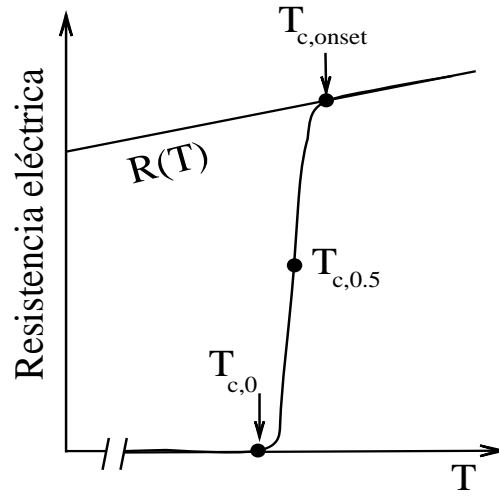


Figura 1.2: Dependencia en la temperatura de la resistencia eléctrica.

$$H_c(T) = H_{c0} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.1)$$

La Ec. 1.1 representa el diagrama de fase  $H - T$  del estado superconductor, donde  $H_{c0}$  es el campo crítico extrapolado en  $T = 0$  y  $T_c$  es la temperatura crítica (ver Fig. 1.3). La determinación práctica de  $H_c$  se realiza a partir de las mediciones de las curvas de magnetización, donde el campo crítico es el valor del campo en el cual la magnetización se anula [4].

### 1.2.3. Densidad de corriente crítica, $J_c$

Desde el punto de vista práctico, la característica más importante en cualquier superconductor es la máxima densidad de corriente que éste puede transportar, manteniendo la resistencia cero en el material. A este valor máximo se le llama densidad de corriente crítica, denotado por  $J_c$ . Cuando el valor de la densidad de corriente es mayor que la corriente crítica,  $J > J_c$ , la superconductividad es destruida. La dependencia en la temperatura de la densidad de corriente crítica,  $J_c(T)$ , es análoga a la Ec. 1.1.

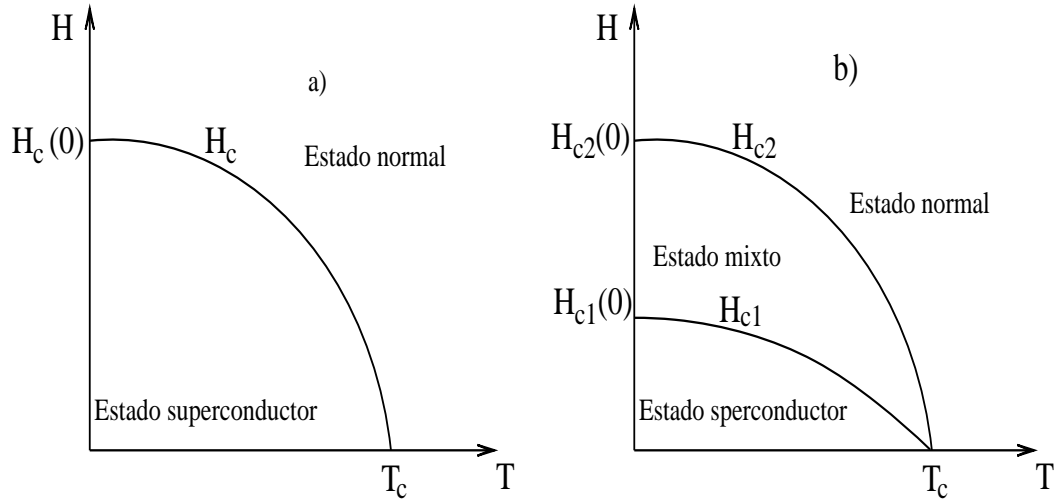


Figura 1.3: Dependencia en la temperatura del campo magnético crítico para a) un superconductor tipo-I y b) un superconductor tipo-II.

### 1.3. Superconductores tipo-I y el estado intermedio

Los superconductores (SC's) tipo-I, también llamados suaves o superconductores de Pippard, solamente poseen un campo crítico  $H_c$ . La mayoría de los elementos puros, excepto el niobio, vanadio y tecnecio, son clasificados como SC's tipo-I.

Los superconductores tipo-I pueden clasificarse en dos categorías: superconductores tipo-I ideales y no ideales.

#### 1.3.1. Superconductores tipo-I ideales

El comportamiento magnético de un SC ideal tipo-I, el cual tiene un factor de demagnetización nulo ( $N = 0$ , la muestra puede ser una placa o cilindro infinito en un campo magnético paralelo al eje [5]), es lineal a medida que un campo magnético aplicado,  $H_a$ , se incrementa hasta un campo crítico  $H_c$ ; es decir, el SC expulsa completamente el campo magnético aplicado por debajo de  $H_c$ . Cuando el campo aplicado sobrepasa el valor crítico,  $H_c$ , la magnetización decae abruptamente a cero y el estado superconductor es destruido. Al considerar una muestra superconductora con

un factor de demagnetización distinto de cero  $N \neq 0$  (el factor de demagnetización indica la distorsión del campo magnético debido al flujo expulsado), la magnetización se incrementa de forma más pronunciada conforme el campo es aplicado; esto se debe a que el campo que actúa sobre el superconductor es  $H = H_a - NM$  y ya que  $M$  es negativa, el campo actuando sobre la muestra es incrementado por la magnetización de la muestra, ver Fig. (1.5b). La tabla 1.1 muestra algunos valores del factor de demagnetización para ciertas geometrías. Por otro lado, cuando se aplica un campo magnético en el intervalo  $H_c(1 - N) < H_a < H_c$  el superconductor se divide en dominios en estado superconductor y normal como se observa en la Fig. 1.4. Ahora, si el campo aplicado es disminuido desde un campo  $H_a > H_c$ , el retorno de la curva de magnetización es a través de la trayectoria trazada al incrementar el campo, ver Figs. 1.5a y 1.5b. Finalmente, la dependencia en la temperatura del campo crítico  $H_c$  en un superconductor tipo-I ideal es descrita por la Ec. 1.1 (ver Fig. 1.3).

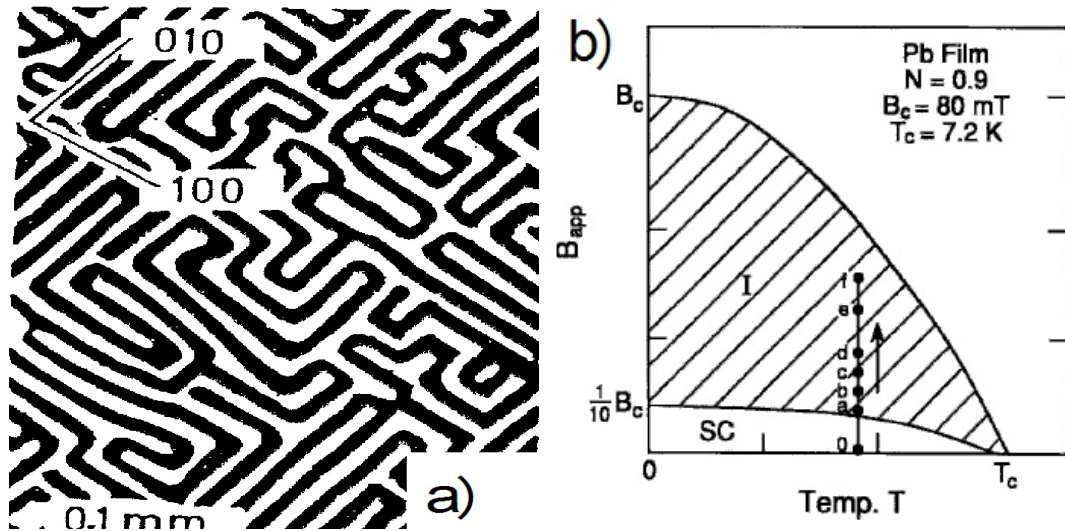


Figura 1.4: a) Estado intermedio de una hoja de aluminio al aplicar un campo magnético perpendicular. El grosor de la hoja es de  $2.9 \times 10^{-5}$  (Tomada de [6]). b) Diagrama de fase magnético de una película con factor de demagnetización  $N = 0.9$  en un campo magnético perpendicular. El valor grande del factor de demagnetización causa que el estado intermedio sea muy amplio (Tomada de [7]).

Tabla 1.1: Factores de demagnetización  $N$  para diferentes geometrías.

| Geometría                            | $N$ |
|--------------------------------------|-----|
| Cilindro en campo paralelo           | 0   |
| Cilindro en campo transversal        | 1/2 |
| Esfera                               | 1/3 |
| Placa delgada en campo perpendicular | 1   |

### 1.3.2. Superconductores tipo-I no ideales

En los superconductores tipo-I no ideales las curvas de magnetización exhiben histéresis, quedando una cierta cantidad de flujo atrapado en campo cero, lo cual da como resultado una magnetización positiva de valor pequeño; al valor de la magnetización en  $H_a = 0$  se le llama la magnetización remanente,  $M_{rem}$  (ver Fig. 1.6).

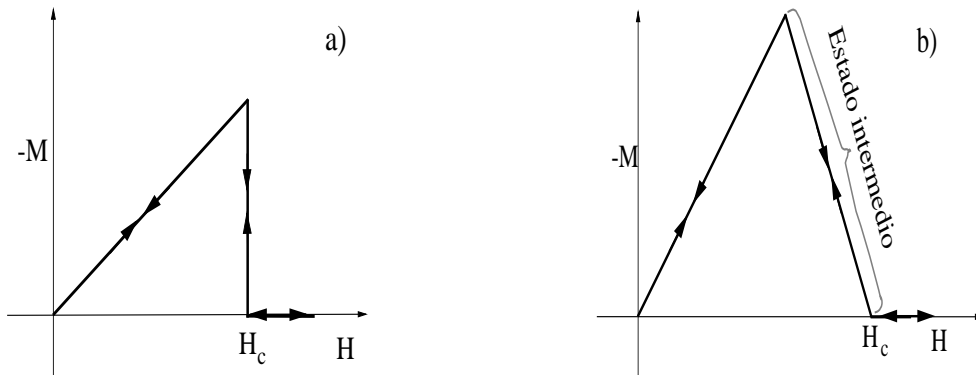


Figura 1.5: a) Curva de magnetización de un SC tipo-I ideal. b) Curva de magnetización de un SC tipo-I ideal con un factor de demagnetización no nulo.

## 1.4. Superconductores tipo-II y el estado mixto

Los superconductores tipo-II son aquellos que poseen dos campos críticos, el primer campo crítico o inferior ( $H_{c1}$ ) y el segundo campo crítico o superior ( $H_{c2}$ ). Cuando un superconductor es enfriado por debajo de su temperatura crítica y es aplicado un campo magnético menor que el primer campo crítico,  $H < H_{c1}$ , el superconductor se

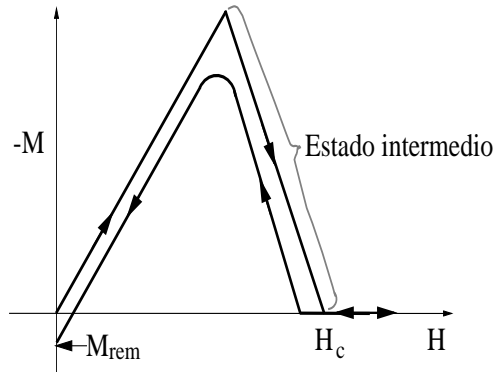


Figura 1.6: Curva de magnetización de un SC tipo-I no ideal.

encuentra en el estado de Meissner y expulsa completamente el flujo magnético. Si el campo aplicado se encuentra en el intervalo  $H_{c1} < H < H_{c2}$ , el campo magnético penetra el material en forma de vórtices (cuantos de flujo magnético) formando un arreglo triangular, éste es el estado mixto o de vórtice. Si el campo aplicado es mayor que el segundo campo crítico,  $H > H_{c2}$ , el estado superconductor es destruido y el material se encuentra en el estado normal. El diagrama de fase magnético para superconductores tipo-II se muestra en la Fig. 1.3b.

Los superconductores tipo-II son clasificados en dos categorías: superconductores tipo-II ideales y no ideales [3].

### 1.4.1. Superconductores tipo-II ideales

El comportamiento magnético de un superconductor tipo-II ideal (homogéneo o limpio) es mostrado en la Fig. 1.7.

Cuando se aplica un campo magnético con un valor menor al primer campo crítico,  $H < H_{c1}$ , la muestra es superconductora y se encuentra en el estado de Meissner; donde la inducción magnética en el interior del material es cero. Al incrementar el campo aplicado entre los valores  $H_{c1} < H < H_{c2}$  el material continua siendo superconductor y se encuentra en el estado mixto. Finalmente, la superconductividad es destruida en  $H_{c2}$ . Al disminuir el campo magnético aplicado desde el estado normal,

la curva de magnetización vuelve a trazar la curva inicial al incrementar el campo magnético. La capacidad de transportar corriente en un superconductor tipo-II ideal es prácticamente nula, tal y como ocurre en un superconductor tipo-I.

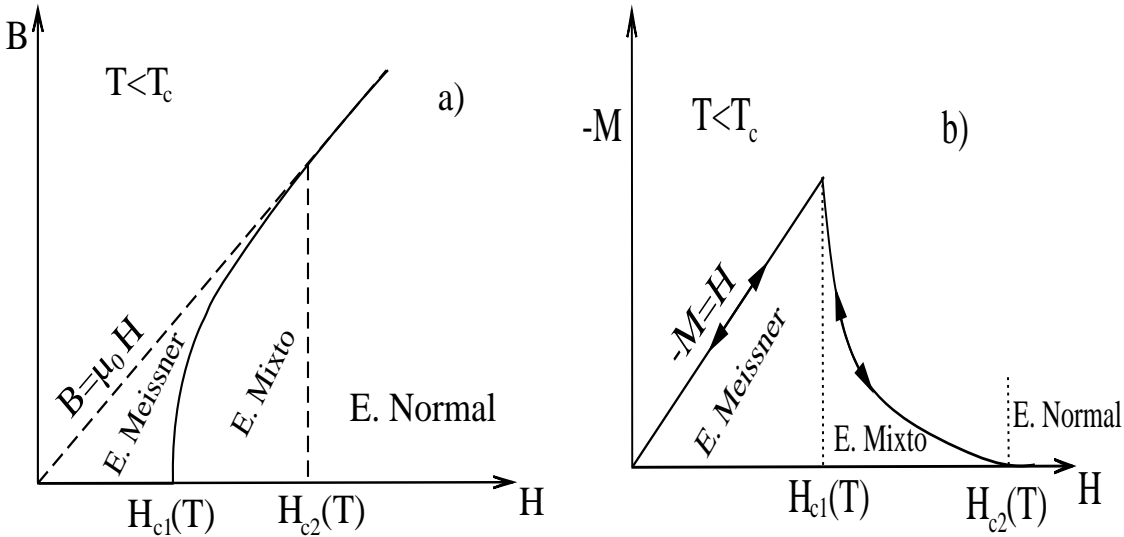


Figura 1.7: a) Inducción magnética y b) Magnetización de un superconductor tipo-II ideal en la temperatura  $T$

### 1.4.2. Superconductores tipo-II no ideales

Existen algunas similitudes entre los superconductores tipo-II ideales y los superconductores tipo-II no ideales (duros o sucios). Ambos exhiben el estado mixto entre los campos críticos inferior ( $H_{c1}$ ) y superior ( $H_{c2}$ ); sin embargo, la curva de magnetización de los superconductores duros es irreversible y pueden mantener una cierta cantidad de flujo atrapado en su interior. Cuando se aplica un campo magnético al superconductor duro entre los valores  $0 < H < H_{c1}$ , considerando que  $T < T_c$ , el material se encuentra en el estado de Meissner (diamagnetismo perfecto,  $-M = H$ ) y la inducción magnética en el interior es cero. A medida que el campo aplicado es incrementado y su valor se encuentra entre los valores  $H_{c1} < H < H_{c2}$ , el superconductor se encontrará en el estado mixto y el campo magnético penetra el interior de la muestra en forma de vórtices. El campo magnético penetra el superconductor comple-

tamente,  $-M = 0$  y la superconductividad es destruida, cuando el campo magnético aplicado es mayor que el segundo campo crítico  $H > H_{c2}$ . Al disminuir el campo magnético externo desde el estado normal, la curva de la magnetización no coincide con aquella curva trazada al incrementar el campo magnético. Si el campo magnético es reducido hasta cero, la inducción magnética y la magnetización son distintas de cero en el interior del superconductor, estos valores se conocen como la inducción magnética remanente  $B_{rem}$  (flujo magnético atrapado) y la magnetización remanente  $M_{rem}$ , respectivamente. La curva de histéresis magnética completa se observa al completar un ciclo del campo magnético aplicado (ver Fig. 1.8).

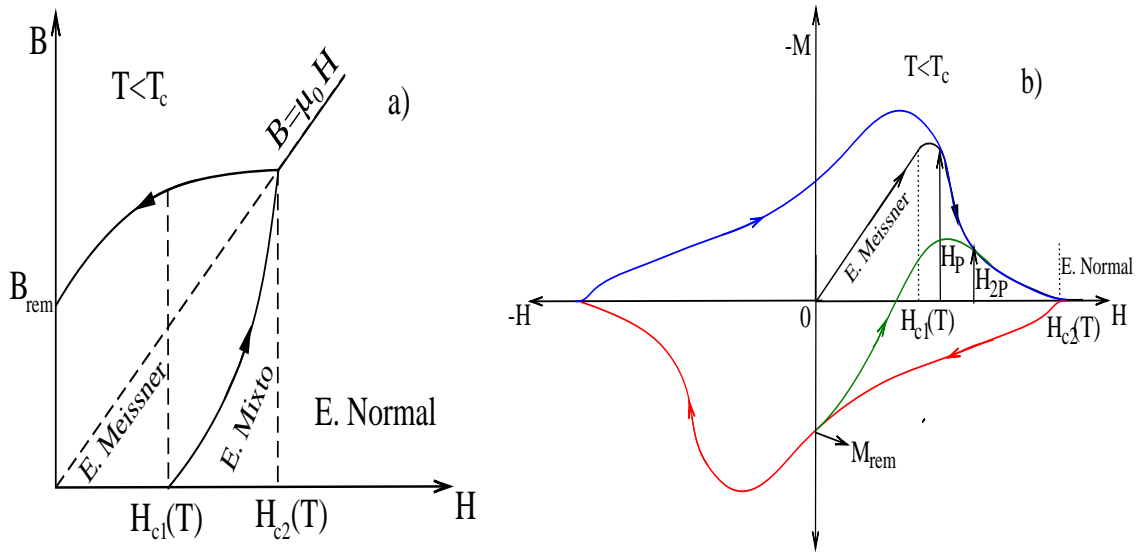


Figura 1.8: a) Inducción magnética y b) Magnetización de un superconductor tipo-II no ideal en la temperatura  $T$ . En el panel b la curva negra corresponde a la curva diamagnética, la roja a la curva paramagnética y la azul a la curva híbrida de la magnetización.

Dos parámetros experimentales que resulta útil conocer se describen a continuación. El primer campo de penetración,  $H_P$ , es el valor del campo magnético en el que éste penetra hasta el plano medio del superconductor (p.e., hasta el centro de una placa) y corresponde al punto en donde se unen la curva diamagnética y la híbrida [8] (ver curvas negra y azul en la Fig. 1.8). El segundo campo de penetración,  $H_{2P}$ , es el campo magnético mínimo para obtener el máximo momento magnético remanente

(flujo atrapado), su valor corresponde al punto en donde se unen la curva de magnetización al incrementar el campo magnético desde cero con la curva diamagnética [8] (ver curvas verde y negra en la Fig. 1.8). La máxima cantidad de flujo magnético atrapado, consecuentemente la máxima magnetización remanente, se obtiene al aplicar un pulso de un campo magnético  $H_a > H_{2P}$ .

### Vórtices

Como ya se ha mencionado, en los superconductores tipo-II, el estado mixto aparece cuando se aplica un campo magnético entre  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$ . En 1957 Abrikosov predijo teóricamente, en términos de la teoría de Ginzburg-Landau, que en los superconductores tipo-II el campo magnético penetra el interior del material superconductor como tubos de flujo cuantizado. A estos tubos de flujo cuantizado se les llama vórtices o líneas de flujo, cuyo interior se encuentra en el estado normal y son rodeados por corrientes que los apantallan del resto del material. Los vórtices, cada uno con un cuanto de flujo  $\phi = h/2e$ , minimizan la energía de interacción arreglándose en una red triangular o *red de Abrikosov* (ver Fig. 1.9).

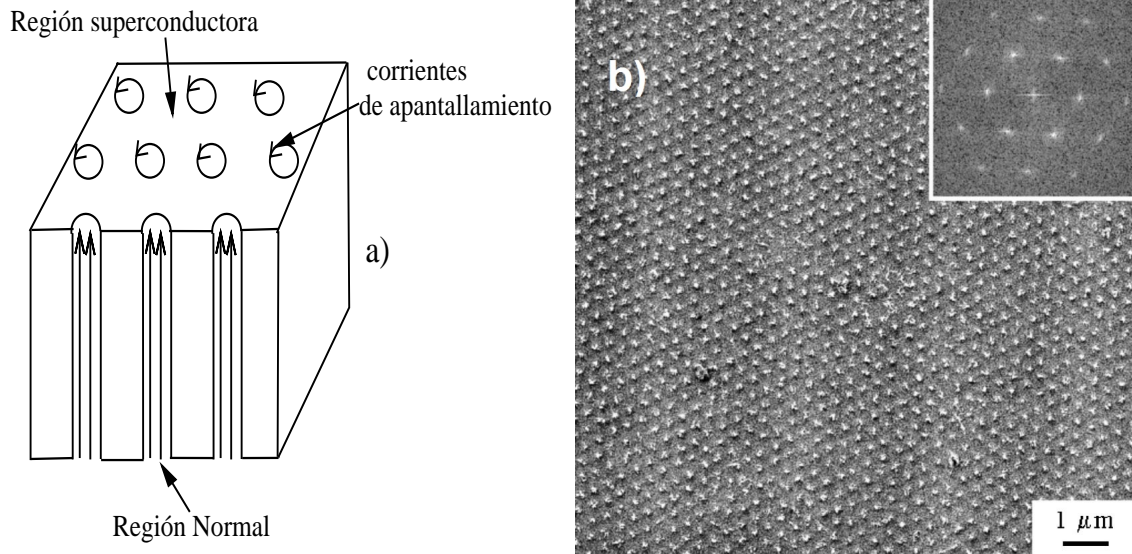


Figura 1.9: a) Arreglo de los vórtices en una red triangular b) Red de vórtices triangular en un campo magnético de 200 Oe en una muestra de  $MgB_2$  reportada por L. Ya. Vinnikov et al. [9].

## Enclavamiento de flujo en superconductores tipo-II

Una de las principales características de los superconductores tipo-II es su capacidad de transportar corriente eléctrica sin disipar energía. Si se considera un superconductor tipo-II ideal (homogéneo) en el estado mixto, cuando una corriente  $J$  externa es aplicada en la dirección perpendicular a los vórtices, éstos comenzarán a moverse debido a la fuerza de Lorentz,  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , producida por la corriente. Como consecuencia del movimiento de los vórtices un campo eléctrico es producido y la energía es disipada en el sistema, de este modo el superconductor pasa al estado resistivo [6]. Por lo tanto, la corriente crítica de un superconductor tipo-II ideal es cero.

Sin embargo, los superconductores tipo-II no ideales poseen defectos, impurezas o inhomogeneidades que actúan como sitios o centros de enclavamiento (anclaje). Estos centros de enclavamiento mantienen a los vórtices en una posición fija (enclavan) y actúan como pozos de potencial, reduciendo la energía total de los vórtices. Los vórtices permanecerán enclavados siempre que la fuerza de Lorentz sea menor que la fuerza de enclavamiento asociada a los sitios de anclaje,  $F_L < F_p$ . La fuerza de enclavamiento es equilibrada con la fuerza de Lorentz cuando se ha alcanzado la densidad de corriente crítica  $J_c$ . El comportamiento histerético en las curvas de magnetización para superconductores tipo-II no ideales se debe al enclavamiento de los vórtices.

Las inhomogeneidades en un material superconductor pueden dar origen a un comportamiento irreversible o semirreversible de la magnetización, dependiendo si el enclavamiento es fuerte o débil. En el enclavamiento fuerte, los sitios de anclaje actúan individualmente y producen deformaciones plásticas. Cuando el enclavamiento es débil fuerzas elásticas dominan sobre las fuerzas de enclavamiento y las inhomogeneidades compiten entre sí (enclavamiento colectivo) [10], ver Fig. 1.10.

Por otro lado, el movimiento de vórtices puede ser activado térmicamente. Este movimiento es observado en densidades de corriente menores a  $J_c$ , i.e. para vórtices enclavados, debido a que en  $T > 0$  existe una probabilidad finita de que los vórtices “salten” de un sitio de enclavamiento a otro. Este tipo de movimiento de flujo, el cual es causado por activación térmica, es llamado arrastre o deslizamiento de flujo (*flux creep*). El arrastre de flujo se manifiesta como una resistencia y por lo tanto

como disipación de energía. Un estado de movimiento de flujo constante, llamado transporte de flujo (flux flow), se alcanza cuando no hay fuerza de enclavamiento o esta es muy pequeña para contrarrestar la fuerza de Lorentz  $F_L$ , i.e.  $J > J_c$ . Este movimiento constante de los vórtices disipa energía debido a que los campos magnéticos transitorios inducen campos eléctricos [11].

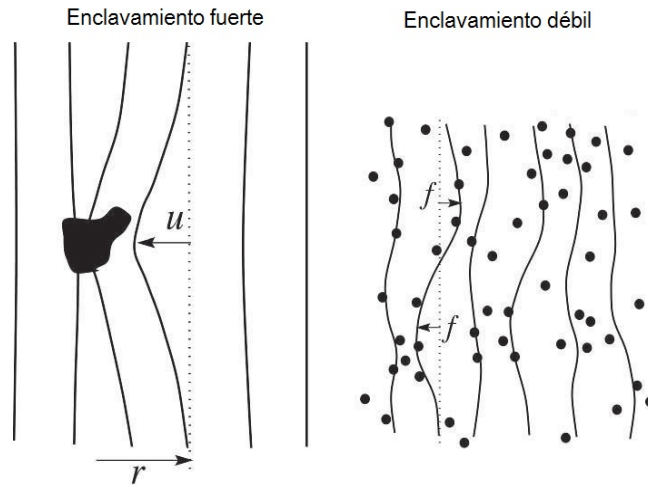


Figura 1.10: Izquierda. Enclavamiento fuerte debido a defectos individuales que producen un desplazamiento grande en la red de vórtices. El vector  $\mathbf{r}$  denota la posición de la red no perturbada, la cual se encuentra lejos con respecto a la impureza; el desplazamiento  $\mathbf{u}$  tiene dirección opuesta. Derecha. Enclavamiento débil debido a un desorden puntual. Las fuerzas  $f$  procedentes de diferentes impurezas compiten debido a la propiedad elástica de la red de vórtices, por lo tanto las fuerzas se suman aleatoriamente dentro del volumen de enclavamiento colectivo. (Tomada de [10])

### Corte de líneas de flujo

El corte de líneas de flujo en superconductores tipo-II se refiere a la situación en que los vórtices parecen romperse y se reconectan nuevamente o permiten que otros vórtices pasen a través de ellos [12]. Este fenómeno se asocia a un proceso disipativo de estados estacionarios en los superconductores tipo-II que portan una corriente y que están sometidos a campos magnéticos paralelos entre sí en los que surge, como consecuencia, un campo eléctrico o voltaje longitudinal macroscópico  $E_{\parallel}$ .

Clem propuso un modelo en el cual los vórtices se intersectan y reconectan como

se muestra en la Fig. 1.11. Los vórtices en los lados opuestos tienen diferentes ángulos entre sí, en a) los vórtices se cortan en los puntos más cercanos entre sí y se reconectan en b). Estos vórtices se desdoblaron y se vuelven rectos como se observa en c). El proceso de corte líneas de flujo (vórtices) ocurre nuevamente con renglones adyacentes de vórtices [13, 14].

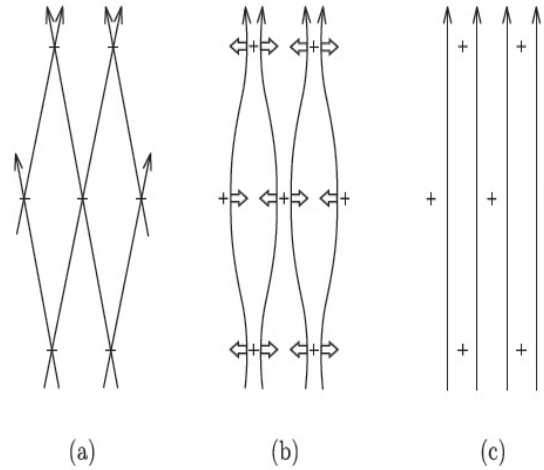


Figura 1.11: Proceso del corte de líneas de flujo en un modelo de intersección y reconexión (Figura tomada de [14]).

## 1.5. Teoría de Ginzburg-Landau

En 1950 los físicos rusos V. L. Ginzburg y L. Landau desarrollaron una teoría fenomenológica [15] (teoría G-L) para explicar el fenómeno de la superconductividad cerca de la temperatura crítica,  $T_c$ . Además, esta teoría clasifica a los superconductores como tipo-I y tipo-II, en términos de sus longitudes características.

La teoría G-L introduce una pseudo función de onda compleja,  $\Psi(r)$ , como un parámetro de orden en la teoría de Landau sobre transiciones de fase de segundo orden. De acuerdo a esta teoría, una transición de fase de segundo orden ocurre cuando el estado de un sistema cambia gradualmente mientras su simetría cambia abruptamente en la temperatura de transición. La cantidad  $|\Psi(r)|^2$  es igual a la densidad de electrones superconductores,  $|\Psi(r)|^2 = n_s$ . La energía libre de un superconductor de-

pende de ésta densidad de electrones superconductores y por lo tanto es una función de  $|\Psi(r)|^2$ . Cerca de la temperatura crítica, el parámetro de orden  $\Psi$  tiende a cero ya que la densidad de electrones superconductores también tiende a cero, por lo tanto, es posible expandir la energía libre,  $F$ , en una serie potencias de  $\Psi$  alrededor de la temperatura crítica  $T_c$ .

En el caso más simple, un superconductor uniforme en campo magnético externo cero, el parámetro de orden no depende de la posición, por tanto la expansión de la energía libre en potencias de  $|\Psi|^2$  cerca de  $T_c$  es

$$F_s(0) = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4, \quad (1.2)$$

donde  $F_s(0)$  es la densidad de energía libre en el estado superconductor en ausencia de un campo magnético externo,  $F_n$  es la densidad de energía libre en el estado normal y  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes fenomenológicos, los cuales son característicos de cada material.

En la situación general de un superconductor no uniforme bajo la influencia de un campo magnético externo, la expansión en series de potencias de  $\Psi$  de la energía libre de Gibbs alrededor de  $T_c$  es

$$G_s = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A}\Psi)|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2, \quad (1.3)$$

donde  $G_n$  es la densidad de energía libre en el estado normal, el cuarto término es la energía cinética de los electrones superconductores y  $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$  es la densidad de energía debida al campo magnético. Además,  $e^* = 2e$  y  $m^* = 2m$  representan la carga y masa de un par de Cooper [16], donde  $e$  y  $m$  son la carga y la masa del electrón, respectivamente. Al evaluar la integral de volumen de la Ec. 1.3 y minimizar con respecto a  $\mathbf{A}$  y  $\Psi$  se obtiene la primer ecuación de GL

$$\frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (1.4)$$

con la condición de frontera

$$\mathbf{n} \cdot (-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A}) \Psi = 0, \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie del superconductor. También se obtiene la segunda ecuación de la teoría GL

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar e}{m^*} (\Psi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{4e^2}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (1.6)$$

Las ecuaciones 1.4-1.6 forman el conjunto completo de ecuaciones de Ginzburg-Landau.

### 1.5.1. Longitudes características

Las ecuaciones de Ginzburg-Landau definen dos longitudes características fundamentales en la superconductividad: la longitud de penetración,  $\lambda$  y la longitud de coherencia  $\xi$ .

La longitud de coherencia,  $\xi$ , indica la magnitud de las fluctuaciones termodinámicas en el estado superconductor

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}} \quad (1.7)$$

La longitud de penetración,  $\lambda$ , es la distancia que puede penetrar un campo magnético en una muestra en el estado superconductor

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m^*\beta}{2\mu_0 e^{*2}|\alpha|}} \quad (1.8)$$

A partir de la teoría BCS [17], Gorkov [18] encontró que las dos longitudes características  $\xi(T)$  y  $\lambda(T)$  son proporcionales a  $(T_c/(T_c - T))^{1/2}$  cuando  $T$  está cerca de la temperatura de transición  $T_c$  [19]. La razón de la longitud de penetración con la longitud de coherencia es una constante y define el parámetro de Ginzburg-Landau

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}, \quad T \rightarrow T_c \quad (1.9)$$

De acuerdo a la teoría G-L, los superconductores pueden clasificarse en dos categorías, si  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ , los superconductores poseen una energía positiva y son denotados como superconductores tipo-I; contrariamente, si  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  los superconductores poseen una energía negativa y son denotados como superconductores tipo-II.

## 1.6. Modelos de estado crítico

El concepto de estado crítico, introducido por Bean [20], es un estado en el que un superconductor responde ante cualquier cambio en el campo magnético aplicado con corrientes de blindaje o de captura, las cuales fluyen en el nivel de la corriente crítica  $J_c$ . Dicho de otro modo, el estado crítico es aquel estado en el que las distribuciones de flujo magnético y densidad de corriente permiten que la fuerza de Lorentz y la fuerza de enclavamiento estén en equilibrio,  $F_L = F_p$ . Los modelos de estado crítico describen, desde un punto de vista macroscópico, las propiedades electromagnéticas del material superconductor. La descripción se realiza al acoplar la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico (ecuación material) que proporcionan los modelos con las ecuaciones de Maxwell.

### 1.6.1. Modelo de estado crítico de Bean

El modelo de estado crítico más simple es el modelo de Bean [20]. Este modelo supone que la densidad de corriente crítica es constante e independiente del campo magnético y constante, adquiriendo únicamente tres valores  $J = 0$ ,  $J = \pm J_c$ , donde  $J_c$  es la magnitud de la densidad de corriente crítica. Específicamente la densidad de corriente  $J$  es cero en las regiones del superconductor donde el campo magnético no ha penetrado y está descrito por la expresión [3]

$$J = \begin{cases} 0, & B = 0 \\ \pm J_c, & B \neq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Las distribuciones de la inducción magnética se obtienen a partir de la ecuación

$$\nabla \times B = \mu_0 J_c. \quad (1.11)$$

La Fig. 1.6.1 muestra la correspondencia entre  $J_c$  y el gradiente de flujo  $\partial B/\partial x$  en diferentes situaciones, incluyendo la inversión del gradiente de flujo al disminuir el campo  $B_a$  después de que éste ha sido incrementado hasta un valor máximo  $B_m$ , mayor que  $B_P$ . El campo  $B_P$  es el primer campo de penetración, valor en el que el

flujo penetra hasta el centro de la muestra. El estado crítico de Bean corresponde al caso donde el flujo penetra hasta el centro de la muestra y la densidad de corriente  $J_c$  fluye en todo el superconductor [16].

El modelo de estado crítico de Bean fue generalizado al caso multicomponente [21]. Este modelo establece que *donde quiera que surja un campo eléctrico durante el proceso de magnetización, se inducirá una densidad de corriente crítica en la dirección del campo eléctrico y esta corriente persistirá aún cuando el campo eléctrico desaparezca*. Expresado de forma matemática

$$\mathbf{J} = J_c \frac{\mathbf{E}}{E}. \quad (1.12)$$

La magnitud de la densidad de corriente crítica  $J = J_c$  es el único parámetro fenomenológico empleado y puede depender de la magnitud de la inducción magnética.

El modelo de Bean reproduce resultados experimentales particularmente cuando el campo magnético aplicado varía solo en magnitud. También ha sido aplicado exitosamente en el caso de campos magnéticos que varían ligeramente en dirección, i.e. cuando el fenómeno de corte de líneas de flujo magnético es débil.

### 1.6.2. Modelos para la densidad de corriente

La densidad de corriente crítica  $J_c$  decrece, generalmente, de forma continua con el campo magnético en los superconductores reales. El modelo de Bean ha considerado constante a  $J_c$ . Sin embargo, en distintos modelos de estado crítico, se han propuesto algunas formas dependientes de la inducción magnética para la densidad de corriente crítica. En la tabla 1.2 se presentan algunas relaciones para la densidad de corriente dependientes de la inducción magnética propuestas en diferentes modelos de estado crítico. En las ecuaciones,  $B^*$  es un parámetro macroscópico de los superconductores duros, el cual puede depender de la temperatura y tiene unidades de  $B$ .

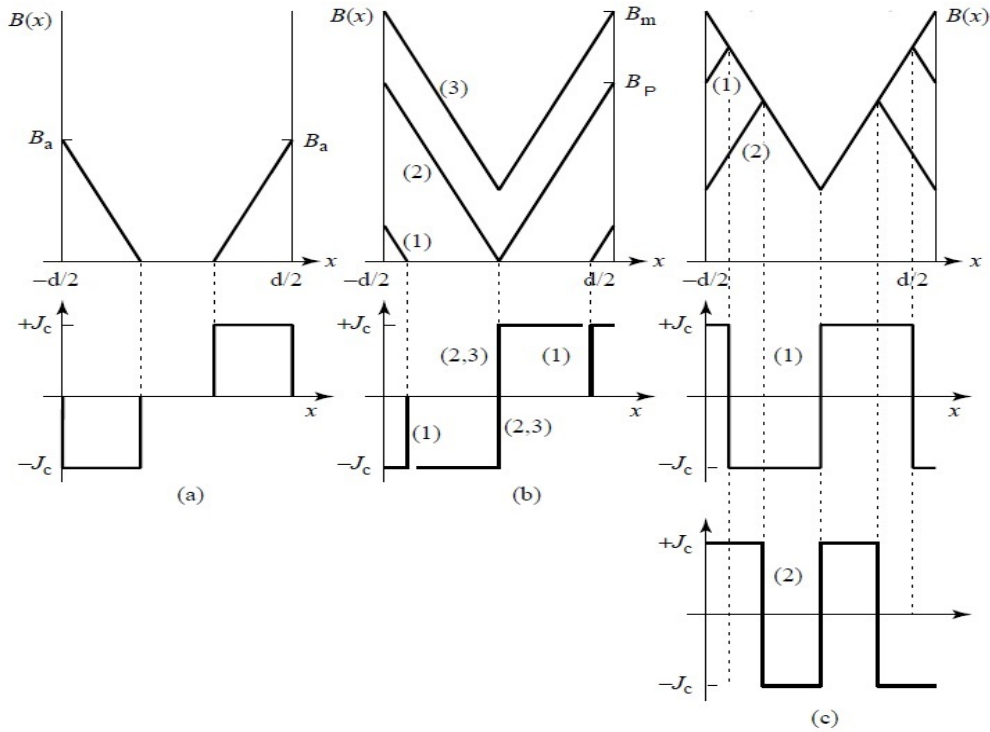


Figura 1.12: Modelo de Bean. (a) Distribución de flujo (parte superior) y su correspondiente distribución de corriente (parte inferior) después de aplicar un campo externo  $B_a$ . (b) Situación similar a la presentada en (a) etiquetada como (1); la etiqueta 2 corresponde a un incremento en el campo desde  $B_a$  hasta  $B_P$  donde el flujo magnético penetra hasta el centro de la muestra, en esta situación toda la muestra se encuentra en el estado crítico; la etiqueta (3) corresponde a un incremento del campo desde  $B_a$  hasta  $B_m > B_P$ . (c) Efecto producido al disminuir el campo aplicado, casos (1) y (2) para diferentes cantidades (Figura tomada de [16])

## 1.7. Avalanchas de flujo termomagnético

La magnetización en un superconductores suele variar discontinuamente durante el barrido del campo magnético aplicado, ver Fig. 1.7, este fenómeno es llamado saltos, brincos de flujo o avalanchas de flujo termomagnético. La penetración abrupta de los vórtices de Abrikosov da origen a este fenómeno.

Existen tres causas [3] que dan origen a los saltos de flujo. El primero es resultado de la diferencia entre la difusividad magnética  $D_M$  y la difusividad térmica  $D_T$  en el interior del superconductor. En metales normales el proceso de difusión magnética es

Tabla 1.2: Relaciones corriente-inducción magnética propuestas en distintos modelos de estado crítico [7].

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| $J(B) = J_c$                       | Bean (1962,1964)  |
| $J(B) = \frac{J_c}{B/B^*}$         | Enclavamiento fijo (Ji <i>et al.</i> , 1989; Le Blanc 1992)         |
| $J(B) = \frac{J_c}{(B/B^*)^{1/2}}$ | Raíz cuadrada (Le Blanc 1992)                                       |
| $J(B) = \frac{J_c}{1+B/B^*}$       | Kim (Kim <i>et al.</i> , 1962, 1963)                                |
| $J(B) = J_c \exp(-B/B^*)$          | Exponencial (Fietz <i>et al.</i> , 1964, 1963)                      |
| $J(B) = \frac{J_c}{(1+B/B^*)^2}$   | Cuadrática (Leta <i>et al.</i> , 1992)                              |
| $J(B) = \frac{J_c}{(1+B/B^*)^n}$   | Generalizada (Lam <i>et al.</i> ,1990; M. Xu. <i>et al.</i> , 1990) |

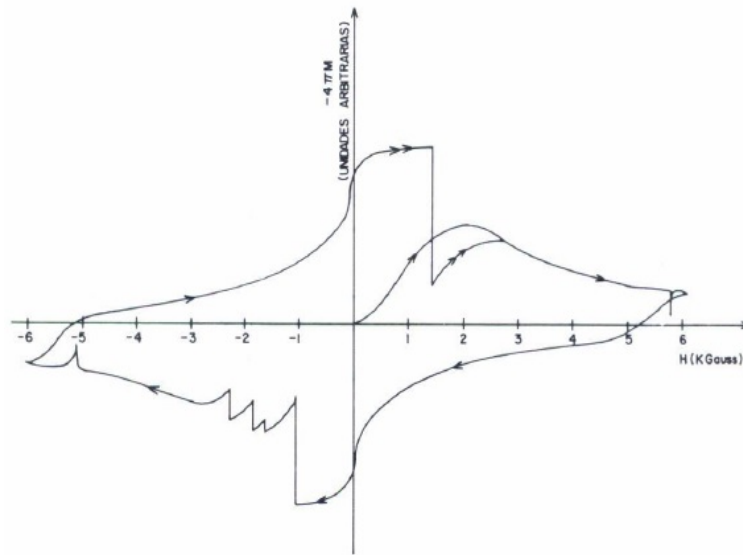


Figura 1.13: Histéresis magnética para una muestra de Nb-50%Ti en donde se observan saltos de flujo, característicos de los superconductores tipo-II de campo alto medida por Silva y Akachi en [22].

lento y el proceso de difusión térmica es rápido. Sin embargo, en superconductores, el proceso de difusión magnética es más rápido que el proceso de difusión térmica.

La segunda causa se debe a las diferencias en la temperatura entre las fuerzas de enclavamiento y de Lorentz en el interior del superconductor. La fuerza de Lorentz es independiente de la temperatura, sin embargo, la fuerza de enclavamiento de un superconductor disminuye al aumentar la temperatura. Cuando la fuerza de enclavamiento está en equilibrio con la fuerza de Lorentz, el superconductor se encuentra en el estado crítico a cierta temperatura. Ocasionalmente perturbaciones externas pueden causar un incremento en la temperatura  $\Delta T_1$  en el superconductor, lo que produce que la fuerza de enclavamiento se reduzca. Si la fuerza de enclavamiento es menor que la fuerza de Lorentz, entonces la densidad de corriente crítica disminuirá y puede penetrar más flujo magnético. A partir de la ley de Lorentz, la fuerza de enclavamiento que actúa sobre las líneas de flujo y obstaculiza su movimiento, se genera una resistencia viscosa y por lo tanto la disipación de energía manifiesta en energía térmica. Este incremento de la energía térmica secuencialmente produce un aumento en la temperatura del superconductor. De este modo se completa un ciclo de retroalimentación positiva.

Si el incremento de la temperatura en el superconductor es  $\Delta T_2 < \Delta T_1$ , la cantidad de flujo en movimiento es mínima y el aumento de temperatura también es mínimo. Entonces, el flujo se detiene y la densidad de corriente crítica se incrementa y vuelve a su valor original. Este tipo de saltos son llamados *saltos de flujo incompletos o parciales*. Sin embargo, si  $\Delta T_2 > \Delta T_1$ , la cantidad de flujo en movimiento se incrementa y la temperatura se incrementa continuamente. El fenómeno del salto de flujo ocurre ininterrumpidamente, generándose calor después de cada salto de flujo; por consiguiente, la acumulación de calor producirá un incremento en  $T$ . Se forma un ciclo de retroalimentación positiva y el estado superconductor es destruido (salto de flujo completo).

Finalmente, un salto de flujo puede ocurrir a partir de la aniquilación de flujo magnético en una región de campos magnéticos pequeños, ésta aniquilación es observable en la curva de magnetización.

### 1.7.1. Criterios de inestabilidad

La estabilidad del estado crítico depende fuertemente de la relación entre la difusividad térmica  $D_t = \kappa/C_v$  y la difusividad magnética  $D_m = \rho/\mu_0$ , en donde  $\kappa$  es la conductividad térmica,  $C_v$  es el calor específico,  $\rho = \rho_n(H/H_{c2})$  es la resistividad eléctrica con  $\rho_n$  siendo la resistividad del estado normal,  $H_{c2}$  es el segundo campo crítico y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío. En el caso particular de superconductores duros convencionales,

$$\tau = \frac{D_t}{D_m} \ll 1 \quad (1.13)$$

la ecuación 1.13 se conoce como condición “localmente adiabática”, donde la conducción de calor durante el brinco de flujo es ignorada, es decir, la estabilidad del estado crítico no es influenciada por las condiciones de enfriamiento.

El campo magnético en donde ocurre el primer brinco de flujo o avalancha, conocido como coeficiente  $H_{fj1}$  es el parámetro más estudiado pues determina la estabilidad del estado crítico. Este parámetro se correlaciona fuertemente con la profundidad crítica de penetración  $L_c$ . Particularmente cuando la densidad de corriente crítica no depende del campo magnético aplicado, sino exclusivamente de la temperatura ( $J_c(T)$ ), el coeficiente  $H_{fj1}$  puede ser calculado como:

$$H_{fj1} = L_c J_c. \quad (1.14)$$

Desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas de los superconductores, sería posible prevenir la formación de avalanchas termomagnéticas si el ancho de la muestra superconductora fuera menor que  $2L_c$ . Podemos expresar también la condición de estabilidad del estado crítico en la forma:  $H_{fj1} > H_P$ , donde  $H_P$  es el campo de penetración completa,  $H_P = J_c d$ , donde  $d$  es la mitad del espesor de la muestra estudiada. En la aproximación más simple, la muestra se considera una placa infinita con espesor  $2d$ , sometida a un campo magnético externo paralelo a su superficie. Bajo la condición localmente adiabática el campo del primer salto puede expresarse según la fórmula:

$$H_{fj1} = \sqrt{\frac{2C_v J_c}{\mu_0 \left| \frac{\partial J_c}{\partial T} \right|}}. \quad (1.15)$$

El parámetro térmico que determina la estabilidad crítica en las condiciones localmente adiabáticas es el calor específico  $C_v$ . Bajo estas condiciones la estabilidad del estado crítico no es alterada por las condiciones de enfriamiento en la superficie de la muestra superconductor.

Otra forma de definir el criterio de inestabilidad se deduce del hecho que la reducción de la densidad de corriente crítica  $J_c$  reduce la capacidad de blindaje del superconductor por un factor  $H_{sh}$ . Si el decremento del campo de blindaje, dado por:

$$\Delta H_{sh} = \mu_0 \int_d^0 \Delta J_c dx, \quad (1.16)$$

es mayor que la variación del campo externo  $\Delta H_a$ , es decir, si  $\Delta H_{sh} > \Delta H_a$ , la configuración del campo magnético se torna inestable y da lugar a una avalancha. La desigualdad  $\Delta H_{sh} > \Delta H_a$  es un criterio de inestabilidad ampliamente aplicado [23].

Una situación muy diferente a las que se han mencionado corresponde a la condición  $\tau \gg 1$ , la cual se cumple en composites superconductores y se conoce como condición “dinámica” la cual, a diferencia de la condición localmente adiabática, considera la dependencia temporal del calor, corriente y flujo magnético. Bajo esta última condición, el parámetro térmico que determina la estabilidad del estado crítico es la conductividad térmica,  $\kappa$ , o la conductividad térmica superficial,  $h$  [24].

# Capítulo 2

## Superconductores tipo-I

En el presente capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos en un cilindro superconductor de alta pureza de Tantalio (Ta) en presencia de un campo magnético aplicado paralelo y perpendicular a su eje. El cilindro tiene una cavidad perpendicular a su eje de 1 mm de diámetro, aproximadamente. Las mediciones en campo magnético paralelo se llevaron a cabo en el laboratorio del Dr. Roberto Escudero, en el Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM, en un magnetómetro de Quantum Design (MPMS). Las mediciones en campo magnético perpendicular se llevaron a cabo en el laboratorio del Dr. Adam Nabisiałek, en el Instituto de Física de la Academia Polaca de Ciencias (IFPAN), en un magnetómetro de muestra vibrante (VSM modelo 4500) de Princeton Applied Research. En ambas mediciones se tuvo la colaboración del Dr. Viktor Chabanenko del Instituto de Física y Tecnología de la Academia Nacional de Ciencias (Donetsk, Ucrania). Durante el mes de marzo de 2015 se repitieron las mediciones en geometría paralela en el PPMS adquirido en febrero de 2015 por el IFUAP.

La secciones 2.1 y 2.2 presentan el estado del arte en el estudio de superconductores tipo-I. La sección 2.3 presenta las isotermas magnéticas medidas en geometría paralela y perpendicular, así como un análisis de las mismas, finalizando con una discusión en la Secc.2.4 sobre los resultados obtenidos.

## 2.1. Estructura topológica del estado intermedio en superconductores tipo-I

La estructura del flujo magnético en el estado intermedio en superconductores tipo-I ha sido estudiado ampliamente teórica y experimentalmente [25–29]. Especial atención ha recibido la irreversibilidad magnética (histéresis) mostrada en estos superconductores [30–33]. Dicha irreversibilidad se ha atribuido generalmente a defectos o impurezas en el material, dislocaciones y barreras de contorno. Sin embargo, incluso las muestras más limpias exhiben histéresis magnética. A través de una combinación de mediciones magnéticas y magneto-ópticas (MO), se ha concluido que la histéresis magnética se debe a la diferencia de la estructura de flujo en el estado intermedio al incrementar y disminuir el campo aplicado [32, 33].

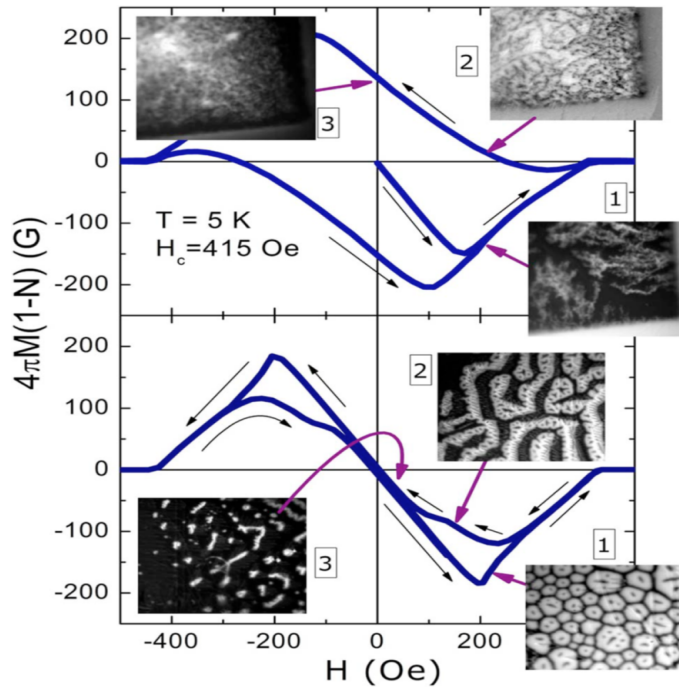


Figura 2.1: Ciclos de magnetización en una muestra con tensiones (imagen superior) y libre de tensiones (imagen inferior). Sobre cada ciclo de histéresis se muestran las imágenes MO obtenidas en los campos magnéticos indicados con las flechas, los números indican el orden en el que se obtuvieron las imágenes (Imagen tomada de [32]).

A continuación se resumen algunos resultados obtenidos por Prozorov *et al* en [32]. En dicho trabajo se ha llevado a cabo un estudio magneto-óptico en la curva de magnetización en una placa de Pb de grosor  $d = 0.1$  mm y superficie de  $1.5 \times 1.5$  mm<sup>2</sup>.

La Fig. 2.1 muestra los ciclos de magnetización correspondientes a una muestra de Pb con tensiones y libre de ellas (muestra limpia). La muestra con defectos exhibe una histéresis mayor en comparación con la muestra limpia. La histéresis aumenta al disminuir el campo magnético en la muestra con tensiones debido al enclavamiento al que dan origen. En la muestra libre de tensiones la histéresis desaparece a medida que el campo aplicado se aproxima a cero, indicando una expulsión de Meissner completa. En la misma figura se muestran las imágenes MO obtenidas en los campos indicados por las flechas a la misma temperatura. El panel superior, muestra como el flujo entra en la muestra no-uniformemente, en forma dendrítica. La Fig. 2.2 muestra con mayor detalle la evolución de los patrones de flujo en la muestra libre de tensiones en 6 K. Después de un proceso ZFC, un ciclo de histéresis magnética es medido al aplicar un campo magnético mayor al campo crítico ( $H_c \approx 260$  Oe). Los círculos son medidos en ZFC a 6 K y posteriormente se incrementa el campo, los cuadros corresponden a mediciones en FC a la misma temperatura. Imágenes MO muestran la evolución de la estructura del flujo magnético en los campos indicados por las flechas en la misma figura. El estado de Meissner es observado en el punto 1 (muestra completa, un zoom es realizado en puntos posteriores); el estado intermedio es establecido en el punto 2, no como una estructura laminar, sino como un ensamble tubular de regiones normales separados por regiones superconductoras. Las imágenes MO muestran que los tubos de flujo poseen una variedad de estructuras, desde simples monodominios (topología cerrada) hasta estructuras complejas en forma de laberinto (topología abierta). Patrones similares han sido obtenidos en In, Re, Sn, y Hg; la topología cerrada (estructura tubular), parece ser una característica general del estado intermedio en superconductores tipo-I (libres de impurezas y defectos) cuando el campo magnético penetra la muestra.

Otro estudio similar, realizado también por Prozorov [33], fue llevado a cabo para estudiar el efecto del enclavamiento en bulto y la barrera geométrica en la estructu-

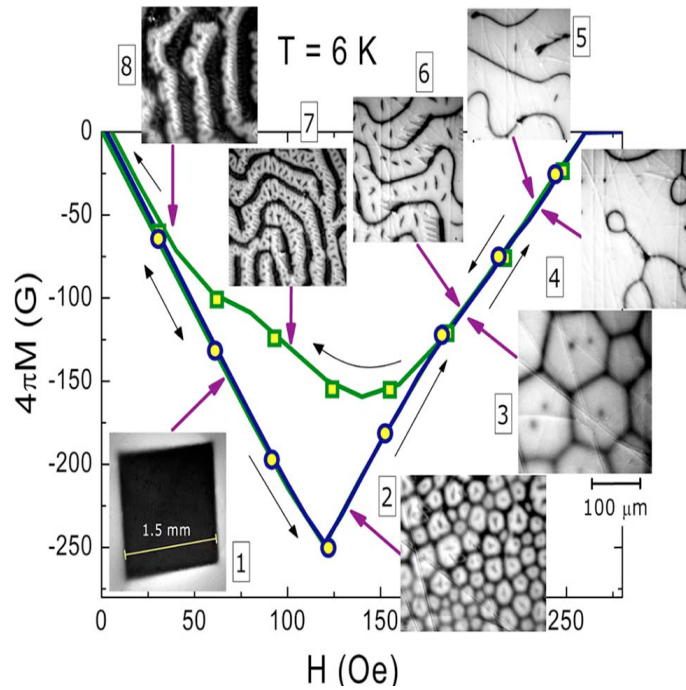


Figura 2.2: Ciclo de histéresis en una muestra libre de tensiones, los recuadros muestran las imágenes MO. Los círculos muestran las mediciones en ZFC y los cuadros en FC (Imagen tomada de [32]).

ra de equilibrio del estado intermedio. Un resumen de los resultados reportados se presenta a continuación. Las formas estudiadas fueron discos, hemisferios, esferas y conos de Pb. Las últimas dos geometrías no exhiben barrera geométrica, tal y como los resultados experimentales lo muestran; sin embargo, sí exhiben la estructura tubular del flujo cuando éste entra y sale del superconductor, lo cual indica que la estructura tubular del flujo magnético representa una topología de equilibrio de los superconductores tipo-I. La Fig. 2.3 muestra las imágenes MO para un disco de Pb de diámetro  $d = 5$  mm y grosor  $t = 1$  mm (las observaciones experimentales indican enclavamiento en bulto cero). La histéresis observada en dicha muestra (ver Fig. 1 en la Ref. [33]) se debe a la diferencia en las topologías del estado intermedio cuando el flujo entra y sale. La columna de la izquierda en la Fig. 2.3 muestra la evolución de la penetración de flujo (topología cerrada), la columna derecha muestra la salida del mismo (topología abierta).

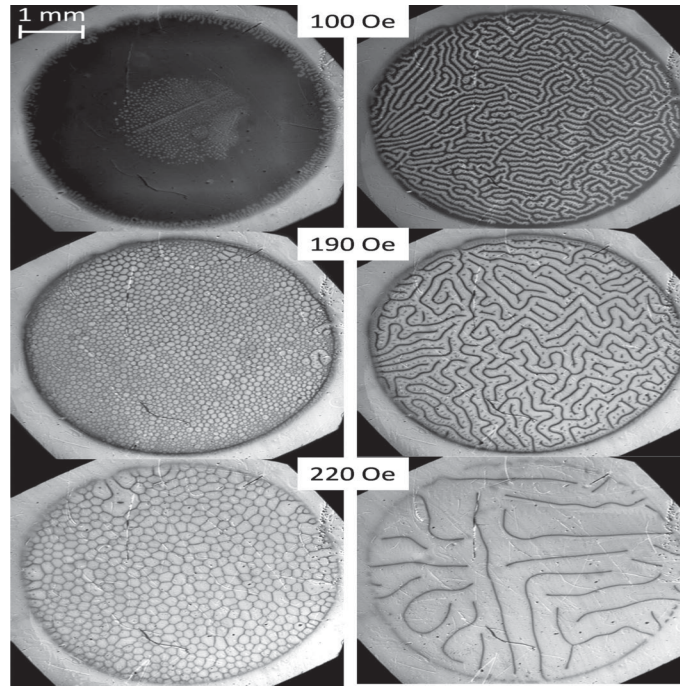


Figura 2.3: Estructura del estado intermedio en un disco de Pb a una temperatura de 5 K. (Izquierda) Estructura tubular o topología cerrada del flujo magnético al incrementar el campo magnético después de un proceso ZFC. (Derecha) Estructura laminar o topología abierta al disminuir el campo magnético (Imagen tomada de [33]).

## 2.2. Supra espuma (espuma superconductora)

La estructura tubular, en superconductores tipo-I sin enclavamiento, en densidades suficientemente altas evoluciona hacia una nueva fase topológica llamada *supra espuma*<sup>1</sup> o espuma superconductora (*suprafroth* en inglés) bien definida [34–36]; en películas no se ha observado éste fenómeno [34]. En esta supra espuma, las fronteras de las celdas son superconductoras y el interior de las mismas son regiones normales.

La estructura de la espuma superconductora (supra espuma) en el diagrama de fase H-T para un superconductor tipo-I se muestra en la Fig. 2.4. La espuma superconductora aparece únicamente cuando el flujo entra, después de un proceso ZFC, como es indicado por la trayectoria que siguen las flechas rojas [36].

<sup>1</sup>La nueva fase topológica es llamada *supra espuma*, recordando los primeros descubrimientos cuando los superconductores fueron llamados *supraconductores* [34]

Las imágenes MO muestran la evolución de la estructura de flujo cuando el campo magnético es aplicado. Inicialmente, los tubos de flujo que son separados por regiones superconductoras, son inyectados en la muestra (recuadro inferior derecho en la Fig. 2.4). A medida que el número de tubos se incrementa, estos se fusionan y su tamaño también aumenta. Al continuar incrementando el campo aplicado, las fuerzas repulsivas entre los tubos finalmente conducen a la formación de la supra espuma con una estructura celular poligonal bien definida (ver recuadro superior derecho en 2.4). Esta estructura se degrada cuando el campo magnético se aproxima al campo crítico,  $H_c$ , formando celdas cóncavas extendidas con bordes curvos. La estructura de la espuma superconductora es completamente diferente de aquella que poseen los superconductores tipo-II, donde el campo magnético dentro del material existe en la forma de vórtices de Abrikosov; cada uno llevando un cuanto de flujo y la supra espuma no puede formarse.

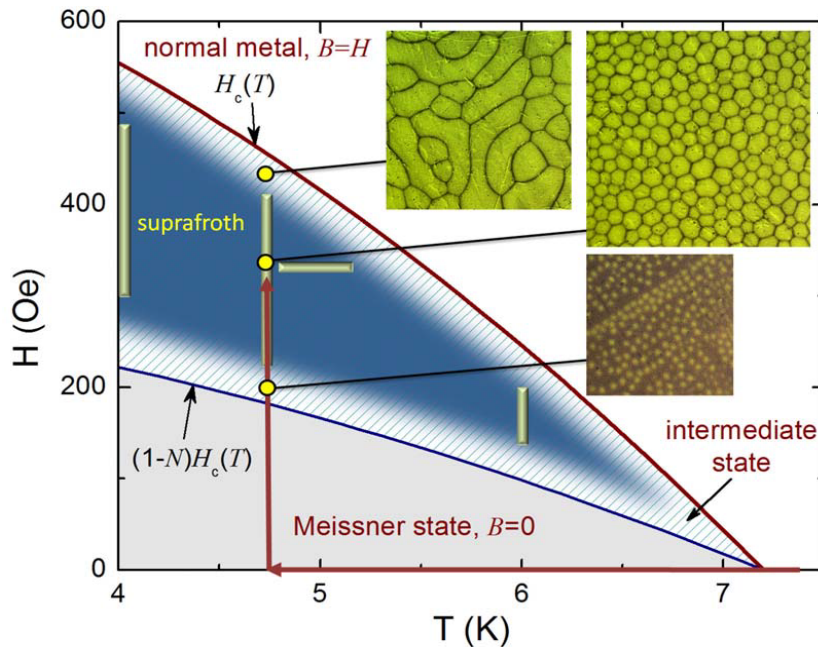


Figura 2.4: Supra espuma o espuma superconductora en el diagrama H-T de un disco de Pb (diámetro,  $d = 5$  mm). La región punteada corresponde al estado intermedio, la región sólida (azul) corresponde a la espuma superconductora. Los recuadros izquierdo e inferior derecho muestran la estructura del flujo en el estado intermedio, fuera de la supra espuma. El recuadro superior derecho muestra la estructura del *suprafroth* (Imagen tomada de [35])

La dependencia en el campo aplicado del engrosamiento de la espuma superconductora se muestra en la Fig. 2.5 (renglón superior). Las imágenes fueron obtenidas en 6 K, después de un proceso ZFC, en campos aplicados de 190, 207 y 220 Oe. En el renglón inferior de la misma figura, se muestra la dependencia en la temperatura del engrosamiento de la supra espuma cuando se aplica un campo  $H = 320$  Oe.

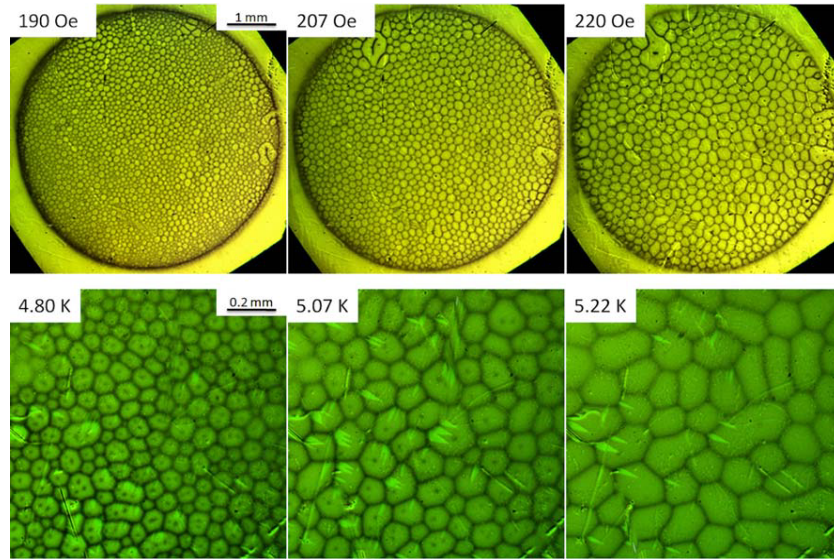


Figura 2.5: Imágenes MO para un disco de Pb de diámetro  $d = 5$  mm. Renglón superior: dependencia en el campo aplicado del engrosamiento del *suprafroth* en 6 K (vista de la muestra completa). Renglón inferior: dependencia en la temperatura del engrosamiento del *suprafroth* en un campo  $H = 320$  Oe, imagen mostrada en una región de  $1 \times 1$  mm<sup>2</sup> del disco (Imagen tomada de [37]).

### 2.3. Resultados experimentales

Las mediciones magnéticas, en un cilindro superconductor de Ta, se llevaron a cabo al aplicar un campo magnético de intensidad mayor que el correspondiente campo crítico  $\mu_0 H_c(T)$ , valor en donde la magnetización se anula, para diferentes temperaturas en el rango de 1.7-4.0 K. El valor de la temperatura en donde inicia la transición diamagnética o temperatura crítica corresponde a  $T_{c,onset} = T_c = 4.4$  K,

la cual es determinada a partir de la curva Magnetización versus Temperatura (ver Fig.2.6) medida en un campo de 3 mT siguiendo la trayectoria ZFC (enfriamiento en campo cero) y FC (enfriamiento en campo). En la Ref. [38] el valor reportado es de  $T_c = 4.47$  K.

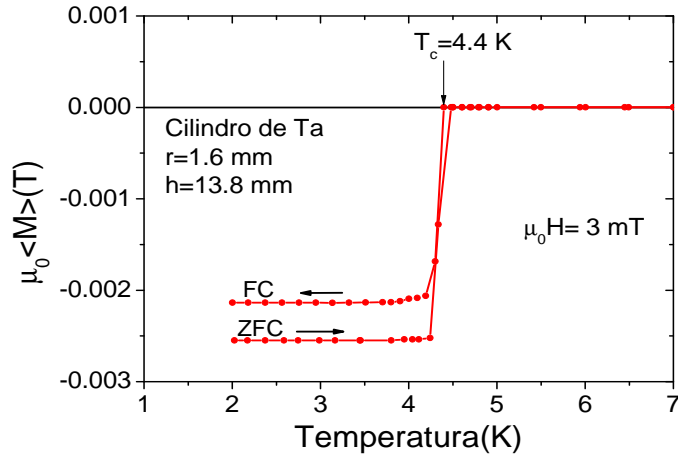


Figura 2.6: Dependencia en la temperatura de la magnetización para un cilindro de Ta en la trayectoria ZFC y FC en un campo de 3 mT. La irreversibilidad de la curva ocurre al alcanzar el valor crítico de la temperatura,  $T_c$ .

### 2.3.1. Curvas de magnetización en geometría paralela

La Fig. 2.7 muestra las curvas de magnetización en diferentes temperaturas cuando el campo aplicado es paralelo al eje del cilindro de Ta. Cada medición fue realizada después de destruir el estado superconductor al calentar la muestra hasta una temperatura  $T > T_c$  y enfriar en campo cero (ZFC) hasta la temperatura deseada,  $T < T_c$  (estas mediciones fueron repetidas en el PPMS del IFUAP el 2 y 3 de marzo de 2015, ver Fig. 2.10). El análisis de las curvas se llevó a cabo, sin considerar por el momento, la región en campos cercanos a cero.

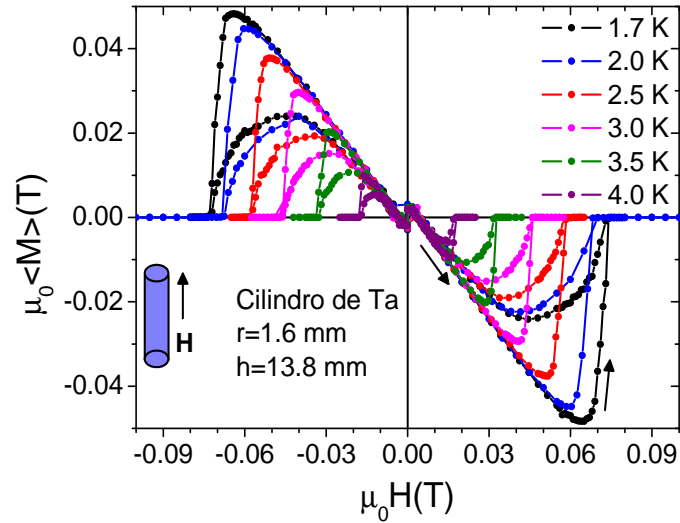


Figura 2.7: Ciclos de histéresis  $M(H)$  medidos a diferentes temperaturas para un cilindro de Ta en geometría paralela.

El estudio de la irreversibilidad magnética en diferentes muestras superconductoras tipo-I de Pb ha sido reportado en [30, 31, 33]. Específicamente, el estudio de la influencia de la temperatura en la irreversibilidad magnética en distintos discos y un cilindro de Pb ha sido reportado por Saül Vélez *et al* en [31]. El estudio es llevado a cabo en una representación reducida la cual define un estado de equilibrio para la penetración de flujo en todas las muestras y revela que la expulsión de flujo depende de la temperatura en los discos pero no en el cilindro [31].

Siguiendo la nomenclatura propuesta por Vélez, el análisis de los resultados mostrados en la Fig. 2.7 se hace en términos de las magnitudes reducidas definidas como  $m_r \equiv M/H_c$  y  $h \equiv H/H_c$ . Donde,  $M$  es la magnetización experimental,  $H$  es el campo magnético aplicado,  $H_c(T)$  es el campo crítico termodinámico experimental,  $T$  es la temperatura y  $T_c$  es la temperatura de transición superconductor. La magnitud reducida  $m_r$  es normalizada al valor máximo de  $|m_r|$  en el ciclo de 1.7 K,  $m(h, T) \equiv m_r(h, T)/m_{r,max}(1.7 \text{ K})$ .

La Fig. 2.8a muestra los ciclos de histéresis para las temperaturas  $T = 1.7, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$  y  $4.0$  K en la representación reducida (ver también la Fig. 2.10). En el

panel *b* de la misma figura 2.8 se muestran los ciclos de histéresis para un cilindro de Pb de radio  $r = 1.5$  mm y altura  $h = 3$  mm reportados en [31] ( $T_c = 7.23$  K).

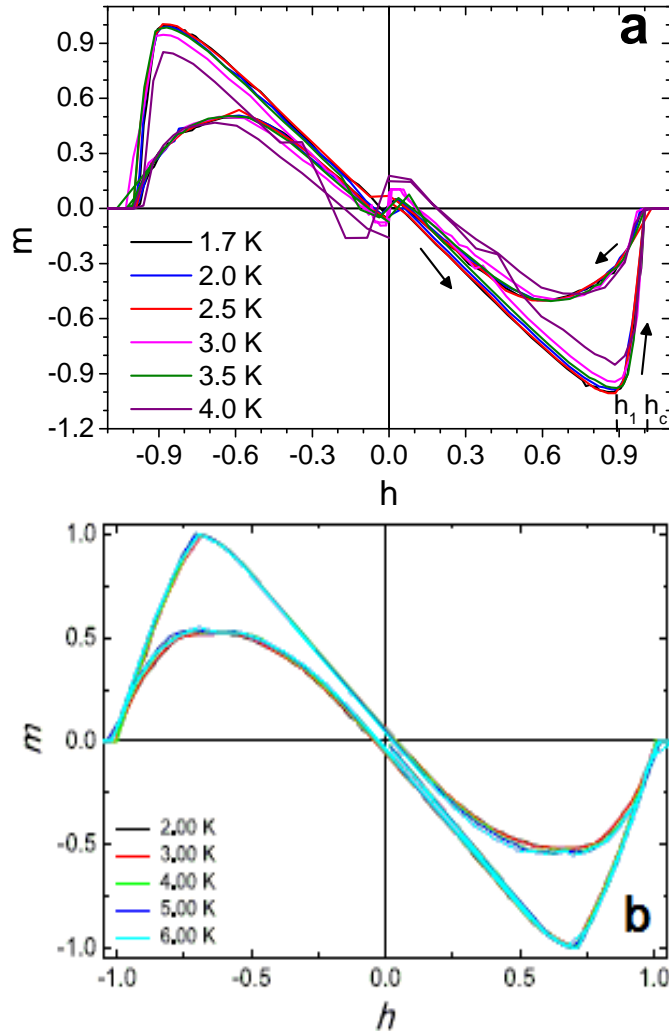


Figura 2.8: Geometría paralela: a) Curva de histéresis para un cilindro de Ta. b) Curva de histéresis para un cilindro de Pb de radio  $r = 1.5$  mm y altura  $h = 3$  mm (Gráfica tomada de [31])

Las características principales del panel *a* se describen a continuación. Al incrementar el campo aplicado en el intervalo  $0 < h \leq 1$ , sin considerar las regiones con  $H \approx 0$ , las curvas para  $T = 1.7, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$  y  $4.0$  K poseen un mínimo en  $h_1 \sim 0.88$ , este punto divide el estado de Meissner del estado intermedio. El estado intermedio está definido en el intervalo  $h_1 < h \leq h_c = 1$ , en el punto  $h_c$  la magnetización

se desvanece manteniendo su valor nulo en el estado normal,  $h > 1$ . Las curvas de histéresis prácticamente se traslapan,  $m(h, T) \approx m(h)$ . Este hecho sugiere que el proceso de penetración de flujo es prácticamente independiente de la temperatura [31], cuando  $T = 4.0$  K el flujo magnético entra más fácilmente en la muestra. Enseguida, al disminuir el campo aplicado desde el estado normal, se determina el campo de irreversibilidad magnética ( $h^*$ ), el cual se define como el punto donde la curva de magnetización descendente se desvía de la ascendente. En la muestra cilíndrica de Ta el campo de irreversibilidad magnética coincide con el campo crítico termodinámico,  $h^* = h_c = 1$ ; a diferencia de la muestra cilíndrica de Pb, la cual exhibe una región reversible hasta el campo  $h^* = 0.8$  (ver Fig. 2.8b).

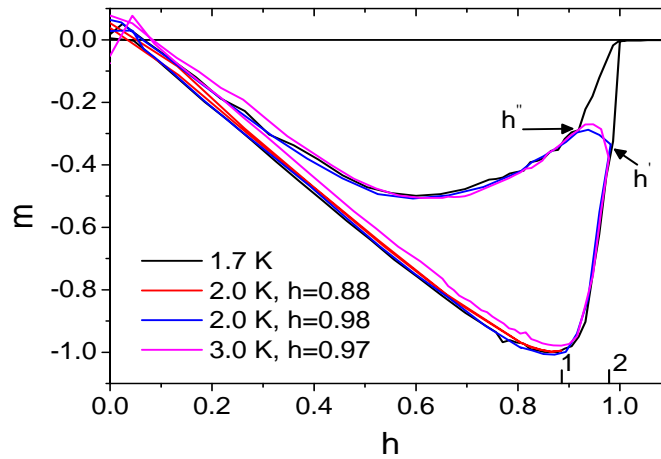


Figura 2.9: Subciclos de histéresis para  $T=2.0, 3.0$  K cuando el campo aplicado es paralelo al eje del cilindro. Los puntos 1 y 2 corresponden a  $h=0.88$  y  $h=0.98$  a una temperatura  $T=2.0$  K. El punto 2 corresponde a  $h=0.98$  a una temperatura  $T=3.0$  K. El ciclo de histéresis completo para  $T=1.7$  K también se muestra.

La Fig. 2.9 muestra los subciclos de histéresis medidos en las temperaturas  $T=2.0$  y  $T=3.0$  K al aplicar un campo magnético,  $h < h_c$ , paralelo al eje del cilindro (vea también los paneles *b*), *c*) y *d* de la Fig. 2.10). Al incrementar el campo desde cero hasta el punto 1 ( $h=0.88$ ), el superconductor se encuentra en el estado de Meissner y la magnetización es completamente reversible.

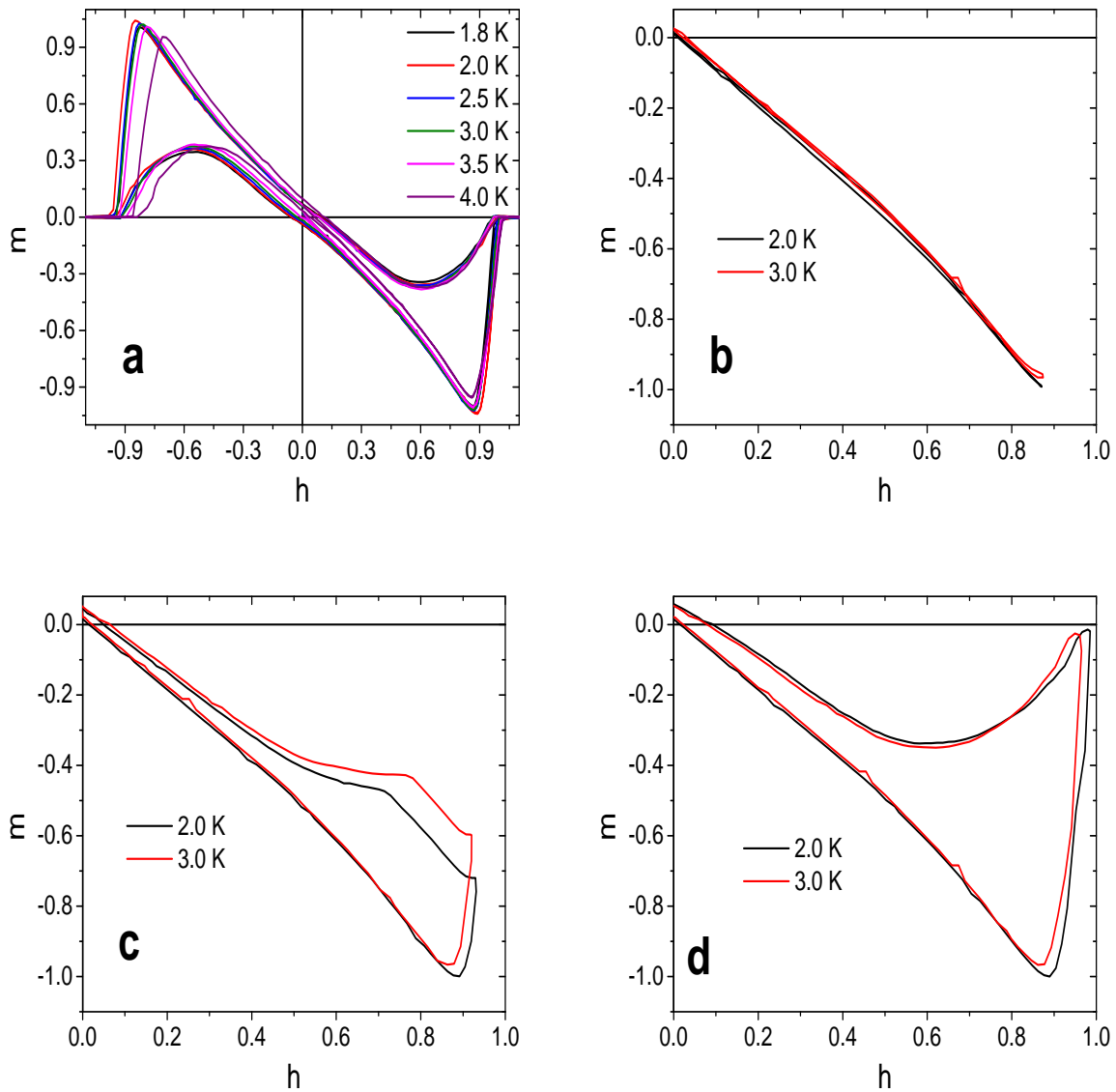


Figura 2.10: Curvas de magnetización en la representación reducida para un cilindro de Ta, cuando el campo aplicado es paralelo al eje de la muestra, medidas el 2 y 3 de marzo de 2015 en las instalaciones del IFUAP. a) Curvas de histéresis magnética medidas a diferentes temperaturas. b) Subciclos de histéresis magnética en 2 y 3 K en el estado de Meissner. c) y d) subciclos de histéresis magnética en 2 y 3 K en el estado intermedio. En todas las mediciones se observa un paramagnetismo inicial, el cual se acentúa en temperaturas cercanas a  $T_c$ .

La irreversibilidad magnética, a medida que el campo aplicado se incrementa desde

cero hasta el punto 2, es establecida en el punto  $h^* = h'$ . El punto en donde ambos subciclos se unen a la curva de 1.7 K está ubicado en  $h = h''$ . Las regiones que comparten los subciclos de histéresis con el ciclo completo  $m(h)$  en 1.7 K se debe a que la estructura de flujo en el estado intermedio en dichas regiones es la misma en las tres temperaturas, incluso en la región  $h' - h''$ . Subciclos de histéresis similares han sido reportados únicamente a una temperatura de 3.0 K en la Ref. [30], para un cilindro de Pb.

### Comportamiento no lineal en la región de campos cercanos a cero

Mediciones en la región de campos cercanos a cero, en geometría paralela, en diferentes temperaturas fueron realizadas. Las curvas de magnetización en todos los casos, incluyendo la medición a  $T=5.0$  K, muestran un comportamiento no lineal (ver Fig. 2.11). Este comportamiento puede ser atribuido a diferentes factores, como son: la cavidad presente en la muestra, resolución insuficiente del equipo al realizar las mediciones, errores intrínsecos al realizar el experimento ( las mediciones magnéticas realizadas en la misma muestra en las instalaciones del IFUAP, han mostrado que este comportamiento no lineal se debe a errores de caracter experimental al realizar las mediciones, ver Fig. 2.10). Finalmente, en todas las mediciones en geometría paralela se observa un paramagnetismo inicial, el cual se acentúa en temperaturas cercanas a  $T_c$ , un estudio más a fondo es necesario para dilucidar este comportamiento.

### 2.3.2. Curvas de magnetización en geometría perpendicular

Contrariamente al caso paralelo, cuando el campo magnético aplicado es perpendicular al eje del cilindro, las curvas de magnetización obtenidas son prácticamente reversibles (ver Fig. 2.12 para  $T = 2.2, 3.0, 4.2$  K). Este hecho confirma que el cilindro superconductor de talio es un superconductor tipo-I. Un estudio similar ha sido llevado a cabo en [31], en donde la curva de magnetización en geometría perpendicular también es completamente reversible para un disco de Pb de grosor  $d = 0.2$  mm y área  $40$  mm<sup>2</sup>. Similarmente, en [30] la curva de histéresis es completamente reversible en geometría perpendicular en una muestra cilíndrica de radio  $r = 1.5$  mm y altura

$h = 3$  mm de Pb.

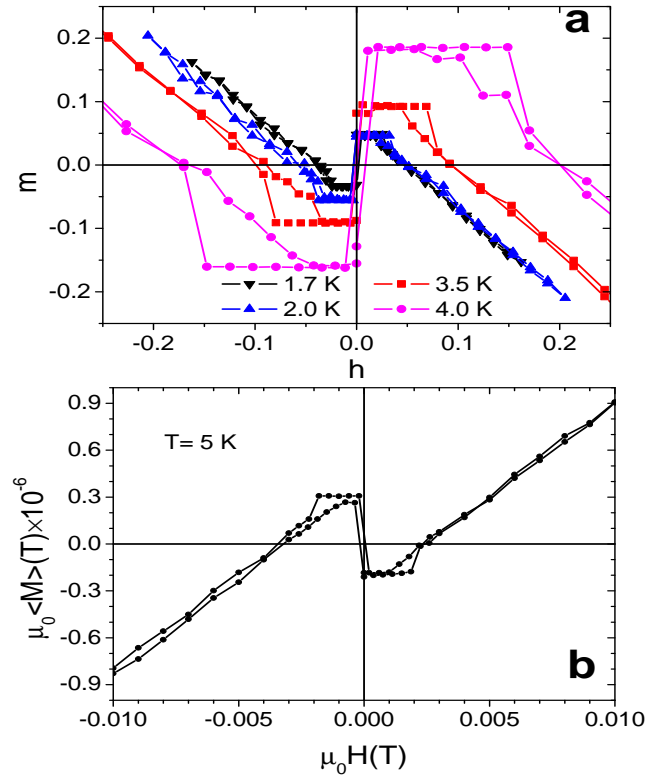


Figura 2.11: Comportamiento no lineal en campos cercanos a cero para  $T < T_c$  y  $T = 5.0 K > T_c$ .

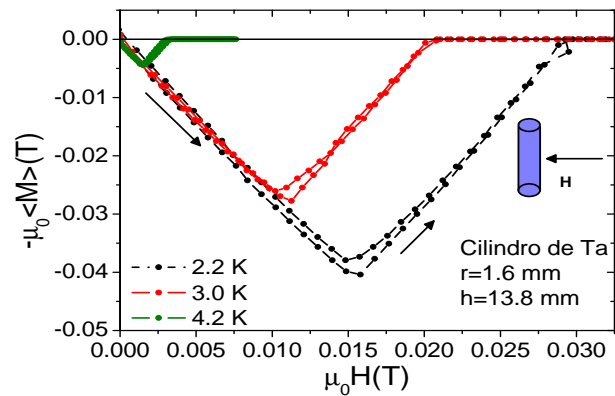


Figura 2.12: Curvas de magnetización en geometría perpendicular a diferentes temperaturas.

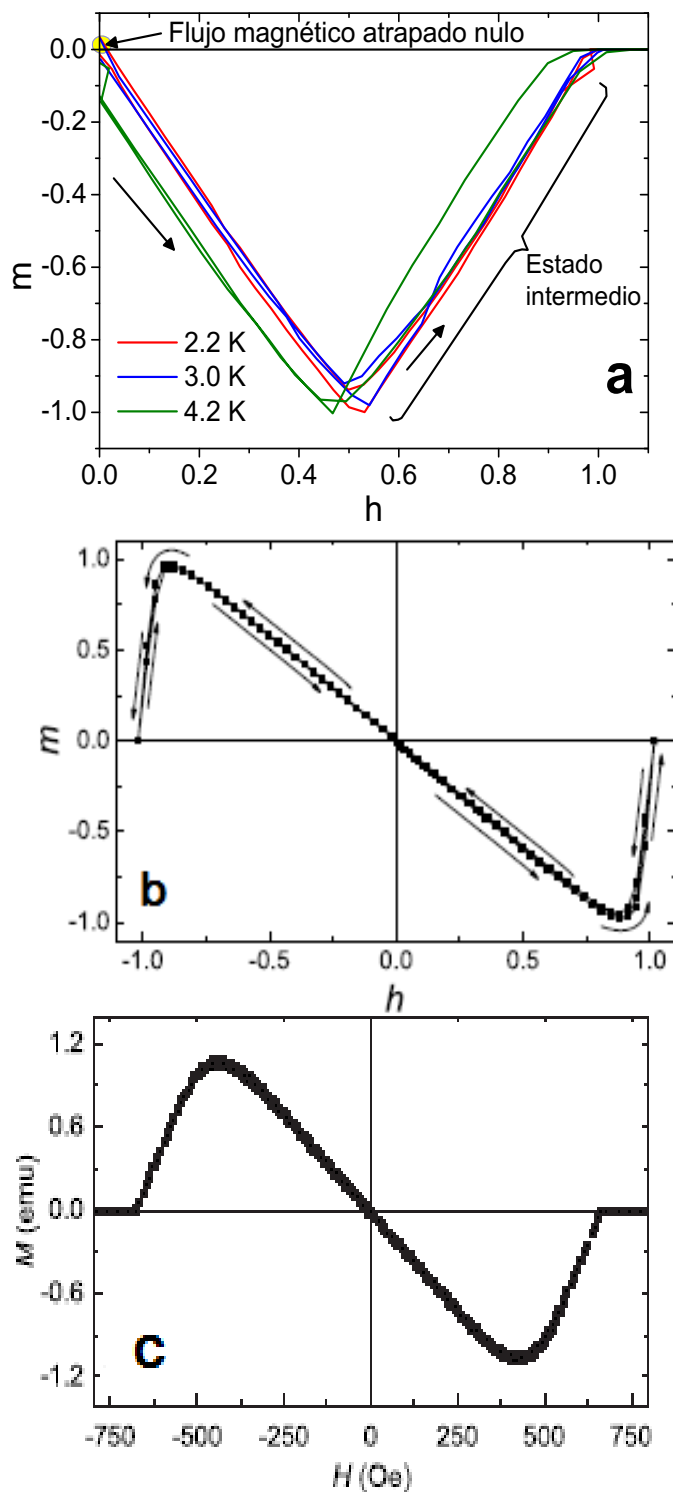


Figura 2.13: Curvas de histéresis en geometría perpendicular en: a) un cilindro de Ta, b) un disco de Pb de grosor  $d = 0.2$  mm y área  $40 \text{ mm}^2$  (Gráfica tomada de [31]) y c) cilindro de Pb de radio  $r = 1.5$  mm y altura  $h = 3$  mm (Gráfica tomada de [30]).

### 2.3.3. Diagrama de fases

La dependencia en la temperatura de los campos  $H_c$  y  $H_1$  (en geometría paralela y perpendicular) se muestra en la Fig. 2.14, los círculos y triángulos representan a  $H_c$  y  $H_1$  respectivamente, obtenidos a partir de las curvas experimentales de magnetización (ver Figs. 2.7 y 2.12).

El valor del campo crítico termodinámico ( $H_c$ ) es el valor del campo magnético en donde la magnetización se anula ( $M(H_c) \sim 0$ ). Similarmente, se obtiene el campo en donde ocurre la transición del estado de Meissner al estado intermedio,  $H_1$  ( $h_1$  en la representación reducida), el cual es el campo en donde se mide la máxima magnitud de la magnetización al incrementar el campo aplicado (ver Figs. 2.7 y 2.12).

En geometría paralela, debido a que el campo en donde inicia la irreversibilidad magnética coincide con el campo crítico termodinámico ( $h^* = h_c$ ), el estado intermedio únicamente muestra el régimen irreversible de la configuración de flujo. El régimen reversible únicamente es observado en geometría perpendicular, ( $h^* = h_1$ ). El panel *c* de la Fig. 2.14 muestra los campos críticos termodinámicos en geometría paralela y perpendicular, en general  $H_\perp < H_\parallel$ , comportamiento también observado en una película de indio [39]. Los resultados reportados en [30], en geometría paralela, para una muestra de Pb indican que el estado intermedio es dividido en dos regiones, de reversibilidad e irreversibilidad.

Los datos experimentales para el campo crítico termodinámico, en geometría paralela y perpendicular, pueden ajustarse en buen acuerdo mediante la expresión empírica [4, 40]

$$\mu_0 H_c = \mu_0 H_{c0} \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right), \quad (2.1)$$

donde  $\mu_0 H_{c0}$  es el campo crítico extrapolado en  $T = 0$  K,  $T$  es la temperatura y  $T_c$  es la temperatura crítica. Una expresión análoga a la Ec. 2.1 es empleada para ajustar los datos experimentales del campo  $\mu_0 H_1$  para ambas geometrías, donde el campo extrapolado en 0 K es  $\mu_0 H_{0,1}$ ; en la Fig. 2.14 los símbolos  $\parallel$  y  $\perp$  se refieren a la geometría paralela y perpendicular, respectivamente. Los valores extrapolados en 0 K para  $\mu_0 H_{c0}$  y  $\mu_0 H_{0,1}$  se muestran en la Tabla 2.1 de acuerdo a la geometría.

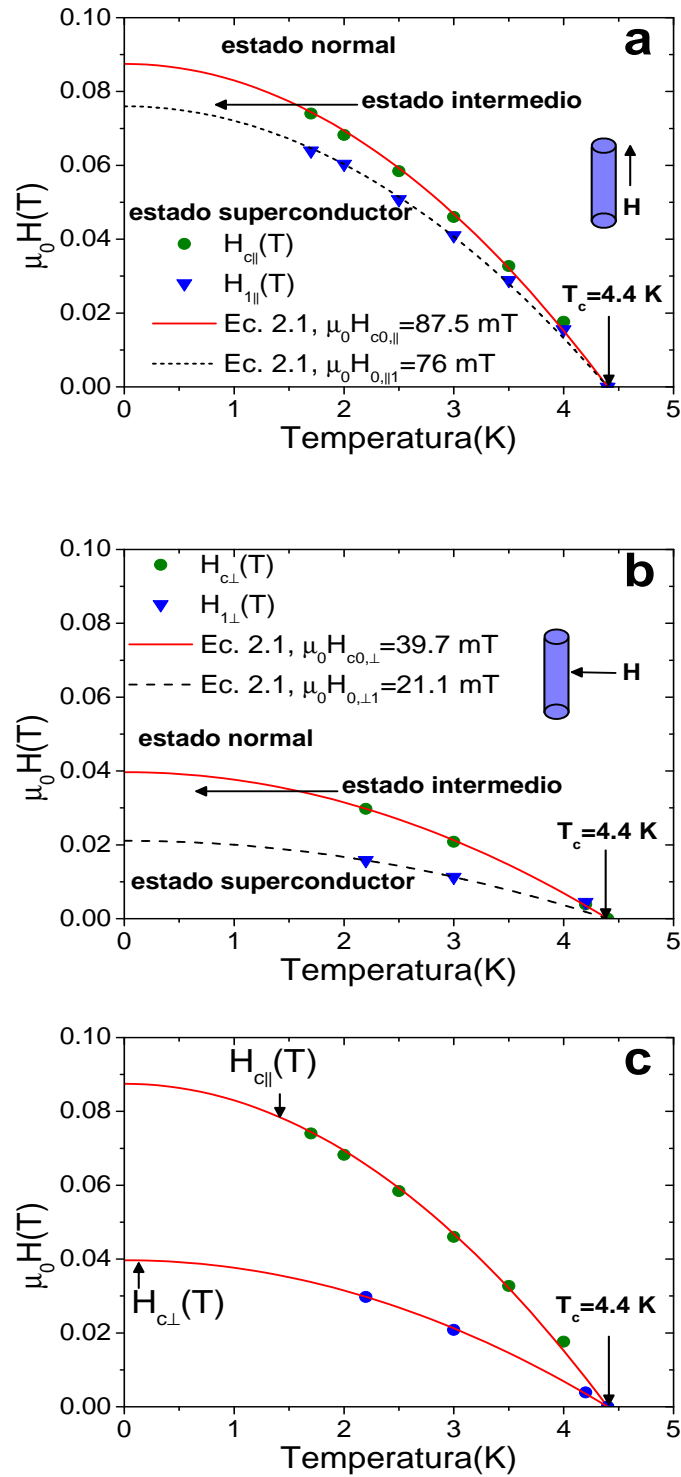


Figura 2.14: Dependencia en la temperatura del campo magnético.  $H_1$  corresponde al inicio del estado intermedio (triángulos) y  $H_c$  corresponde al campo crítico termodinámico (círculos).

Tabla 2.1: Valor de los campos extrapolados en 0 K,  $\mu_0 H_{c0,1}$  y  $\mu_0 H_{c0}$  en la Ec. 2.1, en geometría paralela y perpendicular.

| Geometría     | $\mu_0 H_{0,1}$ (mT) | $\mu_0 H_{c0}$ (mT) |
|---------------|----------------------|---------------------|
| Paralela      | 76                   | 87.5                |
| Perpendicular | 21.1                 | 39.7                |

## 2.4. Discusión

La irreversibilidad en las curvas de magnetización, cuando el campo aplicado es paralelo al eje, es atribuida a la presencia de una barrera geométrica que depende de la forma de la muestra y de la orientación del campo aplicado [27, 41, 42]. Además, el hecho de que la magnetización remanente tienda a cero, confirma la influencia de la barrera geométrica en la irreversibilidad magnética; fenómeno también observado en un cilindro de Pb en la Fig. 2.8b.

La barrera geométrica está presente en muestras que poseen dos superficies paralelas y perpendiculares a la dirección del campo aplicado; además, controla la transición entre el estado laminar y tubular, así como también la capacidad de expulsar el flujo atrapado en procesos independientes de la temperatura [30]. En la Fig 2.8 la estructura tubular, observable únicamente en muestras superconductoras tipo-I sin enclavamiento [33], es formada a medida que el campo se incrementa desde  $h_1$  hasta  $h_c$ . Esta estructura tubular evoluciona a lo que se llama la *supra espuma* [34–36], cuya región abarca casi la totalidad del diagrama de fase H-T y finalmente se divide en una estructura laminar en valores próximos a  $h_c$ , cerca de este punto las regiones normales incrementan su tamaño. Cuando se disminuye el campo desde  $h_c$ , el flujo magnético en forma laminar permanece atrapado en el cilindro. A medida que el campo tiende a cero, la estructura laminar evoluciona hacia la tubular en un esfuerzo por salir de la muestra [30, 33]. Cuando el campo disminuye a partir de  $h_c$ , en geometría perpendicular, el patrón laminar regresa fácilmente a la estructura tubular [30, 43].

Los resultados expuestos del estudio de la irreversibilidad magnética y el estudio de la influencia de la temperatura en la misma, aportan un mejor entendimiento del

estado intermedio en una muestra cilíndrica de tantalio, el cual no ha sido reportado aún.

La repetición del experimento en la misma muestra, ha mostrado que el comportamiento no lineal en regiones cercanas a campos cero se debe a errores de carácter experimental cuando se realizaron las mediciones magnéticas en el Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM.

# Capítulo 3

## Superconductores tipo-II sin enclavamiento

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos en un cilindro superconductor tipo-II de niobio (Nb) de alta pureza y sin enclavamiento, con una razón de resistencia residual  $\rho_{300}/\rho_{10} \approx 1500$ , en presencia de un campo magnético aplicado paralelo y perpendicular el eje del cilindro. Las mediciones en campo magnético paralelo se llevaron a cabo en el laboratorio del Dr. Roberto Escudero, en el Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM, en un magnetómetro de Quantum Design (MPMS). Las mediciones en campo magnético perpendicular se llevaron a cabo en el laboratorio del Dr. Adam Nabałek, en el Instituto de Física de la Academia Polaca de Ciencias (IFPAN), en un magnetómetro de muestra vibrante (VSM modelo 4500) de Princeton Applied Research. En ambas mediciones se tuvo la colaboración del Dr. Viktor Chabanenko del Instituto de Física y Tecnología de la Academia Nacional de Ciencias (Donetsk, Ucrania).

### 3.1. Resultados experimentales

Las mediciones magnéticas se realizaron al aplicar un campo magnético de intensidad mayor que el segundo campo crítico  $\mu_0 H_{c2}(T)$ , valor en donde la magnetización se anula, para diferentes temperaturas en el rango de 1.7-7.50 K. El valor de la tempe-

ratura en donde inicia la transición diamagnética o temperatura crítica corresponde a  $T_{c,onset} = T_c = 9.2$  K, la cual es determinada a partir de la curva Magnetización versus Temperatura medida en un campo de 5 mT siguiendo la trayectoria ZFC (enfriamiento en campo cero) y FC (enfriamiento en campo), ver Fig. 3.1. En la Ref. [38] el valor reportado es  $T_c = 9.25$  K.

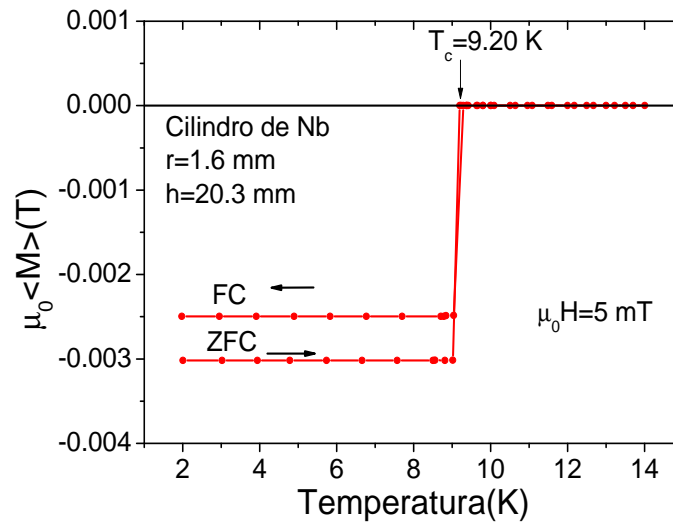


Figura 3.1: Dependencia en la temperatura de la magnetización para un cilindro de Nb en la trayectoria ZFC y FC en un campo de 5 mT. La irreversibilidad de la curva ocurre al alcanzar el valor crítico de la temperatura,  $T_c$ .

### 3.1.1. Curvas de magnetización en geometría paralela

Las curvas de magnetización medidas al aplicar un campo magnético paralelo al eje del cilindro de Nb en diferentes temperaturas son mostradas en la Fig. 3.2. Cada medición fue realizada después de destruir el estado superconductor al calentar la muestra hasta una temperatura  $T > T_c$  y enfriar en campo cero (ZFC) hasta la temperatura deseada,  $T < T_c$ . Curvas de magnetización en un alambre cilíndrico de Nb en diferentes temperaturas han sido reportadas en [44], el alambre tiene una longitud de 10.16 cm y diámetro de 0.05 cm, siendo el comportamiento de los ciclos de magnetización completamente reversible. Otro resultado experimental es reportado en

[45] para un disco de Nb de 5 mm de diámetro y de 1 mm de altura, su correspondiente curva de magnetización exhibe histéresis. Con la finalidad de comparar las curvas de magnetización, de la Fig. 3.2 se extrae la curva correspondiente a 4 K y se compara con la curva reportada por Friedman [45] para un disco de Nb en 4.2 K (ver Fig. 3.3). En ambas curvas se observa una región de reversibilidad, la cual es menor para el disco. Además, una región considerable de la magnetización permanece en la región diamagnética; sin embargo, el flujo atrapado por la muestra cilíndrica es menor que en el disco.

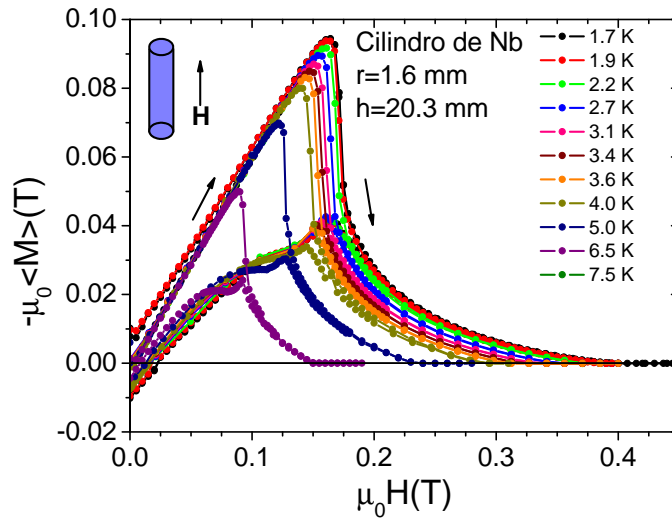


Figura 3.2: Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento como función del campo aplicado paralelo al eje de la muestra para diferentes temperaturas.

El análisis de las curvas de magnetización de la Fig. 3.2 se lleva a cabo en una representación reducida en términos del primer y segundo campo crítico, representación similar a la empleada en el capítulo anterior. Se definen las cantidades reducidas como  $m_{r1} \equiv M/H_{c1}$  y  $h_1 \equiv H/H_{c1}$ . Donde,  $M$  es la magnetización experimental,  $H$  es el campo magnético aplicado,  $H_{c1}(T)$  es el primer campo crítico experimental,  $T$  es la temperatura y  $T_c$  es la temperatura de transición superconductor. La magnitud reducida  $m_{r1}$  es normalizada al valor máximo de  $|m_{r1}|$  en el ciclo de 1.7 K,

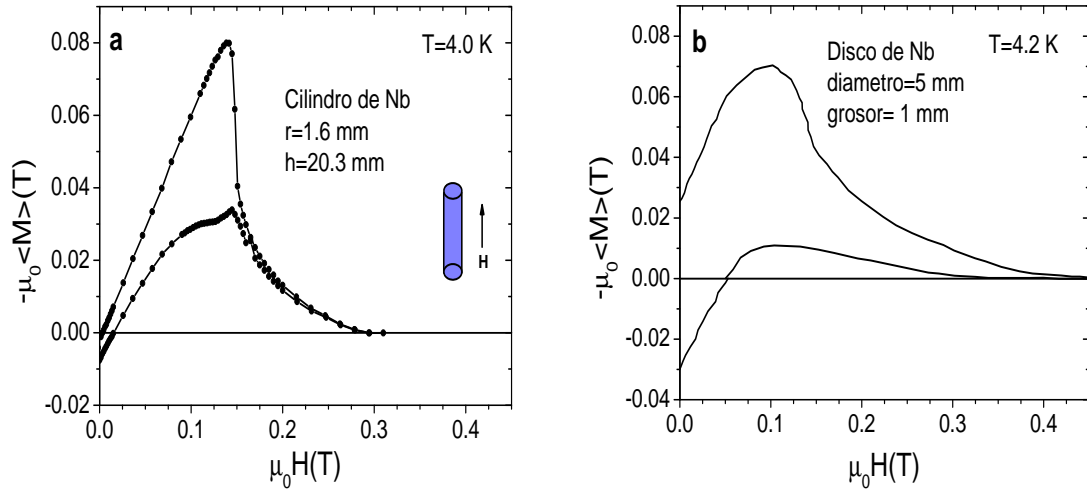


Figura 3.3: Curvas experimentales de magnetización a) para un cilindro a una temperatura  $T = 4.0$  K y b) para un disco a una temperatura de  $T = 4.2$  K (Gráfica tomada y adaptada de [45]).

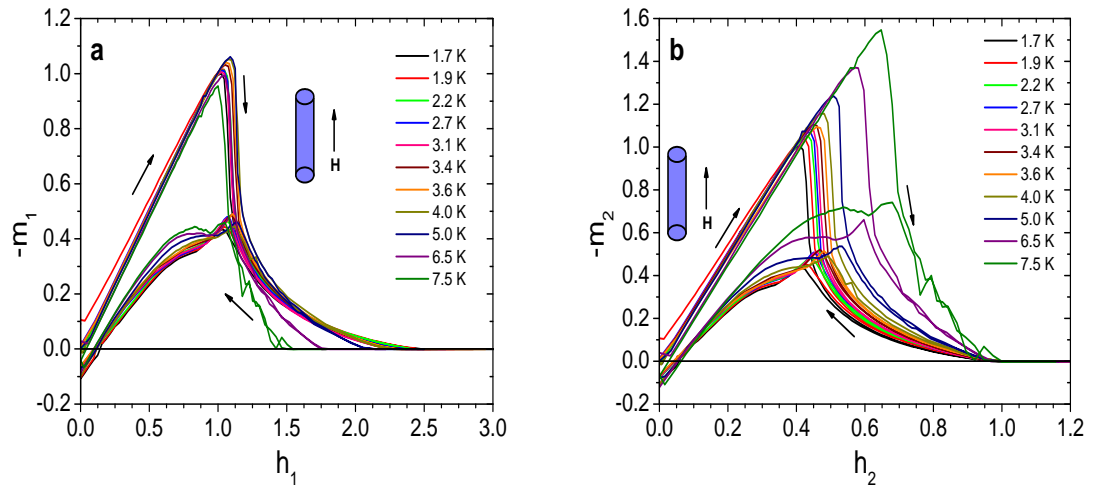


Figura 3.4: Curvas de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento de Nb como función del campo aplicado paralelo al eje de la muestra para diferentes temperaturas, mostradas en una representación reducida en términos de a)  $H_{c1}$  y b)  $H_{c2}$ .

$m_1(h, T) \equiv m_{r1}(h, T)/m_{r1,max}(1.7 \text{ K})$ . La definición de las cantidades  $h_2$  y  $m_2$  es de forma análoga.

La Fig. 3.4 muestra los ciclos de histéresis para temperaturas en el rango  $T = 1.7 - 7.5 \text{ K}$  en la representación reducida  $m_1 - h_1$  y  $m_2 - h_2$ . En el panel *a*) se observa que en campos reducidos mayores a 1,  $h_1 > 1$ , la magnetización (negativa y reducida,  $m_1$ ) decae abruptamente, con una pendiente completamente independiente de la temperatura para  $T < 6.5 \text{ K}$ . A medida que la temperatura se incrementa, el flujo magnético penetra más fácilmente el superconductor cuando el campo aplicado sobrepasa el valor del primer campo crítico ( $h_1 = 1$  en la Fig. 3.4a), este hecho se ve reflejado en la disminución de la magnitud de la magnetización y su decaimiento más abrupto. A partir del mismo panel *a*) de la Fig. 3.4, se observa que al incrementar el campo  $h_1$ , desde cero hasta  $h_1 = 1$ , el cilindro se encuentra en el estado de Meissner. Al continuar incrementando el campo,  $h_1 > 1$ , el flujo magnético penetra la muestra en forma de vórtices y en campos alrededor de  $h_1 \approx 2.4$  la superconductividad es completamente destruida. Este punto depende de la temperatura, para  $T = 5.0, 6.5 \text{ K}$  y  $T = 7.5 \text{ K}$  el punto donde la superconductividad es destruida se ubica en  $h_1 = 2.1, h_1 = 1.75$  y  $h_1 = 1.5$ , respectivamente. Cuando se disminuye el campo magnético desde el estado normal, la magnetización es reversible hasta un cierto campo de irreversibilidad  $h_1^*$ , punto en donde las curvas de la magnetización ascendente (al incrementar el campo magnético) y descendente (al disminuir el campo magnético) se separan, este punto también depende de la temperatura. En esta región reversible, los vórtices no son enclavados, pueden moverse libremente y ser expulsados de la muestra. La curva descendente de la magnetización alcanza un máximo hasta un cierto campo  $h_1$ , donde el máximo número de vórtices es atrapado en el superconductor, por debajo de este valor la magnetización decae progresivamente y los vórtices son expulsados del material en campos cercanos a cero; sin embargo, una cantidad de estos permanece atrapada en campo cero. Este flujo magnético atrapado disminuye a medida que la temperatura aumenta.

En la representación reducida  $m_2 - h_2$ , panel *b* de la Fig. 3.4, conforme la temperatura disminuye la forma de las curvas cambian de forma gradual. En particular, en la región reversible de la magnetización en la representación  $m_2 - h_2$ , la pendiente

disminuye a medida que la temperatura disminuye.

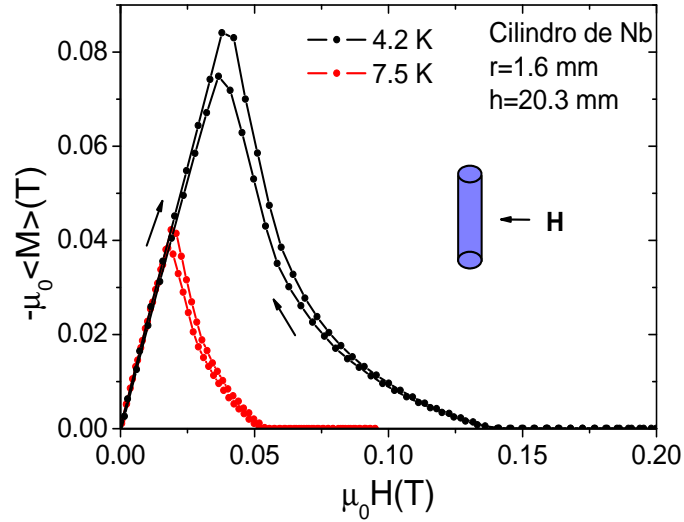


Figura 3.5: Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento, como función del campo aplicado perpendicular al eje de la muestra, para diferentes temperaturas.

### 3.1.2. Geometría perpendicular

Mediciones magnéticas, al aplicar un campo magnético perpendicular al eje del cilindro de Nb, fueron realizadas en  $T = 4.2$  y  $7.5 \text{ K}$ . Las curvas de magnetización exhiben un comportamiento menos histerético que en geometría paralela (ver Fig. 3.5). Como se observa en la Fig. 3.6a, al incrementar el campo  $h_1$  desde cero hasta  $h_1 \approx 1$ , el material se encuentra en el estado de Meissner. Si el campo sigue incrementándose,  $h_1 > 1$ , el flujo magnético penetra la muestra en forma de vórtices y la superconductividad es destruida en  $h_1 = 3.25$  para  $T = 4.2 \text{ K}$  y en  $h_1 = 2.6$  para  $T = 7.5 \text{ K}$ . Al disminuir el campo magnético desde el estado normal, la magnetización es reversible hasta un cierto campo de irreversibilidad  $h_1^*$  en  $T = 4.2 \text{ K}$ . En  $T = 7.5 \text{ K}$  no se observa este comportamiento reversible. En ambas temperaturas, la curva descendente (al disminuir el campo magnético aplicado) es paralela a la curva ascendente hasta un cierto campo  $h_1$ , en donde la curva descendente de la magnetización se una

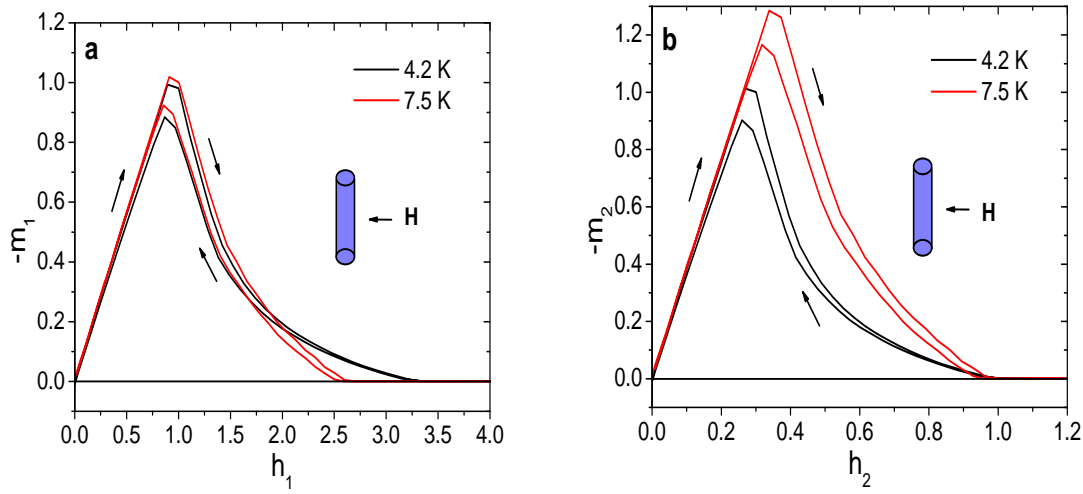


Figura 3.6: Comportamiento de la magnetización en un cilindro superconductor tipo-II sin enclavamiento, mostradas en una representación reducida en términos de a)  $H_{c1}$  y b)  $H_{c2}$ , para diferentes temperaturas.

a la ascendente. En este punto todos los vórtices han sido expulsados y el material no es capaz de atrapar flujo magnético.

### 3.1.3. Efecto pico en la densidad de corriente crítica

Usualmente, la densidad de corriente crítica en los superconductores tipo-II decrece de forma monótona al incrementar el campo aplicado  $H$  o la temperatura  $T$ . Sin embargo, en diversos superconductores, este comportamiento monótono al incrementar  $H$  o  $T$  es interrumpido por un incremento anómalo en  $J_c$  en campos muy próximos a  $H_{c2}$  (o próximos a  $T_c$ ). Dicha anomalía recibe el nombre de *efecto pico* y ha sido observado en superconductores de baja y alta temperatura crítica [46], el origen de este fenómeno es atribuido al movimiento colectivo de los vórtices [16]. Los puntos donde  $J_c \approx 0$  forman una línea en el diagrama de fase  $HT$ , la cual es identificada como la línea de irreversibilidad o también llamada la línea de fusión [47].

Un método general para la obtención de la densidad de corriente crítica,  $J_c$ , es por medio de las curvas de magnetización medidas a temperatura  $T$ . A partir de

la aproximación 1D y el modelo de estado crítico de Bean [20], la relación de la densidad de corriente crítica con la magnetización en un cilindro superconductor de radio  $r$  es [3, 48]:

$$J_c(\mu_0 H) = \frac{3\Delta M(\mu_0 H)}{2r} = \frac{3(M_- - M_+)}{2r}, \quad (3.1)$$

donde  $\Delta M = M_- - M_+$ .  $M_-$  y  $M_+$  se refieren a la curva de magnetización al disminuir e incrementar el campo magnético aplicado, respectivamente. En el cálculo de  $J_c$  fue necesario realizar una interpolación en las curvas ascendentes y descendentes de la magnetización en el intervalo  $0 - \mu_0 H_{c2}$ , esto, con el fin obtener el mismo número de puntos en ambas curvas y poder aplicar la Ec. 3.1. Es importante mencionar las aproximaciones que involucra la Ec. 3.1. El método fue derivado originalmente para el caso de  $J_c$  independiente de los campos magnéticos internos en el superconductor. Además, supone muestras infinitamente largas. Por lo tanto, las curvas de  $J_c$  obtenidas a partir de los ciclos de histéresis de las Figs. 3.2 y 3.5 proporcionan sólo una aproximación.

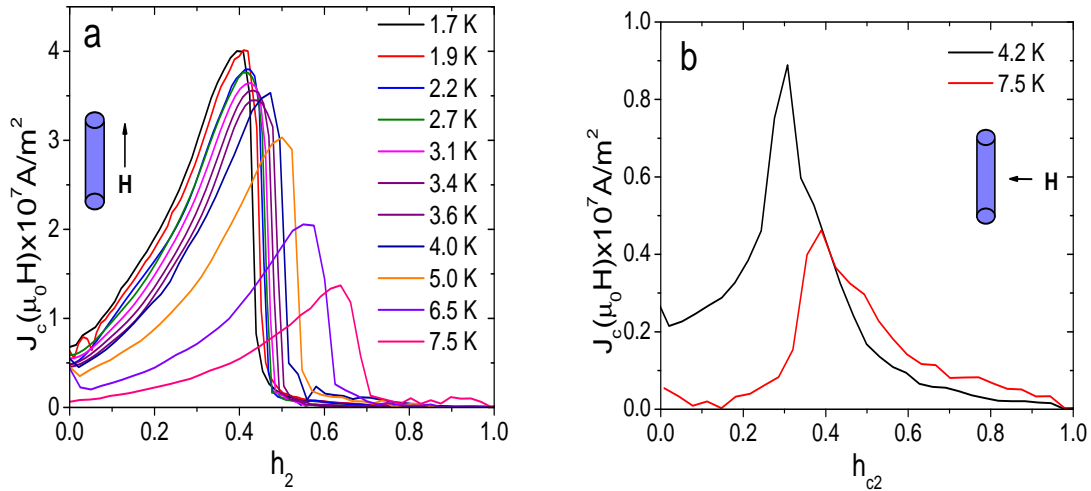


Figura 3.7: Efecto pico en la densidad de corriente crítica para un cilindro de Nb.

Como puede observarse en la Fig. 3.7, el efecto pico depende fuertemente de la temperatura. Inicialmente en geometría paralela, el valor máximo de la densidad de

corriente crítica  $J_{c,max}$  para  $T = 1.7$  K ocurre en campos intermedios,  $h_2 = 0.39$ . A medida que  $T$  se aproxima a  $T_c$ , el valor máximo de la densidad de corriente crítica,  $J_{c,max}$ , ocurre en valores cada vez más cercanos al segundo campo crítico, manteniéndose el valor máximo en la región de campos intermedios,  $J_{c,max}$  ocurre en  $h_2 = 0.63$  para  $T = 7.5$  K. Por otro lado, a pesar del comportamiento cuasi-reversible de la magnetización en geometría perpendicular, el efecto pico prevalece en la densidad de corriente crítica, siendo más agudo en esta geometría que en la paralela. En el rango completo de las temperaturas, en ambas geometrías, el valor inicial de la densidad de corriente crítica  $J_{c,0}$  es menor que su correspondiente valor máximo,  $J_{c,0} \ll J_{c,max}$ . Obsérvese que en la geometría paralela un mínimo se forma en campos cercanos a cero para  $T = 4, 5$  y  $6.5$  K. En geometría perpendicular, para  $T = 4.2$  K, se observa también un mínimo en  $h_2 = 0.02$ . Al incrementar la temperatura hasta  $T = 7.5$  K, dos mínimos locales se ubican en  $h_2 = 0.07$  y en  $h_2 = 0.14$ . Finalmente, es interesante observar que en geometría paralela el decaimiento de la densidad de corriente crítica es más abrupto que en la geometría perpendicular, i.e., en la geometría paralela  $J_c \approx 0$  en campos intermedios y en la geometría perpendicular  $J_c \approx 0$  en  $h_2 \approx 1$ .

### 3.1.4. Diagrama de fases

La dependencia en la temperatura de los campos  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$  para la geometría paralela y perpendicular se muestra en la Fig. 3.8, los triángulos y círculos representan respectivamente, los valores de  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$  obtenidos a partir de las curvas experimentales de magnetización (ver Figs. 3.2 y 3.5).

El valor del primer campo crítico,  $H_{c1}$ , corresponde al campo magnético en donde la curva de magnetización se desvía de la línea de diamagnetismo perfecto, i.e., el punto en el cual la curva de magnetización se desvía de la línea recta que se traza al incrementar desde cero el campo magnético externo [44]. El segundo campo crítico  $H_{c2}$  se determina a partir del criterio  $M(H_{c2} \approx 0)$ , campo en donde ocurre la transición del estado diamagnético al paramagnético [40].

Los datos experimentales del primer campo crítico se ajustan en buen acuerdo mediante la expresión empírica [4, 40]

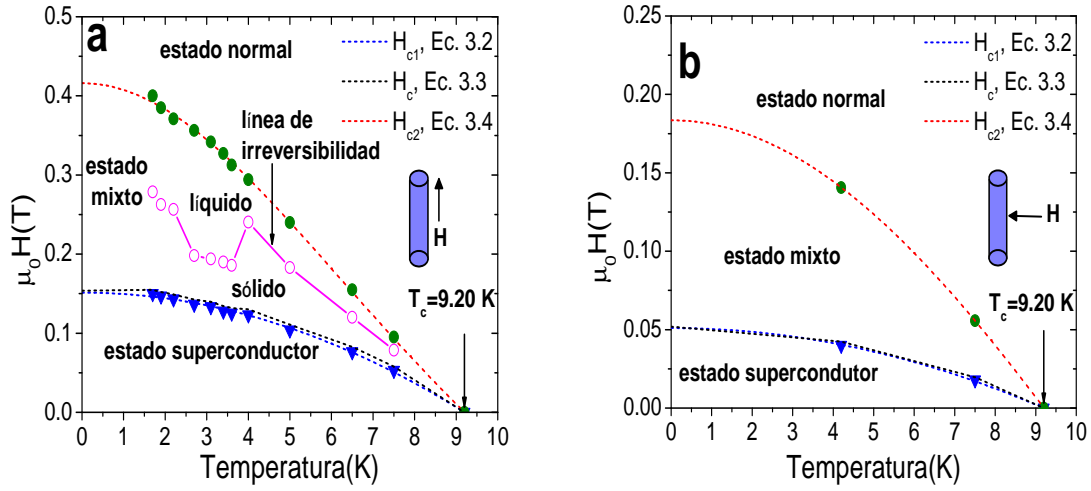


Figura 3.8: Dependencia en la temperatura de los campos críticos para un cilindro de Nb en geometría a) paralela y b) perpendicular.

$$\mu_0 H_{c1} = \mu_0 H_{c0,1} \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right), \quad (3.2)$$

donde  $\mu_0 H_{c0,1}$  es el primer campo crítico extrapolado en  $T = 0$  K,  $T$  es la temperatura y  $T_c$  es la temperatura crítica. El valor extrapolado en 0 K para  $\mu_0 H_{c0,1}$  es de 0.1513 T,  $\mu_0 H_{c0,1} = 0.174$  T en la Ref. [38]. En la misma figura se muestra la curva correspondiente al campo crítico termodinámico  $H_c$ . Este valor puede determinarse al promediar el área bajo las curvas de magnetización  $M_+$  y  $M_-$ , las cuales corresponden a las ramas ascendente y descendente de la curva de magnetización. Sin embargo, el cálculo de  $H_c$  se lleva a cabo mediante la expresión [49]

$$\mu_0 H_c = \frac{\mu_0 H_{c1}}{0.9 \left[ 1 + 0.0925 \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]} \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right), \quad (3.3)$$

donde  $H_{c1}$  es el valor del primer campo crítico obtenido a partir del experimento en la temperatura  $T$  y  $T_c$  es la temperatura crítica.

La dependencia en la temperatura del segundo campo crítico puede ser aproximada mediante la expresión [40]

$$\mu_0 H_{c2} = \mu_0 H_{c0,2} \frac{\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)}{\left(1 + b \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)}, \quad (3.4)$$

donde  $\mu_0 H_{c0,2}$  es el segundo campo crítico extrapolado en  $T = 0$  K,  $T$  es la temperatura,  $T_c$  es la temperatura crítica y  $b$  es una constante. El valor extrapolado en 0 K para  $\mu_0 H_{c0,2}$  es de 0.416 T y  $b=0.7427$ , en la Ref. [38] este valor corresponde a  $\mu_0 H_{c0,2} = 0.404$  T. En la geometría perpendicular  $\mu_0 H_{c0,2} = 0.183$  T y  $b=0.1574$ .

A partir de las curvas de la densidad de corriente crítica se obtiene la línea de irreversibilidad en el diagrama  $H - T$ , puntos donde  $J_c \approx 0$ . La Fig. 3.8 muestra esta línea para geometría paralela, la cual inicialmente decae al aumentar la temperatura desde 1.7 K; en  $T = 4.0$  K se observa un pico y en temperaturas mayores se observa nuevamente un decaimiento progresivo. La línea de irreversibilidad puede obtenerse también a partir de las curvas de magnetización en el punto donde las curvas ascendente y descendente se separan, aunque la determinación del punto es más difícil en temperaturas cercanas a la temperatura crítica. En geometría perpendicular no se obtuvo la línea de irreversibilidad debido a los pocos datos experimentales. La región que se ubica entre la línea de irreversibilidad y la curva de  $H_{c2}(T)$  es el estado líquido de los vórtices; en esta región los vórtices se mueven libremente sin disipación. La región entre la curva de  $H_{c1}(T)$  y la línea de irreversibilidad es el estado sólido de los vórtices, en donde los vórtices se encuentran enclavados. Para aplicaciones prácticas, la magnitud del campo magnético aplicado debe ser menor que la magnitud del campo magnético irreversible.

Por otro lado, en el marco de la teoría GL es posible determinar el parámetro de Ginzburg-Landau en  $T = 0$  K,  $\kappa = H_{c2}(0)/\sqrt{2}H_c(0)$ , la longitud de coherencia  $\xi = \sqrt{\hbar/2e\mu_0 H_{c2}(0)}$  y la longitud de penetración  $\lambda = \kappa(0)\xi(0)$ . Estos valores y los campos críticos son resumidos de acuerdo a la geometría en la tabla 3.1, entre paréntesis se muestran los valores reportados por Casalbuoni en [50] para una muestra cilíndrica de Nb de 1.25 mm de radio y 2.8 mm de altura, la cual posee un radio del mismo orden de magnitud que la muestra que se ha estudiado en este capítulo ( $r=1.5$  mm). Si bien la altura del cilindro en la Ref. [50] es mucho menor que la de este

Tabla 3.1: Valor de los campos críticos extrapolados en 0 K, parámetro de GL y longitudes de coherencia y penetración en geometría paralela y perpendicular.

| Parámetro             | Geometría paralela | Geometría perpendicular |
|-----------------------|--------------------|-------------------------|
| $\mu_0 H_{c0,1}$ (mT) | 151.3              | 51.0                    |
| $\mu_0 H_{c0}$ (mT)   | 153.8 (180)        | 51.8                    |
| $\mu_0 H_{c0,2}$ (mT) | 416 (410)          | 183.5                   |
| $\kappa$              | 1.91 (1.61)        | 2.5                     |
| $\xi(0)$ nm           | 28.12 (28.3)       | 42.35                   |
| $\lambda(0)$ nm       | 53.72 (46)         | 105.88                  |

capítulo ( $2.8 \ll 20.3$  mm), los valores de los parámetros obtenidos en geometría paralela son del mismo orden de magnitud que aquellos reportados por Casalbuoni. Esto hace suponer que en geometría paralela los valores de los parámetros dependen del tamaño del radio de la muestra y no de su altura; sin embargo, esta aseveración requiere de un estudio más detallado en muestras cilíndricas de diferentes radios.

## 3.2. Discusión

La irreversibilidad en las curvas de magnetización cuando se aplica un campo paralelo al eje del cilindro de Nb, al igual que para el cilindro de Ta en el capítulo 2, se debe parcialmente a la presencia de la barrera geométrica que depende de la forma de la muestra y de la orientación del campo aplicado [27, 41, 42]. La barrera geométrica retrasa la entrada de las líneas flujo magnético pero no su salida, lo cual da como resultado un comportamiento asimétrico de los ciclos de magnetización, este fenómeno ocurre también en superconductores tipo I [51]. A pesar de que la muestra de Nb es de alta pureza, ésta posee imperfecciones que dan origen a sitios de enclavamiento que atrapan líneas de flujo; a su vez, el gradiente de flujo atrapado por el superconductor da origen a la densidad de corriente crítica en las dos geometrías estudiadas.

Contrario al caso paralelo, cuando el campo magnético es aplicado de forma perpendicular, el efecto de la barrera geométrica se desvanece y el SC no puede atrapar flujo magnético haciendo que la curva de magnetización sea cuasi-reversible; dicho de otro modo, los efectos de enclavamiento no influyen cuando el efecto de la barrera

geométrica se desvanece [31], independientemente del origen del enclavamiento [30].

En el aspecto teórico, Brandt formuló una descripción continua del estado mixto, la cual puede ser utilizada para calcular las distribuciones del campo magnético y la densidad de corriente en superconductores de forma arbitraria. En la situación más simple  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , lo cual es válido si  $B$  es mucho mayor que el primer campo crítico  $\mu_0 H_{c1}$  [47]. Sin embargo, una expresión correcta para  $M(H_a)$  o  $B(H_a)$  es necesaria para geometrías generales y finitas, la cual conducirá a una magnetización irreversible, incluso en muestras completamente libres de impurezas. Esta irreversibilidad es causada por una barrera geométrica durante la penetración del flujo magnético, la cual está ausente solamente si el superconductor tiene la forma de un elipsoide o un cono con una cúspide aguda o bordes donde las líneas de flujo pueden penetrar fácilmente [41, 42, 47, 52].

En el apéndice 9.1 se muestra un estudio teórico preliminar para reproducir el ciclo de histéresis magnético para esta muestra de Nb en  $T = 1.7$  K.

# Capítulo 4

## Superconductores tipo-II con enclavamiento fuerte

El presente capítulo se divide en dos partes, la primera investiga el comportamiento de un superconductor duro en presencia de un campo magnético rotante (o equivalentemente, la respuesta de un superconductor rotante bajo la acción de un campo magnético de dirección fija) y se comparan las predicciones de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido.

En la segunda parte del capítulo se aplica el modelo de estado crítico elíptico original y extendido para analizar la respuesta magnética de superconductores duros sometidos a campos cruzados.

### 4.1. Respuesta magnética de superconductores duros sometidos a campos rotantes

En esta sección se presentan y analizan los resultados teóricos obtenidos del estudio de la respuesta magnética de bloques superconductores tipo-II con enclavamiento fuerte (irreversibles) sometidos a campos magnéticos rotantes, en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido; en la Ref. [53] se consideraron también los modelos de estado crítico de Bean (circular) [20, 21] y el modelo de doble

estado crítico (rectangular) [54–58]. Específicamente, los modelos han sido aplicados para explicar los resultados experimentales en un disco de PbBi el cual rota en presencia de un campo magnético, de dirección fija  $\mathbf{H}_a$ , paralelo a sus superficies. En este estudio se ha explotado la equivalencia de la situación experimental en la que el disco permanece fijo bajo la acción de un campo magnético paralelo, el cual rota en sentido opuesto. El efecto de la magnitud  $H_a$  del campo magnético aplicado y su ángulo de rotación  $\alpha_s$  en la magnetización de la muestra superconductora es analizado. Cuando  $H_a$  es menor que el campo de penetración  $H_P$ , las componentes de la magnetización, paralela y perpendicular a  $\mathbf{H}_a$ , oscilan a medida que el ángulo de rotación se incrementa. Por otro lado, si la magnitud del campo aplicado,  $H_a$ , es mayor que  $H_P$ , las dos componentes de la magnetización son funciones constantes de  $\alpha_s$  en ángulos de rotación grandes. Finalmente, la evolución de los perfiles dentro del superconductor es estudiada.

#### 4.1.1. Formalismo teórico

Consideramos un bloque superconductor de grosor  $d$ , el cual se encuentra en la región  $0 < x < d$  y es sometido a un campo magnético  $\mathbf{H}_a$  paralelo a su superficie (ver Fig. 4.1):

$$\mathbf{H}_a = H_a \hat{\alpha}_s = H_a [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_s) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_s)], \quad (4.1)$$

donde  $\alpha_s$  es el ángulo del campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_a$  con respecto al eje  $z$ . De este modo, la inducción magnética  $\mathbf{B}(x, t)$  en el interior del bloque superconductor se expresa como:

$$\mathbf{B} = B(x, t) [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha(x, t))], \quad (4.2)$$

donde  $B$  y  $\alpha$  son la magnitud y el ángulo de inclinación de la inducción magnética, respectivamente. Por conveniencia, el campo eléctrico  $\mathbf{E}(x, t)$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}(x, t)$ , se escriben en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la inducción magnética local  $\mathbf{B}(x, t)$ :

$$\mathbf{E}(x, t) = E_{\parallel}(x, t)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) + E_{\perp}(x, t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J}(x, t) = J_{\parallel}(x, t)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) + J_{\perp}(x, t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t), \quad (4.4)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t) = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t)$ . Se establece que en el interior de la muestra, la inducción magnética y el campo magnético satisfacen la relación  $\mathbf{B}(x, t) = \mu_0\mathbf{H}(x, t)$ , siendo una aproximación válida para campos magnéticos aplicados mayores que el primer campo crítico ( $H_a \gg H_{c1}$ ). Además, cualquier barrera superficial que se oponga a la entrada o salida de flujo, será despreciada. De acuerdo a la geometría plana del problema, podemos reescribir la ley de Ampere y la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{B}(x, t) = \mu_0\mathbf{J}(x, t), \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

de la siguiente forma

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (4.7)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \mu_0 J_{\parallel}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.9)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido para  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  debemos agregar la ecuación material correspondientes a los modelos de estado crítico elíptico original [59–61] y elíptico extendido [62, 63]. Adicionalmente, en la Ref. [53] se reportaron los resultados obtenidos con los modelos de estado crítico circular y rectangular.

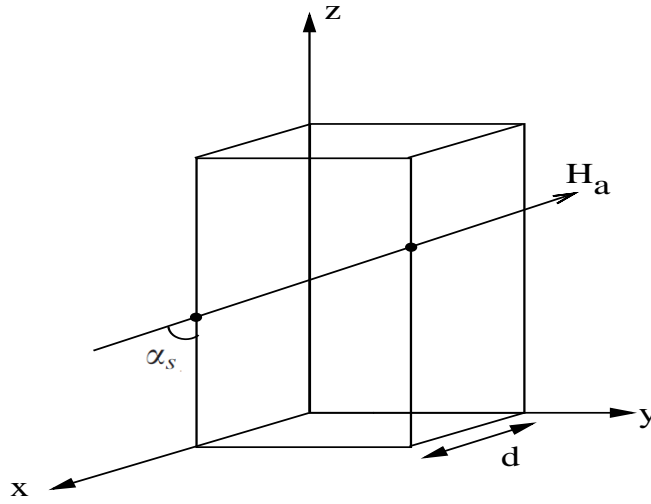


Figura 4.1: Placa infinita de grosor  $d$  sobre el eje  $x$

### Modelo elíptico

El modelo de estado crítico elíptico original (MECEO) [59–61] postula:

$$J_i = (J_c)_{ik} \frac{E_k}{E}, \quad (4.11)$$

donde

$$(J_c)_{ik} = J_{c,i}(B) \delta_{ij}, \quad i, k = \perp, \parallel. \quad (4.12)$$

En la expresión anterior,  $\delta_{ik}$  representa la delta de Kronecker. En el modelo de estado crítico elíptico (4.11), la magnitud de la densidad de corriente crítica  $J_c$  traza una elipse en el plano  $J_{\perp}$ - $J_{\parallel}$ . Este modelo hace uso de dos parámetros fenomenológicos, los cuales corresponden a los valores extremos  $J_{c\perp}$  y  $J_{c\parallel}$  del radio de la elipse trazada por la magnitud de la densidad de corriente. En los cálculos numéricos, para resolver el sistema de ecuaciones (4.7)-(4.10), la expresión (4.11) es reescrita de la siguiente forma:

$$E_i = E(J) (J_c^{-1})_{ik} J_k, \quad (4.13)$$

$$E(J) = \begin{cases} 0, & J \leq J_c(B, \phi) \\ \rho(J - J_c(B, \phi)), & J \geq J_c(B, \phi) \end{cases}, \quad (4.14)$$

donde  $(J_c^{-1})_{ik}$  es la inversa de la matriz  $(J_c)_{ik}$  en (4.11). La magnitud de la densidad de corriente crítica,  $J_c(B, \phi)$ , está dada por:

$$J_c(B, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{c\parallel}^2(B)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{c\perp}^2(B)} \right]^{-1/2}, \quad (4.15)$$

donde  $\phi$  denota el ángulo de la densidad de corriente crítica,  $\mathbf{J}$ , con respecto a la dirección de la densidad de flujo  $\mathbf{B}$ . Si  $J_{c\perp} = J_{c\parallel}$ , el modelo de estado crítico elíptico (4.13) se reduce al modelo de estado crítico de Bean (circular), ver Ec. 2.12 de la Ref. [53]. Así también, los cálculos de los campos electromagnéticos con  $J$  cercana a  $J_c$  son también independientes del parámetro auxiliar  $\rho$  en la Ec. (4.14).

### Modelo elíptico extendido

El modelo de estado crítico elíptico original (MECEO), el cual fue descrito en la sección anterior, ha sido extendido por Clem [62, 63] al introducir las relaciones generales:

$$E_{\perp} = \rho_{\perp} J_{\perp}, \quad (4.16)$$

$$E_{\parallel} = \rho_{\parallel} J_{\parallel}, \quad (4.17)$$

donde  $\rho_{\perp}$  y  $\rho_{\parallel}$  son resistividades efectivas no-lineales, cuya razón  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  es independiente de  $J$  justo por encima de  $J_c$ , tal y como fue encontrado experimentalmente [63]. Un modelo para las resistividades efectivas está dado por [62]

$$E_{\perp} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_{\perp}| \leq J_{cd} \\ \rho_d(|J_{\perp}| - J_{cd})\text{sign}(J_{\perp}), & |J_{\perp}| \geq J_{cd} \end{cases}, \quad (4.18)$$

$$E_{\parallel} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_{\parallel}| \leq J_{cc} \\ \rho_c(|J_{\parallel}| - J_{cc})\text{sign}(J_{\parallel}), & |J_{\parallel}| \geq J_{cc} \end{cases}. \quad (4.19)$$

Donde, los subíndices "d" y "c" se refieren al desenclavamiento y corte, respectivamente. Además,  $J_{cd} = J_c(B, \phi) |\sin(\phi)|$  y  $J_{cc} = J_c(B, \phi) |\cos(\phi)|$ , con  $J_c(B, \phi)$  definida de acuerdo al MECEO, ver Ec. (4.15). Si  $|J - J_c|/J_c \ll 1$ , el modelo de estado crítico elíptico extendido (MECEE) se reduce al modelo elíptico original [Ecs. (4.13) y (4.14)] al remplazar  $\rho_d$  y  $\rho_c$  en las Ecs. (4.18) y (4.19) con  $\rho J_c/J_{c\perp}$  y  $\rho J_c/J_{c\parallel}$ , respectivamente. Por lo tanto, en el caso del MECEO, la razón  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  en  $J > J_c$  es igual a  $J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ . Por otro lado, el MECEE es capaz de modificar la relación entre las componentes del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  al ajustar el parámetro adicional  $r$ .

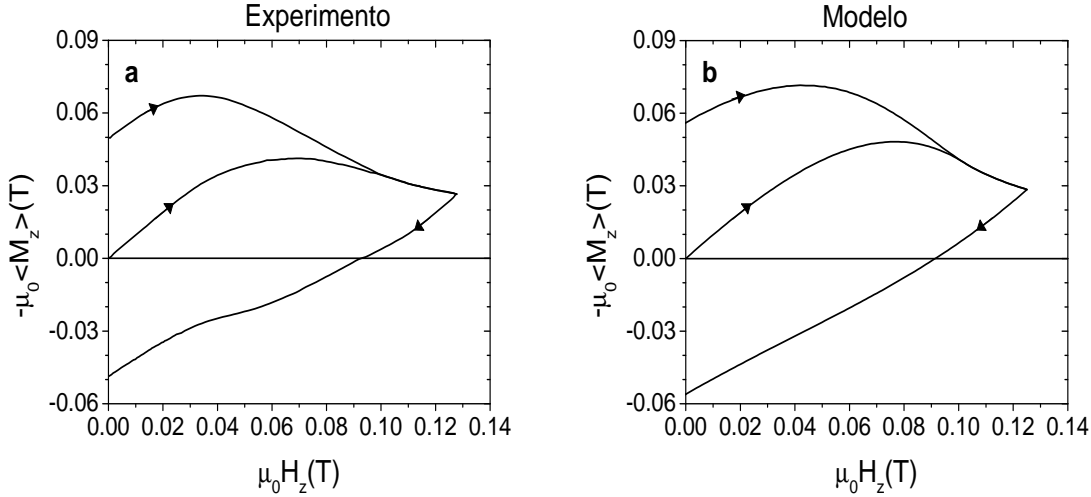


Figura 4.2: Curvas de magnetización virgen (a) para un disco de PbBi, tomada de la Ref. [8] y (b) teórica obtenida con la densidad de corriente crítica  $J_{c\perp}(B)$  como en la Ec. (4.24).

#### 4.1.2. Revisión de resultados experimentales

La figura 4.2a muestra la curva de magnetización virgen, la cual fue medida por Sekerka [8], para un disco de PbBi de grosor  $d = 0.8\text{mm}$ . La histéresis que exhibe la Fig. 4.2a claramente corresponde a la curva de magnetización de un superconductor tipo-II irreversible, ya que el retorno de la curva cruza y permanece en la región paramagnética como resultado del fuerte enclavamiento de líneas de flujo o vórtices.

Experimentalmente, la isotropía del disco de PbBi fue comprobada al comparar curvas de magnetización virgen con  $\mathbf{H}_a$  dirigido a lo largo de diferentes diámetros del disco.

Los paneles (a)-(c) en la Fig. 4.3 muestran las gráficas de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle = \langle B_y \rangle / \mu_0$  y  $-\langle M_z \rangle = H_a - \langle B_z \rangle \mu_0$ , versus el ángulo de rotación,  $\theta$ , medidas en [8] para un disco de PbBi, rotando en presencia de un campo magnético  $\mathbf{H}_a$ . Las mediciones iniciaron en el estado inicial no-magnético, el cual es alcanzado después de enfriar el superconductor en campos  $H_a/H_P = 0.5$  (ver panel a), 1.0 (ver panel b) y 2.0 (ver panel c), donde  $H_P$  ( $\mu_0 H_P = 0.1015T$  [8]) es el campo de penetración. El estado inicial se considera no-magnético debido a que no fue observado efecto Meissner (expulsión de flujo) después del enfriamiento en campo, dentro de la precisión de ( $\Delta \langle M \rangle \leq 1$  Gauss) del experimento.

Como puede observarse en la Fig. 4.3, para el valor más pequeño de  $H_a$  ( $H_a = 0.5H_P$  panel a), las dos componentes de la magnetización como funciones del ángulo  $\theta$ , tienen un comportamiento no monótono. Dicho comportamiento de la magnetización también ha sido observado en Ref. [64] durante la rotación inicial de un disco de Nb oscilando lentamente en un campo paralelo. La dependencia de la magnetización en función del ángulo  $\theta$  cambia radicalmente en valores de  $H_a$  grandes. De modo que, en  $H_a = H_P$  (ver Fig. 4.3b) las funciones  $\langle M_y \rangle(\theta)$  y  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  inicialmente crecen con  $\theta$  y posteriormente, en  $\theta > 150^\circ$ , las funciones se hacen prácticamente constantes con valores similares una a otra ( $\langle M_y \rangle \approx -\langle M_z \rangle$ ). También puede observarse que  $M_y$  tiene un máximo en  $\theta \approx 75^\circ$ . Para  $H_a$  mayor que el campo de penetración  $H_P$  (ver panel c), la función  $-\langle M_z \rangle(\theta)$ , adquiere valores más pequeños que aquellos para  $\langle M_y \rangle(\theta)$ . En ambos casos, las dos funciones son prácticamente constantes, excepto para ángulos de rotación pequeños, en donde el crecimiento inicial es rápido y el máximo de  $\langle M_y \rangle$  es desplazado a un valor más pequeño de  $\theta$  ( $\approx 40^\circ$ ).

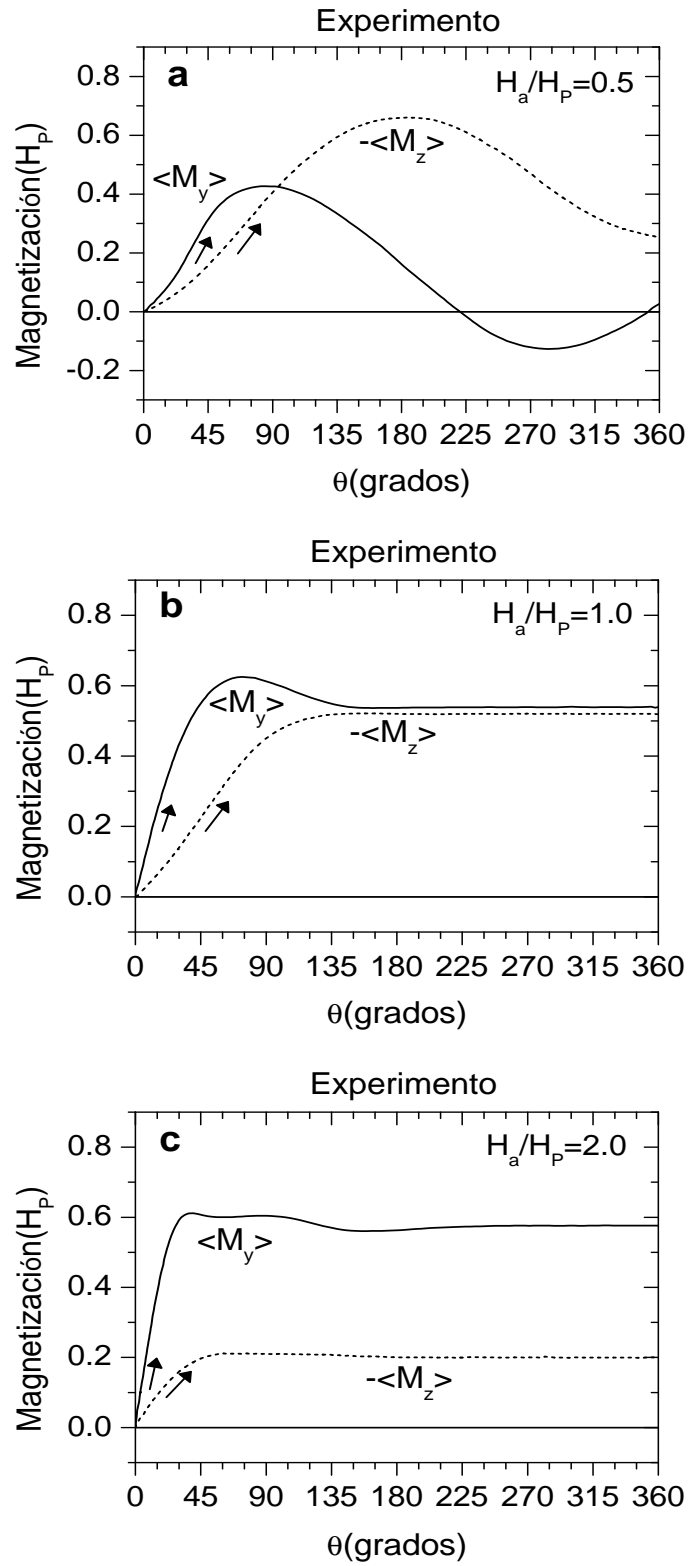


Figura 4.3: Curvas de magnetización rotacional para un disco de PbBi medidas en [8].

### 4.1.3. Predicciones teóricas

Los modelos de estado crítico elíptico original y elíptico extendido han sido aplicados para explicar los resultados experimentales (Fig. 4.3) al mantener fija la muestra y rotar el campo magnético externo  $\mathbf{H}_a$  un ángulo  $\alpha_s = -\theta$  en vez de fijar la dirección del campo magnético y rotar la muestra superconductora. Los valores experimentales  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  corresponden, respectivamente, a las cantidades:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_y(x), \quad (4.20)$$

$$-\langle M_z \rangle = H_a - \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_z(x), \quad (4.21)$$

donde

$$B'_y = \hat{\alpha}_s \times \hat{x} \cdot \mathbf{B} = B(x) \sin[\alpha(x) - \alpha_s], \quad (4.22)$$

$$B'_z = \hat{\alpha}_s \cdot \mathbf{B} = B(x) \cos[\alpha(x) - \alpha_s]. \quad (4.23)$$

Los cálculos de las componentes de la magnetización  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  con los modelos de estado crítico elíptico original y extendido, requieren del uso de los parámetros  $J_{c\perp}(B)$  y  $J_{c\parallel}(B)$ , los cuales dependen de la inducción magnética. El primer parámetro,  $J_{c\perp}(B)$ , es determinado a partir de las curvas de magnetización experimentales versus el campo aplicado, el cual varía únicamente en una dirección como en la Fig. 4.2 (en este caso, no ocurre el corte de líneas de flujo y la respuesta magnética del superconductor se debe completamente a los efectos de desenclavamiento). Las curvas de magnetización virgen son reproducidas, en buen acuerdo con el experimento, con cualquiera de los modelos de estado crítico con:

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\perp}}, \quad (4.24)$$

donde  $J_{c\perp}(0) = 47.11 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup> y  $n_\perp = 2$  (comparar los paneles (a) y (b) de la Fig. 4.2). Del mismo modo, otros parámetros de los modelos de estado crítico son

encontrados al ajustar las curvas de magnetización teóricas con las experimentales (Fig.4.3).

### Modelo elíptico

Los cálculos de las componentes de la magnetización  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  en el marco del MECEO (Ec. 4.11) son mostradas en la Fig. 4.4. En este punto, hemos usado  $J_{c\perp}(B)$  tal y como en la Ec. 4.24 y  $J_{c\parallel}(B)$  tiene la forma

$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_{\parallel}}}, \quad (4.25)$$

con  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$  y  $n_{\parallel} = 1$ . Dicha elección proporciona un buen acuerdo entre las curvas experimentales (Fig. 4.3) y teóricas (Fig. 4.4). Gracias al uso del segundo parámetro ( $J_{c\parallel}$ ), el modelo elíptico original es capaz de generar las oscilaciones de las componentes de la magnetización (Fig. 4.4a) con una amplitud cercana a aquella observada experimentalmente (panel (a) en al Fig.4.3). Es posible observar que  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  se aproximan una a otra en  $\theta > 150^\circ$  con  $H_a = 1.05H_P$ , en buen acuerdo con las mediciones (ver Fig. 4.3b, la cual corresponde a  $H_a = H_P$ ). Además, cuando  $H_a = 2.0H_P$  (panel (c) en la Fig. 4.4), la diferencia entre  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  en  $\theta > 45^\circ$  es tan grande como en el experimento (Fig. 4.4c).

### Modelo elíptico extendido

Como ya se ha mencionado, el modelo de estado crítico elíptico original es un caso particular del modelo elíptico extendido [53] (el modelo de Bean o circular también lo es). Por lo tanto, las predicciones teóricas del MECEO pueden ser obtenidas con el MECEE (Ecs. 4.19 y 4.19) si  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ , es decir,  $\rho_c/\rho_d = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ . De acuerdo con los parámetros de  $J_{c\perp}(B)$  (Ec. 4.24) y  $J_{c\parallel}(B)$  (Ec. 4.25), empleados para calcular las curvas de magnetización en la Fig. 4.4, la razón  $r$  es menor que la unidad ( $r < 1$ ).

Es interesante estudiar el efecto del parámetro  $r$ , el cual controla la relación entre el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en  $J > J_c$ . Por esta razón, se han calculado las curvas de magnetización (Fig. 4.5) aplicando el modelo elíptico extendido con los mismos parámetros,  $J_{c\perp}(B)$  y  $J_{c\parallel}(B)$ , que fueron empleados en la Fig.

4.5, pero con el parámetro  $r = \rho_c/\rho_d = 1$ . Es decir, las curvas de magnetización en la Fig. 4.5 corresponden a un modelo de estado crítico anisotrópico con  $J_{c\perp}/J_{c\parallel} < 1$ , pero el parámetro  $r = 1$ , indicando que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  son paralelos cuando  $J > J_c$ . A partir de la comparación de la Fig. 4.5 con la 4.4, se puede observar que las curvas de magnetización dependen significativamente del parámetro  $r$  cuando el campo magnético aplicado es suficientemente grande ( $H_a > H_P$ , ver paneles (b) y (c)). Así, con el fin de que las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$ , tengan el mismo valor en ángulos de rotación grande, el campo magnético aplicado  $H_a$  para  $r = 1$  (Fig. 4.5b), debe ser mayor que el campo usado en la Fig. 4.4b. Además, el valor de  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  ( $\approx 0.4H_P$ ), en ángulos suficientemente grandes, resulta ser menor que ( $\approx 0.5H_P$ ) el predicho por el modelo elíptico original (Fig. 4.4). En  $H_a = 2.0H_P$ , también existe una diferencia notable entre las componentes  $y$  de la magnetización (ver paneles (c) de las Figs. 4.4 y 4.5).

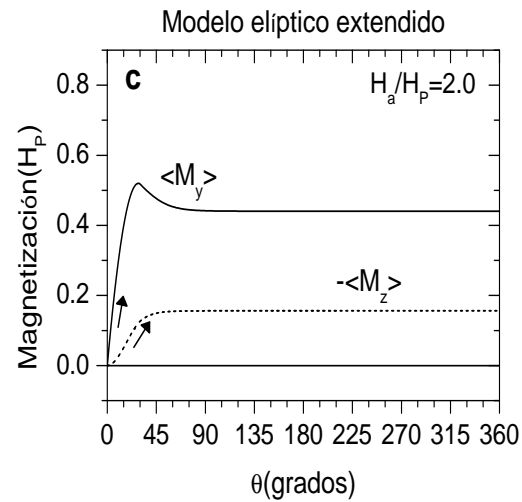
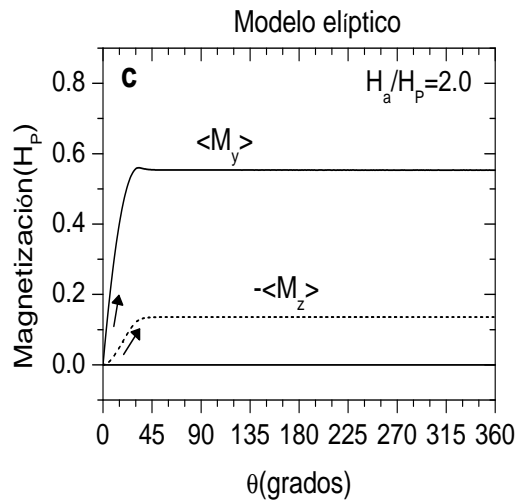
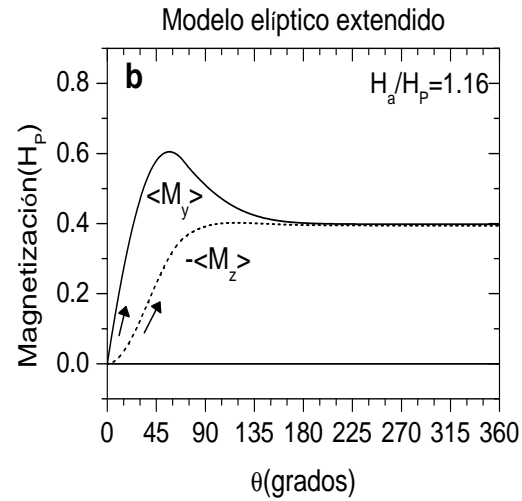
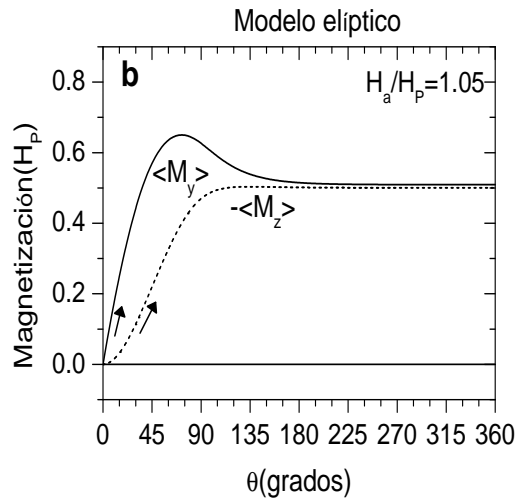
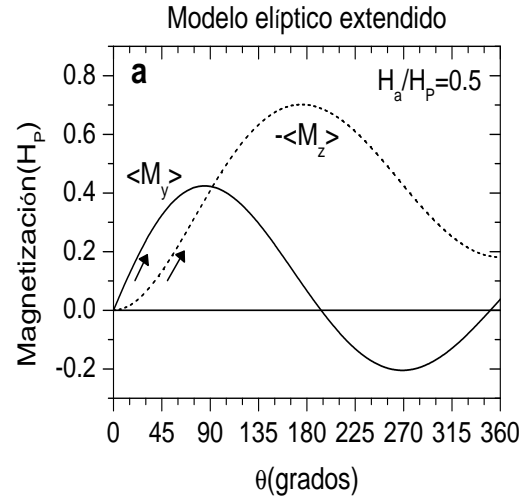
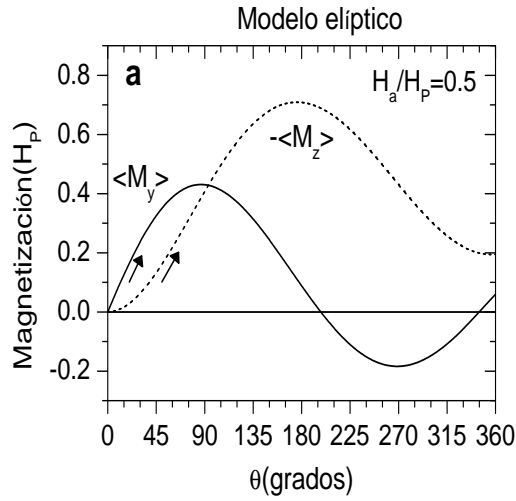


Figura 4.4: Curvas de las componentes de magnetización promedio versus el ángulo de rotación, obtenidas con el MEC EO.

Figura 4.5: Curvas de las componentes de magnetización promedio versus el ángulo de rotación, obtenidas con el MEC EE, con  $r = 1$ .

#### 4.1.4. Perfiles de inducción magnética

El hecho de que el modelo de estado crítico elíptico sea capaz de reproducir cuantitativamente el experimento, con el uso de una densidad de corriente  $J_{c\parallel}(B)$  mayor que la perpendicular  $J_{c\perp}(B)$ , ilustra como el corte de líneas de flujo influye en el comportamiento magnético de un superconductor rotando. Con el fin de explicar las características observadas en las curvas de magnetización experimental (Fig. 4.3) y teórica (Fig. 4.4), se analiza la evolución de los perfiles para la magnitud de la inducción magnética  $B(x)$ , el ángulo de inclinación  $\alpha(x)$  y las componentes  $B'_y(x)$  (Ec. 4.22) y  $B'_z(x)$  (Ec. 4.23), calculados en el marco del modelo de estado crítico elíptico original.

Los perfiles de la inducción magnética, calculados cuando el campo magnético externo  $H_a$  tiene una magnitud menor que el campo de penetración  $H_P$  ( $H_a = 0.5H_P$ ), son mostrados en la Fig. 4.6. Como puede observarse en el perfil de la magnitud de la inducción magnética (panel b), a medida que el ángulo de rotación aumenta, dos mínimos aparecen debido al consumo de flujo (disminución de  $B$ ), el cual es un resultado del corte de líneas de flujo [54]. El valor absoluto del ángulo de inclinación  $\alpha$  aumenta con  $\theta$  en los intervalos cercanos a la superficie  $0 \leq x < x_{m1}$  y  $x_{m2} < x \leq d$ . Sin embargo, en los intervalos  $x_{m1} < x < x_1$  y  $x_2 < x < x_{m2}$ , donde hay consumo de flujo, el ángulo  $\alpha$  es modificado levemente. En la región central,  $x_1 < x < x_2$ , ni una de las dos cantidades,  $B$  y  $\alpha$ , es alterada. Cuando  $\theta = 360^\circ$ , los valores mínimos de  $B$  dentro del disco superconductor tienden a cero y, a partir de la Ec. (4.8), la magnitud de la derivada  $\partial\alpha/\partial x$  se incrementa considerablemente en dichos puntos. Además, en  $x = x_{m1}$  y  $x = x_{m2}$  con  $B(x_{m1}) = B(x)_{m2} \approx 0$ , la precisión de los cálculos no es buena y por lo tanto, los valores  $-\alpha(x_{m1})$  y  $-\alpha(x_{m2})$  son mayores de lo que deben ser (ver curva 8 para  $\theta = 360^\circ$  en la Fig. 4.6a). La componente  $B'_z$  de la inducción magnética y paralela al campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_a$ , disminuye cerca de las superficies de la muestra debido al consumo de flujo (Fig. 4.6d). No obstante, el cambio más importante ocurre en la parte central de la muestra (en  $x_1 < x < x_2$ ) debido a la rotación de la muestra. De esta manera, en  $\theta = 180^\circ$  (curva 4) la componente  $B'_z$  varía de  $B'_z = \mu_0 H_a$  en las superficies  $x = 0$  y  $x = d$

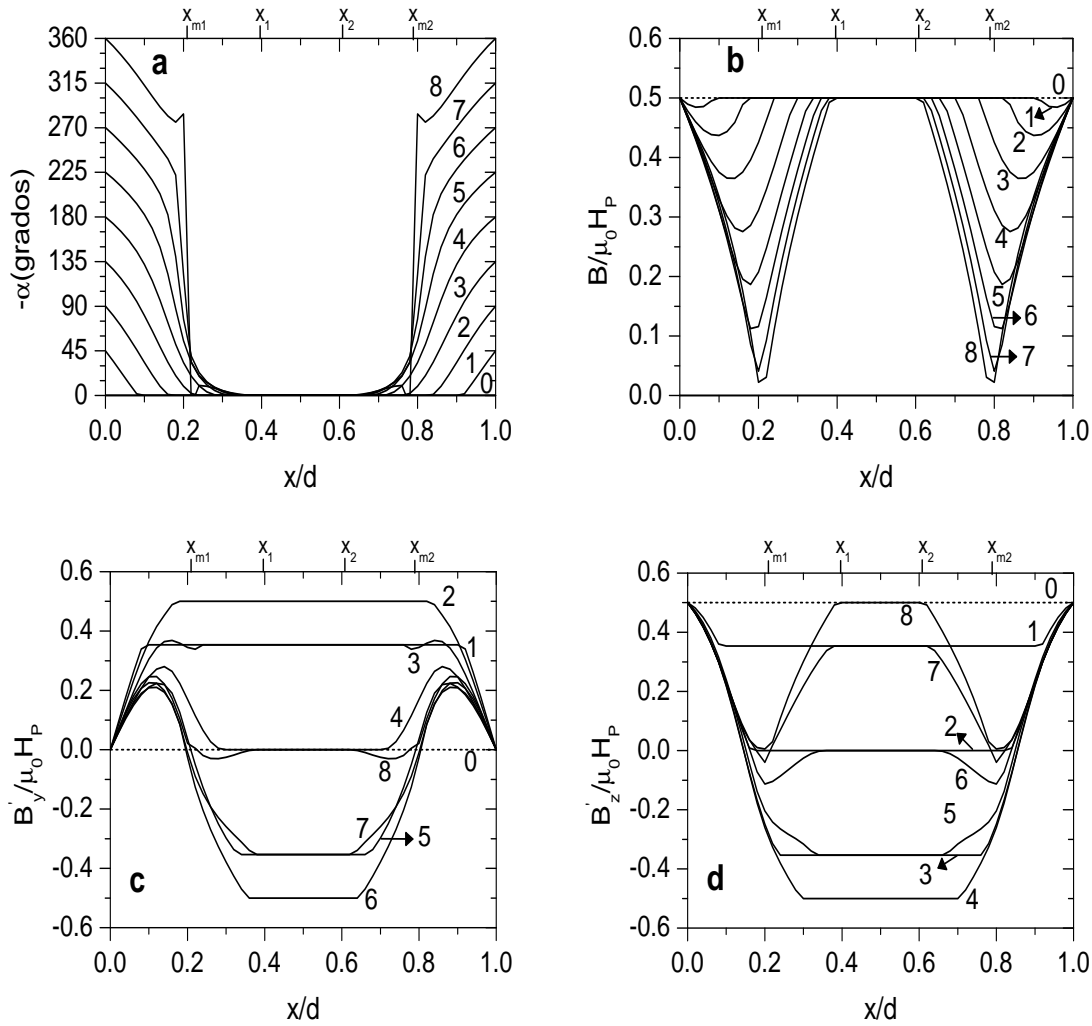


Figura 4.6: Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B'_y$  (Ec. 4.22, panel c) y  $B'_z$  (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en  $H_a = 0.5H_P$ .

al valor opuesto  $B'_z = -\mu_0 H_a$  en la región central de la muestra. Cuando un ciclo entero es finalizado,  $B'_z$  adquiere nuevamente el valor  $B'_z = \mu_0 H_a$  en el centro de la muestra (curva 8). Este comportamiento cíclico de  $B'_z$  es responsable de la aparición de las oscilaciones de la componente de la magnetización  $\langle M_z \rangle (\theta)$  (paneles (a) en las Figs. 4.3 y 4.4), siendo negativo para cualquier valor del ángulo de rotación  $\theta > 0$  debido a que  $B'_z < \mu_0 H_a$  cerca de las superficies, i.e. en los intervalos  $0 < x < x_1$  y  $x_2 < x < d$ . La componente  $B'_y$  también oscila en el centro de la muestra a medida que

$\theta$  es incrementado (Fig. 4.6c). Dicho comportamiento de  $B'_y$  hace que la componente  $y$  de la magnetización,  $\langle M_y \rangle$ , oscile con  $\theta$  (Figs. 4.3a y 4.4a). Como es visto en la Fig. 4.6c, existe un incremento de  $B'_y$  en las regiones cercanas a la superficie, resultando en un valor positivo pequeño de  $\langle M_y \rangle$  (4.20) después de un ciclo completo,  $\theta = 360^\circ$  (ver Figs. 4.3a y 4.4a).

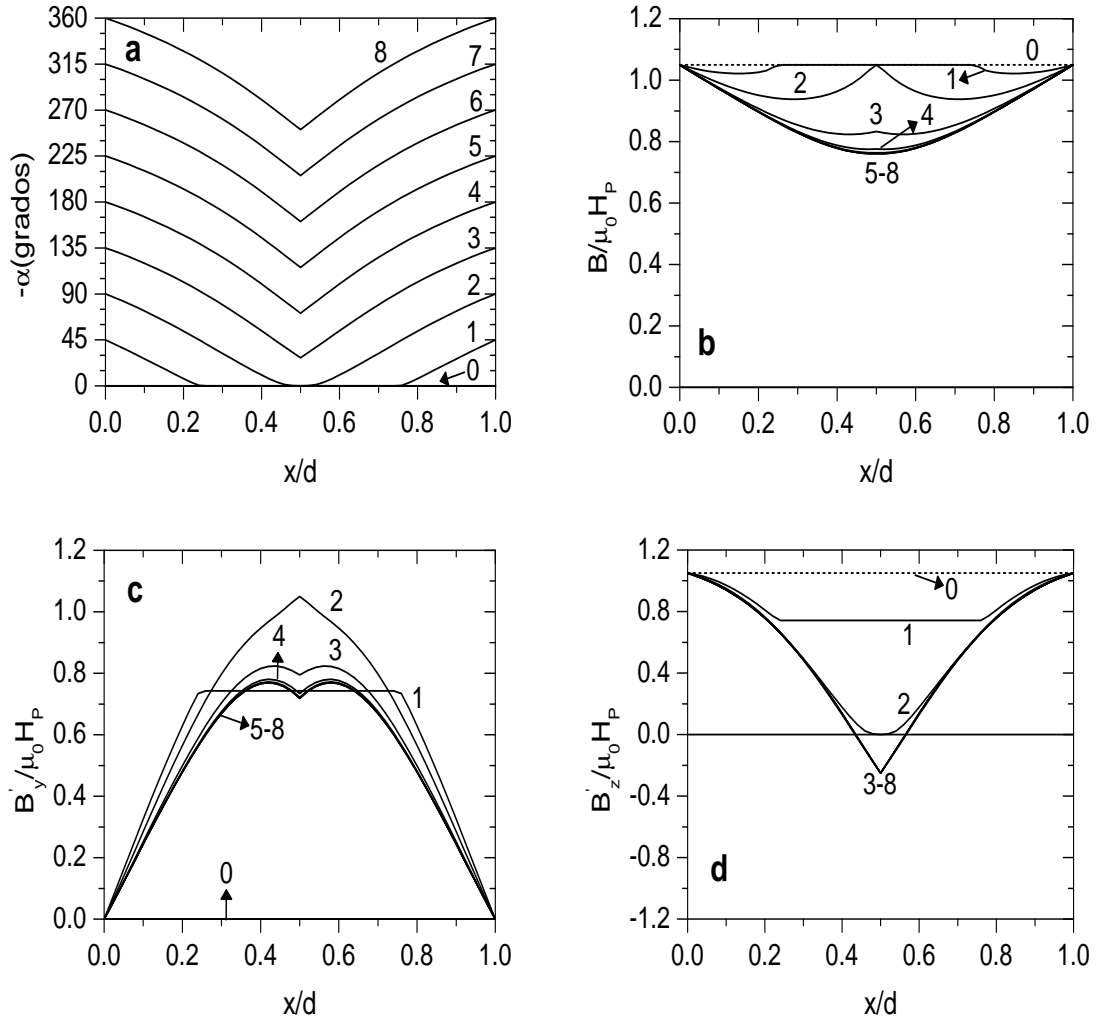


Figura 4.7: Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B'_y$  (Ec. 4.22, panel c) y  $B'_z$  (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en  $H_a = 1.05H_P$ .

La Fig. 4.7 muestra los perfiles obtenidos en el marco del modelo de estado crítico elíptico para  $H_a = 1.05H_P$ . Debido a la disminución de las densidades de corriente

crítica  $J_{c\perp}$  (Ec. 4.24) y  $J_{c\parallel}$  (Ec. 4.25) con la magnitud de la inducción magnética, las pendientes de los perfiles críticos para  $B(x)$  y  $\alpha(x)$  cerca de las superficies son más pequeñas que aquellas observadas en los perfiles de la Fig. 4.6. Por lo tanto, la región central en donde  $B$  y  $\alpha$  no son alterados (ver curva 1 en los paneles (a) y (b) de la Fig. 4.7), rápidamente desaparecen a medida que el ángulo de rotación es incrementado (ver curva 2 en los paneles de la Fig. 4.7). Del mismo modo, los mínimos de  $B(x)$  se unen formando un único mínimo en el centro del disco. El perfil crítico resultante de  $B(x)$  no cambia más a pesar de que el disco continúa rotando (ver curvas 5 – 8 en el panel (b)). En este caso,  $B'_z(z)$  inicialmente disminuye en el interior de la muestra (ver curvas 1 – 2, Fig. 4.7d) a medida que  $\theta$  varía hasta alcanzar el perfil crítico (curvas 3–8). Por consiguiente, la dependencia  $\langle M_z \rangle(\theta)$  tiene un comportamiento monótono en  $\theta > 120^\circ$  (ver paneles (b) en las Figs. 4.3) y 4.4. Por otro lado,  $B'_y(x)$  aumenta de modo que un máximo enorme (con respecto a  $|\langle M_z \rangle(\theta)|$ ), en la dependencia de  $\langle M_y \rangle(\theta)$ , aparece en  $\theta \approx 70^\circ$ . En ángulos de rotación grandes ( $\theta > 180^\circ$ ), el perfil  $B'_y(x)$  se vuelve estacionario y  $M_y(\theta)$  es prácticamente una función constante, cuyo valor es cercano a  $-\langle M_z \rangle$ . Así, la magnitud de la magnetización,  $|\langle M \rangle|$ , es independiente de  $\theta$  cuando el ángulo de rotación es suficientemente grande.

Los perfiles para el caso cuando el campo magnético externo es lo suficientemente grande ( $H_a = 2.0H_P$ ) en comparación con el campo de penetración  $H_P$  (ver Fig. 4.8), tienen una evolución similar a aquella descrita en la Fig. 4.7. Sin embargo, en comparación con los resultados de la Fig. 4.7, las regiones centrales de la inducción magnética que no son alteradas, desaparecen rápidamente a medida que  $\theta$  es aumentado. Este hecho es debido a la reducción notable de las densidades de corriente crítica  $J_{c\perp}$  y  $J_{c\parallel}$  con  $B$ .

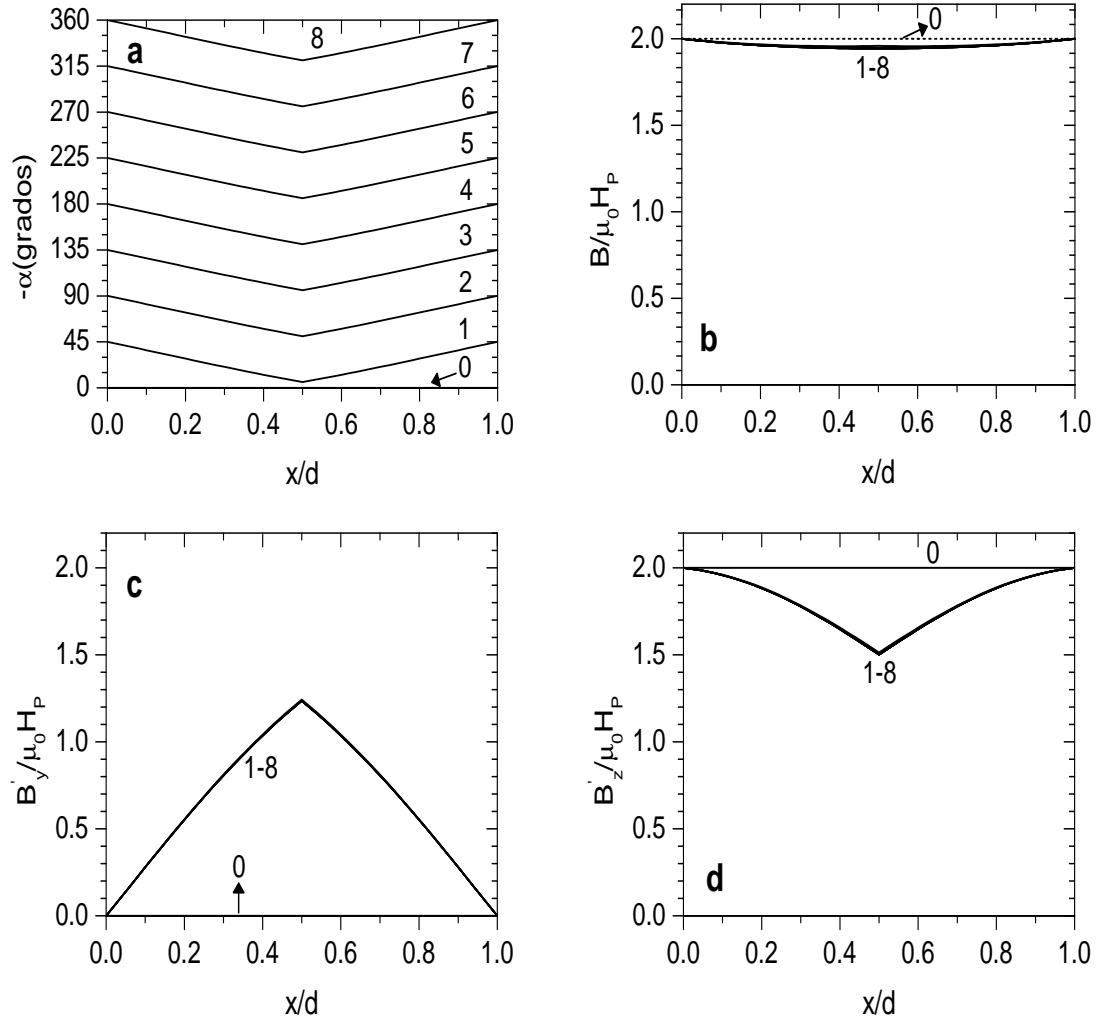


Figura 4.8: Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B'_y$  (Ec. 4.22, panel c) y  $B'_z$  (Ec. 4.23, panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en  $H_a = 2.0H_P$ .

## 4.2. Respuesta magnética de superconductores duros sometidos a campos cruzados

Esta sección presenta el estudio teórico de la respuesta magnética de un bloque superconductor sometido a campos magnéticos cruzados en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original [59–61] y elíptico extendido [62,63]. En particular se estudia la supresión de la magnetización remanente de un disco de PbBi al ser aplicado un campo magnético transversal. Ambos modelos de estado crítico reproducen las principales características de las curvas de magnetización experimentales. También se muestra que la magnetización promedio, correspondiente a los estados iniciales diamagnético y paramagnético en un campo específico  $H_z$ , se reducen asimétricamente por la acción de un campo oscilante transversal  $H_y$ . Si la amplitud del campo oscilante  $H_y$  es del orden del primer campo de penetración  $H_P$ , el estado final resulta ser paramagnético después de varios ciclos de  $H_y$ . Tal tipo de paramagnetismo es atribuido a la anisotropía en la densidad de corriente crítica, inducida por el corte de líneas de flujo. En muestras de PbBi, se espera que el paramagnetismo esté presente en un amplio rango de valores del campo  $H_z$ .

### 4.2.1. Formalismo teórico

Consideramos un bloque superconductor irreversible tipo-II localizado en  $x = 0$  y  $x = d$ . El campo magnético externo de magnitud  $H_a$ ,

$$\mathbf{H}_a = \hat{\mathbf{y}}H_y + \hat{\mathbf{z}}H_z, \quad (4.26)$$

es aplicado paralelo a las superficies del bloque. La inducción magnética  $\mathbf{B}(x, t)$  en el interior del superconductor puede ser expresada como

$$\mathbf{B}(x, t) = B(x, t)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t). \quad (4.27)$$

En la expresión anterior,  $B$  es la magnitud de la inducción magnética y

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha(x, t)), \quad (4.28)$$

donde  $\alpha(x, t)$  es el ángulo de inclinación de  $\mathbf{B}(x, t)$  con respecto al eje  $z$ . Introduciendo el vector

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.29)$$

podemos expresar el campo eléctrico  $\mathbf{E}(x, t)$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}(x, t)$  en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la inducción magnética local  $\mathbf{B}(x, t)$ :

$$\mathbf{E}(x, t) = E_{\parallel}(x, t)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) + E_{\perp}(x, t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{J}(x, t) = J_{\parallel}(x, t)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) + J_{\perp}(x, t)\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t). \quad (4.31)$$

De acuerdo a la geometría plana del problema y empleando la ley de Ampère,  $\nabla \times \mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{J}(x, t)$ , obtenemos

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (4.32)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \mu_0 J_{\parallel}. \quad (4.33)$$

Ya que consideramos estados cuasiestacionarios, en nuestro estudio despreciamos variaciones temporales del desplazamiento eléctrico. Además, a partir de la ley de Faraday  $\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , obtenemos

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.34)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (4.35)$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales para  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{J}$  requiere de una ecuación constitutiva apropiada que los relacione. Como ya se ha mencionado, se aplicaron los modelos de estado crítico de corte de líneas de flujo elíptico original (MECEO) y elíptico extendido (MECEE). Ambos modelos ya han sido descritos en la Secc. 4.1.1.

Por conveniencia, consideramos que no hay barreras que impidan la salida o entrada de flujo en las superficies de la muestra y suponemos que el campo magnético satisface la relación  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , en las superficies de la placa superconductora.

Las ecuaciones de Maxwell 4.32-4.35 con la relación constitutiva no lineal, dada por las Ecs. 4.14, 4.18, 4.19, son resueltas numéricamente para variaciones lentas de las condiciones de contorno, es decir, para valores pequeños de la magnitud del campo eléctrico  $E$ ,  $E \ll \rho J_c(B, \phi)$ .

En el caso del MECEO, los perfiles resultantes  $B(x, t)$  y  $\alpha(x, t)$  son prácticamente relajados e independientes del parámetro auxiliar  $\rho$ . Sin embargo, el MECEE, el cual usa dos parámetros auxiliares ( $\rho$  y  $r$  en  $J > J_c(B, \phi)$ ), depende fuertemente de la elección del segundo parámetro,  $r$  [65].

### 4.2.2. Supresión de la magnetización remanente por un campo transversal

En las Refs. [8, 66], un disco superconductor irreversible de PbBi fue magnetizado al aplicar un sólo pulso de un campo magnético  $\mathbf{H}_i$  en la dirección  $y$ . La magnitud del campo magnético,  $H_i$ , fue mayor que el segundo campo de penetración ( $\mu_0 H_{2P} = 0.14T$  [8]). Dicho procedimiento permite magnetizar el superconductor con un momento magnético residual de saturación, el cual puede mantenerse bajo campo magnético externo cero, debido a los sitios de enclavamiento [8]. Posteriormente, el disco es rotado un ángulo de  $90^\circ$  con respecto a  $\mathbf{H}_i$ , con el fin de aplicar un campo magnético externo en dirección transversal al momento magnético residual. Ahora, el momento magnético residual se encuentra sobre el eje  $z$ , la Fig. 4.9 muestra la configuración experimental. En el panel (a) de la Fig. 4.10 se muestran las curvas experimentales para la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  versus el campo magnético transversal,  $H_y$ , que fueron medidas en [8]. El campo magnético  $H_y$  es inicialmente incrementado a partir de 0 hasta un valor máximo  $H_{y,max} > 0$  (el cual es representado con un círculo negro en la figura), posteriormente el campo se disminuye continuamente hasta su valor opuesto  $-H_{y,max} < 0$  y finalmente, es incrementado de nuevo hasta alcanzar un valor cero. Dicho procedimiento define subciclos con amplitudes

determinadas por el valor de  $H_{y,max}$ . Nótese que para cada subciclo, la magnetización  $\langle M_z \rangle$  se reduce conforme  $H_y$  varía, haciendo que la magnetización remanente sea suprimida para cada valor particular de  $H_{y,max}$ . La supresión de la magnetización remanente es más intensa para amplitudes mayores del campo magnético transversal,  $H_{y,max}$ .

Se han aplicado los modelos de estado crítico elíptico original y elíptico extendido (ver Secc. 4.1.1) para reproducir el fenómeno de la supresión de la magnetización remanente observado en el experimento de un disco de PbBi de grosor  $d = 0.8$  mm [8](Fig. 4.10(a)). El panel (b) en la Fig. 4.10 muestra las curvas de magnetización  $\langle M_z \rangle$  ( $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$ ) versus el campo magnético externo,  $H_y$ , las cuales fueron calculadas empleando el modelo elíptico original. En los cálculos, la componente perpendicular de la densidad de corriente crítica,  $J_{c\perp}(B)$ , es aquella que fue determinada en [53] (ver Secc.4.1) a partir de la curva de magnetización estándar [8] para la misma muestra:

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\perp}}, \quad (4.36)$$

donde  $J_{c\perp}(0) = 47.11 \times 10^7 \text{ Am}^{-2}$ ,  $n_\perp = 2$  y  $H_P$  es el primer campo de penetración ( $\mu_0 H_P = 0.1015 \text{ T}$  [8]). Empleando la densidad de corriente crítica  $J_{c\perp}(B)$  de la Ec. 4.36, el valor absoluto calculado de la magnetización remanente  $\mu_0 |\langle M_z \rangle|$  es igual a  $0.0616 \text{ T}$ , es decir, mayor que el valor experimental,  $0.0477 \text{ T}$  [8]. La diferencia entre el resultado experimental y teórico se debe al hecho de que el primer campo crítico  $H_{c1}$  en el modelo ha sido asumido igual a cero, despreciando la expulsión de Meissner del flujo magnético en la muestra (principalmente a partir de las superficies como una consecuencia del enclavamiento fuerte). El otro parámetro usado,  $J_{c\parallel}(B)$ , coincide con aquel obtenido en [53] (ver Secc.4.1). En dicho trabajo se han ajustado las predicciones del modelo de estado crítico elíptico original con las mediciones de un disco superconductor de PbBi, el cual es rotado en presencia de un campo magnético externo, paralelo al plano del disco y perpendicular a su eje de rotación. Por lo tanto, en este caso empleamos

$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_{\parallel}}}, \quad (4.37)$$

con  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$  y  $n_{\parallel} = 1$ . Como puede observarse en la Fig. 4.10b, el modelo de estado crítico elíptico original permite reproducir la supresión de la magnetización remanente al variar el campo magnético transversal  $H_y$ ; sin embargo, la supresión predicha es ligeramente más rápida que la observada en el experimento (ver Fig. 4.10a). Las curvas de magnetización en la Fig. 4.10c fueron obtenidas en el marco del modelo de estado crítico elíptico extendido al emplear las mismas componentes de la densidad de corriente ( $J_{c\perp}(B)$  de la Ec. (4.36) y  $J_{c\parallel}(B)$  de la Ec. (4.37)) y al ajustar el tercer parámetro adicional  $r$  con el valor  $r = 1/7$ . El MECEE también reproduce las principales características de las curvas experimentales. Nótese que las curvas de magnetización teóricas (paneles (b) y (c)) exhiben una peculiaridad cuando el campo oscilante aplicado cruza por cero. Dicha diferencia entre la teoría y el experimento es atribuida al hecho de asumir  $H_{c1}$  igual a cero, ya que el valor del primer campo crítico para el superconductor PbBi es de 0.0345 T [8]. En el capítulo 6 se aplicará un modelo más general para lograr una mejor representación del experimento.

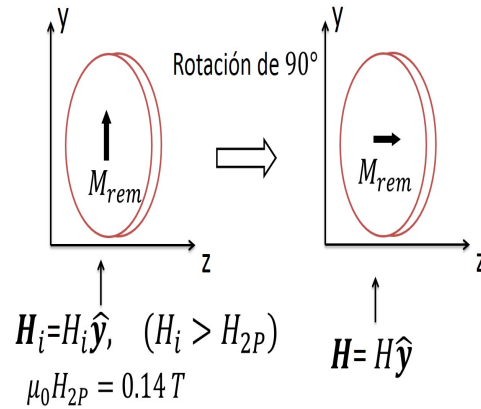


Figura 4.9: Disco de PbBi magnetizado inicialmente. Posteriormente es rotado  $90^\circ$  con el fin de aplicar un campo magnético transversal al momento magnético remanente.

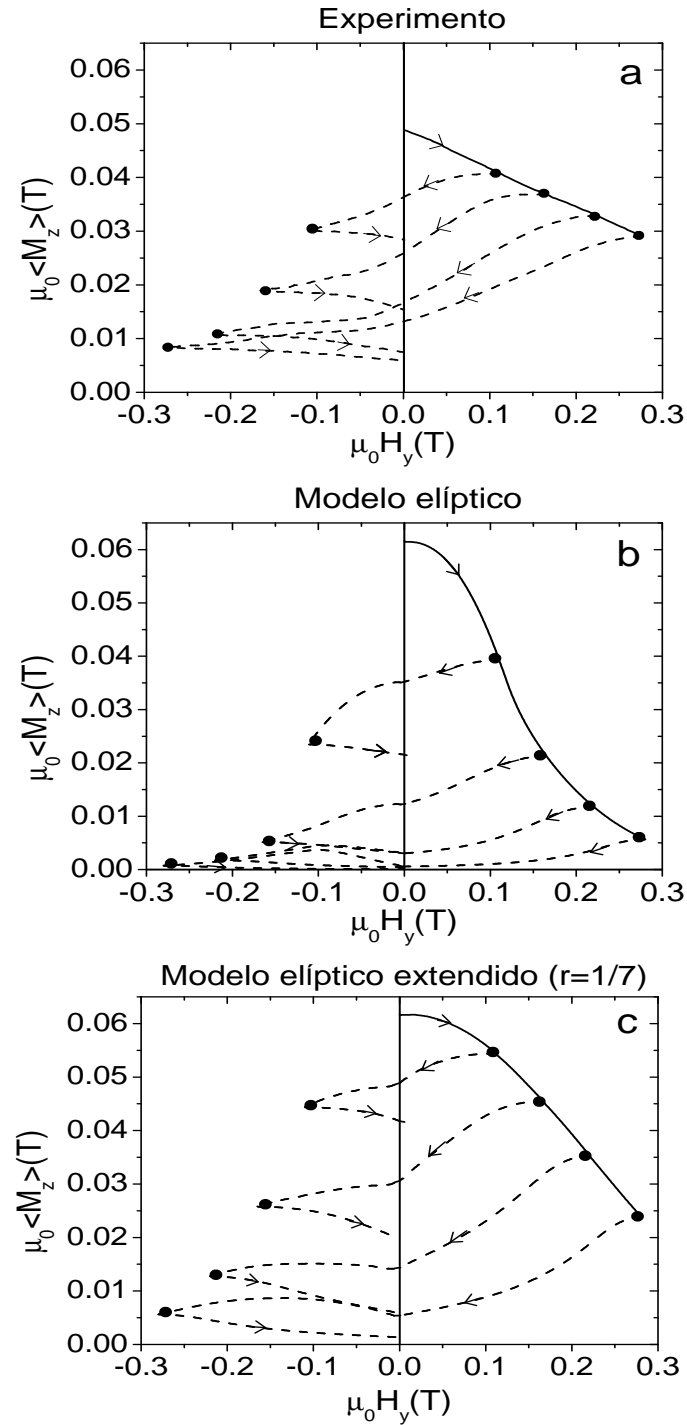


Figura 4.10: Panel a: Curvas experimentales de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  vs campo magnético transversal  $H_y$  medidas en la Ref. [8]. Los círculos negros representan los campos en los cuales un valor particular de  $H_{y,max}$  es alcanzado. Las curvas de magnetización teóricas  $\langle M_z \rangle (H_y)$  obtenidas con el modelo de estado crítico elíptico original [59] (panel b) y el elíptico extendido [62] (panel c).

En la Fig. 4.11 se muestra la evolución de los perfiles de  $B_z(x)$  conforme el campo magnético transversal  $H_y$  es variado:  $H_y = 0$  (curva 0, la cual describe el flujo magnético atrapado a lo largo del eje  $z$ ),  $H_y = H_{y,max}$  (curva 1),  $H_y = 0$  (curva 2),  $H_y = -H_{y,max}$  (curva 3) y finalmente  $H_y = 0$  (curva 4). Los perfiles fueron calculados en el marco del modelo de estado crítico elíptico extendido con los parámetros usados en la Fig. 4.10c y muestran la disminución de las pendientes de  $B_z(x)$  cerca de la superficie al variar  $H_y$ .

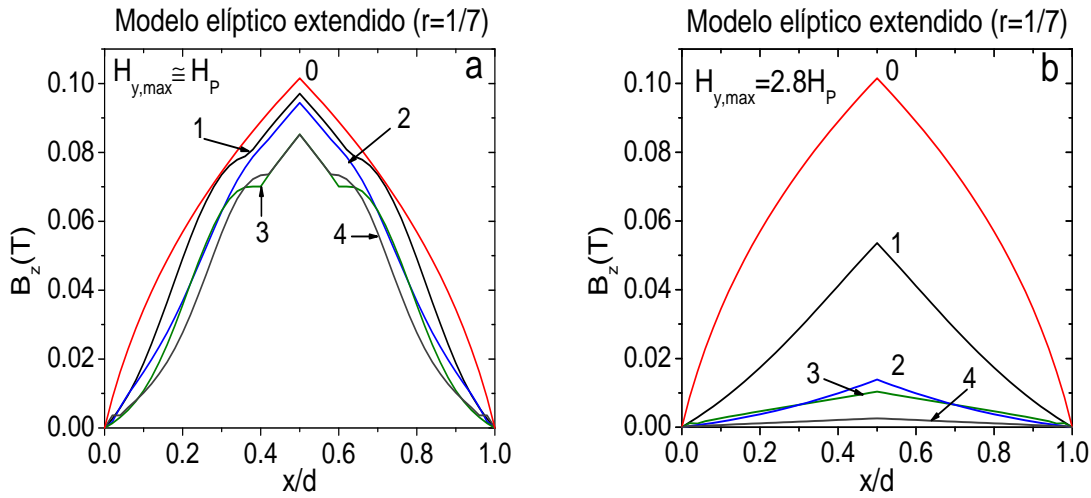


Figura 4.11: Evolución de los perfiles de  $B_z$  a medida que el campo magnético transversal  $H_y$  es variado. Los perfiles fueron calculados con el modelo de estado crítico elíptico extendido en  $H_y = 0$  (la curva 0 describe el flujo magnético atrapado a lo largo del eje  $z$ ),  $H_y = H_{y,max}$  (curva 1),  $H_y = 0$  (curva 2),  $H_y = -H_{y,max}$  (curva 3) y finalmente,  $H_y = 0$  (curva 4). Los valores de  $H_{y,max}$  son indicados en cada panel.

Si la amplitud  $H_{y,max}$  del campo de barrido es menor o igual que el primer campo de penetración  $H_P$  (ver Fig. 4.11a, donde  $H_{y,max} \approx H_P$ ), se observa un decaimiento moderado de las pendientes cerca de la superficie de la componente de la inducción magnética  $B_z$ , después de un ciclo de oscilación de  $H_y$ . Se ha verificado teóricamente que las pendientes cercanas a la superficie decaen aún más si  $H_y$  continúa oscilando. Una característica más de la evolución de  $B_z(x)$  es observada en el centro de la placa, donde  $B_z$  es reducida ligeramente, pero manteniendo su pendiente inicial (crítica) en

ambos lados del plano central  $x = 0.5d$ . Cuando la amplitud de la oscilación de  $H_y$  es mayor que el primer campo de penetración (como se muestra en la Fig. 4.11b, donde  $H_{y,max} = 2.8H_P$ ), puede observarse que el valor absoluto de la derivada  $dB_z/dx$ , así como  $B_z$ , disminuyen en toda la placa y, consecuentemente, la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$  es sustancialmente disminuida después de un ciclo de oscilación de  $H_y$ .

### 4.2.3. Estados iniciales paramagnético y diamagnético

#### Campo magnético estático de magnitud moderada

La Fig. 4.12 muestra el comportamiento de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  para el superconductor de PbBi sometido a campos magnéticos cruzados. El campo  $H_z$  se mantiene fijo mientras el campo  $H_y$  oscila entre  $H_{y,max}$  y  $-H_{y,max}$ . Se consideran dos estados iniciales: el estado diamagnético (punto D en la curva azul de la Fig. 4.12) y el estado paramagnético (punto P en la curva roja de la Fig. 4.12) en un campo estático  $H_z = H_P$ . De acuerdo con los resultados, Figs. 4.12a y 4.12b, las cuales fueron obtenidas en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido con los mismos parámetros como en los paneles (b) y (c) de la Fig 4.10, la aplicación del campo magnético oscilante ( $H_y$ ) hace que la magnetización promedio para el estado inicial diamagnético (curva azul) cambie su signo después de varios ciclos de  $H_y$ . Por otro lado, la magnetización promedio para el estado inicial paramagnético (curva roja) es reducida ligeramente. Este tipo de paramagnetismo también ha sido observado en superconductores de alta temperatura crítica [67, 68] en la presencia de campos magnéticos cruzados con  $H_z \approx H_P$  y  $H_{y,max} \approx H_P$ .

Como fue mencionado anteriormente, las predicciones del modelo elíptico original pueden ser obtenidas por el modelo extendido si se usa  $r = J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$ . Dicha razón resulta ser menor que uno,  $r < 1$ , así como dependiente de la inducción magnética,  $r = r(B)$ , con las componentes de la densidad de corriente crítica ( $J_{c\perp}(B)$  de la ecuación 4.36 y  $J_{c\parallel}(B)$  de la ecuación 4.37) empleadas para los cálculos de las curvas de magnetización mostradas en el panel (a) de la Fig. 4.12. El paramagnetismo también es observado claramente con una razón  $r = 1/7 < 1$  (ver Fig. 4.12b). Sin

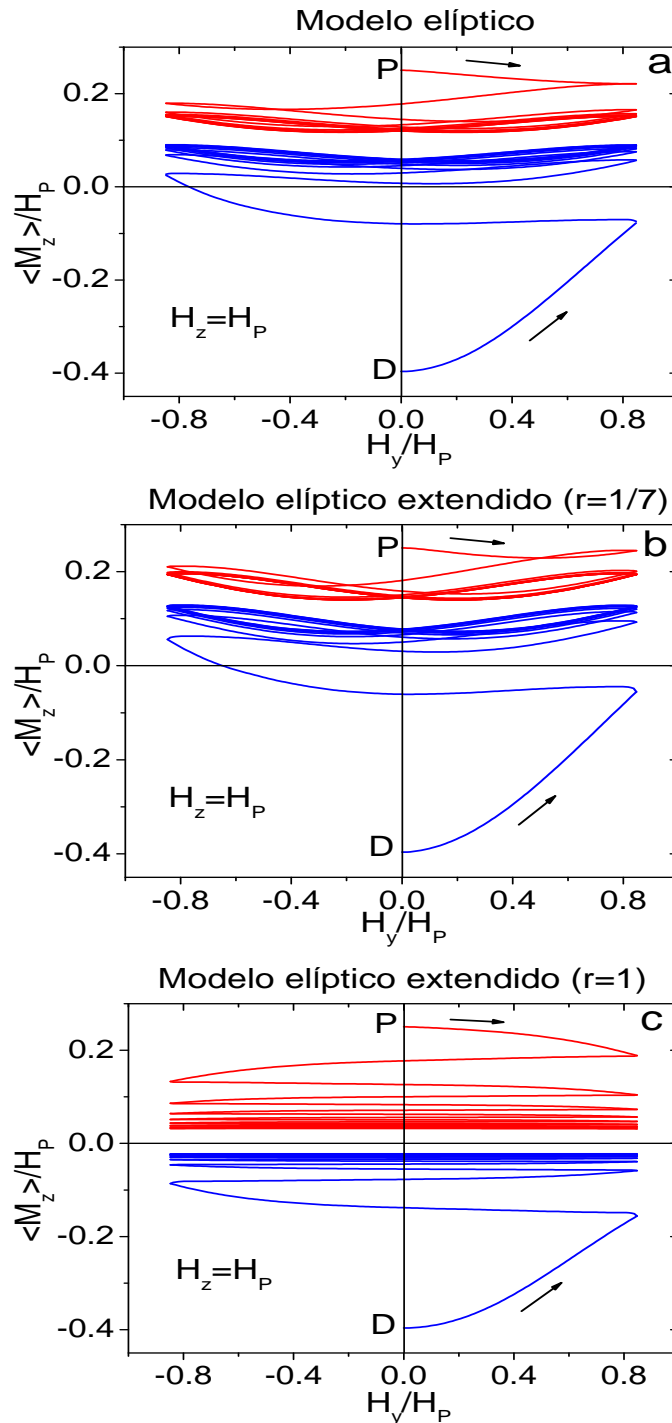


Figura 4.12: Curvas teóricas de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  de la placa de PbBi vs el campo magnético transversal  $H_y$ , las cuales fueron obtenidas con los modelos elíptico original y extendido. Las curvas rojas (azules) fueron calculadas para un estado inicial paramagnético (diamagnético) en  $H_z = H_P$ .

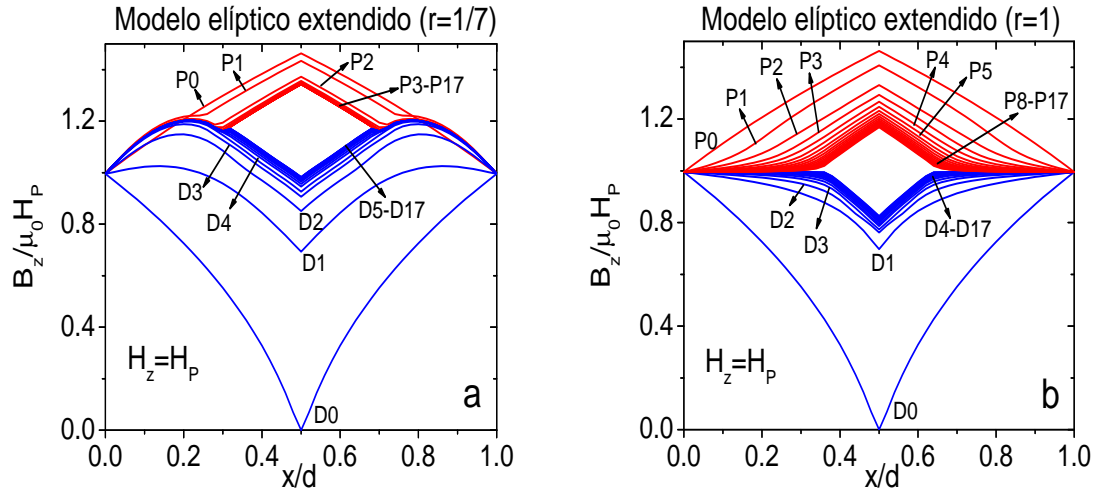


Figura 4.13: Evolución de los perfiles de  $B_z$  a medida que el campo magético transversal  $H_y$  oscila mientras el campo  $H_z$  es mantenido constante e igual a  $H_P$ . Las curvas etiquetadas con P0 (D0) corresponden al estado inicial paramagnético (diamagnético) y, las curvas etiquetadas con un número impar (par) fueron calculadas en  $H_y = H_{y,\max} = 0.85H_P$  ( $H_y = -H_{y,\max}$ ).

embargo, si los cálculos son realizados con  $r = 1$ , es decir, asumiendo que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  son paralelos cuando  $J > J_c$ , entonces el fenómeno del paramagnetismo es reducido considerablemente ya que la magnetización  $\langle M_z \rangle$  es suprimida cuasi-simétricamente, como puede verse en la figura 4.12c. Es importante mencionar que este último comportamiento también es predicho por el modelo de estado crítico de Bean (circular o isótropo) [59], en donde  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel} \equiv 1$ .

La Fig. 4.13 muestra la evolución de los perfiles  $B_z(x)$  calculados en el marco del MECCE con  $r = 1/7$  (panel (a)) y  $r = 1$  (panel (b)) en  $H_z = H_P$  y valores extremos del campo magnético transversal oscilante  $H_y$ :  $H_y = H_{y,\max} = 0.85H_P$  (perfiles D1, D3, ..., D17 y P1, P3, ..., P17) y  $H_y = -H_{y,\max}$  (perfiles D2, D4, ..., D16 y P2, P4, ..., P16). Donde, las letras D (P) indican que los perfiles corresponden al estado inicial diamagnético (paramagnético), cuya distribución espacial  $B_z(x)$  está etiquetada con D0 (P0) en la figura 4.13. Para  $r = 1/7 < 1$  (panel a), el cambio (conservación) de signo de la derivada  $dB_z(x)/dx$  cerca de las fronteras de la muestra para el estado

inicial diamagnético (paramagnético) es evidente. Después de varios ciclos de oscilación del campo transversal  $H_y$ , la magnetización promedio  $\mu_0 \langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle - \mu_0 H_z$  resulta ser positiva para ambos estados magnéticos iniciales. El comportamiento de los perfiles de  $B_z$  concuerdan con las predicciones del modelo de estado crítico elíptico original (figura 4.12a) y la explicación del paramagnetismo dada en la Ref. [59]. En contraste, para  $r = 1$  (figura 4.13b), puede observarse el surgimiento de regiones cercanas a la superficie, donde  $B_z(x) \approx \mu_0 H_z$ , conduciendo al desvanecimiento de la magnetización a media que  $H_y$  es barrido (ver figura 4.12c). Es importante mencionar, que este último comportamiento magnético no ha sido observado en superconductores duros sujetos a campos cruzados cuando sus magnitudes son comparables con el primer campo de penetración ( $H_y \approx H_z \approx H_P$ ).

### Campo magnético fuerte

A continuación se presenta el caso cuando el campo magnético estático  $H_z$  es relativamente grande ( $H_z \gg H_P \gtrsim H_{y,\max}$ ). La figura 4.14 muestra las curvas de la magnetización promedio para la muestra de PbBi versus el campo transversal  $H_y$ , las cuales fueron calculadas en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido. Los cálculos se realizaron para  $H_z = 5H_P$  para el estado inicial paramagnético (curva roja), así como para el estado inicial diamagnético (curva azul). Los cálculos no se llevaron a cabo con un valor mayor del campo aplicado  $H_z$  debido a que debe ser menor que el segundo campo crítico  $H_{c2} \approx 0.56\text{T}$  [8]. De forma interesante, el modelo original predice ciclos de histéresis cerrados en la región paramagnética (ver Fig. 4.14a). Estos resultados muestran cómo la dependencia de la inducción magnética, en la densidad de corriente crítica, influye en las curvas de magnetización predichas por el modelo elíptico original. En efecto, en trabajos previos [59, 60], donde dicho modelo fue aplicado para explicar el *colapso* de la magnetización, la razón  $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$  fue elegida independiente de  $B$ . Por el contrario, la razón  $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$ , empleada en los cálculos de la Fig. 4.14a disminuye a medida que  $B$  se incrementa ( $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B) = 1/9$  en  $B = 5\mu_0 H_P$ ). Como resultado, la anisotropía de la densidad de corriente crítica se mejora considerablemente con

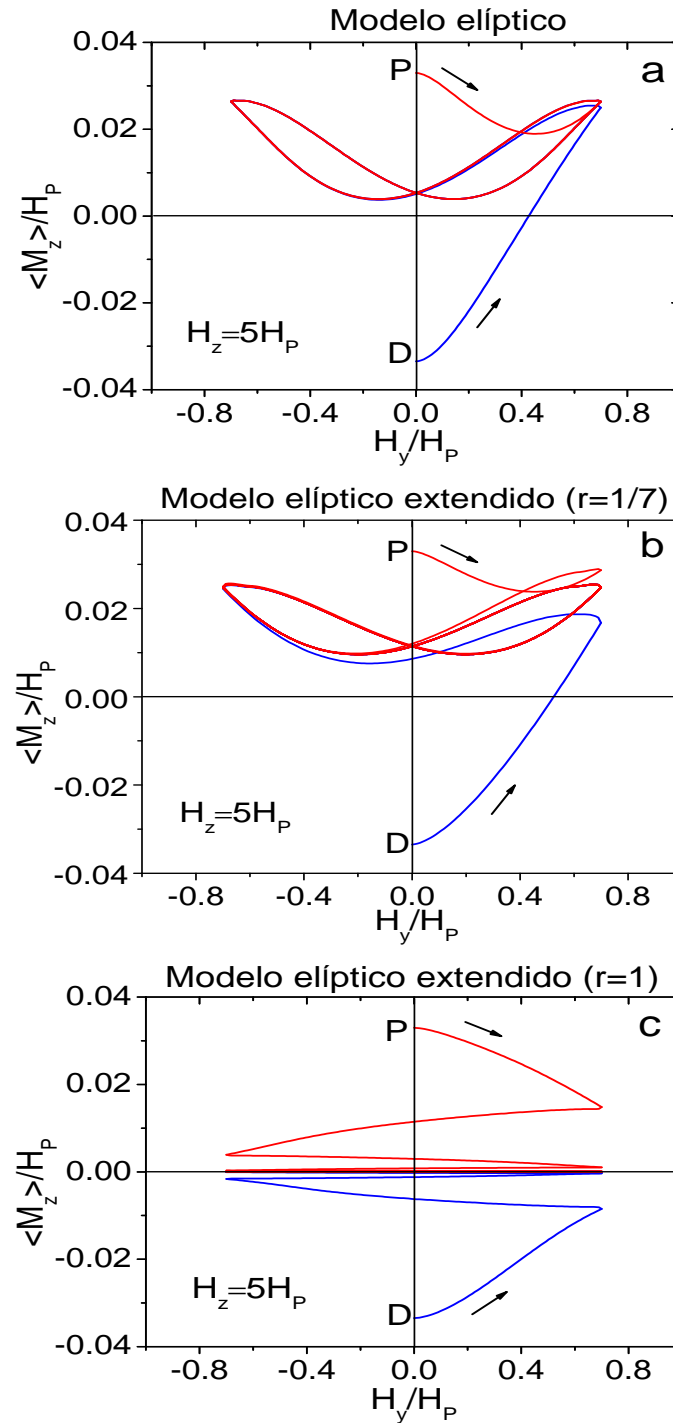


Figura 4.14: Curvas teóricas de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  de una placa de PbBi vs el campo magnético transversal  $H_y$ , las cuales fueron obtenidas al aplicar los modelos de estado crítico elíptico original y extendido. Las curvas rojas (azules) fueron calculadas para el estado inicial paramagnético (diamagnético) en  $H_z = 5H_p$ .

$B$  y el modelo de estado crítico elíptico original predice una evolución asimétrica de las curvas de magnetización para los estados iniciales paramagnético y diamagnético en  $H_z = 5H_P$ . Cabe señalar que el ciclo de histéresis en las curvas de magnetización de PbBi (Fig. 4.14a) son análogas a aquellas observadas en VTi [61, 69], las cuales también son caracterizadas por un parámetro de anisotropía relativamente grande  $J_{c\parallel}(B)/J_{c\perp}(B) = 6$  [61].

Como se observa en la Fig. 4.14b, las curvas de magnetización calculadas con el MECCE con  $r = 1/7$  son similares a las obtenidas con el MECEO (4.14a). La única forma de observar el *colapso* del momento magnético con las densidades de corriente,  $J_{c\parallel}(B)$  y  $J_{c\perp}(B)$ , para la muestra de PbBi sería el uso de una razón  $r = 1$  (ver Fig. 4.14c). Sin embargo, dicho valor del parámetro  $r$  parece ser poco realista para la muestra de PbBi debido a que las curvas de magnetización experimentales disponibles (Figs. 17-19, 47-49 y 53-55 en la Ref. [8]) están bien descritas con  $r = 1/7$ .

Los perfiles  $B_z(x)$  en la Fig. 4.15, los cuales fueron calculados con  $r = 1/7$  (Fig. 4.15a) y  $r = 1$  (Fig. 4.15b), corresponden a las curvas de magnetización mostradas en la Fig. 4.14b y 4.14c ( $H_z = 5H_P$ ). La reducción de las densidades de corriente crítica en un campo magnético  $H_z > H_P$  permiten que el flujo magnético penetre la muestra completa con  $H_{y,\max} < H_P$ . Por lo tanto,  $B_z(x)$  y su derivada  $dB/dx$  son alteradas en toda la placa superconductora con  $H_{y,\max} = 0.7H_P$  (ver Fig. 4.15). Como se mencionó anteriormente, los resultados con  $r = 1/7$  describen la situación esperada para la muestra de PbBi [65].

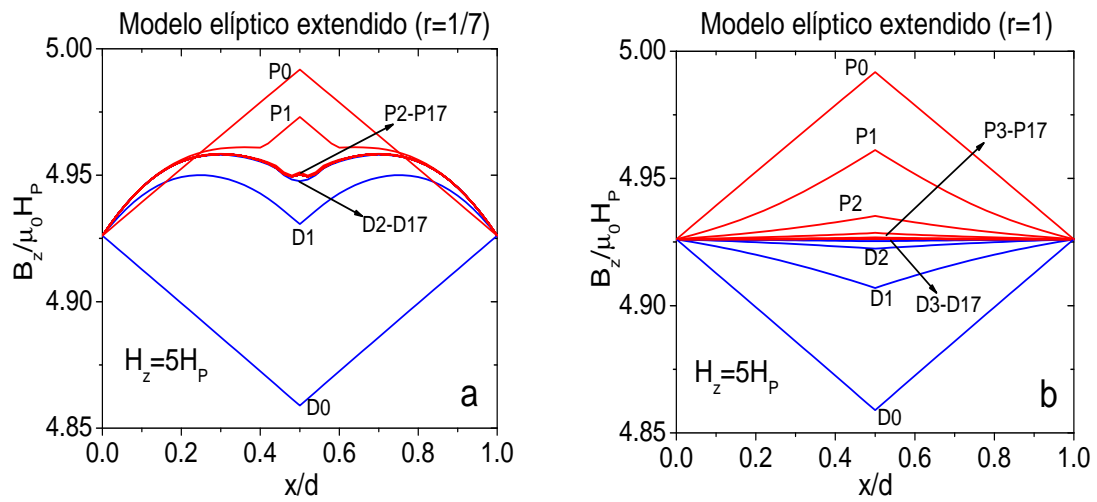


Figura 4.15: Evolución de los perfiles de  $B_z$  conforme el campo magnético transversal  $H_y$  oscila en presencia de un campo  $H_z = 5H_P$ . Las curvas etiquetadas con P0 (D0) corresponden al estado inicial paramagnético (diamagnético). Las curvas con un número impar (par) fueron calculadas en  $H_y = H_{y,\max} = 0.7H_P$  ( $H_y = -H_{y,\max}$ ).

# Capítulo 5

## Superconductores tipo-II semirreversibles (enclavamiento moderado)

Se presenta el estudio teórico de la respuesta magnética de bloques superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a un campo magnético rotante paralelo a sus superficies. El estudio se realizó aplicando los modelos de estado crítico elíptico [59] y elíptico extendido [62, 63] para explicar los resultados experimentales obtenidos en un disco de PbIn rotando en presencia de un campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_a$ , paralelo a sus superficies [8]. En los cálculos el perfil de la inducción magnética inicial, es decir cuando el ángulo de rotación  $\theta = 0$ , se obtiene después del enfriamiento en campo. De esta manera, el perfil es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial.

### 5.1. Modelos de estado crítico elíptico original y elíptico extendido

El modelo de estado crítico elíptico [59] ha reproducido exitosamente diferentes fenómenos como el colapso cuasi-simétrico de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  en ex-

perimentos con  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  [70, 71], así como el comportamiento de las funciones  $\langle M_y \rangle (H_y)$  y  $\langle M_z \rangle (H_y)$  en campos cruzados para cintas de VTi con un estado inicial no magnético [69, 72]. A pesar del buen acuerdo entre los resultados obtenidos con el modelo elíptico y los experimentos, Clem [62, 63] ha extendido el modelo elíptico original permitiendo el estudio del comportamiento magnético cuando  $J > J_c$  y  $E > 0$ , es decir en la región disipativa. Los resultados reportados en [53] (ver capítulo 4), al aplicar los modelos elíptico original y extendido para explicar los resultados experimentales de un disco de PbBi el cual es rotado en presencia de un campo magnético estático, muestran que el modelo elíptico original reproduce las principales características de las curvas de magnetización experimental y, el modelo elíptico extendido el cual es una generalización del elíptico original, permitió un estudio entre la relación  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  en la región disipativa sin elucidar claramente los efectos asociados a las resistividades de corte y transporte de flujo propuestas en el modelo.

## 5.2. Formalismo teórico

El sistema de ecuaciones a resolver es aquel que se ha presentado en el capítulo 4 (ver Secc. 4.1.1, Ecs. 4.7-4.10, así como las consideraciones físicas que allí se expusieron). Sin embargo, las condiciones de frontera en  $B(x)$  para un superconductor semirreversible, el cual exhibe una expulsión parcial de Meissner, son:

$$B(x=0) = F(\mu_0 H_a) \quad B(x=l) = F(\mu_0 H_a), \quad (5.1)$$

donde  $F$  es una expresión que permite modelar el comportamiento de la inducción magnética en el interior de un superconductor tipo II y está dada por [73]:

$$F = B = \mu_0 \begin{cases} (H_a - H_0) \left[ 1 - e^{-2\left(\frac{H_a - H_{c1}}{H_2 - H_{c1}}\right)} \right]; & |H_a| > H_{c1} \\ 0 & ; \\ & 0 \leq |H_a| < H_{c1}, \end{cases} \quad (5.2)$$

En la Ec. 5.2,  $H_a$  es el campo aplicado y  $\mu_0 H_{c1} = 6.5$  mT representa el primer campo crítico, el cual es seleccionado a partir de la curva de magnetización virgen experimental (ver el retorno de la Fig. 5.2 panel a). Los parámetros  $\mu_0 H_0 = 4.2$

mT y  $\mu_0 H_2 = 17.3$  mT son seleccionados de modo que se obtenga una aproximación satisfactoria del comportamiento de la inducción magnética en el interior de un superconductor tipo II (ver Fig. 5.1).

La importancia de la condición de frontera, Ec. 5.1, radica en la inclusión de la zona en donde existe el efecto Meissner parcial (expulsión parcial de flujo). Además, dicha condición modifica el perfil inicial de la inducción magnética en el interior del superconductor, es decir, el perfil inicial es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial; a diferencia de aquella condición de frontera empleada en [53] que no considera la zona de expulsión parcial de flujo y en donde el perfil inicial es homogéneo.

La solución numérica es similar a la presentada en la Secc. 4.1.1, en donde también ya se han explicado los modelos de estado crítico elíptico original y elíptico extendido.

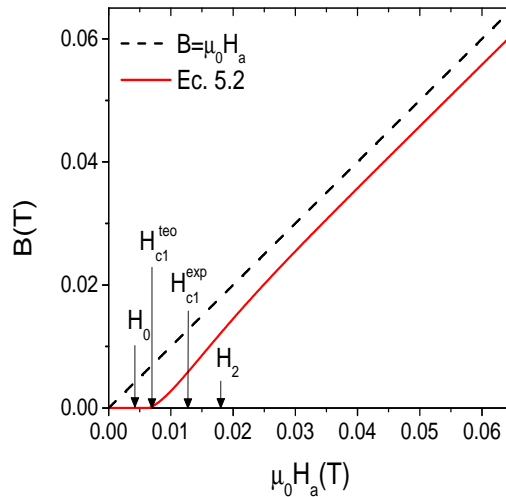


Figura 5.1: Inducción magnética para un superconductor tipo II obtenida a partir de la Ec. 5.2.

### 5.3. Resultados numéricos y comparación con el experimento

A continuación, explicaremos las curvas de magnetización experimentales de un disco superconductor semirreversible (superconductor con enclavamiento débil que exhibe un efecto Meissner parcial) de PbIn haciendo uso de los modelos de estado crítico descritos anteriormente. En el experimento, el disco se encuentra rotando en presencia de un campo magnético externo  $H_a$  el cual es paralelo a las superficies planas del disco (en la dirección  $z$ ) y perpendicular al eje de rotación. La evolución del momento magnético en  $z$  inicia en la región diamagnética de las curvas de magnetización, es decir,  $\langle B_z \rangle$  disminuye por debajo de  $B_a = \mu_0 H_a$ . Con la finalidad de comparar las magnitudes de las componentes de magnetización, la línea de referencia para  $M_z$  versus  $\theta$  se ha corrido verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización durante el efecto Meissner parcial, el cual ocurre durante el enfriamiento en campo. Del mismo modo, se ha seleccionado arbitrariamente el signo positivo para  $M_y$ ; dicha selección es posible debido a que no existe un campo aplicado en la dirección  $y$  [8].

La Fig. 5.2 muestra las curvas de magnetización virgen,  $\langle M_z \rangle$  vs  $H_a$ , así como los puntos que representan la expulsión parcial de Meissner (círculos) para un disco de PbIn de grosor  $d = 0.8\text{mm}$  [8]. El ciclo de histéresis (por tanto el enclavamiento) corresponde al comportamiento de un superconductor tipo-II semirreversible, i.e., el retorno del ciclo (vea la línea continua en la Fig. 5.2) se encuentra en el régimen diamagnético excepto para una cierta cantidad de flujo atrapado en la región de campos muy bajos  $H_a \ll H_P$ , además, se observa un efecto Meissner parcial (círculos en la Fig. 5.2) cuando la muestra es enfriada desde  $T_c$  a  $T < T_c$  al aplicar distintos campos magnéticos estáticos  $\mathbf{H}_a$ .

La Fig. 5.3 muestra la evolución de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle = \langle B_y \rangle / \mu_0$  y  $-\langle M_z \rangle = H_a - \langle B_z \rangle / \mu_0$  versus el ángulo de rotación  $\theta$ , medidas en [8] para un disco de PbIn el cual rota en presencia de un campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_a$ . Las mediciones iniciaron en el estado diamagnético, el cual evoluciona a lo largo

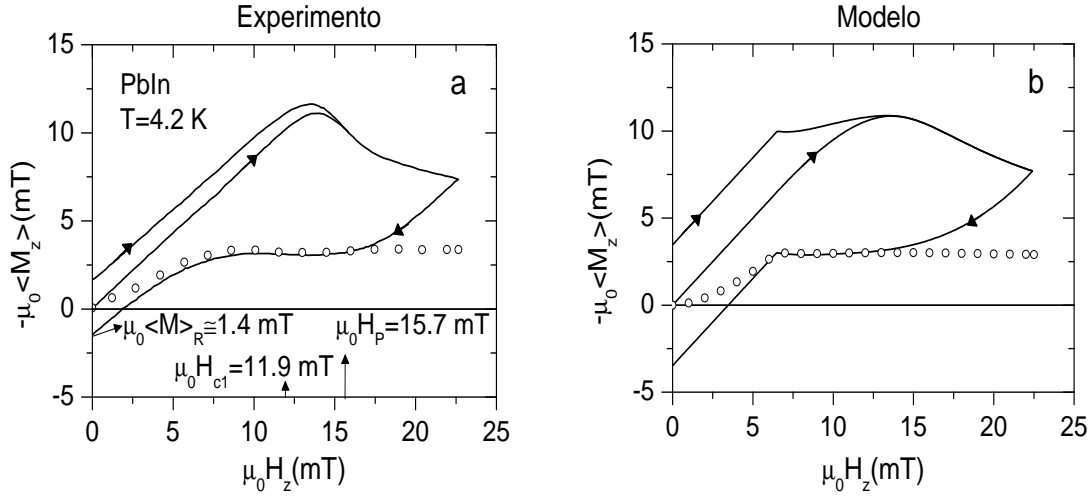


Figura 5.2: a) Curvas de magnetización virgen para un disco de PbIn tomada de [8]. b) Curvas de magnetización teóricas obtenidas con una densidad de corriente crítica  $J_{c\perp}(B)$  como en la Ec. 5.7. Los círculos muestran los valores de la magnetización después del enfriamiento en campo (efecto Meissner parcial).

del eje  $z$  (a lo largo de  $\mathbf{H}_a$ ); el estado diamagnético se obtiene después de enfriar el superconductor en presencia de los campos  $H_a/H_P = 0.5$  (ver Fig. 5.3a),  $H_a/H_P = 1.0$  (ver Fig. 5.3b) y  $H_a/H_P = 2.0$  (ver Fig. 5.3c), donde  $H_P$  ( $\mu_0 H_P = 0.0157$ T) es el campo de penetración. En los cálculos, el perfil de la inducción magnética inicial, en  $\theta = 0$ , se obtiene después del enfriamiento en campo. De este modo, el perfil es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial.

A partir de las mediciones para el disco de PbIn, figura 5.3, se puede observar un contraste en el comportamiento de las componentes de la magnetización. Para el rango completo de  $H_a/H_P$  el valor de  $-\langle M_z \rangle_{max}$  es mayor que  $\langle M_y \rangle_{max}$ , a diferencia de lo observado en superconductores tipo-II irreversibles [53]. La figura 5.3a muestra el comportamiento no monótono de las componentes  $y$  y  $z$  de la magnetización como función de  $\theta$  cuando  $H_a = 0.5H_P$ ;  $\langle M_y \rangle(\theta)$  tiene un valor máximo en aproximadamente  $70^\circ$  y  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  tiene su valor máximo en  $180^\circ$ . Para  $H_a/H_P = 1.0$  (ver Fig. 5.3 panel b)) las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle(\theta)$  y  $-\langle M_z \rangle(\theta)$ ,

inicialmente crecen a medida que  $\theta$  se incrementa hasta alcanzar un máximo local en  $\theta = 40^\circ$  y  $\theta = 120^\circ$ , respectivamente. Posteriormente, conforme el ángulo aumenta, las componentes de la magnetización decrecen hasta un mínimo local en  $\theta = 135^\circ$  para  $\langle M_y \rangle (\theta)$  y en  $\theta = 195^\circ$  para  $-\langle M_z \rangle (\theta)$ . Finalmente, el último máximo y mínimo local para  $\langle M_y \rangle (\theta)$  se encuentran en  $\theta = 230^\circ$  y  $\theta = 330^\circ$ , respectivamente; para la componente  $z$  de la magnetización,  $-\langle M_z \rangle (\theta)$ , su último máximo local se encuentra en  $\theta = 320^\circ$ . Para valores mayores de  $H_a$  ( $H_a = 2H_P$ ), figura 4.12 panel c, la componente  $-\langle M_z \rangle (\theta)$  adquiere valores mayores que aquellos para  $\langle M_y \rangle (\theta)$ . En este caso, ambas componentes son funciones constantes del ángulo para  $\theta > 180^\circ$ . Por otro lado, en ángulos de rotación pequeños ( $\theta < 60^\circ$ ), la componente  $\langle M_y \rangle (\theta)$  crece de forma rápida hasta alcanzar un máximo en  $\theta \approx 40^\circ$ .

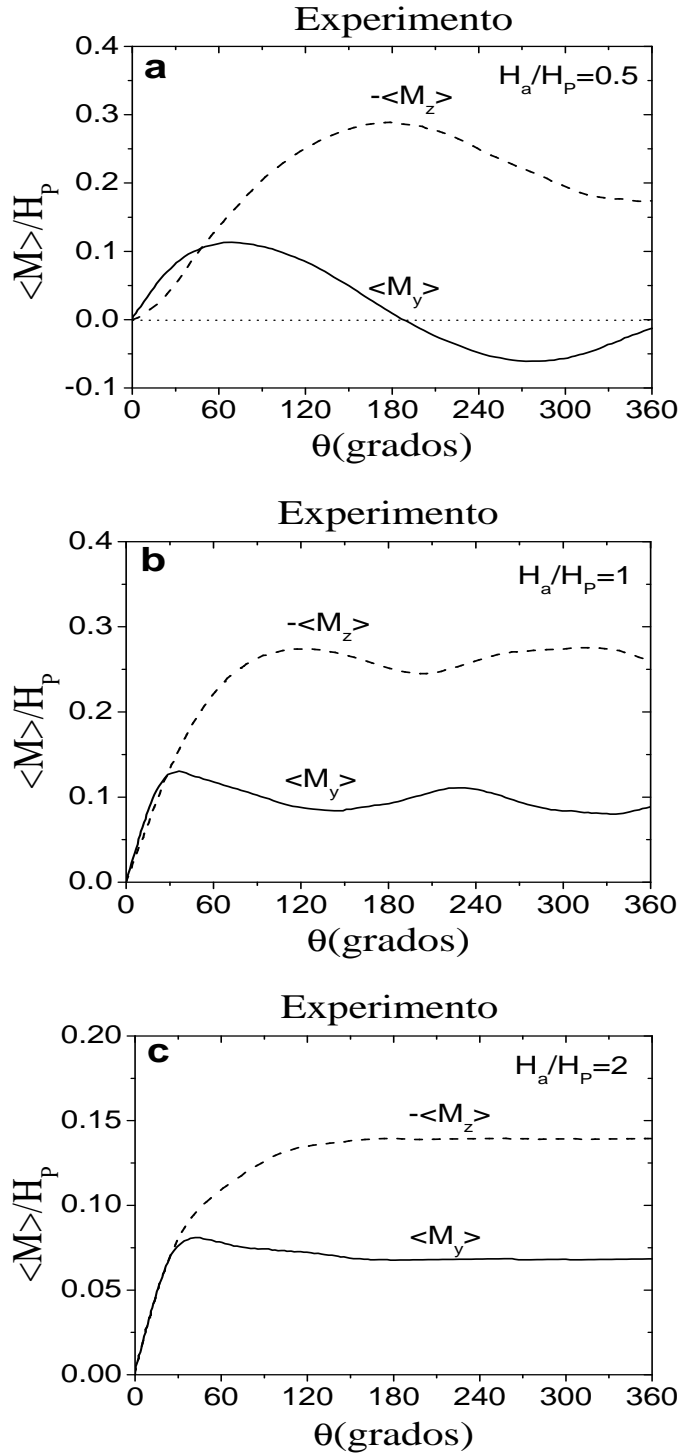


Figura 5.3: Componentes de la magnetización promedio medidas en Ref. [8] para un disco de PbIn. La magnetización  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  se corre verticalmente hacia el primer cuadrante en una cantidad igual a la magnitud de la magnetización del efecto Meissner parcial, lo cual ocurrió durante el enfriamiento en campo.

### 5.3.1. Predicciones teóricas

A continuación se aplica la teoría de la sección 5.2 para explicar el experimento en un disco de PbIn rotando en presencia de un campo magnético estático  $\mathbf{H}_a$  paralelo a sus superficies y perpendicular a su eje de rotación. Con el fin de reproducir los resultados experimentales, se hace uso de la equivalencia experimental con aquella teórica al mantener el disco fijo bajo la acción de un campo magnético paralelo,  $\mathbf{H}_a$ , rotando un ángulo  $\alpha_s = -\theta$ . Por lo tanto, los valores experimentales de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$ , corresponden respectivamente a las siguientes cantidades:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_y(x), \quad (5.3)$$

$$-\langle M_z \rangle = H_a - \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_z(x) - \langle M_z \rangle_{Meiss}, \quad (5.4)$$

donde

$$B'_y = \hat{\alpha}_s \times \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = B(x) \sin[\alpha(x) - \alpha_s], \quad (5.5)$$

$$B'_z = \hat{\alpha}_s \cdot \mathbf{B} = B(x) \cos[\alpha(x) - \alpha_s]. \quad (5.6)$$

y  $\langle M_z \rangle_{Meiss}$  corresponde a la magnetización durante el efecto Meissner parcial, la cual ocurre durante el enfriamiento en el campo  $H_a$ .

En los modelos de estado crítico descritos en la sección 4.1.1 es necesario especificar la forma de los parámetros  $J_{c\perp}(B)$  y  $J_{c\parallel}(B)$ , ambos parámetros dependen de la inducción magnética. Experimentalmente es posible determinar  $J_{c\perp}(B)$  sin tomar en cuenta  $J_{c\parallel}(B)$ , esto se hace al variar la magnitud de  $\mathbf{H}_a$  manteniendo fija la orientación del disco. En los cálculos para la curva de magnetización estándar y las componentes de la magnetización  $\langle M_y \rangle(\theta)$  y  $-\langle M_z \rangle(\theta)$ , se ha empleado una dependencia de la inducción magnética en la densidad de corriente crítica paralela de la forma:

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0) \left( 1 + \frac{\gamma(B - \mu_0 H_{c1})}{\mu_0 H_{c1}} \right)}{\left( 1 + \frac{B}{\mu_0 H_P} \right)^{n_{\perp} + 1}}, \quad (5.7)$$

donde  $H_{c1}$  es el primer campo crítico y  $J_{c\perp}(0) = 7.29 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup> y el exponente  $n_{\perp}$  se ajusta a un valor  $n_{\perp} = 2$ . El parámetro  $\gamma$  puede adquirir valores entre 0 y 1; cuando  $\gamma = 0$  la Ec. 5.7 se reduce a la expresión generalizada de Kim [74] con un exponente  $n_{\perp} + 1$ . Por el contrario, si  $\gamma = 1$ , la densidad de corriente crítica perpendicular tendrá un comportamiento monótono en  $B$ . El valor de  $\gamma = 0.93$  proporciona un buen acuerdo, con las curvas de magnetización experimentales (Fig. 5.2a) y teóricas (Fig. 5.2b), en la región de campos magnéticos aplicados mayores al primer campo crítico. La peculiaridad en el panel b) de la Fig. 5.2, observada al incrementar el campo externo desde  $-\mu_0 H_{z,max}$  hasta  $\mu_0 H_{z,max}$ , se debe a la no linealidad de la ecuación material para modelar la inducción magnética en el interior del superconductor (véase la Ec. 5.2). Los parámetros restantes de los modelos de estado crítico se encuentran mediante el ajuste de las curvas de magnetización teóricas con las experimentales (Fig. 5.3).

### Modelo elíptico original

Las componentes de la magnetización obtenidas en el marco del modelo de estado crítico elíptico original se muestran en la Fig. 5.4. La elección de  $J_{c\perp}(B)$  como en la Ec. 5.7 y  $J_{c\parallel}(B)$  de la siguiente forma:

$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0) \left(1 + \frac{\gamma(B - \mu_0 H_{c1})}{\mu_0 H_{c1}}\right)}{\left(1 + \frac{B}{\mu_0 H_P}\right)^{n_{\parallel} + 1}}, \quad (5.8)$$

donde  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$ ,  $n_{\parallel} = 1$  y  $\mu_0 H_P = 0.0157$ T proporcionan un buen acuerdo entre las curvas experimentales y las teóricas.

### Modelo elíptico extendido

El modelo elíptico original es un caso particular del modelo elíptico extendido. Los resultados mostrados en la Fig. 5.4 pueden ser obtenidos con el modelo de estado crítico elíptico extendido y el parámetro  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ , es decir  $\frac{\rho_c}{\rho_d} = \frac{J_{c\perp}}{J_{c\parallel}}$  [53]. De acuerdo con los parámetros empleados en las Ecs. 5.7 y 5.8, la razón de las densidades de corriente crítica es menor que la unidad  $r < 1$ .

Con el fin de estudiar la influencia del parámetro  $r$  en la relación del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  cuando  $J > J_c$ , se han calculado las curvas de magnetización aplicando el modelo de estado crítico elíptico extendido con los mismo parámetros que fueron empleados en la Fig. 5.4, sin embargo el parámetro  $r = \frac{\rho_c}{\rho_d} = 1$ , lo cual indica que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  son paralelos cuando  $J > J_c$ . Los resultados son mostrados en la figura 5.5.

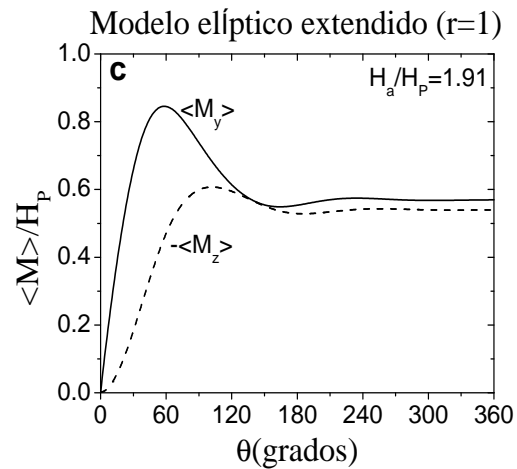
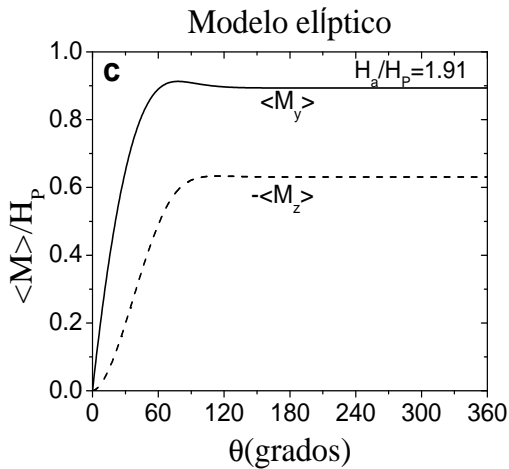
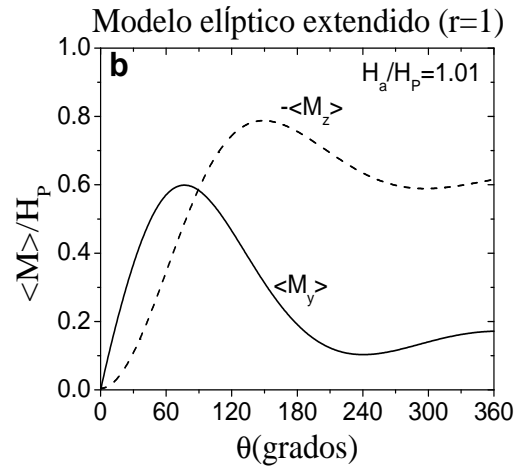
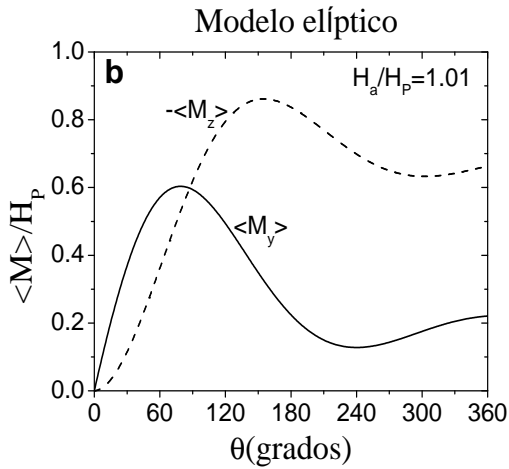
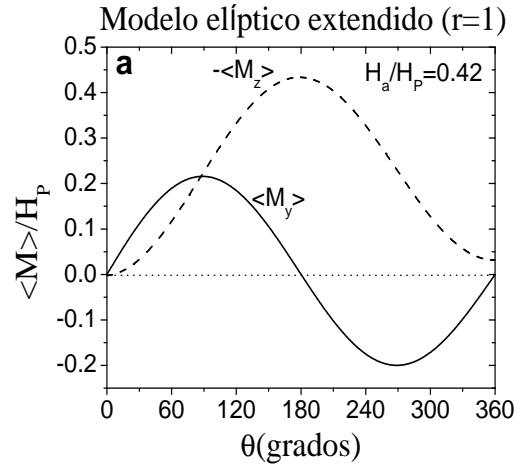
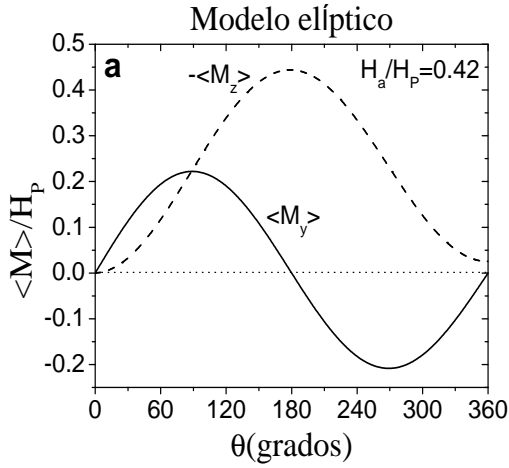


Figura 5.4: Curvas de las componentes de la magnetización promedio *vs* el ángulo de rotación, calculadas en el marco del ME-CEO.

Figura 5.5: Curvas de las componentes de la magnetización promedio *vs* el ángulo de rotación, calculadas en el marco del ME-CEE.

## 5.4. Discusión

Los resultados obtenidos al considerar la expulsión de Meissner parcial y por ello la existencia del primer campo crítico  $H_{c1}$ , en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido, no reproducen completamente el comportamiento magnético en un disco de PbIn, el cual rota en presencia de un campo magnético de dirección fija y magnitud variable. Únicamente la situación en que se aplica un campo del orden del primer campo crítico,  $H_a/H_P = 0.42$ , ambos modelos reproducen las principales características de las curvas experimentales (comparar las Figs. 5.4-5.5 con la Fig. 5.3, paneles a). Al aplicar un campo mayor que el primer campo crítico,  $H_a/H_P = 1.01$ , únicamente se reproducen cualitativamente las oscilaciones iniciales en las componentes de la magnetización observadas en el experimento. En el caso cuando se aplica un campo mucho mayor que el primer campo de penetración,  $H_a/H_P = 1.91$ , las curvas de magnetización dependen significativamente del parámetro  $r$ . De este modo, para que las componentes  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  tengan el mismo valor en ángulos de rotación mayores a  $50^\circ$ , el campo magnético aplicado para  $r = 1$  debe ser mayor que en el modelo elíptico original (panel *c* de la Fig. 5.4) [53]. A diferencia del estudio presentado para un disco de PbBi en la Secc. 4.1, en la muestra de PbIn la magnitud de la componente  $z$  de la magnetización es mayor que la componente  $y$  en los tres casos,  $\langle M_z \rangle > \langle M_y \rangle$ ; este hecho experimental no fue reproducido al aplicar los modelos MECEO y MECEE.

En el capítulo 6 se presenta un estudio del mismo sistema siguiendo el formalismo propuesto por Brandt [51], en el cual la densidad de corriente que da origen a los vórtices y por lo tanto genera el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es  $\mathbf{J}_H = \nabla \times \mathbf{H}$ .

# Capítulo 6

## Efecto Meissner y la densidad de corriente local en superconductores tipo-II semirreversibles

El presente capítulo continua con el estudio del comportamiento magnético de superconductores semirreversibles tipo-II el cual se expuso en el capítulo 5; sin embargo, este estudio es realizado siguiendo el formalismo propuesto por Brandt [51], en el cual la densidad de corriente que da origen a los vórtices y por lo tanto genera el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es  $\mathbf{J}_H = \nabla \times \mathbf{H}$ .

El capítulo se divide en dos partes, la primera investiga el comportamiento de un bloque superconductor semirreversible tipo-II en presencia de un campo magnético rotante (o equivalentemente, la respuesta de un superconductor rotante bajo la acción de un campo magnético de dirección fija) y se comparan las predicciones del modelo de estado crítico elíptico original con los resultados experimentales reportados por Sekerka [8].

En la segunda parte del capítulo se aplica el mismo modelo de estado crítico elíptico original para analizar la respuesta magnética de un bloque superconductor semirreversible sometido a campos cruzados.

## 6.1. Respuesta magnética de superconductores semi-reversibles tipo-II sometidos a campos rotantes

En esta sección se presenta el estudio teórico de la respuesta magnética de un bloque superconductor tipo-II semirreversible sometido a un campo magnético rotante paralelo a sus superficies. El estudio se llevó a cabo al aplicar el modelo de estado crítico elíptico original [59] para explicar los resultados experimentales obtenidos en un disco de PbIn rotando en presencia de un campo magnético aplicado  $\mathbf{H}_a$ , paralelo a sus superficies [8]. Al igual que en el capítulo 5, el perfil de la inducción magnética inicial, es decir cuando el ángulo de rotación  $\theta = 0$ , se obtiene después del enfriamiento en campo. De esta manera, el perfil es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial, el cual se manifiesta en regiones con  $B = 0$  en las superficies de la muestra.

### 6.1.1. Formalismo teórico

De forma similar al estudio realizado en el capítulo anterior, consideramos una placa superconductora semirreversible tipo-II, con sus superficies localizadas en  $x = 0$  y  $x = d$ . Un campo magnético de magnitud fija, el cual cambia su dirección, es aplicado a la placa superconductora:

$$\mathbf{H}_a = H_a \hat{\boldsymbol{\alpha}} = H_a [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_s) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_s)]. \quad (6.1)$$

En la Ec. 6.1,  $H_a$  y  $\alpha_s$  son la magnitud y el ángulo con respecto al eje  $z$  del campo magnético aplicado. A diferencia de los estudios realizados en [53, 56–58] y en el capítulo anterior [73], la inducción magnética en las superficies y en el interior de la placa es determinado por

$$B(H) = \mu_0 \begin{cases} \frac{aH}{\mu_0}, & H < H_{c1} \\ \frac{aH}{\mu_0} + [H^\gamma - H_{c1}^\gamma]^{1/\gamma}, & H > H_{c1}, \end{cases} \quad (6.2)$$

la cual considera las regiones donde existe expulsión de Meissner (expulsión de flujo). En la Ec. 6.2  $H$  es el campo magnético aplicado,  $H_{c1}$  es el primer campo crítico (tomado del experimento cuando el campo aplicado disminuye, retorno en la Fig. 6.2b),  $a$  es una constante,  $a \ll \mu_0$ , y  $\gamma$  se ajusta al valor  $\gamma = 1.35$  (ver Fig. 6.1).

La inducción magnética  $\mathbf{B}(x, t)$  en el interior del superconductor se expresa como

$$\mathbf{B} = B(H(x, t))[\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_H(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_H(x, t))], \quad (6.3)$$

donde  $B$  es la magnitud de la inducción magnética y  $\alpha_H$  es el ángulo de inclinación del campo magnético  $\mathbf{H}$ . Por lo tanto,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  tienen la misma dirección.

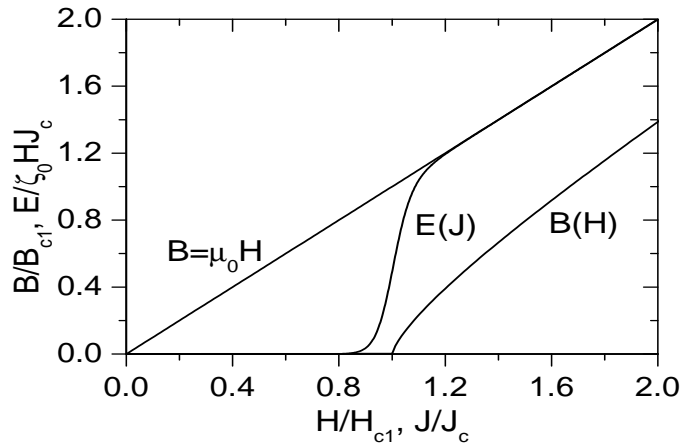


Figura 6.1: Modelo para  $B(H)$ , Ec. (6.2) con  $\gamma = 1.35$  y  $E(J)$ , Ec. (6.10) con  $\sigma = 30$ .

En un estudio previo [53] la condición de contorno asumida fue  $\mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{H}(x, t)$  para campos aplicados mucho mayores que el primer campo crítico ( $H_a \gg H_{c1}$ ) y la densidad de corriente se obtuvo a partir de  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ . En el presente estudio, siguiendo el formalismo propuesto por Brandt [51], la densidad de corriente la cual da origen a los vórtices y por lo tanto genera el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es  $\mathbf{J}_H = \nabla \times \mathbf{H}$ . De este modo,  $\mathbf{J}_H$  es la densidad de corriente promedio en el centro de los vórtices, la cual en general es diferente de la densidad de corriente promediada sobre varios vórtices,  $\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}$  [51].

Es conveniente escribir la densidad de corriente  $\mathbf{J}_H(x, t)$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}(x, t)$  en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la inducción magnética local  $\mathbf{B}$ , i.e.,  $\mathbf{J}_H = J_{H\parallel}\hat{\alpha} + J_{H\perp}\hat{\beta}$  y  $\mathbf{E} = E_{\parallel}\hat{\alpha} + E_{\perp}\hat{\beta}$ , donde  $\hat{\beta}(x, t) = \hat{x} \times \hat{\alpha}(x, t)$ .

A partir de la ley de Ampere  $\nabla \times \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{J}_H(x, t)$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J_{H\perp}, \quad (6.4)$$

$$H \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} = J_{H\parallel}. \quad (6.5)$$

Debido a que consideramos estados cuasi-estacionarios, en nuestro estudio teórico despreciamos las variaciones temporales del desplazamiento eléctrico. A partir de la ley de Faraday ,  $\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , y considerando la Ec. 6.2 se obtiene

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (6.6)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha_H}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Aquí, la magnitud de  $B$  se determina a partir de la Ec. 6.2 y a partir de la misma expresión se obtiene el término  $\partial B/\partial H$ . El sistema de ecuaciones diferenciales para  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{J}_H$  se resuelve numéricamente agregando la ecuación material que relaciona el campo eléctrico y la densidad de corriente. El modelo de estado crítico elíptico original es aplicado para tal fin.

### 6.1.2. Modelo elíptico original

El modelo de estado crítico elíptico original ya ha sido expuesto en el capítulo 4. Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales 6.4-6.7, la Ec. 4.11 se reescribe como

$$E_i = E(J_H) (J_{H,c}^{-1})_{ik} J_{H,k} \quad \text{con} \quad i, k = \perp, \parallel, \quad (6.8)$$

donde ahora  $E(J_H)$  tiene la forma simple

$$E(J_H) = \rho(J_H, H)J_H, \quad (6.9)$$

con [51]

$$\rho(J_H, H) = \zeta_0 H \frac{(J_H/J_{H,c})^\sigma}{1 + (J_H/J_{H,c})^\sigma}, \quad (6.10)$$

donde  $H$  es la magnitud del campo magnético,  $J_H$  es la magnitud de la densidad de corriente,  $J_{H,c}$  es la magnitud de la densidad de corriente crítica,  $\sigma$  es un exponente a ajustarse y  $\zeta_0$  es una constante.

A partir de MECEO, la magnitud de la densidad de corriente crítica se modifica como

$$J_{H,c}(H, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{H,c\parallel}^2(H)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{H,c\perp}^2(H)} \right]^{-1/2}, \quad (6.11)$$

donde  $\phi$  denota el ángulo de la densidad de corriente crítica,  $\mathbf{J}_H$ , con respecto a la dirección del campo  $\mathbf{H}$ .

### 6.1.3. Resultados numéricos y comparación con el experimento

Las curvas de magnetización experimentales de un disco superconductor semi-reversible (superconductor con enclavamiento débil que exhibe un efecto Meissner parcial) de PbIn se han explicado en el capítulo 5, así como las condiciones en las que fue llevado a cabo el experimento. Es necesario recordar que la evolución del momento magnético en  $z$  inicia en la región diamagnética de las curvas de magnetización. Por lo tanto, con la finalidad de comparar las magnitudes de las componentes de magnetización, la línea de referencia para  $M_z$  versus  $\theta$  se corre verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización durante el efecto Meissner parcial, el cual ocurre durante el enfriamiento en campo. También, se ha seleccionado arbitrariamente el signo positivo para  $M_y$ ; debido a que no existe un campo aplicado en la dirección  $y$  [8].

## Curvas de magnetización virgen

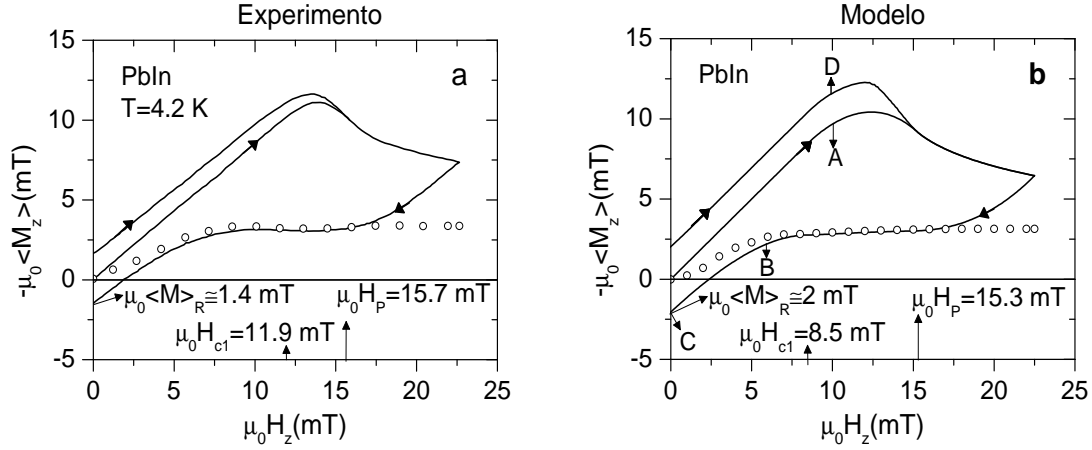


Figura 6.2: a) Curva de magnetización virgen para un disco de PbIn medida en  $T = 4.2$  K [8]. b) Curva de magnetización teórica obtenida con una densidad de corriente crítica  $J_{H,c\perp}(H)$  como en la Ec. 6.16.

La Fig. 6.2a muestra la curva de magnetización virgen,  $\langle M_z \rangle$  vs  $H_z$ , para un disco de PbIn de grosor  $d = 0.8$  mm medida en [8]. Los círculos abiertos representan la magnetización del efecto Meissner, esta magnetización es obtenida al enfriar desde  $T_c$  hasta  $T = 4.2$  K en diferentes campos magnéticos estáticos,  $H_z$ . La histéresis que exhibe la curva de magnetización corresponde al comportamiento de un superconductor semirreversible, ver sección 5.3.

La curva de magnetización virgen, Fig. 6.2b, se obtuvo con una densidad de corriente crítica  $J_{H,c\perp}(H)$  como en la Ec. (6.16). Además del buen acuerdo que existe entre la curva teórica y la experimental, es interesante analizar los perfiles del campo magnético  $H$  y de la inducción magnética  $B$  en algunos puntos de la curva de magnetización.

Los perfiles de  $H$  y  $B$ , correspondientes a las etiquetas A-D en la Fig. 6.2b, se muestran en la Fig. 6.3, cada punto A-D de la Fig. 6.2b corresponde a la etiqueta de cada panel en la Fig. 6.3. Al incrementar el campo externo desde cero hasta  $\mu_0 H_z = 10$  mT (panel A), la inducción magnética muestra un salto en las superficies

de la muestra ( $0 < x < x_1$ ), donde  $H_{c1} < H \leq H_z$ . Sin embargo, en la zona donde  $H < H_{c1}$  ( $x_1 < x < x_3$ ) una región con inducción magnética nula  $B = 0$  es generada como consecuencia de la Ec. 6.2. Estas regiones se han llamado *regiones de Meissner*. Obsérvese que el campo magnético  $H$  puede adquirir valores en el intervalo  $0 - \mu_0 H_{c1}$ . En la región central de la muestra, la inducción magnética es cero debido a que el campo magnético aplicado no ha penetrado completamente la muestra, i.e.,  $H_z < H_P$ . A medida que el campo aplicado se incrementa hasta  $H_{z,max}$  la región de Meissner se desvanece.

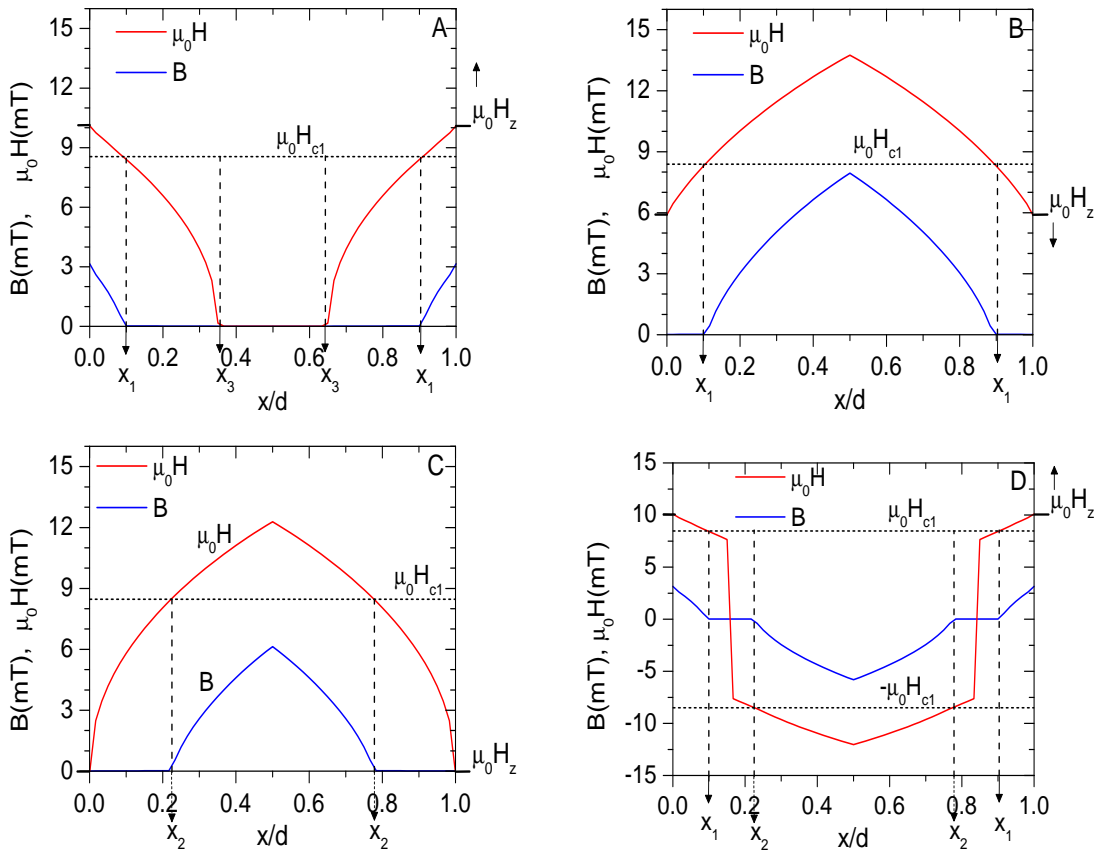


Figura 6.3: Perfiles de  $H$  y  $B$  correspondientes a las etiquetas A – D en la Fig. 6.2b.

Posteriormente, al disminuir el campo magnético hasta  $\mu_0 H_z = 6 \text{ mT} < \mu_0 H_{c1}$  (ver panel B en la Fig.6.3), la región de Meissner comienza a crecer en las superficies de la placa en el intervalo  $0 < x < x_1$ . El tamaño máximo de la región de Meissner cuando el campo magnético disminuye (o se incrementa desde  $-\mu_0 H_{z,max}$  hasta  $\mu_0 H_{z,max}$ ) ocurre

en  $H_z = 0$  T, ocupando la región  $0 < x < x_2$ , ver panel C en la Fig. 6.3. Finalmente, al incrementar el campo magnético aplicado desde  $-\mu_0 H_{z,max}$  hasta  $\mu_0 H_z = 10$  mT  $> \mu_0 H_{c1}$ , el tamaño de la región de Meissner disminuye y se mueve hacia el interior de la placa, ocupando la región  $x_1 < x < x_2$ .

### Curvas de magnetización experimentales en campos magnéticos rotantes

La evolución de las componentes  $y$  y  $z$  de la magnetización, medidas en [8], ya han sido mostradas y explicadas en la Secc. 5.3. Con fines de comparación se muestran nuevamente en la Fig. 6.4. Recuérdese que las mediciones a lo largo del eje  $z$  (dirección del campo aplicado  $H_a$ ) iniciaron con un momento diamagnético y se corren verticalmente hacia el primer cuadrante, una cantidad igual a la magnitud de la magnetización durante el efecto Meissner parcial.

#### 6.1.4. Predicciones teóricas y modelado de los parámetros

A continuación se aplica el modelo de estado crítico elíptico original para explicar el experimento realizado en un disco de PbIn, el cual rota en presencia de un campo magnético de dirección fija y magnitud  $H_a$ , paralelo a sus superficies (ver Fig. 6.4). Al igual que en la Secc. 4.1, aquí también se hace uso de la equivalencia experimental con la teórica, al mantener fijo el disco y aplicar un campo magnético paralelo a sus superficies, el cual rota un ángulo  $\alpha_s = -\theta$ . Los valores experimentales  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_z \rangle$  corresponden a las cantidades:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_y(x), \quad (6.12)$$

$$-\langle M_z \rangle = H_a - \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_z(x) - \langle M_z \rangle_{Meiss}, \quad (6.13)$$

donde

$$B'_y = \hat{\alpha}_s \times \hat{x} \cdot \mathbf{B} = B(x) \sin[\alpha(x) - \alpha_s], \quad (6.14)$$

$$B'_z = \hat{\alpha}_s \cdot \mathbf{B} = B(x) \cos[\alpha(x) - \alpha_s]. \quad (6.15)$$

y  $\langle M_z \rangle_{Meiss}$  corresponde a la magnetización durante el efecto Meissner parcial, la cual ocurre durante el enfriamiento en el campo  $H_a$ .

En el MECEO descrito en la Secc. 4.1.1 es necesario especificar la forma de los parámetros  $J_{H,c\perp}(H)$  y  $J_{H,c\parallel}(H)$ , ambos dependientes del campo magnético  $H$ .

En los cálculos de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y(\theta) \rangle$  y  $-\langle M_z(\theta) \rangle$ , se ha empleado la dependencia en el campo  $H$  de la densidad de corriente crítica perpendicular como

$$J_{H,c\perp}(H) = \frac{J_{H,c\perp}(0)}{C_{\perp}^{n_{\perp}} \left(1 + \frac{H}{C_{\perp}H_P}\right)^{n_{\perp}}}, \quad (6.16)$$

donde  $J_{H,c\perp}(0) = 1.4747 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup> y  $\mu_0 H_P = 15.7$  mT corresponde al valor experimental del primer campo de penetración. Los valores de  $n_{\perp} = 1.15$  y el parámetro adimensional  $C_{\perp} = 0.007$ , proporciona un buen acuerdo entre las curvas de magnetización virgen experimentales y teóricas (comparar los paneles *a* y *b* en la Fig. 6.2). Otros parámetros del modelo de estado crítico son encontrados mediante el ajuste de las curvas de magnetización teóricas con las experimentales, ver Fig. 6.2.

Las componentes de la magnetización obtenidas al aplicar el MECEO son mostradas en la Fig. 6.5. La elección de  $J_{H,c\parallel}(H)$  como en la Ec. 6.16

$$J_{H,c\parallel}(H) = \frac{J_{H,c\parallel}(0)}{C_{\parallel}^{n_{\parallel}} \left(1 + \frac{H}{C_{\parallel}H_P}\right)^{n_{\parallel}}}, \quad (6.17)$$

con  $J_{H,c\parallel}(0) = 13J_{H,c\perp}(0)$ ,  $n_{\parallel} = 5.0$  y  $C_{\parallel} = 0.03$  proporcionan un buen acuerdo entre las curvas teóricas y las experimentales (ver Fig. 6.4 y Fig. 6.5). Valores del parámetro de anisotropía  $J_{c\parallel}/J_{c\perp} = 1.5, 4, 6$  han sido utilizados en [53, 59, 75], respectivamente; sin embargo, nótese que en este caso el parámetro de anisotropía es  $J_{H,c\parallel}/J_{H,c\perp} = 13 > 1.5, 4, 6$ , lo cual indica que el efecto de corte de líneas de flujo domina completamente en el comportamiento magnético del superconductor semi-reversible cuando es sometido a un campo magnético de magnitud fija y dirección variable. En particular, al considerar el parámetro de anisotropía  $J_{H,c\parallel}/J_{H,c\perp} = 13$ , la predicción teórica reproduce el hecho experimental cuando  $H_a = 2H_P$ , ya que la magnitud de la componente  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  adquiere valores mayores que aquellos para

$\langle M_y \rangle (\theta)$ , ver paneles *c* en las Figs. 6.4 y 6.5. Dicho resultado no pudo ser obtenido en el capítulo 5 (ver paneles *c* en las Figs. 5.4 y 5.5).

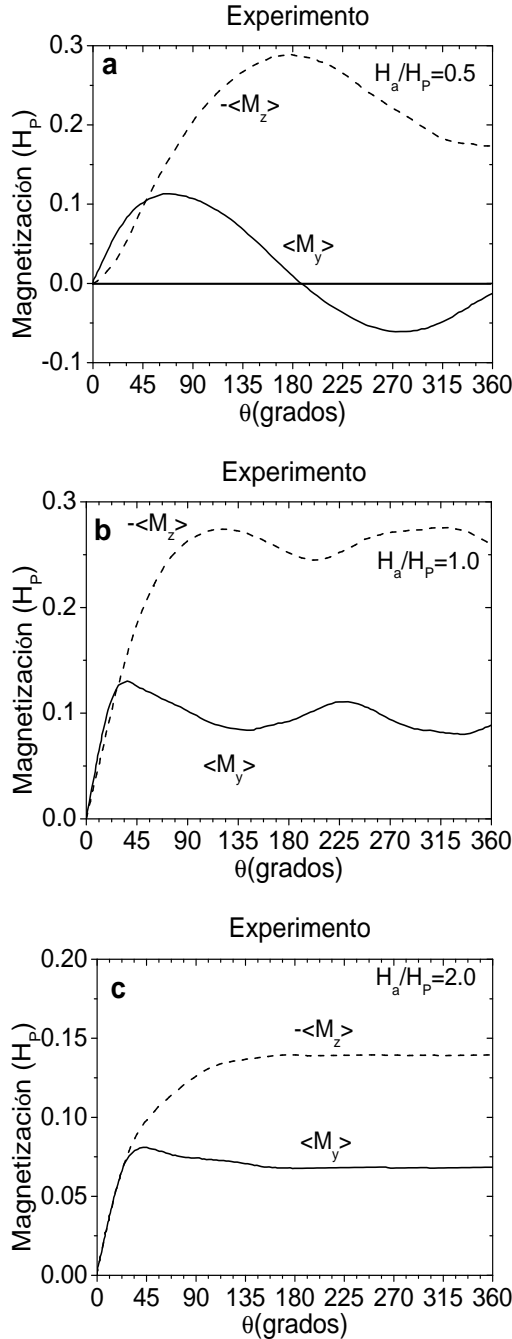


Figura 6.4: Componentes de la magnetización para un disco de PbIn medidas en la Ref. [8].

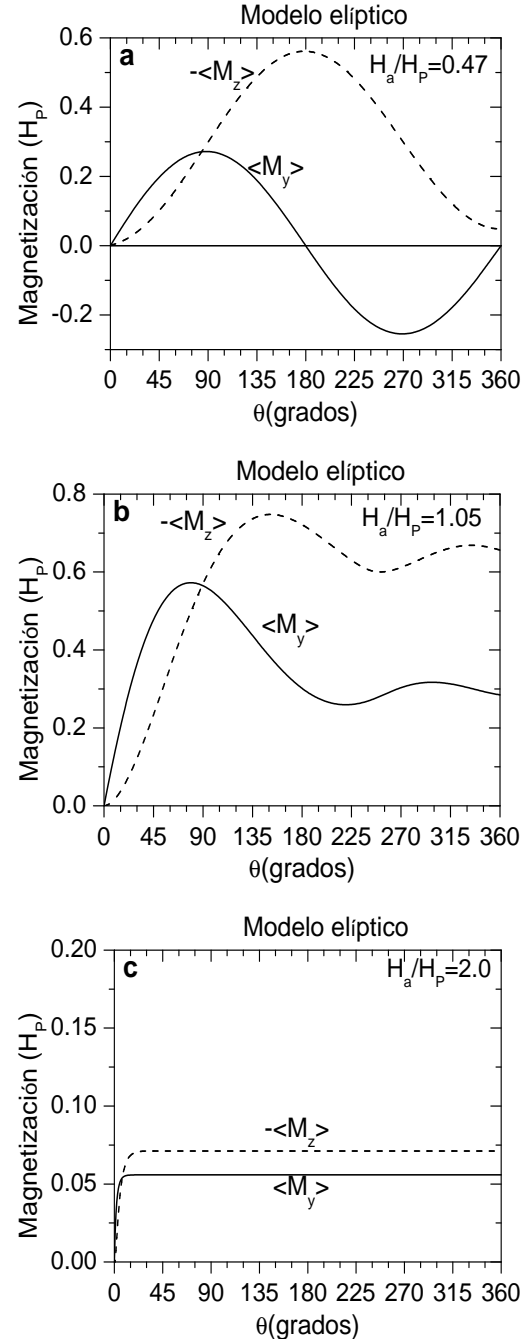


Figura 6.5: Curvas de las componentes de la magnetización promedio versus el ángulo de rotación, calculadas en el marco del MECEO.

### 6.1.5. Perfiles de la inducción magnética

Los perfiles correspondientes al ángulo  $\alpha_H(x)$ , campo magnético  $H(x)$ , magnitud de la inducción magnética  $B(x)$  y sus componentes  $B'_y(x)$  y  $B'_z(x)$  cuando el campo magnético externo es menor que el primer campo crítico,  $H_a = 0.5H_P < H_{c1}$ , se muestran en la Fig. 6.6. Nótese que el perfil inicial de  $H$  no es homogéneo debido al efecto Meissner (curva 0 en el panel *b*). En particular, los valores de  $H$  en la región  $0 < x < x_1$  y  $x_2 < x < d$  se encuentran en el intervalo  $7.37 \text{ mT} < \mu_0 H < \mu_0 H_{c1} = 15.7 \text{ mT}$ . Este hecho da origen a la región de Meissner, en las superficies de la placa en la curva 0 del perfil de  $B$ , la cual ocupa la región  $0 < x < x_{m1}$  y  $x_{m2} < x < d$ . A medida que la rotación tiene lugar, el tamaño de la región de Meissner aumenta hasta  $x_1$  y  $x_2$ . Los perfiles de  $H$  en la región central de la muestra  $x_1 < x < x_2$  son reducidos ligeramente manteniendo sus pendientes iniciales (críticas) en el rango completo de la rotación. Los perfiles de la inducción magnética en la misma región son modificados de acuerdo a la Ec. 6.2.

Por otro lado, el valor absoluto del ángulo  $\alpha_H$  se incrementa únicamente con el ángulo de rotación  $\theta$  en las superficies de la muestra en  $0 < x < x_{m1}$  y  $x_{m2} < x < d$ , la región central de la muestra  $x_{m1} < x < x_{m2}$  no es afectada por la rotación, i.e, los perfiles de  $H$  y  $B$  no cambian de dirección en este intervalo.

A diferencia de los perfiles observados en la Fig. 4.6d, la componente  $B'_z$  de la inducción magnética paralela al campo magnético aplicado inicia en un valor cero (Fig. 6.6 c), i.e., posee la misma región de Meissner inicial observada en el perfil de  $B$ . A medida que el ángulo de rotación se incrementa, la magnitud de  $B'_z$  disminuye ligeramente en la región central  $x_1 < x < x_2$ , además de mostrar un comportamiento oscilatorio, el cual da origen a las oscilaciones en la componente  $z$  de la magnetización  $\langle M_z \rangle(\theta)$  (panel *a* en las Figs. 6.4, 6.5 ). En  $\theta = 90^\circ$  y  $270^\circ$  (curvas 2 y 6 respectivamente) la componente  $z$  del campo  $H$  posee valores muy por debajo del primer campo crítico  $H_z \ll H_{c1}$  y por la Ec. 6.2 la componente  $B'_z$  se anula completamente en la región central  $x_1 < x < x_2$ , permitiendo que la región de Meissner ocupe todo el espacio  $0 < x < d$  de la muestra. Al finalizar el ciclo en  $\theta = 360^\circ$ , la región de Meissner ocupa el espacio  $0 < x < x_1$  y  $x_2 < x < d$  y  $B'_z$  no adquiere los valores del

perfil inicial (comparar con la curva 8 de la Fig. 4.6d).

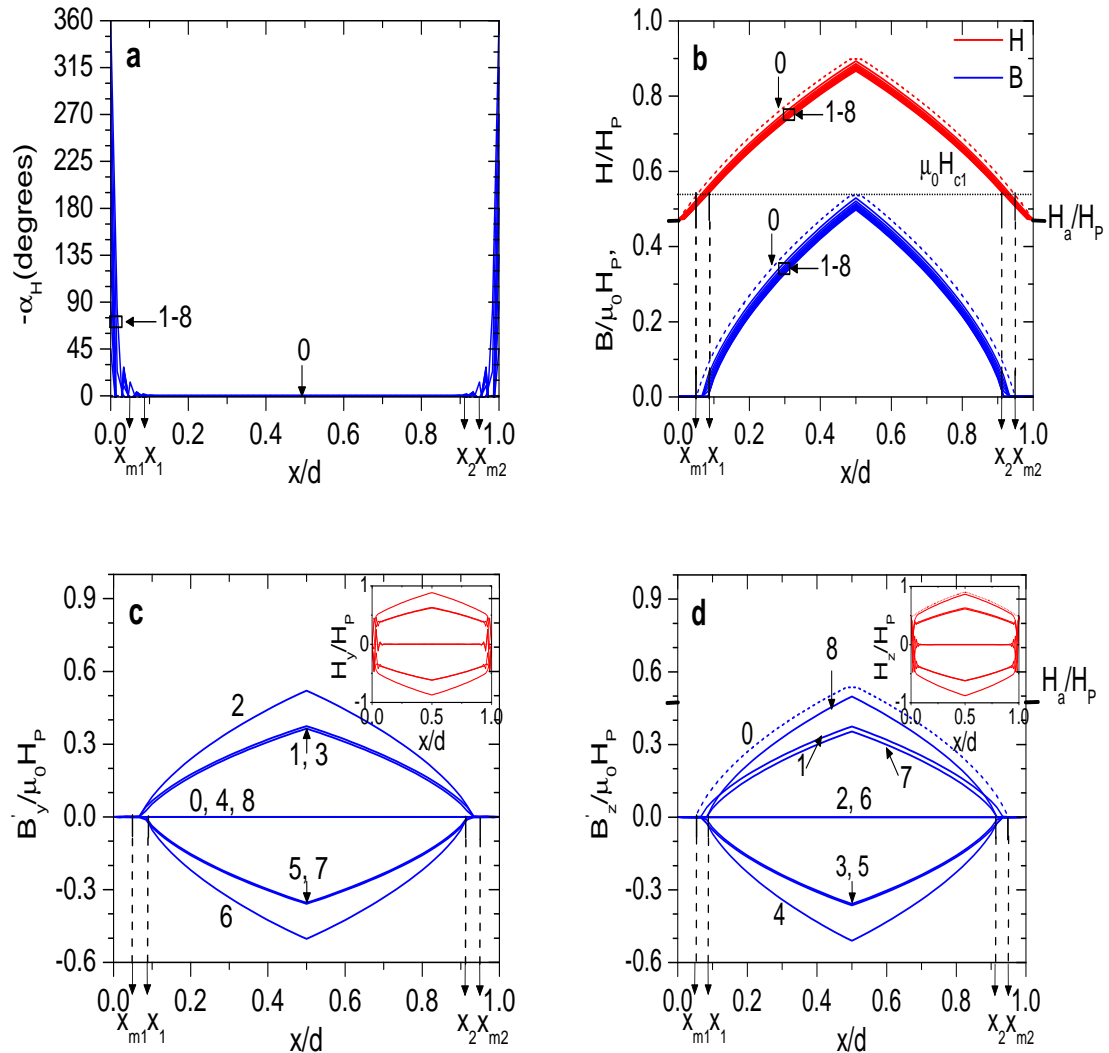


Figura 6.6: Influencia del efecto Meissner en los perfiles del ángulo  $\alpha_H$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y sus componentes  $B'_y$  (panel c),  $B'_z$  (panel d) en  $H_a/H_P = 0.5$ . En el lado derecho de los paneles b y d se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado

La componente  $B'_y$  presenta un comportamiento similar al de  $B'_z$ ; sin embargo, debido a que ningún campo magnético es aplicado en la dirección  $y$ , la región de Meissner inicial en la dirección  $y$  ocupa toda la muestra, esto también ocurre cuando

$\theta = 180^\circ$  (curva 4) y  $\theta = 360^\circ$  (curva 8). La componente  $B'_y$  también oscila en el centro de la muestra conforme  $\theta$  aumenta, ver Fig. 6.6c. Dicho comportamiento de  $B'_y$  hace que la componente  $y$  de la magnetización  $\langle M_y \rangle$  oscile con  $\theta$  en la Fig. 6.4a y Fig. 6.5a. La gráfica interior en la Fig. 6.6 panel *c* y *d* muestra los perfiles de  $H_y$  y  $H_z$ , respectivamente.

La Fig. 6.7 muestra los perfiles calculados en el marco del MECEO cuando  $H_a = 1.05H_P > H_{c1}$ . Debido a la disminución de las densidades de corriente crítica con la magnitud del campo magnético  $H$ , las pendientes de  $\alpha_H(x)$ ,  $H(x)$  y  $B(x)$  cerca de las superficies disminuyen. A medida que el ángulo de rotación aumenta, dos mínimos en forma de  $U$  comienzan a formarse en los perfiles de  $H$  y  $B$  en  $\theta = 45^\circ$  (curva 1). Estos dos mínimos prevalecen hasta  $\theta = 225^\circ$  (curva 5), colapsándose en uno solo en el centro de la muestra en  $\theta = 270^\circ$  (curva 6). La magnitud de  $H$  y  $B$  aumentan, manteniendo su único mínimo en  $\theta = 315^\circ$  y  $\theta = 360^\circ$ , curvas 7 y 8. Por otro lado, a medida que el ángulo de rotación aumenta, las pendientes de  $B'_z$  disminuyen en las superficies de la placa y en la región central de la muestra se forma un mínimo en forma de  $U$ . Este mínimo prevalece hasta  $\theta = 180^\circ$  (curva 4) y evoluciona hacia 2 mínimos con la misma forma de  $U$  en  $\theta = 225^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $315^\circ$  y  $360^\circ$  (curvas 5, 6, 7 y 8 en el panel *d*). La componente  $B'_y$  es nula y homogénea al inicio de la rotación (curva 0). Enseguida, al incrementar el ángulo  $\theta$ , la magnitud de  $B'_y$  aumenta y su máximo valor es alcanzado en  $\theta = 90^\circ$ . Al continuar con la rotación,  $B'_y$  disminuye en magnitud y a partir de  $\theta = 135^\circ$  se comienzan a formar dos máximos y un mínimo en la región central de la muestra (panel *c* en la Fig. 6.7).

Obsérvese el comportamiento oscilatorio de las componentes  $B'_y$  y  $B'_z$ , el cual da origen a las oscilaciones observadas en las componentes de la magnetización  $\langle M_y \rangle(\theta)$  y  $\langle M_z \rangle(\theta)$  en las Figs. 6.4 y 6.5. Debido a que el campo aplicado es mayor que el primer campo crítico, las regiones de Meissner observadas en  $B$ ,  $B'_y$  y  $B'_z$  en la Fig. 6.6 se han desvanecido.

Los perfiles cuando el campo magnético externo es mucho mayor que el campo de penetración y por lo tanto que el primer campo crítico,  $H_a = 2H_P > H_P > \mu_0 H_{c1}$ , son mostrados en la Fig. 6.8. La región central, donde se ubican los perfiles críticos de  $B$  en la Fig. 6.7, se desvanecen rápidamente a medida que el ángulo de rotación

se incrementa, esto es debido a la notable reducción de las densidades de corrientes críticas.

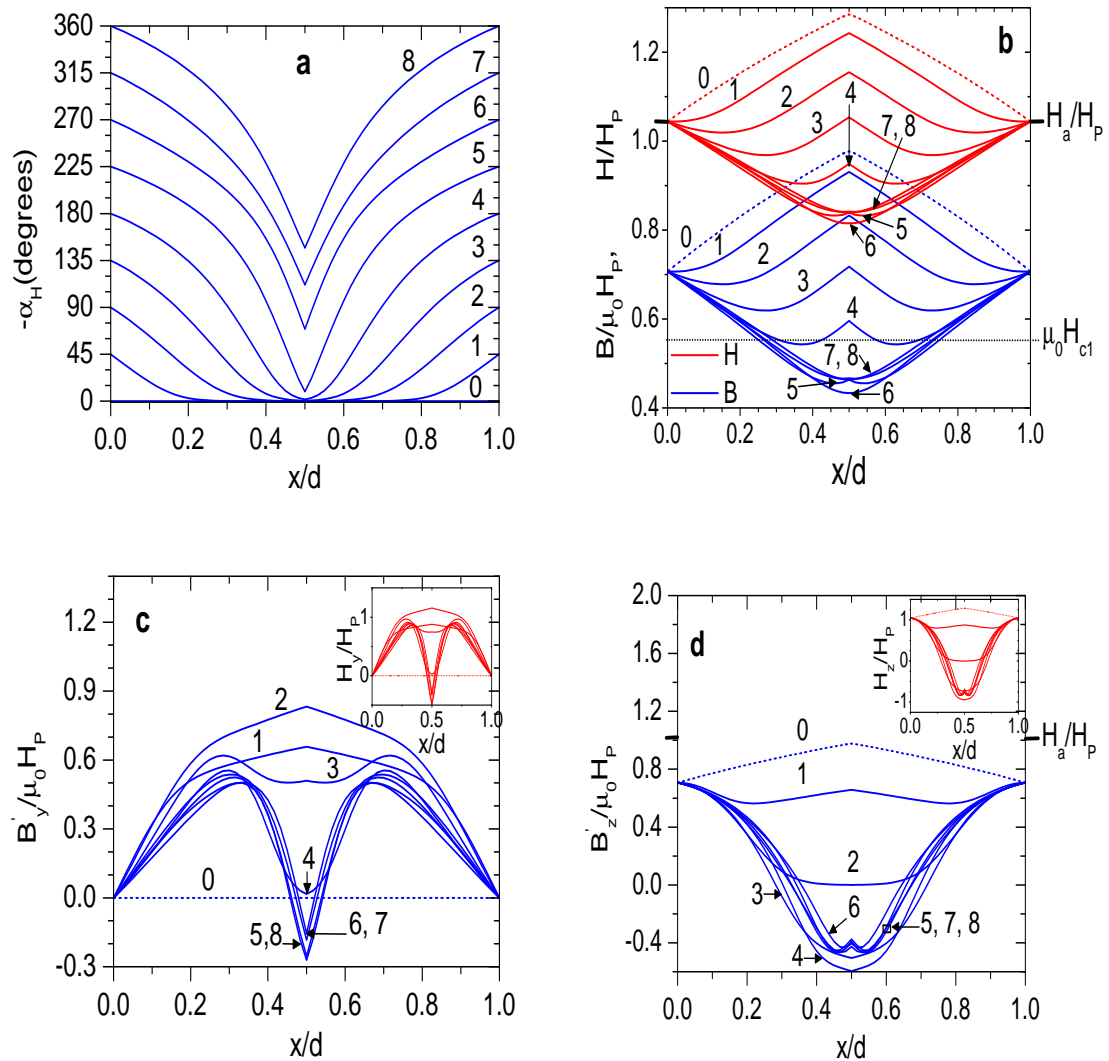


Figura 6.7: Perfiles del ángulo  $\alpha_H$ , magnitud de  $B$  y sus componentes  $B'_y$ ,  $B'_z$  para  $H_a/H_P = 1.05$ . En el lado derecho de los paneles  $b$  y  $d$  se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado.

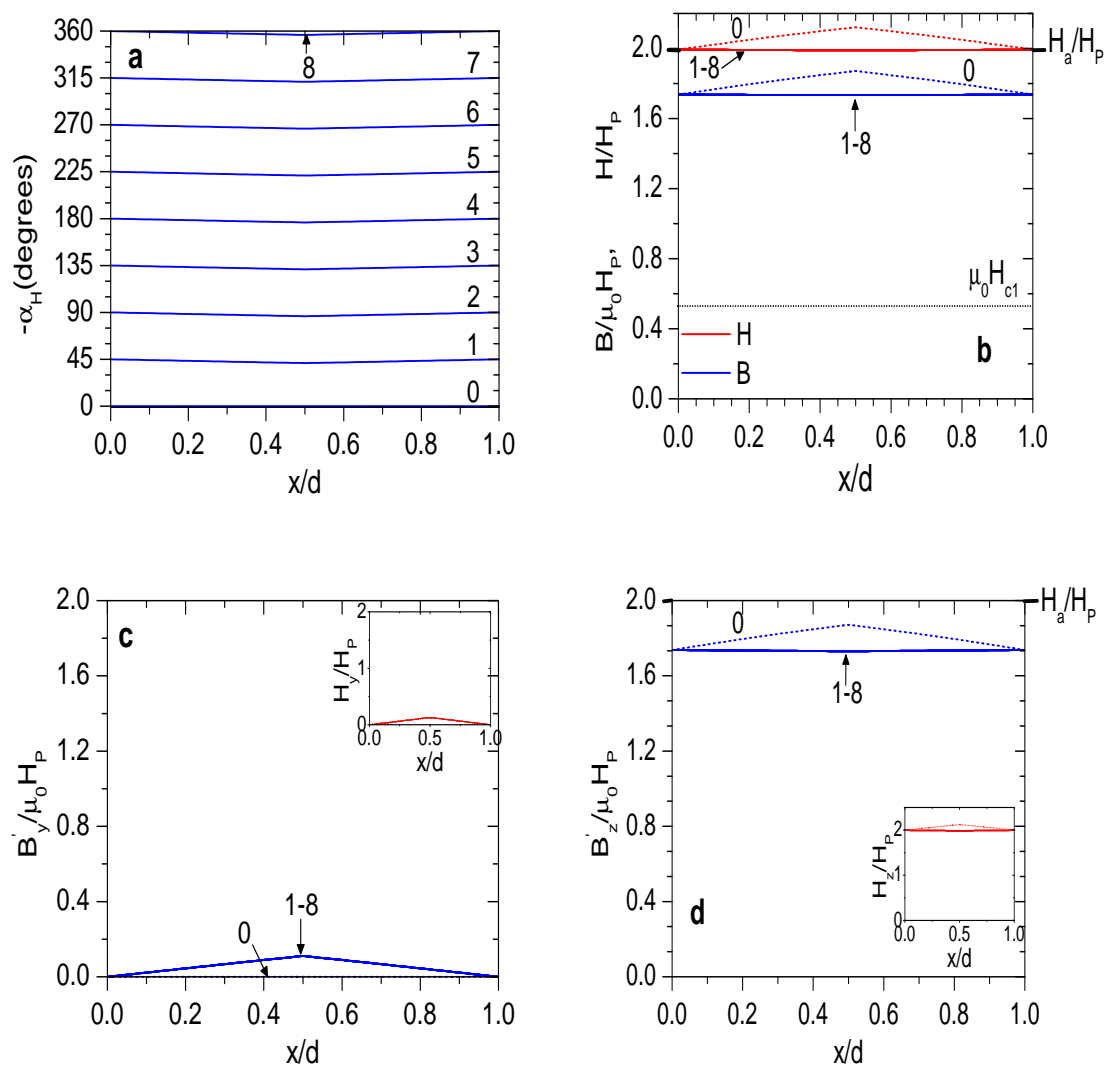


Figura 6.8: Perfiles del ángulo  $\alpha_H$ , magnitud de  $B$  y sus componentes  $B'_y$ ,  $B'_z$  para  $H_a/H_P = 2.0$ . En el lado derecho de los paneles  $b$  y  $d$  se ha marcado el nivel del campo magnético aplicado

## 6.2. Respuesta magnética de superconductores semirreversibles tipo-II sometidos a campos magnéticos cruzados

Esta sección presenta el estudio teórico de la respuesta magnética de un bloque superconductor semirreversible sometido a campos magnéticos cruzados en el marco del modelo de estado crítico elíptico original [59–61]. Específicamente, se estudia la supresión de la magnetización remanente en un disco de PbIn al ser aplicado un campo magnético transversal. Las predicciones teóricas del MECEO reproducen las principales características de las curvas de magnetización experimentales. Finalmente, se analizan los perfiles en el interior del superconductor al aplicar un campo transversal menor que el campo de penetración,  $H_y < H_P$ .

### 6.2.1. Formalismo teórico

Al igual que en la Secc. 4.2, el estudio teórico se lleva a cabo considerando una placa superconductora, para este caso semirreversible, sujeta a un campo magnético externo

$$\mathbf{H}_a = \hat{\mathbf{y}}H_y + \hat{\mathbf{z}}H_z. \quad (6.18)$$

La inducción magnética  $\mathbf{B}(x, t)$  en el interior del superconductor se expresa como

$$\mathbf{B}(x, t) = B(H(x, t))\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t), \quad (6.19)$$

donde  $B(H(x, t))$  es la magnitud de la inducción magnética y está determinada por la Ec. 6.2. El vector unitario  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_H(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_H(x, t))$ , donde  $\alpha_H(x, t)$  es el ángulo de inclinación de  $\mathbf{H}$  con respecto al eje  $z$ . Por lo tanto,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  tienen la misma dirección. El sistema de ecuaciones a resolver es aquel que se ha presentado en la Secc. 6.1.1, Ecs. 6.4-6.7. Este sistema de ecuaciones se obtiene al expresar  $\mathbf{E}(x, t)$  y  $\mathbf{J}_H(x, t)$  en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la inducción magnética local  $\mathbf{B}(x, t)$  y aplicando la ley de Ampère y la ley de Faraday.

### 6.2.2. Supresión de la magnetización remanente por un campo magnético transversal

En el experimento realizado por Sekerka en [8], un disco superconductor semi-reversible de PbIn es magnetizado al aplicar un sólo pulso de un campo magnético en la dirección  $y$  y de magnitud  $H_i > H_{2P}$ , donde  $\mu_0 H_{2P} = 16.2$  mT es el segundo campo de penetración. Este procedimiento permite magnetizar el superconductor con un momento magnético residual de saturación, el cual puede mantenerse en campo magnético externo cero, debido a los sitios de enclavamiento [8]. Enseguida, el disco se rota  $90^\circ$  con respecto al eje  $y$  y se aplica un campo magnético externo transversal al momento magnético residual, el cual ahora yace sobre el eje  $z$  (ver Fig. 4.9 del capítulo 4). La Fig. 6.9a muestra las curvas experimentales para la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  versus el campo magnético transversal  $H_y$ , reportadas en [8]. El campo magnético transversal  $H_y$  se incrementa a partir de 0 y es barrido en subciclos entre  $-H_{y,max}$  y  $H_{y,max}$  (las amplitudes máximas son representadas con un círculo negro en la Fig. 6.9). En cada valor particular de  $H_{y,max}$ , la magnetización remanente es suprimida, siendo más intensa la supresión cuando la amplitud máxima de  $H_y$  aumenta.

El estudio teórico es llevado a cabo al aplicar el MECEO para reproducir el fenómeno de la supresión de la magnetización remanente observado en un disco superconductor semirreversible de PbIn, de grosor  $d = 0.8$  mm [8] (misma muestra de la Secc. 6.1). Las curvas de la magnetización  $\langle M_z \rangle$  ( $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$ ) versus el campo magnético transversal,  $H_y$ , son mostradas en el panel *b* de la Fig. 6.9. Los cálculos numéricos se llevaron a cabo al considerar la densidad de corriente perpendicular,  $J_{H,c\perp}(H)$ , como en la Ec. 6.16

$$J_{H,c\perp}(H) = \frac{J_{H,c\perp}(0)}{C_{\perp}^{n_{\perp}} \left(1 + \frac{H}{C_{\perp} H_P}\right)^{n_{\perp}}}, \quad (6.20)$$

donde  $J_{H,c\perp}(0) = 1.4747 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup>,  $\mu_0 H_P = 15.7$  mT,  $n_{\perp} = 1.15$  y el parámetro adimensional  $C_{\perp} = 0.007$ . Al hacer uso de la Ec. 6.20, el valor absoluto calculado de la magnetización remanente  $\mu_0 |\langle M_z \rangle|$  es igual a 2.04 mT, el cual es muy cercano al

valor experimental, 1.4 mT [8]. La componente paralela de la densidad de corriente crítica,  $J_{H,c\parallel}(H)$ , es seleccionada como en la Ec. 6.17

$$J_{H,c\parallel}(H) = \frac{J_{H,c\parallel}(0)}{C_{\parallel}^{n_{\parallel}} \left(1 + \frac{H}{C_{\parallel}H_P}\right)^{n_{\parallel}}}, \quad (6.21)$$

con  $J_{H,c\parallel}(0) = 2.75J_{H,c\perp}(0)$ ,  $n_{\parallel} = n_{\perp} = 1.15$  y  $C_{\parallel} = C_{\perp} = 0.007$ . Ahora, el parámetro de anisotropía  $J_{H,c\parallel}/J_{H,c\perp} = 2.75$ , es menor que el valor utilizado en la Secc. 6.1; sin embargo, el efecto de corte de líneas de flujo sigue influyendo mayormente en la respuesta magnética del superconductor. Como puede observarse en la Fig. 6.9b, los cálculos numéricos del MECEO proporcionan resultados que muestran un decaimiento de la magnetización similar al experimental; sin embargo, cuando el campo magnético transversal es mayor o igual que el primer campo de penetración,  $H_P < H_y$ , la magnetización predicha por la teoría decae más rápido que la observada en el experimento, especialmente en la región negativa donde adquiere un valor nulo. Nótese que la nueva metodología, la cual incluye la expulsión de Meissner que ocurre cerca de las superficies de la muestra y por lo tanto considera la existencia del primer campo crítico, conduce a un mejor acuerdo con el experimento en  $|H_y| \lesssim H_{c1}$ .

### 6.2.3. Evolución de los perfiles de la inducción magnética

La Fig. 6.10 muestra la evolución de los perfiles de  $B_z(x)$  conforme el campo magnético transversal  $H_y$  es variado, el barrido del campo inicia en  $H_y = 0$  (flujo magnético atrapado a lo largo del eje  $z$  descrito por la curva  $A$ ), se incrementa hasta  $H_y = H_{y,max}$  (curva  $B$ ), disminuye hasta  $H_y = 0$  (curva  $C$ ), continua disminuyendo hasta  $H_y = -H_{y,max}$  (curva  $D$ ) y finalmente se incrementa hasta  $H_y = 0$  (curva  $E$ ). Resulta de especial interés analizar los perfiles cuando el campo transversal se encuentra en el intervalo  $H_{c1} < H_y < H_P$ , curvas 2 y 3 correspondientes a la Fig. 6.9b, debido a que en este rango es posible observar la evolución de las regiones de Meissner en el superconductor. La Fig. 6.10a muestra los perfiles para el caso en que  $\mu_0 H_{y,max} = 11.2$  mT. En campo cero ( $H_y = 0$ ) el flujo magnético atrapado posee una región de Meissner inicial, la cual ocupa el espacio  $0 < x < x_2$ . Al incrementar el

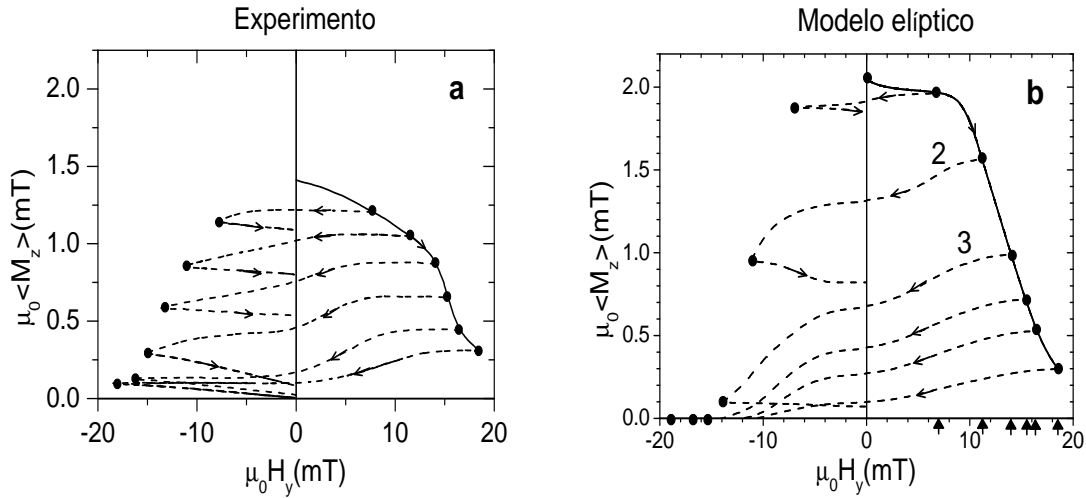


Figura 6.9: a) Curvas de magnetización experimentales  $\langle M_z \rangle$  versus el campo magnético transversal  $H_y$  reportadas en [8]. b) Curvas de magnetización teóricas  $\langle M_z \rangle (H_y)$  obtenidas en el marco del MECEO. Los perfiles de la inducción magnética se analizan en las curvas 2 y 3.

campo hasta  $H_y = H_{y,max}$ , las regiones de Meissner en las superficies de la placa se desvanecen y dos máximos locales se forman en su lugar. Cuando el campo transversal disminuye hasta cero ( $H_y = 0$ ), la región de Meissner aumenta su tamaño ocupando el espacio  $0 < x < x_3$ . Al continuar disminuyendo el campo  $H_y$  hasta  $-H_{y,max}$ , la región de Meissner ahora ocupa el espacio  $x_1 < x < x_4$  y un máximo local, de menor magnitud que en la curva B, se forma cerca de las superficies de la placa. Este máximo colapsa a cero al incrementar el campo  $H_y$  hasta cero y finalmente, la región de Meissner ocupa el espacio  $0 < x < x_4$ . Las pendientes de  $B_z(x)$  en la región central de la placa disminuyen a medida que el campo transversal es variado.

Si la amplitud  $H_{y,max}$  del campo transversal es un poco menor que el campo de penetración  $H_P$  (ver Fig. 6.10b, donde  $\mu_0 H_{y,max} = 14 \text{ mT} \lesssim H_P$ ), se observa un decaimiento más rápido de las pendientes de  $B_z(x)$ , sólo al incrementar el campo desde cero hasta 14 mT, la magnitud de  $B_z$  decae aproximadamente la mitad de su valor inicial. Cuando se disminuye el campo  $H_y$  hasta cero, la región de Meissner ocupa el mismo espacio inicial,  $0 < x < x_1$ . Al disminuir el campo transversal hasta  $-H_{y,max}$ ,

las pendientes de  $B_z(x)$  disminuyen en toda la placa y una región de Meissner es formada en  $x_2 < x < x_3$ . Al finalizar la oscilación del campo transversal, las pendientes de  $B_z$  disminuyen en toda la placa y, en consecuencia, la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$  es sustancialmente disminuida. En este punto, la región con  $B_z = 0$  ocupa el espacio  $0 < x < x_1$ . En la región central de la placa no se forman regiones con  $B_z = 0$ , únicamente se forman dos mínimos en  $x/d \approx 0.41$  y en  $x/d \approx 0.58$  con  $B_z \approx 0$ .

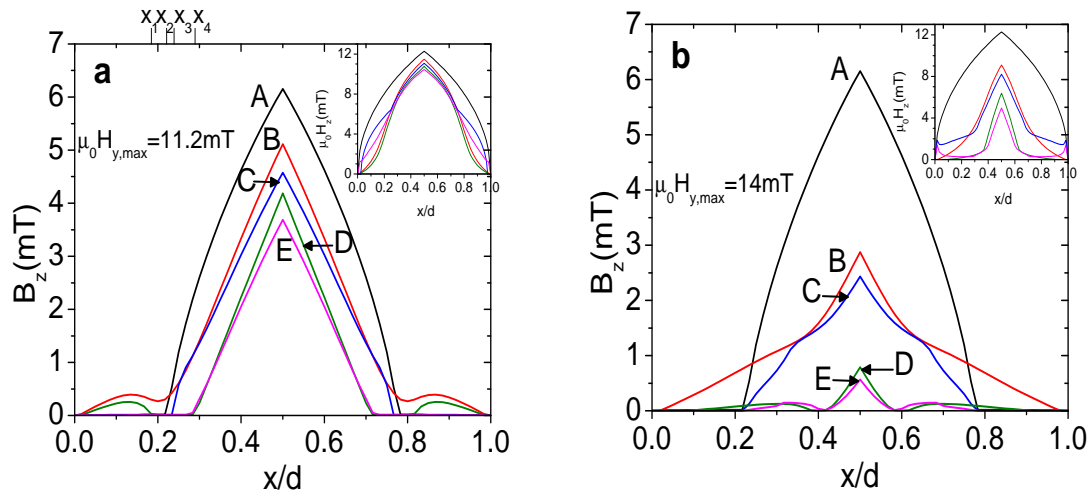


Figura 6.10: Evolución de los perfiles de  $B_z(x)$  a medida que el campo magnético transversal  $H_y$  es variado.  $H_y = 0$  (curva A),  $H_y = H_{y,\max}$  (curva B),  $H_y = 0$  (curva C),  $H_y = -H_{y,\max}$  (curva D) y finalmente,  $H_y = 0$  (curva E). Los valores de  $H_{y,\max}$  son indicados en cada panel. La gráfica interna muestra los perfiles de  $H$ .

# Capítulo 7

## Efecto del corte de líneas de flujo en avalanchas termomagnéticas

Este capítulo presenta un estudio teórico de las avalanchas de flujo termomagnético (saltos de flujo) en una placa superconductora. El estudio se lleva a cabo al resolver numéricamente las ecuaciones de Maxwell, la ecuación material del MECEO y la ecuación de difusión de calor, para reproducir y explicar las curvas de magnetización de una muestra cúbica de NbTi en la configuración de campos cruzados. Las mediciones magnéticas en el superconductor cúbico de NbTi, en la configuración de campos cruzados, fueron realizadas por los Dres. Adam Nabałek, A. Wiśniewski y Viktor Chabanenko en el Instituto de Física de la Academia Polaca de Ciencias (IFPAN).

De forma similar, en la sección 7.2 se presenta un estudio teórico de las avalanchas de flujo termomagnético para reproducir las curvas de magnetización en un cilindro superconductor de NbTi cuando se aplica un campo magnético de magnitud variable y dirección fija paralelo a su eje. Las curvas de magnetización de esta muestra fueron medidas en el laboratorio del Dr. Roberto Escudero, en el Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM, en un magnetómetro de Quantum Design (MPMS). En estas mediciones se tuvo la colaboración del Dr. Viktor Chabanenko del Instituto de Física y Tecnología de la Academia Nacional de Ciencias (Donetsk, Ucrania).

## 7.1. Avalanchas de flujo en un cubo de NbTi

### 7.1.1. Formalismo teórico

El estudio teórico considera una placa superconductora infinita de grosor  $d$ , la cual se encuentra en la región  $0 < x < d$ . Un campo magnético de magnitud  $H_a$ ,

$$\mathbf{H}_a = \hat{\mathbf{y}}H_y + \hat{\mathbf{z}}H_z, \quad (7.1)$$

es aplicado paralelo a las superficies de la placa. La inducción magnética en el interior del superconductor, con magnitud  $B$  y ángulo de inclinación  $\alpha(x, t)$  con respecto al eje  $z$ , se expresa como

$$\mathbf{B}(x, t) = B(x, t) [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha(x, t))] = B(x, t) \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t). \quad (7.2)$$

Las componentes del campo eléctrico  $\mathbf{E}(x, t)$  y densidad de corriente  $\mathbf{J}(x, t)$  se expresan en términos de sus componentes paralelas y perpendicular a la inducción magnética local  $\mathbf{B}(x, t)$  (ver Ecs. 4.30,4.31). Además, empleando la ley de Ampère obtenemos

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (7.3)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \mu_0 J_{\parallel}, \quad (7.4)$$

debido a que la evolución de los campos electromagnéticos se considera cuasiestacionaria en el superconductor, las variaciones temporales del desplazamiento eléctrico son despreciadas. Asimismo, a partir de la ley de Faraday se obtiene

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (7.5)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Por simplicidad, las barreras superficiales que se oponen a la entrada o salida de flujo son despreciadas y se considera que el campo magnético satisface la relación  $\mathbf{B} =$

$\mu_0 \mathbf{H}$ , lo cual es válido para campos magnéticos aplicados mayores que el primer campo crítico ( $H_a \gg H_{c1}$ ). El sistema de ecuaciones 7.3-7.6 es acoplado con la ecuación de difusión de calor

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (7.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material,  $\rho = 6550 \text{ kg/m}^3$ ,  $Q$  es el calor total transferido y está dado por la ley de Fourier  $\mathbf{Q} = -\kappa \nabla T$ , donde  $\kappa$  es la conductividad térmica. El segundo término del lado derecho corresponde a la disipación de calor por efecto Joule.  $C$  es el calor específico que depende de la temperatura mediante la expresión [3]

$$C(T) = 0.152 + 2.10 \times 10^{-3} T^3, \quad (7.8)$$

en unidades de J/(kg·K). El término que corresponde a la disipación de calor por efecto Joule en la Ec.7.7 se expresa en términos de sus componentes perpendicular y paralela a la inducción magnética local,  $\mathbf{B}(x, t)$ , obteniendo

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} + J_{\perp} E_{\perp} + J_{\parallel} E_{\parallel}, \quad (7.9)$$

con condiciones de frontera de Dirichlet, lo cual corresponde a mantener las superficies del superconductor a una temperatura constante. Además,  $Q_x$  representa el flujo de calor a lo largo del eje  $x$ . La resolución numérica del sistema de ecuaciones 7.3-7.9 se realiza al aplicar el modelo de estado crítico elíptico original (ver Secc. 4.1.1), donde ahora la ecuación material tiene la forma simple

$$E(J) = \rho(J, B)J, \quad (7.10)$$

con [51]

$$\rho(J, B) = \zeta_0 B \frac{(J/J_c)^{\sigma}}{1 + (J/J_c)^{\sigma}}, \quad (7.11)$$

donde  $B$  es la magnitud de la inducción magnética local,  $J$  es la magnitud de la densidad de corriente,  $J_c$  es la magnitud de la densidad de corriente crítica,  $\sigma$  es un

exponente a ajustarse y  $\zeta_0$  es una constante. La magnitud de la densidad de corriente crítica se expresa como

$$J_c(B, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{c\parallel}^2(B)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{c\perp}^2(B)} \right]^{-1/2}, \quad (7.12)$$

donde  $\phi$  denota el ángulo de la densidad de corriente crítica,  $\mathbf{J}$ , con respecto a la dirección de la inducción magnética local  $\mathbf{B}$ . En los cálculos numéricos se resuelve primero la parte electrodinámica de las ecuaciones y posteriormente la dependencia en la temperatura.

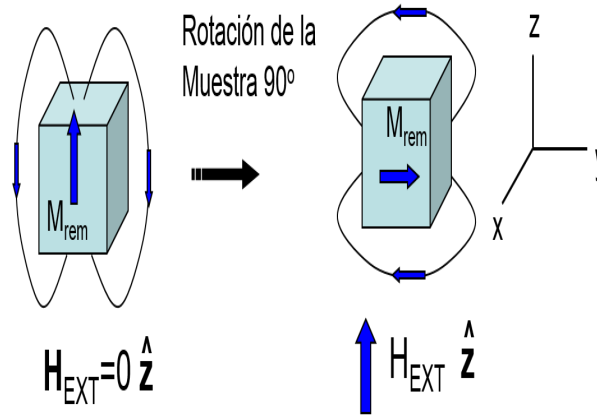


Figura 7.1: Configuración experimental.

### 7.1.2. Resultados numéricos y comparación con el experimento

#### Resultados experimentales

Mediciones magnéticas en una muestra superconductora cúbica de NbTi de 4.5 mm de lado fueron realizadas a una temperatura  $T = 2.3$  K. Después de un procedimiento ZFC, el superconductor es magnetizado al aplicar un ciclo completo de un campo magnético estático  $\mathbf{H}_L$  (por conveniencia es etiquetado y llamado campo longitudinal), con una magnitud máxima  $H_{L,max} = 1.49$  T dirigido en la dirección  $z$ .

Este proceso permite magnetizar la muestra con un momento magnético remanente, el cual puede mantenerse bajo campo magnético externo cero debido a los sitios de enclavamiento que posee la muestra. Posteriormente, el cubo es rotado un ángulo de  $90^\circ$  con respecto a  $\mathbf{H}_L$ , con el fin de aplicar un campo transversal al momento magnético residual, el cual se encuentra ahora en la dirección  $y$ . Esta configuración experimental se muestra en la Fig. 7.1.

Las curvas de magnetización promedio experimentales cuando un campo magnético longitudinal (curva azul) y transversal (curva roja) son aplicados al superconductor se muestran en la Fig. 7.2a. Al incrementar el campo longitudinal desde cero hasta  $\mu_0 H_z = \mu_0 H_{L,max} = 1.49$  T, la magnetización muestra un salto de flujo completo en  $\mu_0 H_z = 0.906$  T, en este punto  $\mu_0 \langle M_z \rangle \approx 0$  (ver cuadrante (C1)). Cuando  $\mu_0 H_z$  disminuye desde  $H_{L,max}$  hasta cero, otro salto de flujo completo se observa en  $\mu_0 H_z = 0.142$ , donde  $\mu_0 \langle M_z \rangle \approx 0$  (ver cuadrante (C2)). Al continuar disminuyendo el campo longitudinal, una región de inestabilidad se forma en  $-0.542\text{T} < \mu_0 H_z < 0$  T (ver cuadrante (C3)); sin embargo, los saltos de flujo son incompletos y  $\mu_0 \langle M_z \rangle \neq 0$ . Esta región surge debido a la fuerte influencia de la historia magnética en la estabilidad del estado crítico y en la dinámica de los saltos de flujo [76]. En este mismo cuadrante, antes de alcanzar el valor mínimo del campo longitudinal  $-H_{L,max}$ , un salto de flujo completo ( $\mu_0 \langle M_z \rangle \approx 0$ ) se observa en  $\mu_0 H_z = -1.235$  T. Finalmente, al incrementar el campo desde  $-H_{L,max}$  hasta cero, un único salto de flujo completo se forma en  $\mu_0 H_z = 0.160$  T (ver cuadrante (C4)).

Al aplicar el campo transversal al momento magnético residual, el cual está dirigido en la dirección  $y$ , la magnetización promedio  $\mu_0 \langle M_z \rangle$  muestra un salto de flujo incompleto en  $\mu_0 H_z = 0.283$  T y otro en  $\mu_0 H_z = 0.488$  T, este último de mayor magnitud con  $|\mu_0 \langle M_z \rangle = 0.104|$  T. Nótese también que la magnitud de la magnetización es menor que la correspondiente magnetización al aplicar el campo longitudinal.

## Modelo elíptico

El MECEO ha sido aplicado para reproducir el fenómeno de avalanchas de flujo termomagnético en una muestra cúbica de NbTi en la configuración de campos cru-

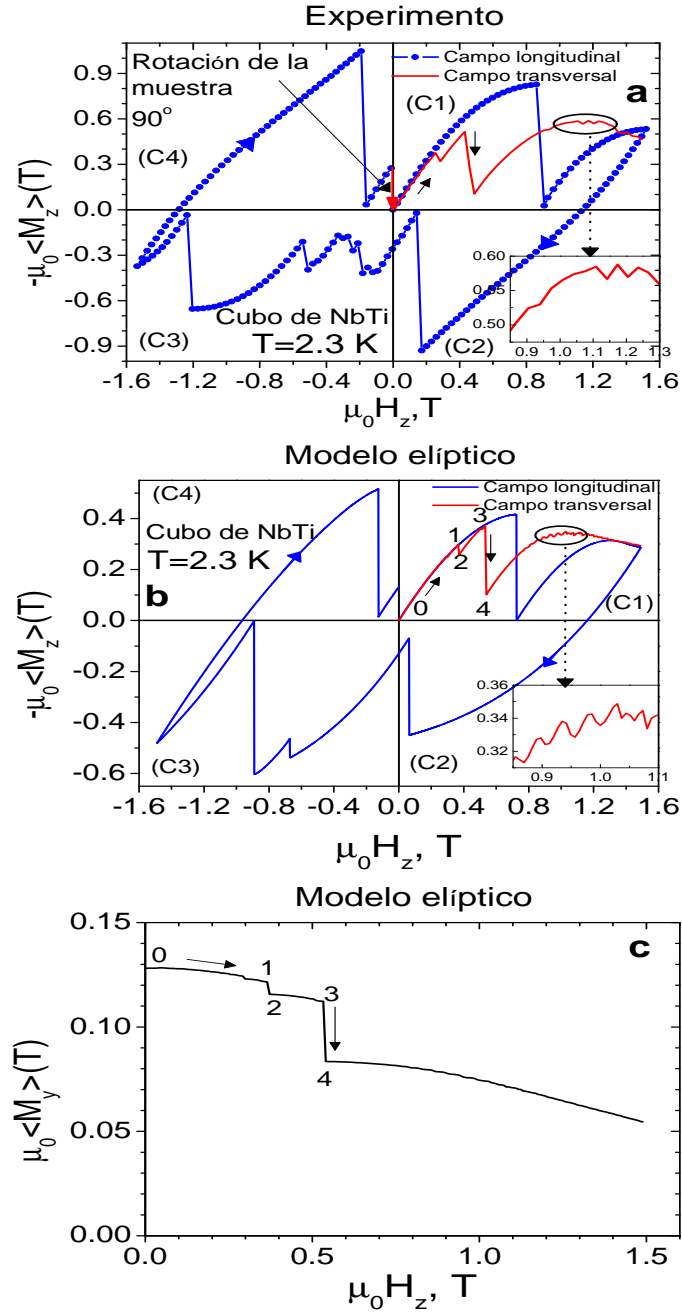


Figura 7.2: Componente  $z$  de la magnetización promedio al aplicar un campo magnético longitudinal (curva azul) y transversal al momento magnético remanente (curva roja) en un cubo de NbTi a) experimento (la flecha roja representa el momento magnético atrapado) y b) modelo teórico. c) Predicción teórica de las avalanchas de flujo termomagnético en la componente  $y$  de la magnetización promedio.

zados de la Fig. 7.1. Se ha verificado que la condición adiabática es satisfecha en la muestra superconductor. En los cálculos, el exponente  $\sigma$  se ajusta al valor  $\sigma = 59$ ;

además, la componente perpendicular de la densidad de corriente crítica,  $J_{c\perp}(B, T)$ , es similar a la empleada en [23, 58, 77], expresión dada por

$$J_{c\perp}(B, T) = J_{c\perp}(0, T) \left(1 - \frac{B}{B^*}\right)^{n_{\perp}}, \quad n_{\perp} > 1, \quad (7.13)$$

con

$$J_{c\perp}(0, T) = \left[1 - \left(1 - \frac{B_P}{B^*}\right)^{n_{\perp}}\right] \frac{2B^*}{\mu_0(n_{\perp} - 1)d} \left[\frac{1 - \frac{T}{T_c}}{1 - \frac{T_b}{T_c}}\right]. \quad (7.14)$$

Aquí  $T$  es la temperatura local promedio alcanzada por la muestra después de que las líneas de flujo han penetrado,  $T_b$  es la temperatura del baño en donde se realizan las mediciones de la magnetización ( $T_b=2.3$  K),  $T_c$  es la temperatura crítica del material superconductor ( $T_c=9.2$  K),  $B_P$  es el campo de penetración experimental ( $B_P \approx 1.0$  T),  $B^* = \mu_0 H^*$  es un campo constante que caracteriza el grado de dependencia de la densidad de corriente crítica en  $B$ ,  $J_c(B, T)$  ( $B^* = 5.0$  T),  $d$  es el grosor de la muestra ( $d = 4.5$  mm) y  $n_{\perp}$  es el exponente de la ley de decaimiento de la densidad de corriente crítica ( $n_{\perp} = 1.5$ ). Por lo tanto, el valor inicial para la componente perpendicular de la densidad de corriente crítica es  $J_{c\perp}(0, T) = 4.1746 \times 10^8$  A/m<sup>2</sup>.

La expresión para la componente paralela de la densidad de corriente crítica tiene la forma

$$J_{c\parallel}(B, T) = J_{c\parallel}(0, T) \left(1 - \frac{B}{B^*}\right)^{n_{\parallel}}, \quad n_{\parallel} > 1, \quad (7.15)$$

donde  $J_{c\parallel}(0, T) = 3.0J_{c\perp}(0, T)$ ,  $n_{\parallel} = 2.4$  y  $B^* = 5.0$  T como en la Ec. 7.13. El hecho de que  $J_{c\perp}(0, T) < J_{c\parallel}(0, T)$  indica que el corte de líneas de flujo influye en mayor medida en el comportamiento magnético del superconductor.

La magnetización promedio calculada al aplicar un campo magnético longitudinal reproduce en buen acuerdo con el experimento el primer salto de flujo completo en el cuadrante (C1) (veáse la curva azul en el panel *b* de la Fig. 7.2), el cual ocurre en  $\mu_0 H_z = 0.726$  T, valor cercano al del experimento ( $\mu_0 H_z = 0.906$  T). El salto de flujo en el cuadrante (C2) ocurre en regiones cercanas a campo cero tal y como en el experimento; sin embargo, es un salto de flujo incompleto. En el cuadrante (C3) el

modelo teórico no logra reproducir todos los saltos de flujo incompletos observados en el experimento (cuadrante (C3) de la Fig. 7.2a) y el salto de flujo completo ocurre en  $\mu_0 H_z \approx -0.9$  T. Finalmente, el salto de flujo completo en el cuadrante (C4) ocurre en  $\mu_0 H_z = -0.125$  T, lo cual se encuentra en buen acuerdo con el experimento ( $\mu_0 H_z = -0.160$  T); además, la magnitud de la magnetización remanente calculada teóricamente es menor que el correspondiente valor experimental ( $\mu_0 |\langle M_{z,teo} \rangle| = 0.1319$  T <  $\mu_0 |\langle M_{z,exp} \rangle| = 0.2744$  T). Las discrepancias entre el modelo teórico y el experimento se atribuyen a que el modelo considera una placa infinita en vez del cubo del experimento. Un modelo más sofisticado, el cual considere la geometría real del experimento, así como el factor de demagnetización de la muestra permitiría obtener una mejor descripción del experimento [76].

Por otro lado, como se observa en el panel *b* de la Fig. 7.2, al incrementar el campo transversal (curva roja en la Fig. 7.2b) desde cero hasta  $\mu_0 H_z = 1.49$  T, el modelo teórico reproduce los saltos de flujo incompletos en  $\mu_0 H_z = 0.372$  T (diferencia de 0.0089 T respecto al experimento) y en  $\mu_0 H_z = 0.540$  T (diferencia de 0.052 T respecto al experimento), este último de mayor magnitud con  $|\mu_0 \langle M_z \rangle = 0.102|$  T, valor muy cercano al experimental el cual es de  $|\mu_0 \langle M_z \rangle = 0.104|$  T. Además, el modelo teórico reproduce la situación experimental en donde la magnitud de la magnetización transversal (curva roja) es menor que la correspondiente magnetización al aplicar un campo longitudinal (curva azul).

La gráfica interna en el panel *b* de la Fig. 7.2 muestra la predicción teórica de la región de inestabilidad observada en el experimento. En el modelo teórico esta región surge debido a que el sistema de ecuaciones que se resuelve (ver Ecs. 7.3-7.6 y Ec. 7.9) es muy sensible a las variables involucradas, específicamente a la temperatura. En el experimento esta región surge debido a las variaciones en la temperatura en el interior de la muestra, inducidas por la velocidad a la que fue aplicado el campo magnético.

Por otro lado, la componente *y* de la magnetización promedio ( $\langle M_y \rangle$ ) es suprimida a medida que se incrementa el campo transversal (ver panel *c* de la Fig. 7.2). En esta componente de la magnetización, al igual que en la componente *z*, los saltos de flujo ocurren en los mismos valores del campo transversal,  $\mu_0 H_z = 0.372$  T y  $\mu_0 H_z = 0.540$

T. En los dos saltos de flujo observados, la magnetización promedio  $\mu_0 \langle M_y \rangle$  no decae completamente a cero, i.e. el flujo magnético en esta dirección penetra parcialmente.

### 7.1.3. Perfiles de inducción magnética

La evolución de los perfiles para la magnitud de la inducción magnética  $B(x)$ , el ángulo de inclinación  $\alpha(x)$  y las componentes  $B_y(x)$  y  $B_z(x)$ , calculados en el marco del modelo de estado crítico elíptico original, se muestran en la Fig. 7.3 cuando el campo transversal es cero (perfil inicial) y en los puntos anteriores y posteriores a los saltos de flujo. Los perfiles iniciales corresponden a las curvas etiquetadas con 0 en la Fig. 7.3, la componente  $z$  de la inducción magnética es igual a cero, de acuerdo con la configuración experimental. Los perfiles iniciales de  $B_y$  y  $B$  corresponden al perfil del momento magnético remanente que inicialmente es el mismo para ambos perfiles. Al incrementar el campo transversal hasta  $\mu_0 H_z = 0.372$  T (curva 1) el flujo magnético penetra progresivamente el interior del superconductor y el ángulo de la inducción magnética local cambia de  $90^\circ$  a un ángulo entre  $0^\circ$  y  $5^\circ$  en las superficies de la muestra. El perfil crítico de  $B_y$ , antes del primer salto de flujo (curva 1), exhibe dos máximos en los intervalos  $x_{m1} < x < x_{n1}$  y  $x_{n2} < x < x_{m2}$ , inducidos por el efecto de corte y transporte de líneas de flujo. Nótese que la forma inicial de los perfiles (ver curva 0) prevalece en la región central de la muestra ( $x_{n1} < x < x_{n2}$ ) de la curva 1 para los cuatro perfiles ( $\alpha$ ,  $B$ ,  $B_y$  y  $B_z$ ).

Cuando ocurre el primer salto de flujo (ver curvas 2) el ángulo de inclinación y la componente  $y$  de la inducción magnética no son alterados en las superficies de la placa ( $0x < x_{m1}$  y  $x_{m2} < x < 1$ ); por el contrario, en el intervalo  $x_{m1} < x < x_1$  y  $x_2 < x < x_{m2}$  la pendiente de estos perfiles cambia notablemente. La magnitud de los máximos observados en la curva 1 de  $B_y$  se incrementa y ahora se ubican en  $x_{n1} < x < x_1$  y  $x_2 < x < x_{n2}$  (ver curva 2). Además, la región inalterada de  $\alpha$  y  $B_y$  en la curva 1 es reducida hasta ocupar la región  $x_1 < x < x_2$  en la curva 2. Durante este mismo salto de flujo, las pendientes de los perfiles de  $B$  y  $B_z$  varían levemente en las superficies de la muestra ( $0x < x_{m1}$  y  $x_{m2} < x < 1$ ). Contrariamente, en los intervalos  $x_{m1} < x < x_1$  y  $x_2 < x < x_{m2}$  el flujo magnético penetra abruptamente el

interior del superconductor y los perfiles son alterados notablemente. Ahora, la región central de la muestra, la cual preserva la forma del perfil inicial (curva 0), reduce su tamaño y ocupa aproximadamente el espacio  $x_1 < x <_2$  para los perfiles de  $\alpha$ ,  $B$  y  $B_z$  en la curva 2. En el caso de  $B_y$ , su perfil ocupa una región un poco menor a aquella determinada por  $x_1 < x <_2$ .

Después del primer salto de flujo y al continuar incrementando el campo transversal hasta  $\mu_0 H_z = 0.540$  T (curva 3) el flujo magnético penetra progresivamente el interior del superconductor y las pendientes del ángulo de inclinación y de  $B_y$  varían levemente en las regiones  $0 < x < x_{n1}$  y  $x_{n2} < x < 1$ . En la región  $x_{n1} < x < x_{n2}$  las curvas 2 y 3 del perfiles de  $B_y$  prácticamente se traslapan, i.e. la región central del perfil crítico de  $B_y$  para el segundo salto (curva 3) es determinada por la misma región de la curva 2. Las pendientes de los perfiles de  $B$  y  $B_z$ , en las superficies de la muestra, varían gradualmente conforme el campo transversal es incrementado. La región de los perfiles del ángulo de inclinación  $\alpha(x)$ , de  $B(x)$  y sus componentes  $B_y(x)$  y  $B_z(x)$ , en los cuales la forma del perfil inicial (curva 0) se preserva, ocupa prácticamente el mismo espacio determinado por la curva 2.

Finalmente, cuando ocurre la segunda avalancha (ver curvas 4), el flujo magnético penetra abruptamente el interior del superconductor, por consiguiente, las pendientes de los perfiles también cambian abruptamente en toda la región de la muestra; sin embargo, debido a que la avalancha es incompleta, los perfiles del ángulo de inclinación, la magnitud de  $B$  y sus componentes no son homogéneos. Nótese también, para este caso, que en la región central de la muestra no se preserva el comportamiento inicial (curva 0) de los perfiles, algo que si fue observado en las demás situaciones.

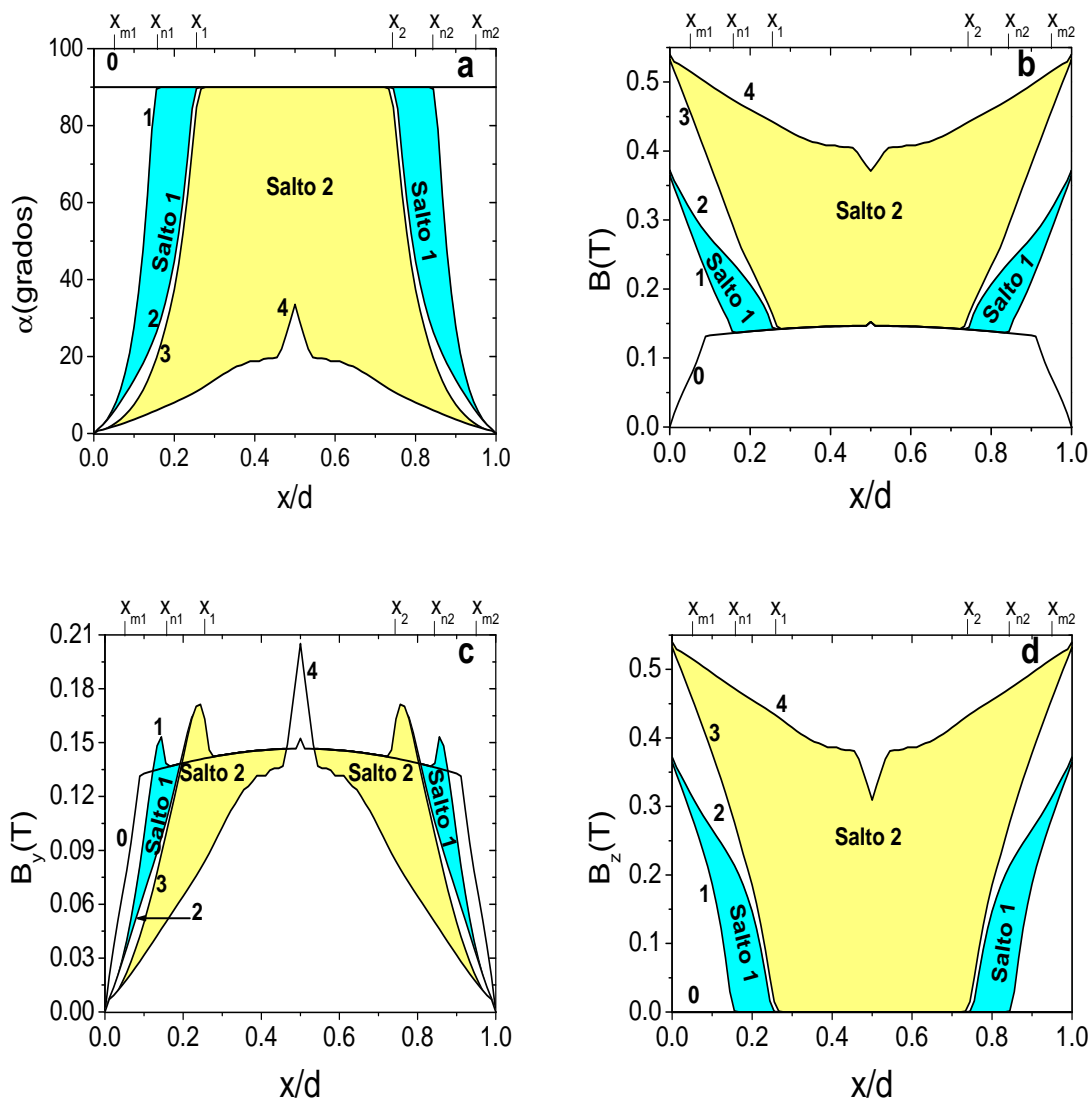


Figura 7.3: Perfiles del ángulo  $\alpha$  (panel a), magnitud de  $B$  (panel b) y componentes de la inducción magnética  $B_y$  (panel c) y  $B_z$  (panel d), calculados con el modelo de estado crítico elíptico original en puntos anteriores y posteriores a los saltos de flujo. Los perfiles iniciales corresponden a las curvas etiquetadas con 0.

## 7.2. Avalanchas de flujo termomagnético en un cilindro de NbTi

### 7.2.1. Resultados experimentales

Mediciones magnéticas en un cilindro de NbTi, de radio  $r = 1.5$  mm y altura  $h = 12.5$  mm, fueron realizadas en diferentes temperaturas (ver Fig. 7.4). En el panel *a* se muestra la magnetización promedio a una temperatura  $T = 1.7$  K. Como puede observarse, tres saltos de flujo pronunciados, donde la diferencia de la magnetización antes y después del salto es mayor a 0.1 T ( $\mu_0 \Delta \langle M_z \rangle > 0.1$  T), ocurren en  $\mu_0 H_z < 1.5$  T. En campos mayores a este valor, el número de saltos se incrementa, teniendo una magnitud menor a los observados inicialmente. En el panel *b* se observa un salto incompleto de magnitud menor en  $\mu_0 H_z = 0.44$  T. Posteriormente, en el intervalo 0.6 – 2.7 T del campo aplicado, se observan seis saltos de flujo incompletos pronunciados (donde la diferencia de la magnetización antes y después del salto es mayor a 0.1 T), la magnetización en estos saltos de flujo tiene aproximadamente el mismo valor ( $\mu_0 \langle M_z \rangle \sim 0.05$  T). Un salto de flujo de menor magnitud ocurre en  $\mu_0 H_z = 2.92$  T. Finalmente, en  $T = 4.0$  K, se observa únicamente un salto de flujo pronunciado en  $\mu_0 H_z = 0.56$  T. Por lo tanto, las curvas de magnetización exhiben un mayor número de saltos de flujo en 1.7 K, disminuyendo éstos a medida que la temperatura se incrementa. Nótese que en las tres temperaturas el primer salto de flujo de mayor magnitud ocurre en casi el mismo valor  $\mu_0 H_z = 0.6$  T, esto hace suponer que la formación del primer salto de flujo en temperaturas menores a 4.0 K, es independiente de la temperatura; sin embargo, más mediciones a diferentes temperaturas en la misma muestra y un análisis de más detallado de dichos resultados podrían validar tal suposición.

| Temperatura (K) | $B_P$ (T) | $J_{c\perp}(0, T) \times 10^8$ (A/m <sup>2</sup> ) |
|-----------------|-----------|--|
| 1.7             | 0.6       | 3.2239   |
| 3.0             | 0.6       | 3.2239   |
| 4.0             | 0.56      | 3.0064   |

Tabla 7.1: Valor de la densidad de corriente crítica inicial en diferentes temperaturas.  $B_P$  representa el campo de penetración obtenido a partir del experimento.

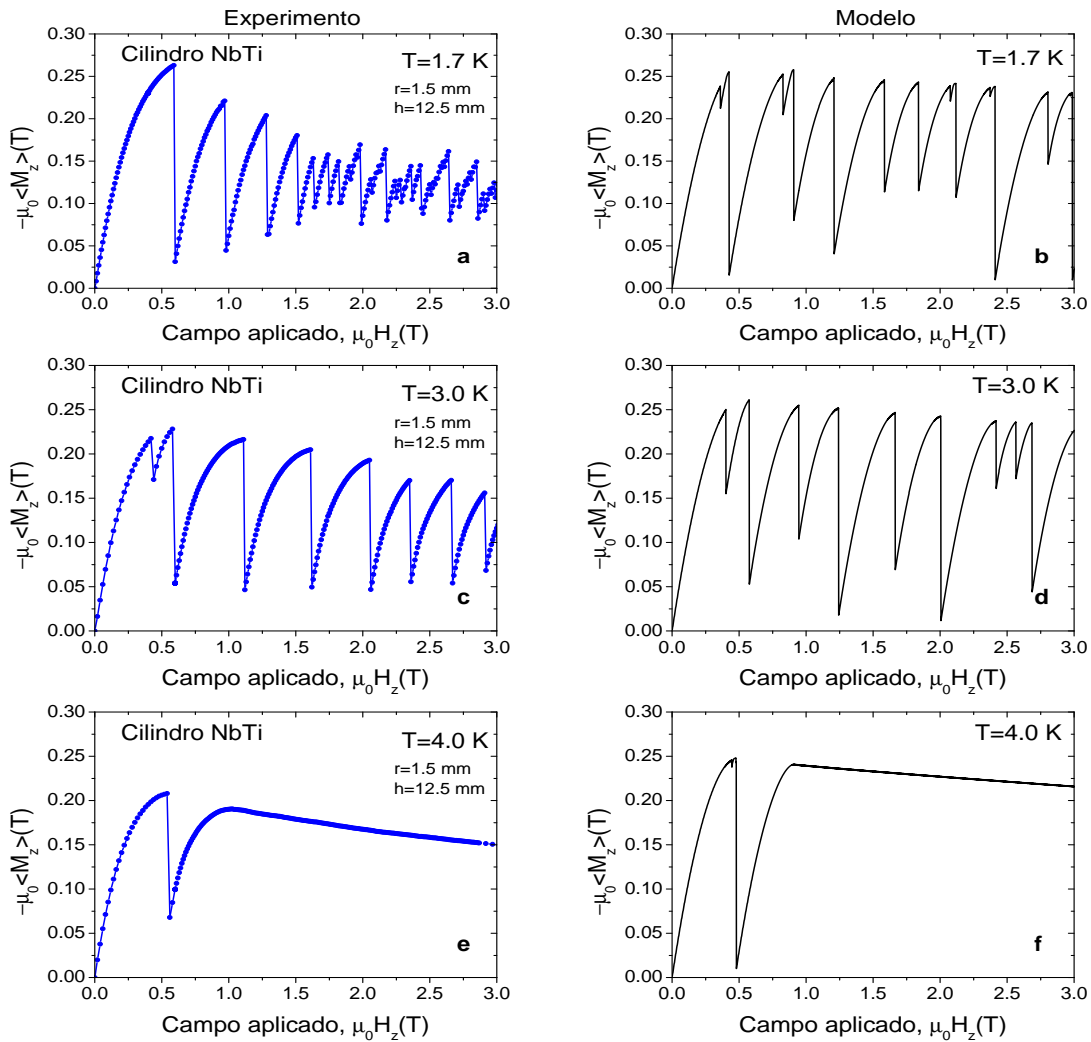


Figura 7.4: Curvas de la magnetización promedio, experimentales y teóricas, para un cilindro de NbTi en diferentes temperaturas.  $B_P$  corresponde al campo de penetración determinado a a partir de las curvas experimentales.

### 7.2.2. Predicciones teóricas

La metodología desarrollada en la Secc. 7.1.1 es aplicada para reproducir las curvas de magnetización en un superconductor cilíndrico de NbTi cuando se aplica un campo magnético, de magnitud variable y dirección fija, paralelo al eje de la muestra (ver Refs. [77, 78]). La ecuación material para este caso es aquella descrita por la Ecs. 7.10-7.11, con  $\sigma = 80$ .

Para el estudio teórico, la densidad de corriente crítica es como en la Ec. 7.13, con la densidad de corriente crítica inicial como en la Ec. 7.14. Los parámetros empleados en los cálculos son  $n_{\perp} = 1.05$ ,  $B^* = 25$  T,  $T_c = 9.2$  K. La tabla 7.2.1 resume los valores iniciales de la densidad de corriente crítica.

Las curvas de magnetización promedio teóricas reproducen las principales características de las curvas experimentales. En  $T = 1.7$  K (ver Fig. 7.4b) tres saltos de flujo pronunciados ocurren en el intervalo 0.42-1.2 T tal y como en el experimento; sin embargo, también ocurren dos de menor magnitud en  $\mu_0 H_z = 0.36$  T y  $\mu_0 H_z = 0.82$  T, lo cual no fue observado en las curvas experimentales. En campos aplicados  $\mu_0 H_z > 1.2$  T la magnitud de los saltos disminuye, aunque en  $\mu_0 H_z = 2.41$  T y  $\mu_0 H_z = 2.98$  T se forman dos saltos de flujo pronunciados, lo cual no coincide con el experimento. En  $T = 3.0$  K (ver Fig. 7.4d) el número de saltos es el mismo que en  $T = 1.7$  K; sin embargo, existe un buen acuerdo con el experimento al reproducir el salto de flujo incompleto de menor magnitud y el salto de flujo pronunciado en  $\mu_0 H_z = 0.40$  T y  $\mu_0 H_z = 0.57$  T, respectivamente. En  $\mu_0 H_z > 0.57$  T la magnitud de la magnetización durante los saltos de flujo tiene una variación mayor respecto al experimento. En  $T = 4.0$  (ver Fig. 7.4f) K el modelo teórico reproduce el único salto de flujo pronunciado en  $\mu_0 H_z = 0.48$  T (en el experimento  $\mu_0 H_z = 0.56$  T). Por lo tanto, la descripción teórica de los resultados experimentales se logra únicamente de forma cualitativa. Además, el modelo teórico reproduce el hecho experimental en el cual, al incrementar la temperatura de 3.0 a 4.0 K, el número de saltos de flujo disminuye notablemente.

# Capítulo 8

## Conclusiones

### 8.1. General

El conjunto de resultados experimentales contribuye al entendimiento de la irreversibilidad magnética en superconductores tipo-I y en superconductores tipo-II de baja temperatura crítica sin enclavamiento. A partir de las curvas experimentales de magnetización se han obtenido y comparado distintos parámetros, tales como los campos críticos en  $T = 0$  K, en geometrías paralela y perpendicular.

Los modelos de estado crítico son una herramienta que permite describir, desde un punto de vista macroscópico, el comportamiento magnético de superconductores duros. Los modelos de estado crítico empleados en esta tesis describen satisfactoriamente experimentos realizados en superconductores tipo-II irreversibles. Sin embargo, en diversos estudios, al aplicar los modelos de estado crítico es común suponer que el primer campo crítico es cero. Una descripción más precisa, aportada por este trabajo de investigación, de los diferentes fenómenos magnéticos en superconductores tipo-II irreversibles y semirreversibles se logra al considerar un valor finito del primer campo crítico  $H_{c1}$ .

Finalmente, la aportación más importante de esta tesis, es la descripción teórica, sin la necesidad de imponer alguna condición de inestabilidad, de las avalanchas de flujo termomagnético considerando el efecto de corte de líneas de flujo para describir los resultados experimentales, obtenidos por colaboradores, en un cubo de NbTi.

La metodología propuesta también es aplicada para reproducir los resultados experimentales en un cilindro de NbTi en geometría paralela, donde únicamente ocurre el transporte de líneas de flujo; en este punto, la descripción sólo fue cualitativa.

## 8.2. Particulares

### 8.2.1. Capítulo 2

En el capítulo 2 se ha estudiado el rol de la temperatura en la irreversibilidad magnética de un cilindro de Ta cuando el campo magnético aplicado es paralelo al eje de revolución de la muestra, pero completamente reversible cuando el campo magnético aplicado es perpendicular al eje del cilindro. El origen de la irreversibilidad en geometría paralela, es atribuido a la presencia de la barrera geométrica la cual controla la transición entre el estado laminar y tubular. La barrera geométrica está presente en muestras que poseen dos superficies paralelas y perpendiculares a la dirección del campo magnético aplicado.

El análisis de los resultados experimentales, en una representación reducida del campo magnético y de la magnetización, para un cilindro superconductor tipo-I de Tantalio (Ta), muestran la independencia en la temperatura en el proceso de penetración de flujo en esta muestra. También, a partir de los datos experimentales, se ha mostrado la dependencia en la temperatura del campo crítico en geometría paralela y perpendicular, siendo el campo magnético extrapolado en 0 K para la geometría perpendicular, aproximadamente la mitad del campo en geometría paralela en la misma temperatura.

### 8.2.2. Capítulo 3

El capítulo 3 muestra el análisis de las mediciones magnéticas en un cilindro superconductor sin enclavamiento de Nb en geometría paralela y perpendicular. El origen de la irreversibilidad es atribuido parcialmente a la presencia de la barrera geométrica y a las impurezas remanentes en el material. A partir de los ciclos de histéresis

magnética y al aplicar el modelo de Bean se ha obtenido una aproximación para la densidad de corriente crítica, la cual exhibe el efecto pico en regiones de campos intermedios. En geometría perpendicular el efecto pico es más agudo en campos intermedios y su decaimiento es más lento que en la geometría paralela. Además, a partir de las curvas de la densidad de corriente crítica se ha determinado la línea de irreversibilidad, la cual muestra un comportamiento anómalo en  $T = 4.0$  K. Las longitudes características para esta muestra cilíndrica de Nb se han obtenido en el marco de la teoría GL y comparado con los reportados en [50].

En el aspecto teórico, la formulación planteada en el capítulo 6, proporciona predicciones teóricas que reproducen las principales características de la curva de magnetización experimental en  $T = 1.7$  K en geometría paralela. Esta formulación, permite considerar la existencia del primer campo crítico. Un estudio teórico es necesario para reproducir las curvas de magnetización en geometría perpendicular.

### 8.2.3. Capítulo 4

En el capítulo 4 se ha aplicado el modelo de estado crítico elíptico original y elíptico extendido, para estudiar teóricamente el comportamiento magnético de una placa superconductora irreversible tipo-II en presencia de un campo magnético rotante. El método numérico se basa en la sustitución de la ley vertical, la cual relaciona el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , para la ecuación material no-lineal con resistividades efectivas de corte y transporte de flujo en la región disipativa. La sustitución es válida cuando el campo magnético aplicado  $H_a$  varía lentamente en magnitud o dirección, induciendo campos eléctricos de magnitud muy pequeña, en el interior del superconductor. En el marco del modelo de estado crítico elíptico original, las resistividades efectivas no son independientes, teniendo una razón  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp} = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$  para  $J$  justo por encima de su valor crítico  $J_c$ . Por otro lado, en el marco del modelo de estado crítico la razón  $r$  es un parámetro independiente que debe ser determinado. La comparación de las predicciones de ambos modelos, con las mediciones experimentales de la magnetización para un disco de PbBi rotando en presencia de un campo magnético fijo [8], muestran que el MECEO reproduce las

principales características de las curvas de magnetización. El MECEE, el cual es más general que el MECEO, permitió estudiar el efecto de la relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  en la región disipativa.

También se ha investigado el comportamiento del mismo superconductor irreversible tipo-II sometido a campos magnéticos cruzados en el marco de los modelos de estado crítico elíptico original y extendido. Primero, se han comparado las predicciones de ambos modelos con los resultados experimentales en una muestra de PbBi [8]. En este caso, la magnetización remanente fue generada al aplicar un solo pulso de un campo magnético  $H_z$  de magnitud mayor que el segundo campo de penetración  $H_{2P}$  y enseguida, se aplicó un campo transversal  $H_y$ . Con el fin de reproducir los experimentos, la dependencia en el campo magnético de las densidades de corriente  $J_{c\perp}(B)$  y  $J_{c\parallel}(B)$  fueron aquellas determinadas en [53] para la misma muestra. Se ha encontrado que los cálculos en el MECEO y el MECEE con  $r = 1/7$  reproducen las principales características de las curvas de magnetización.

Se ha investigado también el comportamiento de la muestra de PbBi en presencia de un campo magnético estático  $H_z$  y un campo magnético transversal oscilante  $H_y$ . En campos moderados  $H_z \approx H_P \gtrsim H_{y,\max}$ , el MECEO y el MECEE predicen una magnetización promedio positiva  $\langle M_z \rangle$  después de varios ciclos de  $H_y$  para los estados iniciales paramagnético y diamagnético. Este tipo de paramagnetismo, el cual también ha sido observado en otros superconductores duros [67, 68] es debido a la anisotropía, inducida por el efecto de corte de líneas de flujo, en la densidad de corriente ( $J_{c\perp}(B) < J_{c\parallel}(B)$ ).

De forma interesante, la supresión cuasi-simétrica de la magnetización (colapso del momento magnético), la cual está presente en muestras de YBCO [70, 71] en campos grandes  $H_z \gg H_P \gtrsim H_{y,\max}$ , no se pudo observar en las curvas de magnetización de PbBi calculadas con el MECEO y el MECEE con  $r = 1/7$ . La muestra de PbBi exhibe un estado paramagnético después de varios ciclos del campo transversal  $H_y$ , independientemente de su estado inicial (paramagnético o diamagnético). Tal comportamiento del superconductor de PbBi en campos grandes  $H_z$  es atribuido al incremento del parámetro de anisotropía  $J_{c\parallel}(B)/J_{c\perp}(B)$  con  $B$ . Dado que el MECEE permite cambiar la orientación mutua del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la densidad

de corriente  $\mathbf{J}$  en la región disipativa ( $J > J_c(B, \phi)$ ), fue posible establecer que la supresión de la magnetización en la muestra de PbBi puede ser simétrica solamente si la razón  $r$  es igual a uno ( $r = 1$ ), es decir, si  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  son paralelos en  $J > J_c(B, \phi)$ . Sin embargo, este último caso no es realista para el superconductor de PbBi ya que todos los experimentos disponibles [8, 66] fueron reproducidos con  $r = 1/7$ .

### 8.2.4. Capítulo 5

En el capítulo 5 se han aplicado de forma satisfactoria los modelos de estado crítico elíptico y elíptico extendido para estudiar el comportamiento magnético de superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a un campo magnético paralelo rotante. La comparación de las predicciones teóricas de ambos modelos, elíptico original y elíptico extendido, con las mediciones experimentales sobre un disco de PbIn que es rotado en presencia de un campo magnético estático muestra que ambos modelos solo reproducen de forma cualitativa los resultados experimentales, siendo la mejor aproximación cuando  $H_a/H_P = 0.42$ . Sin embargo, el parámetro  $r$  del modelo elíptico extendido, adquiere relevancia cuando  $H_a/H_P > 1$  siendo independiente de las densidades de corriente crítica. Finalmente, el efecto Meissner parcial ha modificado el perfil inicial de la inducción magnética en el interior del superconductor, en  $T > T_c$  el perfil es homogéneo y en  $T < T_c$  el perfil ha sido modificado debido a la expulsión parcial de flujo, del cual la evolución del momento magnético en  $z$  inicia en la región diamagnética de las curvas de magnetización.

### 8.2.5. Capítulo 6

En el capítulo 6 se ha presentado el estudio teórico de la respuesta magnética de un bloque superconductor semirreversible sometido a un campo magnético paralelo a sus superficies, el cual está rotando. Al considerar que el campo magnético es quién da origen a la densidad de corriente de los vórtices y al hacer uso de una ley de potencias en la ecuación material del campo eléctrico y la densidad de corriente, así como considerar la existencia del primer campo crítico  $H_{c1}$ , las predicciones teóricas proporcionan un buen acuerdo con las curvas de magnetización versus el ángulo de

rotación en toda la región de los campos magnéticos aplicados. Es interesante observar la generación de regiones donde la inducción magnética es cero, estas regiones se han nombrado *regiones de Meissner* y se forman en la superficie del bloque cuando se aplica un campo magnético menor que  $H_{c1}$ . De este modo, únicamente el perfil inicial de la inducción magnética cuando  $H_a = 0.47H_P < H_{c1}$ , exhibe regiones de Meissner en la superficie del superconductor. En las situaciones en que  $H_a > H_{c1}$  las regiones de Meissner se desvanecen completamente y únicamente la inducción magnética en el interior del superconductor es modificada debido a la expulsión parcial de flujo.

El estudio teórico de la respuesta magnética de un bloque superconductor semi-reversible tipo-II, sometido a campos magnéticos cruzados, ha permitido describir los experimentos del colapso de la magnetización remanente en un disco de PbIn en el marco del modelo de estado crítico elíptico original. Con el fin de reproducir los experimentos, la dependencia en el campo magnético de las densidades de corriente crítica  $J_{c\perp}(H)$  y  $J_{c\parallel}(H)$  fueron aquellas determinadas en la Secc. 6.1; sin embargo, en esta situación, el parámetro de anisotropía  $J_{c\parallel}/J_{c\perp} = 2.75$  es menor que en el caso de campos rotantes. En ambos casos, el efecto de corte líneas de flujo influye completamente en la respuesta magnética del superconductor.

### 8.2.6. Capítulo 7

La resolución de las ecuaciones acopladas de los campos electromagnéticos, con la ecuación de difusión de calor, permite obtener los saltos de flujo en la curva de magnetización sin la necesidad de imponer alguna condición de inestabilidad para determinar la posición de los mismos. Para la muestra cúbica de NbTi, las predicciones teóricas se encuentran en buen acuerdo con las curvas experimentales, en la configuración campos magnéticos cruzados, al reproducir los saltos de flujo completos en cada uno de los cuadrantes del ciclo de magnetización. Debe enfatizarse que este resultado es de gran importancia, debido a que por vez primera se emplea esta metodología para reproducir los resultados experimentales, en donde el efecto de corte de líneas de flujo y la estructura del flujo magnético atrapado influyen fuertemente en la estabilidad del estado crítico, dando origen a las avalanchas termomagnéticas (saltos

de flujo). La región de inestabilidad observada en el experimento en el cuadrante (C3), al aplicar un campo longitudinal, no se ha logrado describir teóricamente. Un modelo que describa la geometría real de la muestra, además de tomar en cuenta el factor de demagnetización, permitiría obtener una mejor descripción del comportamiento magnético del superconductor en el cuadrante (C3).

Por otro lado, en la muestra cilíndrica de NbTi en geometría paralela, el modelo teórico reproduce cualitativamente las principales características de las curvas de magnetización experimentales, i.e. el número de saltos de flujo disminuye al incrementar la temperatura. Sin embargo, el tamaño de las avalanchas de flujo es mayor que en el experimento. En esta configuración experimental (geometría paralela), únicamente el transporte de líneas de flujo influyen en la formación de las avalanchas termomagnéticas. Un estudio experimental más detallado es necesario para entender y describir la dinámica del primer salto de flujo en temperaturas menores a 4.0 K.

# Capítulo 9

## Apéndices

### 9.1. Curvas de magnetización estándar para un cilindro de Nb en geometría paralela

La curva de magnetización experimental en  $T = 1.7$  K para el cilindro de Nb del capítulo 3 puede reproducirse satisfactoriamente al considerar el cilindro como una placa infinita de grosor  $d = 3.2$  mm y al resolver las ecuaciones de Maxwell considerando la existencia del primer campo crítico (ver Secc. 6.1.1 en el capítulo 6). El exponente en la ecuación material del campo eléctrico, Ecs. 6.9 y 6.10, se ajusta al valor  $\sigma = 8.0$ . El primer campo crítico se determina de la curva de magnetización experimental,  $\mu_0 H_{c1} = 0.150$  T. La determinación de los campos críticos se explican en la Secc. 3.1.4. El exponente para modelar la inducción magnética en el interior del superconductor en la Ec. 6.2 se ajusta al valor  $\gamma = 3$ . La expresión para la densidad de corriente crítica, dependiente de la inducción magnética determinada por la Ec. 6.2, es similar a la propuesta en la Ec. 6.16,

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{\perp}(0)}{C_{\perp}^{n_{\perp}} \left(1 + \frac{B}{C_{\perp} B^*}\right)^{n_{\perp}}}, \quad (9.1)$$

donde  $J_{\perp}(0) = 1.1379 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup>, el parámetro adimensional  $C_{\perp} = 0.4$ ,  $n_{\perp} = 3$ . El campo constante que caracteriza la dependencia en  $B$  de la densidad de corriente

crítica,  $B^*$ , se ajusta al valor  $B^* = 0.4$  T. La Fig. 9.1b muestra la predicción teórica, la cual reproduce las principales características de la curva experimental en  $T = 1.7$  K. El modelo predice un valor mayor de la magnetización en campo cero (magnetización remanente,  $\mu_0 \langle M_z \rangle_{rem} = 0.02$  T) en comparación con el valor experimental ( $\mu_0 \langle M_z \rangle_{ex,rem} = 0.0102$  T). El máximo en la curva descendente de la magnetización predicho por el modelo se localiza en  $\mu_0 H_z = 0.140$  T, valor aproximado al experimental  $\mu_0 H_z = 0.165$  T.

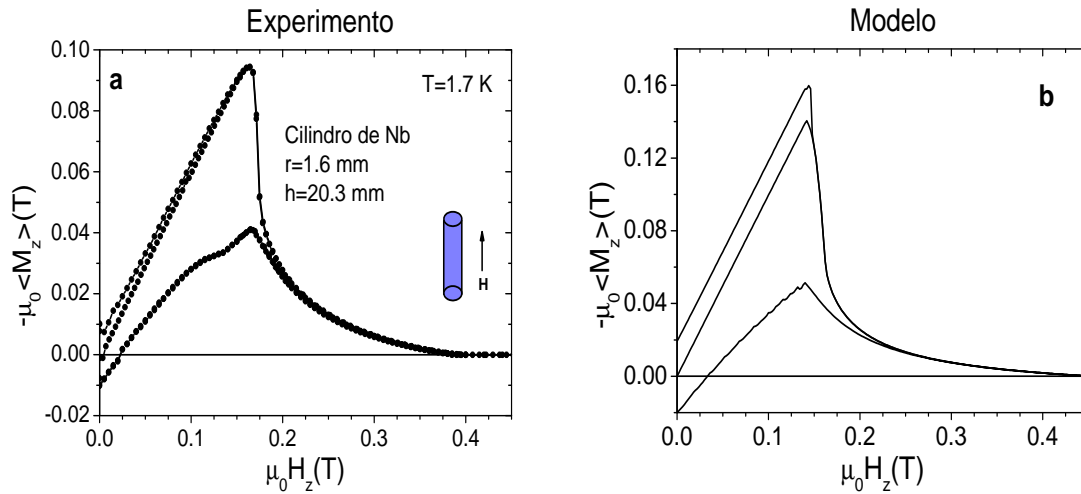


Figura 9.1: Curvas de magnetización para un cilindro de Nb a una temperatura  $T = 1.7$  K a) experimental y b) teórica.

## 9.2. Programa en ambiente gráfico para el cálculo de curvas de magnetización

Se han desarrollado los programas con ambiente gráfico para calcular las curvas de magnetización virgen, para una placa de grosor  $d = 0.8$  mm, en presencia de un campo magnético paralelo a sus superficies en la dirección  $z$  y en presencia de campos rotantes; los programas se desarrollaron durante la estancia de investigación en la Universidad Pedagógica Estatal de Berdyansk (BSPU), Ucrania, así como durante el curso *Programming and simulation of physical phenomena and processes* impartido por el Dr. Vitaliy Mezhuyev de la BSPU en el IFUAP. El ambiente gráfico es desarrollado en el software de programación Embarcadero y el núcleo para resolver las ecuaciones de Maxwell es desarrollado en FORTRAN 77. El método numérico es aquel que se describe en [77–79]. A continuación se describe el funcionamiento del programa.

- *thickness* (mm) es el grosor de la placa
- **Penetration field** es el campo de penetración,  $\mu_0 H_P$ , característico de cada muestra; en el estudio realizado en el capítulo 4  $\mu_0 H_P = 0.1015$  T.
- *rho* es la resistividad efectiva, la cual es un parámetro auxiliar en la ec. 4.14 del capítulo 4.
- $H_z \max(T)$  corresponde al valor máximo del campo magnético aplicado,  $\mu_0 H_{z, \max}$ , en la dirección  $z$ .
- $n_{\text{perp}}$  es el exponente perpendicular,  $n_{\perp}$  en la expresión de  $J_{c\perp}$  en la Ec. 4.24, el cual es un parámetro a ser ajustado.
- **D and P profiles**, al seleccionar esta casilla y ejecutar el programa, se obtendrá la mitad del ciclo de histéresis de la magnetización; además, se obtienen los perfiles de la inducción magnética en la región diamagnética y paramagnética cuando  $H_z \gg H_P$ .

- $H_z = cte * HP(T)$  es la magnitud del campo aplicado en la cual se obtienen los perfiles de la inducción magnética en la región diamagnética y paramagnética.
- **Ready** en la barra de estado indica que el programa esta listo para ejecutarse o editar los cuadros de texto. Cuando el programa finaliza los cálculos se puede leer nuevamente el mensaje *Ready* .
- **Busy** en la barra de estado, indica que el programa está realizando los cálculos.

Ejemplo:

- Curva de magnetización virgen

Ejecutar el programa con los datos que hay en cada casilla de texto.

Al finalizar los cálculos presionar el botón **Plot**, como resultado se obtienen dos gráficas, la primera es la curva de histéresis de la magnetización, la segunda muestra los perfiles de la inducción magnética en los puntos  $\mu_0 H_z = 0.125$  T (cuando se incrementa el campo desde cero) y en  $\mu_0 H_z = 0$  T (cuando el campo aplicado disminuye desde  $\mu_0 H_z = 0.125$  T), ver Fig. 9.2.

- Perfiles en la región diamagnética y paramagnética

Presione el botón *Clear* para limpiar las 2 gráficas anteriores.

Seleccionar la casilla *D and P profiles*

Ejecute el programa. Al finalizar los cálculos, presione el botón *Plot*. La primer gráfica muestra la mitad del ciclo de histéresis magnética. La segunda gráfica muestra los perfiles de la inducción magnética en los puntos *D* y *P*, ver Fig. 9.3 (también ver capítulo 4). Los perfiles obtenidos en los puntos *D* y *P* corresponden a los perfiles iniciales cuando la placa superconductora es sometida a campos cruzados, ver Secc. 4.2

Similarmente se han desarrollado los programas en ambiente gráfico para calcular las curvas de magnetización, así como los perfiles del ángulo, de la magnitud de la inducción magnética y sus componentes  $B'_y$  y  $B'_z$ , de una placa superconductora de grosor  $d = 0.8\text{mm}$  en presencia de un campo magnético el cual se encuentra rotando. Los programas corresponden a los modelos elíptico original y extendido.

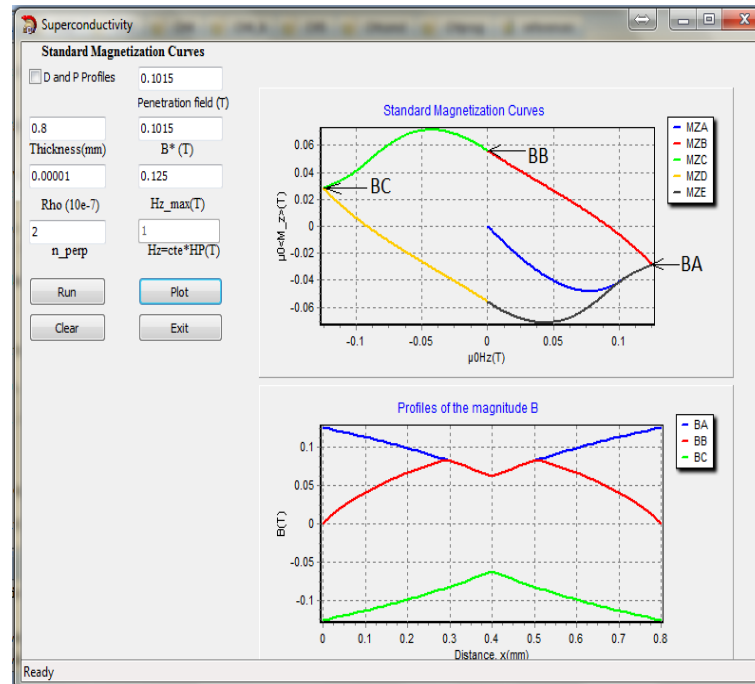


Figura 9.2: Curva de magnetización virgen para un disco de PbBi. En la Fig. 4.2 del capítulo 4 se grafica  $-\mu_0 M_z$  versus  $\mu_0 H_z$  y en el programa se grafica  $\mu_0 M_z$  versus  $\mu_0 H_z$ .

- Campos magnéticos rotantes (Modelo Elíptico)

El funcionamiento del programa gráfico para obtener la respuesta magnética de una placa superconductora en presencia de un campo magnético rotante, es similar al programa para obtener las curvas de magnetización virgen descritas en la sección anterior.

- *thickness* (mm) es el grosor de la placa
- *rho* es la resistividad efectiva, la cual es un parámetro auxiliar en la ec. 4.14 del capítulo 4.
- $H_a/H_P$  es el valor del campo aplicado (en la casilla  $H_a = 0.5H_P$ ).
- $n_{pe}$  es el exponente perpendicular,  $n_{\perp}$  en la expresión de  $J_{c\perp}$  en Ec. 4.24, el cual ya ha sido ajustado en al programa de magnetización virgen.

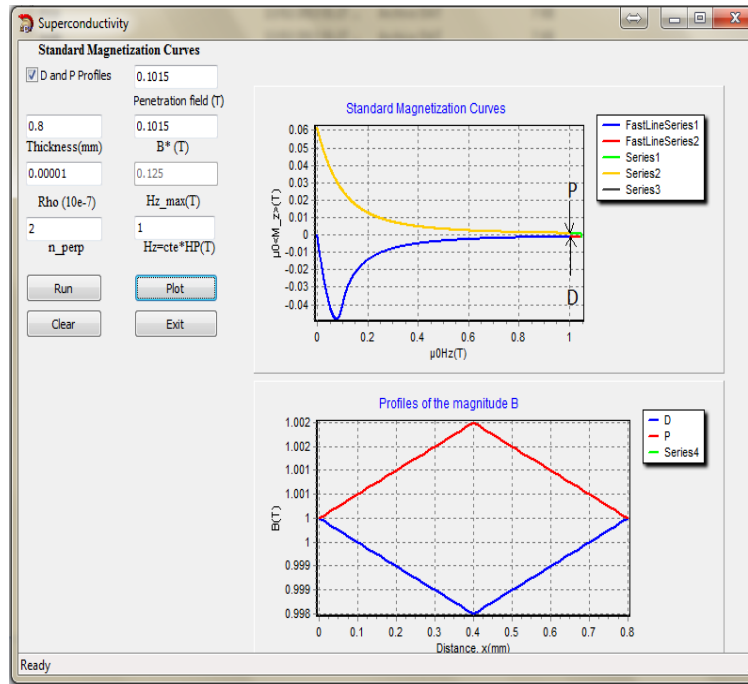


Figura 9.3: Curva de magnetización virgen para obtener los perfiles de  $B$  en la región diamagnética (D) y paramagnética (P) para un disco de PbBi (ver Secc. 4.2).

- $n_{par}$  es el exponente paralelo,  $n_{||}$  en la expresión de  $J_{c||}$  en la Ec. 4.25, el cual es un paraámetro a ser ajustado.
- Casilla *Profiles* Al seleccionar esta casilla se obtendrán, cada  $45^\circ$ , los perfiles del ángulo  $\alpha$ , la magnitud de  $B$  y sus componentes  $B'_y$  y  $B'_z$
- **Penetration field** es el campo de penetración,  $\mu_0 H_P$ , característico de cada muestra;  $\mu_0 H_P = 0.1015$  T, en el estudio realizado en el capítulo 4.
- $J_{cpa0} = fact * J_{c0}$  es la densidad de corriente paralela inicial, donde el valor de la constante *fact* es ajustado a 1.5 (ver Secc. 4.1).

La Fig. 9.4 muestra las curvas de magnetización, así como los perfiles de  $\alpha$ ,  $B$ ,  $B'_y$  y  $B'_z$ . Las etiquetas 0, 1...8 corresponden a los perfiles obtenidos cuando al campo aplicado rota  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ...  $360^\circ$ , respectivamente.

- Campos magnéticos rotantes (Modelo Elíptico Extendido)

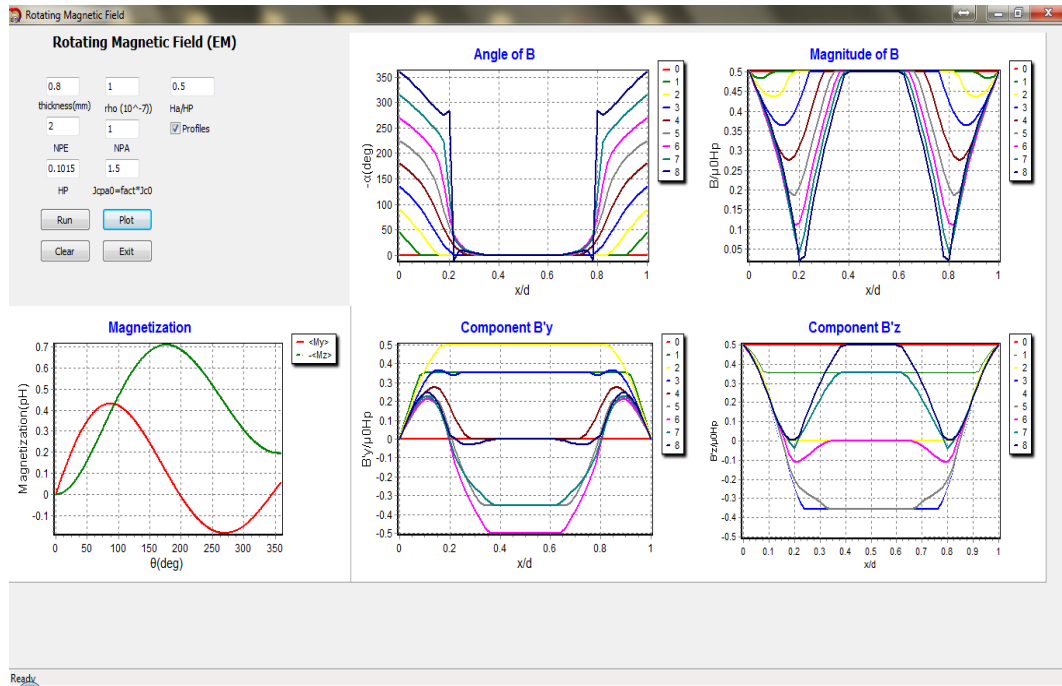


Figura 9.4: Componentes de la magnetización y perfiles de  $\alpha$ ,  $B$ ,  $B_y$  y  $B'_z$  obtenidos con el modelo elíptico original (ver Secc. 4.1).

De forma similar, el programa gráfico correspondiente al modelo elíptico extendido, incluye los parámetros del modelo elíptico original. Únicamente se agrega la casilla correspondiente al parámetro  $r$  del modelo extendido, en los cálculos  $r = 1$ ; sin embargo, puede ser mayor o menor a uno.

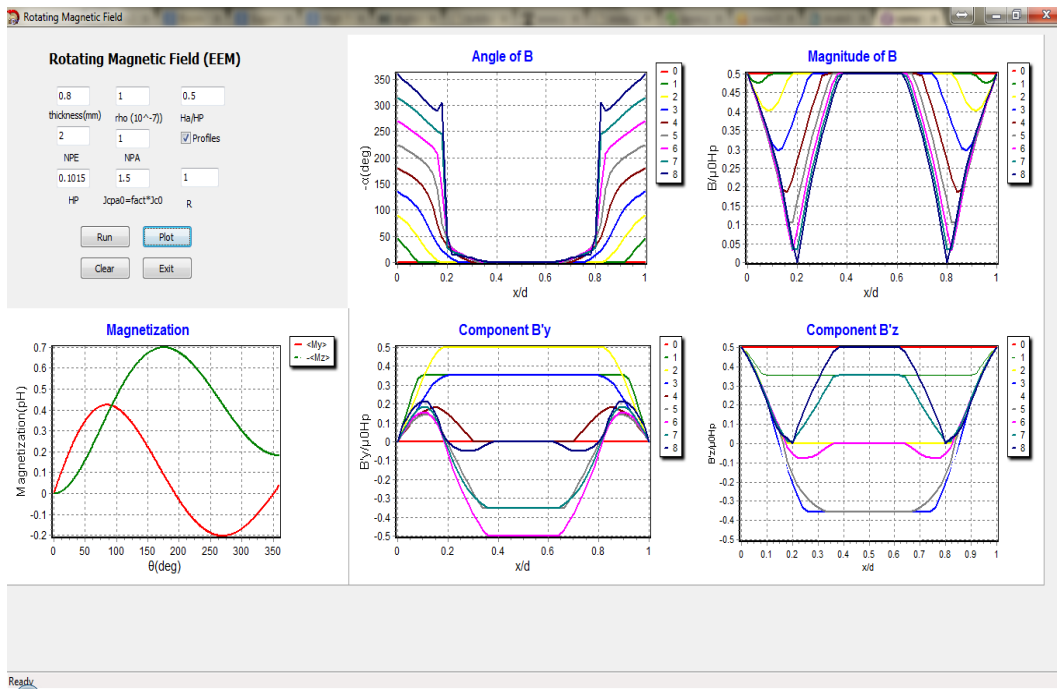


Figura 9.5: Componentes de la magnetización y perfiles de  $\alpha$ ,  $B$ ,  $B_y$  y  $B'_z$  (ver Secc. 4.1) obtenidos con el modelo elíptico extendido.

### **9.3. Publicaciones**

## Flux-cutting and flux-transport effects in type-II superconductor slabs in a parallel rotating magnetic field

R. Cortés-Maldonado

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue. 72570, Mexico*

J. E. Espinosa-Rosales

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apdo. Post. 1152, Puebla, Pue. 72000, Mexico*

A. F. Carballo-Sánchez

*Universidad del Istmo, Campus Tehuantepec, Tehuantepec, Oax. 70760, Mexico*

F. Pérez-Rodríguez<sup>a)</sup>

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue. 72570, Mexico*

(Submitted April 19, 2011)

*Fiz. Nizk. Temp.* **37**, 1190–1200 (November 2011)

The magnetic response of irreversible type-II superconductor slabs subjected to in-plane rotating magnetic field is investigated by applying the circular, elliptic, extended-elliptic, and rectangular flux-line-cutting critical-state models. Specifically, the models have been applied to explain experiments on a PbBi rotating disk in a fixed magnetic field  $\mathbf{H}_a$ , parallel to the flat surfaces. Here, we have exploited the equivalency of the experimental situation with that of a fixed disk under the action of a parallel magnetic field, rotating in the opposite sense. The effect of both the magnitude  $H_a$  of the applied magnetic field and its angle of rotation  $\alpha_s$  upon the magnetization of the superconductor sample is analyzed. When  $H_a$  is smaller than the penetration field  $H_p$ , the magnetization components, parallel and perpendicular to  $\mathbf{H}_a$ , oscillate with increasing the rotation angle. On the other hand, if the magnitude of the applied field,  $H_a$ , is larger than  $H_p$ , both magnetization components become constant functions of  $\alpha_s$  at large rotation angles. The evolution of the magnetic induction profiles inside the superconductor is also studied. © 2012 American Institute of Physics.  
[doi: 10.1063/1.3672157]

### I. INTRODUCTION

The discovery of the phenomenon known as quasimmetrical collapse of magnetization,<sup>1</sup> which is observed in superconductors subjected to crossed magnetic fields and well interpreted within the simple Bean's critical-state model,<sup>2,3</sup> has been a turning point in the understanding of the magnetic behavior of hard (irreversible type-II) superconductors. Until then, the generalized double critical-state model (GDCSM),<sup>4–8</sup> which is based on fundamental physical concepts such as flux transport and flux-linecutting,<sup>9,10</sup> was successfully employed to explain a variety of experiments where flux cutting occurs.<sup>11–16</sup> An important feature of the GDCSM is the assumption that flux cutting and flux depinning do not affect each other. Besides, the GDCSM is inherently anisotropic because the thresholds for these two effects are given by two independent parameters, namely the critical current densities parallel  $J_{c\parallel}$  and perpendicular  $J_{c\perp}$  to the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ . However, since the GDCSM cannot reproduce the features of magnetic moment collapse,<sup>17,18</sup> whereas isotropic Bean's model does it, the main assumption of the GDCSM has been questioned, motivating the development of new critical-state models in the past few years.

In Ref. 19, the so-called elliptic flux-line-cutting critical-state model was proposed. This model introduces the anisotropy, induced by flux-line-cutting effects, by using a procedure similar to that for structurally anisotropic super-

conductors,<sup>20,21</sup> i.e. the magnitude of the critical current density  $J_c$ , being the only parameter used within the isotropic Bean's model, is substituted by a symmetrical tensor  $(J_c)_{ik}$  with principal values  $J_{c\parallel}$  and  $J_{c\perp}$ , corresponding to the directions along and across the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ . In good agreement with the experiment on  $\text{Yb}_{a_2}\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  samples,<sup>1,17</sup> the elliptic critical-state model predicts the quasi-symmetrical suppression of the average magnetization  $\langle M_z \rangle$ , for paramagnetic and diamagnetic initial states, by sweeping a transverse field  $H_y$  of magnitude much smaller than dc-bias magnetic field  $H_z$ .<sup>19,22</sup> When the magnitudes of the crossed fields  $H_y$  and  $H_z$  are comparable, the value of the magnetization  $\langle M_z \rangle$  after many cycles of the transverse field  $H_y$  turns out to be positive for both diamagnetic and paramagnetic initial states if  $J_{c\parallel} > J_{c\perp}$ . To our knowledge, the observation of such a paramagnetism of hard superconductors was first reported in Refs. 23 and 24. The elliptic model also describes the behavior of  $\langle M_y \rangle(H_y)$  and  $\langle M_z \rangle(H_y)$  in crossed fields  $H_y$  and  $H_z$ ,<sup>19,25</sup> which was observed in the experiments on a VTi ribbon with nonmagnetic initial state.<sup>14,26</sup> Here, the good agreement with the experiment was achieved by using a relatively large anisotropy parameter  $J_{c\parallel}/J_{c\perp} = 6$ . It should be noticed that the Bean's critical state model predicts neither the phenomenon of the paramagnetism of hard superconductors nor the behavior of the components of the average magnetization found in Refs. 14 and 26. Furthermore, as it is shown in Refs. 19 and 27, the elliptic critical-state model

successfully describes the magnetic response of superconducting disks undergoing oscillations in a magnetic field of fixed magnitude for nonmagnetic, paramagnetic, and diamagnetic initial states.<sup>11</sup>

Despite the great success of the elliptic model,<sup>19</sup> it turns out that there exist phenomena, associated with flux cutting, which are not completely described within such a model. So, in a very recent work,<sup>28</sup> the elliptic critical-state model and other four theoretical approaches for describing the critical state of type-II superconductors (GDCSM, extended GDCSM,<sup>29,30</sup> extended elliptic critical-state model,<sup>28,31</sup> and an elliptic critical-state model based on the variational principle<sup>32</sup>) were tested. There, the angular dependencies of the critical current density  $J_c$  and the electric field  $\mathbf{E}$  (for  $J$  just above  $J_c$ ) were measured, using an epitaxially grown YBCO thin film, and compared with the predictions of the five theories. The measurements of angular dependence of the critical current density  $J_c$  demonstrated a behavior rather similar to that assumed by the elliptic critical-state models. Besides, the smooth angular dependence of the ratio of the transverse to the longitudinal components of the electric field  $E_y/E_z$  for  $J$  just above  $J_c$ , predicted by the three elliptic models, was verified in the experiment.<sup>28</sup> However, the original critical-state model<sup>19</sup> leads to small values of the ratio  $E_y/E_z$  in comparison with the experimental data and the results obtained from the other two elliptic models. On the basis of this detailed comparison between experiment and the five theories, it was concluded in Ref. 28 that the experiment favors only one of the models, namely the extended elliptic critical-state model.

The aim of the present work is to investigate the behavior of a hard superconductor in a parallel rotating magnetic field (or equivalently, the response of a rotating superconductor in a fixed magnetic field) and to compare the predictions of four critical-state models with experiment. Concretely, we shall consider the Bean's critical-state model,<sup>2,3</sup> the original elliptic critical-state model,<sup>19,22</sup> the recently-proposed extended elliptic model,<sup>28,31</sup> as well as the GDCSM,<sup>4-8</sup> whose main characteristics and assumptions will be revisited in Sec. II. We shall numerically solve Maxwell equations with the material equation postulated by each of the considered critical-state models to calculate magnetization curves for a superconductor disk rotating in a fixed magnetic field as in the experiment<sup>33</sup> (Sec. III). Here, we shall analyze the effect of the magnitude  $H_a$  of the applied magnetic field upon the dependencies of the magnetization components, parallel and perpendicular to  $H_a$ , on the rotation angle of the superconductor disk. The evolution of magnetic induction profiles will also be studied to explain the magnetic response of the rotating hard-superconductor sample.

## II. THEORETICAL FORMALISM

Let us consider a superconducting slab of thickness  $d$ , which occupies the space  $0 < x < d$  and is subjected to a magnetic field  $\mathbf{H}_a$  parallel to its surfaces:

$$\mathbf{H}_a = H_a \hat{\mathbf{a}}_s = H_a [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_s) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_s)], \quad (1)$$

where  $\alpha_s$  is the angle of the applied magnetic field  $\mathbf{H}_a$  with respect to the  $z$ -axis. Hence, the magnetic induction  $\mathbf{B}(x, t)$  inside the superconducting slab can be expressed as

$$\mathbf{B} = B(x, t) [\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha(x, t))], \quad (2)$$

where  $B$  and  $\alpha$  are respectively the magnitude and the tilt angle of the magnetic induction. It is convenient to write the electric field  $\mathbf{E}(x, t)$  and the electrical current density  $\mathbf{J}(x, t)$  in terms of their components parallel and perpendicular to the local magnetic induction  $\mathbf{B}(x, t)$ :

$$\mathbf{E}(x, t) = E_{\parallel}(x, t) \hat{\mathbf{a}}(x, t) + E_{\perp}(x, t) \hat{\mathbf{b}}(x, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{J}(x, t) = J_{\parallel}(x, t) \hat{\mathbf{a}}(x, t) + J_{\perp}(x, t) \hat{\mathbf{b}}(x, t), \quad (4)$$

where  $\hat{\mathbf{b}}(x, t) = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{a}}(x, t)$ . Inside the superconductor sample, we shall assume that the magnetic induction and the magnetic field satisfy the relation  $\mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{H}(x, t)$ , which is good enough for applied magnetic fields much larger than the first critical field ( $H_a \gg H_{c1}$ ). Moreover, any surface barrier against the flux entry (or exit) will be neglected. According to the planar geometry of the problem, we can rewrite Ampere and Lorentz laws,

$$\nabla \times \mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{J}(x, t), \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

as follow

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (7)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\mu_0 J_{\parallel}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (9)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (10)$$

To solve the resulting system of differential equations for  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{J}$ , one should add the material equation. Below, we shall use the material equations corresponding to the circular, elliptic, extended-elliptic, and rectangular flux-line-cutting critical-state models.

### A. Circular model

The first model for describing the magnetic behavior of superconductors in multicomponent situations was proposed by Bean.<sup>2,3</sup> According to it, the critical current density  $\mathbf{J}$  points always along the local electric field  $\mathbf{E}$ . Hence,

$$\mathbf{J} = J_c \frac{\mathbf{E}}{E}. \quad (11)$$

The magnitude of the critical current density  $J = J_c$  is the unique phenomenological parameter used and may depend on the magnitude of the magnetic induction  $B$ . In the planar geometry (see Eqs. (1)–(4)), the assumption  $J = J_c$  corresponds to a circle in the  $J_{\perp} - J_{\parallel}$  plane.

In numerically solving the system of Eqs. (7)–(10) for the electromagnetic fields, it is necessary to rewrite Eq. (11) as

$$\mathbf{E} = E(J) \frac{\mathbf{J}}{J}, \quad (12)$$

$$E(J) = \begin{cases} 0, & J \leq J_c(B) \\ \rho(J - J_c(B)), & J \geq J_c(B) \end{cases} \quad (13)$$

where  $\rho$  is an effective resistivity. It should be mentioned that for slow variations of the surface boundary conditions, producing a small magnitude of the induced electric field ( $E \ll \rho J_c$ ), the magnetic induction profiles are practically relaxed and independent of the parameter  $\rho$ .<sup>34</sup>

### B. Elliptic model

The elliptic flux-line cutting critical-state model<sup>19,22,25</sup> postulates:

$$J_i = (J_c)_{ik} \frac{E_k}{E}, \quad (14)$$

where

$$(J_c)_{ik} = J_{c,i}(B) \delta_{ij}, \quad i, k = \perp, \parallel. \quad (15)$$

Here  $\delta_{ik}$  is the Kronecker delta symbol. Within the elliptic critical-state model (14), the magnitude of the critical current density  $J_c$  draws an ellipse on the  $J_\perp - J_\parallel$  plane. This model makes use of two phenomenological parameters, namely the extreme values  $J_{c\perp}$  and  $J_{c\parallel}$  for the radius of the ellipse drawn by the magnitude of the critical current density. In the numerical calculations for solving the system of Eqs. (7)–(10), the relation (14) is rewritten in the form

$$E_i = E(J) (J_c^{-1})_{ik} J_k, \quad (16)$$

$$E(J) = \begin{cases} 0, & J \leq J_c(B, \phi) \\ \rho(J - J_c(B, \phi)), & J \geq J_c(B, \phi) \end{cases} \quad (17)$$

where  $(J_c^{-1})_{ik}$  is the inverse of the matrix  $(J_c)_{ik}$  in Eq. (14). The magnitude of the critical current density,  $J_c(B, \phi)$ , is given by the expression

$$J_c(B, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{c\parallel}^2(B)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{c\perp}^2(B)} \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

Here,  $\phi$  denotes the angle of the critical current density  $\mathbf{J}$  with respect to the direction of the flux density  $\mathbf{B}$ . If  $J_{c\perp} = J_{c\parallel}$ , the elliptic critical-state model (16) goes over into the Bean's (circular) critical-state model (12). Besides, the calculations of electromagnetic fields with  $J$  close to  $J_c$  are also independent of the auxiliary parameter  $\rho$  in Eq. (17)

### C. Extended elliptic model

The elliptic critical-state model, described in previous subsection, has recently been extended in Refs. 28 and 31 by introducing the general relations

$$E_\perp = \rho_\perp J_\perp, \quad (19)$$

$$E_\parallel = \rho_\parallel J_\parallel, \quad (20)$$

where  $\rho_\perp$  and  $\rho_\parallel$  are nonlinear effective resistivities, having a ratio  $r = \rho_\parallel / \rho_\perp$  independent of  $J$  just above  $J_c$  as it was experimentally found.<sup>28</sup> A model for the effective resistivities is given by<sup>31</sup>

$$E_\perp = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_\perp| \leq J_{cd} \\ \rho_d (|J_\perp| - J_{cd}) \text{sign}(J_\perp), & |J_\perp| \geq J_{cd} \end{cases}, \quad (21)$$

$$E_\parallel = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_\parallel| \leq J_{cc} \\ \rho_c (|J_\parallel| - J_{cc}) \text{sign}(J_\parallel), & |J_\parallel| \geq J_{cc} \end{cases}. \quad (22)$$

Here, the subscripts “ $d$ ” and “ $c$ ” respectively refer to depinning and cutting. Besides,  $J_{cd} = J_c(B, \phi) |\sin(\phi)|$  and  $J_{cc} = J_c(B, \phi) |\cos(\phi)|$  where  $J_c(B, \phi)$  is defined according to the elliptic critical-state model as in Eq. (18). If  $|J - J_c| / J_c \ll 1$ , the extended elliptic critical-state model reduces to the original one (Eqs. (16) and (17)) by replacing  $\rho_d$  and  $\rho_c$  in Eqs. (21) and (22) with  $\rho J_c / J_{c\perp}$  and  $\rho J_c / J_{c\parallel}$ , correspondingly. Hence, in the case of the original elliptic model, the ratio  $r = \rho_\parallel / \rho_\perp$  at  $J > J_c$  is equal to  $J_{c\perp} / J_{c\parallel}$ . On the other hand, the extended elliptic critical-state model is capable to modify the relation between the components of the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}$  with the aid of the additional parameter  $r$ .

### D. Rectangular model

The generalized double critical-state model<sup>4–8</sup> uses two phenomenological parameters, namely the critical values,  $J_{c\parallel}$  and  $J_{c\perp}$ , of the electrical current density along and perpendicular to the local magnetic induction. Within this model, each component of the electrical current density is determined by its own electric field as

$$J_\perp = J_{c\perp} \text{sign}(E_\perp), \quad (23)$$

$$J_\parallel = J_{c\parallel} \text{sign}(E_\parallel), \quad (24)$$

Evidently, the magnitude of the critical current density traces a rectangle in the  $J_\perp - J_\parallel$  plane. The parameter  $J_{c\perp}$  determines the threshold for depinning of vortices, whereas  $J_{c\parallel}$  indicates the onset of flux-line cutting in the vortex array. In calculating the electromagnetic fields within the GDSCSM, the material equation (23) is written in the form

$$E_\perp = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_\perp| \leq J_{c\perp} \\ \rho_\perp (|J_\perp| - J_{c\perp}) \text{sign}(J_\perp), & |J_\perp| \geq J_{c\perp} \end{cases}, \quad (25)$$

$$E_\parallel = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_\parallel| \leq J_{c\parallel} \\ \rho_\parallel (|J_\parallel| - J_{c\parallel}) \text{sign}(J_\parallel), & |J_\parallel| \geq J_{c\parallel} \end{cases}, \quad (26)$$

The quantities  $\rho_\perp$  and  $\rho_\parallel$  are effective flux-flow and flux-line-cutting resistivities of the material. However, unlike the above-commented critical-state models, the GDSCSM allows the existence of zones in the  $J_\perp - J_\parallel$  plane where either flux cutting or flux transport exclusively occur. The latter is possible due to the assumption of the GDSCSM that the threshold for flux depinning,  $J_{c\perp}$  (flux cutting,  $J_{c\parallel}$ ) is independent of the component  $J_\parallel$  ( $J_\perp$ ) (compare Eqs. (25) and (26) with Eqs. (21) and (22) where  $J_{cd}$  and  $J_{cc}$  depend on the angle  $\phi = \arctan(J_\perp / J_\parallel)$ ).

### III. NUMERICAL RESULTS AND COMPARISON WITH EXPERIMENT

In the present section we will apply the flux-line-cutting critical-state models, commented above, to explain experimental magnetization curves<sup>33</sup> of a PbBi superconducting disk, rotating in the presence of an external magnetic field  $\mathbf{H}_a$ , which is oriented parallel to the disk plane (along the z-axis) and perpendicular to the axis of rotation.

#### A. Experimental results

Figure 1(a) exhibits a standard magnetization curve, which was measured in Ref. 33, for a PbBi disk of thickness  $d = 0.8$  mm. The hysteresis in Fig. 1(a) clearly corresponds to the magnetization curve of a type-II irreversible superconductor since its return crosses over and remains in the paramagnetic region as a result of the strong flux pinning. In the experiment, the isotropy of the PbBi disk was also verified by comparing standard magnetization curves with  $\mathbf{H}_a$  directed along different diameters of the disk.

Panels (a)–(c) in Fig. 2 show graphs of the magnetization components,  $\langle M_y \rangle = \langle B_y \rangle / \mu_0$  and  $-\langle M_z \rangle = H_a - \langle B_z \rangle / \mu_0$ , versus the angle  $\theta$  of rotation, measured in the work<sup>33</sup> for the PbBi disk, rotating in the magnetic field  $\mathbf{H}_a$ . The measurements started in the nonmagnetic initial state which is reached after cooling the superconductor at the fields  $H_a/H_P = 0.5$  (panel a), 1.0 (panel b), and 2.0 (panel c), where  $H_P$  ( $\mu_0 H_P = 0.1015$  T (Ref. 33)) is the penetration field. The initial state is supposed to be nonmagnetic because no Meissner effect (flux expulsion) was observed after field cooling, within the accuracy ( $\Delta \langle M \rangle \leq 1$  Gauss) of the experiment.

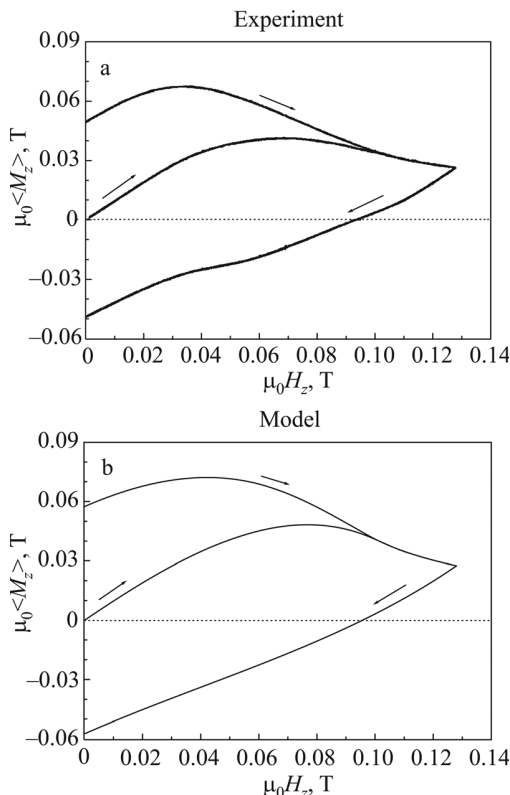


FIG. 1. Standard magnetization curves (a) for a PbBi disk, taken from Ref. 33. Theoretical magnetization curves (b) obtained with a critical current density  $J_{c\perp}(B)$  as in Eq. (31).

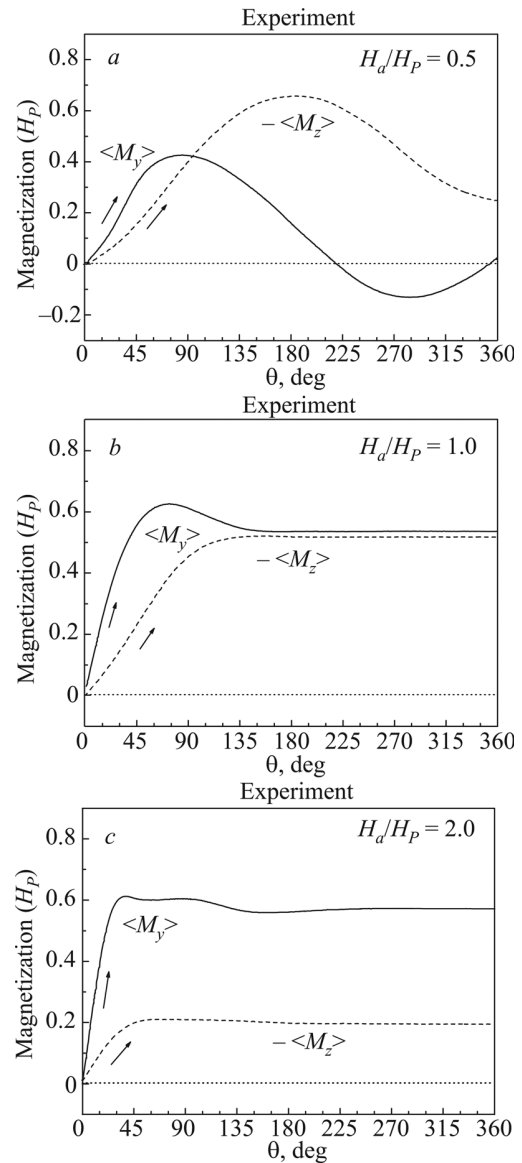


FIG. 2. PbBi rotational curves measured in Ref. 33.

As it is seen in Fig. 2, for the smallest value of  $H_a$  ( $=0.5 H_P$ , panel a), both magnetization components have a nonmonotonic behavior as functions of  $\theta$ . Such a behavior of magnetization has also been observed in Ref. 11 during the initial rotation of a Nb disk undergoing slow oscillations in a parallel field. The dependence of the magnetization on  $\theta$  radically changes at larger values of  $H_a$ . So (see Fig. 2(b)), at  $H_a = H_P$  the functions  $\langle M_y \rangle(\theta)$  and  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  initially grow with  $\theta$  and later (at  $\theta > 150^\circ$ ) they practically become constants with close values ( $\langle M_y \rangle \approx -\langle M_z \rangle$ ). Also note that  $\langle M_y \rangle$  has a maximum at  $\theta \approx 75^\circ$ . For  $H_a$  larger than the penetration field  $H_P$  (panel c), the function  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  takes values smaller than those for  $\langle M_y \rangle(\theta)$ . Both of them are almost constant functions, except at small rotation angles because of their fast initial growth. Thus, the maximum of  $\langle M_y \rangle$  is shifted to a smaller value of  $\theta$  ( $\approx 40^\circ$ ).

#### B. Theoretical predictions

The models described in the previous section can be applied to explain the experimental results (Fig. 2) if we fix

the sample and rotate the external magnetic field  $\mathbf{H}_a$  (1) by an angle  $\alpha_s = -\theta$  instead of fixing the magnetic field and rotating the superconducting sample. Then, the experimental values  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  should respectively correspond to the quantities:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_y(x), \quad (27)$$

$$-\langle M_z \rangle = H_a \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_z(x), \quad (28)$$

where

$$B'_y = \hat{\mathbf{a}}_s \times \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = B(x) \sin[(\alpha(x) - \alpha_s)], \quad (29)$$

$$B'_z = \hat{\mathbf{a}}_s \cdot \mathbf{B} = B(x) \cos[(\alpha(x) - \alpha_s)]. \quad (30)$$

The calculations of magnetization components  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  with the critical-state models, discussed in Sec. II, require the employment of the parameters  $J_{c\perp}(B)$  and  $J_{c\parallel}(B)$ , depending on the magnetic induction. The former,  $J_{c\perp}(B)$ , is determined from the experimental curves of magnetization versus the applied field, varying along one direction only as in Fig. 1 (In this case, flux cutting does not occur and, consequently, the depinning effects are completely responsible for the magnetic response of the superconductor.) The standard magnetization curves are well reproduced by any one of the critical-state models (see above) with

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\perp}}, \quad (31)$$

$J_{c\perp}(0) = 47.11 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ , and  $n_\perp = 2$  (compare panels (a) and (b) of Fig. 1). Other parameters of the critical state models are found by adjusting theoretical magnetization curves to the experimental ones (Fig. 2).

### 1. Circular model

Within the Bean's circular critical-state model (11), there is only one phenomenological parameter, i.e.  $J_c(B) = J_{c\perp}(B) = J_{c\parallel}(B)$ . Then,  $J_c(B)$  has the form (Eq. (31)) with the same values for the parameters  $J_{c\perp}(0)$ , and  $n_\perp$ .

Figure 3 shows our numerical results for  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$ , obtained with the Bean critical-state model. At first glance, it seems that the circular model qualitatively reproduces the experimental magnetization curves (Fig. 2). However, there are important differences between its predictions and the experiment. Thus, for example, the "oscillations" of the magnetization components (Fig. 3(a)) have small amplitudes compared with the experimental ones. Besides, at  $H_a = 0.8H_P$  the functions  $\langle M_y \rangle(\theta)$  and  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  approximate each other but at relatively large rotation angles  $\theta > 300^\circ$ . Finally, when the applied field has an amplitude larger than  $H_P$  (see panel c), the magnetization components are rather small in magnitude and their initial growth, before the saturation, occurs in a very small interval of  $\theta$  ( $< 20^\circ$ ).

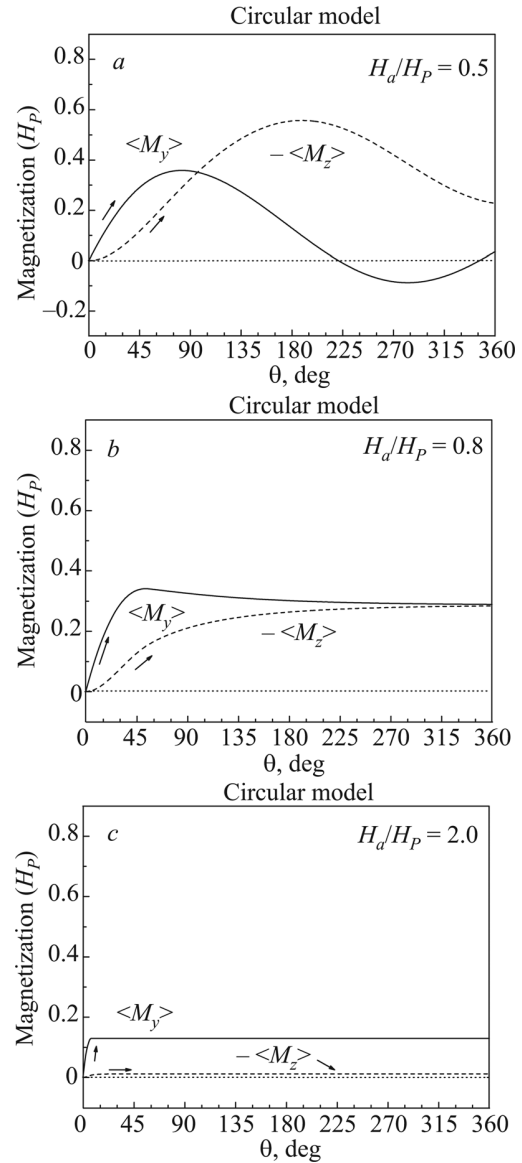


FIG. 3. Curves of the average magnetization components versus the rotation angle, calculated with Bean's critical-state model.

### 2. Elliptic model

The calculations of magnetization components  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  within the elliptic flux-line-cutting critical-state model (14) are shown in Fig. 4. Here, we used the same  $J_{c\perp}(B)$  as in Eq. (31) and  $J_{c\parallel}(B)$  of the form

$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\parallel}} \quad (32)$$

with  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$  and  $n_\parallel = 1$ . This choice provides a good agreement between experimental (Fig. 2) and theoretical (Fig. 4) curves. Thanks to the use of a second parameter ( $J_{c\parallel}$ ), the elliptic model is able to generate the "oscillations" of the magnetization components (Fig. 4(a)) with amplitude close to that observed in the experiment (panel (a) in Fig. 2). Notice that  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  approach each other at  $\theta > 150^\circ$  with  $H_0 = 1.05H_P$  in good concordance with the measurements (see Fig. 2(b), corresponding to  $H_0 = H_P$ ). In addition,

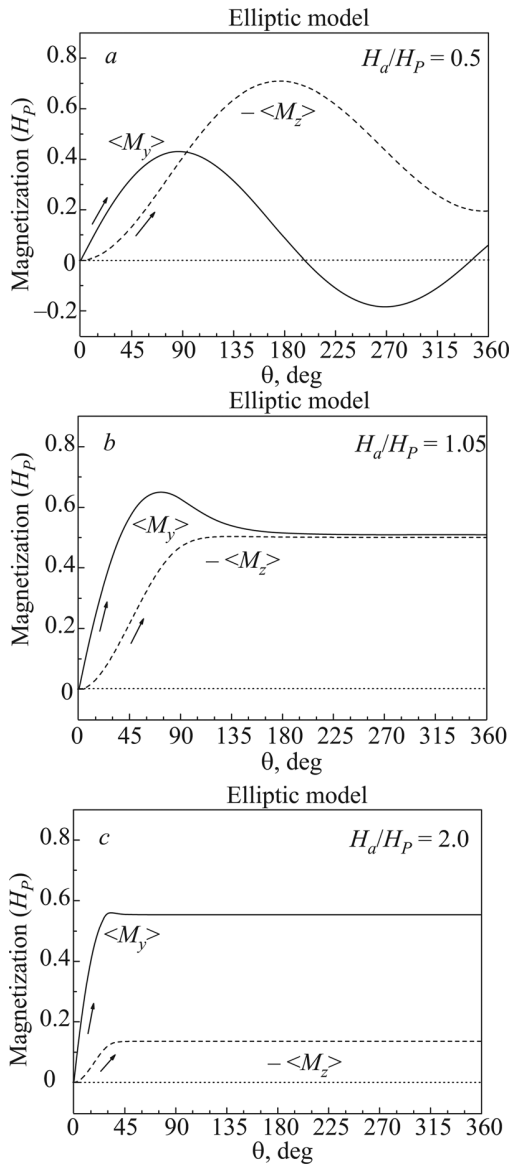


FIG. 4. Curves of the average magnetization components versus the rotation angle, calculated with the original elliptic critical-state model.

when  $H_0 = 2.0H_p$  (panel (c) in Fig. 4), the difference between  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  at  $\theta > 45^\circ$  is as large as in the experiment (Fig. 2(c)).

**3. Extended elliptic model**

As was commented in Sec. II, both elliptic and circular critical-state models are particular cases of the extended elliptic one. Therefore, the results presented in Fig. 3, predicted by the circular model, can also be calculated by using the new model (Eqs. (21) and (22)) with  $J_{c\perp} = J_{c\parallel}$  as in Eq. (31) and  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp} = \rho_c/\rho_d$  being equal to one ( $r = 1$ ) at  $J > J_c$ . The condition  $r = 1$  guarantees that the electric field  $\mathbf{E}$  and current density  $\mathbf{J}$  be parallel as it is postulated by Bean’s critical-state model (11). In addition, graphs in Fig. 4 (original elliptic model predictions), which quantitatively reproduce experimental measurements (Fig. 2), are also obtained with the extended elliptic critical-state model (Eqs. (21) and (22)) if  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$  (i.e.  $\rho_c/\rho_d = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ ).

According to the parameters  $J_{c\perp}(B)$  (Eq. (31)) and  $J_{c\parallel}(B)$  (Eq. (32)), used for calculating magnetization curves in Fig. 4, the ratio  $r$  is here smaller than 1 ( $r < 1$ ).

It is interesting to study the effect of the parameter  $r$ , controlling the relation between the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}$  at  $J > J_c$ . For this reason, we have calculated magnetization curves (Fig. 5) by applying the extended elliptic model with the same parameters  $J_{c\perp}(B)$  and  $J_{c\parallel}(B)$  as those employed in Fig. 4, but with the parameter  $r = \rho_c/\rho_d = 1$ . In other words, the magnetization curves in Fig. 5 correspond to an anisotropic critical-state model with  $J_{c\perp}/J_{c\parallel} < 1$ , but the parameter  $r = 1$ , indicating that  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{J}$  are parallel when  $J > J_c$ . From the comparison of Fig. 5 with Fig. 4, we note that magnetization curves significantly depend upon the parameter  $r$  when the applied magnetic field is large enough ( $H_a > H_p$  as in panels (b) and (c)). So, in order the magnetization components,  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$ , to have the same value at large angles of rotation, the applied magnetic field  $H_a$  for  $r = 1$  (Fig. 5(b)) should be larger than

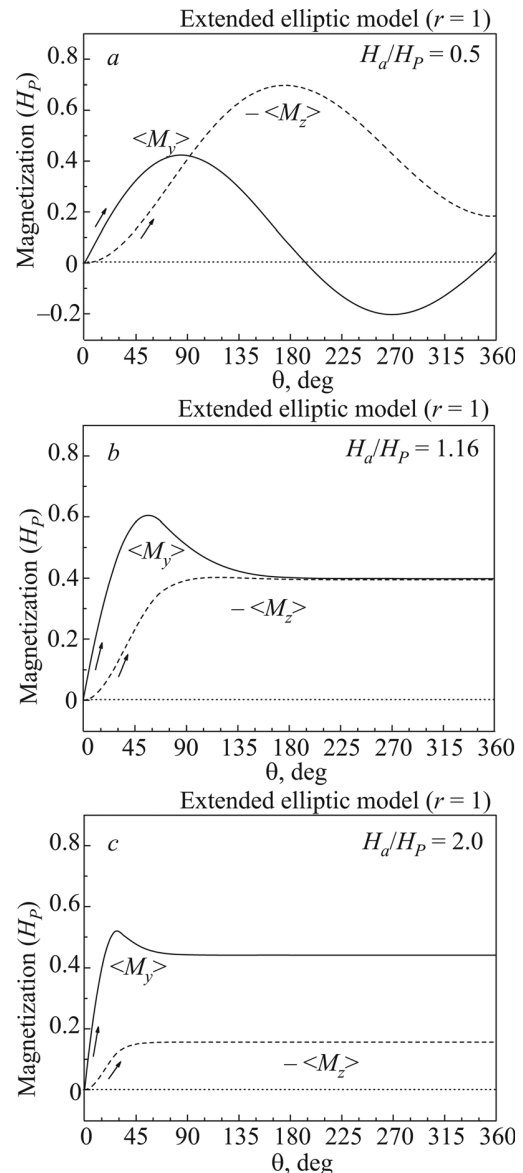


FIG. 5. Curves of the average magnetization components versus the rotation angle, calculated with the extended elliptic critical-state model using a ratio  $r = 1$ .

the field used in Fig. 4(b). Besides, the value of  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  ( $\approx 0.4H_P$ ), at sufficiently large angles  $\theta$ , turns out to be smaller than that ( $\approx 0.5H_P$ ) predicted by the original elliptic model (Fig. 4(b)). At  $H_a = 2.0H_P$ , there is also a noticeable difference between magnetization  $y$ -components (compare panels (c) of Figs. 4 and 5).

#### 4. Rectangular model

For completeness of our study, we have employed the GDCSM (rectangular model), which also uses two critical current densities, namely  $J_{c\perp}(B)$  and  $J_{c\parallel}(B)$ . The former is determined from the curves of magnetization versus the applied field, varying along one direction only (Fig. 1). In our case, the magnetic dependence of  $J_{c\perp}$  is the same as in Eq. (31). To reproduce the main features of the experiment (Fig. 2), the other parameter is chosen as in Eq. (32), but  $J_{c\parallel}(0) = 1.32J_{c\perp}(0)$  and  $n_{\parallel} = 1.06$  (compare Figs. 2 and 6). Although these values are different from those used within

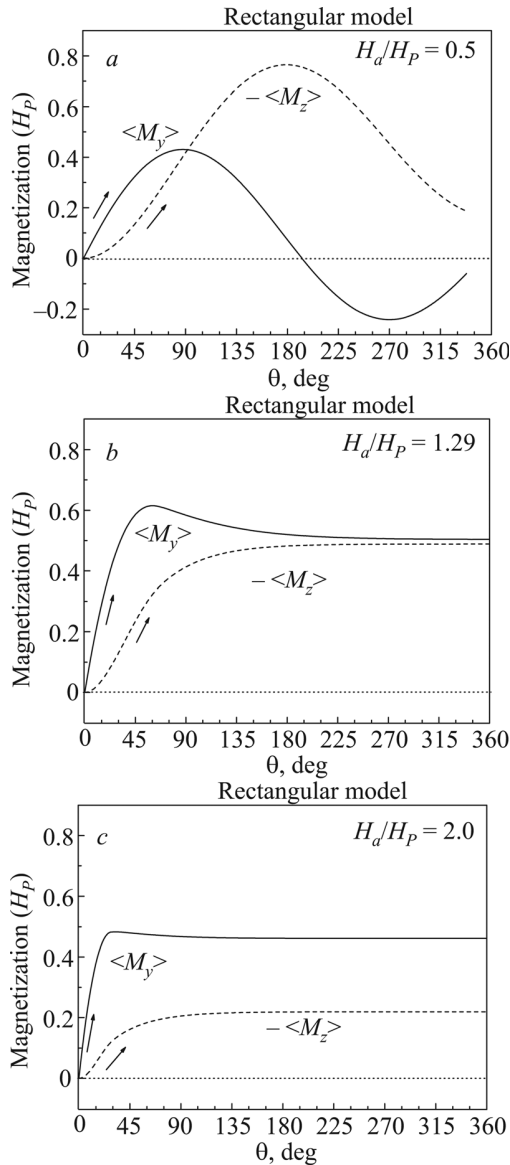


FIG. 6. Curves of the average magnetization components versus the rotation angle, calculated with the generalized double critical-state model.

the elliptic critical-state model, the parallel critical current density  $J_{c\parallel}$  remains being larger than the perpendicular one  $J_{c\perp}$ . It should be noted that the GDCSM predicts the equality of  $\langle M_y \rangle$  and  $-\langle M_z \rangle$  ( $\approx 0.5H_P$ ) with an external field  $H_a = 1.29H_P > H_P$  at relatively large rotation angles  $\theta > 270^\circ$  (see Fig. 6(b)), in contrast to the experiment where such a behavior occurs from  $\theta \approx 150^\circ$ . Besides, the numerical calculations for  $H_a = 0.5H_P$  (panel (a) in Fig. 6) had to be stopped at  $\theta \approx 338^\circ$  because the solution further diverged.

#### C. Magnetic induction profiles

The fact that the elliptic critical-state model is able to quantitatively reproduce the experiment, with the use of a parallel critical current density  $J_{c\parallel}(B)$  larger than the perpendicular one  $J_{c\perp}(B)$ , illustrates how flux-line cutting influences on the magnetic behavior of a rotating superconductor. To explain the features observed in both experimental (Fig. 2) and theoretical (Fig. 4) magnetization curves, we shall analyze the evolution of the profiles for the magnitude of the magnetic induction  $B(x)$ , the tilt angle  $\alpha(x)$ , and the components  $B_y(x)$  (Eq. (29)) and  $B_z(x)$  (Eq. (30)), calculated within the original elliptic flux-line-cutting critical-state model (Figs. 7–9).

The calculated profiles of the magnetic induction in the case when the external magnetic field  $H_a$  has a magnitude smaller than the penetration field  $H_P$  ( $H_a = 0.5 H_P$ ) are shown in Fig. 7. As the angle of rotation is increased, two  $U$ -shaped minima in the  $B(x)$  profile (panel b) appear because of the flux consumption (decrement of  $B$ ) which results from flux-line cutting.<sup>4</sup> The absolute value of the tilt angle  $\alpha$  increases with  $\theta$  in the near-surface intervals  $0 \leq x < x_{m1}$  and  $x_{m2} < x \leq d$ . However, in the intervals  $x_{m1} < x < x_1$  and  $x_2 < x < x_{m2}$ , where there is flux consumption, the angle  $\alpha$  is slightly modified. In the central interval,  $x_1 < x < x_2$  neither  $B$  or  $\alpha$  is altered. When  $\theta \approx 360^\circ$ , the minimum values of  $B$  inside the superconducting disk tend to zero and, as follows from Eq. (8), the magnitude of the derivative  $\partial\alpha/\partial x$  considerably increases at points corresponding to such minima. Besides, at  $x = x_{m1}$  and  $x = x_{m2}$  with  $B(x_{m1}) = B(x_{m2}) \approx 0$ , the accuracy of our calculations is low and, therefore, the values  $-\alpha(x_{m1})$  and  $-\alpha(x_{m2})$  turned out to be apparently higher than they should be (see curve 8 for  $\theta = 360^\circ$  in Fig. 7(a)). The component  $B'_z$  of the magnetic induction, parallel to the applied magnetic field, decreases near sample surfaces because of the flux consumption (Fig. 7(d)). Nevertheless, the most important change occurs in the central part of the sample (in  $x_1 < x < x_2$ ) because of the sample rotation. So, at  $\theta = 180^\circ$  (curve 4) the component  $B'_z$  varies from  $B'_z = -\mu_0 H_a$  at the surfaces  $x = 0$  and  $x = d$  to the opposite value  $B'_z = \mu_0 H_a$  in the central region of the sample. When an entire cycle is finished,  $B'_z$  again takes the value  $B'_z = \mu_0 H_a$  in the middle of the disk (curve 8). This cyclic behavior of  $B'_z$  is responsible for the “oscillations” of the magnetization component  $\langle M_z \rangle(\theta)$  (panels (a) in Figs. 2 and 4), being negative for any value of the angle of rotation  $\theta > 0$  because  $B'_z < \mu_0 H_a$  near surfaces, i.e. in the intervals  $0 < x < x_1$  and  $x_2 < x < d$ . The component  $B'_y$  also oscillates in the middle of the sample as  $\theta$  is increased (Fig. 7(c)). Such a behavior of  $B'_y$  makes the magnetization  $y$ -component  $\langle M_y \rangle$  oscillate with  $\theta$  (Figs. 2(a)

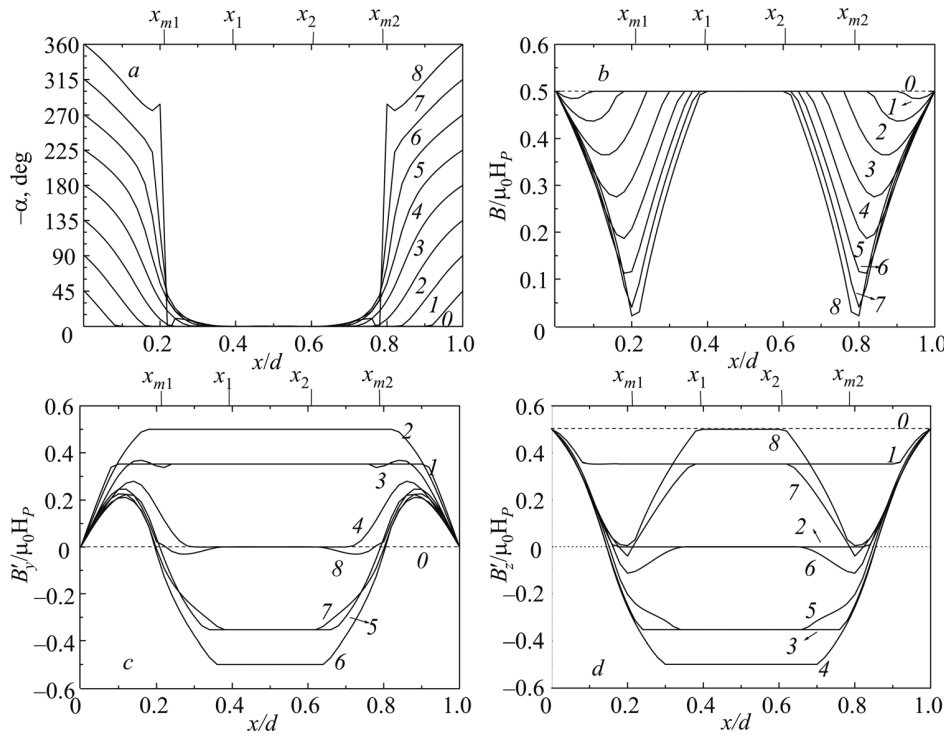


FIG. 7. Profiles of the angle  $\alpha$  (panel a), magnitude  $B$  (panel b) and components  $B_y$  (Eq. (29), panel c) and  $B_z$  (Eq. (30), panel d) of the magnetic induction, calculated with the original elliptic critical-state model at  $H_a = 0.5 H_p$ .

and 4(a)). As it is seen in Fig. 7(c), there is an increment of  $B'_y$  in the near-surface regions, producing a small positive value for  $\langle M_y \rangle$  (27) after a complete cycle, i.e. at  $\theta = 360^\circ$  (see Figs. 2(a) and 4(a)).

Figure 8 exhibits profiles calculated within the elliptic critical-state model for  $H_a = 1.05 H_p$ . Due to the decrease of the critical current densities  $J_{c\perp}$  (31) and  $J_{c\parallel}$  (32) with the magnitude  $B$  of the magnetic induction, the slopes of the critical profiles for  $B(x)$  and  $\alpha(x)$  near surfaces are smaller than the slopes observed in the corresponding profiles of Fig. 7. Therefore, the central region with unaltered  $B$  and  $\alpha$  (see curves 1 in panels (a) and (b) of Fig. 8) rapidly disappears as the rotation angle  $\theta$  is increased (see curves 2 therein). Also,

the U-shaped minima of  $B(x)$  coalesce forming a unique minimum at the center of the disk. The resulting critical profile  $B(x)$  does not further change despite the fact that the disk continues rotating (see curves 5–8 in panel (b)). In this case,  $B'_z(x)$  initially decreases (curves 1–2 in Fig. 8(d)) inside the sample as  $\theta$  varies until it reaches the critical profile (curves 3–8). Hence, the dependence  $\langle M_z \rangle(\theta)$  has a monotonic behavior at  $\theta > 120^\circ$  (see panels (b) in Figs. 2 and 4). On the other hand,  $B'_y(x)$  increases so that a huge maximum in the dependence  $\langle M_y \rangle(\theta)$  (Figs. 2(b) and 4(b)) appears at  $\theta \approx 70^\circ$ . At large rotation angles ( $\theta > 180^\circ$ ), the profile  $B'_y(x)$  becomes stationary and  $\langle M_y \rangle(\theta)$  is, practically, a constant function, having a value close to  $-\langle M_z \rangle$ . So, the magnitude

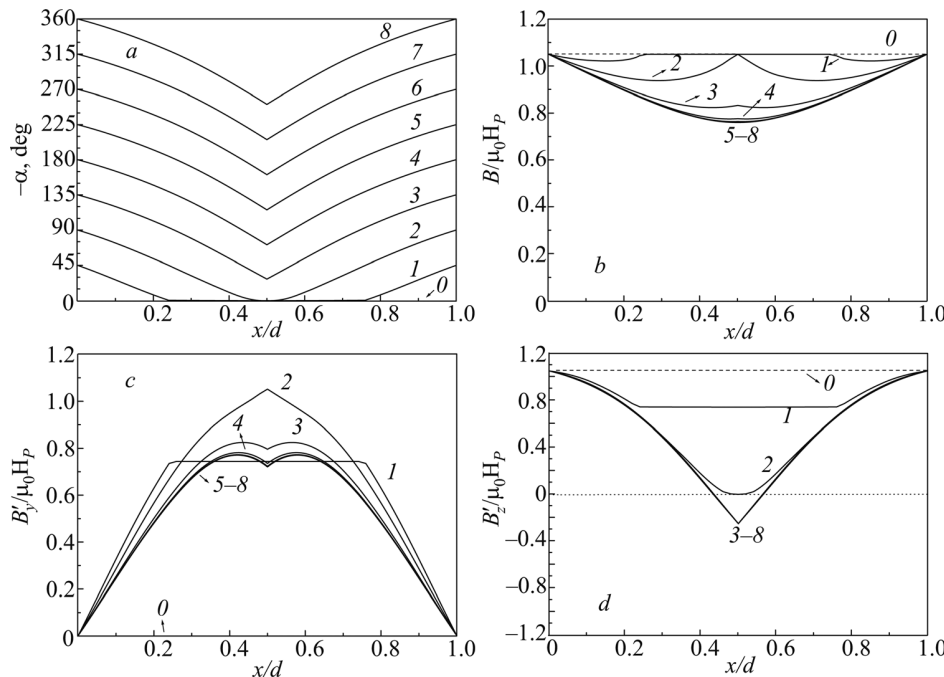


FIG. 8. Profiles of the angle  $\alpha$  (panel a), magnitude  $B$  (panel b) and components  $B_y$  (Eq. (29), panel c) and  $B_z$  (Eq. (30), panel d) of the magnetic induction, calculated with the original elliptic critical-state model at  $H_a = 1.05 H_p$ .

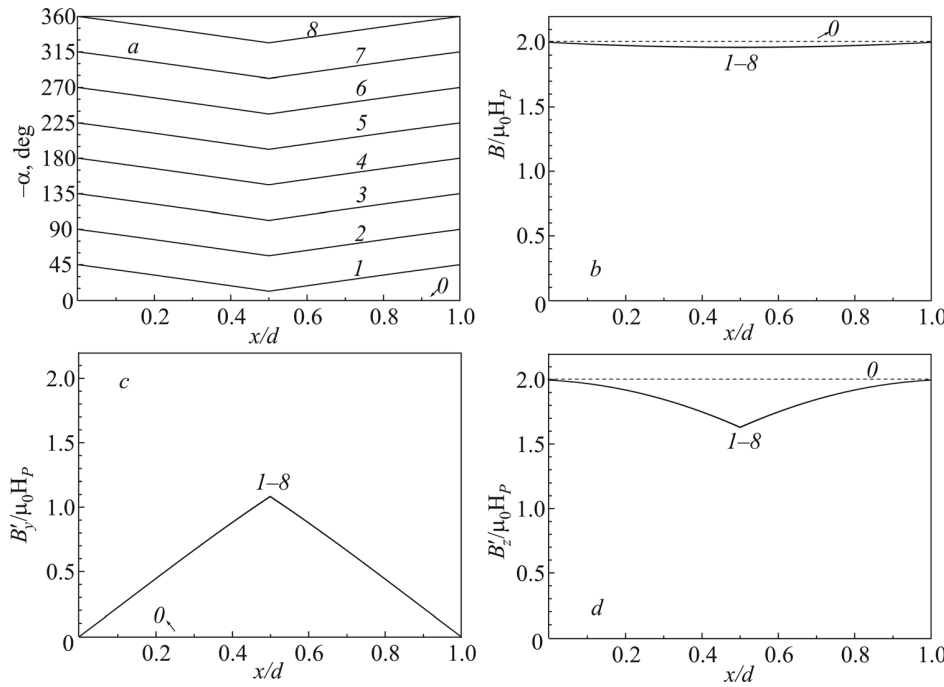


FIG. 9. Profiles of the angle  $\alpha$  (panel a), magnitude  $B$  (panel b) and components  $B_y$  (Eq. (29), panel c) and  $B_z$  (Eq. (30), panel d) of the magnetic induction, calculated with the original elliptic critical-state model at  $H_a = 2.0 H_p$ .

of the magnetization,  $|\langle \mathbf{M} \rangle|$ , is independent of  $\theta$  when the rotation angle is sufficiently large.

The profiles for the case when the external magnetic field is large enough, in comparison with the penetration field  $H_p$  (as in Fig. 9), have an evolution similar to that presented in Fig. 8. However, the central regions of unaltered magnetic induction rapidly disappear as  $\theta$  is increased (compare Figs. 8 and 9). This fact is due to noticeable reduction of the critical current densities  $J_{c\perp}$  and  $J_{c\parallel}$  with  $B$ .

#### IV. CONCLUSION

We have applied the circular, elliptic, extended-elliptic, and rectangular critical-state models to study the magnetic behavior of irreversible type-II superconductors in a parallel rotating magnetic field. The numerical method employed here is based on the substitution of the vertical law, relating the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}$ , for a nonlinear material equation having effective flux-cutting and flux-flow resistivities in the dissipative region. The substitution is justified when the applied magnetic field  $H_a$  slowly varies either in magnitude or direction, inducing electric fields of sufficiently small magnitude inside the superconductor. Within the elliptic (circular) critical-state model such resistivities are not independent of each other and have a ratio  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  equal to  $J_{c\perp}/J_{c\parallel}$  ( $= 1$  for the circular model) at  $J$  just above its critical value  $J_c$ . On the other hand, within the extended elliptic critical-state model the ratio  $r$  is an independent parameter to be determined. The rectangular critical-state model also uses two independent resistivities,  $\rho_{\parallel}$  and  $\rho_{\perp}$ . However, unlike the other critical-state models, the GDSCM assumes that flux cutting and flux depinning do not affect each other.

The comparison of the predictions of the mentioned critical-state models with experimental measurements of magnetization for a rotating PbBi disk in a fixed magnetic field<sup>33</sup> shows that the original critical-state model can reproduce the main features of the magnetization curves.

The circular and rectangular critical-state models only achieve a qualitative description of the experiment. The extended elliptic model, being more general than the original elliptic one, has allowed us to study the effect of the relation between  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{J}$  in the dissipative region. However, additional theoretical and experimental studies are needed to elucidate on the effects associated with both flux-cutting and flux-flow resistivities.

This work was partially supported by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, Mexico).

<sup>a</sup>Email: fperez@ifuap.buap.mx

<sup>1</sup>L. M. Fisher, A. V. Kalinov, I. F. Voloshin, I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, and V. A. Yampol'skii, *Solid State Commun.* **97**, 833 (1996).  
<sup>2</sup>C. P. Bean, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 250 (1962).  
<sup>3</sup>C. P. Bean, *J. Appl. Phys.* **41**, 2482 (1970).  
<sup>4</sup>J. R. Clem, *Phys. Rev.* **26**, 2463 (1982).  
<sup>5</sup>J. R. Clem and A. Pérez-González, *Phys. Rev.* **30**, 5041 (1984).  
<sup>6</sup>A. Pérez-González and J. R. Clem, *Phys. Rev.* **31**, 7048 (1985).  
<sup>7</sup>A. Pérez-González and J. R. Clem, *Phys. Rev.* **32**, 2909 (1985).  
<sup>8</sup>A. Pérez-González and J. R. Clem, *J. Appl. Phys.* **58**, 4326 (1985).  
<sup>9</sup>D. G. Walmsley, *J. Phys. F* **2**, 510 (1972).  
<sup>10</sup>A. M. Campbell and J. E. Evetts, *Adv. Phys.* **21**, 199 (1972).  
<sup>11</sup>J. R. Cave and M. A. R. LeBlanc, *J. Appl. Phys.* **53**, 1631 (1982).  
<sup>12</sup>R. Boyer and M. A. R. LeBlanc, *Solid State Commun.* **24**, 261 (1977).  
<sup>13</sup>R. Boyer, G. Fillion, and M. A. R. LeBlanc, *J. Appl. Phys.* **51**, 1692 (1980).  
<sup>14</sup>M. A. R. LeBlanc and J. P. Lorrain, *J. Appl. Phys.* **55**, 4035 (1984).  
<sup>15</sup>F. Pérez-Rodríguez, A. Pérez-González, J. R. Clem, G. Gandolfini, and M. A. R. LeBlanc, *Phys. Rev.* **56**, 3473 (1997).  
<sup>16</sup>A. Silva-Castillo, R. A. Brito-Orta, A. Pérez-González, and F. Pérez-Rodríguez, *Physica C* **296**, 75 (1998).  
<sup>17</sup>L. M. Fisher, K. V. Il'enko, A. V. Kalinov, M. A. R. LeBlanc, F. Pérez-Rodríguez, S. E. Savel'ev, I. F. Voloshin, and V. A. Yampol'skii, *Phys. Rev.* **61**, 15382 (2000).  
<sup>18</sup>I. F. Voloshin, L. M. Fisher, and V. A. Yampol'skii, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 50 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 39 (2010)].  
<sup>19</sup>C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 5256 (2003).

- <sup>20</sup>I. F. Voloshin, A. V. Kalinov, L. M. Fisher, A. V. Aksenov, and V. A. Yampol'skii, *JETP* **93**, 1105 (2001).
- <sup>21</sup>C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *Supercond. Sci. Technol.* **16**, 1273 (2003).
- <sup>22</sup>C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *Physica C* **404**, 317 (2004).
- <sup>23</sup>L. M. Fisher, A. V. Kalinov, S. E. Savel'ev, I. F. Voloshin, V. A. Yampol'skii, M. A. R. LeBlanc, and S. Hirscher, *Physica C* **278**, 169 (1997).
- <sup>24</sup>L. M. Fisher, A. V. Kalinov, S. E. Savel'ev, I. F. Voloshin, and V. A. Yampol'skii, *Solid State Commun.* **103**, 313 (1997).
- <sup>25</sup>C. Romero-Salazar, L. D. Valenzuela-Alacio, A. F. Carballo-Sánchez, and F. Pérez-Rodríguez, *J. Low Temp. Phys.* **139**, 273 (2005).
- <sup>26</sup>J. P. Lorrain, M. A. R. LeBlanc, and A. Lachaine, *Can. J. Phys.* **57**, 1458 (1979).
- <sup>27</sup>C. Romero-Salazar and O. A. Hernández-Flores, *J. Appl. Phys.* **103**, 093907 (2008).
- <sup>28</sup>J. R. Clem, M. Weigand, J. H. Durrell, and A. M. Campbell, *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 062002 (2011).
- <sup>29</sup>E. H. Brandt and G. P. Mikitik, *Phys. Rev.* **76**, 064526 (2007).
- <sup>30</sup>G. P. Mikitik, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 17 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 13 (2010)]
- <sup>31</sup>J. R. Clem, *Phys. Rev. B* **83**, 214511 (2011).
- <sup>32</sup>A. Bada-Majós, C. López, and H. S. Ruiz, *Phys. Rev.* **80**, 144509 (2009).
- <sup>33</sup>J. Sekerka, "Flux Cutting in Semi-reversible and Irreversible Type II Superconductors," M.Sc. Thesis (University of Ottawa, 1989).
- <sup>34</sup>C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *J. Non-Cryst. Solids* **329**, 159 (2003).

This article was published in English in the original Russian journal. Reproduced here with stylistic changes by AIP.

## Respuesta magnética de superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a campos rotantes

R. Cortés Maldonado

*Instituto de Física, BUAP, Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue. C.P. 72570, México*

### Resumen

Se presenta el estudio teórico de la respuesta magnética de bloques superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a un campo magnético rotante paralelo a sus superficies. El estudio se realizó aplicando los modelos de estado crítico elíptico [1] y elíptico extendido [2,3] para explicar los resultados experimentales obtenidos en un disco de PbIn el cual es rotado en presencia de un campo magnético aplicado  $H_a$ , paralelo a sus superficies [4]. En los cálculos el perfil de la inducción magnética inicial, es decir cuando el ángulo de rotación  $\theta=0$ , se obtiene después del enfriamiento en campo. De ésta manera, el perfil es homogéneo en  $T>T_c$  y, en  $T<T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial.

### I. Introducción

El modelo de estado crítico elíptico [1] ha reproducido exitosamente diferentes fenómenos como el colapso cuasi-simétrico de la magnetización promedio  $\langle M_z \rangle$  en experimentos con  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  [5,6], así como el comportamiento de las funciones  $\langle M_y \rangle(H_y)$  y  $\langle M_z \rangle(H_y)$  en campos cruzados para cintas de VTi con un estado inicial no magnético [7,8]. A pesar del buen acuerdo entre los resultados obtenidos con el modelo elíptico y los experimentos, Clem en [2,3], ha extendido el modelo elíptico original permitiendo el estudio del comportamiento magnético cuando  $J>J_c$  y  $E>0$ , es decir en la región disipativa.

Los resultados reportados en [9], al aplicar los modelos elíptico y elíptico extendido para explicar los resultados experimentales de un disco de PbBi el cual es rotado en presencia de un campo magnético estático, muestran que el modelo elíptico original reproduce las principales características de las curvas de magnetización experimental y, el modelo elíptico extendido el cual es una generalización del elíptico original, permitió un estudio entre la relación  $E$  y  $J$  en

la región disipativa sin elucidar claramente los efectos asociados a las resistividades de corte y transporte de flujo propuestas en el modelo.

El propósito del presente trabajo es investigar el comportamiento de superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a un campo magnético paralelo rotante mediante los modelos de estado crítico elíptico y elíptico extendido y, comparar los resultados obtenidos con el experimento.

## II. Formalismo teórico

Consideremos un bloque superconductor tipo-II semirreversible de grosor  $d$  con sus superficies ubicadas en  $x=0$  y  $x=d$ . Un campo magnético externo,

$$\mathbf{H}_a = H_a \hat{\alpha}_s = H_a [\hat{y} \sin \alpha_s + \hat{z} \cos \alpha_s], \quad (1)$$

es aplicado paralelo a las superficies del bloque, donde  $H_a$  y  $\alpha_s$  son la magnitud y el ángulo con respecto al eje  $z$  del campo magnético aplicado, respectivamente. La inducción magnética,  $\mathbf{B}(x,t)$ , en el interior del superconductor puede expresarse como

$$\mathbf{B} = B \hat{\alpha}(x,t) = B(x,t) [\hat{y} \sin \alpha(x,t) + \hat{z} \cos \alpha(x,t)], \quad (2)$$

donde  $B$  y  $\alpha$  son la magnitud y el ángulo de inclinación de la inducción magnética, respectivamente. Por conveniencia reescribimos los campos inducidos,  $\mathbf{E}(x,t)$  y  $\mathbf{J}(x,t)$  en términos de sus componentes paralelas y perpendiculares a la inducción magnética local,  $\mathbf{B}(x,t)$ :

$$\mathbf{E}(x,t) = E_{\parallel}(x,t) \hat{\alpha}(x,t) + E_{\perp}(x,t) \hat{\beta}(x,t), \quad (3)$$

$$\mathbf{J}(x,t) = J_{\parallel}(x,t) \hat{\alpha}(x,t) + J_{\perp}(x,t) \hat{\beta}(x,t), \quad (4)$$

donde  $\hat{\beta}(x,t) = \hat{\alpha}(x,t) \times \hat{x}$ . De acuerdo a la geometría plana del problema y, a partir de la ley de Ampère  $\nabla \times \mathbf{B}(x,t) = \mu_0 \mathbf{J}(x,t)$ , obtenemos:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (5)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \mu_0 J_{\parallel}. \quad (6)$$

A partir de la ley de Faraday,  $\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial B}{\partial t}$ , obtenemos:

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (7)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (8)$$

De este modo, para un superconductor semirreversible el cual exhibe un efecto Meissner parcial, las condiciones de frontera para  $B(x)$  son:

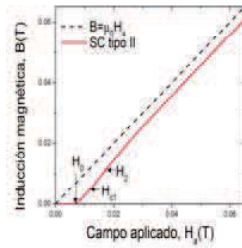
$$B(x = 0) = F(\mu_0 H_a), \quad (9)$$

$$B(x = d) = F(\mu_0 H_a), \quad (10)$$

donde  $F$  es una expresión que permite modelar el comportamiento de la inducción magnética en el interior de un superconductor tipo II y está dada por:

$$F = B = \mu_0 \begin{cases} (H_a - H_0) \left( 1 - \exp \left[ -2 \frac{(H_a - H_{c1})}{(H_2 - H_{c1})} \right] \right); & H_a > H_{c1} \\ 0 & ; H_a < H_{c1} \end{cases} \quad (11)$$

En la Ec. (11)  $H_a$  es el campo aplicado y  $H_{c1}$  representa el primer campo crítico, el cual es seleccionado a partir de la curva de magnetización virgen experimental (Figura 2 panel a)). Los parámetros  $H_0$  y  $H_2$  son seleccionados de modo que se obtenga una aproximación satisfactoria del comportamiento de la inducción magnética en la superficie de un superconductor tipo II (ver Figura 1).



**Figura 1.** Inducción magnética de equilibrio para un superconductor tipo II obtenida a partir de la Ec. (11).

La importancia de la condición de frontera, Ecs. (9) y (10), radica en la inclusión de la zona en donde existe el efecto Meissner parcial (expulsión parcial de flujo).

Además, dicha condición modifica el perfil inicial de la inducción magnética en el interior del superconductor, es decir, el perfil inicial es homogéneo en  $T > T_c$  y en  $T < T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial; a diferencia de aquella condición de frontera empleada en [9] que no considera la zona de expulsión parcial de flujo y, en donde el perfil inicial es homogéneo.

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante para  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  debemos hacer uso de la ecuación material correspondiente a cada modelo de estado crítico, elíptico y elíptico extendido.

### II.A Modelo elíptico

El modelo de estado crítico elíptico [1] describe adecuadamente el comportamiento de superconductores sometidos a campos magnéticos cruzados o rotantes. De acuerdo con este modelo, la ecuación material está dada por la convolución:

$$J_i = (J_c)_{ik} \frac{E_k}{E}, \quad (12)$$

donde

$$(J_c)_{ik} = J_{c,i}(B) \delta_{ij}, \quad i, j = \perp, \parallel. \quad (13)$$

En la Ec. (13),  $\delta_{ij}$  representa la delta de Kronecker. Es importante mencionar que la magnitud de  $J_c$  traza una elipse en el plano  $J_\perp - J_\parallel$ . El modelo de estado crítico elíptico hace uso de dos parámetros,  $J_{c\perp}$  y  $J_{c\parallel}$ , los cuales corresponden al radio de la elipse trazada por  $J_c$ . Para resolver numéricamente el sistema de Ecs. (5)-(8), la expresión (9) se reescribe en la siguiente forma:

$$E_i = E(J)(J_c^{-1})_{ik} J_k, \quad (14)$$

$$E_j = \begin{cases} 0, & J \leq J_c(B, \varphi) \\ \rho(J - J_c(B, \varphi)), & J \geq J_c(B, \varphi) \end{cases}, \quad (15)$$

donde  $(J_c^{-1})_{ik}$  es el inverso de la matriz  $(J_c)_{ik}$  en (9) y la resistividad  $\rho$  es un parámetro auxiliar. La cantidad  $J_c(B, \varphi)$  denota la magnitud de la densidad de corriente crítica, la cual forma un ángulo  $\varphi(x)$  con respecto a la dirección de la densidad de flujo  $\mathbf{B}$ . La expresión para  $J_c(B, \varphi)$  está dada por:

$$J_c(B, \varphi) = \left[ \frac{\cos^2 \varphi}{J_{c\parallel}^2(B)} + \frac{\sin^2 \varphi}{J_{c\perp}^2(B)} \right]^{-1/2}. \quad (16)$$

### II.B Modelo elíptico extendido

El modelo de estado crítico elíptico extendido [2,3] es una extensión del modelo elíptico original, según el cual los fenómenos de corte y transporte de líneas de flujo están inter-relacionados. En Refs. [2,3] el modelo de estado crítico fue extendido introduciendo ecuaciones adicionales con el fin de explicar el comportamiento de los superconductores cuando  $J > J_c$  y  $E > 0$ . Dichas expresiones son:

$$E_{\perp} = \rho_{\perp} J_{\perp}, \quad (17)$$

$$E_{\parallel} = \rho_{\parallel} J_{\parallel}. \quad (18)$$

Donde  $\rho_{\perp}$  y  $\rho_{\parallel}$  son resistividades efectivas no lineales asociadas con el desenclavamiento y corte de líneas de flujo, respectivamente. Un parámetro útil introducido en el modelo elíptico extendido es la razón  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$ , la cual es una cantidad independiente de  $J$  cuando  $J > J_c$  como fue encontrado experimentalmente en Ref. [2]. Un modelo para las resistividades efectivas ha sido propuesto en [3]

$$E_{\perp} = \begin{cases} 0, & 0 \leq J_{\perp} \leq J_{cd} \\ \rho_d (|J_{\perp} - J_{cd}|) \text{sign}|J_{\perp}|, & |J_{\perp}| \geq J_{cd} \end{cases} \quad (19)$$

$$E_{\parallel} = \begin{cases} 0, & 0 \leq J_{\parallel} \leq J_{cc} \\ \rho_c (|J_{\parallel} - J_{cc}|) \text{sign}|J_{\parallel}|, & |J_{\parallel}| \geq J_{cc} \end{cases} \quad (20)$$

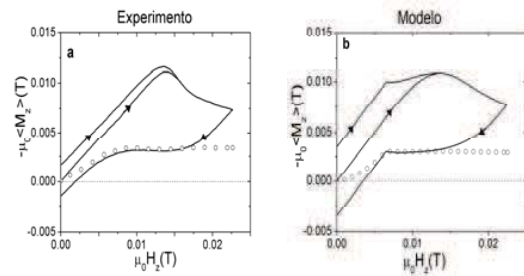
Donde, los subíndices  $d$  y  $c$  indican desenclavamiento y corte, respectivamente. Además,  $J_{cd} = J_c(B, \varphi) |\sin(\varphi)|$  y  $J_{cc} = J_c(B, \varphi) |\cos(\varphi)|$ , donde  $J_c(B, \varphi)$  es definida de acuerdo al modelo de estado crítico elíptico (Ec. 16).

### III. Resultados numéricos y comparación con el experimento

A continuación, explicaremos las curvas de magnetización experimentales de un disco superconductor semirreversible (superconductor con enclavamiento débil

que exhibe un efecto Meissner parcial) de PbIn haciendo uso de los modelos de estado crítico descritos anteriormente. En el experimento el disco se encuentra rotando en presencia de un campo magnético externo  $\mathbf{H}_a$  el cual es paralelo a las superficies planas del disco (en la dirección  $z$ ) y perpendicular al eje de rotación. La evolución del momento magnético en  $z$  inicia en la región diamagnética de las curvas de magnetización, es decir,  $\langle B_z \rangle$  disminuye por debajo de  $B_a = \mu_0 H_a$ . Con la finalidad de comparar las magnitudes de las componentes de magnetización, la línea de referencia para  $M_z$  versus  $\theta$  se ha corrido verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización durante el efecto Meissner parcial, el cual ocurre durante el enfriamiento en campo. Del mismo modo, se ha seleccionado arbitrariamente el signo positivo para  $M_y$ ; dicha selección es posible debido a que no existe un campo aplicado en la dirección  $y$  [4].

La Figura 2 muestra las curvas de magnetización virgen,  $\langle M_z \rangle$  vs  $H_a$ , así como los puntos que representan la expulsión de Meissner parcial (círculos) para un disco de PbIn de grosor  $d=0.8\text{mm}$  [4]. El ciclo de histéresis (por tanto el enclavamiento) corresponde al comportamiento de un superconductor tipo-II semirreversible, es decir, el retorno del ciclo (vea la línea continua en la Fig. 2) se encuentra en el régimen diamagnético excepto para una cierta cantidad de flujo atrapado en la región de campos muy bajos  $H_a \ll H_p$  y, un efecto Meissner parcial es observado (círculos en la Fig. 2) cuando la muestra es enfriada a partir de  $T_c$  a  $T < T_c$  en presencia de diferentes campos magnéticos estáticos aplicados,  $\mathbf{H}_a$ .

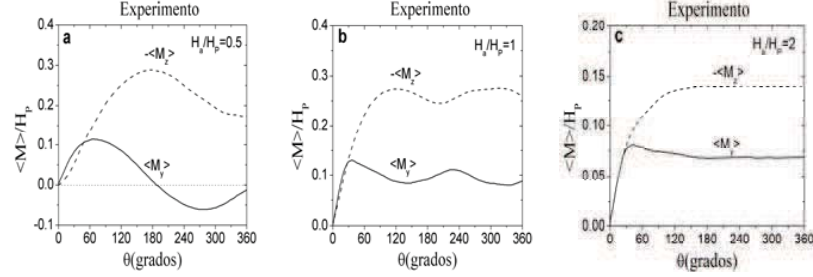


**Figura 2.** Curvas de magnetización virgen para a) disco de PbIn, tomada de Ref. [4]. Curvas de magnetización teórica b) obtenidas con una densidad de corriente crítica  $J_{c\perp}(\mathbf{B})$  como en la Ec. (23). Los círculos muestran los valores de la magnetización después del enfriamiento en campo (efecto Meissner parcial).

La Figura 3 muestra la evolución de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle = \langle B_y \rangle / \mu_0$  y  $-\langle M_z \rangle = H_a - \langle B_z \rangle / \mu_0$ , versus el ángulo de rotación  $\theta$  medidas en [4] para un disco de PbIn rotando en presencia de un campo magnético aplicado

$H_a$ . Las mediciones iniciaron en el estado diamagnético, el cual evoluciona a lo largo del eje  $z$  (a lo largo de  $H_a$ ); el estado diamagnético es obtenido después de enfriar el superconductor en presencia de los campos  $H_a/H_p=0.5$  (panel a),  $1.0$  (panel b) y  $2.0$  (panel c), donde  $H_p$  ( $\mu_0 H_p=15.7 \times 10^3 T$ ) es el campo de penetración. En los cálculos, el perfil de la inducción magnética inicial, en  $\theta=0$ , es obtenido después del enfriamiento en campo. De este modo, el perfil es homogéneo en  $T>T_c$  y, en  $T<T_c$  el perfil es alterado debido a un efecto Meissner parcial.

A partir de las mediciones para el disco de PbIn, Figura 3, se puede observar un contraste en el comportamiento de las componentes de la magnetización. Para el rango completo de  $H_a/H_p$  el valor de  $-<M_z>_{max}$  es mayor que  $<M_y>_{max}$ , a diferencia de lo observado en superconductores tipo-II irreversibles [9]. La Figura 3 panel a) muestra el comportamiento amonótono de las componentes  $y$  y  $z$  de la magnetización como función de  $\theta$  cuando  $H_a=0.5H_p$ ;  $<M_y>(\theta)$  tiene un valor máximo en  $70^\circ$  aproximadamente y  $-<M_z>(\theta)$  tiene su valor máximo en  $180^\circ$ . Para  $H_a/H_p=1$ , Figura 2 panel b), las componentes de la magnetización,  $<M_y>(\theta)$  y  $-<M_z>(\theta)$ , inicialmente crecen a medida que  $\theta$  se incrementa hasta alcanzar un máximo local en  $\theta=40^\circ$  y  $\theta=120^\circ$ , respectivamente. Posteriormente, a medida que el ángulo se incrementa, las componentes de la magnetización decrecen hasta un mínimo local en  $\theta=135^\circ$  para  $<M_y>(\theta)$  y en  $\theta=195^\circ$  para  $-<M_z>(\theta)$ . Finalmente, el último máximo local y mínimo local para  $<M_y>(\theta)$  se encuentran en  $\theta=230^\circ$  y en  $\theta=330^\circ$ ; para la componente  $z$  de la magnetización,  $-<M_z>(\theta)$ , su último máximo local se encuentra en  $\theta=320^\circ$ . Para valores mayores de  $H_a$ ,  $H_a=2H_p$ , Figura 2 panel c), la componente  $-<M_z>(\theta)$  adquiere valores mayores que aquellos para  $<M_y>(\theta)$ . En este caso, ambas componentes son funciones constantes del ángulo para  $\theta>180^\circ$ . Por otro lado, en ángulos de rotación pequeños  $\theta<60^\circ$ , la componente  $<M_y>(\theta)$  crece de forma rápida hasta alcanzar su máximo en  $\theta\approx 40^\circ$ .



**Figura 3.** Componentes de la magnetización promedio medidas en Ref. [4] para un disco de PbIn. La magnetización  $-\langle M_x \rangle(\theta)$  es corrida verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización del efecto Meissner parcial, la cual ocurrió durante el enfriamiento en campo.

### III.A Predicciones teóricas

A continuación aplicamos la teoría de la sección I para explicar el experimento en un disco de PbIn rotando en presencia de un campo magnético estático  $\mathbf{H}_a$  paralelo a sus superficies. Con el fin de reproducir los resultados experimentales se hace uso de la equivalencia experimental con aquella teórica, al mantener el disco fijo bajo la acción de un campo magnético paralelo,  $\mathbf{H}_a$ , rotando un ángulo  $\alpha_s = -\theta$  en el sentido opuesto. Por lo tanto, los valores experimentales de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle$  y  $-\langle M_x \rangle$ , corresponden respectivamente a las siguientes cantidades:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_y(x), \quad (19)$$

$$-\langle M_x \rangle = H_a - \frac{1}{\mu_0 d} \int_0^d dx B'_z(x), \quad (21)$$

donde

$$B'_y(x) = \hat{\alpha}_s \times \hat{x} \cdot \mathbf{B} = B(x) \sin[\alpha(x) - \alpha_s] \quad (22)$$

y

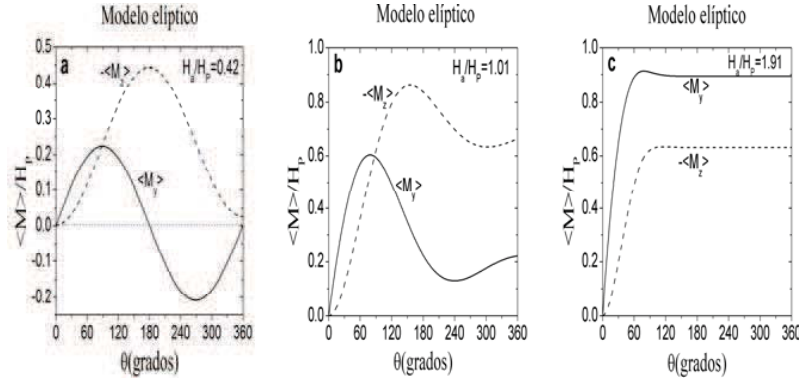
$$B'_z(x) = \hat{\alpha}_s \cdot \mathbf{B} = B(x) \cos[\alpha(x) - \alpha_s]. \quad (23)$$

En los modelos de estado crítico descritos en la sección I es necesario especificar la forma de los parámetros  $J_{c\perp}(B)$  y  $J_{c\parallel}(B)$ , ambos parámetros dependen de la

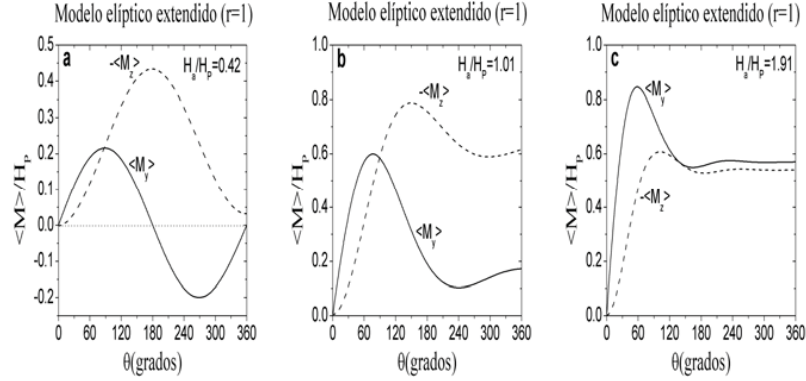
inducción magnética. Experimentalmente es posible determinar  $J_{c\perp}(B)$  sin tomar en cuenta  $J_{c\parallel}(B)$ , esto se hace al variar la magnitud de  $\mathbf{H}_a$  manteniendo fija la orientación del disco. En los cálculos de las componentes de la magnetización,  $\langle M_y \rangle(\theta)$  y  $-\langle M_z \rangle(\theta)$ , hemos empleado una dependencia de la inducción de campo magnético de la forma:

$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0) \left(1 + \frac{\gamma(B - \mu_0 H_{c1})}{\mu_0 H_{c1}}\right)}{\left(1 + \frac{B}{\mu_0 H_P}\right)^{n_{\perp} + 1}}, \quad (24)$$

donde,  $H_{c1}$  es el primer campo crítico,  $J_{c\perp}(0) = 7.29 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup>. El valor de  $n_{\perp} = 2$  y  $\gamma = 0.93$  proporcionan un buen acuerdo entre las curvas de magnetización virgen experimentales (Figura 2 panel a)) y teóricas (Figura 2 panel b)). Los parámetros restantes de los modelos de estado crítico son encontrados mediante el ajuste de las curvas de magnetización teóricas con las experimentales (Figura 3).



**Figura 4.** Curvas de las componentes de la magnetización promedio vs el ángulo de rotación, calculadas con el modelo de estado crítico elíptico. La magnetización  $-\langle M_z \rangle(\theta)$  ha sido corrida verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización del efecto Meissner parcial, el cual ocurrió durante el enfriamiento en campo, obtenida a partir de la Figura 1 panel b).



**Figura 5.** Curvas de las componentes de la magnetización promedio vs el ángulo de rotación, calculadas con el modelo de estado crítico elíptico extendido. La magnetización  $\langle M_z \rangle(\theta)$  ha sido corrida verticalmente hacia el primer cuadrante una cantidad igual a la magnitud de la magnetización del efecto Meissner parcial, el cual ocurrió durante el enfriamiento en campo, obtenida a partir de la Figura 1 panel b).

### III.B Modelo elíptico

Las componentes de magnetización obtenidas en el marco del modelo de estado crítico elíptico son mostradas en la Figura 4. La elección de  $J_{c\perp}(B)$  como en la Ec. (23) y  $J_{c\parallel}(B)$  de la siguiente forma:

$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0) \left(1 + \frac{\gamma(B - \mu_0 H_{c1})}{\mu_0 H_{c1}}\right)}{\left(1 + \frac{B}{\mu_0 H_p}\right)^{n_{\parallel} + 1}}, \quad (25)$$

donde  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$ ,  $n_{\parallel} = 1$  y  $H_{p\parallel} = H_{p\perp} = 15.7 \times 10^{-3}$  proporciona un buen acuerdo entre las curvas experimentales y las teóricas.

### III.C Modelo elíptico extendido

El modelo elíptico original es un caso particular del modelo elíptico extendido. Los resultados mostrados en la Figura 4 pueden ser obtenidos con el modelo de estado crítico elíptico extendido y el parámetro  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ , es decir  $\frac{\rho_c}{\rho_d} = \frac{J_{c\perp}}{J_{c\parallel}}$ . De acuerdo a los parámetros empleados en las Ecs. (23) y (24) la razón de las densidades de corrientes críticas es menor que la unidad ( $r < 1$ ).

Con el fin de estudiar la influencia del parámetro  $r$  en la relación del campo eléctrico  $E$  y la densidad de corriente  $J$  cuando  $J > J_c$ , se han calculado las curvas de magnetización aplicando el modelo de estado crítico elíptico extendido con los mismos parámetros que fueron empleados en la Figura 3, sin embargo el parámetro  $r = \frac{\rho_c}{\rho_d} = 1$ , lo cual indica que  $E$  y  $J$  son paralelos cuando  $J > J_c$ . Los resultados se muestran en la Figura 5.

#### IV. Conclusiones

Se han aplicado de forma satisfactoria los modelos de estado crítico elíptico y elíptico extendido para estudiar el comportamiento magnético de superconductores tipo-II semirreversibles sometidos a un campo magnético paralelo rotante. La comparación de las predicciones teóricas de ambos modelos, elíptico y elíptico extendido, con las mediciones experimentales sobre un disco de PbIn que es rotado en presencia de un campo magnético estático muestra que ambos modelos solo reproducen de forma cualitativa los resultados experimentales, siendo la mejor aproximación cuando  $H_d/H_p = 0.42$ . Sin embargo, el parámetro  $r$  del modelo elíptico extendido, adquiere relevancia cuando  $H_d/H_p > 1$  siendo independiente de las densidades de corriente crítica. Finalmente, el efecto Meissner parcial ha modificado el perfil inicial de la inducción magnética en el interior del superconductor, en  $T > T_c$  el perfil es homogéneo y en  $T < T_c$  el perfil ha sido modificado debido a la expulsión parcial de flujo, del cual la evolución del momento magnético en  $z$  inicia en la región diamagnética de las curvas de magnetización.

#### Agradecimientos

Al cuerpo académico de Materiales Avanzados del IFUAP, especialmente al Dr. Felipe Pérez Rodríguez por sus valiosas conversaciones y aportaciones.

Esta investigación fue realizada con el apoyo de la VIEP-BUAP (proyecto con clave GAVV-EXC12-G) y el CONACyT (proyecto No. 183673).

#### Referencias

- [1] C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, Appl. Phys. Lett. **83**, 5256 (2003).
- [2] J.R. Clem, Phys. Rev. B **83**, 214511 (2011).
- [3] J.R. Clem, M. Weigand, J.H. Durrell, and A.M. Campbell, Supercond. Sci. Technol. **24**, 6 (2011)
- [4] J. Sekerka, M.Sc. thesis "Flux cutting in semi-reversible and irreversible type II superconductors", University of Ottawa, 1989.
- [5] L. M. Fisher, A. V. Kalinov, I. F. Voloshin, I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, V. A Yampol'skii, Solid State Commun. **97**, 833 (1996).

- [6] L. M. Fisher, K. V. Il'enko, A. V. Kalinov, M. A. R. LeBlanc, F. Perez-Rodriguez, S. E. Savel'ev, I. F. Voloshin, V. A. Yampol'skii, **61**, 15382 (2000).
- [7] M. A. R. LeBlanc and J. P. Lorrain, *J. Appl. Phys.* **55**, 4035 (1984).
- [8] J. P. Lorrain, M. A. R. LeBlanc, and A. Lachaine, *Can. J. Phys.* **57**, 1458 (1979).
- [9] R. Cortés-Maldonado, J.E. Espinosa-Rosales, A.F. Carballo-Sánchez, F. Pérez-Rodríguez, *Low Temp. Phys.* **37**, 947 (2011).

# On the extended elliptic critical-state model for hard superconductors

R Cortés-Maldonado, O De la Peña-Seaman, V García-Vázquez and F Pérez-Rodríguez

Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postat J-48, Puebla 72570, Mexico

E-mail: [fperez@ifuap.buap.mx](mailto:fperez@ifuap.buap.mx)

Received 25 June 2013, in final form 2 September 2013

Published 17 October 2013

Online at [stacks.iop.org/SUST/26/125001](http://stacks.iop.org/SUST/26/125001)

## Abstract

The magnetic behavior of an irreversible type-II superconducting slab under the action of in-plane crossed fields is investigated within both the original elliptic critical-state model and the extended one, which was recently proposed by Clem. In particular, we study the suppression of the remanent magnetization of a PbBi specimen by a sweeping external transverse magnetic field. It is found that both elliptic critical-state models reproduce the main features of available experimental magnetization curves. We also show that the average magnetizations, corresponding to diamagnetic and paramagnetic initial states at a static bias field  $H_z$ , are asymmetrically reduced by the action of an oscillating transverse field  $H_y$ . If the amplitude of the oscillations of  $H_y$  is as large as the first penetration field  $H_P$ , the resulting state becomes paramagnetic after various cycles of  $H_y$ . Such a kind of paramagnetism is attributed to the anisotropy, induced by flux-line cutting effects, in the critical current density. In PbBi samples, paramagnetism is expected to be manifest in a wide range of values of the static bias field  $H_z$ .

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

The effects of flux transport and flux-line cutting upon the magnetic response of type-II superconductors have been investigated for various decades (see, for example, [1–6] and references therein). Many of the macroscopic magnetic properties of hard superconductors can be described by employing critical-state models. One of them was proposed by Bean [7] to explain the behavior of hard superconductors subjected to a rotating magnetic field. Within Bean's model, the current density  $\mathbf{J}$  is assumed to be parallel to the local electric field  $\mathbf{E}$  and the corresponding material equation is given by

$$\mathbf{J} = J_c \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad (1)$$

where  $J_c$  (the magnitude of the critical current density) is the unique adjustable parameter.

A qualitatively different picture from the theoretical development by Bean was put forward by LeBlanc and

co-workers [8–10]. This picture allowed us to physically understand important features of the experimental observations with a type-II superconducting disk undergoing slow oscillations in a static applied magnetic field. Their approach introduces two critical-state equations that in the planar geometry can be written as

$$\frac{dB}{dx} = \pm \frac{F_P(B)}{B}, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \pm k(B) \frac{dB}{dx}. \quad (2)$$

These two equations govern profiles of the magnetic flux density ( $B$ ) and the angular orientation ( $\alpha$ ) of the flux lines throughout the sample with two adjustable parameters:  $F_P$  and  $k$ .  $F_P$  characterizes the pinning strength while  $k$  describes the shearing of flux lines. The approach based on equations (2) is known as the double critical-state model.

Clem and Pérez-González [11–18] generalized the double critical-state model for calculating hysteresis in type-II superconductors in parallel applied magnetic fields that vary in magnitude and direction. Their model uses two phenomenological parameters, namely the current-density

components, perpendicular ( $J_{c\perp}$ ) and parallel ( $J_{c\parallel}$ ) to the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ . Such quantities correspondingly determine the threshold for the onset of the flux-flow and flux-cutting in the vortex lattice. Within the generalized double critical-state model (GDCSM), each component of the electrical current density is determined by its own electric field as

$$J_{\perp} = J_{c\perp} \text{sign}(E_{\perp}), \quad J_{\parallel} = J_{c\parallel} \text{sign}(E_{\parallel}). \quad (3)$$

Employing the GDCSM, the main results of experiments [8–10] on the superconducting disk oscillating in a parallel field were naturally explained in terms of flux-line cutting [12, 13]. The model has been used to describe the magnetic behavior of type-II superconducting slabs in parallel fields varying in magnitude and direction [14–16]. In addition, by applying the GDCSM, the magnetic responses of current-carrying cylinders in an axial magnetic field [17], and cylindrical shells subjected to longitudinal and azimuthal applied magnetic fields [16, 18–20] have been investigated. Moreover, the GDCSM has been applied to study flux-cutting effects in granular high- $T_c$  and semi-reversible classical type-II superconductors [21, 22].

Almost two decades ago, Fisher and co-workers [23] discovered an interesting phenomenon called *collapse of the magnetic moment* in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  superconductors. The phenomenon consists in the quasi-symmetrical suppression of the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  by sweeping a transverse field  $H_y$  of magnitude  $H_{y,\text{max}}$ , for paramagnetic and diamagnetic initial states, much smaller than a dc-bias magnetic field  $H_z$ :  $H_{y,\text{max}} \lesssim H_P \ll H_z$ , where  $H_P$  is the first penetration field. Such a suppression of the magnetic moment is attributed to the formation of near-surface *collapse zones* [23, 24], where the magnetic induction ( $B_z \approx B$ ) becomes homogeneous as the transverse field  $H_y$  oscillates. It was rather surprising that the simple isotropic Bean critical-state model, equation (1), described quite well the *collapse* phenomenon, using just a single parameter  $J_c$ . On the other hand, the GDCSM, equation (3), cannot reproduce the experimental magnetization curves under the conditions of the magnetic moment collapse [5, 24]. For this reason, new models have been proposed to explain both the *collapse* of the magnetic moment and the phenomena arising when the anisotropy induced by flux-line cutting is considerably high. Among them, we should mention (i) the extension to the GDCSM model (hereafter the BMM), proposed by Brandt and Mikitik [25]; (ii) the variational approach developed by Badía-Majós, López, and Ruiz (here called BLRM) [26]; and (iii) the original elliptic flux-cutting critical-state model (OECSM) [27–29]. The latter model postulates

$$J_i = (J_c)_{ik} \frac{E_k}{E}, \quad (4)$$

where

$$(J_c)_{ik} = J_{c,i}(B) \delta_{ij}, \quad i, k = \perp, \parallel, \quad (5)$$

and  $\delta_{ik}$  is the Kronecker delta symbol. Within the OECSM, equation (4), the magnitude of the critical current density  $J_c$  draws an ellipse on the  $J_{\perp}$ – $J_{\parallel}$  plane. Here, the principal

axes of the ellipse are respectively oriented perpendicular and parallel to the direction of the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ .

The application of the OECSM has allowed us to demonstrate that the reciprocal influence between flux-flow and flux-cutting plays a crucial role in the formation of the *collapse zones* and, consequently, in the phenomenon of the magnetization *collapse* observed in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  superconductors [27, 28]. In addition, in the geometry of crossed fields, the OECSM is able to reproduce the families of experimental curves [30, 31] of the average magnetization for a VTi ribbon versus the external magnetic field  $H_y$  for the components  $\langle M_y \rangle$  and  $\langle M_z \rangle$  at different dc-bias fields  $H_z$  and for initial nonmagnetic states. The good agreement between theory [27, 29] and experiments [30, 31] was achieved using a large anisotropy parameter  $J_{c\parallel}/J_{c\perp} = 6$ .

Recently Clem [32], has extended the elliptic critical-state model to calculate the magnetic-field and current-density distributions inside a type-II superconducting cylinder at its critical current in a longitudinal applied magnetic field. As in the OECSM [27–29], the magnitude of the critical current density  $J_c$ , used within the extended elliptic critical-state model (EECSM), depends not only upon the magnitude  $B$ , but also on the angle  $\phi$  with respect to the direction of the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ , and traces an ellipse on the  $J_{\parallel}$ – $J_{\perp}$  plane. However, the EECSM connects the components of the current density  $\mathbf{J}$  and the electric field  $\mathbf{E}$  at  $J > J_c(B, \phi)$  with the use of an additional parameter, namely the ratio  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  between the nonlinear effective resistivities for flux-cutting ( $\rho_{\parallel}$ ) and flux-flow ( $\rho_{\perp}$ ). In a series of experiments reported on a thin YBCO film subject to in-plane currents and magnetic fields [33], the predictions of the EECSM and the other four models (GDCSM, BMM, OECSM, and BLRM) have been critically verified. A good agreement of the OECSM and the EECSM was found with the measured dependence of  $J_c$  on the angle  $\phi$  of the in-plane applied field. Besides, the measurements of the angular dependence of the ratio of the transverse to the longitudinal components of the electric field  $E_y/E_z$  at 85 K and 1 T for  $J$  just above  $J_c$  agree with the predictions of the EECSM with  $r = 0.09$  and those of the BLRM. However, the EECSM was the only model that was able to reproduce experimental results for currents  $J$  well above  $J_c(\phi)$ .

The results obtained in the experimental work [33] have motivated us to investigate how the parameter  $r$ , used within the EECSM, influences the magnetic response of hard superconductors subjected to rotating and crossed fields. In a previous work [34], the magnetic response of an irreversible type-II superconductor slab subjected to an in-plane rotating magnetic field was investigated with Bean's model and the OECSM, EECSM, and GDCSM. The comparison of the predictions of these critical-state models with experimental measurements of magnetization for a rotating PbBi disk in a fixed magnetic field [35] has shown that the OECSM can reproduce the main characteristics of the magnetization curves. The Bean's model and GDCSM only provide a qualitative description of the experiment. The EECSM, being more general than the OECSM, allowed us to study the effect of the relation between  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{J}$  in the dissipative region ( $J > J_c(B, \phi)$ ) upon magnetization curves [34].

In the present paper, we will apply the EECSM to analyze the magnetic response of hard superconductors under the action of crossed magnetic fields. The formulation of the problem and its solution within the EECSM are described in section 2. In section 3, both the EECSM and the OECSM will be employed for describing experiments [35, 36] on a PbBi disk, whose remanent magnetization is suppressed by the action of a sweeping magnetic field, perpendicular to it. We shall also analyze, in section 4, the evolution of magnetization curves of hard superconductors in the presence of a dc-bias field and an oscillating transverse field for both diamagnetic and paramagnetic initial states. Varying the ratio  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$ , we shall investigate how the change of the mutual orientation between the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}$  at  $J > J_c(B, \phi)$  affects the profiles of the magnetic induction inside the sample for different initial magnetic states.

## 2. Theoretical formalism

Let us consider an irreversible type-II superconducting slab with its flat surfaces located at  $x = 0$  and  $d$ . The external magnetic field of magnitude  $H_a$ ,

$$\mathbf{H}_a = \hat{y}H_y + \hat{z}H_z, \quad (6)$$

is applied parallel to the slab surfaces. The magnetic induction  $\mathbf{B}(x, t)$  inside the superconducting slab can be expressed as

$$\mathbf{B}(x, t) = B(x, t)\hat{\alpha}(x, t). \quad (7)$$

Here,  $B$  is the magnitude of the magnetic induction and

$$\hat{\alpha} = \hat{y} \sin(\alpha(x, t)) + \hat{z} \cos(\alpha(x, t)), \quad (8)$$

where  $\alpha(x, t)$  is the tilt angle of  $\mathbf{B}(x, t)$  with respect to the  $z$ -axis. Introducing the vector

$$\hat{\beta}(x, t) = \hat{\alpha}(x, t) \times \hat{x}, \quad (9)$$

we can express the electric field  $\mathbf{E}(x, t)$  and the current-density vector  $\mathbf{J}(x, t)$  in terms of the parallel and perpendicular components of the local magnetic induction  $\mathbf{B}(x, t)$ :

$$\mathbf{E}(x, t) = E_{\parallel}(x, t)\hat{\alpha}(x, t) + E_{\perp}(x, t)\hat{\beta}(x, t), \quad (10)$$

$$\mathbf{J}(x, t) = J_{\parallel}(x, t)\hat{\alpha}(x, t) + J_{\perp}(x, t)\hat{\beta}(x, t). \quad (11)$$

According to the planar geometry of the problem and using Ampère's law,  $\nabla \times \mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{J}(x, t)$ , we obtain

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 J_{\perp}, \quad (12)$$

$$B \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \mu_0 J_{\parallel}. \quad (13)$$

Since we consider quasistationary states, in our theoretical study we disregard temporal variations of the electric displacement. Moreover, from Faraday's law  $\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , we get

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (14)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (15)$$

The solution of the system of differential equations for  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , and  $\mathbf{J}$  requires an appropriate constitutive equation relating these fields. As was mentioned above, we will apply the extended elliptic flux-line cutting critical-state model, recently proposed by Clem [32, 33]. The new model introduces the following equations:

$$E_{\perp} = \rho_{\perp} J_{\perp}, \quad (16)$$

$$E_{\parallel} = \rho_{\parallel} J_{\parallel} \quad (17)$$

where  $\rho_{\perp}$  and  $\rho_{\parallel}$  are nonlinear effective resistivities associated with the flux depinning and flux-cutting, respectively. One should not expect  $\rho_{\perp}$  to be equal to  $\rho_{\parallel}$  since the physics of flux-cutting is different from that of flux depinning. A useful parameter of the model is the ratio  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$ , which turns out to be independent of  $J$  just above  $J_c$  according to experimental data [33]. The parameter  $r$  represents the efficiency of flux-cutting relative to flux depinning. In [32], a model for the resistivities  $\rho_{\perp}$  and  $\rho_{\parallel}$  was proposed:

$$E_{\perp} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_{\perp}| \leq J_{cd} \\ \rho_d (|J_{\perp}| - J_{cd}) \text{sign}(J_{\perp}), & |J_{\perp}| \geq J_{cd}, \end{cases} \quad (18)$$

$$E_{\parallel} = \begin{cases} 0, & 0 \leq |J_{\parallel}| \leq J_{cc} \\ \rho_c (|J_{\parallel}| - J_{cc}) \text{sign}(J_{\parallel}), & |J_{\parallel}| \geq J_{cc} \end{cases} \quad (19)$$

such that  $E = \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2}$  and  $J = \sqrt{J_{\perp}^2 + J_{\parallel}^2}$  obey

$$E = \begin{cases} 0, & J \leq J_c(B, \phi) \\ \rho [J - J_c(B, \phi)], & J > J_c(B, \phi) \end{cases} \quad (20)$$

where  $\rho = \sqrt{\rho_c^2 \cos^2 \phi + \rho_d^2 \sin^2 \phi}$ . Here,  $\rho_d$  and  $\rho_c$  refer to flux-flow and flux-cutting resistivities, respectively. Moreover,  $J_{cd} = J_c(B, \phi) |\sin(\phi)|$  and  $J_{cc} = J_c(B, \phi) |\cos(\phi)|$  denote the threshold for depinning and flux-line cutting, correspondingly, and the quantity  $J_c(B, \phi)$  stands for the magnitude of the critical current density, which depends on the angle  $\phi(x)$  that  $\mathbf{J}_c$  makes with respect to the direction of the flux density  $\mathbf{B}$ . The expression for  $J_c(B, \phi)$  is given by

$$J_c(B, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{c\parallel}^2(B)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{c\perp}^2(B)} \right]^{-1/2}, \quad (21)$$

where  $J_{c\perp}$  and  $J_{c\parallel}$  are two phenomenological parameters, namely the semi-axis lengths of the ellipse drawn by  $J_c$  in the plane  $J_{\perp}$ - $J_{\parallel}$ . Here, the ratio  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  at  $J > J_c$  is equal to  $\rho_c/\rho_d$ . The model of equations (18)–(21) describes the electric field components in the case when there is a clear-cut linear onset of an electric field as  $J$  crosses the ellipse  $J_c(B, \phi)$  [32].

The original elliptic critical-state model can be recovered from the extended one if  $|J - J_c|/J_c \ll 1$  and the resistivity  $\rho_d$  [ $\rho_c$ ] in equation (18) [(19)] is replaced by  $\rho J_c/J_{c\perp}$  [ $\rho J_c/J_{c\parallel}$ ]. Therefore, in the case of the original elliptic model, the parameter  $r = \rho_{\parallel}/\rho_{\perp}$  at  $J > J_c$  is equal to the ratio  $J_{c\perp}/J_{c\parallel}$ .

The boundary conditions are now imposed. For simplicity, we shall assume that there are no barriers against the flux entry or exit at the sample surfaces and will impose the

relation  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  at the surfaces of the superconducting slab. Maxwell equations (12)–(15) with the nonlinear constitutive relation, given by equations (18)–(21), are numerically solved for slow variations of the surface boundary conditions, i.e. small values of the electric field magnitude  $E$ :

$$E \ll \rho J_c(B, \phi). \quad (22)$$

According to equation (20), the fulfillment of the inequality (22) guarantees that the current density  $J$ , induced by the variation of an external applied magnetic field, is close to  $J_c$ :  $|J - J_c|/J_c \ll 1$ . Therefore, in calculating the magnetic induction profiles, the condition (equation (22)) of smallness for the electric field magnitude,  $E(x, t)$ , should be verified with using successive numerical profiles of  $\mathbf{B}(x, t)$ . In the case of the OECSM, the resulting profiles  $B(x, t)$  and  $\alpha(x, t)$  are practically relaxed and independent of the auxiliary parameter  $\rho$ . However, the profiles for the magnetic induction, calculated within the EECSM, which uses two auxiliary parameters (namely,  $\rho$  and  $r$  at  $J > J_c(B, \phi)$ ), turn out to be strongly dependent on the choice of the second one ( $r$ ).

### 3. Remanent-magnetization suppression by a transverse field

In [35, 36], a PbBi irreversible superconducting disk was magnetized by applying a single pulse of a sweeping magnetic field  $\mathbf{H}_i$  along the  $y$  direction. The magnitude of the sweeping magnetic field,  $H_i$ , was larger than the second full penetration field ( $\mu_0 H_{2p} = 0.14$  T [35]). This procedure is able to magnetize the superconductor with a saturation residual moment that can hold itself under zero external magnetic field due to the strong pinning sites [35]. Afterwards, the disk is rotated by a  $90^\circ$  angle with respect to  $\mathbf{H}_i$ , in order to apply an external magnetic field in a direction transverse to the residual magnetic moment. Now, the residual magnetic moment is lying in the  $z$  direction. Panel (a) in figure 1 shows the experimental data for the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  versus the transverse magnetic field  $H_y$  that were measured in [35] (figure 53 therein). The field  $H_y$  is initially increased from 0 to a maximum value  $H_{y,\max} > 0$  (which is represented with a dark circle in the figure), next it is continuously reduced to the opposite value  $-H_{y,\max} < 0$  and then it is increased again until it reaches the zero value. This procedure defines sub-cycles with amplitudes determined by the value of  $H_{y,\max}$ . Notice that for each sub-cycle the magnetization  $\langle M_z \rangle$  reduces as  $H_y$  continuously varies, making the remanent magnetization be suppressed for each particular value of  $H_{y,\max}$ . The suppression of the remanent magnetization is stronger for larger amplitudes  $H_{y,\max}$  of the sweeping transverse magnetic field.

We have applied both the original elliptic critical-state model and the extended one (section 2) to reproduce the phenomenon of the remanent-magnetization suppression observed in the experiment on a PbBi disk of thickness  $d = 0.8$  mm [35] (figure 1(a)). Panel (b) in figure 1 exhibits the curves of the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  ( $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$ ) versus the external magnetic field  $H_y$ , which were calculated by employing the original elliptic model. In the calculation,

we used the perpendicular component of the critical current density,  $J_{c\perp}(B)$ , which was determined in our previous work [34] from the standard magnetization curve [35] for the same PbBi sample:

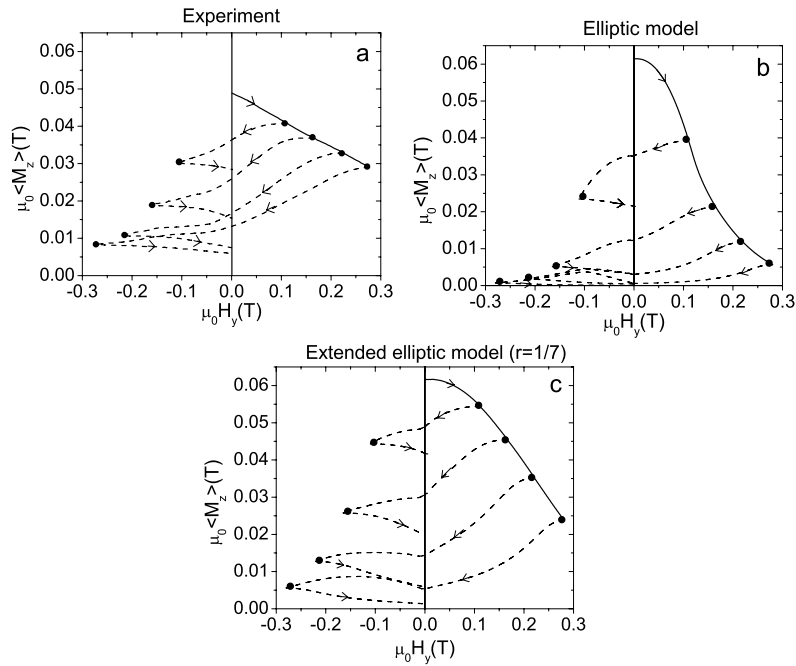
$$J_{c\perp}(B) = \frac{J_{c\perp}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\perp}}, \quad (23)$$

where  $J_{c\perp}(0) = 47.11 \times 10^7$  A m<sup>-2</sup>,  $n_\perp = 2$ , and  $H_P$  is the first penetration field ( $\mu_0 H_P = 0.1015$  T [35]). Using the critical current density  $J_{c\perp}(B)$  of equation (23), the calculated absolute value of the remanent magnetization  $\mu_0 |\langle M_z \rangle|$  is equal to 0.0616 T, i.e. larger than the experimental value, 0.0477 T [35]. The difference between our result for the remanent magnetization and the experimental value is attributed to the fact that the first critical magnetic field  $H_{c1}$  within our model has been assumed to be equal to zero, neglecting the Meissner expulsion of magnetic flux from the sample (mainly from the surface region as a consequence of the strong pinning). The other parameter used here, namely  $J_{c\parallel}(B)$ , coincides with that obtained in [34]. In such a work we have adjusted the predictions of the original elliptic critical-state model with the magnetization measurements on the PbBi superconducting disk that is rotated in the presence of an external magnetic field, parallel to the disk plane and perpendicular to the axis of rotation. Therefore, in the present calculations we use

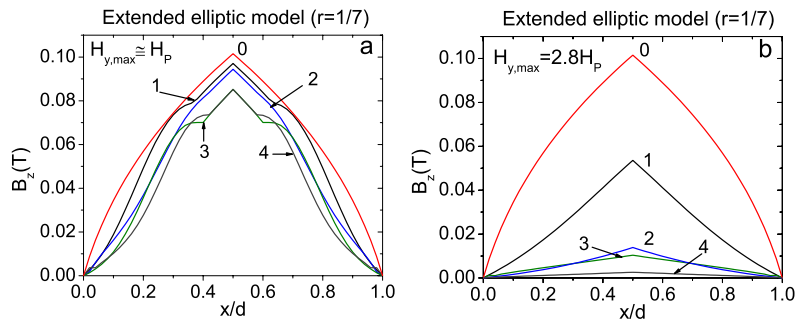
$$J_{c\parallel}(B) = \frac{J_{c\parallel}(0)}{(1 + B/\mu_0 H_P)^{n_\parallel}}, \quad (24)$$

with  $J_{c\parallel}(0) = 1.5J_{c\perp}(0)$  and  $n_\parallel = 1$ . As we can see from figure 1(b), the original elliptic critical-state model is able to reproduce the suppression of the remanent magnetization with varying the transverse magnetic field  $H_y$ ; however, the predicted suppression is slightly faster than that observed in the experiment (see figure 1(a)). The magnetization curves in figure 1(c) were obtained within the extended elliptic critical-state model by using the same components of the critical current density ( $J_{c\perp}(B)$  of equation (23) and  $J_{c\parallel}(B)$  of equation (24)), and fitting the free additional parameter  $r$  at  $r = 1/7$ . The EECSM also reproduces the main features of the experimental curves. We should notice that the theoretical magnetization curves (panels (b) and (c)) show a kink when the oscillating applied field crosses zero. Such a difference between theory and experiment can be attributed to the fact that  $H_{c1}$  is here assumed to be equal to zero, since the value of the first critical magnetic field for the PbBi superconductor is of the order of 0.0345 T [35]. A more sophisticated model, including the Meissner expulsion which occurs near sample surfaces because of the strong pinning, may lead to a better agreement with the experiment at  $|H_y| \lesssim H_{c1}$ .

In figure 2, we present the evolution of the profiles for  $B_z(x)$  as the transverse magnetic field  $H_y$  is varied:  $H_y = 0$  (curve 0 describing the trapped magnetic flux along the  $z$ -axis),  $H_y = H_{y,\max}$  (curve 1),  $H_y = 0$  (curve 2),  $H_y = -H_{y,\max}$  (curve 3), and finally  $H_y = 0$  (curve 4). The profiles were calculated within the extended elliptic critical-state model with the parameters used for figure 1(c) and show the decrease of the near-surface slopes of  $B_z(x)$  with varying  $H_y$ .



**Figure 1.** (a) Experimental curves of the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  versus the transverse magnetic field  $H_y$  presented in [35]. The dark circles represent the fields at which a particular value of  $H_{y,\max}$  is reached. (b), (c) Theoretical magnetization curves  $\langle M_z \rangle(H_y)$  obtained with the original elliptic critical-state model [27] (b) and the extended elliptic one [32] (c).



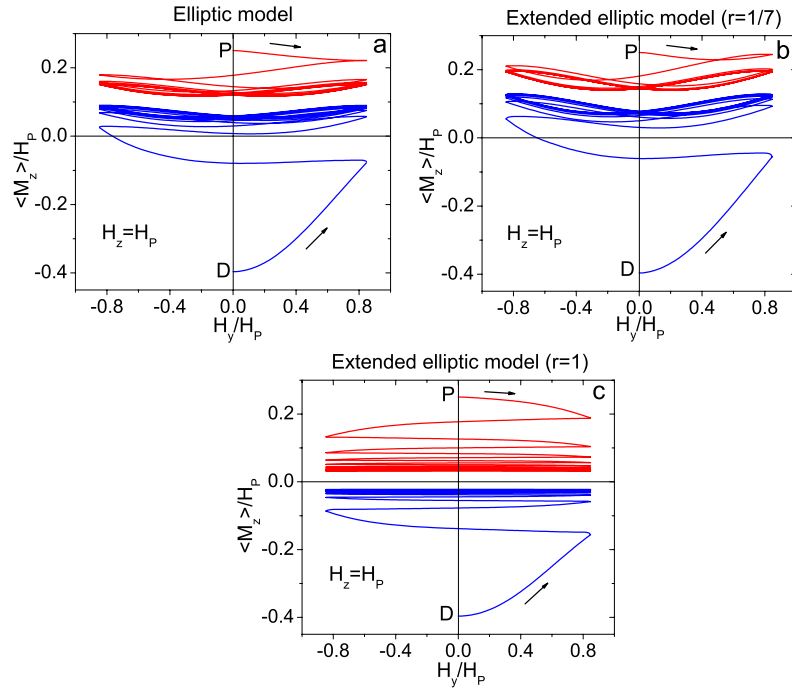
**Figure 2.** Evolution of the profiles for  $B_z$  as the transverse magnetic field  $H_y$  is varied. The profiles were calculated with the extended elliptic critical-state model at  $H_y = 0$  (curve 0 describing the trapped magnetic flux along the  $z$ -axis),  $H_y = H_{y,\max}$  (curve 1),  $H_y = 0$  (curve 2),  $H_y = -H_{y,\max}$  (curve 3), and finally  $H_y = 0$  (curve 4). The values of  $H_{y,\max}$  are indicated in each panel.

If the amplitude  $H_{y,\max}$  of the swept field is smaller than or equal to the first penetration field  $H_P$  (see figure 2(a), where  $H_{y,\max} \approx H_P$ ), a moderate decrease of the near-surface slopes of the magnetic induction component  $B_z$  is observed after one cycle of  $H_y$  oscillation. We have theoretically verified that the near-surface slopes will decrease even more if  $H_y$  continues oscillating. Another feature of the evolution of  $B_z(x)$  is seen in the middle of the slab. There,  $B_z$  is slightly reduced, but it keeps its initial (critical) slopes on both sides of the central plane  $x = 0.5d$ . When the amplitude of the  $H_y$  oscillation is larger than the first penetration field (as shown in figure 2(b), where  $H_{y,\max} = 2.8H_P$ ), it can be observed that the absolute value of the derivative  $dB_z/dx$  as well as  $B_z$  itself decrease throughout the slab and, consequently, the average magnetization  $\langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle / \mu_0$  is substantially diminished after a single cycle of  $H_y$  oscillation.

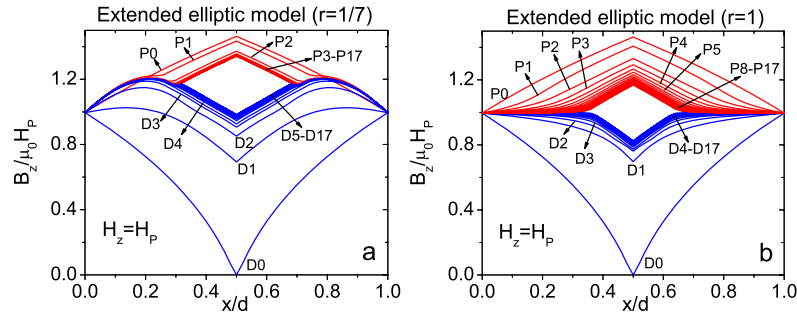
## 4. Paramagnetic and diamagnetic initial states

### 4.1. Static bias magnetic field of moderate strength

Figure 3 shows the behavior of the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  for the PbBi superconductor subjected to crossed magnetic fields. One of them ( $H_z$ ) is kept fixed, whereas the other one,  $H_y$ , oscillates between  $H_{y,\max}$  and  $-H_{y,\max}$ . We consider two initial states: the diamagnetic (point D in the blue curve of figure 3) and paramagnetic (point P in the red curve of figure 3) states at a static bias field  $H_z = H_P$ . According to our results (figures 3(a) and (b)), which were obtained within the original and extended elliptic critical-state models with the same parameters as in panels (b) and (c) of figure 1, the application of the oscillating magnetic field ( $H_y$ ) makes the average magnetization for the diamagnetic initial state (blue



**Figure 3.** Theoretical curves for the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  of the PbBi slab versus the transverse magnetic field  $H_y$ , which were obtained with the original and extended elliptic models. Red (blue) curves were calculated for an initial paramagnetic (diamagnetic) state at  $H_z = H_p$ .



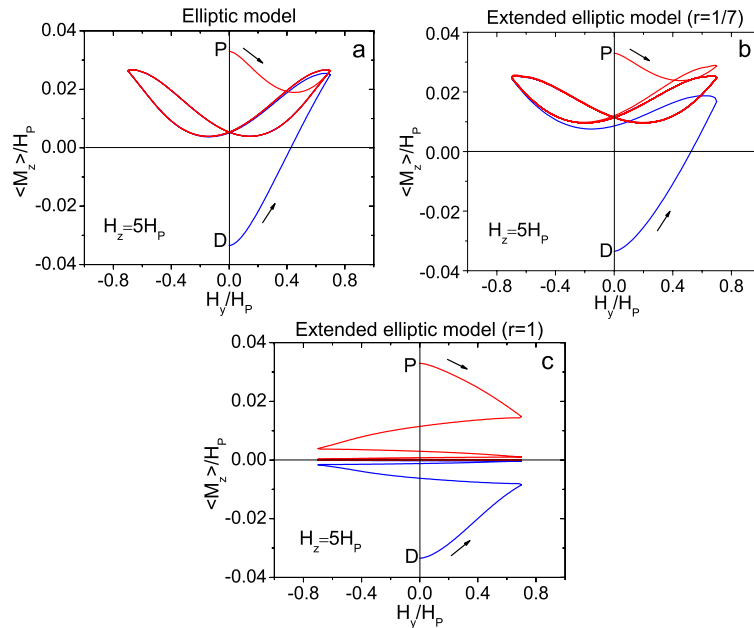
**Figure 4.** Evolution of the profiles for  $B_z$  as the transverse magnetic field  $H_y$  oscillates, whereas the bias field  $H_z$  is kept constant and equal to  $H_p$ . Curves labeled with P0 (D0) correspond to the paramagnetic (diamagnetic) initial state, and the curves with an odd (even) number were calculated at  $H_y = H_{y,\max} = 0.85H_p$  ( $H_y = -H_{y,\max}$ ).

curve) change its sign after various cycles of  $H_y$ . On the other hand, the average magnetization for the paramagnetic initial state (red curve) is slightly reduced. This kind of *paramagnetism* has also been observed in high-temperature superconductors [37, 38] in the presence of crossed magnetic fields with  $H_z \approx H_p$  and  $H_{y,\max} \approx H_p$ .

As was mentioned above, the predictions of the original elliptic model can be obtained within the extended model if one uses  $r = J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$ . This ratio turns out to be smaller than one,  $r < 1$ , as well as dependent on the magnetic induction,  $r = r(B)$ , with the components of critical current densities ( $J_{c\perp}(B)$  of equation (23) and  $J_{c\parallel}(B)$  of equation (24)) used for the calculations of the magnetization curves shown in panel (a) of figure 3. The *paramagnetism* is also clearly observed with a ratio  $r = 1/7 < 1$  (see figure 3(b)). However,

if the calculations are carried out with  $r = 1$ , i.e. assuming that the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}$  are parallel at  $J > J_c$ , then the phenomenon of *paramagnetism* is considerably weakened since the magnetization  $\langle M_z \rangle$  is quasi-symmetrically suppressed as is seen in figure 3(c). It is interesting that the latter behavior is also predicted by the Bean (circular or isotropic) critical-state model [27], for which  $r = J_{c\perp}/J_{c\parallel} \equiv 1$ .

Figure 4 shows the evolution of the  $B_z(x)$  profiles calculated within the extended elliptic model with  $r = 1/7$  (panel (a)) and  $r = 1$  (panel (b)) at  $H_z = H_p$  and extremal values of the oscillating transverse magnetic field  $H_y$ :  $H_y = H_{y,\max} = 0.85H_p$  (profiles D1, D3, ..., D17, and P1, P3, ..., P17) and  $H_y = -H_{y,\max}$  (profiles D2, D4, ..., D16, and P2, P4, ..., P16). Here, the letters D (P) indicate that the profiles



**Figure 5.** Theoretical curves for the average magnetization  $\langle M_z \rangle$  of the PbBi slab versus the transverse magnetic field  $H_y$ , which were obtained with using the original and extended elliptic models. Red (blue) curves were calculated for a paramagnetic (diamagnetic) initial state at  $H_z = 5H_p$ .

correspond to a diamagnetic (paramagnetic) initial state, whose spatial distribution  $B_z(x)$  is marked with the label D0 (P0) in figure 4. For  $r = 1/7 < 1$  (panel (a)), the change (conservation) of the sign of the derivative  $dB_z(x)/dx$  near sample boundaries for the diamagnetic (paramagnetic) initial state is evident. After various cycles of oscillation of the transverse field  $H_y$ , the average magnetization  $\mu_0 \langle M_z \rangle = \langle B_z \rangle - \mu_0 H_z$  turns out to be positive for both initial magnetic states. The behavior of these  $B_z$  profiles agrees with the predictions of the original elliptic critical-state model (figure 3(a)) and the explanation of the *paramagnetism* given in [27]. In contrast, for  $r = 1$  (figure 4(b)), one can see the appearance of near-surface regions, where  $B_z(x) \approx \mu_0 H_z$ , leading to the vanishing of the magnetization as  $H_y$  is swept (see figure 3(c)). To our knowledge, the latter magnetic behavior (i.e. symmetric vanishing of the magnetization) has not been observed in hard superconductors subjected to crossed fields when their magnitudes are comparable with the first penetration field ( $H_y \approx H_z \approx H_p$ ).

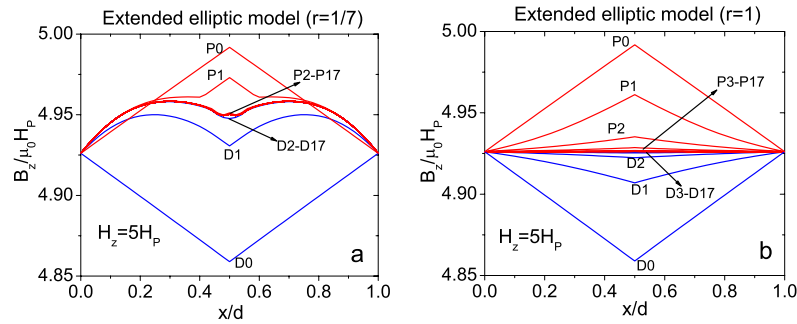
#### 4.2. Strong dc-bias magnetic field

Now, we discuss the case when the static bias magnetic field  $H_z$  is relatively large ( $H_z \gg H_p \gtrsim H_{y,\max}$ ). Figure 5 exhibits the curves of the average magnetization for the PbBi specimen versus the transverse sweeping field  $H_y$ , which were calculated within both elliptic critical-state models. The calculations were carried out at  $H_z = 5H_p$  for the paramagnetic initial state (red curve), as well as for the diamagnetic one (blue curve). We did not choose a larger value of the applied dc-bias field  $H_z$  because it should be smaller than the second critical field  $H_{c2} \approx 0.56$  T [35].

Interestingly, the original model predicts closed hysteresis loops in the paramagnetic region (see figure 5(a)). These results show how the magnetic induction dependence of the critical current densities influences the magnetization curves within the original elliptic model. Indeed, in previous works [27, 28] where such a model was applied to explain the *collapse* of the magnetization, the ratio  $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$  was chosen to be independent of  $B$ . In contrast, the ratio  $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B)$ , used in the calculations of figure 5(a), diminishes as  $B$  is increased ( $J_{c\perp}(B)/J_{c\parallel}(B) = 1/9$  at  $B = 5\mu_0 H_p$ ). As a result, the anisotropy of the critical current density is considerably enhanced with  $B$  and the original elliptic critical-state model predicts an asymmetric evolution of the magnetization curves for the paramagnetic and diamagnetic initial states at  $H_z = 5H_p$ . It should be noted that the hysteresis loops in the PbBi magnetization curves (figure 5(a)) are analogous to those observed in VTi [29, 31], which are also characterized by a relatively large anisotropy parameter  $J_{c\parallel}(B)/J_{c\perp}(B) = 6$  [29].

Notice (figure 5(b)) that the magnetization curves calculated within the EECSM with  $r = 1/7$  look like those obtained with the OECSM (figure 5(a)). The only way to observe the *collapse* of the magnetic moment with the critical current densities,  $J_{c\parallel}(B)$  and  $J_{c\perp}(B)$ , for the PbBi specimen would be the use of a ratio  $r = 1$  (see figure 5(c)). However, such a value of the ratio  $r$  seems to be unrealistic for the PbBi sample because the available experimental magnetization curves (figures 17–19, 47–49, and 53–55 in [35]) are well described with  $r = 1/7$ .

The profiles  $B_z(x)$  in figure 6, which were calculated with  $r = 1/7$  (figure 6(a)) and  $r = 1$  (figure 6(b)), correspond to the magnetization curves displayed in figures 5(b) and (c)



**Figure 6.** Evolution of the profiles for  $B_z$  as the transverse magnetic field  $H_y$  oscillates in the presence of a dc-bias field  $H_z = 5H_p$ . Curves labeled with P0 (D0) correspond to the paramagnetic (diamagnetic) initial state, and the curves with an odd (even) number were calculated at  $H_y = H_{y,\max} = 0.7H_p$  ( $H_y = -H_{y,\max}$ ).

( $H_z = 5H_p$ ). The reduction of the critical current densities at a static magnetic field  $H_z > H_p$  allows the magnetic flux to penetrate the whole sample with  $H_{y,\max} < H_p$ . Therefore, both  $B_z(x)$  and its derivative  $dB/dx$  are altered throughout the superconductor slab with  $H_{y,\max} = 0.7H_p$  (see figure 6). As was commented above, the results for  $r = 1/7$  describe the expected situation for the PbBi specimen.

## 5. Conclusion

We have investigated the behavior of irreversible type-II superconductors under the action of crossed magnetic fields within both the original and extended elliptic critical-state models. First, we have compared their predictions with experiments on a PbBi specimen [35]. There, a remanent magnetization  $M_z(x)$  was generated by a single pulse of a magnetic field  $H_z$  of magnitude larger than the second penetration field  $H_{2p}$  and, afterwards, a sweeping transverse magnetic field  $H_y$  was applied to the sample. In order to reproduce the experiments, we used the magnetic induction dependences of the critical current densities  $J_{c\perp}(B)$  and  $J_{c\parallel}(B)$  that were determined in a previous work [34] for the same PbBi specimen. It was found that the calculations within both the OECSM and the EECSM with  $r = 1/7$  reproduce the principal characteristics of the experimental magnetization curves.

We have also investigated the behavior of the PbBi specimen in the presence of a static bias field  $H_z$  and an oscillating transverse magnetic field  $H_y$ . At a moderate dc-bias field  $H_z \approx H_p \gtrsim H_{y,\max}$ , the OECSM and EECSM predict a positive average magnetization  $\langle M_z \rangle$  after several cycles of  $H_y$  for both paramagnetic and diamagnetic initial states. This kind of paramagnetism, which has also been observed in other hard superconductors [37, 38], is due to the anisotropy, induced by flux-line cutting effects, in the critical current density ( $J_{c\perp}(B) < J_{c\parallel}(B)$ ).

Interestingly, the quasi-symmetric suppression of the magnetization (magnetic moment collapse), which is clearly manifest in YBCO samples [23, 24] at large dc-bias fields  $H_z \gg H_p \gtrsim H_{y,\max}$ , could not be observed in the PbBi magnetization curves calculated either within the OECSM or the EECSM with  $r = 1/7$ . The PbBi specimen exhibits

a paramagnetic state after various cycles of the transverse field  $H_y$  independently of the initial (paramagnetic or diamagnetic) initial state. Such a behavior of the PbBi superconductor at large dc-bias fields  $H_z$  is attributed to the increase of its anisotropy parameter  $J_{c\parallel}(B)/J_{c\perp}(B)$  with  $B$ . Since the EECSM allows us to change the mutual orientation of the electric field  $E$  and the current density  $J$  in the dissipative region ( $J > J_c(B, \phi)$ ), it was possible to establish that the magnetization suppression in the PbBi sample could be symmetric only if the ratio  $r$  is equal to one ( $r = 1$ ), i.e. if  $E$  and  $J$  are parallel at  $J > J_c(B, \phi)$ . However, the latter situation is unrealistic for PbBi since all the available experiments [35, 36] were reproduced with  $r = 1/7$ .

## Acknowledgments

This work was partially supported by SEP-CONACYT (Mexico) under grant CB-2012-01-183673, VIEP-BUAP (Mexico) under grant GAVV-EXC 13-I, PIFI 2011, and PIFCA 2012.

## References

- [1] Walmsley D G 1972 *J. Phys. F: Met. Phys.* **2** 510
- [2] Campbell A M and Evetts J E 1972 *Adv. Phys.* **21** 199
- [3] Brandt E H 1995 *Rep. Prog. Phys.* **58** 1465
- [4] Campbell A M and Evetts J E 2001 *Adv. Phys.* **50** 1249
- [5] Voloshin I F, Fisher L M and Yampol'skii V A 2010 *Low Temp. Phys.* **36** 39
- [6] Mikitik G P 2010 *Low Temp. Phys.* **36** 13
- [7] Bean C P 1970 *J. Appl. Phys.* **41** 2482
- [8] Boyer R and LeBlanc M A R 1977 *Solid State Commun.* **24** 261
- [9] Boyer R, Fillion G and LeBlanc M A R 1980 *J. Appl. Phys.* **51** 1692
- [10] Cave J R and LeBlanc M A R 1982 *J. Appl. Phys.* **53** 1631
- [11] Clem J R 1982 *Phys. Rev. B* **26** 2463
- [12] Clem J R and Pérez-González A 1984 *Phys. Rev. B* **30** 5041
- [13] Pérez-González A and Clem J R 1985 *Phys. Rev. B* **31** 7048
- [14] Pérez-González A and Clem J R 1985 *J. Appl. Phys.* **58** 4326
- [15] Pérez-González A and Clem J R 1985 *Phys. Rev. B* **32** 2909
- [16] Clem J R and Pérez-González A 1986 *Phys. Rev. B* **33** 1601
- [17] Pérez-González A and Clem J R 1990 *Phys. Rev. B* **42** 4100
- [18] Pérez-González A and Clem J R 1991 *Phys. Rev. B* **43** 7792

- [19] LeBlanc M A R, LeBlanc D, Golebiowski A and Fillion G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 3309
- [20] LeBlanc M A R, Celebi S, Wang S X and Plecháčěk V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 3367
- [21] Pérez-Rodríguez F, Pérez-González A, Clem J R, Gandolfini G and LeBlanc M A R 1997 *Phys. Rev. B* **56** 3473
- [22] Pérez-Rodríguez F, LeBlanc M A R and Gandolfini G 2001 *Supercond. Sci. Technol.* **14** 386
- [23] Fisher L M, Kalinov A V, Voloshin I F, Baltaga I V, Il'enko K V and Yampol'skii V A 1996 *Solid State Commun.* **97** 833
- [24] Fisher L M, Il'enko K V, Kalinov A V, LeBlanc M A R, Pérez-Rodríguez F, Savel'ev S E, Voloshin I F and Yampol'skii V A 2000 *Phys. Rev. B* **61** 15382
- [25] Brandt E H and Mikitik G P 2007 *Phys. Rev. B* **76** 064526
- [26] Badía-Majós A, López C and Ruiz H S 2009 *Phys. Rev. B* **80** 144509
- [27] Romero-Salazar C and Pérez-Rodríguez F 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 5256
- [28] Romero-Salazar C and Pérez-Rodríguez F 2004 *Physica C* **404** 317
- [29] Romero-Salazar C, Valenzuela-Alacio L D, Carballo-Sánchez A F and Pérez-Rodríguez F 2005 *J. Low Temp. Phys.* **139** 273
- [30] Lorrain J P, LeBlanc M A R and Lachaine A 1979 *Can. J. Phys.* **57** 1458
- [31] LeBlanc M A R and Lorrain J P 1984 *J. Appl. Phys.* **55** 4035
- [32] Clem J P 2011 *Phys. Rev. B* **83** 214511
- [33] Clem J P, Weigand M, Durrell J H and Campbell A M 2011 *Supercond. Sci. Technol.* **24** 6
- [34] Cortés-Maldonado R, Espinosa-Rosales J E, Carballo-Sánchez A F and Pérez-Rodríguez F 2011 *Low Temp. Phys.* **37** 947
- [35] Sekerka J 1989 Flux cutting in semi-reversible and irreversible type II superconductors *MSc Thesis* (Ottawa: University of Ottawa)
- [36] Lalonde R, Sekerka J and LeBlanc M A R 1987 *Japan. J. Appl. Phys.* **26** (Suppl. 26-3-2) 1507
- [37] Fisher L M, Kalinov A V, Savel'ev S E, Voloshin I F, Yampol'skii V A, LeBlanc M A R and Hirscher S 1997 *Physica C* **278** 169
- [38] Fisher L M, Kalinov A V, Savel'ev S E, Voloshin I F and Yampol'skii V A 1997 *Solid State Commun.* **103** 313

# Magnetic field penetration in MgB<sub>2</sub> single crystals: Pinning and Meissner holes

V. Chabanenko<sup>a)</sup> and E. Kuchuk

*A. Galkin Donetsk Institute for Physics and Engineering, NASU, Donetsk 83114, Ukraine*

V. V. Yurchenko and P. Mikheenko

*Department of Physics, University of Oslo, P.O. Box 1048, Blindern, 0316 Oslo, Norway*

I. Abal'osheva

*Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Aleja Lotników 32/46, Warsaw 02-668, Poland*

R. Cortés-Maldonado and F. Pérez-Rodríguez

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Mexico*

J. Karpinski

*Laboratory for Solid State Physics, ETH Zurich, Zurich 8093, Switzerland and Institute of Condensed Matter Physics, EPFL, Lausanne 1015, Switzerland*

N. D. Zhigadlo

*Laboratory for Solid State Physics, ETH Zurich, Zurich 8093, Switzerland*

S. Katrych

*Institute of Condensed Matter Physics, EPFL, Lausanne 1015, Switzerland*

R. Puźniak

*Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Aleja Lotników 32/46, Warsaw 02-668, Poland*

(Submitted February 17, 2014)

Fiz. Nizk. Temp. **40**, 801–806 (July 2014)

The evolution of flux distribution in MgB<sub>2</sub> single crystals during their remagnetization was imaged with magneto-optical technique. Meissner holes, formed as the areas where the annihilation of vortices and antivortices takes place, were found at the boundary between oppositely magnetized parts of the crystal. Gradient of magnetic induction in the vicinity of Meissner holes was found to be enhanced. Finger-like structures of convex shape, formed during the penetration of magnetic flux inside the crystal, were observed and explained as an effect of inhomogeneous pinning and demagnetizing field redistribution in the sample. © 2014 AIP Publishing LLC.

[<http://dx.doi.org/10.1063/1.4887061>]

## 1. Introduction

The magneto-optical imaging (MOI) allows tracking magnetic flux distribution close to the sample surface.<sup>1,2</sup> The numerical inversion of Biot-Savart law gives an integral relation between the current density distributions and the magnetic self-field. It opened up the possibility of finding supercurrent distributions by MOI. The MOI technique permits the investigation of complex problems, such as inhomogeneous and anisotropic current flow, the dependence of critical current on the local magnetic field, the current distribution around crystal defects such as grain boundaries and inner interfaces<sup>1</sup> etc. The MOI studies of the vortex dynamics in Nb films<sup>3</sup> and foils<sup>4</sup> reveal stochastic jumps of the flux bundles forming a rough penetration front and giant abrupt changes in the magnetic-flux distribution as a result of the collapse of critical state. For MgB<sub>2</sub>, most of the studies were devoted to the avalanches in thin films<sup>5,6</sup> and limited data only are available on magnetic field penetration into MgB<sub>2</sub> crystals.<sup>7,8</sup> This is mainly due to the difficulties in growing large in size perfect crystals.

Here the magnetic induction patterns at the boundary between oppositely magnetized parts of MgB<sub>2</sub> crystals are studied in details. It was found that near the edge of the crystal the field of opposite directions is present and Meissner holes—the areas where the annihilation of neighboring vortices and antivortices occurs and the regions free from flux cavity appear<sup>9,10</sup>—are formed (Fig. 1).

## 2. Experiment and samples

The magnetic flux distribution was imaged and analyzed using MOI technique during remagnetization of MgB<sub>2</sub> crystals. This technique provides data for the normal component of magnetic induction  $B_n$  close to the sample surface. As the MOI technique is also a sensitive tool for investigations of crystal inhomogeneity associated with the imperfections of structure and composition,<sup>2,11</sup> it allowed us to study longitudinal and transverse cross sections of the finger-like structures formed during magnetic flux penetration in weak spots close to the edge of the crystal.

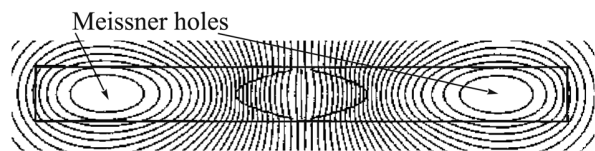


FIG. 1. Magnetic field lines during the penetration of flux of opposite orientation, occurring when the external field  $H$  is decreased again after it had first been increased to the field of full penetration  $H_p$ . Meissner holes show on a normally remagnetized plate (after E. H. Brandt<sup>10</sup>).

The measurements were performed at the temperature range of  $\sim 3$ – $40$  K during the magnetization process in magnetic field up to 100 mT and during reversal magnetization with the change of direction of the field.

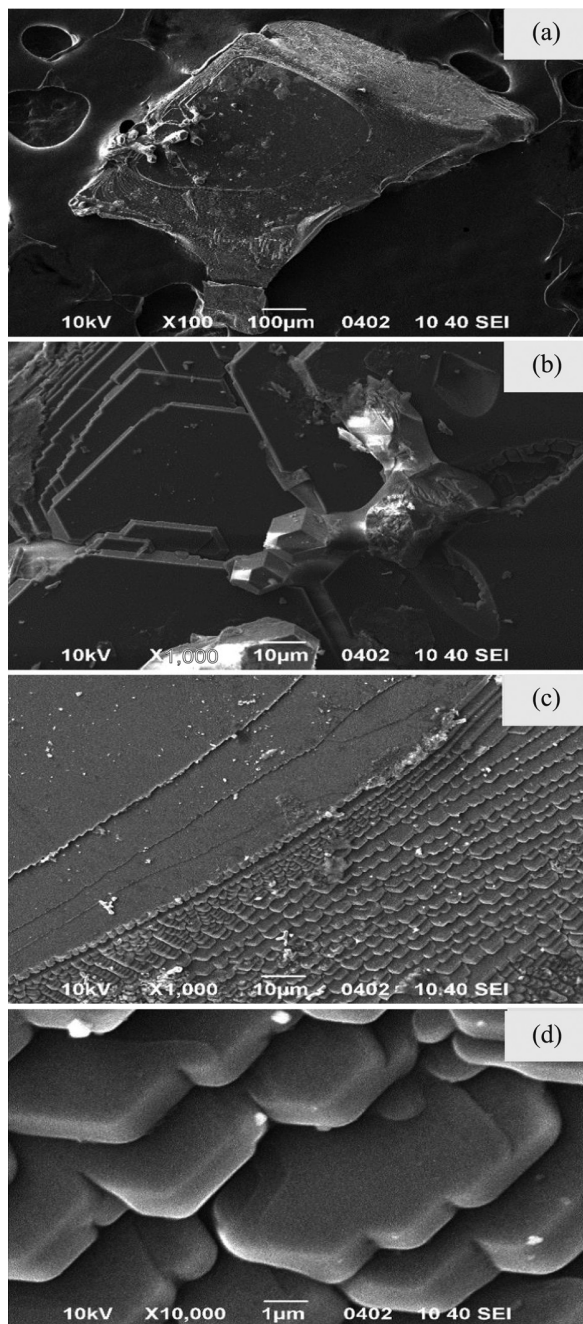


FIG. 2. Electron microscope images of  $\text{MgB}_2$  plate-like crystal S1. The steps between the plates of the crystal are clearly seen.

The studied crystals were grown from a  $\text{MgB}_2$  solution at the pressure of 15 kilobars and the temperature of  $1800^\circ\text{C}$  in a special high-pressure chamber, which allowed the growth of samples at pressure up to 35 kilobars and temperatures up to  $2200^\circ\text{C}$ .<sup>12</sup> Here we show data obtained on the crystal S1 of the approximate dimensions  $860 \times 660 \times 250 \mu\text{m}$  that has the  $c$ -axis normal to the platelets and on disc-shaped crystal S2 with  $500 \mu\text{m}$  in diameter and thickness of  $\sim 150 \mu\text{m}$ . The external magnetic field was applied in direction perpendicular to the sample surface.

Figure 2 shows electron microscope images of  $\text{MgB}_2$  plate-like sample S1 with fine details of the shape and the structure of the crystal, presented with enhanced magnifications in Figs. 2(b)–2(d). According to the above images sample S1 has a complex shape with nonplanar sides. The steps seen in the crystal may be a source of significant pinning of magnetic flux.

### 3. Results and discussion

#### 3.1. Magnetization process

Figure 3 shows penetration of magnetic field into the crystal S1. Magneto-optical imaging is an effective tool in

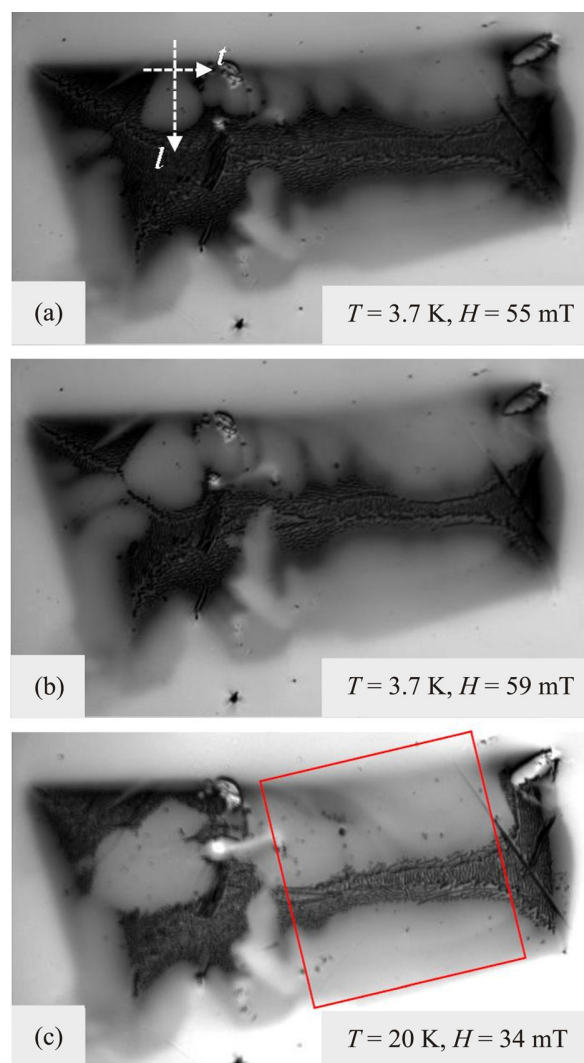


FIG. 3. The magnetic flux penetration into the crystal S1. The flux profile in the area of finger-like penetration is analyzed in direction perpendicular to the sample surface ( $l$ -direction) and along top edge of the sample ( $t$ -direction).

revealing field distribution in the surrounding of defects, while not all defects (inhomogeneities) can be detected by the optical or electron microscope imaging. Summarizing obtained results: At the 20K (Fig. 3(c)), we can find the regions of the crystal (see, red square), where the penetration of the field inside of the sample is more or less uniform, almost homogeneous until the middle of the sample. Here, the crystal is quite perfect, pinning centers are weak, and the critical current is low. Areas on the right and the left side of the crystal are characterized by highly inhomogeneous penetration, and in some places (black areas), almost complete shielding appear. Here, crystal defects act as strong pinning centers and therefore, significant critical currents exceeding 5–10 times of the value in the red square area may appear.

In the left part of the crystal, close to its top edge, there are spots with weak reduced superconducting parameters, where magnetic flux enters the sample easier than in other

places. After entering, magnetic flux propagates in a diffuse manner forming finger-like patterns that are clearly seen near the top edge of the sample in Fig. 3. These patterns remind those seen in superconducting films with quite strong pinning and in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$  crystals.<sup>11</sup> It reveals significant pinning in the crystal. The origin of pinning could be in the attraction of vortices due to the steps seen in Fig. 2.

One can also see that top left part of the sample remains in Meissner state. The penetration of the field in right part is quite homogeneous and this area was used for investigation of the process of magnetization and demagnetization of the sample applying positive and then negative magnetic field.

In a specific range of the field, transverse ( $t$ -direction, Fig. 3(a)) and longitudinal ( $l$ -direction) profiles of the magnetic induction were analysed in a finger-like structures shown in Fig. 3. The profiles recorded in the increasing positive field are shown in Fig. 4. One can see that the distribution of

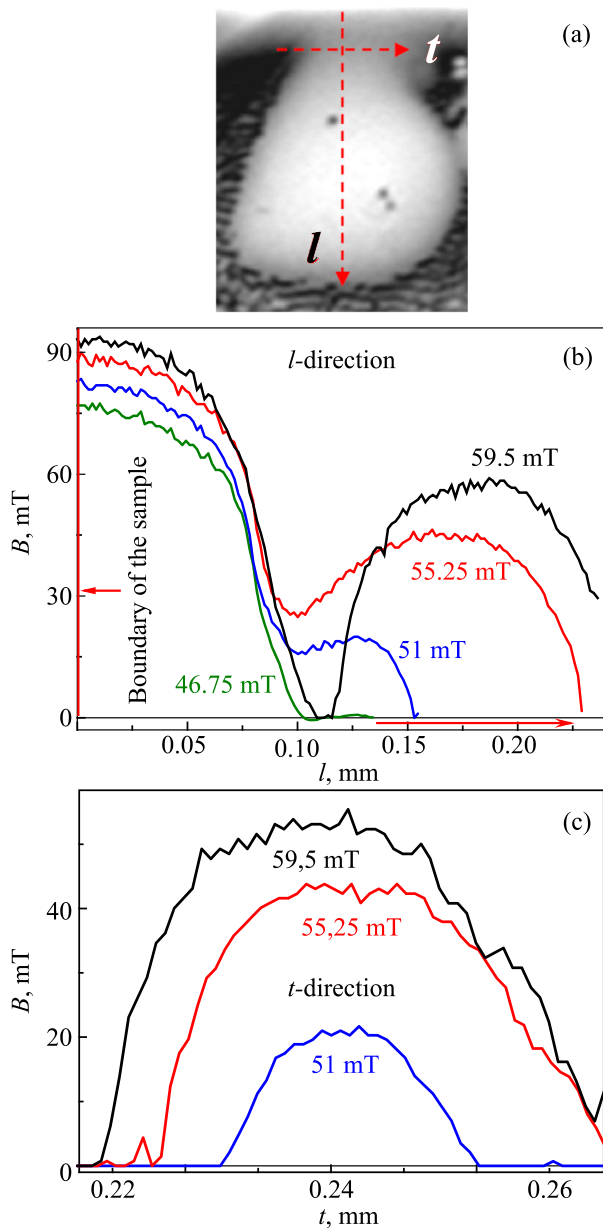


FIG. 4. Profiles of magnetic induction  $B$  in  $l$ - (b) and  $t$ -directions (c) of the finger-like structure shown in the upper panel (a).

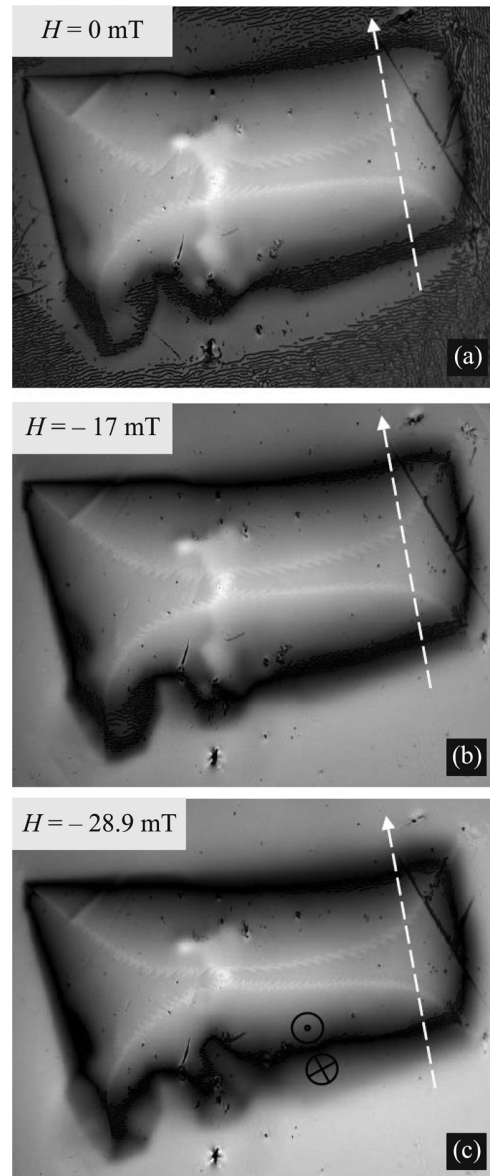


FIG. 5. Magneto-optical images of  $\text{MgB}_2$  crystal S1 at  $T = 3.66$  K during remagnetization in negative fields  $H$ , mT: 0 (a);  $-17$  (b);  $-28.9$  (c). The boundary between up ( $\odot$ ) and down ( $\otimes$ ) magnetized areas is near of the crystal edges (c).

magnetic flux has a convex dome-like shape both in longitudinal and transverse directions. Increase of the field leads to increase of both height and width of the domes. The gate, or the weak spot, where flux enters the crystal becomes wider with the increase of the field.

The formation and growth of dome-like areas containing magnetic flux reflects presence of edge defects and reasonably strong pinning inside the crystal, which restricts further motion of magnetic fluxes. The similar induction profiles observed in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$  crystals<sup>11</sup> were interpreted as flow of flux into central zone, characterized by weak pinning. When magnetic field further increases, the flux moves into the central part erasing the flux free area.

### 3.2. Flux trapping and remagnetization in negative field

Figure 5 shows typical magneto-optical images recorded at temperature of 3.66 K. Flux trapped as a result of magnetization of the sample in 85 mT and switching off the field to  $H = 0$  is shown in Fig. 5(a). The images 5(b) and 5(c) show distribution of flux after application of negative fields of  $H = -17$  mT and  $-28.9$  mT, respectively. Brighter intensity in these images corresponds to a higher normal component of magnetic induction ( $B_n$ ) and the darker one to lower  $B_n$ . The white arrow in Fig. 5(a) shows the direction along which the magnetic flux distribution was analyzed.

The remagnetization front reveals Meissner hole as a dark line around the perimeter of the sample, as it is shown in the panels of Fig. 5. With increase of negative field, Meissner hole moves inside the crystal and its width

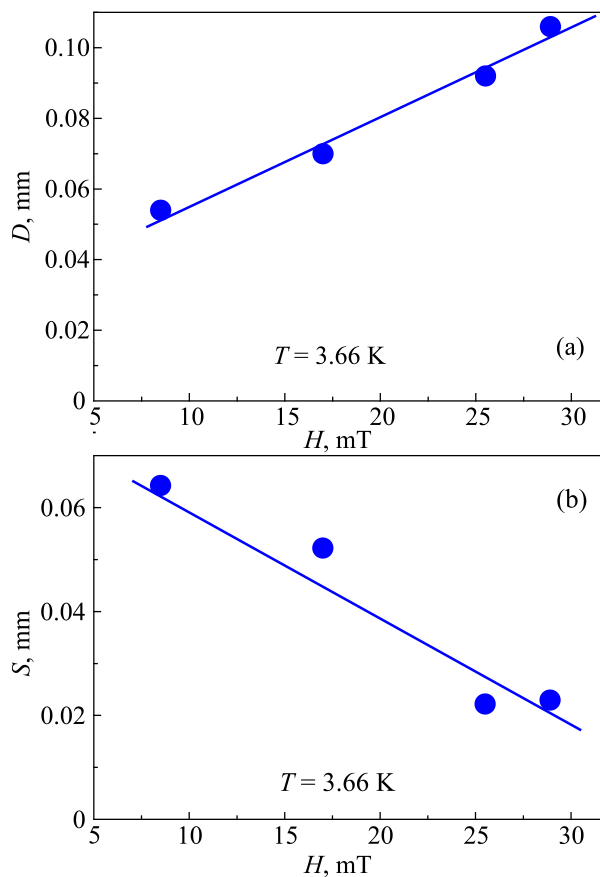


FIG. 6. Effect of increasing negative magnetic field on Meissner hole displacement inside the crystal (a) and on its width (b).

decreases (Fig. 6). The Meissner hole in zero magnetic field (Fig. 5(a)) occurs due to finite demagnetization factor of the crystal and to the ability of the crystal to trap magnetic field. Figure 7 shows the profiles of the normal magnetic induction  $B_n$  for different applied fields along the direction marked by the white line in Fig. 5(a). It appears that in the vicinity of the parts of Meissner hole (squares in the figure) the derivative  $dB_n/dx$  is increased by 2–3 times compared to its value in the bulk, controlled by the pinning.

This is in agreement with model developed in Ref. 9 (Fig. 4(a)) and Ref. 10, showing that the Meissner hole displaces magnetic flux to the periphery [Ref. 9 (Fig. 3(a))] of the area where annihilation of vortices and anti-vortices takes place. The displaced flux increases  $B_n$  in the area close to the hole.

### 3.3. Nut-like structure distribution of magnetic flux in the crystal

Figure 8(a) shows nut-like structure formed by Meissner holes in crystal S2. Presented image was obtained by exposing sample to magnetic field of a value above full penetration field. After that the direction of the field was reversed setting its absolute value somewhat below the value of previous field. This procedure was repeated several times, finally reducing field to 17 mT.

The structure in Fig. 8(a) is similar to that obtained in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$  crystal in the presence of the ac field.<sup>10</sup> The Meissner holes in such a structure separate domains with opposite directions of magnetic field. An example of the profile of the absolute value of induction in the vicinity of one of the holes is shown in Fig. 8(b). Image is taken along the line

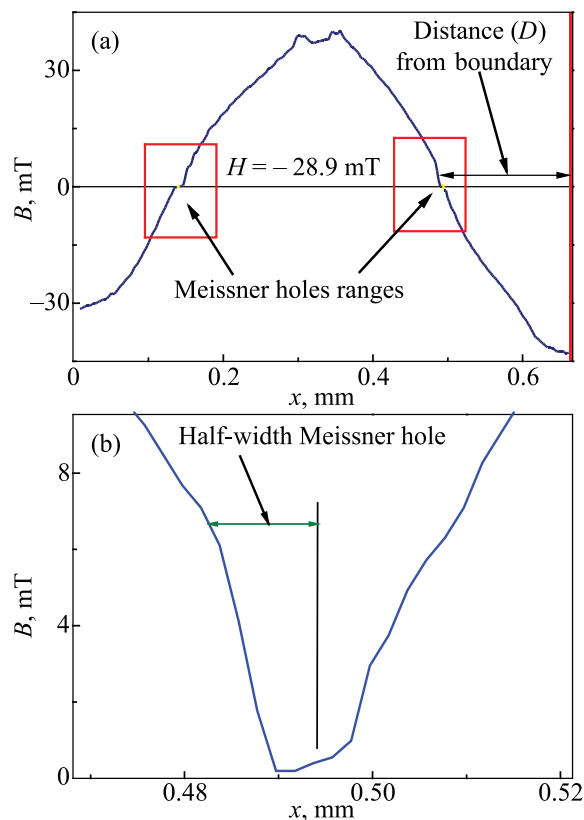


FIG. 7. (a) Profile of trapped magnetic flux after magnetization in  $H = 85$  mT at  $T = 3.66$  K; (b) Absolute value of magnetic induction in the vicinity of right "projection" of Meissner hole in panel (a).

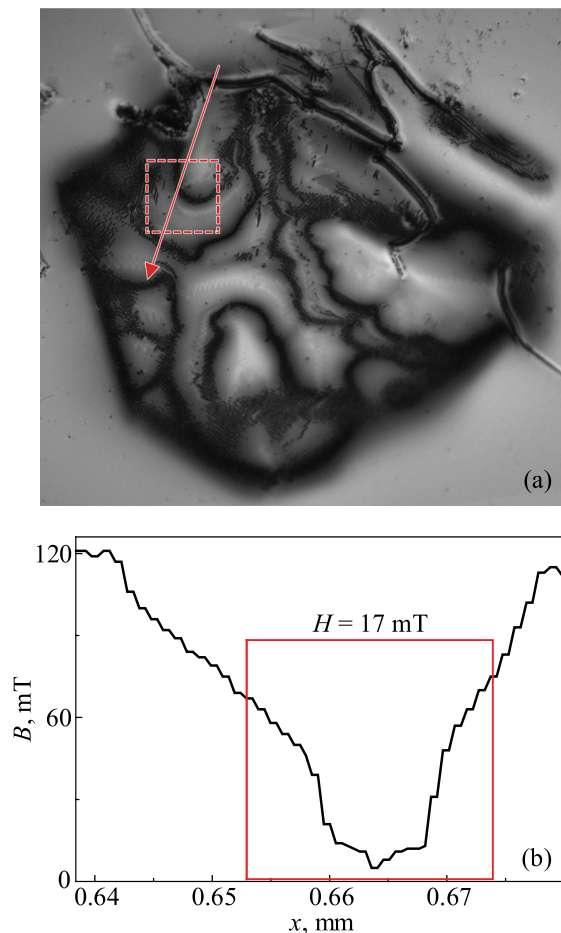


FIG. 8. (a) Nut-like pattern in crystal S2 constituted by Meissner holes in field of 17 mT; (b) Magnetic induction profile (absolute value) along the line shown by large arrow in (a). The structure of induction around the Meissner hole is marked by square.

marked by large red arrow in Fig. 8(a). As in Fig. 7(b), there is increase in the gradient of induction in the vicinity of the hole.

The nut-like structure in Fig. 8(a) shows several areas with strong pinning separated by areas of weaker pinning. Such a structure deserves further investigation of its local magnetic properties in combination with structural analysis.

#### 4. Conclusions

As a result of the application of MOI technique to  $\text{MgB}_2$  single crystals it was found that:

- Meissner holes are formed along the edge of the crystal in the trapped magnetic field or in the field of the opposite polarity to the field used for magnetization;

- in agreement with available models, Meissner holes are shifted towards the centre of the crystal;
- the derivative of magnetic induction  $dB_n/dx$  in the vicinity of Meissner hole is 2–3 times larger than the bulk value, controlled by pinning;
- structure formed by Meissner holes in a bulk crystal is similar to "fingerprints," unlike that one of thin films, where dendritic structures are dominant;
- the induction profiles of finger-like structures in longitudinal and transverse directions have a convex domelike shape;
- the gates, through which magnetic flux enters the crystals widen with an increase of external magnetic field.

This work was partially supported by SEP-CONACYT (Mexico) under Grant No. CB-2012-01-183673, by the National Science Centre of Poland based on decision No. DEC-2013/08/M/ST3/00927, and by Swiss National Science Foundation. J.K. and S.K. acknowledge support of European Community FP7 Project Super-Iron. Authors wish to thank V. V. Burkhovetskii for electron microscope images of crystals.

<sup>a)</sup>Email: vikchabanenko@gmail.com

<sup>1</sup>A. Polyanskii, D. M. Feldmann, and D. C. Larbalestier, in *Handbook of Superconducting Materials*, edited by D. Cardwell and D. Ginley (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1999).

<sup>2</sup>Ch. Jooss, J. Albrecht, H. Kuhn, S. Leonhardt, and H. Kron-müller, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 651 (2002).

<sup>3</sup>V. K. Vlasko-Vlasov, U. Welp, V. Metlushko, and G. W. Crab-tree, *Phys. Rev. B* **69**, 140504(R) (2004).

<sup>4</sup>R. Prozorov, D. V. Shantsev, and R. G. Mints, *Phys. Rev. B* **74**, 220511(R) (2006).

<sup>5</sup>F. L. Barkov, D. V. Shantsev, T. H. Johansen, P. E. Goa, W. N. Kang, H. J. Kim, E. M. Choi, and S. I. Lee, *Phys. Rev. B* **67**, 064513 (2003).

<sup>6</sup>S. Treiber, C. Stahl, G. Schütz, and J. Albrecht, *Phys. Rev. B* **84**, 094533 (2011).

<sup>7</sup>G. K. Perkins, J. Moore, Y. Bugoslavsky, L. F. Cohen, J. Jun, S. M. Kazakov, J. Karpinski, and A. D. Caplin, *Supercond. Sci. Technol.* **15**, 1156 (2002).

<sup>8</sup>V. Braccini, Ph.D. thesis in Physics (Università degli Studi di Genova, 2003).

<sup>9</sup>V. K. Vlasko-Vlasov, U. Welp, G. W. Crabtree, D. Gunter, V. Kabanov, and V. I. Nikitenko, *Phys. Rev. B* **56**, 5622 (1997).

<sup>10</sup>E. H. Brandt, *Phys. Rev. B* **58**, 6506 (1998).

<sup>11</sup>T. Schuster, H. Kuhn, E. H. Brandt, M. Indenbom, M. R. Koblishka, and M. Konczykowski, *Phys. Rev. B* **50**, 16684 (1994).

<sup>12</sup>J. Karpinski, M. Angst, J. Jun, S. M. Kazakov, R. Puzniak, A. Wisniewski, J. Roos, H. Keller, A. Perucchi, L. Degiorgi, M. R. Eskildsen, P. Bordet, L. Vinnikov, and A. Mironov, *Supercond. Sci. Technol.* **16**, 221 (2003).

This article was published in English in the original Russian journal. Reproduced here with stylistic changes by AIP Publishing.

## **9.4. Artículos en preparación**

# Manifestation of flux-line cutting and flux-transport in semi-reversible type-II superconductors

R. Cortés-Maldonado

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,*

*Apdo. Post. J-48, Puebla, Pue. 72570, Mexico*

## Abstract

The magnetic response of a semi-reversible type-II superconducting slab under the action of an in-plane rotating magnetic field and under the action of in-plane crossed fields is investigated theoretically. This study is carried out within the framework of the elliptic flux-line-cutting critical-state model. The role of the surface barrier, which gives rise to the semi-reversibility of the magnetization curves, is here analyzed by using a constitutive equation relating the magnetic induction and the magnetic field as was proposed by Brandt<sup>1</sup>.

PACS numbers: 74.25.Wx

## I. INTRODUCTION

Manifestation of flux-transport and flux-line cutting effects in hard superconductors subjected to in-plane rotating magnetic fields, which slowly rotate relatively to the specimen, have been widely studied<sup>8-11</sup>, as well as the magnetic response to in-plane crossed fields cite, in the frame of critical state model (Bean, Double critical state model, elliptic and extended elliptic).

The aim of this work is to investigate the magnetic behavior in a semi-reversible type-II superconductor subjected to a parallel rotating magnetic field (counterclockwise) of fixed magnitude; this study allows to explain experimental results on a PbIn disk rotating (clockwise) relative to a fixed parallel applied magnetic field<sup>3</sup>. In addition, the same framework allows to describe experiments<sup>3</sup> on the same PbIn specimen, whose remanent magnetization is suppressed by the action of a sweeping magnetic field, of moderate strenght, perpendicular to it. I also analyze, in Sec. III C, the evolution of the magnetic induction profiles during the first cycle of the transverse magnetic field.

## II. THEORY

Let us consider a semi-irreversible type II superconducting slab with surfaces located at  $x = 0$  and  $x = d$ , which is subjected to an external magnetic field changing its direction but fixed magnitude

$$\mathbf{H}_a = H_a \hat{\alpha} = H_a [\hat{y} \sin(\alpha_s) + \hat{z} \cos(\alpha_s)]. \quad (1)$$

Here  $H_a$  and  $\alpha_s$  are respectively the magnitude and the angle with respect to the  $z - axis$  of the applied magnetic field. In contrast to others studies<sup>8-11</sup>, here the magnetic induction on the boundaries and inside of the slab is determined by

$$B(H) = \mu_0 \begin{cases} \frac{aH}{\mu_0}, & H < H_{c1} \\ \frac{aH}{\mu_0} + [H^\gamma - H_{c1}^\gamma]^{1/\gamma}, & H > H_{c1}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $H$  is the applied magnetic field,  $H_{c1}$  is the lower critical field (taken from the experimental curve when the applied magnetic field is decreased, return of the curve in Fig. 2b),  $a$  is a constant,  $a \ll \mu_0$ , and  $\gamma = 1.35$  (see Fig. 1). Also, it is important to mention

that Eq. 2 includes the regions where Meissner effect (flux expulsion) occurs. Therefore, the initial profile of the magnetic induction is altered inside of the superconductor, i.e. the initial profile is homogeneous at  $T > T_c$  and at  $T < T_c$  this one is altered because of Meissner effect.

Hence, the magnetic induction  $\mathbf{B}(x, t)$  inside the superconducting slab can be expressed

$$\mathbf{B} = B(H(x, t))[\hat{\mathbf{y}} \sin(\alpha_H(x, t)) + \hat{\mathbf{z}} \cos(\alpha_H(x, t))], \quad (3)$$

where  $B$  is the magnitude of the magnetic induction and  $\alpha_H$  is the tilt angle of the magnetic field  $H$ . Hence,  $B$  and  $H$  have the same direction.

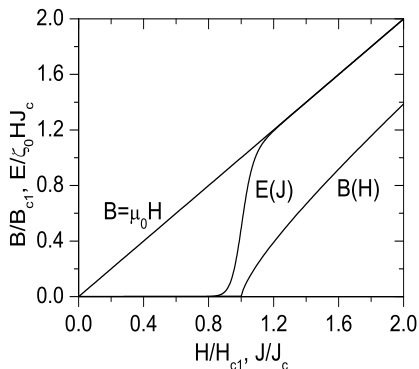


FIG. 1. The model  $B(H)$ , Eq. (2) with  $\gamma = 1.35$  and  $E(J)$ , Eq. (11) with  $\sigma = 30$ .

In a previous study<sup>8</sup> was assumed the condition  $\mathbf{B}(x, t) = \mu_0 \mathbf{H}(x, t)$  for applied magnetic field much larger than the first critical field ( $H_a \gg H_{c1}$ ) and the current density  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  was used. Here, the current density which drives the vortices and therefore generates the electric field<sup>1</sup>  $\mathbf{E}$  is  $\mathbf{J}_H = \nabla \times \mathbf{H}$ . Thus,  $\mathbf{J}_H$  is average current density at the vortex centers, which in general is different from the current density  $\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}$  averaged over several vortex spacing<sup>1</sup>.

It is convenient to write the current density  $\mathbf{J}_H(x, t)$  and the electric field  $\mathbf{E}(x, t)$  in terms of their components parallel and perpendicular to the local magnetic induction  $\mathbf{B}$ ; i.e.,  $\mathbf{J}_H = J_{H\parallel} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + J_{H\perp} \hat{\boldsymbol{\beta}}$  and  $\mathbf{E} = E_{\parallel} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + E_{\perp} \hat{\boldsymbol{\beta}}$ , where  $\hat{\boldsymbol{\beta}}(x, t) = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x, t)$ .

Since we consider quasi-stationary states, in our theoretical study we disregard temporal variations of the electric displacement. Then, according to the planar geometry of the problem and from Ampere's law,  $\nabla \times \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{J}_H(x, t)$ , I obtain

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J_{H\perp}, \quad (4)$$

$$H \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} = J_{H\parallel}, \quad (5)$$

and from Faraday's law,  $\nabla \times \mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , I get

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} + E_{\parallel} \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (6)$$

$$E_{\perp} \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} - \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial x} = -B \frac{\partial \alpha_H}{\partial t}. \quad (7)$$

Here, the magnitude of  $B$  is determined by Eq. 2 and from this expression the term  $\partial B/\partial H$  is obtained too. The resulting system of differential equations for  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  and  $\mathbf{J}_H$  is solved numerically by adding the material equation relating the electric field and the current density. Then, the material equation corresponding to the elliptic critical-state model is used for this purpose.

### A. Elliptic model

The elliptic flux-line cutting critical-state model<sup>5-7</sup> describes the behaviour of superconductors subjected to either crossed or rotating magnetic fields. According to this model, the material equation is given by the convolution product:

$$J_{H,i} = (J_{H,c})_{ik} \frac{E_k}{E} \quad \text{with} \quad (J_{H,c})_{ik} = J_{H,ci}(H) \delta_{ij}, \quad (8)$$

where  $\delta_{ik}$  is the Kronecker delta symbol and  $i, k = \perp, \parallel$ . The two phenomenological parameters used in the elliptic critical-state model (8), namely  $J_{H,c\perp}$  and  $J_{H,c\parallel}$ , correspond to the radius of the ellipse drawn by  $J_{H,c}$  on the  $J_{\perp} - J_{\parallel}$  plane. To solve numerically the system of Eqs. 4-7, the relation (8) is rewritten in the form

$$E_i = E(J_H) \left( J_{H,c}^{-1} \right)_{ik} J_{H,k}. \quad (9)$$

Here  $\left( J_{H,c}^{-1} \right)_{ik}$  is the inverse of the matrix  $(J_{H,c})_{ik}$ . The magnitude of the critical current density is denoted by  $J_{H,c}(H, \phi)$ , having an angle  $\phi(x)$  with respect to the direction of the

magnetic field  $\mathbf{H}$ . Then, the relation between the electric field  $\mathbf{E}$  and the current density  $\mathbf{J}_H$ ,  $E(J_H)$ , has the simple form

$$E(J_H) = \rho(J_H, H)J_H, \quad (10)$$

with<sup>1</sup>

$$\rho(J_H, H) = \zeta_0 H \frac{(J_H/J_{H,c})^\sigma}{1 + (J_H/J_{H,c})^\sigma}, \quad (11)$$

where  $H$  is the magnetic field,  $J_H$  is the magnitude of the current density,  $\sigma$  is the creep exponent which may depend on  $H$  ( $\sigma(H)$ ) and  $\zeta_0$  is a constant with units *ohms/Oe*. The critical value for the magnitude of  $\mathbf{J}_H$  is given by the expression

$$J_{H,c}(H, \phi) = \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{J_{c\parallel}^2(H)} + \frac{\sin^2(\phi)}{J_{c\perp}^2(H)} \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

### III. NUMERICAL RESULTS AND COMPARISON WITH EXPERIMENT

Below, I explain experimental magnetization curves of a PbIn superconducting disk<sup>3</sup> by means of the flux-line-cutting elliptic critical-state model described above. The disk is a semi-reversible superconductor, i.e. a sample with a weak pinning exhibiting Meissner effect (flux expulsion).

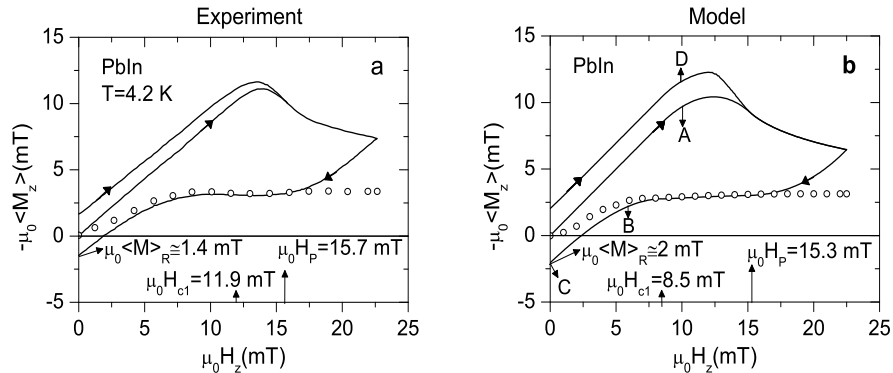


FIG. 2. a) Standard magnetization curves measured in<sup>3</sup> for a PbIn disk at  $T = 4.2$  K. b) Theoretical magnetization curve obtained with a critical current density  $J_{c\perp}(H)$  as in Eq. (??).

### A. Standard magnetization curves

Fig. 2a displays the standard magnetization curve,  $\langle M_z \rangle$  vs  $H_z$  measured in<sup>3</sup>, for a PbIn disk of thickness  $d = 0.8mm$ . Besides, the Meissner effect magnetization is shown by open circles, this magnetization is obtained upon cooling from  $T_c$  to  $T = 4.2$  K in several static magnetic field,  $H_z$ . The hysteresis loop corresponds to the behaviour of a semi-reversible superconductor, i.e. its return lies in the diamagnetic regime except for an amount of flux trapping in the very low field region. The isotropy of the sample was also verified experimentally by comparing standard magnetization curves with  $\mathbf{H}_a$  directed along any arbitrary diameter of the disk.

Fig. 2b displays the theoretical standard curve obtained with a critical current density  $J_{c\perp}(H)$  as in Eq. (??). Besides the good agreement between the theoretical curve with the experimental one, it is interesting to analyze the profiles of the magnetic field and magnetic induction on some points of the hysteresis loop. Fig. 3A shows a jump in the magnetic induction on the surfaces of the slab ( $0 < x < x_1$ ), where  $H_{c1} < H \leq H_z$ . However, in the region where  $H < H_{c1}$ ,  $x_1 < x < x_3$ , a region with magnetic induction zero,  $B = 0$  is generated as a consequence of Eq. 2, I called to this zone a *Meissner region*. Notice that the magnetic field  $H$  could have values between  $(0, \mu_0 H_{c1})$ . In the central region of the slab, the magnetic induction is zero because the applied magnetic field has not fully penetrated the slab, this is  $H_z < H_P$ . As the magnetic field is increased up to  $H_{z,max}$  the Meissner region will vanish.

Later on, when the applied magnetic field is decreased up to  $\mu_0 H_z = 6$  mT  $< \mu_0 H_{c1}$  (panel B in Fig.3), the *Meissner region* starts to grow up on to the surfaces of the sample occupying the space  $0 < x < x_1$ . The maximum size of the Meissner region when the magnetic field decreases (increases from  $-\mu_0 H_{z,max}$  up to  $\mu_0 H_{z,max}$ ) is achieved at  $H_z = 0$ , occupying the region  $0 < x < x_2$ , see panel C in Fig. 3. Finally, the Meissner region's size diminishes and moves inside of the sample, occupying the space  $x_1 < x < x_2$ , by increasing the magnetic field from  $-\mu_0 H_{z,max}$  up to  $\mu_0 H_z = 10$  mT  $> \mu_0 H_{c1}$ .

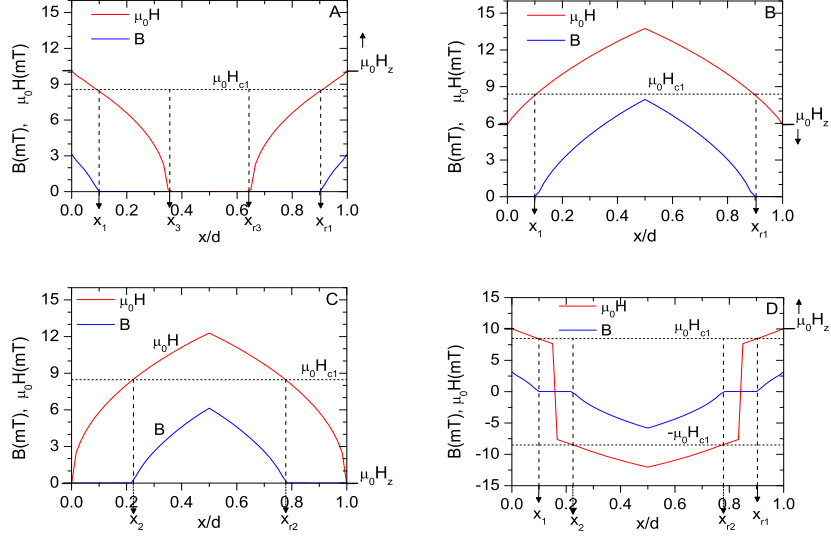


FIG. 3. Profiles of  $H$  and  $B$  corresponding to the labels  $A - D$  in Fig. 2b.

## B. Rotating magnetic fields

The evolution of the  $y$  and  $z$  components of the magnetization,  $\langle M_y \rangle = \langle B_y \rangle / \mu_0$  and  $-\langle M_z \rangle = H_a - \langle B_z \rangle / \mu_0$ , versus the angle  $\theta$  of rotation measured in<sup>3</sup> for a PbIn disk, rotating in the magnetic field  $\mathbf{H}_a$  are shown in the Fig. 4. The measurements started with a diamagnetic moment which evolves along the  $z - axis$  (along  $\mathbf{H}_a$ ), i.e.  $\langle B_z \rangle$  decreases below  $\mu_0 H_a$ , which is reached after cooling the superconductor at the fields  $H_a/H_P = 0.5$  (panel a), 1.0 (panel b), and 2.0 (panel c), where  $H_P$  ( $\mu_0 H_P = 15.7 \times 10^{-3} \text{T}$ ) is the penetration field.

In the calculations, the initial magnetic-induction profile, i.e. at  $\theta = 0$ , is obtained after field cooling. So, this profile is homogeneous at  $T > T_c$  and, at  $T < T_c$ , the profile is altered because of fractional Meissner effect; unlike the initial homogeneous profile used in<sup>8</sup> obtained by not taking into account  $H_{c1}$ .

The profiles in the case when the external magnetic field is larger than the penetration field, therefore larger than  $\mu_0 H_{c1}$ , are shown in Fig. 8. The central region, where the critical profiles of  $B$  appears in Fig. 7, rapidly disappear as the angle of rotation is increased, this is due to the noticeable reduction of the critical current densities.

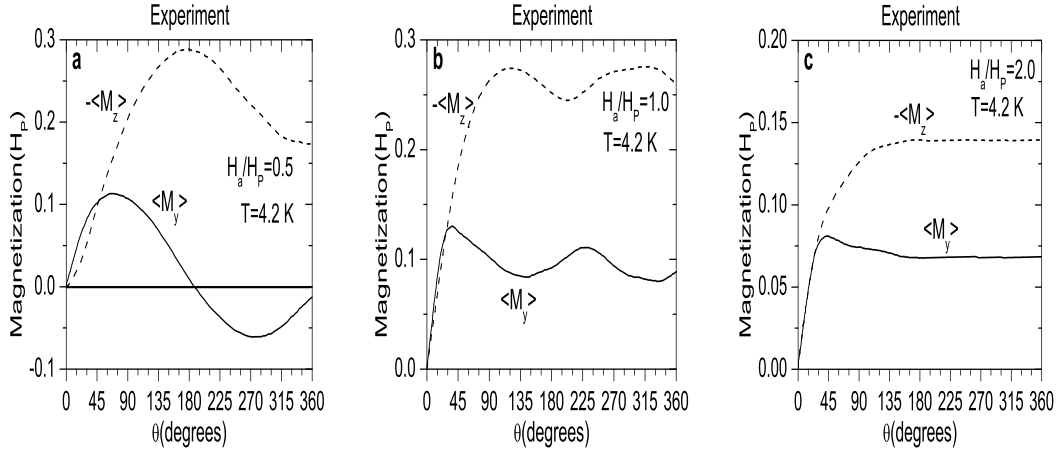


FIG. 4. PbIn rotational curves measured in Ref.<sup>3</sup>.

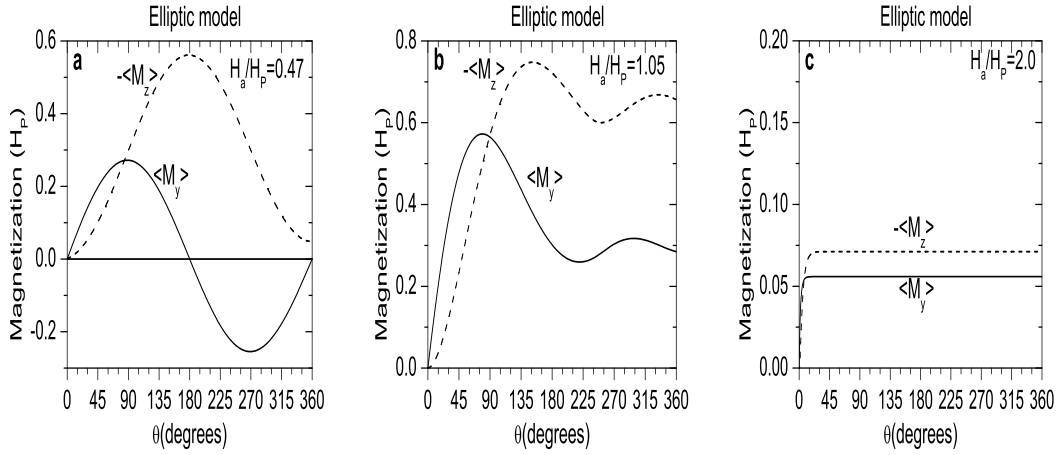


FIG. 5. Curves of the average magnetization components versus the rotation angle, calculated with the elliptic critical-state model.

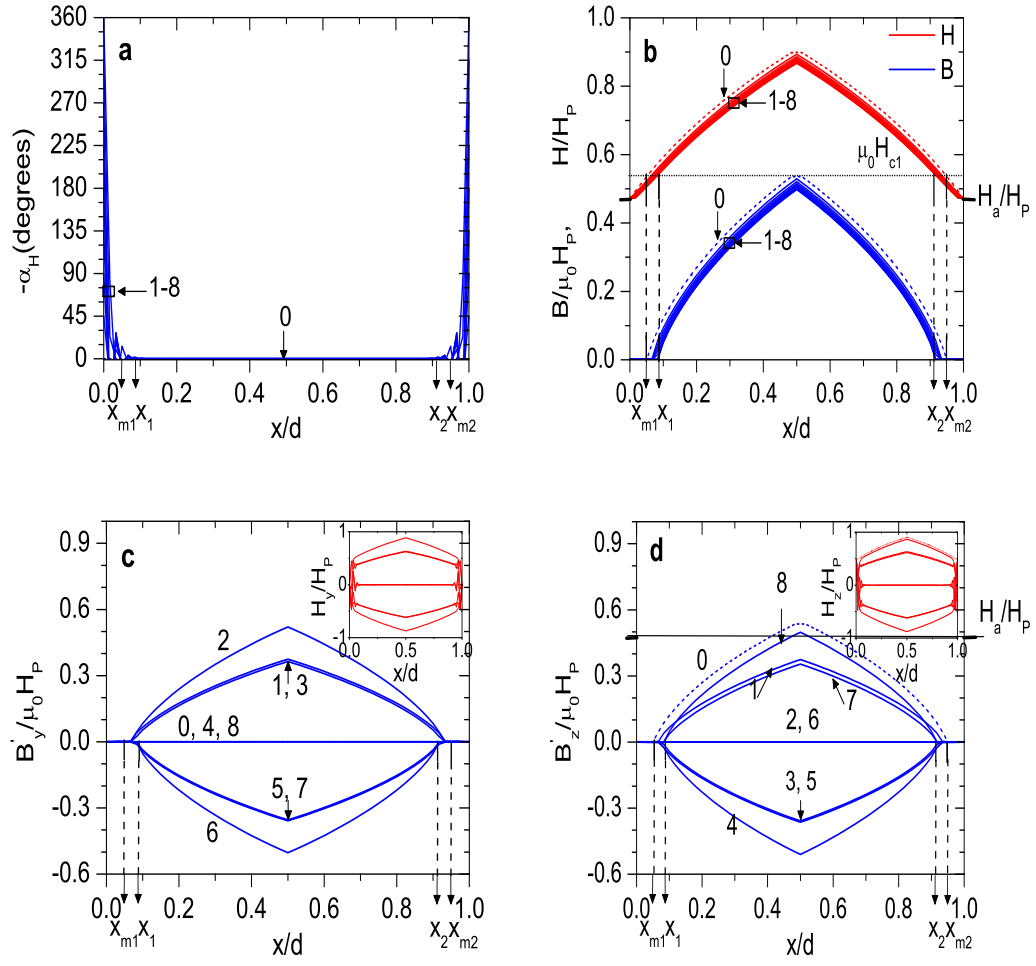


FIG. 6. Influence of Meissner effect on the profiles of the angle  $\alpha$  (panel a), magnitude  $B$  (panel b) and its components  $B'_y$  (panel c),  $B'_z$  (panel d) at  $H_a/H_P = 0.5$ .

### C. Meissner effect during remanent-magnetization collapse by a transverse magnetic field

The aim of this section is to compare the experimental results reported by<sup>3</sup> with the theoretical predictions of elliptic critical state model.

To magnetize the sample, a single pulse of a sweeping magnetic field of magnitude  $H_i > H_{2P}$ , where  $\mu_0 H_{2P} = 0.0162$  is the second full penetration field, is applied along the  $y$ -axis. Fig. ?? panel b)

The transverse magnetic field is swept in cycles between the values  $(-H_{y,max}, H_{y,max})$ .

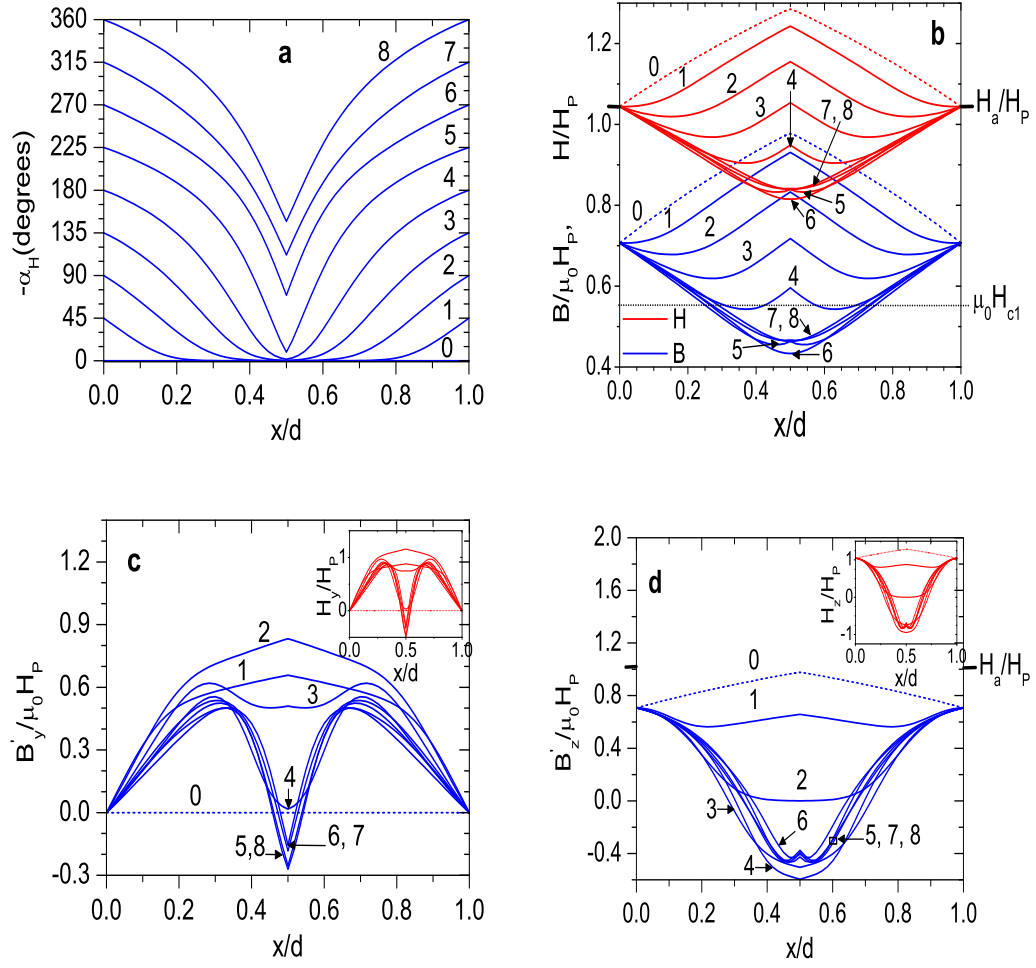


FIG. 7. Profiles of the angle  $\alpha$ , magnitude  $B$  and its components  $B'_y$ ,  $B'_z$  for  $H_a/H_P = 1.0$

The transverse field calculations for the elliptic model is carried out by solving Maxwell equations (5,7) and considering  $\alpha_s = 0$  in Eq. (1). The numerical calculations provides results showing a magnetization decay similar to the experimental one. ,

#### IV. CONCLUSIONS

The elliptic critical state model has been applied to investigate the magnetic response of semi-reversible type-II superconductors in a parallel rotating magnetic field.

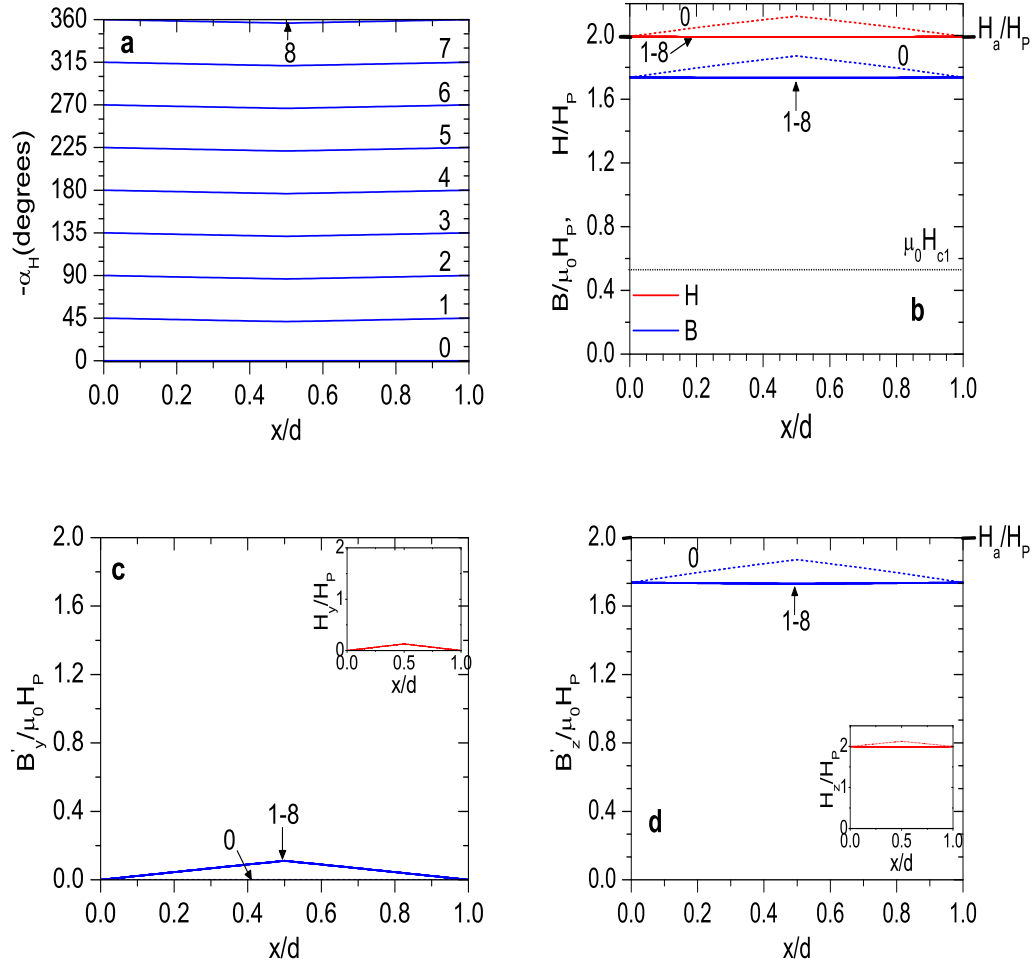


FIG. 8. Profiles of the angle  $\alpha$ , magnitude  $B$  and its components  $B'_y$ ,  $B'_z$  for  $H_a/H_P = 2.0$

## ACKNOWLEDGMENTS

I would like to thank Dr. F. Pérez Rodríguez for helpful discussions. I acknowledge support from SEP-CONACYT (Mexico) under grant CB-2012-01-183673.

<sup>1</sup> E. H. Brandt, *Phys. Rev. B* **59**, 3369, (1999).

<sup>2</sup> Pérez-Rodríguez F, LeBlanc M A R and Gandolfini G 2001 *Supercond. Sci. Technol.* **14** 386

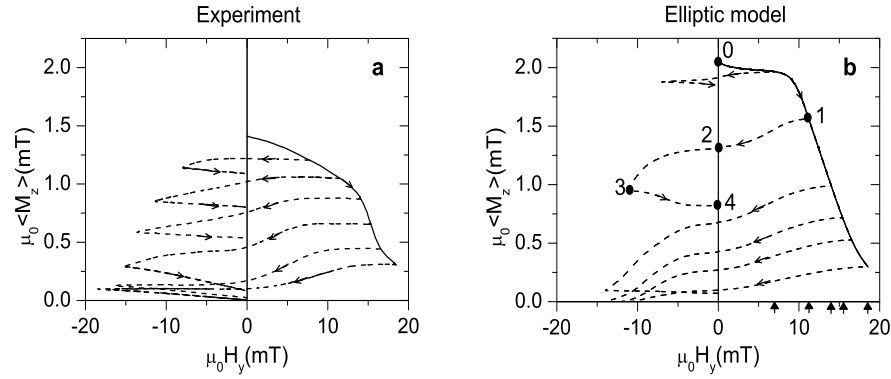


FIG. 9. full cycle .

- <sup>3</sup> J. Sekerka, M.Sc. thesis “Flux cutting in semi-reversible and irreversible type II superconductors”, University of Ottawa, 1989.
- <sup>4</sup> C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *J. Non-Cryst. Sol.* **329**, 159 (2003).
- <sup>5</sup> C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 5256 (2003).
- <sup>6</sup> C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez, *Physica C* **404**, 317 (2004).
- <sup>7</sup> C. Romero-Salazar, L. D. Valenzuela-Alacio, A. F. Carballo-Sánchez, and F. Pérez-Rodríguez, *J. Low Temp. Phys.* **139**, 273 (2005).
- <sup>8</sup> Cortés-Maldonado R, Espinosa-Rosales J E, Carballo-Sánchez A F and Pérez-Rodríguez F *Low Temp. Phys.* **37** 947 (2011)
- <sup>9</sup> Pérez-González A and Clem J R 1985 *Phys. Rev. B* **31** 7048
- <sup>10</sup> Pérez-González A and Clem J R 1985 *J. Appl. Phys.* **58** 4326
- <sup>11</sup> Pérez-González A and Clem J R 1985 *Phys. Rev. B* **32** 2909

# Bibliografía

- [1] C.P. Poole, H.A. Farach, R.J. Creswick, and R. Prozorov. *Superconductivity*. Elsevier Science, 2014. 2
- [2] C. Barth. *High Temperature Superconductor Cable Concepts for Fusion Magnets*. KIT Scientific Publishing, 2013. 4
- [3] Yinshun Wang. *Fundamental Elements of Applied Superconductivity in Electrical Engineering*. John Wiley and Sons, Singapur, 2013. 4, 9, 18, 20, 51, 122
- [4] S. A. Zhou. *Electrodynamics of Solids and Microwave Superconductivity*. Wiley, USA, 1999. 4, 5, 40, 52
- [5] B. D. Cullity and C. D. Graham. *Introduction to Magnetic Materials*. Wiley-IEEE PRESS, USA, 2009. 6
- [6] V.V. Schmidt, P. Müller, and A.V. Ustinov. *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications*. Springer, 1997. 7, 13
- [7] F.J. Owens and C.P. Poole. *The new superconductors*. Springer Science & Business Media, USA, 1996. 7, 21
- [8] Sekerka J. Flux cutting in semi-reversible and irreversible type ii superconductors. Tesis de Maestría, University of Ottawa, 3 1989. 11, 12, 62, 63, 64, 76, 77, 78, 79, 84, 86, 88, 91, 92, 94, 100, 101, 104, 105, 107, 109, 116, 117, 118, 136, 137, 138
- [9] L. Ya. Vinnikov, J. Karpinski, S. M. Kazakov, J. Jun, J. Anderegg, S. L. Budko, and P. C. Canfield. *Phys. Rev. B*, 67:092512, 2003. 12

- 
- [10] K.H. Bennemann and J.B. Ketterson. *Superconductivity: Volume 1: Conventional and Unconventional Superconductors Volume 2: Novel Superconductors*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 13, 14
- [11] P. Krueger. *Optimisation of hysteretic losses in high-temperature superconducting wires*. KIT Scientific Publishing, 2014. 14
- [12] A. M. Campbell. *Supercond. Sci. Technol.*, 24:091001, 2011. 14
- [13] J. R. Clem. *J. Low Temp. Phys.*, 38:353, 1980. 15
- [14] T. Matsushita. *Flux Pinning in Superconductors*. Springer, 2007. 15
- [15] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:1064, 1950. 15
- [16] K. Fossheim and A. Sudboe. *Superconductivity: Physics and Applications*. Wiley, 2005. 16, 19, 20, 50
- [17] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, 1957. 17
- [18] L. P. Gor'kov. *Sov. Phys. JETP*, 36:1364–1367, 1959. 17
- [19] Tien-Tsan Shieh. *The Ginzburg-Landau Theory for a Thin Superconducting Loop in a Large Magnetic Field*. ProQuest, 2007. 17
- [20] C. P. Bean. *Phys. Rev. Lett.*, 8:250, 1962. 18, 51, 57
- [21] C. P. Bean. *J. Appl. Phys.*, 41:2482, 1970. 19, 57
- [22] N. R. Silva and T. Akachi. *Revista mexicana de Física*, 26, No. 3:443–455, 1980. 21
- [23] C. Romero-Salazar, F. Morales, R. Escudero, A. Durán, and O. A. Hernández-Flores. *Phys. Rev. B*, 76:104521, 2007. 24, 126
- [24] E.T. Swarz and R.O. Pohl. *Rev. Mod. Phys.*, 61:605, 1989. 24

- 
- [25] L. Landau. *Nature*, 141:688, 1938. 26
- [26] J. D. Livingston and W. DeSorbo. *Superconductivity vol 2, ed R D Parks*. Dekker, New York, 1969. 26
- [27] A. Fortini, A. Haire, and E. Paumier. *Phys. Rev. B*, 21:5065, 1980. 26, 42, 55
- [28] J. Provost, E. Paumier, and A. Fortini A. *J. Phys. F: Met. Phys*, 4:439, 1974. 26
- [29] John Clem, Ruslan Prozorov, and Rinke Wijngaarden. *Phys. Rev. B*, 88:104504, 2013. 26
- [30] Saül Vélez, Carles Panades-Guinart, Guillem Abril, Antoni García Santiago, Joan Manuel Hernandez, and Javier Tejada. *Phys. Rev. B*, 78:134501, 2008. 26, 33, 37, 39, 40, 42, 56
- [31] Saül Vélez, Antoni García Santiago, Joan Manuel Hernández, and Javier Tejada. *J. Phys.: Condens. Matter*, 24:485701, 2012. 26, 33, 34, 35, 37, 39, 56
- [32] Ruslan Prozorov, Russell W. Giannetta, Anatolii A. Polyanskii, and Garry K. Perkins. *Phys. Rev. B*, 72:212508, 2005. 26, 27, 28
- [33] Ruslan Prozorov. *Phys. Rev. L*, 98:257001, 2007. 26, 27, 28, 29, 33, 42
- [34] Ruslan Prozorov, Andrew F. Fidler, Jacob R. Hoberg, and Paul C. Canfield1. *Nature Physics.*, 4:327–332, 2008. 29, 42
- [35] Jacob R. Hoberg. Magneto-optical study of the intermediate state in type-i superconductors: effects of sample shape and applied current. Tesis de Maestría, Iowa State University, 2008. 29, 30, 42
- [36] R. Prozorov and P. C. Canfield *en. Foam Engineering: Fundamentals and Applications*. (John Wiley and Sons), p. 207-225, New York, 2012. 29, 42
- [37] Suprafroth in type-i superconductors,  
<http://cmp.physics.iastate.edu/supermaglab/video/suprafroth.html>. 31

- 
- [38] K. Osamura. *Composite Superconductors. Volume 3 of Applied Physics*. CRC Press, 1993. 32, 45, 53, 54
- [39] V .Kozhevnikov, R. J. Wijngaarden, J. de Wit, and C. Van Haesendonck. *Phys. Rev. B*, 89:100503, 2014. 40
- [40] Asavari S Dhavale, Pashupati Dhakal, Anatolii A Polyanskii, and Gianluigi Ciovati. *Supercond. Sci. Technol.*, 25:065014, 2012. 40, 52, 53
- [41] E.H. Brandt. *Phys. Rev. B*, 58:6506–6523, 1998. 42, 55, 56
- [42] E.H. Brandt. *Physica B*, 743:284–288, 2000. 42, 55, 56
- [43] Equilibrium topology of the intermediate state in type-i superconductors of different shapes (video sobre la estructura tubular cuando se aplica un campo inclinado), <http://cmp.physics.iastate.edu/supermaglab/video/pb.html>. 42
- [44] D. K. Finnemore, T. F. Stromberg, and C. A. Swenson. *Phys. Rev. B*, 149:231, 1966. 45, 52
- [45] G. Friedman, L. Liu, and J. S. Kouvel. *J. Appl. Phys.*, 75:5683, 1994. 46, 47
- [46] Satyajit Banerjee. *Nonlinear response of the static and dynamic phases of the vortex matter, Superconductivity: Theory and Applications, Dr. Adir Luiz (Ed.)*. InTech, 2011. 50
- [47] David A Cardwell and David S Ginley. *Handbook of Superconducting Materials, Volume I: Superconductivity, Materials and Processes*. IOP Publishing, 2003. 50, 56
- [48] Alvaro Sanchez and Carles Navau. *Supercond. Sci. Technol.*, 14:444, 2001. 51
- [49] K. Saito. Critical field limitation of the niobium superconducting rf cavity. In *Proceedings of the 10th Workshop on RF Superconductivity, Tsukuba, Japan*, pages 583–587, 2001. 53

- 
- [50] S. Casalbuoni, E. A. Knabbe, J. Kötzler, L. Lilje, L. von Sawilski, P. Schmüser, and B. Steffen. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 538:45–64, 2005. 54, 136
- [51] E.H. Brandt. *Phys. Rev. B*, 59:3369, 1999. 55, 99, 100, 102, 104, 122
- [52] E.H. Brandt. *Physica B: Condensed Matter*, 284288, Part 1:743 – 744, 2000. 56
- [53] R. Cortés-Maldonado, J. E. Espinosa-Rosales, A. F. Carballo-Sánchez, and F. Pérez-Rodríguez. *Low Temp. Phys.*, 37:947, 2011. 57, 59, 61, 66, 77, 89, 90, 92, 96, 99, 101, 102, 108, 137
- [54] J. R. Clem. *Phys. Rev. B*, **26**:2463, 1982. 58, 69
- [55] J. R. Clem and A. Pérez-González. *Phys. Rev. B*, 30:5041, 1984. 58
- [56] A. Pérez-González and J. R. Clem. *Phys. Rev. B*, 31:7048, 1985. 58, 101
- [57] A. Pérez-González and J. R. Clem. *Phys. Rev. B*, 32:2909, 1985. 58, 101
- [58] A. Pérez-González and J. R. Clem. *J. Appl. Phys.*, 58:4326, 1985. 58, 101, 126
- [59] C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez. *Appl. Phys. Lett.*, 83:5256, 2003. 59, 60, 74, 79, 83, 84, 88, 101, 108, 115
- [60] C. Romero-Salazar and F. Pérez-Rodríguez. *Physica C*, 404:317, 2004. 59, 60, 74, 84, 115
- [61] C. Romero-Salazar, L. D. Valenzuela-Alacio, A. F. Carballo-Sánchez, and F. Pérez-Rodríguez. *J. Low Temp. Phys.*, 139:273, 2005. 59, 60, 74, 86, 115
- [62] J. R. Clem. *Phys. Rev. B*, 83:214511, 2011. 59, 61, 74, 79, 88, 89
- [63] J. R. Clem, M. Weigand, J. H. Durrell, and A. M. Campbell. *Supercond. Sci. Technol.*, 24:6, 2011. 59, 61, 74, 88, 89
- [64] J. R. Cave and M. A. R. LeBlanc. *J. Appl. Phys.*, 53:1631, 1982. 63

- [65] R Cortés-Maldonado, O De la Peña Seaman, V García-Vázquez, and F. Pérez-Rodríguez. *Supercond. Sci. Technol.*, 26:125001, 2013. 76, 86
- [66] R. Lalonde, J. Sekerka, and M. A. R. Leblanc. *Jap. J. Appl. Phys.*, 26:(Suplement 26-3-2) 1507, 1987. 76, 138
- [67] L. M. Fisher, A. V. Kalinov, S. E. Savelev, I. F. Voloshin, V. A. Yampol'skii, M. A. R. LeBlanc, and S. Hirscher. *Physica C*, 278:169, 1997. 81, 137
- [68] L. M. Fisher, A. V. Kalinov, S. E. Savelev, I. F. Voloshin, and V. A. Yampol'skii. *Solid State Commun.*, 103:313, 1997. 81, 137
- [69] M. A. R. LeBlanc and J. P. Lorrain. *J. Appl. Phys.*, 55:4035, 1984. 86, 89
- [70] L. M. Fisher, A. V. Kalinov, I. F. Voloshin, I.V. Baltaga, K. V. Il'enko, and V. A. Yampol'skii. *Solid State Commun*, 97:833, 1996. 89, 137
- [71] L. M. Fisher, K. V. Il'enko, A. V. Kalinov, M. A. R. LeBlanc, F. Pérez-Rodríguez, S. E. Savel'ev, I. F. Voloshin, and V. A. Yampol'skii. *Phys. Rev. B*, 61:15382, 2000. 89, 137
- [72] J. P. Lorrain, M. A. R. LeBlanc, and A. Lachaine. *Can. J. Phys.*, 57:1458, 1979. 89
- [73] R Cortés-Maldonado. *Temas actuales de la Física y la Ciencia de Materiales*. (IF-BUAP), p. 15-26, Puebla, México, 2013. 89, 101
- [74] Ming Xu, Donglu Shi, and Ronald F. Fox. *Phys. Rev. B*, 42:10773, 1990. 96
- [75] C. Romero-Salazar and O. A. Hernández-Flores. *J. Appl. Phys.*, 103:093907, 2008. 108
- [76] A. Nabiałek, S. Vasiliev, V. Chabanenko, F. Pérez Rodríguez, S. Piechota, and H. Szymczak. *Acta Physica Polonica A*, 118:343, 2010. 124, 127
- [77] N. D. Espinosa-Torres, J. F. J. Flores-Gracia, A. D. Hernández de la Luz, J. A. Luna-López, J. Martínez-Juárez, and G. Flores-Carrasco. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, pages 1–8, 2014. 126, 133, 143

- [78] Néstor David Espinosa Torres. Avalanchas de flujo magnético en superconductores. Tesis de Maestría, IFUAP, 2010. 133, 143
- [79] Carolina Romero Salazar. *Corte de líneas de flujo magnético en superconductores duros isotrópicos y anisotrópicos*. Tesis de Doctorado, IFUAP, 2005. 143