Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Físico-Matemáticas

Valuación de una opción europea con una barrera

Tesis profesional para la obtención del título de Licenciado en Actuaría

Presentada por:

Luis Antonio Mayr Velázquez

Asesores:

Dr. Carlos Palomino Jiménez

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla, Puebla, México

2025

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El análisis y valuación de instrumentos financieros derivan en una de las áreas más dinámicas y complejas dentro de las matemáticas aplicadas y la economía. Los derivados financieros, como las opciones, son fundamentales en los mercados modernos, esto debido a su capacidad para gestionar riesgos y facilitar estrategias de inversión.

Las opciones barrerason un tipo específico de opción exótica, presentan características únicas que las diferencían de las opciones tradicionales. Este trabajo se enfoca en el análisis y valuación de una opción europea con barrera, explorando los fundamentos teóricos como las herramientas matemáticas necesarias para su comprensión y aplicación.

El concepto de opciones barrera surge de la necesidad de mitigar los efectos de movimientos inesperados, los cuales repercuten en los precios de los activos subyacentes, ya sean al alza o a la baja. A diferencia de las opciones estándar, cuyo valor depende exclusivamente del precio de ejercicio y el precio del activo subyacente, las opciones barrera incorporan una condición adicional, estas se activan o desactivan cuando el precio del activo subyacente alcanza un nivel predeterminado, conocido como barrera.

Esta característica las convierte en instrumentos altamente utilizados en el diseño de estrategias personalizadas para la cobertura y especulación dentro de los mercados financieros.

El presente trabajo tiene como objetivo principal la valuación de una opción europea con una sola barrera, específicamente del tipo "down-and-out".

Para esto utlizaremos una metodología basada en modelos matemáticos avanzados, haciendo uso de herramientas como el movimiento browniano, los tiempos de hitting, y el teorema de Girsanov. Estas herramientas nos permitirán modelar el comportamiento aleatorio de los precios de los activos financieros y así poder calcular la probabilidad de que una barrera sea alcanzada.

En el primer capítulo presentaremos los conceptos básicos que sustentan este trabajo, comenzando con una introducción a los derivados financieros y las opciones en particular. Se describen las principales características de las opciones europeas, americanas y bermudas, destacando las diferencias clave entre ellas. Asimismo, introducimos el concepto de opciones barrera y su clasificación en up-and-out, down-and-out, up-and-in, y down-and-in, detallando las condiciones bajo las cuales estas se activan o desactivan.

El segundo capítulo se enfoca en el movimiento browniano, un proceso estocástico que juega un papel indispensable en la modelación de los precios de los activos financieros. Se presentan las propiedades fundamentales del movimiento browniano estándar y geométrico, junto con sus aplicaciones en la valuación de opciones.

Además, se exploran conceptos avanzados como los tiempos de hitting y el principio de reflexión, que son esenciales para comprender la importancia y el uso correcto de las opciones barrera. Particularmente, el tiempo de llegada, que mide el tiempo que tarda el precio de un activo en alcanzar un nivel específico, es una herramienta clave para calcular la probabilidad de que una barrera sea cruzada

En el tercer capítulo, se aborda la fórmula de Black-Scholes, un modelo matemático que revolucionó el campo de la valuación de opciones. Aunque este modelo se desarrolló inicialmente para opciones estándar, su extensión a las opciones barrera requiere de adaptaciones.

Aquí, el teorema de Girsanov juega un lugar indispensable, ya que permite cambiar la medida de probabilidad para simplificar los cálculos y así ajustar las condiciones del modelo a las características específicas de las opciones barrera. La relevancia de este trabajo no solo en su contribución teórica, si no también en su extensa aplicación.

Las opciones barrera son instrumentos financieros cada vez más utilizados en los mercados globales, y su correcta valuación es esencial para garantizar su efectividad de cobertura y especulación. Además, este estudio proporciona un marco conceptual y metodológico que puede ser aplicado a otros tipos de opciones exóticas, ampliando así su impacto en el campo de las finanzas.

Finalmente, es importante destacar que este trabajo no se limita a la valuación de una opción específica, sino que busca también brindar una comprensión más amplia de los conceptos y técnicas que se utilizan en la modelación de los derivados financieros.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capitulo presentaremos los conceptos básicos para entender mejor los procesos y lo que es indispensable para la comprensión del presente trabajo.

Una opción es un instrumento financiero derivado que supone un derecho, no necesariamente una obligación, para el poseedor de esta a comprar un activo, a un precio ya determinado en el momento de la firma del contrato (*strike* o precio de ejercicio) hasta una fecha determinada también en el contrato (vencimiento). Este tipo de derivados financieros se comercializa en numerosos mercados como puede ser el de acciones (renta variable), tipos de interés (renta fija), tipos de cambio (*Foreign Exchange*), y crédito entre otros [9].

Una clasificación de las opciones por su fecha de ejercicio es:

Opción Europea La característica principal de estas opciones es que solo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Dado su rigidez, las opciones europeas son las más fáciles de valorar, ya que solo hay que tener en cuenta lo que ocurre en el momento de vencimiento T. Existen opciones europeas que no son contratadas en un mercado bursátil y se denominan extrabursátiles o OTCs [9].

Opción Americana. Pueden ser ejercitadas en cualquier momento entre el día de su compra y el día de su vencimiento, ambos inclusive. También cabe remarcar que la prima de estas opciones siempre será mayor (esto se comprobará en el ejemplo práctico en la sección 5) que la de las opciones

Europeas, con las mismas características, ya que por su naturaleza otorgan al poseedor un derecho mayor (poder ejercer en cualquier instante a lo largo de la vida útil) que las opciones Europeas [10].

Opción Bermuda. Estas opciones tienen la particularidad de que se pueden ejercer en fechas concretas a lo largo de la vida de la opción. No podrán ejercerse en el periodo intermedio entre estas fechas discretas. Este tipo de opciones también se denomina en ocasiones Opción "de mitad del Atlántico" o Opción cuasi-americana, dado que por naturaleza están entre las opciones europeas y las americanas. Estas opciones serán muy útiles al estudiar las opciones americanas, ya que una opción bermuda con n momentos de ejercicio se aproxima a una opción americana para n muy grande.

Es posible distinguir entre una opcion put y call por la naturaleza del contrato.

Opción Call. Una opción *call* otorga a su poseedor el derecho (pero no la obligación) a comprar un activo subyacente a un precio de ejercicio o *strike price* en una fecha previamente determinada. Sin embargo, el vendedor de la opción *call* sí tiene la obligación de vender el activo subyacente al precio acordado en el caso de que el comprador haga uso de su legítimo derecho a comprar [1].

Existen 3 aspectos importantes a tener en cuenta cuando hablamos de una opción *call*:

1. Comprar una opción *call* es más barato que comprar el activo subyacente.

2. Si el precio del activo subyacente asciende en la bolsa por encima del *strike price*, obtendremos unas ganancias iguales al precio del subyacente menos el *strike price*.

3. Si, por el contrario, el precio del activo baja a niveles inferiores al *strike price*, no se producen ganancias al no ejercer la opción. En este caso, las pérdidas son conocidas e iguales a la prima de la opción.

Teniendo en cuenta estos puntos, la función del *pay-off* de una opción *call* es la siguiente:

$$C(S,t) = \text{máx}(S-K,0)$$

Donde:

- $C(S,t)$ = Valor de la opción *call*, que depende del precio del subyacente S y del tiempo t.
- S : = Precio del activo subyacente o *stock price*.
- K : = Precio de ejercicio o *strike price*.
- t : = Un instante en el tiempo.

Opción Put. Una opción *put* otorga al poseedor el derecho, sin obligación, de vender un activo subyacente (acción o *stock*), a un precio preestablecido (*precio strike o strike price*) en una fecha fijada (*fecha de madurez o maturity*).

La compra de opciones *put* se utiliza como cobertura (dejando de lado los fines especulativos que se suelen asociar con los instrumentos financieros), por ejemplo, cuando se anticipa una caída en los precios de las acciones que se poseen. Utilizando la compra de una opción *put*, se fija el precio a partir del cual se gana dinero. Si el precio de la acción cae por debajo de ese nivel, el inversor gana dinero. En este escenario, las ganancias obtenidas con la opción *put* compensan en todo o en parte la pérdida experimentada por dicha caída en las acciones poseídas .

De nuevo, hay 3 aspectos clave de una opción *put* que son primordiales:

1. Comprar una opción *put* es más barato que adquirir el activo subyacente.
2. Si el precio del activo subyacente desciende en la bolsa por debajo del *strike price*, se obtienen ganancias iguales al *strike price* menos el precio del activo subyacente.
3. Si el precio del activo subyacente sube a valores superiores al *strike price*, no se generan ganancias al no ejercer la opción. En este caso, las pérdidas están limitadas y son iguales a la prima de la opción.

4. Las ganancias del poseedor de una opción *put*, a diferencia de las de una *call option*, son limitadas y alcanzarían un máximo correspondiente al *strike price* en el improbable caso de que el activo subyacente se devaluara completamente.

Teniendo en cuenta estos aspectos, la función de *pay-off* de una opción *put* es la siguiente:

$$P(S,t) = \text{máx}(K - S, 0)$$

Donde:

- $P(S,t)$ = Valor de la opción *put*, que depende del precio del subyacente S y del tiempo t.
- S = Precio del activo subyacente o *stock price*.
- K = Precio de ejercicio o *strike price*.
- t = Un instante en el tiempo.

Para comenzar a describir todos los procesos, es indispensable el conocimiento del siguiente término. El activo subyacente se refiere al activo financiero sobre el cual se basa una opción. Este puede ser cualquier instrumento financiero que se negocie en los mercados, como acciones, índices y divisas.

El activo subyacente es crucial debido al valor de las opciones (tanto europeas como americanas). el cual depende del precio de este activo. Por ejemplo, si tienes una opción de compra (call) sobre acciones de una empresa, el valor de esa opción aumentará si el precio de las acciones sube por encima del precio de ejercicio (strike).

En el contexto de las opciones, se representa por S_t, donde t es el tiempo, indicando que el precio del activo puede variar a lo largo del tiempo.

En el mundo financiero el precio que se paga por una opción se conoce como prima. La prima de una opción, como ocurre generalmente con los precio, viene marcada por el juego de oferta y demanda del mercado. Sin embargo, estos ofertantes y demandantes realizan estimaciones para considerar el precio que están dispuestos a pagar o recibir por una opción.

Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo (Call Europeo): Supongamos que se tiene una opción call europea con un precio de ejercicio de $50 sobre una acción de la empresa *XYZ*, que expira el 30 de diciembre.

Recordando que el titular solo puede ejercer su derecho de compra en la fecha de vencimiento.

- Si el 30 de diciembre, la acción de *XYZ* está cotizando a $60, puedes ejercer la opción y comprar las acciones a $50, obteniendo una ganancia inmediata de $10 por acción.
- Si el precio de la acción es inferior a $50, no ejercerás la opción y simplemente la dejarás expirar.

Ejemplo (Call Americano): Suponga que se tiene una opción call americana con un precio de ejercicio de $50 sobre acciones de *XYZ*, que vence el 30 de diciembre, puedes ejercerla en cualquier momento antes o en esa fecha.

Recordamos que el titular puede ejercer su derecho de compra en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento.

- Si el 15 de noviembre el precio de la acción sube a $55, puedes ejercer la opción en ese momento, comprando las acciones a $50 y vendiéndolas en el mercado a $55 para obtener una ganancia de $5 por acción.

La flexibilidad de las opciones americanas te permite capitalizar aumentos en el precio del subyacente antes de la fecha de vencimiento.

Ejemplo (Put Europeo): Supongamos que se tiene una opción put europea con un precio de ejercicio de $50 sobre acciones de *XYZ*, que vence el 30 de diciembre.

Hay que recordar que el titular solo puede ejercer su derecho de venta en la fecha de vencimiento.

- Si el 30 de diciembre el precio de las acciones de *XYZ* es $40, puedes ejercer la opción, vendiendo las acciones a $50 y obteniendo una ganancia de $10 por acción.

- Si el precio es superior a $50, no ejercerás la opción, ya que sería más conveniente vender las acciones en el mercado a ese precio más alto.

Ejemplo (Put Americano): Supongamos que se tiene una opción put americana con un precio de ejercicio de $50 sobre acciones de XYZ, que vence el 30 de diciembre.

Recordemos que el titular puede ejercer su derecho de venta en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento.

- Si el 15 de noviembre el precio de la acción cae a $45, puedes ejercer la opción de inmediato, vendiendo las acciones a $50 y logrando una ganancia de $5 por acción.
- Si el precio de las acciones sigue bajando, aún puedes optar por esperar hasta una fecha más cercana al vencimiento para ejercer.

Nota: Las opciones europeas suelen ser más sencillas de valorar debido a su restricción de ejercicio, mientras que las americanas, por su mayor flexibilidad, requieren técnicas más complejas para su valoración (como el uso de árboles binomiales o modelos numéricos).

2.1. Opciones Barrera

Existen otro tipo de opciones más allá de las opciones denominadas Vanilla (Europeas y americanas) o simples, se trata de las opciones "Exóticas". Se les conoce como la segunda generación de opciones y se diferencian de las opciones Vanilla en que dependen de otros factores más allá del strike Price y el stock Price. Un ejemplo 3 Asian Options o Average Options que son opciones que dependen de la media del precio del activo subyacente a lo largo de un periodo de tiempo [2].

Las opciones exóticas ofrecen una variedad de estrategias para los inversores y especuladores en los mercados financieros. [10] describe algunas de estas opciones de la siguiente forma:

Las **opciones binarias** y **digitales** son derivados financieros que ofrecen pagos fijos predeterminados si el activo subyacente alcanza un nivel específico al vencimiento, lo que simplifica su estructura y permite a los inversores obtener resultados "todo o nada". Por otro lado, las **opciones chooser** permiten al comprador decidir, después de un tiempo, si quiere una opción de compra o de venta, ofreciendo así una flexibilidad valiosa. Finalmente, las **opciones de barrera** se activan o desactivan solo cuando el precio del activo subyacente cruza un nivel predeterminado, lo que las convierte en herramientas útiles para diseñar estrategias de cobertura personalizadas.

En este trabajo nos enfocaremos en las opciones de una barrera.

Las opciones barrera surgen del bajo o nulo control que se puede tener de los agentes, los cuales pueden modificar el precio o el movimiento de las acciones dentro del mercado. Para evitar las variaciones anómalas al precio de los activos, ya sean subidas o bajadas, surgen este tipo de opciones llamadas opciones barrera, las cuales mencionamos que dependen del precio del activo subayacente.

Exiten distintos tipos de opciones barrera, en el caso de una única barrera X_0 se tienen estas formulaciones para las siguientes opciones:

1. Up-and-out. Este tipo de opción tiene valor nulo si el precio del activo subyacente S_t alcanza por abajo X_0 a la barrera antes de la fecha de expiración.

2. Down-and-out. Esta opción tiene valor nulo si el precio del activo subyacente S_t alcanza por arriba a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

3. Up-and-in. La opción tiene valor nulo a menos que el precio del activo subyacente S_t alcance por abajo a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

4. Down-and-in. Esta opción tiene valor nulo a menos que el precio del activo subyacente S_t alcance por arriba a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

Ahora bien, al igual que se puede aplicar la opción de una barrera también existen las barreras dobles o de doble barrera. En este trabajo únicamente nos enfocaremos en una sola barrera.

Es importante tener en cuenta que las opciones barrera pueden ser utilizadas para gestionar riesgos y aprovechar oportunidades en el mercado, pero también pueden ser complejas y requieren una amplia comprensión de los conceptos financieros y de mercado.

Una opción europea con barrera es un tipo de opción que tiene una característica adicional: la opción solo se activa o desactiva si el precio del activo subyacente alcanza un nivel de precio específico (la barrera) antes del vencimiento.

Las opciones con barrera son derivados financieros que ofrecen una forma de manejar el riesgo como mejor nos convenga, sin tener que comprar o vender los activos subyacentes de forma obligatoria, de ahi mismo surge su nombre opción. A continuación, presento algunos ejemplos de opciones con barrera:

Ejemplo (Opción de barrera call): Si crees que el precio del oro al contado va a subir, puedes comprar una opción de barrera call. La barrera se establece en un nivel determinado, por ejemplo, 1.400. Si el precio del oro al contado supera la barrera, la opción se activa y puedes comprar el oro al contado a un precio determinado.

Ejemplo (Opción de barrera put): Si crees que el precio del euro/dólar va a bajar, puedes comprar una opción de barrera put. La barrera se establece en un nivel determinado, por ejemplo, 1.300. Si el precio del euro/dólar cae hasta la barrera, la opción se activa y puedes vender el euro al contado a un precio determinado.

Ejemplo (Opción Call Europea):

- Activo subyacente: Acción de XYZ.
- Precio de ejercicio: $S = 100$ dólares.
- Fecha de vencimiento: 30 de diciembre.
- Barrera: $B = 110$ dólares.
- Precio actual de la acción: 90 dólares.

Funcionamiento: Si el precio de la acción alcanza o supera los 110 dólares durante la vida de la opción, esta se activa. Ahora bien, si el precio de la acción nunca toca los 110 dólares, la opción no se activa y expira sin valor.

Escenario: El 1 de diciembre, el precio de la acción sube a 115 dólares, activando la opción. Si el 30 de diciembre el precio de la acción es 120 dólares, el titular puede ejercer la opción, comprando las acciones a 100 dólares, obteniendo una ganancia de 20 dólares por acción.

Ejemplo (Opción Put Europea): Supón que tienes una opción call europea con barrera knock-in sobre acciones de la empresa XYZ con las siguientes características:

- Activo subyacente: Acción de ABC.
- Precio de ejercicio: $S = 80$ dólares.
- Fecha de vencimiento: 30 de diciembre.
- Barrera knock-out: $B = 90$ dólares.
- Precio actual de la acción: 85 dólares.

Funcionamiento: Si el precio de la acción alcanza o supera los 90 dólares, la opción se desactiva inmediatamente. Ahora, si el precio nunca toca los 90 dólares, el titular puede ejercer la opción en la fecha de vencimiento.

Escenario: El precio de la acción nunca toca los 90 dólares durante la vida de la opción. El 30 de diciembre, el precio de la acción es 70 dólares, por lo que el titular puede ejercer la opción, vendiendo las acciones a 80 dólares, obteniendo una ganancia de 10 dólares por acción.

En este trabajo solo utilizaremos la opción barrera "down and out".

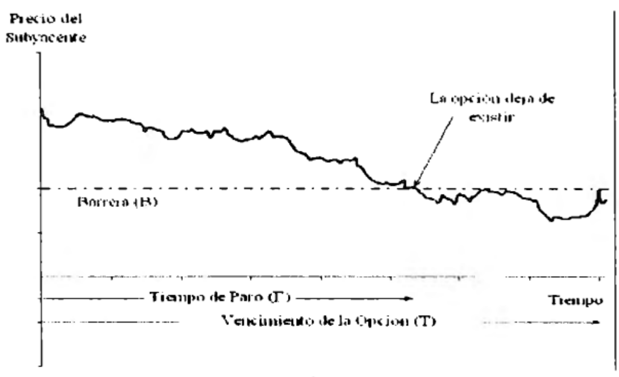

Figura 1. Opción Down-and-out

Figura 2.1: Down-and-out

2.2. Movimiento Browniano

Ahora que sabemos todo esto, necesitaremos conocer algunos otros conceptos que nos ayuden a comprender al máximo las siguientes ecuaciones y procesos matemáticos.

Variable Aleatoria

Definición. Una variable aleatoria es una función X definida en un espacio muestral Ω y que toma valores en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Es decir:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Esto implica que a cada resultado del experimento aleatorio $\omega \in \Omega$, le asignamos un número real $X(\omega)$.

Función de Densidad de Probabilidad

Definición. La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Ejemplo. Sea X una variable aleatoria con distribución normal, denotada como:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

donde μ es la media y σ^2 es la varianza.

Ejemplo. Sea X una variable aleatoria con distribución log-normal, denotada como:

$$X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$$

donde μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución normal del logaritmo natural de X, es decir, $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Definición. La función de densidad de probabilidad de una **variable aleatoria normal** con media μ y desviación estándar σ se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Algunas propiedades interesantes de la Distribución Normal son:

1. La distribución normal es simétrica respecto a la media μ.

2. Aproximadamente el 68 % de los datos se encuentran en el intervalo $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$, el 95 % en $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ y el 99.7 % en $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$.

3. La campana de la distribución normal se llama *curva de Gauss*.

Definición. En el caso particular de que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, tenemos una **distribución normal estándar** y la función es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Distribución Log-Normal

La distribución logarítmica normal o Log-Normal se utiliza en una amplia variedad de aplicaciones.

Definición. Una variable aleatoria continua X tiene una distribución logarítmica normal si la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. La función de densidad de probabilidad de X que resulta es:

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Donde μ es la media de la distribución normal de $Y = \ln(X)$ y σ es la desviación estándar de la distribución normal de $Y = \ln(X)$.

Esperanza o Valor Esperado

Definición. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$f(x)$. La media o valor esperado de X se define como:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

Teorema. Si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros μ y σ^2, es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces el valor esperado de X es μ.

Demostración. La función de densidad de probabilidad de X es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

El valor esperado de X, denotado por $\mathbb{E}[X]$, se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

Sustituyendo $f_X(x)$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Para simplificar esta integral, hacemos el cambio de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, lo cual implica que $x = \mu + u\sigma$ y $dx = \sigma\, du$. Entonces, la integral se convierte en:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + u\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Dividimos esta expresión en dos partes:

$$\mathbb{E}[X] = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

La primera integral es la integral de la función de densidad de una normal estándar, que es igual a 1:

$$\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \mu \cdot 1 = \mu$$

La segunda integral es la integral de una función impar (ya que $u \cdot e^{-u^2/2}$ es impar respecto a $u = 0$), por lo que su valor es 0:

$$\sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}[X] = \mu + 0 = \mu$$

Con esto, demostramos que el valor esperado de X es μ:

$$\mathbb{E}[X] = \mu.$$

Ahora bien, X es una variable aleatoria con distribución log-normal, es decir

$$X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$$

donde μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución normal del logaritmo de X, queremos encontrar el valor esperado de X.

Teorema. Si $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Demostración.[14] Si $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2, es decir, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Por definición de la esperanza:

$$E[X] = \int_0^\infty x f_X(x)\, dx,$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X. Para una variable lognormal, la densidad $f_X(x)$ está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

Por lo tanto:

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Simplificando términos obtenemos:

$$E[X] = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Realizamos el cambio de variable $y = \ln(x)$, lo que implica $x = e^y$ y $dx = e^y\, dy$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^y\, dy.$$

Factorizamos e^y dentro de la exponencial:

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(y - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Expandimos el término cuadrático $(y-\mu)^2$:

$$(y-\mu)^2 = y^2 - 2y\mu + \mu^2.$$

Sustituyendo en la exponencial:

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2 - 2y\mu + \mu^2}{2\sigma^2} + y\right) dy.$$

Simplificamos los términos dentro de la exponencial:

$$-\frac{y^2 - 2y\mu + \mu^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + y.$$

Combinamos $\frac{y\mu}{\sigma^2}$ y y:

$$-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} + y = -\frac{y^2}{2\sigma^2} + y\left(1 + \frac{\mu}{\sigma^2}\right).$$

Entonces:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} + y\left(1 + \frac{\mu}{\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

La constante $\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$ la sacaremos de la integral:

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

La integral restante es la integral de la densidad de una distribución normal estándar, que es igual a 1. Por lo tanto:

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Esperanza de Funciones de Variables Aleatorias

El valor esperado de una función $g(X)$ de la variable aleatoria X también puede calcularse. Para variables aleatorias discretas.

Para variables continuas como:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

Varianza

La **varianza** mide la dispersión de la variable aleatoria respecto a su valor esperado. Es una medida de la dispersión o el ancho de la distribución. Matemáticamente se define como:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y media μ. La varianza de X se define como:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

Teorema. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Var(x) = \sigma^2$.

Demostración. Para una variable X con distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sabemos que,

$$\mathbb{E}[X] = \mu.$$

Por lo tanto, podemos reescribir la varianza,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2].$$

Sabemos que

$$(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2.$$

Sustituyendo en la expresión de la varianza tenemos

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\mu^2].$$

Dado que $\mathbb{E}[X] = \mu$, se simplifica

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2.$$

Para calcular $\mathbb{E}[X^2]$, utilizamos la fórmula

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx,$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Al realizar la integral, se obtiene

$$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2.$$

Sustituyendo $\mathbb{E}[X^2]$ en la fórmula de la varianza,

Fin de la pureba 1.

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la varianza de una variable aleatoria que sigue una distribución normal es:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Teorema. Consideremos una variable aleatoria X que sigue una distribución lognormal con parámetros μ y σ^2. Entonces

$$Var(X) = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$$

Demostración. Sea $X \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que si X es lognormal, entonces existe una variable aleatoria normal $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que,

$$X = e^Y.$$

La varianza de X se define como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Para una variable lognormal, sabemos que

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Para calcular $\mathbb{E}[X^2]$, observamos que

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[e^{2Y}].$$

Dado que $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, utilizamos la propiedad de la esperanza de la exponencial de una variable normal, la cual para una constante,

$$\mathbb{E}[e^{cY}] = e^{c\mu + \frac{c^2\sigma^2}{2}}.$$

Aplicando esto con $c = 2$,

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[e^{2Y}] = e^{2\mu + 2\sigma^2}.$$

Ahora que tenemos los valores de $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[X^2]$, podemos calcular la varianza de X,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Sustituyendo los valores obtenidos,

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2.$$

Simplificando el segundo término tenemos,

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Factorizando $e^{2\mu}$,

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}).$$

Finalmente, tenemos la varianza de una variable aleatoria lognormal, $X \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$ es

Fin de la pureba 2.

$$Var(X) = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}).$$

Definición. La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ, se denomina **desviación estándar** de X.

Nuestro trabajo estará centralizado en la opción europea con una sola barrera, además de brindar más información al respecto para conocer de mejor manera la amplitud del tema y de las ventajas que conllevan su estudio y aplicación.

Nos enfocaremos en una opción "down-and-out". El precio de una opción estará dado por su valor esperado neutral al riesgo. Para calcular esta esperanza, necesitaremos conocer la probabilidad de que la barrera sea superada y la distribución del valor final del activo dado que la barrera no ha sido superada. Para calcular esto, lo que necesitamos es la distribución conjunta del mínimo y el valor terminal para un movimiento Browniano con tendencia. Con el fin de calcular la distribución conjunta, necesitamos desarrollar una mejor comprensión del movimiento Browniano, los tiempos de parada y el teorema de Girsanov.

Capítulo 3

Movimiento browniano

3.1. Introducción

El movimiento browniano es un proceso estocástico fundamental en diversas áreas de la física, finanzas y matemáticas. Fue observado por primera vez por el botánico Robert Brown en 1827 [11] al estudiar el movimiento de partículas de polen en agua. Posteriormente, el fenómeno fue formalizado matemáticamente por Albert Einstein y Norbert Wiener [12], desarrollando las bases del proceso estocástico que hoy conocemos como el movimiento browniano.

El movimiento browniano es un modelo ideal para describir el comportamiento aleatorio y errático de partículas suspendidas en un fluido, pero también se ha convertido en una herramienta clave en áreas como la teoría de opciones en finanzas (modelo de Black-Scholes) [14], la teoría de difusión en física y la biología matemática.

3.2. Fundamentos Matemáticos del Movimiento Browniano

El movimiento browniano, denotado comúnmente como B_t, es un proceso estocástico con las siguientes propiedades :

1. $B_0 = 0$, es decir, el proceso comienza en cero.

2. B_t tiene incrementos independientes: para $0 \leq s < t$, el incremento $B_t - B_s$ es independiente del valor de B_s.

3. Los incrementos $B_t - B_s$ son distribuidos normalmente con media cero y varianza proporcional al tiempo transcurrido,

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s).$$

4. El proceso B_t es continuo con probabilidad 1.

Matemáticamente, podemos representar la propiedad de los incrementos independientes y normales de la siguiente forma

$$\mathbb{E}[B_t] = 0, \quad \text{y} \quad \text{Var}(B_t) = t,$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$ denota la esperanza matemática, y $\text{Var}(\cdot)$ la varianza.

Definición Martingala: En teoría de probabilidad y procesos estocásticos, una martingala es un tipo de proceso estocástico en el cual el valor esperado futuro, dado el presente y el pasado, es igual al valor actual. Formalmente, sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Decimos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una **martingala** con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ si cumple con las siguientes propiedades:

1. X_t es integrable para cada $t \geq 0$, es decir, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.

2. X_t es $\mathcal{F}_t$-adaptado.

3. Para cada $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s.$$

Ejemplo: Considere el proceso estocástico $M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, donde $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[X_i] = 1$.

Demostración. Para verificar que M_n es una martingala, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. *Integrabilidad*: Para todo n, $E[|M_n|] < \infty$. Dado que $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$ y $E[X_i] = 1$, tenemos:

$$E[M_n] = E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n E[X_i] = 1.$$

Por lo tanto, M_n es integrable.

2. *Propiedad de martingala*: Se debe cumplir que $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$, donde $\mathcal{F}_n$ es la filtración generada por $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Calculamos:

$$M_{n+1} = M_n \cdot X_{n+1}.$$

Luego, la esperanza condicional es:

$$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[M_n \cdot X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n \cdot E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Dado que X_{n+1} es independiente de $\mathcal{F}_n$ y $E[X_{n+1}] = 1$, se tiene:

$$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n \cdot 1 = M_n.$$

Por lo tanto, M_n satisface la propiedad de martingala.

Concluimos que $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$ es una martingala.[15]

Ejemplo. El movimiento browniano estándar $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala respecto a su propia filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Esto se debe a que, para $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s.$$

Ejemplo. Considere un movimiento browniano geométrico S_t definido por:

$$S_t = Se^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

donde W_t es un movimiento browniano estándar, $\mu \in \mathbb{R}$ es la tasa de crecimiento media, $\sigma > 0$ es la volatilidad y $S > 0$ es el valor inicial.

Definimos un factor de descuento $M_t = e^{\mu t}$ y consideramos el proceso:

$$Z_t = \frac{S_t}{M_t}.$$

Sustituyendo S_t en la definición de Z_t:

$$Z_t = \frac{Se^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}}{e^{\mu t}} = Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}.$$

El término $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$ es un exponencial de un movimiento browniano, y sabemos que cumple la propiedad de martingala. Para verificar que Z_t es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ generada por W_t, calculamos su esperanza condicional:

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E\left[Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}\middle|\mathcal{F}_s\right], \quad \text{para } s < t.$$

Usamos la propiedad de incrementos independientes del movimiento browniano y reescribimos $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, donde $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$:

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right].$$

La esperanza del término exponencial se calcula como:

$$E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)},$$

por lo que:

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} = Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s + \sigma W_s} = Z_s.$$

Esto demuestra que $Z_t = \frac{S_t}{M_t}$ es una martingala respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Conclusión. El movimiento browniano geométrico S_t descontado por el factor $M_t = e^{\mu t}$ forma una martingala.[8]

3.3. El principio de reflexión

Sea W_t un movimiento browniano.

Definición Se define como m_T el valor mínimo de W_t durante el intervalo [0, T], es decir,

$$m_T = \text{ínf}\, W_t \,\{0 \leq t \leq T\}$$

Queremos calcular la probabilidad del evento E, definido por

$$E = [m_T \leq y, W_T \geq x]$$

para $x \geq y$, $y < 0$. Si el evento ocurre, entonces tenemos que W_{t_0} , es igual a y ya que las trayectorias brownianas son continuas, y ciertamente hay algún valor para el cual W_t es menor o igual a y. Por lo tanto, el movimiento browniano desciende al menos hasta y, luego vuelve a subir al nivel x.

Supongamos que en lugar de continuar el movimiento browniano después de un tiempo t_0, lo reiniciamos y lo reemplazamos por su valor reflejado en el nivel y. Así definimos un segundo movimiento aleatorio

$$W'_t = \begin{cases} W_t, & \text{para } t < t_0, \\ 2y - W_t, & \text{para } t \geq t_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

El evento $W_T \geq x$ se convierte en $W_T \leq 2y - x$. El punto crucial aquí es que el evento $W'_T \leq 2y - x$ sólo puede ocurrir sí $m_T \leq y$ también ocurre, ya que de lo contrario W_t ha estado por encima de y en todo momento y, por lo tanto, por encima de $2y - x$, que es menor que y en todo momento. El evento W'_T es equivalente al evento W_T

$$W'_T \leq 2y - x.$$

Por supuesto, necesitamos conocer la distribución de W_T para que esto sea de alguna utilidad, W'_t también es un movimiento browniano. Sea r la primera vez que W_t es igual a y. Entonces para $s \geq 0$ tenemos

$$W_{r+s} - W_r = W_r - W_{r+s} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, la cuestión crucial ahora es la distribución de $W_{r+s} - W_r$. Si r fuera una constante, entonces no habría ningún problema; de las propiedades del movimiento browniano se deduciría que la distribución es simplemente una normal, de media 0 y varianza s.

Pero r no es constante, además tiene la propiedad de ser el tiempo de parada. Recordemos que un tiempo de parada es un tiempo aleatorio tal que t está determinado por la información disponible a este mismo tiempo t. El tiempo para alcanzar un nivel dado es claramente ese tiempo, ya que $r \leq t$ es la afirmación de que el valor mínimo de W_s para $s \leq t$ es menor o igual a y.

El punto clave es que como el evento en el que el tiempo de parada ha ocurrido sólo depende de la información disponible, la distribución de $W_{r+s} - W_r$, no se verá afectada en absoluto, ya que por definición, es independiente del comportamiento de

$$W_r, r < t.$$

Es decir, tenemos el siguiente Lema llamado la propiedad fuerte de Markov.

Lema.

$$\mathbb{P}(W_T \geq x, m_T \leq y) = \mathbb{P}(W_T \leq 2y - x), y \leq 0, x \leq y \tag{3.3}$$

Demostración. Ver [7].

3.4. Definición y Conceptos Básicos del Tiempo de llegada o Tiempo de alcance

En teoría de probabilidades y procesos estocásticos, el **tiempo de llegada** o **tiempo de llegada** es una variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un proceso estocástico en alcanzar un determinado estado o valor por primera vez. Este concepto es fundamental en el análisis de procesos de Markov, el movimiento browniano, y en aplicaciones en finanzas, física y otros campos.

Definición Dado un proceso estocástico X_t con un espacio de estados $\mathcal{S}$, el tiempo de llegada T_A asociado a un conjunto $A \subseteq \mathcal{S}$ se define formalmente como el primer tiempo en el que el proceso X_t alcanza el conjunto A, i.e., el tiempo de llegada es una variable aleatoria que se expresa de la siguiente manera:

$$T_A = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

En otras palabras, T_A es el tiempo más pequeño t tal que X_t alcanza a A. Si el proceso nunca llega a A, se dice que $T_A = \infty$.

3.4.1. Tiempo de llegada en el Movimiento Browniano

Definición. Para un movimiento browniano estándar B_t, el tiempo de llegada de un nivel $a > 0$ es el primer tiempo en que el proceso B_t alcanza el valor a. Es decir, el tiempo de llegada para el nivel a se define como

$$T_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t = a\}.$$

Este tiempo de llegada tiene varias propiedades interesantes.

1. En particular, se sabe que para un movimiento browniano estándar:

   $$\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1,$$

   lo que significa que el movimiento browniano casi seguramente alcanzará cualquier valor a en un tiempo finito. [7]

2. La esperanza del tiempo de llegada para un nivel a en el movimiento browniano es infinita.

   $$\mathbb{E}[T_a] = \infty,$$

   lo que refleja el comportamiento altamente errático del proceso browniano [8].

3. **Distribución del tiempo de llegada**: En muchos casos, la distribución del tiempo de llegada puede ser explícitamente determinada. Por ejemplo, en el caso de procesos de Markov, se pueden calcular las probabilidades asociadas con el tiempo de llegada mediante la solución de ecuaciones diferenciales o utilizando matrices de transición [8].

4. **Esperanza del tiempo de llegada**: La esperanza del tiempo de llegada, $\mathbb{E}[T_A]$, es un valor clave para entender el comportamiento promedio del proceso. En algunos casos, puede ser infinita, como en el caso del movimiento browniano simple [8].

En conclusion el tiempo de llegada es un concepto fundamental en la teoría de procesos estocásticos, con aplicaciones en diversas disciplinas como la física, las finanzas y la teoría de la probabilidad. Su estudio proporciona información crucial sobre el comportamiento de los procesos aleatorios y su tiempo de primer paso hacia ciertos estados o valores. Ver[8].

3.5. Teorema de Girsanov

Hemos establecido una tendencia para obetner el valor conjunto del valor mínimo y terminal de un movimiento browniano sin tendencia.

Lamentablemente, esto no es de gran ayuda, ya que una acción en un entorno de tipos de interés distintos de cero tendrá una tendencia igual a la tasa libre de riesgo y el logaritmo de la acción tendrá una tendencia dependiendo de la tasa libre de riesgo y la volatilidad. Note que trabajar con precios con descuento no ayudará aquí, ya que la barrera dependerá del precio real, no del precio de descuento.

La herramienta estándar para cambiar la tendencia de un movimiento browniano es el Teorema de Girsanov. Aquí necesitaremos entender el teorema de Girsanov, explícitamente el cambio de medida para poder calcular su efecto sobre la distribución conjunta.

El **teorema de Girsanov** es una herramienta fundamental en la teoría de procesos estocásticos y tiene aplicaciones cruciales en finanzas, física estadística y otras áreas donde se analiza el cambio de medida probabilística de procesos aleatorios. Este teorema permite cambiar la medida de probabilidad de un movimiento browniano para que el proceso tenga una cierta deriva (drift), transformándolo en un nuevo proceso adaptado a la medida modificada.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso de movimiento browniano W_t bajo la medida $\mathbb{P}$, se desea cambiar esta medida a otra medida $\mathbb{Q}$ en la que el proceso tenga una deriva v. Para hacer esto, se introduce un **factor de ajuste** o **densidad de Radon-Nikodym**, que transforma la medida original $\mathbb{P}$ a la nueva medida $\mathbb{Q}$ a través de la siguiente definición,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = X_T = e^{vW_T - \frac{1}{2}v^2 T}. \tag{3.4}$$

Este cambio de medida asegura que bajo $\mathbb{Q}$, el proceso transformado

$$B_t = W_t - vt \tag{3.5}$$

es un movimiento browniano estándar sin deriva en la medida $\mathbb{Q}$.

Un cambio de medida consiste realmente en reponderar la probabilidad de las trayectorias. Por lo tanto, los construimos multiplicando las probabilidades por una variable aleatoria.

Para poder continuar necesitaremos las bases de un nuevo concepto llamada filtracion. En el contexto de la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos, una filtración es una colección de σ-álgebras que modela la acumulación de información a lo largo del tiempo. Formalmente, se define de la siguiente manera.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

- Una **filtración** es una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tales que:
  1. Para cada $t \geq 0$, se cumple que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.
  2. Si $s \leq t$, entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.
- Cada $\mathcal{F}_t$ representa la información disponible hasta el tiempo t.

De esta manera, una filtración es útil para modelar sistemas en los cuales la información se revela progresivamente con el tiempo, como en los mercados financieros y otros procesos aleatorios dependientes del tiempo.

Definimos A como un evento en la filtración F_T . Sea $\mathbf{1}_A$ la variable aleatoria que toma el valor 1 si ocurre el evento A, y 0 en caso contrario. Podemos definir una medida mediante,

$$\hat{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X), \tag{3.6}$$

donde X es una variable aleatoria en la misma filtración F_T.

Para que esta definición sea una medida de probabilidad, requiere lo siguiente:

- Las probabilidades deben ser no negativas, por lo que X no debe ser negativo.
- La probabilidad del evento global (el espacio muestral completo) debe ser igual a 1. Esto se cumple al tomar A como todo el espacio muestral, en cuyo caso $\mathbf{1}_A$ es idénticamente 1, lo que implica que debemos tener,

$$\mathbb{E}(X) = 1. \tag{3.7}$$

De este modo, $\hat{P}(A)$ cumple con las propiedades básicas de una medida de probabilidad, garantizando que los valores esperados de X satisfacen los requisitos para la no negatividad y la normalización.

Recuerde que un cambio de medida equivalente implica tener los mismos valores de probabilidad 0 y 1. Por lo tanto, necesitaremos que la probabilidad de que X (en la medida original) sea cero, ya que de lo contrario el conjunto donde es cero pasará de ser de probabilidad positiva a probabilidad cero. Por lo tanto, suponemos que X es positiva de ahora en adelante.

Un problema es que en realidad necesitaremos usar diferentes variables aleatorias para cada filtración, F_t, ya que no podemos tener una sola variable aleatoria simple que esté en la filtración F_∞. Sea X_t la variable aleatoria para F_t. Para un evento A en F_s para $s < t$, tendremos dos candidatos diferentes para P(A)

$$\mathbb{E}(1_A X_s), \mathbb{E}(1_A X_t).$$

Es evidente que queremos que estos dos valores coincidan. Es equivalente a la condición de

$$\mathbb{E}(1_A(X_{s-t})) = 0. \tag{3.8}$$

Para cualquier evento A en F_s. Como A es arbitrario, esta ecuación realmente dice que no importa qué valor tome X_s, ni cómo llegó allí, el valor esperado de X_t en el momento s debe ser igual a X_s. Es decir, debemos exigir X_s para satisfacer la condición de martingala.

$$\mathbb{E}(X_t | F_s) = X_s, \tag{3.9}$$

entonces tenemos

$$\mathbb{E}(X_t 1_A) = \mathbb{E}((X_s 1_A) + \mathbb{E}((X_t - X_s) 1_A). \tag{3.10}$$

Como $1_A \in F_s$, y $X_t - X_s$, es independiente de F_s, podemos reescribir el último término como

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)\mathbb{E}(1_A),$$

que será igual a cero ya que el primer factor es cero.

Concluimos que nuestro cambio de medida debe estar dado por un conjunto de variables aleatorias positivas X_t que forman una martingala con respecto a la filtración generada por el movimiento browniano W_t. Existe uno de esos procesos que hemos estudiado repetidamente, el movimiento browniano geométrico. Por lo tanto, tomamos $X_0 = 1$ y

$$dX_t = vX_t dw_t, \tag{3.11}$$

o equivalente,

$$X_t = e^{-\frac{1}{2}v^2 + vW_t}. \tag{3.12}$$

Queremos demostrar que el cambio de medida propuesto es correcto. Para esto, verificaremos que W_t se distribuye adecuadamente bajo la nueva medida. Sabemos que W_t tiene la misma distribución que $\sqrt{t}N(0,1)$ que ahora denotaremos como Z. A partir de esto, podemos calcular la probabilidad de que W_t sea menor que x bajo la nueva medida.

Sabemos que,

$$P(W_t < x) = P\left(Z < \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}\, ds.$$

Esto lo podemos expresar de la siguiente manera,

$$P(W_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}\, ds. \tag{3.13}$$

De esta manera, obtenemos que la densidad de W_t está dada por

$$f_{W_t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{s^2}{2t}}. \tag{3.14}$$

Hacemos un cambio de variable para simplificar la integral. Cambiamos s por $u = \frac{s}{\sqrt{t}}$, de modo que $s = u\sqrt{t}$ y $ds = \sqrt{t}\, du$. Sustituyendo en la integral anterior podemos escribir la probabilidad de que $W_t < x$ en términos de la esperanza, de la siguiente forma,

$$P(W_t < x) = \mathbb{E}(1_{\{W_t<x\}}X_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{s^2}{2t}-\frac{1}{2}v^2t+vs}\,ds.$$

En teoría de procesos estocásticos, el cambio de medida suele implicar el uso de un **factor de ajuste** que se construye usando el **teorema de Girsanov**. Este teorema permite transformar el movimiento browniano estándar en un movimiento browniano con "drift"(o deriva), mediante un factor de ajuste que depende del proceso.

Si W_t es un movimiento browniano bajo la medida original $\mathbb{P}$, y queremos introducir un drift v en la nueva medida $\mathbb{Q}$, el factor de ajuste X_t bajo la nueva medida se define como

$$X_t = e^{vW_t-\frac{1}{2}v^2t}. \tag{3.15}$$

Este valor de ajuste X_t actúa como una densidad de Radon-Nikodym, que transforma la probabilidad original bajo $\mathbb{P}$ a una probabilidad nueva bajo $\mathbb{Q}$, donde el proceso ahora tiene drift.

Queremos transformar W_t de un movimiento browniano estándar (sin drift) bajo $\mathbb{P}$ a un movimiento browniano con drift v bajo $\mathbb{Q}$.

Según el teorema de Girsanov, si definimos el proceso ajustado como

$$B_t = W_t - vt,$$

entonces B_t será un movimiento browniano estándar bajo la nueva medida $\mathbb{Q}$. Para que este cambio de medida funcione, la relación entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ debe estar dada por el factor de ajuste.

$$X_t = e^{vW_t-\frac{1}{2}v^2t}.$$

- **Primera Parte:** vW_t**:** Este término introduce el drift al proceso, ajustando la media de W_t para que tenga una tendencia de v.
- **Segunda Parte:** $-\frac{1}{2}v^2t$**:** Este término compensa la varianza del proceso para asegurarse de que el cambio de medida no afecte la natura-

leza del movimiento browniano, manteniendo la varianza correcta en la nueva medida.

El factor de ajuste $X_t = e^{vW_t - \frac{1}{2}v^2 t}$ transforma las probabilidades bajo la medida $\mathbb{P}$ en probabilidades bajo $\mathbb{Q}$ de manera que el proceso bajo $\mathbb{Q}$ tenga el drift v.

Este valor de ajuste se usa en la expectativa para obtener probabilidades bajo la nueva medida, como se muestra en la fórmula dada.

Simplificando términos en el exponente, tenemos:

$$P(W_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(s-vt)^2}{2t}}\, ds. \tag{3.16}$$

Realizamos un segundo cambio de variable, donde $r = s - vt$. Entonces $s = r + vt$ y $ds = dr$, con lo que podemos escribir

$$P(W_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{r^2}{2t}}\, dr.$$

$$= P(W_t < x - vt).$$

Esto demuestra que el cambio de medida es correcto, ya que se ha transformado la probabilidad de W_t bajo la nueva medida en una expresión equivalente.

Hemos demostrado que la probabilidad de que $W_t < x$ en la nueva medida es igual a la probabilidad de que $W_t + vt$ sea menor que x en la antigua medida. En otras palabras, el proceso W_t se distribuye como un movimiento browniano con tendencia v en la nueva medida.

Sólo hemos demostrado que la distribución de W_t es correcta; también debemos demostrar que los incrementos marginales son correctos.

Calculamos

$$\mathbb{P}(W_t - W_s < x) = \mathbb{E}(1_{W_t - W_s} < x e^{\frac{-1}{2}v^2 t + vW_t})$$

$$= \mathbb{E}(1_{W_t - W_s} < xe^{\frac{-1}{2}v^2(t-s)-v(W_t-W_s)}e^{\frac{-1}{2}v^2 s+vW_s}) \tag{3.17}$$

Como $W_t - W_s$ es independiente de W_s, podemos factorizar el último término en un término separado de esperanza 1. Esto nos deja con

$$\mathbb{P}(W_t - W_s < x) = \mathbb{E}(1_{W_t - W-s} < xe^{\frac{-1}{2}v^2(t-s)+v(W_t-W_s)}). \tag{3.18}$$

Como la distribución de $W_t - W_s$ es idéntica a la de W_{t-s}, ahora volvemos a la situación en la que $s = 0$ que ya cubrimos anteriormente. Concluimos que $W_t - W_s$ se distribuye como un movimiento browniano con tendencia v.

Teorema 2.5.1 Sea W_t un movimiento browniano; entonces podemos definir una nueva medida por

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(1_A e^{\frac{-1}{2}v^2 t+vW_t})$$

Demostracion. Sea W_t un movimiento browniano bajo la medida de probabilidad $\hat{\mathbb{P}}$. Queremos demostrar que es posible definir una nueva medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ mediante la relación:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[1_A e^{-\frac{1}{2}v^2 t+vW_t}\right],$$

donde A es un evento medible en la filtración generada por W_t.

Paso 1: Verificación de que $\mathbb{Q}$ es una medida de probabilidad Para que $\mathbb{Q}$ sea una medida de probabilidad válida, debe cumplir que.

1. $\mathbb{Q}(A) \geq 0$ para todo evento A.

2. $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$.

3. $\mathbb{Q}$ es aditiva sobre eventos disjuntos.

(1) No negatividad; Dado que

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

La esperanza de 1_A podemos definirla de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1_A] &= 1\mathbb{P}(1_A = 1) + 0\mathbb{P}(1_A = 1)\\ &= 1P(A) + 0P(A)\\ &= P(A) + 0\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{P}(A) \geq 0$, concluimos con la no negatividad.

(2) Normalización: Para verificar que $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, consideremos $A = \Omega$:

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\frac{1}{2}v^2t+vW_t}\right].$$

El término dentro de la esperanza es el cambio de medida de Radon-Nikodym definido por,

$$Z_t = e^{-\frac{1}{2}v^2t+vW_t}.$$

Por la propiedad de los exponenciales de procesos gaussianos y la martingala Z_t, sabemos que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t] = 1.$$

Por lo tanto, $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$.

(3) Aditividad: Dado que la esperanza es lineal y $\mathbb{Q}$ está definido en términos de una esperanza bajo $\mathbb{P}$, se sigue que $\mathbb{Q}$ es aditiva para eventos disjuntos.

Interpretación del cambio de medida. El factor $e^{-\frac{1}{2}v^2t+vW_t}$ actúa como el núcleo de densidad de Radon-Nikodym que transforma $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$. Por el teorema de Girsanov, bajo $\mathbb{Q}$, el proceso W_t se convierte en un movimiento browniano con deriva v. Es decir,

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + vt.$$

Por lo tanto, bajo la nueva medida $\mathbb{Q}$, el proceso tiene la misma estructura, pero con una deriva adicional.

Se ha demostrado que $\mathbb{Q}(A)$ define una nueva medida de probabilidad relacionada con $\mathbb{P}$ mediante el cambio de medida descrito en el enunciado del teorema.

Según esta nueva medida, W_t es un movimiento browniano con tendencia v. El término W_t, que utilizamos para cambiar las ponderaciones de probabilidad, a veces se denomina tendenciado de Radon-Nikodym. Tenga en cuenta el análogo con integración ordinaria, un cambio de variables conduce a un término adicional que es la tendenciada del cambio de variable. Tenga en cuenta también que podemos volver a cambiar fácilmente.

Simplemente cambiamos la tendencia por $-v$ en lugar de por v. Cambiamos la tendencia usando el movimiento browniano en la nueva medida en lugar de la antigua. Por lo tanto, si W_t era nuestro movimiento browniano original, entonces W_t se ha desplazado v en la nueva medida, por lo que el movimiento browniano en la nueva medida es:

$$\hat{W}_t = W_t - vt. \tag{3.19}$$

Por lo tanto, el tendenciado Radon-Nikodym para volver a cambiar es

$$e^{\frac{-1}{2}v^2t - v\hat{W}_t} = e^{\frac{-1}{2}v^2t + v^2t - vW_t} = \frac{1}{e^{\frac{-1}{2}v^2t + v\hat{W}_t}}, \tag{3.20}$$

es decir, el recíproco de la tendenciada original. Si queremos calcular la esperanza según $\mathbb{P}$, también reponderamos según X_t. Esto queda claro cuando se calcula la esperanza de una función constante por partes, ya que entonces solo tenemos una suma lineal de probabilidades. El caso general se tendencia de la aproximación mediante funciones constantes por partes.

3.6. Distribución conjunta del valor mínimo y terminal para un movimiento browniano con tendencia

La Ley del Precio Mínimo establece que en un mercado eficiente y sin fricciones, dos activos idénticos deben tener el mismo precio. Esto se aplica a los activos financieros, bienes físicos u otros productos comercializables. Si hay diferencias de precio entre dos activos idénticos, los arbitrajistas intervendrán comprando el activo subvaluado y vendiendo el sobrevaluado hasta que los precios se igualen.

3.6.1. Valor Intrínseco Mínimo en Opciones

En el contexto de las opciones financieras, el *valor intrínseco mínimo* es el valor mínimo que una opción puede tener, y es determinado por la diferencia entre el precio actual del activo subyacente y el precio de ejercicio de la opción. Para una opción de compra (call option), el valor intrínseco mínimo es cero si el precio del activo subyacente es inferior al precio de ejercicio; para una opción de venta (put option), el valor intrínseco mínimo es cero si el precio del activo subyacente es superior al precio de ejercicio.

En esta sección combinamos la ley del valor mínimo con el teorema de Girsanov previamente estudiada, para tendenciar la ley conjunta para un movimiento browniano de tendencia.

Sea W_t un movimiento browniano.

Teorema. Sea $Y_t = \sigma W_t$, y m_t^Y sea el mínimo de Y_t hasta el tiempo t. Entonces tenemos que para $y < 0$ y $x > y$

$$\mathbb{P}(Y_t > x, m_t^Y \leq y) = \mathbb{P}(Y_t < 2y - x). \tag{3.21}$$

Esto se desprende del resultado del movimiento browniano, ya que el término de volatilidad no supone ninguna diferencia real. Deseamos demostrar un resultado análogo para un movimiento browniano con tendencia.

Sea

$$Z_t = vdt + \sigma dW_t \tag{3.22}$$

y m_t^Z denota su mínimo hasta el momento t. Nuestro principal resultado es el siguiente.

Teorema 2.6.1 Si $y < 0$ y $x \geq y$. entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_t \geq x, m_t^Z \leq y) &= e^{2vy\sigma^{-2}}\mathbb{P}(Z_t \leq 2y - x + 2vt)\\ &= e^{2vy\sigma^{-2}}N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Demostración. Sea Z_t un movimiento browniano con deriva v y varianza σ^2, es decir;

$$Z_t = W_t + vt,$$

donde W_t es un movimiento browniano estándar. Queremos demostrar que, para $y < 0$ y $x \geq y$,

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) = e^{2vy/\sigma^2} P(Z_t \leq 2y - x + 2vt),$$

o, de manera equivalente:

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) = e^{2vy/\sigma^2} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde $m_{Z_t} = \min\{0 \leq s \leq t\} Z_s$, es el mínimo del proceso Z_t hasta el tiempo t, y $N(\cdot)$ denota la función de distribución acumulada de una normal estándar.

El proceso Z_t condicionado a que su mínimo esté por debajo de y puede analizarse mediante el método de reflexión. Definimos el proceso reflejado alrededor de y como:

$$Z'_t = \begin{cases} Z_t, & \text{si } Z_t \geq y, \\ 2y - Z_t, & \text{si } Z_t < y. \end{cases}$$

El proceso Z'_t tiene la misma distribución que Z_t debido a la simetría del movimiento browniano reflejado.

Usamos la propiedad de reflexión para expresar la probabilidad conjunta $P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y)$ como una probabilidad no reflejada. La probabilidad de que Z_t esté por encima de x y que el mínimo sea menor o igual a y es equivalente a la probabilidad de que Z_t esté por debajo de $2y - x$ en el proceso reflejado, es decir;

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) = P(Z'_t \leq 2y - x).$$

El cambio de medida debido a la deriva v introduce un factor de ajuste en la probabilidad. Bajo la nueva medida de probabilidad, la densidad cambia por un factor exponencial e^{2vy/σ^2}. Por lo tanto,

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) = e^{2vy/\sigma^2} P(Z_t \leq 2y - x + 2vt).$$

Sabemos que $Z_t \sim N(vt, \sigma^2 t)$. Entonces

$$P(Z_t \leq 2y - x + 2vt) = N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una normal estándar. Sustituyendo este resultado, obtenemos:

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) = e^{2vy/\sigma^2} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Hemos demostrado (Teorema 2.6.1)

Es sencillo reducirla al caso donde $\sigma = 1$. Por lo tanto, asumimos que σ es igual a 1.

Teorema 2.6.2 Sea W_t un movimiento browniano; entonces podemos definir una nueva medida por

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A e^{\frac{-1}{2}v^2 t + vW_t})$$

Utilizamos un cambio de medida para eliminar la tendencia de Z_t. Ahora el cambio de medida estará dado por

$$e^{\frac{-1}{2}v^2 t - vW_t},$$

y para volver a cambiar tomamos

$$e^{\frac{-1}{2}v^2 t - vZ_t}.$$

Denotamos la esperanza bajo la medida original por $\mathbb{E}$ y bajo la nueva medida por $\mathbb{E}$. Tenemos, por los resultados de la sección anterior.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A e^{\frac{-1}{2}v^2 t - vZ_t}) \tag{3.23}$$

para cualquier evento A $\in F_t$. En particular, es válido para

$$A = \{Z_t \geq x, m_t^Z \leq y\}. \tag{3.24}$$

Por lo tanto, deseamos calcular

$$\mathbb{E}(1_{\{Z_t \geq x, m_t^Z \leq y\}} e^{\frac{-1}{2}v^2 t + vZt}),$$

con Z_t un movimiento browniano bajo esta medida.

Usamos el principio de reflexión, como $x \geq y$, tenemos que si el movimiento browniano, Z_t, toca el nivel en cualquier lugar, entonces la distribución terminal de $2y - Z_t$ es igual a la de Z_t. Como nuestra función indicadora es cero a menos que se supere el nivel y, nuestra esperanza debe ser igual a;

$$\mathbb{E}(1_{\{2y - Z_t \geq x \ , m_t^Z \leq y\}} e^{\frac{-1}{2}v^2 t + v(2y + Z_t)})$$

Sin embargo, $2y - Z_t \geq x$ es equivalente a $Z_t \leq 2y - x$ y $2y - x$ es menor que x, lo que significa que la condición del mínimo ahora es redundante. Por lo tanto, la esperanza es igual a;

$$\mathbb{E}(1_{\{Z_t \leq 2y - x\}} e^{\frac{-1}{2}v^2 t + v(2y - Z_t)}) = e^{2yv} \mathbb{E}(1_{\{Z_t \leq 2y - x\}} e^{\frac{-1}{2}v^2 t - vZ_t}).$$

Deseamos eliminar el término exponencial en la esperanza. Podemos considerarlo como el tendenciado Radon-Nikodym de una transformación de Girsanov que cambia la tendencia de Z_t en $-v$. Usamos $'$para denotar la medida correspondiente. Entonces

$$\mathbb{E}(1_{\{Z_t \leq 2y - x\}} e^{\frac{-1}{2}v^2 t - vZ_t}) = \mathbb{E}'(1_{\{Z_t \leq 2y - x\}}) = \mathbb{P}'(Z_t \leq 2y - x).$$

Según la nueva medida, Z_t tiene una tendencia -v, por lo que el término final es igual a la probabilidad de que un movimiento browniano con una tendencia $-v$ sea menor que $2y - x$. Esto es igual a la probabilidad de que un movimiento browniano con tendencia v sea menor que $2y - x + 2vt$ y se ha terminado. Podemos deducir fácilmente la ley del mínimo de un movimiento browniano con tendencia, tenemos

$$\mathbb{P}(m_t^Z \leq y) = \mathbb{P}(m_t^Z \leq y, Z_t \leq y) + \mathbb{P}(m_t^Z \leq y, Z_t \geq y). \tag{3.25}$$

El evento de que el mínimo sea menor que y y el valor terminal sea menor que y es el mismo que el evento de que el valor terminal sea menor que y.

Por lo tanto tenemos,

$$\mathbb{P}(m_t^Z \leq y) = \mathbb{P}(Z_t \leq y) + \mathbb{P}(m_t^Z \leq y, Z_t \geq y) \tag{3.26}$$

También tenemos el siguiente

Corolario 2.6.1

$$\mathbb{P}(m_t^Z \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

o equivalente

$$\mathbb{P}(m_t^Z \geq y) = N\left(\frac{vt - y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Como

$$\mathbb{P}(Z_t \geq x, m_t^Z \leq y) + \mathbb{P}(Z_t \leq x, m_t^Z \leq y) = \mathbb{P}(m_t^Z \leq y).$$

Demostración. Sea Z_t un movimiento browniano con drift, descrito por la ecuación:

$$Z_t = z_0 + vt + \sigma B_t,$$

donde B_t es un movimiento browniano estándar, v es el coeficiente de drift y σ es la volatilidad [7, 8].

Queremos demostrar que

$$P(m_{Z_t} \geq y) = N\left(\frac{vt - y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde $m_{Z_t} = \min_{0 \leq s \leq t} Z_s$ es el mínimo del proceso en $[0, t]$, y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar.

La probabilidad de que el mínimo m_{Z_t} esté por debajo de y es

$$P(m_{Z_t} \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

La probabilidad complementaria $P(m_{Z_t} \geq y)$ se obtiene como

$$P(m_{Z_t} \geq y) = 1 - P(m_{Z_t} \leq y).$$

Aplicando $1 - N(z) = N(-z)$, obtenemos

$$P(m_{Z_t} \geq y) = N\left(\frac{vt - y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

La relación

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \leq y) + P(Z_t \leq x, m_{Z_t} \leq y) = P(m_{Z_t} \leq y),$$

es una descomposición de la probabilidad $P(m_{Z_t} \leq y)$ en dos eventos excluyentes.

También tenemos

Corolario 2.6.2

Para $y \leq 0$ y $x \geq y$,

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, m_t^Z \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$-e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Demostración. Sea Z_t un movimiento browniano con drift, descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$Z_t = z_0 + vt + \sigma B_t,$$

donde B_t es un movimiento browniano estándar, v es el coeficiente de drift y σ es la volatilidad [7, 8].

El mínimo del proceso Z_t en el intervalo $[0, t]$ se denota como:

$$m_{Z_t} = \text{mín}\{0 \leq s \leq t\} Z_s.$$

Queremos encontrar la probabilidad conjunta de que $Z_t \leq x$ y $m_{Z_t} \leq y$ para $y \leq 0$ y $x \geq y$. Es decir, demostrar que:

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, m_{Z_t} \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$-e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar.

El valor mínimo m_{Z_t} de un proceso de difusión con drift sigue una distribución relacionada con la función de distribución normal acumulada $N(z)$ [7] . La probabilidad de que $m_{Z_t} \leq y$ es

$$\mathbb{P}(m_{Z_t} \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

La probabilidad conjunta de que $Z_t \leq x$ y $m_{Z_t} \leq y$ puede calcularse usando la técnica de reflexión [8]. El proceso reflejado proporciona la siguiente expresión

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, m_{Z_t} \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$-e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

La probabilidad conjunta se compone de los siguientes términos:

- $N\left(\frac{y-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$: Probabilidad de que el proceso Z_t esté por debajo de y.
- $e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$: Corrección para incluir el efecto de la reflexión sobre la barrera y.
- $e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y-x+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$: Ajuste para el comportamiento reflejado cuando el proceso cruza la barrera y.

Hemos demostrado que para $y \leq 0$ y $x \geq y$, la probabilidad conjunta de que $Z_t \leq x$ y $m_{Z_t} \leq y$ está dada por

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, m_{Z_t} \leq y) = N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$-e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

De manera similar, podemos probar

Corolario 2.6.3

Para $y \leq 0$ y $x \geq y$,

$$\mathbb{P}(Z_t \geq x, m_t^Z \geq y) = N\left(\frac{vt - x}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Demostración. Sea Z_t un proceso de difusión descrito por la ecuación

$$Z_t = z_0 + vt + \sigma B_t,$$

donde B_t es un movimiento browniano estándar, v es el coeficiente de drift, y σ es la volatilidad [7, 8]. El valor mínimo del proceso Z_t hasta el tiempo t, m_{Z_t}, está definido como,

$$m_{Z_t} = \text{mín}\{0 \leq s \leq t\} Z_s.$$

La probabilidad de que $Z_t \geq x$ y $m_{Z_t} \geq y$ cuando $y \leq 0$ y $x \geq y$ está dada por

$$P(Z_t \geq x, m_{Z_t} \geq y) = N\left(\frac{vt - x}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y - x + vt}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde:

- $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar,
- x es el nivel por encima del cual el proceso Z_t debe estar,
- y es el nivel mínimo por encima del cual el mínimo m_{Z_t} debe estar,
- El término $N\left(\frac{vt-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)$ representa la probabilidad de que el proceso Z_t esté por encima de x, considerando el drift v y la volatilidad σ,
- El término $e^{\frac{2vy}{\sigma^2}} N\left(\frac{2y-x+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$ ajusta la probabilidad para tener en cuenta el efecto de la barrera y, utilizando la técnica de reflexión.

Nos hemos concentrado en estudiar la distribución del mínimo de un movimiento browniano, que es relevante al estudiar opciones descendentes. Si deseamos opciones de subida y bajada de precios, necesitaremos teoremas similares para el máximo. Sea M_t^Z el máximo en el intervalo [0, t].

Afortunadamente, el hecho de que el negativo de un movimiento browniano con tendencia sea un movimiento browniano con tendencia significa que la ley del máximo es fácilmente deducible de la ley del mínimo.

Podemos escribir:

$$M_t^Z = mx(\sigma - W_t + vt) = mx(-(\sigma W_t + vt)) = -mn(-\sigma W_t - vt). \quad (3.27)$$

Como $-W_t$ es un movimiento browniano, tenemos que Z'_t denota un proceso con tendencia $-v$ y volatilidad σ, tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_t^Z \leq y) &= \mathbb{P}(m_t^{Z'} \geq -y), \\ &= N\left(\frac{y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{-y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Teorema.

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, M_t^Z \geq y) = e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{x - 2y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (3.28)$$

lo que implica inmediatamente

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x, M_t^Z \leq y) = N\left(\frac{x - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2vy\sigma^{-2}} N\left(\frac{x - 2y - vt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (3.29)$$

para $x \leq y$, $y > 0$.

3.7. Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico es un proceso estocástico ampliamente utilizado para modelar fenómenos donde las variables crecen de forma exponencial en el tiempo, tales como los precios de activos financieros, el crecimiento poblacional o el comportamiento de ciertos procesos en biología y física. En finanzas, el movimiento browniano geométrico es un componente fundamental del modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones.

3.7.1. Definición Formal

El movimiento browniano geométrico es un proceso estocástico continuo en tiempo que describe la evolución de una variable S_t en el tiempo t. El proceso sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

donde:

- S_t es el valor del proceso en el tiempo t.
- μ es la tasa de crecimiento esperada o *drift*, un parámetro constante.
- σ es la volatilidad constante del proceso, un parámetro constante que mide la magnitud de las fluctuaciones aleatorias.
- B_t es un movimiento browniano estándar o proceso de Wiener.

Este modelo refleja un crecimiento que es tanto determinista (con tasa μ) como estocástico (con volatilidad σ modelada por el término B_t).

La ecuación diferencial estocástica que describe el movimiento browniano geométrico tiene una solución explícita. Para encontrar la solución, se puede aplicar la fórmula de **Itô** y obtener la forma cerrada para S_t en función del tiempo,

$$S_t = S \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right),$$

donde S es el valor inicial del proceso en $t = 0$.

La solución nos muestra que S_t sigue una distribución log-normal, lo que significa que $\ln(S_t)$ sigue una distribución normal. Más específicamente,

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(S) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right).$$

3.7.2. Propiedades del Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico tiene varias propiedades importantes que lo hacen útil para modelar precios de activos y otros procesos con crecimiento exponencial:

- **Caminos Continuos**: Los caminos del proceso S_t son continuos con probabilidad 1, lo que significa que no hay saltos repentinos en los valores del proceso. Esto es una consecuencia directa del hecho de que el término B_t es un movimiento browniano estándar, cuyos caminos son continuos.

- **No-Negatividad**: S_t es siempre positivo para todo $t \geq 0$, dado que la exponencial de cualquier número real es estrictamente positiva. Esto es crucial en aplicaciones financieras, ya que los precios de los activos no pueden ser negativos.

- **Distribución Log-Normal**: Como se mencionó anteriormente, el valor S_t sigue una distribución log-normal, ya que $\ln(S_t)$ es una variable aleatoria normal. Específicamente, la esperanza y la varianza de S_t están dadas por
$$\mathbb{E}[S_t] = Se^{\mu t},$$
$$\mathrm{Var}(S_t) = S^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1 \right).$$

3.7.3. Aplicaciones del Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico se utiliza principalmente para modelar sistemas que experimentan crecimiento exponencial con perturbaciones aleatorias. Entre las aplicaciones más destacadas se encuentran las siguientes:

Modelo de Precios de Activos Financieros

En finanzas, el movimiento browniano geométrico es el modelo subyacente en la fórmula de Black-Scholes para la valoración de opciones. Bajo el supuesto de que los precios de los activos siguen un movimiento browniano geométrico, el valor S_t representa el precio de una acción o activo en el tiempo t, con μ siendo la tasa de retorno esperada del activo y σ la volatilidad.

El uso del GBM (Movimiento Browniano Geométrico) garantiza que los precios no se vuelvan negativos y modela adecuadamente la volatilidad observada en los mercados financieros.

Crecimiento Poblacional

En biología, el GBM también se utiliza para modelar el crecimiento de poblaciones bajo condiciones de incertidumbre. En este contexto, S_t representa el tamaño de una población en el tiempo t, con μ modelando el crecimiento medio de la población y σ representando la incertidumbre o la variabilidad en el crecimiento.

Dinámica de Precios en Mercados de Materias Primas

El GBM se aplica también al modelado de precios de materias primas como el petróleo, el oro y otros recursos naturales. La suposición de que estos precios siguen un proceso estocástico con crecimiento exponencial y volatilidad hace del GBM una herramienta valiosa para entender las fluctuaciones en los precios de estos activos.

3.7.4. Comparación con el Movimiento Browniano Estándar

Es importante notar que, a diferencia del **movimiento browniano estándar**, que puede tomar valores tanto positivos como negativos, el movimiento browniano geométrico está restringido a valores positivos. Mientras que el movimiento browniano estándar modela fluctuaciones simétricas alrededor de cero, el movimiento browniano geométrico modela procesos cuyo crecimiento es multiplicativo y que no pueden caer por debajo de cero.

El movimiento browniano geométrico es un modelo estocástico esencial para describir procesos que evolucionan de manera exponencial con el tiempo y que están sujetos a variabilidad aleatoria. Su uso se extiende a múltiples disciplinas, con aplicaciones clave en la modelización de precios de activos financieros, el crecimiento de poblaciones y la dinámica de precios en mercados de materias primas. Las propiedades del GBM, como su positividad y su capacidad para modelar crecimiento exponencial, lo hacen ideal para sistemas donde la volatilidad y el crecimiento están estrechamente relacionados.

Capítulo 4

Fórmula de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes será utilizado en el trabajo presente, debido a las amplias aplicaciones que se pueden llevar a cabo con el mismo. El modelode valuación de opciones desarrollado por Black y Scholes [13], es muy popular.

Los supuestos de mercado en los que se basa son:

-El precio de una accion se comporta comporta como un movimiento browniano geométrico. Supone transacciones constantes y no permite brincos en las cotizaciones. Además, en el largo plazo, el precio del activo subyacente siempre tiende a crecer a una tasa constante.

-El activo subyacente no paga dividendos.

-La volatilidad es conocida y constante durante la vida de la acción.

-La tasa de interés es constante durante la vida de la acción. Además esta tasa aplica tanto a operaciones activas como a operaciones pasivas. En general, cualquier participante del mercado puede prestar o pedir prestado, tanto dinero como necesite a la misma tasa de interés.

-Un inveresionista que venda una opción o una acción en corto tendrá disponibles los recursos producto de la venta.

-No hay costos de transacción para las acciones o las opciones.

Daremos por conocidos los temas de procesos estocásticos y cálculo estocástico de Ito.

A continuación se presentan algunas de las posibles aplicaciones del modelo.

- Valoracion de opciones: Principalmente utilizado en opciones de compra y venta de acciones, entre otras.
- Análisis de riesgo: Analiza el riesgo de una opción financiera, lo cual es indispensable para la toma de decisiones en el mercado de valores.
- Gestión de carteras: El modelo es utilizado para evaluar el riesgo de una cartera de inversiones, de esta forma minimizar y maximizar el riesgo.
- Análisis de volatilidad: Con el modelo de Black-Scholes es posible analizar la volatilidad de distintos activos financieros y de esta forma predecir su comportamiento en el futuro.
- Gestión de riegos: Gestionar el riesgo en distintos sectores, como en aseguradoras, empresas, la banca, etc.
- Simulación de escenarios: Utilizado para la simulación de diferentes escenarios financieros y la evaluación de los cambios económicos en general.
- Gestión de fondos: El modelo Black-Scholes es utilizado para gestionar fondos de inversión y así determinar la composición adecuada para maximizar el rendimiento y reducir el riesgo.

Para comprender más a profundidad el entorno en el que se aplica el modelo de Black-Scholes, se debe primeramente conocer algunos conceptos matemáticos, con el fin de entender y razonar las fórmulas del modelo, para comprender sus aplicaciones; aquí desarrollaremos algunos de los conceptos básicos que se mencionan en este trabajo.

El modelo de Black-Scholes es uno de los pilares fundamentales de la teoría de valoración de opciones financieras y está profundamente basado en el **movimiento browniano geométrico** (GBM), que describe el comportamiento del precio de los activos subyacentes en los mercados financieros. A continuación, se explican los elementos clave de esta relación.

4.1. Precio de una opción call y una opción put

En el contexto del modelo de Black-Scholes, se asume que el precio de un activo subyacente S_t sigue un movimiento browniano geométrico. Esta suposición es crucial, ya que permite modelar la evolución estocástica del precio de un activo de manera realista, capturando tanto su crecimiento exponencial como la volatilidad inherente al mercado.

El precio S_t de un activo en el tiempo t está modelado por la siguiente ecuación diferencial estocástica, como se mencionó anteriormente,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t,$$

donde:

- μ es la tasa de retorno esperada del activo,
- σ es la volatilidad constante del precio del activo,
- B_t es un movimiento browniano estándar.

La solución de esta ecuación, como ya hemos visto, es

$$S = S \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right),$$

lo que significa que el precio del activo sigue una distribución log-normal. Este resultado es clave para el modelo de Black-Scholes, ya que permite calcular el valor de las opciones europeas mediante técnicas analíticas.

A continuación calcularemos el precio de una opción call. El precio de una opción está dado por lo siguiente,

Teorema 4.1. En el marco de Black-Scholes con tasa de interés r y volatilidad σ (constante), el valor de una opción de compra C , es

$$C(S,t) = \Phi(d_1)S - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

donde Φ es la acumulativa de una normal estándar, y

$$d_1(t,s) = \sigma\sqrt{T-t}[\ln(\frac{s}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)],$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Demostración. Como $f_C(S(T))$ la función de pago de la opción call. Se tiene que,

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[f_C(S(T))\right].$$

Además que $S(T)$ está dada por

$$S(T) = se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T - W_t)}.$$

Definimos $S(T) = e^Y$ como una log-normal, donde

$$Y \sim N\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Entonces de $C(S,t)$ tenemos que

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f_C(S(T))\varphi(y)dy. \tag{4.1}$$

donde $\varphi(y)$ es la densidad de probabilidad de Y.

Sustituyendo $f_C(S(T))$ en (4.1),

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\left\{e^{-r(T-t)} + \sigma\sqrt{\tau}z - K, 0\right\}\varphi(z)dz.$$

Sabemos que Y está definido como

$$Y = \hat{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z, \quad \hat{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \tau = T-t, \quad Z \sim N(0,1).$$

Por definición de máx, tenemos:

$$\text{máx}\left\{e^Y - K, 0\right\} = \begin{cases} e^Y - K, & \text{si } e^Y > K, \\ 0, & \text{si } e^Y \leq K. \end{cases}$$

Esto implica que,

$$
\begin{aligned}
se^{Y} > K \Rightarrow e^{Y} &> \frac{K}{s} \\
&\Rightarrow Y > ln\left(\frac{K}{s}\right) \\
&\Rightarrow \hat{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z > ln\left(\frac{K}{s}\right) \\
&\Rightarrow \sigma\sqrt{\tau}z > ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau \\
&\Rightarrow z > \frac{ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
\end{aligned}
$$

Sea

$$
z_0 = \frac{ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\int_{z_0}^{\infty} \text{máx}\left\{e^{Y} - K, 0\right\}\varphi(y)dy &= \int_{z_0}^{\infty} \text{máx}\left\{se^{\hat{r}\tau + z\sigma\sqrt{\tau}} - K, 0\right\}\varphi(z)dz \\
&= \int_{z_0}^{\infty} [se^{\hat{r}\tau+\sigma\sqrt{\tau}}]\varphi(z)dz - \int_{z_0}^{\infty} K\varphi(z)dz \\
\\
&= I_2 - I_1.
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{z_0}^{\infty} K\varphi(z)dz \\
&= K\int_{z_0}^{\infty} \varphi(z)dz \\
&= \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz \\
&= K\cdot P(Z\geq z_0) \\
&= K\cdot\Phi[-z_0].
\end{aligned}
$$

La otra mitad de la integral de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{z_0}^{\infty} [se^{\hat{r}\tau+z\sigma\sqrt{\tau}}]\varphi(z)dz \\
&= \frac{se^{\hat{r}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\
&= \frac{se^{\hat{r}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz
\end{aligned}
$$

sabemos que $e^{\hat{r}\tau}$ es, $e^{\tau r}e^{\frac{\sigma^2\tau}{2}}$,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{z^2}{2}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}dz \\
&= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2z\sigma\sqrt{\tau}+\sigma^2\tau)}dz \\
&= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{\tau})^2}dz.
\end{aligned}
$$

Esto último es una funcion de densidad $N[\sigma\sqrt{\tau},1]\sim Z_1$, multiplicada por $se^{r\tau}$ con lo cual tenemos,

$$
I_2 = se^{r\tau}\cdot P(Z_1>z_0).
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
P(Z_1 > z_0) &= P(Z_1 - \sigma\sqrt{t} > z_0 - \sigma\sqrt{t}) \\
&= P(Z > z_0 - \sigma\sqrt{t}) \\
&= P(Z < -(z_0 - \sigma\sqrt{t})) \\
&= P(Z < (\sigma\sqrt{t} - z_0)) \\
&= \Phi(\sigma\sqrt{t} - z_0).
\end{aligned}
$$

Concluimos,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= se^{\tau r} P(Z_1 > z_0) \\
&= se^{\tau r} \Phi(-z_0 + \sigma\sqrt{t}).
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos,

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= e^{-r(T-t)}(I_2 - I_1) \\
&= e^{-r(T-t)}\Big(\frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau} - \frac{z^2}{2} - \frac{\sigma^2\tau}{2}} dz - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz\Big) \\
&= s \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau} - \frac{z^2}{2} - \frac{\sigma^2\tau}{2}} dz - e^{-r(T-t)} k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
&= s\Phi[d_1(s,t)] - e^{-r(T-t)} K\Phi[d_2(s,t)].
\end{aligned}
$$

con

$$
d_1(s,t) = \sigma\sqrt{T-t}[\ln(\frac{s}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)],
$$
$$
d_2(s,t) = d_1(s,t) - \sigma\sqrt{T-t}.
$$

Derivación del Modelo de Black-Scholes para un PUT

El precio de un put está definido por,

Teorema 4.2 En el marco de Black-Scholes con tasa de inetrés r y volatilidad σ(constante), el valor de un put es

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \tag{4.2}$$

Demostración. Como $f_P(S(T))$ la función de pago para una opción put,

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[f_P(S(T))\right].$$

Sabemos que

$$f_P S(T) = \text{máx}\left\{K - S(T), 0\right\}.$$

Además que $S(T)$ está dada por

$$S(T) = se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}.$$

Definimos $S(T) = e^Y$ como una log-normal, donde

$$Y \sim N\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Entonces de $P(S,t)$ tenemos que

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{z_0} f_p(S(T))\varphi(y)dy. \tag{4.3}$$

donde $\varphi(y)$ es la densidad de probabilidad de Y.

Sustituyendo $f_P(S(T))$ en (4.3),

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\left\{K - e^{-r(T-t)} + \sigma\sqrt{\tau}z, 0\right\}\varphi(z)dz.$$

Por definición de máx, tenemos:

$$\text{máx}\left\{K - e^Y, 0\right\} = \begin{cases} K - e^Y, & \text{si } e^Y < K, \\ 0, & \text{si } e^Y \geq K. \end{cases}$$

Sabemos que Y está definido como

$$Y = \hat{r}\tau + z\sigma\sqrt{\tau}, \quad \hat{r} = r - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \tau = T - t, \quad Z \sim N(0,1).$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} se^Y < K \Rightarrow e^Y &< \frac{K}{s} \\ &\Rightarrow Y < ln\left(\frac{K}{s}\right) \\ &\Rightarrow \hat{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z < ln\left(\frac{K}{s}\right) \\ &\Rightarrow \sigma\sqrt{\tau}z < ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau \\ &\Rightarrow z < \frac{ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

Sea

$$z_0 = \frac{ln\left(\frac{K}{s}\right) - \hat{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{z_0} \text{máx}\left\{K - e^y, 0\right\}\varphi(y)dy &= \int_{-\infty}^{z_0} \text{máx}\left\{K - se^{\hat{r}\tau + z\sigma\sqrt{\tau}}, 0\right\}\varphi(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{z_0} K\varphi(z)dz - \int_{-\infty}^{z_0}[se^{\hat{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}}]\varphi(z)dz \\ &= J_1 - J_2. \end{aligned}$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{z_0} K\varphi(z)dz \\
&= K\int_{-\infty}^{z_0} \varphi(z)dz \\
&= \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}}dz \\
&= K\cdot P(Z \geq z_0) \\
&= K\cdot \Phi[-z_0].
\end{aligned}
$$

La otra mitad de la integral de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{-\infty}^{z_0} [se^{\hat{r}\tau + z\sigma\sqrt{\tau}}]\varphi(z)dz \\
&= \frac{se^{\hat{r}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{z\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\
&= \frac{se^{\hat{r}\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{z\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz
\end{aligned}
$$

sabemos que $e^{\hat{r}\tau}$ es, $e^{\tau r}e^{\frac{\sigma^2\tau}{2}}$,

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{z\sigma\sqrt{\tau} - \frac{z^2}{2} - \frac{\sigma^2\tau}{2}}dz \\
&= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2z\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau)}dz \\
&= \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{\tau})^2}dz.
\end{aligned}
$$

Esto último es una funcion de densidad $N[\sigma\sqrt{\tau}, 1] \sim Z_1$, multiplicada por $se^{r\tau}$ con la cual tenemos,

$$
J_2 = se^{r\tau}\cdot P(Z_1 \leq z_0).
$$

Pero

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq z_0) &= P(Z_1 - \sigma\sqrt{t} \leq z_0 - \sigma\sqrt{t}) \\ &= P(Z \leq z_0 - \sigma\sqrt{t}) \\ &= \Phi(z_0 - \sigma\sqrt{t})), \end{aligned}$$

concluimos con

$$\begin{aligned} J_2 &= se^{\tau r} P(Z_1 \leq z_0) \\ &= se^{\tau r}\Phi(z_0 - \sigma\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Con esto tenemos,

$$\begin{aligned} P(S,t) &= e^{-r(T-t)}(J_2 - J_1) \\ &= e^{-r(T-t)}\left(\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz - \frac{se^{\tau r}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{z^2}{2}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}dz\right) \\ &= e^{-r(T-t)}k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}dz - s \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{z^2}{2}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}dz \\ &= e^{-r(T-t)}K\Phi[-d_2(s,t)] - s\Phi[-d_1(s,t)]. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} d_1(s,t) &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2(s,t) &= d_1(s,t) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Podemos observar que la variable μ desapareció de la fórmula final de Black Scholes, esta variable que representa la tasa de retorno, es afectada por la preferencia de riesgo, esto implica que la fórmula conlleva un "riesgo neutro".

4.1.1. Relación con el tiempo de llegada

El tiempo de llegada, también juega un papel en la valoración de opciones, particularmente en opciones con características especiales como las opciones barrera. Estas opciones se activan o desactivan cuando el precio del activo subyacente alcanza o supera un cierto nivel de barrera.

El tiempo de llegada T_A, definido como el primer tiempo en que el proceso S_t alcanza un valor determinado A, es una variable clave para este tipo de opciones. Dado que el movimiento browniano geométrico sigue un comportamiento log-normal, el tiempo de llegada de un cierto nivel para S_t puede modelarse y utilizarse para calcular la probabilidad de que el precio del activo alcance la barrera antes del vencimiento de la opción.

En particular, para una opción de barrera ascendente y desactivante (knock-out), el tiempo de llegada determina si la opción expira sin valor. La probabilidad de que el precio S_t alcance un nivel barrera B antes de la fecha de expiración T está directamente relacionada con la distribución del tiempo de llegada.

Para las opciones americanas, el modelo de Black-Scholes no proporciona una solución analítica cerrada debido a la posibilidad de ejercicio temprano, lo cual introduce una complejidad adicional en el modelo. Sin embargo, el movimiento browniano geométrico sigue siendo la base del comportamiento del precio del activo subyacente.

El modelo de Black-Scholes está profundamente vinculado con el movimiento browniano geométrico, ya que este último modela el comportamiento estocástico del precio de los activos subyacentes. La estructura de este modelo permite derivar la ecuación de Black-Scholes y, a través de técnicas analíticas o numéricas, calcular el valor de diferentes tipos de opciones financieras.

4.2. Valuación de una opción europea con una barrera

La valuación de opciones europeas es un área fundamental en el campo de las finanzas que se enfoca en determinar el precio justo de una opción sobre un activo subyacente. Las opciones europeas son contratos financieros que otorgan a su poseedor el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción de compra o çall") o vender (opción de venta o "put") un activo subyacente a un precio predeterminado (llamado precio de ejercicio) en una fecha futura específica (llamada fecha de expiración).

La valuación de opciones europeas implica considerar varios factores clave:

- El precio actual del activo subyacente.

- El precio de ejercicio de la opción.

- La volatilidad esperada del activo subyacente.

- La tasa libre de riesgo, que refleja el rendimiento de un activo libre de riesgo como los bonos del gobierno.

Además, el tiempo hasta la expiración de la opción también desempeña un papel crucial, ya que influye en la probabilidad de que la opción sea ejercida y en el riesgo asociado con el activo subyacente.

En resumen, la valuación de opciones europeas es un área compleja pero fundamental en las finanzas modernas, con implicaciones significativas para la gestión de riesgos, la toma de decisiones de inversión y la evaluación de estrategias financieras.

Como ya lo mencionamos, las opciones europeas con o sin barrera requieren también un periodo de vigencia y una fecha de expiración para que estas puedan llevarse a cabo de forma correcta.

4.3. Valuación de una opción europea con barrera

Antes de continuar veamos lo que es un contrato Down-and-out.

Sea $H \in \mathbb{R}$, con $H < S(0)$, H es la barrera y consideremos el siguiente contrato denotado por f_{CH}.

- Si el precio del bien permanece arriba de la barrera durante todo el periodo del contrato entonces el monto C se paga al tenedor del contrato.
- Si el precio del bien en algun momento antes de la fecha de vencimiento T, toca la barrera, entonces el valor del contrato se anula y no se le paga nada al tenedor del contrato.

El contrato f_{CH} es llamado la versión Down-and-out del contrato C y nuestro principal problema ahora es valuar a f_{CH}.

Más formalmente se describe la función de pagho C_H de la siguiente forma.

$$f_{CH} = \begin{cases} \Phi(S(T)), & S(t) > H, t \in [0,T] \\ 0, & S(t) \leq H, t \in [0,T]. \end{cases}$$

Es decir,

$$f_{CH}(S(t)) = \Phi(S(t))1_{[S(H)>H]}.$$

Teorema 4.3. En el marco de Black-Scholes con tasa de interés r y volatilidad σ el valor de una opción de compra f_{CH} con precio strike K y barrera H, $(H < K)$.

$$f_{CH}(S,t) = C(S,t) - \left(\frac{S}{H}\right)^{2\lambda} C\left(\frac{H^2}{S}, t\right).$$

Sea un activo subyacente con las siguientes características:

Definimos los siguientes términos auxiliares:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \\ h_1 &= \frac{\ln(H^2/(SK)) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ h_2 &= d_1^H - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

También definimos el exponente de reflexión:

$$\lambda = \frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2}.$$

Esto significa que el precio de una opción knock-out es el precio de una call estándar menos un término correctivo que ajusta por la barrera.

Demostración. La prueba la hacemos con casos;

Caso I: H<K. En este caso de f_{CH},

$$
\begin{aligned}
f_C(S(T)) &= (S_T - K)1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]} \\
&= S_T 1_{[S_T \geq K, m_T \geq T]} - K 1_{[S_T \geq K, m_T \geq T]}.
\end{aligned}
$$

El precio de la opción C_H es

$$
\begin{aligned}
C_H(S,T) &= \mathbb{E}[e^{-r\tau} f_{CH}(S(T))] \\
&= \mathbb{E}[e^{-r\tau}(S_T - K) \cdot 1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}] \\
&= e^{-r\tau}\mathbb{E}[S_T 1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}] - e^{-r\tau}\mathbb{E}[K \cdot 1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}] \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}
$$

Para fijar el precio de la primera parte, tomamos S como numerario. Entonces, el valor es

$$
\begin{aligned}
I_1 &= S\mathbb{E}[1_{(S_T \geq K, m_T \geq H)}] \\
&= SP_{(S_T \geq K, m_T \geq H)} \\
&= S\mathbb{P}(ln(S_T)) \geq ln(K), m_T^{ln(s)} \geq ln(H).
\end{aligned}
$$

En esta medida, $ln(S_T) - ln(S)$ es un movimiento browniano con tendencia $r + \frac{\sigma^2}{2}$. Por lo tanto, podemos aplicar el Corolario 2.6.3, con

$$
\begin{aligned}
x &= ln(K) - ln(S) = -ln(S/K), \\
y &= ln(H) - ln(S) = ln(H/S),
\end{aligned}
$$

y

$$
v = r + \frac{\sigma^2}{2}.
$$

para obtener

$$I_1 = S \cdot \Phi\left(\frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$-S\left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^2} \cdot \Phi\left(\frac{log(\frac{H^2}{SK}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Para fijar el precio de la segunda pieza tomamos como numerario la cuenta del mercado monetario de capitalización continua. Por lo tanto, el valor de la segunda parte es $-Ke^{-rT}$ multiplicado por la probabilidad de que se produzca el pago. En esta medida, como es habitual, tenemos que el $log(S)$ tiene tendencia, es decir

$$\begin{aligned} I_2 &= e^{-rT}\mathbb{E}[K \cdot 1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}] \\ &= e^{-rT}K \cdot \mathbb{E}[1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}] \\ &= e^{-rT}K \cdot \mathbb{P}[1_{[S_T \geq K, m_T \geq H]}]. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el Corolario 2.6.3, obtenemos

$$I_2 = Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$-Ke^{-r\tau}\left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^2}\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
C_H(S,T) &= I_1 - I_2 \\
&= S\cdot\Phi\left(\frac{ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&- S\left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^2} \cdot\Phi\left(\frac{log(\frac{H^2}{SK}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&- Ke^{-r\tau}\Phi\cdot\left(\frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&+ Ke^{-r\tau}\left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^2} \cdot\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S\cdot\Phi\left(\frac{ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&- Ke^{-r\tau}\Phi\cdot\left(\frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- S\left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^2} \cdot\Phi\left(\frac{log(\frac{H^2}{SK}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&+ Ke^{-r\tau}\left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^2} \cdot\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+2\sigma^{-2}} S\cdot\Phi(h_1) \\
&+ \left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} Ke^{-r\tau}\cdot\Phi(h_2) \\
&= C(S,t) - \left(\frac{S}{H}\right)^{2\lambda} C\left(\frac{H^2}{S}, t\right).
\end{aligned}
$$

Podemos considerar este valor como el precio de una opción de compra básica menos un término de corrección. El término de corrección surge de la disminución de valor provocada por la barrera. Esta corrección, aunque más complicada que la opción original, tiene una forma similar.

Caso II: H<K.Cuando la barrera está sobre el precio de ejercicio, la condición del dinero al vencimiento es redundante, porque si el mínimo está por encima de la barrera, entonces el valor terminal ciertamente está por encima de la barrera y, por tanto, el precio de ejercicio. Por lo tanto, el pago de la opción es

$$1_{m_T^S} \geq H^{(S_T-K)}.$$

Como antes, podemos abordar esto dividiéndolo en partes con coeficientes S y K, y luego usando la cuenta del mercado bursátil y monetario como numerarios respectivamente. Por lo tanto el valor es,

$$S\mathbb{P}(1_{m_\tau^S>H}) - e^{-r\tau}K\mathbb{P}(1_{m_T^S>H}).$$

Usando el Corolario 2.6.1, tenemos para el primer término, tomando $v = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, y x, y como arriba

$$J_1 = S\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{S}{H}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - S\left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^2}\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{H}{S}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Para el segundo término, tenemos $v = r - \frac{1}{2}\sigma^2$, y obtenemos

$$J_2 = Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{log\left(\frac{S}{H}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$-Ke^{-r\tau}\left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^2}\Phi\left(\frac{log\left(\frac{H}{S}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

En conclusión, tenemos

$$
\begin{aligned}
C_H(S,t) &= J_1 - J_2 \\
&= S\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{S}{H}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&- S\left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^2}\Phi\left(\frac{ln\left(\frac{H}{S}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&- Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{log\left(\frac{S}{H}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&+ Ke^{-r\tau}\left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^2}\Phi\left(\frac{log\left(\frac{H}{S}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos

$$C_H(S,T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) - \left(\frac{H}{S}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} S\Phi(h_1)$$

$$+ \left(\frac{H}{S}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} Ke^{-rT}\Phi(h_2).$$

donde

$$d_j = \frac{log\left(\frac{S}{H}\right) + (r + (-1)^{j-1}\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

y

$$h_j = \frac{log\left(\frac{H}{S}\right) + (r + (-1)^{j-1}\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Capítulo 5

Conclusiones

El análisis realizado en esta tesis sobre la valuación de opciones europeas con barrera permitió entender a profundidad tanto los fundamentos matemáticos como las aplicaciones prácticas de este tipo de derivados financieros. A continuación, se resumen los puntos clave y los aportes del trabajo:

- Valor estratégico de las opciones barrera: Estas opciones se destacan por su capacidad de responder a condiciones específicas del mercado, lo que las hace ideales para personalizar estrategias de cobertura y especulación. La inclusión de una barrera agrega una capa adicional de control y flexibilidad para los inversionistas.
- Relevancia del movimiento browniano: La representación del comportamiento aleatorio de los precios a través de procesos estocásticos, como el movimiento browniano, resulta esencial para modelar escenarios realistas. Esto respalda su uso como una herramienta confiable en la valuación de derivados.
- Extensión del modelo de Black-Scholes: La aplicación del modelo de Black-Scholes en opciones con barrera demuestra cómo las herramientas tradicionales pueden adaptarse a las necesidades modernas del mercado. Este ajuste permite una mayor comprensión de cómo interactúan las variables clave en la valoración de estos productos.
- Implicaciones prácticas y metodológicas: Este trabajo aporta una metodología replicable que puede aplicarse a otros tipos de derivados financieros. Además, su enfoque combina teoría y práctica, haciendo

posible su implementación en contextos reales de gestión de riesgos y optimización de portafolios.

Reflexión final: La investigación no solo profundizó en los fundamentos de las opciones barrera, sino que también abrió la puerta para futuras exploraciones en el campo de los derivados exóticos. Sería interesante evaluar cómo las fluctuaciones de mercado más impredecibles, como eventos económicos globales, afectan la eficiencia y validez de estos modelos.

En conclusión, este trabajo confirma la importancia de combinar conceptos matemáticos avanzados con aplicaciones financieras prácticas para abordar los desafíos de los mercados modernos. Las herramientas desarrolladas y analizadas en esta tesis no solo tienen valor académico, sino también un potencial significativo para su implementación en el mundo financiero real.

Bibliografía

[1] Morris, W. (2004). *Financial Derivatives*. Pearson Education.

[2] Weert, F. (2009). *Exotic Options Trading: How to Invest with Innovative Derivatives*. John Wiley & Sons.

[3] A. L. Alliera. *Tesis Licenciatura en Ciencias Matemáticas: Valoración de Opciones Financieras*. Universidad de Buenos Aires, 2014. Disponible en: `https://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/alliera.pdf`.

[4] M. Baxter, A. Rennie. *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*. 2nd edition, Cambridge University Press, 2006.

[5] L. Martín López, *Métodos de Valoración de Opciones*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (ICADE), Director: Raquel Redondo Palomo, Madrid, Junio 2010.

[6] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, K. Ye. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. 9ª edición, Pearson Educación, 2011.

[7] karatzas, I., & Shreve, S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer.

[8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.

[9] Finan, M. (2015). *Introducción a las opciones financieras*.

[10] Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.

[11] Brown, R. (1827). Observations on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4(21), 161–173.

[12] Einstein, A. (1905). On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17(8), 549–560.

[13] Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. Published by: The University of Chicago Press.

[14] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models* (11th ed.). Academic Press.

[15] Papoulis, A., & Pillai, S. U. (2002). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (4th ed.). McGraw-Hill.