BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Continuos homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables

TESIS
que para obtener el título de
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA
Rafael Esteban García Becerra

Directoras de Tesis
Dra. María de Jesús López Toriz
Dra. Patricia Pellicer Covarrubias

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

RAFAEL ESTEBAN GARCÍA BECERRA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 2 de diciembre de 2016, con la tesis titulada:

Continuos homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z. a 2 de diciembre de 2016

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.

60 AÑOS DE AUTONOMÍA UNIVERSITARIA

Ccp. Archivo.
DRA. LAHR/mtrv

Dedicatoria

Agradecimientos

Introducción

La tesis que presento está dedicada al estudio de los espacios topológicos primero numerables que son *homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables*. Estos espacios fueron definidos por primera vez por Ralph Bennett en [17], ahí demuestra que los espacios conexos que son homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables que también son primero numerables son homogéneos. Una de las propiedades más importantes que demuestra Bennett es la enunciada en el Teorema 3 de [17] que establece que un espacio topológico que es separable, metrizable, localmente compacto y que además es fuertemente localmente homogéneo es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables; esto es parte del contenido del Capítulo 2.

En el Capítulo 3 de esta tesis se presenta el concepto del *grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables* de un espacio topológico separable y primero numerable. Para definir el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un espacio topológico separable X se establece una relación de equivalencia entre conjuntos denso numerables de X de manera que dos conjuntos denso numerables están relacionados si existe un homeomorfismo h del espacio X en sí mismo que manda uno de estos conjuntos en el otro. Así, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es la cardinalidad del conjunto de clases de equivalencia determinadas por esta relación de equivalencia y lo denotaremos por $g_{HDN}(X)$.

El trabajo desarrollado acerca del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables está motivado en saber si para cada número natural n existe un continuo X cuyo grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables sea igual a n. Uno de los resultados más inmediatos que presentamos es el Lema 3.4, que dice que si X es un espacio topológico homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del espacio X es igual a uno. Entre otros resultados que obtuvimos se encuentran el Teorema 3.12 que establece que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un

$n-$odo simple es igual a $2(n+1)$; el Teorema 3.13 que dice que si X es una gráfica completa con k vértices, entonces $g_{_{HDN}}(X)=k+1$.

En la primera sección del Capítulo 1 conjuntamos algunos resultados sobre las órbitas de los puntos de un espacio topológico que brindarán herramientas para el desarrollo de los capítulos posteriores. En la segunda sección retomamos las definiciones de algunos conceptos elementales de la Teoría de los Continuos, por ejemplo, las definiciones de $n-$odo simple, gráfica y árbol. Además, citamos algunos resultados necesarios para poder desarrollar nuestro trabajo. En la tercera sección atendemos propiedades relacionadas con homeomorfismos, que son de suma importancia en esta tesis, particularmente en el desarrollo del Capítulo 3, ya que estos resultados conforman una herramienta esencial para la determinación de las clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de un espacio topológico y por lo tanto del cálculo del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de algunos continuos. En el Lema 1.29 presentamos una de las herramientas más sobresalientes que utilizamos a lo largo de esta tesis, aquí establecemos la construcción de una función biyectiva y creciente de un conjunto denso y numerable de la recta real en otro; además, en el Lema 1.31 mostramos la manera en que se extiende la función obtenida del Lema 1.29 a un homeomorfismo de los reales en sí mismos. Estos dos lemas se emplean para probar que el espacio euclidiano de los números reales es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. Finalmente, en la última sección, abordamos algunos resultados sobre espacios de funciones que usaremos en el Capítulo 2.

Debemos mencionar que el concepto de homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables ha sido estudiado con bastante interés en la topología general, en relación con esto puede ver las referencias siguientes: [2], [3], [4], [19], [8], [7], [14], [13], [10], [11], [12], [21].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En esta primera sección introducimos unos subconjuntos muy importantes de un espacio topológico que llamaremos órbitas (ver Definición 1.1). Presentaremos algunas propiedades sobre dichos conjuntos, sobre todo cuando las órbitas corresponden a ciertos puntos especiales (como los ordinarios, los extremos y los de ramificación, que se introducen en las Definiciones 1.3, 1.5 y 1.7, respectivamente). Para el desarrollo de la teoría del Capítulo 3, los resultados presentados en la primera sección son de gran utilidad para simplificar algunas demostraciones. El Lema 1.4 nos dice que si x es un punto extremo de un espacio topológico X y un punto y pertenece a la órbita del punto x, entonces el punto y también es un punto extremo; en el Lema 1.6 demostramos algo similar, si dos puntos pertenecen a la misma órbita y uno de esos puntos es ordinario, entonces el otro también lo es; análogamente, el Lema 1.8 afirma que si dos puntos pertenecen a la misma órbita y uno de esos puntos es un punto de ramificación, entonces el otro también es un punto de ramificación. Es más, el Corolario 1.12 asegura que si dos puntos pertenecen a la misma órbita y uno de ellos es un punto de ramificación entonces el otro punto también es un punto de ramificación y además los dos puntos tienen el mismo orden.

Por otra parte, para denotar la frontera de un conjunto U en un espacio topológico X usamos el símbolo $fr(U)$. Las letras griegas α y β las empleamos únicamente para denotar números cardinales. Al primer cardinal infinito numerable lo denotamos con ω y a la cardinalidad del continuo la denotamos con $\mathfrak{c}$. Si X es un conjunto, la cardinalidad del conjunto X la vamos a denotar con el símbolo $|X|$. La norma de un punto x en el plano real $\mathbb{R}$ lo denotamos por $||x||$. Un continuo al que recurriremos continuamente es el arco (ver Definición 1.15). Cuando un arco cuyos puntos extremos son los puntos a y b es único, lo denotamos como $[a,b]$.

1.1. Órbitas

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. La *órbita* de un punto x en el espacio X es el conjunto

$\tau(x) = \{y \in X :$ existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y\}$.

Teorema 1.2. *Si es X un espacio topológico, entonces las siguientes proposiciones son verdaderas:*

(1) las órbitas del espacio X forman una partición del mismo;

(2) las órbitas del espacio X son conjuntos invariantes bajo homeomorfismos.

Demostración. Para ver la Proposición (1), sean x, y y z tres puntos del espacio X. Dado que el homeomorfismo identidad $I_X : X \to X$ cumple que $I_X(x) = x$, para cada $x \in X$, se tiene que el punto x pertenece a la órbita $\tau(x)$.

Note que si existe un homeomorfismo $f : X \to X$ de manera que $f(x) = y$, entonces f^{-1}, la función inversa de f, es un homeomorfismo del espacio X en sí mismo tal que $f^{-1}(y) = x$. Por lo tanto, si y pertence a la órbita $\tau(x)$, entonces el punto x pertenece a la órbita $\tau(y)$.

Por último, supongamos que el punto z pertenece a la órbita del punto y, y que el punto y pertence a la órbita $\tau(x)$. Así, existen homeomorfismos $g : X \to X$ y $f : X \to X$ tales que $g(y) = z$ y $f(x) = y$. Consideremos el homeomorfismo composición $g \circ f : X \to X$, y note que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Por lo tanto, el punto z pertence a la órbita $\tau(x)$. Se concluye que las órbitas de un espacio topológico forman una partición del mismo.

Para ver la proposición (2), consideremos h un homeomorfismo del espacio X en sí mismo. Sea a un punto de la órbita $\tau(x)$. Existe un homeomorfismo $f : X \to X$ de manera que $f(x) = a$. Así, se tiene que $h \circ f(x) = h(a)$. Por lo tanto $h(a)$ pertenece a la óbita $\tau(x)$.

Ahora, consideremos y un punto que pertenezca a la órbita del punto x. Así, existe un homeomorfismo f del espacio X en sí mismo de manera que $f(x) = y$. Además, se puede hallar un punto a en la órbita de x, de modo que $h(a) = x$. Esto implica que $h(f(x)) = y$. Por lo tanto la órbita $\tau(x)$ está contenida en $h(\tau(x))$. †

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un *punto extremo* de X si para cualquier conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto V de X de modo que $x \in V$, $V \subset U$ y la frontera de V consiste exactamente de un punto.

Al conjunto de los puntos extremos de un espacio topológico X lo denotaremos por $E(X)$.

Lema 1.4. *Sean X un espacio topológico y x un punto extremo de X. Si y pertenece a la órbita del punto x en X, entonces y es un punto extremo de X.*

Demostración. Sea y un punto perteneciente a la órbita del punto extremo x del espacio topológico X. Así, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Sea U un conjunto abierto de X tal que $y \in U$, de aquí se sigue que $x \in h^{-1}(U)$. Dado que x es un punto extremo de X, se puede hallar un conjunto abierto V de X tal que $x \in V$, $V \subset h^{-1}(U)$ y la frontera de V tiene cardinalidad igual a uno. Así, $h(V)$ es un conjunto abierto de X contenido en U tal que $y \in h(V)$ y la frontera de $h(V)$ consta exactamente de un punto. Por lo tanto, se tiene que y es un punto extremo del continuo X. †

Definición 1.5. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un *punto ordinario* si para cualquier conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto V de X de modo que $x \in V$, $V \subset U$ y la frontera de V consiste exactamente de dos puntos.

Lema 1.6. *Sean X un espacio topológico y x un punto ordinario de X. Si y pertenece a la órbita del punto x en X, entonces y es un punto ordinario.*

Demostración. Sea y un punto perteneciente a la órbita del punto ordinario x del espacio topológico X. Así, existe un homeomorfismo h del espacio X en sí mismo tal que $h(x) = y$.

Sea U un conjunto abierto de X tal que $y \in U$, de esto se sigue que $x \in h^{-1}(U)$. Dado que x es un punto ordinario de X, existe un conjunto abierto V de X contenido en $h^{-1}(U)$ tal que $x \in V$ y la frontera de V tiene cardinalidad igual a dos. Así, $h(V)$ es un conjunto abierto de X contenido en U tal que $y \in h(V)$ y la frontera del conjunto $h(V)$ consta exactamente de dos puntos. Por lo tanto, se tiene que y es un punto ordinario de X. †

Definición 1.7. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un *punto de ramificación* si para cualquier conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto V de X de modo que $x \in V$, $V \subset U$ y la frontera de V contiene al menos tres puntos.

Al conjunto de los puntos de ramificación de un espacio topológico X lo denotaremos por $R(X)$.

Lema 1.8. *Sean X un espacio topológico y x un punto de ramificación de X. Si y pertenece a la órbita del punto x en X, entonces y es un punto de ramificación de X.*

Demostración. Sea y un punto que pertenece a la órbita del punto de ramificación x del espacio X. Así, existe un homeomorfismo h del espacio X en sí mismo tal que $h(x) = y$.

Sea U un conjunto abierto de X tal que $y \in U$, de esto se sigue que $x \in h^{-1}(U)$. Dado que x es un punto de ramificación de X, existe un conjunto abierto V de X contenido en $h^{-1}(U)$ tal que $x \in V$ y la frontera de V tiene cardinalidad mayor o igual que tres. Así, $h(V)$ es un conjunto abierto de X que está contenido en U tal que $y \in h(V)$ y la frontera de $h(V)$ tiene la misma cardinalidad que la frontera del conjunto V. Por lo tanto, el punto y es un punto de ramificación de X. †

Definición 1.9. Un subconjunto de un espacio topológico es una *vecindad abierta* de un punto en el espacio si es abierto y contiene al punto.

Definición 1.10. Sean X un espacio topológico, x un punto de ramificación de X y β un número cardinal. Se dice que el punto x tiene *orden* β si se cumple que:

(i) para cualquier vecindad abierta U de X, tal que $x \in U$, existe otro conjunto abierto V de X tal que $x \in V$, $V \subset U$ y $|fr(V)| \leq \beta$, y

(ii) para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$ existe una vecindad abierta U del punto x en X tal que para cualquier conjunto abierto V de X contenido en U de modo que $x \in V$ se tiene que $\alpha < |fr(V)|$.

Al orden de un punto de ramificación x lo denotamos por $orden(x)$.

Lema 1.11. *Sean X un espacio topológico y x un punto de ramificación de X. Si se tiene un homeomorfismo $h : X \to X$, entonces ocurre que el $orden(h(x)) = orden(x)$.*

Demostración. Consideremos una vecindad abierta U del punto $h(x)$, así el conjunto $h^{-1}(U)$ es una vecindad abierta del punto x en X. Dado que x es un punto de ramificación, existe un conjunto abierto V de X que contiene a x tal que $V \subset h^{-1}(U)$ y $|fr(V)| \leq orden(x)$. Se sigue que el conjunto $h(V)$ es una vecindad abierta del punto $h(x)$ en X que está contenida en U y que cumple que $|fr(h(V))| \leq orden(x)$.

Ahora, sea α un número cardinal estrictamente menor que $orden(x)$, de la Definición 1.10 se sabe que existe una vecindad abierta U del punto x en X, tal que para cualquier subconjunto abierto V del conjunto U que contiene al punto x, se tiene que $\alpha < |fr(V)|$. Como h es un homeomorfismo, ocurre que $h(U)$ es una vecindad abierta del punto $h(x)$ en X, tal que para cualquier subconjunto abierto V de $h(U)$, de manera que $h(x) \in V$, sucede que $\alpha < |fr(V)|$. Por lo tanto, se tiene que $orden(h(x)) = orden(x)$. †

Corolario 1.12. *Sea X un espacio topológico. Si x es un punto de ramificación de X, entonces*

$$\tau(x) \subset \{y \in X : y \text{ es un punto de ramificación y } orden(y) = orden(x)\}.$$

Demostración. Sea x un punto de ramificación del espacio X. Considere y un punto que pertenezca a la órbita del punto x. Así, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Del Lema 1.8 se sabe que y es un punto de ramificación y del Lema 1.11 se tiene que $orden(y) = orden(x)$. Por lo tanto se tiene la contención deseada. †

1.2. Continuos

Esta sección se centra en recordar las definiciones de algunos conceptos elementales de la Teoría de los continuos y que serán de utilidad para la lectura de esta tesis. Para comenzar retomamos la definición de *c*ontinuo; en el Capítulo 3 trabajaremos con algunos continuos de manera específica, éstos son los $n-$odos simples, las gráficas completas y los árboles, es por ello que también hemos incluído sus definiciones. El Teorema 1.25 dice que para dos números naturales N_1 y N_2 existe una cantidad finita de árboles cuyo conjunto de órdenes de sus puntos de ramificación está acotado superiormente por N_1 y la cantidad de puntos de ramificación que contiene cualquier subarco está acotada superiormente por N_2, este resultado nos proporciona una herramienta magnífica para el desarrollo de la Sección 3.5 del Capítulo 3. Por otra parte, el Teorema 1.27 nos indica que dos puntos x y y de un continuo X pertenecen a la misma órbita únicamente cuando existe una función biyectiva entre las componentes conexas de los conjuntos $X-\{x\}$ y $X-\{y\}$, este resultado nos da seguridad sobre la forma de elegir puntos de un continuo.

Definición 1.13. Un *continuo* es un espacio topológico no vacío, metrizable, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo contenido en el espacio.

Definición 1.14. Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se dice que X es *irreducible alrededor de* A si no existe un subcontinuo propio de X que contenga al conjunto A. Se dice que X es *irreducible* si existen p y q en X tales que X es irreducible alrededor de $\{p,q\}$.

Definición 1.15. Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al subespacio $[0,1]$ de la recta real.

Definición 1.16. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico que es homeomorfo al subespacio $S^1=\{x\in\mathbb{R}^2 : ||x||=1\}$ del plano real.

Definición 1.17. Un $n-$*odo simple* es un continuo que puede representarse como la unión de n arcos de manera que cualesquiera dos de ellos se intersectan en un solo punto llamado vértice del $n-odo$ simple y que es punto extremo de cada arco.

Definición 1.18. Una *gráfica* es un continuo que se puede representar como la unión de una cantidad finita de arcos de manera que cualesquiera dos de ellos o bien son ajenos o bien se intersectan en alguno de sus puntos extremos.

Definición 1.19. Un continuo es una *gráfica completa* con k vértices, para algún $k \geq 4$, si es homeomorfo al subespacio euclidiano de $\mathbb{R}^k$, que se obtiene al unir con un único arco a los puntos $e_i = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$, con $x_i = 1$, $x_j = 0$ cuando $j \neq i$ y $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Al punto e_i se le llama vértice de la gráfica completa, para cada $1 \leq i \leq k$.

Una *arista* de la gráfica completa X es un subarco A cuyos puntos extremos son vértices de la gráfica X y A no contiene ningún otro vértice de la gráfica X. Si a y b son vértices de una gráfica completa, denotaremos por $[a,b]$ a la única arista que los une.

Definición 1.20. Un *árbol* es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.

Definición 1.21. El *Cubo de Hilbert* es el espacio producto $[0,1]^{\omega}$.

Definición 1.22. Dos puntos p y q de un continuo X que no son ordinarios son *consecutivos* si para cada $y \in [p,q]$ tal que $y \neq p$ y $y \neq q$, el punto y es ordinario.

Teorema 1.23. *Sea X un espacio topológico primero numerable y separable. Si E es un subconjunto denso de X, entonces existe D un subconjunto denso y numerable de X tal que $D \subset E$.*

Demostración. Sea E un subconjunto denso del espacio X. Como X es separable, existe M un subconjunto denso y numerable de X. Dado que el espacio X es primero numerable, para cada $x \in M$ elija A_x una sucesión de puntos del conjunto E que converja al punto x. Definamos el conjunto D como la unión:

$$\bigcup_{x \in M} A_x.$$

Note que el conjunto D es numerable y está contenido en el conjunto E. Mostremos que de hecho el conjunto D es denso en el espacio X. Es claro que $M \subset cl_X(D)$. Como M es un subconjunto denso de X, se tiene que $cl_X(M) \subset cl_X(D)$. Esto implica que $X = cl_X(D)$. Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Recuerde que una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. El siguiente resultado es el Teorema 10.13 de [20], Nadler lo demuestra para dendritas, aunque nosotros lo aplicaremos para árboles.

Teorema 1.24. *Un continuo no degenerado X es una dendrita si y sólo si para cualquier punto $p \in X$ la cantidad de componentes conexas del conjunto $X - \{p\}$ es igual al $orden(p)$.*

Teorema 1.25. *Sean N_1 y N_2 números naturales fijos. Si X es un árbol tal que*

(i) el conjunto de órdenes de los puntos de ramificación de X está acotado superiormente por N_1, y

(ii) para cualquier subarco A de X, se tiene que $|A \cap R(X)| \leq N_2$,

entonces existe solamente una cantidad finita de árboles que poseen las propiedades (i) y (ii) que no son homeomorfos al árbol X.

Demostración. Sea Y un árbol que satisface las condiciones (i) y (ii). Sean e_1 y e_2 dos puntos extremos del árbol Y, se sabe que existe un único arco A_1 contenido en Y de manera que $e_1, e_2 \in A_1$. De la propiedad (ii), se tiene que el arco A_1 contiene a lo más N_2 puntos de ramificación. Supongamos que la intersección $A_1 \cap R(Y)$ es no vacía. Denotemos por r_1 al punto de ramificación de Y que pertenece al arco A_1 tal que no existe un punto de ramificación de Y contenido en el arco $[e_1, r_1]$ que sea distinto del punto r_1.

Ahora, de la condición (i) se sabe que $orden(r_1) \leq N_1$, del Teorema 1.24 se sabe que el conjunto $Y - \{r_1\}$ posee a lo más N_1 componentes conexas distintas. Suponga que el conjunto $Y - \{r_1\}$ tiene exactamente α componentes conexas, note que $\alpha - 2$ componentes conexas del conjunto $Y - \{r_1\}$ no contienen subconjuntos del arco A_1.

Note que si C es una de las componentes conexas del conjunto $Y - \{r_1\}$ que no contienen subconjuntos del arco A_1, entonces existe un punto extremo de Y que pertenece a la componente conexa C, digamos e_3. Así, existe un único arco A_2 que contiene a los puntos e_3 y e_1. Observe que el punto de ramificación r_1 pertenece al arco A_2.

Suponga que en el arco $[r_1, e_3]$ existe un punto de ramificación r_2 que es distinto del punto r_1 y de manera que en el arco $[r_1, r_2]$ no hay más puntos de ramificación del árbol Y que los puntos r_1 y r_2. De la condición (i) se sabe que $orden(r_2) \leq N_1$, esto implica que el conjunto $Y - \{r_2\}$ posee a lo más N_1 componentes conexas distintas, de las cuales $N_1 - 2$ no contienen subconjuntos del arco A_2.

Suponga que hemos repetido este proceso hasta hallar un punto extremo e y un punto de ramificación r_n, para cada $1 \leq n \leq N_2 - 1$, de manera que si A es el arco contenido en el árbol Y tal que los puntos e_1 y e pertenecen a A, entonces el punto de ramificación r_n pertenece al arco A, para cada $1 \leq n \leq N_2 - 1$. Si ocurre que el arco A contiene N_2 puntos de ramificación, entonces existe un punto de ramificación r_{N_2} del árbol Y distinto del punto r_n, para cada $1 \leq n \leq N_2 - 1$, que pertenece al arco $[r_{N_2-1}, e]$. Dado que $orden(r_{N_2}) \leq N_1$, se tiene que el árbol Y posee a lo más N_1 puntos extremos que son consecutivos al punto r_{N_2}.

Con lo anterior hemos mostrado la manera en que se pueden construir aquellos árboles que poseen las propiedades (i) y (ii). Además, debe observar que cada combinación de puntos de ramificación y de órdenes de puntos de ramificación determina un árbol distinto. Por lo tanto, a lo más existen $N_1^{N_2} - 1$ árboles que poseen las condiciones (1), (2) y (3) y que no son homeomorfos al árbol X. †

La demostración del siguiente resultado se tomó de [9, Teorema 7.3, p. 108].

Teorema 1.26. *Sean X un espacio topológico, A y B subconjuntos cerrados de X tales que $X = A \cup B$. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$ definida como $h(x) = f(x)$, si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$, si $x \in B$, es continua.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado del espacio Y. Así, se tiene que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Como la función f es continua, entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y por lo tanto, es cerrado en X. Similarmente, el conjunto $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y por lo tanto, es cerrado en X. Por lo tanto, su unión es un subconjunto cerrado de X. Luego, la función h es continua. †

Teorema 1.27. *Sea X un árbol. Dos puntos x y y del espacio X determinan la misma órbita si y sólo si existe una biyección γ del conjunto de las componentes conexas de $X-\{x\}$, $\mathscr{C}(X-\{x\})$, en el conjunto de las componentes conexas de $X-\{y\}$, $\mathscr{C}(X-\{y\})$, de manera que para cada componente conexa C de $X-\{x\}$ existe un homeomorfismo $h : C \to \gamma(C)$.*

Demostración. Suponga que los puntos x y y determinan la misma órbita en el árbol X. Note que ocurre alguno de los siguientes casos:

(I) x es un punto extremo, así, del Lema 1.4 se tiene que y es un punto extremo. De aquí que $X-\{x\}$ y $X-\{y\}$ son conjuntos conexos.

(II) x es un punto ordinario, así, del Lema 1.6 se tiene que y es un punto ordinario. De aquí que los conjuntos $X-\{x\}$ y $X-\{y\}$ tienen dos componentes conexas.

(III) x es un punto de ramificación, así, del Lema 1.12 se tiene que y es un punto de ramificación y del mismo orden que el punto x, que es finito. De aquí que los conjuntos $X-\{x\}$ y $X-\{y\}$ tienen *orden(x)* componentes conexas.

En cualquiera de los tres casos ocurre que los conjuntos $X-\{x\}$ y $X-\{y\}$ poseen la misma cantidad de componentes conexas.

Sea h un homeomorfismo del árbol X en sí mismo tal que $h(x) = y$. Numeremos el conjunto de componente conexas $\mathscr{C}(X-\{x\})$ como

$$\mathscr{C}(X-\{x\}) = \{C_n : 1 \leq n \leq orden(x)\}.$$

Para $1 \leq n \leq orden(x)$, se tiene que el conjunto $h(C_n)$ es una componente conexa de $X-\{y\}$.

Ahora, definamos una función γ del conjunto de las componentes conexas del conjunto $X-\{x\}$ en el conjunto de las componentes conexas del conjunto $X-\{y\}$ como $\gamma(C_n)=h(C_n)$, para cada $1\leq n\leq orden(x)$.

Veamos que γ es una función suprayectiva. Para ello considere C una componente conexa de $X-\{y\}$. Dado que la función inversa h^{-1} del homeomorfismo h es también un homeomorfismo de X en sí mismo, se tiene que el conjunto $h^{-1}(C)$ es una componenete conexa del conjunto $X-\{x\}$.

Por último mostremos que γ es una función inyectiva. Para ello considere dos componentes conexas diferentes del conjunto $X-\{x\}$, digamos $C_{n(1)}$ y $C_{n(2)}$. Dado que las dos componentes conexas son diferentes y h es un homeomorfismo, se sigue que $h(C_{n(1)})$ y $h(C_{n(2)})$ son componentes conexas distintas del conjunto $X-\{y\}$.

Por lo tanto, γ es una función biyectiva.

Mostremos la otra implicación. Sean x y y puntos del continuo X. Para cada $1\leq n\leq orden(x)$, existe un homeomorfismo h_n de la cerradura de la componente conexa C_n del conjunto $X-\{x\}$ en la cerradura de la componente conexa $\gamma(C_n)$ del conjunto $X-\{y\}$, tal que $h_n(x)=y$. Definamos una función h del árbol X en sí misma como $h(z)=h_n(z)$, si el punto z pertenece a la cerradura de la componente conexa C_n, para algún $1\leq n\leq orden(x)$. Probemos que la función h es un homeomorfismo del espacio X en sí mismo.

Primero veamos que h es una función suprayectiva. Sea w un punto del árbol X. Si $w=y$, entonces $h(x)=w$. Suponga que w pertenece a alguna de las componentes conexas de $X-\{y\}$. Entonces existe un número natural n tal que $1\leq n\leq orden(x)$ y $w\in\gamma(C_n)$. Como $h_n(C_n)=\gamma(C_n)$ y h_n es un homeomorfismo, se sabe que existe un punto $z\in C_n$ de manera que $h_n(z)=w$, así, se tiene que $h(z)=w$.

Ahora mostremos que h es una función inyectiva. Sean z_1 y z_2 dos puntos distintos del árbol X. Si z_1 es el punto x, entonces $h(z_1)=y$ y $h(z_2)$ pertenece a una de las componentes conexas del conjunto $X-$

$\{y\}$. Si ambos puntos z_1 y z_2 pertenecen a la cerradura de la componente conexa C_n, para algún $1 \leq n \leq orden(x)$, dado que h_n es un homeomorfismo, se tiene que los puntos $h(z_1)$ y $h(z_2)$ son diferentes. Por último, si los puntos z_1 y z_2 pertenecen a la cerradura de componentes conexas diferentes del conjunto $X - \{x\}$, entonces los puntos $h(z_1)$ y $h(z_2)$ pertenecen a la cerradura de componentes conexas diferentes del conjunto $X - \{y\}$, así, $h(z_1)$ y $h(z_2)$ son puntos diferentes.

Probemos que la función h es continua. Note que:

$$X = \bigcup_{n=1}^{orden(x)} cl_X(C_n),$$

$$\bigcap_{n=1}^{orden(x)} cl_X(C_n) = \{x\}$$

y que para cada $1 \leq n \leq orden(x)$ ocurre que $h_n(x) = y$. Así, del Teorema 1.26 se sigue que la función h es continua.

Además, como la función h es continua, el árbol X es compacto y Hausdorff, se tiene que h es una función cerrada.

De todo esto se sigue que la función h es un homeomorfismo del árbol X en sí mismo de manera que $h(x) = y$. Por lo tanto, los puntos x y y determinan la misma órbita en X. †

1.3. Homeomorfismos

Esta sección del capítulo es fundamental y de gran relevancia para la obtención de los resultados presentados en el Capítulo 3, en ella se encuentra la construcción de algunos homeomorfismos de un continuo en sí mismo de manera que podamos controlar la correspondencia entre los puntos del espacio, es decir, nosotros elegimos la manera de mapear los puntos dentro del mismo espacio.

En la demostración del Lema 1.29 hallamos la forma en que se debe construir una función creciente de un conjunto denso y numerable del espacio de los números reales en otro conjunto denso y numerable del mismo espacio, esta función creciente puede ser extendida a un homeomorfismo del espacio euclidiano de los números reales en sí mismo tal como lo afirma el Lema 1.31, dicho homeomorfismo tiene una cualidad muy peculiar, manda a uno de los conjuntos densos en el otro.

También demostramos que si tenemos dos pares de conjuntos densos y numerables de la recta real, entonces se pueden hallar una función creciente y un homeomorfismo que la extiende de manera que manda la unión del primer par de conjuntos densos en la unión del segundo par de conjuntos densos. Por otro lado, el Teorema 1.34 nos proporciona una manera de construir un homeomorfismo de un $n-$odo simple en sí mismo a partir de una colección de homeomorfismos que van de cada uno de los arcos determinados por el único punto de ramificación del $n-$odo simple y alguno de los puntos extremos a otro de esos arcos. De manera similar ocurre con los árboles que tienen solamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$, tal como lo mostramos en el Teorema 1.35. Así mismo sucede con las gráficas completas con k vértices, tal hecho lo demostramos en el Teorema 1.36. Por último, para el desarrollo que presentamos del trabajo de Bennett en el Capítulo 2, es de suma importancia el Teorema 1.45, que nos proporciona las propiedades necesarias para asegurar la convergencia de una sucesión de homeomorfismos a otro homeomorfismo.

Teorema 1.28. *Si $f : (0,1) \to (0,1)$ es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$, tal que $h|_{(0,1)} = f$.*

Demostración. Sea f un homeomorfismo del conjunto abierto $(0,1)$ en sí mismo. Observe que ocurre alguno de los siguientes casos.

Caso 1. *La función f es creciente*.

En este caso definimos h del conjunto cerrado $[0,1]$ en sí mismo como $h(x) = f(x)$, para cada $x \in (0,1)$, $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Es claro que la función h está bien definida y que es biyectiva.

Observe que la función h es también una función creciente. Por lo tanto, la función h es un homeomorfismo.

Caso 2. *La función f es decreciente*.

En este caso definimos h del conjunto cerrado $[0,1]$ en sí mismo como $h(x) = f(x)$, para cada $x \in (0,1)$, $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$. Es claro que la función h está bien definida y que es biyectiva.

Observe que la función h es también una función decreciente. Por lo tanto, la función h es un homeomorfismo. †

Lema 1.29. *Si M y N son subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$, entonces existe una función biyectiva y estrictamente creciente de M en N.*

Demostración. Sean M y N subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$. Numeremos cada uno de ellos de la siguiente manera:

$$M = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \text{ y } N = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pongamos $m_1 = 1$ y $n_1 = 1$, definimos $f(x_{m_1}) = y_{n_1}$. Ahora tome $n_2 = 2$, entonces ocurre que $y_{n_1} < y_{n_2}$ o bien que $y_{n_2} < y_{n_1}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $y_{n_1} < y_{n_2}$. Sea

$$m_2 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : x_{m_1} < x_m\}.$$

Note que $x_{m_1} < x_{m_2}$ y que no necesariamente $m_2 = 2$. Entonces definimos $f(x_{m_2}) = y_{n_2}$. Además se tiene que $f(x_{m_1}) < f(x_{m_2})$. Ahora, sea

$$m_3 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : x_m \neq x_{m_i} \text{ para cada } i < 3\}.$$

Para elegir adecuadamente el índice n_3 utilizaremos los conjuntos

$$\{x_{m_i} : x_{m_i} < x_{m_3} \text{ con } i < 3\} \text{ y } \{x_{m_i} : x_{m_3} < x_{m_i} \text{ con } i < 3\}.$$

Observe que alguno de ellos podría ser vacío, pero no ambos simultáneamente. Sean

(I) $\sigma(x_{m_3}) = \text{máx}\{x_{m_i} : x_{m_i} < x_{m_3} \text{ con } i < 3\}$ y

(II) $\eta(x_{m_3}) = \text{mín}\{x_{m_i} : x_{m_3} < x_{m_i} \text{ con } i < 3\}$.

Si $\sigma(x_{m_3})$ y $\eta(x_{m_3})$ existen, considere

$$n_3 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{m_3})) < y_n < f(\eta(x_{m_3}))\}.$$

Si el punto $\sigma(x_{m_3})$ no existe entonces tomamos

$$n_3 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : y_n < f(\eta(x_{m_3}))\}.$$

O bien, si sucede que $\eta(x_{m_3})$ no existe, entonces consideramos

$$n_3 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{m_3})) < y_n\}.$$

En los tres casos definiremos $f(x_{m_3}) = y_{n_3}$. Observe que f es creciente con respecto al conjunto $\{x_i : i < 4\}$. A continuación considere

$$n_4 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq y_{n_i}, \text{ para cada } i < 4\}.$$

Así como procedimos a la elección de n_3, sean

(I) $\sigma(y_{n_4}) = \text{máx}\{y_{n_i} : y_{n_i} < y_{n_4} \text{ con } i < 4\}$ y

(II) $\eta(y_{n_4}) = \text{mín}\{y_{n_i} : y_{n_4} < y_{n_i} \text{ con } i < 4\}$.

Nuevamente, debemos observar que alguno de $\sigma(y_{n_4})$ o $\eta(y_{n_4})$ podría no existir, pero no ambos al mismo tiempo. Denotemos por $g(\sigma(y_{n_4}))$ y $g(\eta(y_{n_4}))$ a los elementos del subconjunto denso M cuya imagen bajo f son los puntos $\sigma(y_{n_4})$ y $\eta(y_{n_4})$, respectivamente.

Ahora, si $\sigma(y_{n_4})$ y $\eta(y_{n_4})$ existen, entonces tomamos

$$m_4 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{n_4})) < x_m < g(\eta(y_{n_4}))\}.$$

Si el punto $\sigma(y_{n_4})$ no existe entonces tomamos

$$m_4 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : x_m < g(\eta(y_{n_4}))\},$$

o bien, si sucede que $\eta(y_{n_4})$ no existe, entonces consideraremos

$$m_4 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{n_4})) < x_m\}.$$

Hecho esto, definimos $f(x_{m_4}) = y_{n_4}$. En general, cuando $k \in \mathbb{N}$ es impar elegimos m_k como

$$m_k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : x_m \neq x_{m_i}, \text{ para cada } i < k\}.$$

Si los puntos $\sigma(x_{m_k})$ y $\eta(x_{m_k})$ existen, se procede a elegir n_k como sigue:

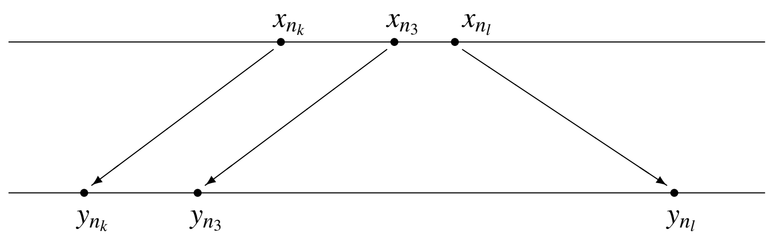
$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{m_k})) < y_n < f(\eta(x_{m_k}))\}.$$

Cuando el punto $\sigma(x_{m_k})$ no existe, hacemos lo siguiente:

$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : y_n < f(\eta(x_{m_k}))\}.$$

O bien, si el punto $\eta(x_{m_k})$ no existe, se elige

$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{m_k})) < y_n\}.$$



En cualquiera de los tres casos definimos $f(x_{m_k}) = y_{n_k}$. Cuando k es un número natural par se procederá a elegir n_k como a continuación se muestra:

$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq y_{n_i}, \text{ para cada } i < k\}.$$

Denotemos por $g(\sigma(y_{n_k}))$ al elemento del conjunto M cuya imagen bajo f es el punto $\sigma(y_{n_k})$, y sea $g(\eta(y_{n_k}))$ el elemento del conjunto M cuya imagen bajo f es el punto $\eta(y_{n_k})$. Cuando los puntos $\sigma(y_{n_k})$ y $\eta(y_{n_k})$ existen, tomamos

$$m_k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{n_k})) < x_m < g(\eta(y_{n_k}))\}.$$

O bien, si el punto $\sigma(y_{n_k})$ no existe, se elige

$$m_k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : x_m < g(\eta(y_{n_k}))\}.$$

O si ocurre que el punto $\eta(y_{n_k})$ no existe, se toma

$$m_k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{n_k})) < x_m\}.$$

En cualquiera de los tres casos, se define $f(x_{m_k}) = y_{n_k}$. De acuerdo a la construcción hecha, se tiene que f es una función biyectiva de M en N.

Por último, veamos que f es una función creciente. Sean a y b puntos distintos del subconjunto M tales que $a < b$. Entonces existen índices $s,t \in \mathbb{N}$ de manera que $a = x_{m_s}$ y $b = x_{m_t}$, esto implica que $f(x_{m_s}) = y_{n_s}$ y que $f(x_{m_t}) = y_{n_t}$.

Suponga que $s < t$. Si t es un número impar, entonces se tiene que $x_{m_s} \leq \sigma(x_{m_t})$, y por tanto

$$f(x_{m_s}) \leq f(\sigma(x_{m_t})) < y_{n_t}.$$

Si t es un número natural par, entonces se tiene la desigualdad $y_{n_s} \leq \sigma(y_{n_t}) < y_{n_t}$. Ahora suponga que $s > t$. Si s es un número impar, entonces se tiene que $x_{m_s} < \eta(x_{m_s}) \leq x_{m_t}$, y por tanto

$$f(x_{m_s}) < f(\eta(x_{m_t})) \leq y_{n_t}.$$

Si s es un número par, entonces se tiene que $y_{n_s} < \eta(y_{n_s}) \leq y_{n_t}$. Por lo tanto f es una función creciente de M en N. †

Siguiendo un procedimiento similar al que se usó en la demostración del Lema 1.29 se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.30. *Si M y N son subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$, entonces existe una función biyectiva y decreciente de M en N.*

Lema 1.31. *Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$. Si $f : M \to N$ es una función biyectiva y creciente, entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h|_M = f$.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$ y $f : M \to N$ una función creciente y biyectiva. Definimos $h(x) = f(x)$, para cada $x \in M$. Para cada $x \in \mathbb{R} - M$ considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en el subconjunto M que sea estrictamente creciente y convergente al punto x en el espacio $\mathbb{R}$, definamos entonces

$$h(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} h(x_n).$$

Consideremos x un punto del subconjunto $\mathbb{R} - M$ y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones contenidas en el subconjunto M que sean crecientes y convergentes al punto x en $\mathbb{R}$.

Veamos que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función bien definida. Note que, si b es un punto perteneciente a M tal que $x < b$, entonces la sucesión $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y está acotada superiormente por $h(b)$, esto implica que tiene límite, llamémoslo a. Observe que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $y_m < x_n < x$. Note que $h(y_m) = f(y_m)$ y $h(x_n) = f(x_n)$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. De donde, para cualquier natural m existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(y_m) < h(x_n) < a$, es decir que el punto a es una cota superior para la sucesión creciente $\{h(y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Para $\varepsilon > 0$, existe un número natural N_1 de modo que para cualquier $n \geq N_1$ se tiene que $|h(x_n) - a| < \varepsilon$. Además, es posible hallar un número natural N_2 tal que para cualquier $m \geq N_2$ sucede que $x_{N_1} < y_m < x$, entonces para todo $m \geq N_2$ se tiene que $|h(y_m) - a| < \varepsilon$. Esto implica que

$$\lim_{m\in\mathbb{N}} h(y_m) = a.$$

Por lo tanto h es una función bien definida.

Ahora mostremos que $h(x) \in \mathbb{R} - N$. Sea y un punto del subconjunto denso N, entonces existe un único $x_y \in M$ de modo que $f(x_y) = y$. Es claro que x y x_y son puntos distintos. Así, existen $\delta > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para cualquier número natural $n \geq N_0$ ocurre que

$$x_n \notin (x_y - \delta, x_y + \delta).$$

Esto implica que existen dos puntos $c,d \in M$ con $c < x_y < d$ tales que para cualquier índice natural $n \geq N_0$ no sucede que $c < x_n < d$, de aquí que para todo $n \geq N_0$ no ocurre que $h(c) < h(x_n) < h(d)$. Por lo tanto el punto y no es el límite de la sucesión $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es decir que $h(x) \in \mathbb{R} - N$.

Probemos que la función h es inyectiva. Sean $x,y \in \mathbb{R}$ puntos distintos. En los casos en que o bien $x,y \in M$ o bien $x \in M$ y $y \in \mathbb{R} - M$, es claro que $h(x)$ es distinto de $h(y)$. Sin perder generalidad, suponga que $x,y \in \mathbb{R} - M$ y que $x < y$. Considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesiones contenidas en M que sean crecientes y convergentes a x y y, respectivamente, de manera que para todo $m \in \mathbb{N}$ ocurra que $x < y_m$. Entonces el punto $h(y_1)$ es una cota superior para la sucesión $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, esto implica que $h(x) < h(y_1)$, y por tanto $h(x)$ y $h(y)$ son distintos y no sólo eso, de hecho $h(x) < h(y)$. Así, la función h es inyectiva.

Por último, veamos que h es una función suprayectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$. Si y pertenece al conjunto N, entonces existe un único $x \in M$ de manera que $h(x) = y$. Si $y \in \mathbb{R} - N$, consideremos $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de puntos en el subconjunto denso N que es convergente a y en el espacio $\mathbb{R}$. Observe que la sucesión $\{f^{-1}(y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto M, es creciente y acotada, por lo tanto tiene límite. Sea x el punto límite de la sucesión $\{f^{-1}(y_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$. Note que x no pertenece a M y que $h(x) = y$.

Para ver que la función h es creciente, considere $x,y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$. Note que, si $x,y \in M$, entonces $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$, por lo tanto se tiene que $h(x) < h(y)$. Ahora, si $x,y \in \mathbb{R} - M$, entonces se puede hallar una sucesión creciente de puntos del conjunto M acotada inferiormente por x, así, $h(x) < h(y)$. Además, ya hemos mostrado que si $x,y \in \mathbb{R} - M$, entonces sucede que $h(x) < h(y)$. Por lo tanto, la función h es creciente.

Se concluye que la función h es biyectiva, estrictamente creciente y tal que $h|_M = f$. Por lo tanto h es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en sí mismo de forma que $h(x) = f(x)$, para todo $x \in M$. †

Siguiendo un procedimiento similar al que se usó en la demostración del Lema 1.31 se demuestra el siguiente lema.

Lema 1.32. *Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos de $\mathbb{R}$. Si $f : M \to N$ es una función biyectiva y decreciente, entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h|_M = f$.*

Lema 1.33. *Si M_1, M_2, N_1 y N_2 son subconjuntos numerables y densos en $\mathbb{R}$ tales que M_1 y M_2 son ajenos y N_1 y N_2 también son ajenos, entonces existe una función biyectiva y creciente $f : M_1 \cup M_2 \to N_1 \cup N_2$ tal que $f(M_1) = N_1$ y $f(M_2) = N_2$.*

Demostración. Para esta demostración convendremos que $0 \in \mathbb{N}$. Sean M_1, M_2, N_1 y N_2 subconjuntos numerables y densos en $\mathbb{R}$ de manera que M_1 y M_2 son ajenos y N_1 y N_2 también son ajenos. Numerémoslos de la siguiente manera:

(i) $M_1 = \{x_{2m+1} : m \in \mathbb{N}\}$,

(ii) $M_2 = \{x_{2m} : m \in \mathbb{N}\}$,

(iii) $N_1 = \{y_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ y

(iv) $N_2 = \{y_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Hagamos $t_1 = 1$ y $k_1 = 1$. Note que el punto x_{t_1} pertenece al conjunto M_1 y que el punto y_{k_1} pertenece al conjunto N_1. Así, hacemos $f(x_{t_1}) = y_{k_1}$. Ahora tomamos

$$k_2 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq y_{k_1}\},$$

observe que $k_2 = 2$, entonces k_2 es congruente con 0 en módulo 2. Además, es posible que $y_{k_1} < y_{k_2}$ o bien que $y_{k_2} < y_{k_1}$. Supongamos sin perder generalidad que $y_{k_1} < y_{k_2}$. Elijamos

$$t_2 = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : x_{t_1} < x_t \text{ y } t \equiv k_2 \text{ mód } 2\}.$$

Entonces definimos $f(x_{t_2})$ como y_{k_2}. A continuación tomamos t_3 de la siguiente forma,

$$t_3 = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : x_t \neq x_{t_i}, \text{ para cada } 0 < i < 3\}.$$

Al igual que en el Lema 1.29, ocuparemos σ y η para elegir adecuadamente el índice k_3. Sean

$$\sigma(x_{t_3}) = \text{máx}\{x_{t_i} : x_{t_i} < x_{t_3} \text{ y } 0 < i < 3\} \text{ y}$$

$$\eta(x_{t_3}) = \text{mín}\{x_{t_i} : x_{t_3} < x_{t_i} \text{ y } 0 < i < 3\}.$$

Observe que es posible que alguno de $\sigma(x_{t_3})$ y $\eta(x_{t_3})$ no exista, pero al menos uno de ellos sí. Si tanto $\sigma(x_{t_3})$ como $\eta(x_{t_3})$ existen, entonces elegiremos

$$k_3 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{t_3})) < y_k < f(\eta(x_{t_3})) \text{ y } k \equiv t_3 \text{ mód } 2\}.$$

Si ocurre que $\sigma(x_{t_3})$ no existe, entonces tomaremos

$$k_3 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : y_k < f(\eta(x_{t_3})) \text{ y } k \equiv t_3 \text{ mód } 2\}.$$

O bien, si $\eta(x_{t_3})$ no existe, entonces elegimos

$$k_3 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{t_3})) < y_k \text{ y } k \equiv t_3 \text{ mód } 2\}.$$

Entonces definimos $f(x_{t_3}) = y_{k_3}$. Ahora tomemos k_4 de tal forma que

$$k_4 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq y_{k_i}, \text{ para cada } 0 < i < 4\}.$$

Sean

$$\sigma(y_{k_4}) = \text{máx}\{y_{k_i} : y_{k_i} < y_{k_4} \text{ y } 0 < i < 4\} \text{ y}$$

$$\eta(y_{k_4}) = \text{mín}\{y_{k_i} : y_{k_4} < y_{k_i} \text{ y } 0 < i < 4\},$$

y denotemos por $g(\sigma(y_{k_4}))$ al punto del conjunto denso $M_1 \cup M_2$ cuya imagen bajo f es el punto $\sigma(y_{k_4})$, y por $g(\eta(y_{k_4}))$ al punto del subconjunto denso $M_1 \cup M_2$ cuya imagen bajo f es el punto $\eta(y_{k_4}.)$

Nuevamente, puede suceder que o bien $\sigma(y_{k_4})$ no exista o bien que $\eta(y_{k_4})$ no exista, pero al menos uno de ellos debe existir. Si ambos existen, elegimos t_4 como

$$t_4 = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{k_4})) < x_t < g(\eta(y_{k_4})) \text{ y } t \equiv k_4 \text{ mód } 2\}.$$

Si $\sigma(y_{k_4})$ no existe, entonces tomamos

$$t_4 = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : x_t < g(\eta(y_{k_4})) \text{ y } t \equiv k_4 \text{ mód } 2\}.$$

O bien, si el punto $\eta(y_{k_4})$ no existe, entonces elegimos

$$t_4 = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{k_4})) < x_t \text{ y } t \equiv k_4 \text{ mód } 2\}.$$

Hecha la elección del índice t_4, definimos $f(x_{t_4}) = y_{k_4}$. En general, procederemos como sigue. Cuando r es un entero positivo impar hacemos

$$t_r = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : x_t \neq x_{t_i}, \text{ para cada } 0 < i < r\}$$

y alguna de las siguientes elecciones según convenga,

(i) $k_r = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{t_r})) < y_k < f(\eta(x_{t_r})) \text{ y } k \equiv t_r \text{ mód } 2\}$,

(ii) $k_r = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : y_k < f(\eta(x_{t_r})) \text{ y } k \equiv t_r \text{ mód } 2\}$ o

(iii) $k_r = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : f(\sigma(x_{t_r})) < y_k \text{ y } k \equiv t_r \text{ mód } 2\}$.

Cuando r es un entero positivo par, elegimos el índice k_r como sigue

$$k_r = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq y_{k_i}, \text{ para cada } 0 < i < r\}$$

y realizamos alguna de las siguientes elecciones, según resulte conveniente,

(i) $t_r = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{k_r})) < x_t < g(\eta(y_{k_r})) \text{ y } t \equiv k_r \text{ mód } 2\}$,

(ii) $t_r = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : x_t < g(\eta(y_{k_r})) \text{ y } t \equiv k_r \text{ mód } 2\}$ o

(iii) $t_r = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} : g(\sigma(y_{k_r})) < x_t \text{ y } t \equiv k_r \text{ mód } 2\}$.

Consecuentemente, definimos $f(x_{t_r}) = y_{k_r}$. De acuerdo a la construcción hecha, f es una función biyectiva del conjunto $M_1 \cup M_2$ en el conjunto $N_1 \cup N_2$.

Veamos que $f(M_1) = N_1$ y que $f(M_2) = N_2$. Sea x un elemento de la unión $M_1 \cup M_2$. Entonces, existe un índice t_r, con $r \in \mathbb{N}$, tal que $x = x_{t_r}$, además, note que $f(x_{t_r}) = y_{k_r}$ y que $t_r \equiv k_r$ mód 2, esto implica que $x_{t_r} \in M_i$ y que $y_{k_r} \in N_i$, para un $i \in \{1,2\}$. De aquí se sigue que $f(M_i) = N_i$, para cada $i \in \{1,2\}$.

Para finalizar, demostraremos que la función f es creciente. Sean a y b puntos distintos pertenecientes a la unión de los conjuntos M_1 y

M_2. Supongamos, sin perder generalidad, que $a < b$. Entonces existen números enteros positivos t_r y t_s tales que $a = x_{t_r}$ y $b = x_{t_s}$. Recuerde que, con base en la construcción de la función f, se tiene que $f(x_{t_r}) = y_{k_r}$ y $f(x_{t_s}) = y_{k_s}$.

Suponga que $r < s$. Si s es un número impar, entonces se tiene que $x_{t_r} \leq \sigma(x_{t_s})$, y por tanto

$$f(x_{t_r}) < y_{t_s}.$$

Si s es un número par, entonces se tiene la desigualdad $y_{t_r} \leq \sigma(y_{t_s}) < y_{t_s}$. Ahora suponga que $r > s$. Si r es un número impar, entonces se tiene que $x_{t_r} < \eta(x_{t_r}) \leq x_{t_s}$, y por tanto

$$f(x_{t_r}) < f(y_{t_s}).$$

Si r es un número par, entonces se tiene que $y_{t_r} < \eta(y_{t_r}) \leq y_{t_s}$. Por lo tanto, la función f es creciente. Luego, se tiene lo desado. †

Teorema 1.34. *Sea X un $n-$odo simple con punto de ramificación r. Si $\{e_m : 1 \leq m \leq n\}$ es una numeración del conjunto de puntos extremos del $n-$odo simple X,*

(1) $i : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una función biyectiva y

(2) $f_m : [r, e_m] \to [r, e_{i(m)}]$ un homeomorfismo que satisface las igualdades $f_m(r) = r$ y $f_m(e_m) = e_{i(m)}$, para cada $1 \leq m \leq n$,

entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$, de manera que $h|_{[r,e_m]} = f_m$, para cada $1 \leq m \leq n$.

Demostración. Definamos una función h del $n-$odo X en sí mismo como $h(x) = f_m(x)$, si $x \in [r, e_m]$ para algún $1 \leq m \leq n$.

Veamos que h es una función bien definida. Para ello basta observar que $f_m(r) = r$, para todo $1 \leq m \leq n$. Esto implica que $h(r) = r$. Por lo tanto, h es una función bien definida.

Mostremos que h es una función suprayectiva. Consideremos y un punto del $n-$odo X, así, existe un número natural $1 \leq k \leq n$ de manera que $y \in [r, e_{i(k)}]$. Dado que la función f_k es suprayectiva, existe un punto

x en el arco $[r,e_k]$ tal que $f_k(x)=y$. Esto implica que $h(x)=y$. Por lo tanto h es una función suprayectiva.

Ahora, probemos que h es una función inyectiva. Sean x_1 y x_2 puntos distintos del $n-$odo X. Así, ocurre alguno de los siguientes casos:

(i) existe un número natural $1\leq k\leq n$ de manera que $h(x_1)=f_k(x_1)$ y $h(x_2)=f_k(x_2)$. Dado que la función f_k es inyectiva, se tiene que $h(x_1)\neq h(x_2)$.

(ii) existen dos números naturales distintos, digamos $k(1)$ y $k(2)$, tales que $h(x_1)=f_{k(1)}(x_1)$ y $h(x_2)=f_{k(2)}(x_2)$, esto implica que $h(x_1)\neq h(x_2)$.

Por lo tanto, la función h es inyectiva.

Note que el arco $[r,e_m]$ es un subconjunto cerrado del $n-odo$ simple X, para cada $1\leq m\leq n$, y que

$$X=\bigcup_{1\leq m\leq n}[r,e_m].$$

Así, del Teorema 1.26, se tiene que h es una función continua.

Note que el $n-odo$ simple X es un espacio compacto y Hausdorff, dado que la función h es continua, se sigue que h es una función cerrada. Además, observe que de acuerdo a su definición, la función h satisface la igualdad $h|_{[r,e_m]}=f_m$, para cada $1\leq m\leq n$. Por lo tanto h es un homeomorfismo de X en sí mismo que satisface lo deseado. †

Teorema 1.35. *Sea X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación r_1 y r_2, cada uno de ellos de orden $k+1$, con $k\geq 2$. Si el conjunto de puntos extremos está numerado como $E(X)=\{e_n:1\leq n\leq 2k\}$, se tienen funciones biyectivas $a:\{1,2\}\to\{1,2\}$ e $i:\{1,\ldots,2k\}\to\{1,\ldots,2k\}$ tales que*

- *el punto e_n es consecutivo al punto r_1, para cada $1\leq n\leq k$,*
- *el punto e_n es consecutivo al punto r_2, para cada $k+1\leq n\leq 2k$,*
- *el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto $r_{a(1)}$, para cada $1\leq n\leq k$ y*

- *el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq n \leq 2k$.*

y se tienen homeomorfismos

- $f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,
- $f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, *para cada* $1 \leq n \leq k$ *y*
- $f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, *para cada* $k+1 \leq n \leq 2k$,

tales que

(1) $f_0(r_1) = r_{a(1)}$ *y* $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

(2) $f_n(r_1) = r_{a(1)}$ *y* $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, *para cada* $1 \leq n \leq k$ *y*

(3) $f_n(r_2) = r_{a(2)}$ *y* $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, *para cada* $k+1 \leq n \leq 2k$,

entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$ *tal que*

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, *para cada* $1 \leq n \leq k$ *y*

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, *para cada* $k+1 \leq n \leq 2k$.

Demostración. Definamos para cada $x \in X$,

$$h(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in [r_1, r_2], \\ f_n(x) & \text{si } x \in [r_1, e_i], \text{ para algún } 1 \leq n \leq k, \\ f_n(x) & \text{si } x \in [r_2, r_n], \text{ para algún } k+1 \leq n \leq 2k. \end{cases}$$

De las propiedades (1), (2) y (3), se sigue que $h(r_1) = r_1$ y $h(r_2) = r_2$, esto implica que h es una función bien definida.

Ahora mostremos que la función h es suprayectiva. Consideremos y un punto del árbol X, entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones:

(i) el punto y pertenece al arco $[r_{a(1)}, r_{a(2)}]$. Dado que la función f_0 es suprayectiva, existe un punto x en el arco $[r_1, r_2]$ de manera que $f_0(x) = y$;

(ii) existe un número natural $1 \leq n \leq k$ de manera que $y \in [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$. Dado que la función f_n es suprayectiva, se puede hallar un punto x en el arco $[r_1, e_n]$ tal que $f_n(x) = y$;

(iii) existe un número natural $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que $y \in [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$. Dado que la función f_n es suprayectiva, se puede hallar un punto x en el arco $[r_2, e_n]$ tal que $f_n(x) = y$.

Los incisos (i), (ii) y (iii) implican que la función h es suprayectiva.

A continuación probaremos que h es una función inyectiva. Consideremos dos puntos distintos x_1 y x_2 del árbol X. Se tiene que ocurre alguno de los siguientes casos:

(i) los puntos x_1 y x_2 pertenecen al mismo arco, sea o bien el arco cuyos puntos extremos son puntos de ramificación de X o bien un arco cuyos puntos extremos sean un punto de ramificación y un punto extremo de la gráfica X; en cualquiera de los dos casos se puede hallar un número natural $0 \leq n \leq 2k$, de manera que $h(x_1) = f_n(x_1)$ y $h(x_2) = f_n(x_2)$. Dado que la función f_n es inyectiva, se tiene que $f_n(x_1)$ y $f_n(x_2)$ son distintos.

(ii) existen dos números naturales distintos, $n(1)$ y $n(2)$, de manera que $h(x_1) = f_{n(1)}(x_1)$ y $h(x_1) = f_{n(2)}(x_2)$. Dado que los números $n(1)$ y $n(2)$ son diferentes y los puntos x_1 y x_2 también lo son, se tiene que $f_{n(1)}(x_1) \neq f_{n(2)}(x_2)$.

Por lo tanto, la función h es inyectiva.

Note que se cumple que:

(a) el arco $[r_1, e_n]$ es un subconjunto cerrado del árbol X, para cada $1 \leq n \leq k$,

(b) el arco $[r_2, e_n]$ es un subconjunto cerrado del árbol X, para cada $k+1 \leq n \leq 2k$,

(c) $X = \left(\bigcup_{n=1}^{k} [r_1, e_n]\right) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{2k} [r_2, e_n]\right)$.

Así, del Teorema 1.26 se sigue que h es una función continua.

Dado que el árbol X es un espacio compacto y Hausdorff y la función h es continua, se tiene que h es una función cerrada. Por lo tanto h es un homeomorfismo del árbol X en sí mismo.

Además, observe que de acuerdo a la definición de la función h se cumple que

(i) $h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

(ii) $h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq k$ y

(iii) $h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $k+1 \leq n \leq 2k$.

Por lo tanto, la función h es un homeomorfismo del árbol X en sí misma que cumple lo deseado. †

Teorema 1.36. *Sea X una gráfica completa con k vértices, con $k \geq 4$. Si el conjunto de vértices está numerado como $V(X) = \{v_n : 1 \leq n \leq k\}$, se tienen una función biyectiva $i : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ y para cualesquiera $1 \leq m < n \leq k$, se tiene un homeomorfismo $f_{(m,n)}$ de la arista $[v_m, v_n]$ en la arista $[v_{i(m)}, v_{i(n)}]$ tal que $f_{(m,n)}(v_m) = v_{i(m)}$ y $f_{(m,n)}(v_n) = v_{i(n)}$, entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h|_{[v_m,v_n]} = f_{(m,n)}$, para cualesquiera $1 \leq m < n \leq k$.*

Demostración. Definamos $h(x) = f_{(m,n)}(x)$, si x pertenece a la arista $[v_m, v_n]$ para algunos $1 \leq m < n \leq k$.

Veamos que h es una función bien definida. Basta mostrar que h está bien definida en los vértices de la gráfica completa X. Consideremos $1 \leq t < k$, note que para cada $t < n \leq k$, se tiene que $f_{(t,n)}(v_t) = v_{i(t)}$, además, en caso de que existan, para cada $1 \leq m < t$, se tiene que $f_{(m,t)}(v_t) = v_{i(t)}$. Por lo tanto $h(v_t) = v_{i(t)}$. Esto implica que h es una función bien definida.

Mostremos que la función h es suprayectiva. Sea y un punto de la gráfica completa X, entonces existen $1 \leq m < n \leq k$, tales que el punto y pertenece a la arista $[v_{i(m)}, v_{i(n)}]$. Dado que la función $f_{(m,n)}$ es suprayectiva, se sabe que existe un punto x en la arista $[v_m, v_n]$ de manera que $f_{(m,n)}(x) = y$. Así, $h(x) = y$. Por lo tanto, la función h es suprayectiva.

Probemos que la función h es inyectiva. Sean x_1 y x_2 puntos distintos de la gráfica completa X. Así, ocurre alguno de los siguientes casos:

(i) existe números naturales $1 \leq m < n \leq k$ de manera que se cumple que $h(x_1) = f_{(m,n)}(x_1)$ y $h(x_2) = f_{(m,n)}(x_2)$. Dado que la función $f_{(m,n)}$ es inyectiva, se sigue que $h(x_1) \neq h(x_2)$.

(ii) existen números naturales distintos, digamos $1 \leq m(1) < n(1) \leq k$ y $1 \leq m(2) < n(2) \leq k$ de manera que $h(x_1) = f_{(m(1),n(1))}(x_1)$ y $h(x_2) = f_{(m(2),n(2))}(x_2)$, dado que los puntos x_1 y x_2 son distintos se tiene que $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Por lo tanto, la función h es inyectiva.

Note que para cualesquiera $1 \leq m < n \leq k$, la arista $[v_m, v_n]$ es un subconjunto cerrado de la gráfica completa X, y que

$$X = \bigcup_{m=1}^{k-1} \Big(\bigcup_{m<n}^{k} [v_n, v_m] \Big).$$

Así, del Teorema 1.26 se sigue que la función h es continua.

Dado que la función h es continua y que la gráfica completa X es un espacio compacto y Hausdorff, se sigue que h es una función cerrada. Por lo tanto, h es un homeomorfismo de la gráfica completa X en sí misma.

Note que de acuerdo a su definición, la función h satisface la igualdad $h|_{[v_m,v_n]} = f_{(m,n)}$, para cualesquiera $1 \leq m < n \leq k$. Por lo tanto, la función h es un homeomorfismo que cumple lo deseado. †

1.4. Espacios de funciones

Para los resultados que siguen consideremos los conjuntos de funciones contenidos en un espacio de funciones continuas que a continuación se definen. Sean X y Y dos espacios topológicos, se denota por $C(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X en Y, por $S(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X en Y que son sobreyectivas, por $H(X,Y)$ al conjunto de todos los homeomorfismos de X en Y. Cuando ocurra que el espacio Y es homeomorfo a X, simplemente escribiremos $C(X)$, $S(X)$ y $H(X)$.

Definición 1.37. Sean X y Y espacios topológicos, f y g dos funciones continuas del espacio X en Y. Si el espacio Y es metrizable y d es una métrica admisible para Y, se define la métrica $\hat{d} : C(X,Y) \to C(X,Y)$ como:

$$\hat{d}(f,g) = sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

Veamos que efectivamente $\hat{d}$ es una métrica. Sean f, g y h tres funciones continuas del espacio X en el espacio Y. Dado que d es una métrica sobre el espacio Y, ocurre que $d(f(x),g(x)) \geq 0$, para todo $x \in X$.

Además, que $\hat{d}(f,g) = 0$ ocurre si y sólo si $sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\} = 0$, como d es una métrica, esto es equivalente a que $d(f(x),g(x)) = 0$, para cualquier $x \in X$, es decir que las funciones f y g son iguales.

Nuevamente, como d es una métrica del espacio Y, para cualquier $x \in X$, ocurre que

$$d(f(x),h(x)) \leq d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x)),$$

esto implica que para cada $x \in X$

$$d(f(x),h(x)) - d(f(x),g(x)) \leq d(g(x),h(x)),$$

así, tomando el supremo del lado derecho de la desigualdad se tiene que para cualquier $x \in X$,

$$d(f(x),h(x)) - d(f(x),g(x)) \leq \hat{d}(g,h),$$

de aquí se sigue que, para cualquier $x \in X$,

$$d(f(x),h(x)) - \hat{d}(g,h) \leq d(f(x),g(x)),$$

nuevamente, tomando el supremo del lado derecho de la desigualdad, se tiene que para cualquier $x \in X$,

$$d(f(x),h(x)) - \hat{d}(g,h) \leq \hat{d}(f,g),$$

después, se tiene que para cualquier $x \in X$

$$d(f(x),h(x)) \leq \hat{d}(f,g) + \hat{d}(g,h),$$

por lo tanto

$$\hat{d}(f,h) \leq \hat{d}(f,g) + \hat{d}(g,h).$$

Es decir, que la función $\hat{d}$ es una métrica sobre el espacio de las funciones continuas de X en Y.

Lema 1.38. *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos de X y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una $d-$sucesión de Cauchy de puntos de X. Si $d(x_{n+1},x_n) < 3^{-n}\,\mathrm{mín}\{d(x_j,A_j) : 1 \leq j \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathrm{lím}_{n\to\infty} x_n \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.*

Demostración. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $1 \leq j \leq n$ ocurre que

$$d(x_{n+1},x_n) < 3^{-n} d(x_j,A_j),$$

de aquí se sigue que $0 < d(x_j,A_j)$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Denotemos ahora como x al límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y elijamos $i \in \mathbb{N}$. Vamos a mostrar que el punto límite x no pertenece al conjunto A_i. Sea m un número natural, dado que $1 \leq i \leq (m-1)+i$ y que $m \leq (m-1)+i$, se tiene que

$$d(x_{m+i},x_{(m-1)+i}) < 3^{-((m-1)+i)} d(x_i,A_i) \leq 3^{-m} d(x_i,A_i).$$

Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, ocurre que

$$d(x_{j+i},x_i) \leq \sum_{l=1}^{j} d(x_{l+i},x_{(l-1)+i}) < \sum_{l=1}^{j} 3^{-l} d(x_i,A_i) = \frac{1}{2} d(x_i,A_i).$$

Por lo tanto $x \notin A_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego el punto límite x no pertenece al conjunto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. †

Lema 1.39. *Sean X, (Y,d) y Z tres espacios métricos compactos, y sean $f \in C(Z,X)$ y $g,h \in C(X,Y)$. Si $f \in S(Z,X)$, entonces sucede que $\hat{d}(g,h) = \hat{d}(g \circ f, h \circ f)$.*

Demostración. Dado que $f(Z) = X$, se tiene que $\{d(g(x),h(x)) : x \in X\}$ es igual al conjunto $\{d(g(f(z)),h(f(z))) : z \in Z\}$. Por lo tanto $\hat{d}(g,h) = \hat{d}(g \circ f, h \circ f)$. †

Definición 1.40. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y A un subconjunto de X. Se define el *diámetro del conjunto A* como el:

$$sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

Al diámetro del conjunto A lo denotaremos por $diam(A)$.

A la función identidad de un espacio topológico X la denotaremos por I_X.

Lema 1.41. *Sean (X,d) un espacio metrizable, $f \in H(X)$ y A un subconjunto de X. Si $f(A) = A$ y $f(z) = z$, para cada $z \in X - A$, entonces $\hat{d}(f,I_X) \leq diam(A)$.*

Demostración. Se sabe que $\hat{d}(f,I_X) = sup\{d(f(x),x) : x \in X\}$. Como se cumple que $f(z) = z$ para cada $z \in X - A$, entonces se sigue que:

$$\hat{d}(f,I_X) = sup\{d(f(x),x) : x \in A\}.$$

Además, note que para cada $x \in A$, ocurre que $d(f(x),x) \in \{d(a,b) : a,b \in A\}$. Por lo tanto, se tiene que $\hat{d}(f,I_X) \leq diam(A)$. †

Teorema 1.42. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Si d es una métrica admisible para Y, entonces $\hat{d}$ es completa. Por lo tanto, $C(X,Y)$ es completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C(X,Y)$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Primeramente, vamos a mostrar que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, para cada $x \in X$. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

es una sucesión de Cauchy en $C(X,Y)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $\hat{d}(f_n, f_m) < \varepsilon$, para cualesquiera $n, m \geq N$. Ahora, del hecho de que $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \hat{d}(f_n, f_m)$, se sigue que $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Dado que el espacio Y es compacto y que la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y, se sigue que para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Para cada $x \in X$, definamos a $f(x)$ como el punto límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $\gamma > 0$. Considere $M \in \mathbb{N}$ de manera que $\hat{d}(f_n, f_m) < \frac{\gamma}{2}$, para cada $n, n \geq M$. Sea $x \in X$ y $n \geq M$. Así, $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\gamma}{2}$, para cada $m \geq M$. Por la continuidad de la métrica d y de que $f(x)$ es el punto límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, se sigue que

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Por lo tanto $\hat{d}(f_n, f) \leq \frac{\gamma}{2} < \gamma$. Esto implica que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Ahora verificaremos que la función f es una función continua de X en Y. Sean $w \in X$ y $\eta > 0$. Dado que la función f es el límite de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es posible hallar $K \in \mathbb{N}$, de manera que $\hat{d}(f_n, f) < \frac{\eta}{3}$, para cualquier $n \geq K$. De aquí que $d(f(x), f_K(x)) < \frac{\eta}{3}$, para cada $x \in X$. Dado que la función f_K es continua, se puede hallar un conjunto abierto U de X de manera que el punto w pertenece a U y el conjunto $f_K(U)$ está contenido en la bola abierta $B_d(f_K(w), \frac{\eta}{3})$. Finalmente vamos a comprobar que el conjunto $f(U)$ está contenido en la bola abierta $B_d(f(w), \eta)$. Considere z un punto del conjunto abierto U, así

$$\begin{aligned} d(f(w), f(z)) &\leq d(f(w), f_K(w)) + d(f_K(w), f_K(z)) + d(f_K(z), f(z)) \\ &< \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la función f es continua en w, para cada $w \in X$. Por lo tanto la función f pertenece al conjunto $C(X,Y)$. Luego, el espacio de las funciones continuas de X en Y es completo. †

Teorema 1.43. *Si X y Y son espacios métricos compactos, entonces $S(X,Y)$ es un subconjunto cerrado de $C(X,Y)$.*

Demostración. Demostraremos que el conjunto $C(X,Y)-S(X,Y)$ es un subconjunto abierto del espacio de las funciones continuas de X en Y.

Consideremos f una función contenida en el espacio $C(X,Y)$ y que no pertenece al conjunto $S(X,Y)$, y sea d una métrica admisible para Y.

Como f no es suprayectiva, se puede hallar un punto y que pertenece al conjunto $Y-f(X)$. Dado que X es un espacio compacto y que la función f es continua, entonces existe $\varepsilon>0$, de manera que la intersección $B_d(y,\varepsilon)\cap f(X)$ es vacía. Demostraremos que la bola abierta $B_{\hat{d}}(f,\varepsilon)$ está contenida en el conjunto $C(X,Y)-S(X,Y)$.

Considere g una función que pertenece a la bola abierta $B_{\hat{d}}(f,\varepsilon)$. Así, $d(f(x),g(x))\leq \hat{d}(f,g)<\varepsilon$, para cada $x\in X$. De este modo se tiene que $y\notin g(X)$. Así, g pertenece al conjunto $C(X,Y)-S(X,Y)$. Por lo tanto el conjunto $C(X,Y)-S(X,Y)$, es un conjunto abierto de $C(X,Y)$. Luego, se tiene que $S(X,Y)$ es un subconjunto cerrado del espacio $C(X,Y)$. †

Recuerde que para un $\varepsilon>0$, una función f entre dos espacios métricos X y Y es una $\varepsilon-$función si $diam(f^{-1}(y))<\varepsilon$, para cada $y\in Y$. Así, definimos

$$C_\varepsilon(X,Y)=\{f\in C(X,Y): f \text{ es una } \varepsilon-\text{función}\},$$

$$S_\varepsilon(X,Y)=S(X,Y)\cap C_\varepsilon(X,Y) \text{ y } G_\varepsilon(X,Y)=S(X,Y)-S_\varepsilon(X,Y).$$

Teorema 1.44. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Sucede que*

$$H(X,Y)=S(X,Y)\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_{\frac{1}{n}}(X,Y).$$

Demostración. Observe que si f es una función biyectiva de X en Y, entonces la función f pertenece al conjunto $S(X,Y)$. Además, como f es una función biyectiva, para cada $y\in Y$, la el conjunto $f^{-1}(y)$ es singular, esto implica que $diam(f^{-1}(y))=0$, para cada $y\in Y$. De aquí que, para cada $n\in\mathbb{N}$ y para cada $y\in Y$, ocurre que $diam(f^{-1}(y))<\frac{1}{n}$. Por lo tanto, la función f pertenece a la intersección siguiente

$$S(X,Y)\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_{\frac{1}{n}}(X,Y).$$

Para mostrar la otra contención, consideremos f una función que pertenezca a la intersección:

$$S(X,Y) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{\frac{1}{n}}(X,Y).$$

Así, la función f es suprayectiva y continua, y para cada $y \in Y$ se cumple que $diam(f^{-1}(y)) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para cada $y \in Y$ se tiene que $diam(f^{-1}(y)) = 0$. Es decir, la función f es inyectiva.

Además, como los espacios X y Y son compactos, se sigue que la función continua f es cerrada. Por lo tanto, f pertenece al conjunto $H(X,Y)$. Con esto hemos demostrado la igualdad deseada. †

Teorema 1.45. *Sean (X,d) un espacio compacto y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $H(X)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones*

(1) $\hat{d}(h_{n+1}, I_X) < 2^{-n}$, *y*

(2) $\hat{d}(h_{n+1}, I_X) < 3^{-n} \cdot \text{mín}\{\hat{d}(h_k \circ \cdots \circ h_1, G_{\frac{1}{k}}(X)) : 1 \leq k \leq n\}$,

entonces $\text{lím}_{n\to\infty} h_n \circ \cdots \circ h_1$ *existe y pertenece al conjunto* $H(X)$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n = h_n \circ \cdots \circ h_1$. Por la condición (1) y del Lema 1.39 se tiene que

$$\hat{d}(f_{n+1}, f_n) = \hat{d}(h_{n+1} \circ \cdots \circ h_1, h_n \circ \cdots \circ h_1) = \hat{d}(h_{n+1}, I_X) < 2^{-n}, \quad (1.1)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, se puede hallar $N \in \mathbb{N}$ de manera que $2^{-N} < \varepsilon$. Considere $m, n > N$ con $n < m$. Así, se tiene que

$$\hat{d}(f_m, f_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \hat{d}(f_{i+1}, f_i),$$

de la expresión (1.1) se sigue que:

$$\hat{d}(f_m, f_n) < \sum_{i=n}^{m-1} 2^{-i} < 2^{-N}.$$

Así, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica $\hat{d}$. Del Lema 1.42 se sigue que existe una función f que es el límite de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora, del hecho de que la función f_n pertenece al conjunto $S(X,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y del Teorema 1.43 se sigue que $f \in S(X,X)$. Por último, note que $\hat{d}(f_n+1, f_n) = \hat{d}(h_n+1, I_X)$ y de la condición (2) se tiene que:

$$\hat{d}(f_n+1,n) < 3^{-n} \cdot \text{mín}\{\hat{d}(h_k \circ \cdots \circ h_1, G_{\frac{1}{k}}) : 1 \leq k \leq n\},$$

y del Lema 1.38 se tiene que la función f no pertenece a la unión

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_{\frac{1}{k}}(X,X).$$

Por lo tanto, se tiene que la función f pertenece a la intersección

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_{\frac{1}{k}}(X,X).$$

Luego, del Teorema 1.44 se concluye que $f \in H(X,X)$. †

Capítulo 2

Espacios homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables

Los espacios homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables fueron definidos por primera vez por R. Bennett en [17] en 1970. Este capítulo está dedicado al análisis del trabajo de R. Bennett. Aquí se presenta la definición de los espacios homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables, también presentamos las demostraciones de los teoremas que Bennett redactó en su artículo [17], el Teorema 1 del artículo de Bennett es el Teorema 2.10 que dice que los espacios conexos que son primero numerables y homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables, son homogéneos; además, el Teorema 2 de [17] afirma que si un continuo X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces el continuo X no es irreducible entre cualesquiera dos de sus puntos, éste es el Teorema 2.17 de este capítulo. En el Teorema 3 de [17], R. Bennett proporciona una condición suficiente para garantizar que un espacio metrizable, separable y localmente compacto sea homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, dicha propiedad es la de ser fuertemente localmente homogéneo que definimos en 2.19, el Teorema 2.23 establece que si X es un espacio topológico metrizable, separable, localmente compacto y fuertemente localmente homogéneo, entonces X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.

Nuestra aportación a este capítulo de la tesis consta de dos resultados. El primero de ellos es el Teorema 2.5 que dice que si un espacio topológico no discreto X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces el espacio X es no numerable, este teorema nos delimita la clase de los espacios topológicos con los que trabajaremos, tal como lo evidenciamos en el Corolario 2.6. El segundo aporte que hacemos en este capítulo es el Teorema 2.12 el cual establece que la suma topológica ajena de una cantidad numerable de espacios homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables también es un espacio topológico homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.

Definición 2.1. Un espacio topológico X es *homogéneo con respecto a conjuntos densos numerables* si

(1) X es separable y

(2) para cualesquiera subconjuntos M y N numerables y densos en X existe un homeomorfismo $h : X \to X$ de modo que $h(M) = N$.

Ejemplo 2.2. Un arco no es homogéneo con respecto a conjuntos densos numerables.

Demostración. Sea X el arco euclidiano $[0,1]$. Se sabe que la órbita del punto 0 es el conjunto

$$\tau(0) = \{0,1\}$$

y que la órbita de un punto $x \in X$ que es distinto de los puntos 0 y 1 es el conjunto

$$\tau(x) = (0,1).$$

Esto implica que si M es un conjunto numerable y denso en el arco X contenido en el subconjunto $(0,1)$ y h es un homeomorfismo del espacio X en sí mismo, entonces $h(M)$ está contenido en el intervalo $(0,1)$. Por lo tanto, si N es un conjunto numerable y denso en el arco X, tal que la intersección $N \cap \tau(0)$ es no vacía, entonces no existe un homeomorfismo $f : X \to X$ de manera que $f(M) = N$. Luego, el arco X no es homogéneo con respecto a conjuntos densos numerables. †

Ejemplo 2.3. Consideremos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología

$$\eta = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - U \text{ es finito y } 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Note que si M es cualquier subconjunto infinito numerable de $\mathbb{R}$, entonces M es un conjunto denso en $(\mathbb{R}, \eta)$. También observe que, la intersección de cualquier conjunto abierto no vacío U con el singular $\{0\}$ es no vacía. Por lo tanto, $\{0\}$ es un conjunto denso en $(\mathbb{R}, \eta)$. Consideremos entonces M un subconjunto infinito numerable de $\mathbb{R}$ y $N = \{0\}$. Es claro que no existe un homeomorfismo de $(\mathbb{R}, \eta)$ en sí mismo que mande M en N. Esto implica que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \eta)$ no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.

Observación 2.4. Si X es un espacio homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces todos sus subconjuntos numerables y densos son infinitos.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio topológico no discreto. Si X es homogéneo con respecto a conjuntos densos numerables, entonces X es no numerable.*

Demostración. Sean X un espacio topológico con cardinalidad ω que no sea discreto y x_0 un punto no aislado en X. Observe que los conjuntos X y $X - \{x_0\}$ son numerables y densos en X. Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $f(X) = X$. Por lo tanto, no existe un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h(X) = X - \{x_0\}$. Esto demuestra que X no es un espacio homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Corolario 2.6. *El espacio euclidiano de los números racionales no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. El espacio euclidiano de los numeros racionales $\mathbb{Q}$ tiene cardinalidad igual a ω. †

Teorema 2.7. *El espacio euclidiano de los números reales $\mathbb{R}$ es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos en $\mathbb{R}$. Del Lema 1.29 se sabe que existe una función creciente f del conjunto denso M en el conjunto denso N. Además, del Lema 1.31 se sabe que existe un homeomorfismo h del espacio euclidiano de los números reales en sí mismo de manera que la restricción de la función h al conjunto denso M es igual a la función f. Esto implica que $h(M) = N$.

Es más, del Lema 1.30 se sabe que existe una función decreciente f del conjunto denso M en el conjunto denso N. Además, del Lema 1.32 se sabe que existe un homeomorfismo h del espacio euclidiano de los números reales en sí mismo de manera que la restricción de la función h al conjunto denso M es igual a la función f. Esto implica que $h(M) = N$. Por lo tanto, el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Teorema 2.8. *El subespacio de los números irracionales es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos en el espacio de los números irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Dado que el conjunto de los números irracionales es denso en el espacio de los números reales, se tiene que los conjuntos M y N también son densos en $\mathbb{R}$. Además, recuerde que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Del Lema 1.33 se sabe que existe una función biyectiva y creciente f de la union $M \cup \mathbb{Q}$ en el conjunto $N \cup \mathbb{Q}$ tal que $f(M) = N$ y $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Además, del Lema 1.31 se sabe que existe un homeomorfismo h del espacio de los números reales en sí mismo, de manera que la restricción de la función h al conjunto $M \cup \mathbb{Q}$ es igual a la función f. Esto implica que $h(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Es más, la restricción de la función h al conjunto de los números irracionales es un homeomorfismo del conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en sí mismo.

Luego, el espacio de números irracionales es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Teorema 2.9. *Sea X un espacio primero numerable. Si el espacio X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces $cl_X(\tau(x)) = \tau(x) = int(\tau(x))$, para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea x un punto del espacio X. Primero vamos a demostrar que $int(\tau(x)) \neq \emptyset$. Suponga que el interior de la órbita del punto x es vacía. Dado que X es separable y primero numerable, del Teorema 1.23 se sabe que existe un subconjunto denso y numerable A de $X - \tau(x)$. Sea $B = A \cup \{x\}$. Así, el conjunto B es denso y numerable en el espacio X. Como X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, existe un homeomorfismo h del espacio X en sí mismo de manera que $h(B) = A$. Esto implica que $h(x) \notin \tau(x)$, lo cual es una contradicción.

Ahora demostremos que la órbita del punto x está contenida en el conjunto $int(\tau(x))$. Sea w un punto de la órbita del punto x. Considere $z \in int(\tau(x))$. De la definición 1.1 se tienen homeomorfismos f_1 y f_2 del espacio X en sí mismo, de manera que $f_1(x) = w$ y $f_2(x) = z$. Así, la función g definida como la composición $f_1 \circ f_2^{-1}$ es un homeomorfismo del espacio X en sí mismo, tal que $g(z) = w$. De esto, se sigue que $w \in g(int(\tau(x))) \subset \tau(x)$. Dado que el conjunto $g(int(\tau(x)))$ es abierto en X, entonces ocurre que w pertenece a $int(\tau(x))$. Por lo tanto $\tau(x) = int(\tau(x))$.

Por último, mostremos que el conjunto $cl_X(\tau(x))$ es igual a la órbita del punto x. Suponga que existe un punto p que pertenece al conjunto $cl_X(\tau(x))$ tal que $p \notin \tau(x)$. Dado que el espacio X es separable y que los conjuntos $\tau(x)$ y $X - cl_X(\tau(x))$ son conjuntos abiertos de X, se obtienen conjuntos densos y numerables C y D de los conjuntos $\tau(x)$ y $X - cl_X(\tau(x))$, respectivamente, así, el conjunto $E = C \cup D$ es un subconjunto denso y numerable del espacio X. Como el conjunto $E \cup \{p\}$ es denso y numerable en X, existe un homeomorfismo h del espacio X en sí mismo, tal que $h(E) = E \cup \{p\}$. Del inciso (2) del Teorema 1.2 se sigue que $h(C) \subset \tau(x)$. Esto implica que el punto p no pertenece al conjunto $h(C)$. Por lo tanto, existe un punto q en el conjunto $X - cl_X(\tau(x))$ de manera que $h(q) = p$. De aquí que, el conjunto $h(X - cl_X(\tau(x))$ es abierto en X y p pertenece a la intersección $cl_X(\tau(x)) \cap h(X - cl_X(\tau(x)))$, por lo tanto $\tau(x) \cap h(X - cl_X(\tau(x)))$ es no vacía. Como la función h es biyectiva, se tiene que $h(\tau(x)\cap(X-cl_X(\tau(x))))$ es un conjunto no vacío. Lo cual es una contradicción. Luego, $\tau(x)=cl_X(\tau(x))$. †

Teorema 2.10. *Un espacio X que es conexo, primero numerable y homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables es homogéneo.*

Demostración. Sea x un punto del espacio X. Del Teorema 2.9 se sabe que la óbita del punto x es un subconjunto cerrado y abierto de X. Como X es conexo, se sigue que $\tau(x)=X$. Por lo tanto X es homogéneo. †

Corolario 2.11. *Si X es un triodo simple, entonces X no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. Dado que X es un triodo simple, existe un único punto r cuyo orden es igual a 3. Esto implica que la órbita del punto r es el singular $\{r\}$. Es decir que X no es homogéneo. Como el espacio X es primero numerable y conexo, del Teorema 2.10 se sigue que el triodo simple X no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Lema 2.12. *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios topológicos homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables, entonces la suma topológica ajena $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$ es un espacio homogéneo denso numerable.*

Demostración. Para cada $n\in\mathbb{N}$ el espacio X_n es separable, entonces $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$ también es separable. Ahora, si M y N son densos numerables en $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$, entonces los conjuntos definidos como $M_n=M\cap X_n$ y $N_n=N\cap X_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, son densos en X_n. Así, es posible hallar, para cada $n\in\mathbb{N}$, un homeomorfismo $h_n:X_n\to X_n$ de modo que $h_n(M_n)=N_n$. Consideremos la función

$$h:\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n\to\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$$

dada por $h(x)=h_n(x)$ si $x\in X_n$. Es claro que la función h es un homeomorfismo y además $h(M)=N$. Por lo tanto, el espacio $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$ es homogéneo denso numerable. †

Ejemplo 2.13. La conexidad en las hipótesis del Teorema 2.10 es una condición esencial.

Demostración. Del Teorema 2.7 se sabe que el espacio euclidiano $\mathbb{R}$ es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, y del Teorema 2.8 se sabe que el espacio euclidiano de los números irracionales $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. Así, del Lema 2.12 se tiene que la suma topológica $\mathbb{R}\oplus(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ es un espacio homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, además es un espacio disconexo.

Note que el espacio $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es disconexo. Esto implica que para $x\in\mathbb{R}$ y $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ no existe un homeomorfismo h de la suma topológica $\mathbb{R}\oplus(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ en sí misma, de manera que $h(x)=y$. Este ejemplo muestra la importancia de la conexidad para garantizar la homogeneidad de un espacio homogéneo denso numerable. †

Teorema 2.14. *En general, la homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables no se preserva bajo producto de espacios topológicos.*

Demostración. Denotemos por X al espacio producto $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$. Sea f un homeomorfismo de X en sí mismo. Note que para cualquier punto $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, el conjunto $\mathbb{R}\times\{y\}$ es un subespacio conexo de X, y no sólo eso, es el conjunto conexo más grande que contiene al punto $(0,y)$. Esto implica que $f(\mathbb{R}\times\{y\})$ es una componente conexa de X.

Sean M y N dos conjuntos denso numerables de los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, respectivamente. Entonces el conjunto D definido como el producto $M\times N$ es un subconjunto denso numerable del espacio X. Ahora considere x_0 un punto de $\mathbb{R}$ que no pertenece al conjunto M, y y_0 un punto de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ que no pertenezca al conjunto denso N. Así, el conjunto $D\cup\{(x_0,y_0)\}$ es un subconjunto denso numerable de X.

Si h es un homeomorfismo del espacio X en sí mismo, entonces en virtud de que $h(\mathbb{R}\times\{y\})$ es una componente conexa de X, para cualquier $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, y de que ninguna de las componentes conexas de X contiene exactamente un punto del conjunto D, se tiene que $h(D)\neq$

$D\cup\{(x_0,y_0)\}$. Por lo tanto, el espacio X no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Teorema 2.15. *La homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables no se preserva bajo funciones continuas.*

Demostración. Del Teorema 2.7 se sabe que el espacio euclidiano $\mathbb{R}$ es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. Consideremos f la función que va del espacio $\mathbb{R}$ en el subespacio real $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$ definida como el valor absoluto de x, $f(x)=|x|$, para cada $x\in\mathbb{R}$.

Se sabe que la función f es continua. Además, como la órbita del punto 0 en el espacio real $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$ es igual al singular $\{0\}$, se sigue del Teorema 2.9 que el espacio $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$ no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. Por lo tanto, la homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables no se preserva bajo funciones continuas. †

Definición 2.16. Sea X un espacio topológico. La *composante* de un punto p de X es el conjunto

$$\{y\in X: \text{ existe } Y \text{ un subcontinuo propio de } X \text{ con } y,p\in Y\}.$$

A la composante del punto p en X la denotaremos por $\kappa(p)$.

Teorema 2.17. *Un continuo X que es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables no es irreducible entre cualesquiera dos de sus puntos.*

Demostración. Mostraremos que para cualquier punto $p\in X$, su composante $\kappa(p)$ es el espacio X. Se sabe que la composante de cualquier punto de X es un conjunto denso en X [15, Teorema 2, p. 209]. Dado que X es separable y primero numerable, del Teorema 1.23 se sabe que existe N un conjunto denso numerable de X contenido en $\kappa(p)$ tal que el punto p pertenece a N. Suponga que $\kappa(p)$ es distinto de X, considere $q\in X-\kappa(p)$.

Como X es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, existe un homeomorfismo $h: X\to X$ de modo que $h(N\cup\{q\})=N$. Note que $h(\kappa(p))=\kappa(h(p))$. Observe que si Y es un subcontinuo de

X de manera que los puntos p y q pertenecen a Y, entonces ocurre que $Y = X$. Por otro lado, se tiene que los puntos $h(p)$ y $h(q)$ pertenecen a la composante $\kappa(h(p))$. Así, si Z es un subcontinuo de X que contiene a los puntos $h(p)$ y $h(q)$, entonces $h^{-1}(Z)$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos p y q, esto implica que $h^{-1}(Z) = X$. De aquí que $Z = X$. Lo cual es una contradicción ya que X es irreducible entre los puntos p y q.

Por lo tanto se concluye que $\kappa(p) = X$, y como la elección del punto p fue arbitraria, se tiene que X es no irreducible entre cualesquiera dos de sus puntos. †

Ejemplo 2.18. El recíproco del Teorema 2.10 no se cumple.

Demostración. Sea X un solenoide p-ádico [20, Definición 2.8 p.21]. Se sabe que X es un espacio conexo, primero numerable e indescomponible. Del Corolario 11.15.1 de [20] se tiene que X es irreducible. Del Teorema 2 de [5] se sabe que el solenoide p-ádico es homogéneo. Por lo tanto, del Teorema 2.17 se concluye que el solenoide p-ádico no es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Definición 2.19. Un espacio topológico X es *fuertemente localmente homogéneo* si para cualquier punto $x \in X$ y cualquier W vecindad abierta de x, existe un abierto U que contiene a x y de modo que para todo $y \in U$existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$ y $h(z) = z$, para cada $z \in X - W$.

Observación 2.20. Suponga que X es un espacio métrico y fuertemente localmente homogéneo. Consideremos un punto $x \in X$ y ε un número real positivo. Como X es fuertemente localmente homogéneo existe un abierto U, vecindad del punto x que satisface la definición de un espacio fuertemente localmente homogéneo para $W = B(x, \varepsilon)$. Entonces ocurre lo siguiente.

(1) *La vecindad abierta U de x está contenida en la bola abierta $B(x, \varepsilon)$.*

En efecto, sea $w \in U$, entonces existe un homeomorfismo $g : X \to X$ tal que $g(w) = x$ y que para cada $z \in X - B(x, \varepsilon)$, $g(z) = z$. Si $w = x$, entonces $w \in B(x,\varepsilon)$. De otro modo se tiene que $g(w) \neq w$, es decir que $w \notin X - B(x,\varepsilon)$. Por lo tanto, el conjunto U está contenido en $B(x,\varepsilon)$. Además, dado que X es un espacio métrico, existe un número real $\delta > 0$ de manera que $B(x,\delta) \subset U$. Más aún, la bola abierta $B(x,\delta)$ también satisface la definición de homogeneidad local fuerte en el papel de U de la definición 2.19.

En conclusión, si X es un espacio métrico y fuertemente localmente homogéneo, para cualquier número real $\varepsilon > 0$ se puede hallar un número real positivo δ de manera que, para cada $y \in B(x,\delta)$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$, que satisface que $h(y) = x$ y $h(z) = z$, para todo $z \in X - B(x,\varepsilon)$.

(2) *Para cualesquiera dos puntos $w, y \in U$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h(w) = y$ y $h(z) = z$, para cada $z \notin B(x,\varepsilon)$.*

Sean w y y puntos del abierto U. Entonces existen homeomorfismos h_w y h_y de X en sí mismo de modo que $h_w(x) = w$, $h_y(x) = y$ y $h(z) = z$, para todo $z \in X - B(x,\varepsilon)$. La composición $h_y \circ h_w^{-1}$ es un homeomorfismo de X en sí mismo que cumple que $h_y \circ h_w^{-1}(w) = y$ y $h_y \circ h_w^{-1}(z) = z$, para cada $z \in X - B(x,\varepsilon)$. Por lo tanto se tiene lo deseado.

Teorema 2.21. *La recta real es fuertemente localmente homogénea.*

Demostración. Se sabe que el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ es homogéneo. Dado que la homogeneidad es una propiedad topológica, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, el intervalo (a,b) es homogéneo.

Consideremos un punto $x \in \mathbb{R}$ y un intervalo abierto (a,b) en $\mathbb{R}$ que contenga al punto x. Sea $y \in (a,b)$. Considere las siguientes funciones

(i) $h_1 : [a,x] \to [a,y]$ definida como $h(z) = \frac{y-a}{x-a}(z-a)+a$, para cada $z \in [a,x]$, y

(ii) $h_2 : [x,b] \to [y,b]$ definida como $h(z) = \frac{b-y}{b-x}(z-x)+y$.

Note que como las funciones h_1 y h_2 son polinómicas, entonces son homeomorfismos. Además, ocurre lo siguiente:

$$h_1(a) = a \ \text{ y } \ h_1(x) = y$$

$$h_2(x) = y \;\text{ y }\; h_2(b) = b.$$

Así, definamos $g : [a,b] \to [a,b]$ como $g(z) = h_1(z)$, si $z \in [a,x]$, y $g(z) = h_2(z)$, si $z \in [x,b]$. La función g es un homeomorfismo del arco $[a,b]$ en sí mismo, de manera que $g(x) = y$. Ahora, considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(z) = g(z)$, para cada $z \in [a,b]$, y $h(z) = z$, para cada $z \in \mathbb{R} - [a,b]$. Es claro que la función h es un homeomorfismo tal que $h(x) = y$. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es fuertemente localmente homogéneo. †

Teorema 2.22. *Si $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, entonces el espacio X no es fuertemente localmente homogéneo.*

Demostración. Sea f un homeomorfismo del espacio X en sí mismo. Note que para cualquier punto $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, el conjunto $\mathbb{R} \times \{y\}$ es un subespacio conexo de X, y no sólo eso, es el conjunto conexo más grande que contiene al punto $(0,y)$. Esto implica que $f(\mathbb{R} \times \{y\})$ es una componente conexa de X.

Ahora, considere $z = (x,y)$ y $w = (a,b)$ puntos en X tales que $y \neq b$. Sea ε un número real positivo. Si h es un homeomorfismo de X en sí mismo tal que $h(z) = w$, entonces $h(\mathbb{R} \times \{y\}) = \mathbb{R} \times \{b\}$, esto implica que existen puntos de X que no pertenecen a la bola abierta $B(z,\varepsilon)$ tales que h no los deja fijos. Por lo tanto, X no es fuertemente localmente homogéneo. †

Teorema 2.23. *Los espacios métricos, separables, localmente compactos y fuertemente localmente homogéneos son homogéneos con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. Sea X un espacio métrico, separable, localmente compacto y fuertemente localmente homogéneo. Suponga que d es la métrica del espacio X. Como X es localmente compacto asumiremos que las bolas abiertas de radio menor que 1 tienen cerradura compacta. Por hipótesis, el espacio X es separable, consideremos entonces M y N dos conjuntos infinitos numerables que además sean densos en X. A continuación construiremos una sucesión de homeomorfismos de X en sí mismo, digamos $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converja uniformemente a un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(M) = N$. Numeremos los puntos de los conjuntos densos M y N como sigue

$$M = \{p_m : m \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$

$$N = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos dos números $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ y $0 < \varepsilon_1 < 2^{-1}\alpha$. Dado que X es fuertemente localmente homogéneo, para el punto q_1 existe un número $\gamma(1) > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in B(q_1, \gamma(1))$ existe un homeomorfismo de X en sí mismo que manda x en y, y que a todo punto $z \in X - B(q_1, \frac{\varepsilon_1}{4})$, lo deja fijo. Note que del inciso (1) de la Observación 2.20 se tiene que $\gamma(1) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dado que M es denso, podemos elegir el índice m_1 como sigue

$$m_1 = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : p_j \in B(q_1, \gamma(1))\}.$$

Denotemos por $n(m_1)$ al índice 1, de esta manera se denota por $q_{n(m_1)}$ al punto q_1. Así, existe un homeomorfismo $g_{m_1} : X \to X$ tal que

$$g_{m_1}(p_{m_1}) = q_1 \text{ y}$$

$$g_{m_1}(z) = z, \text{para todo } z \notin B(q_1, \frac{\varepsilon_1}{4}).$$

Si ocurre que $m_1 = 1$ entonces definimos el homeomorfismo f_1 como g_{m_1}. De otra forma hacemos lo siguiente. Note que para cada $0 < i < m_1$ el punto p_i no pertenece a $B(q_1, \gamma(1))$. Consideremos un número positivo como sigue

$$0 < \rho_{m_1-1} < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_1}{4m_1}, d(q_{n(m_1)}, g_{m_1}(p_{m_1-1}))\}.$$

Usando nuevamente que el espacio X es fuertemente localmente homogéneo, se sabe que existe un número real $\gamma_{m_1-1} > 0$ para el cual se satisfacen las condiciones de la Definición 2.19 con respecto al punto $g_{m_1}(p_{m_1-1})$ y el radio ρ_{m_1-1}. Sea $q_{n(m_1-1)}$ un punto del conjunto denso N que pertenezca a la bola abierta $B(g_{m_1}(p_{m_1-1}), \gamma_{m_1-1})$. Así es posible hallar un homeomorfismo $g_{m_1-1} : X \to X$ de modo que se satisface lo siguiente

$g_{m_1-1}(g_{m_1}(p_{m_1-1})) = q_{n(m_1-1)}$,

$g_{m_1-1}(g_{m_1}(p_{m_1})) = g_{m_1-1}(q_{n(m_1)}) = q_{n(m_1)}$,

$g_{m_1-1}(z) = z$, para cada $z \in X - B(g_{m_1}(p_{m_1-1}), \rho_{m_1-1})$ y

$g_{m_1-1}(z) = z$, para cada $z \in X - B(g_{m_1}(p_{m_1-1}), \frac{\varepsilon_1}{4m_1})$.

Suponga que para algún $0 < k < m_1 - 1$ hemos construido homeomorfismos $g_{m_1-j} : X \to X$, para cada $0 \leq j < k$, de manera que ocurre lo siguiente

$g_{m_1-(k-1)} \circ \cdots \circ g_{m_1}(p_{m_1-j}) = q_{n(m_1-j)}$ y

$g_{m_1-j}(z) = z$, para todo $z \in X - B(g_{m_1-(j-1)} \circ \cdots \circ g_{m_1}(p_{m_1-j}), \rho_{m_1-j})$.

Sea $A_1 = \{q_{n(m_1-(k-1))}, \ldots, q_{n(m_1-1)}, q_{n(m_1)}\}$. Consideremos el punto

$$x_{m_1-k} = g_{m_1-(k-1)} \circ \cdots \circ g_{m_1}(p_{m_1-k})$$

y un radio $0 < \rho_{m_1-k} < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_1}{4m_1}, d(x_{m_1-k}, A_1)\}$. Así, existe un número $\gamma_{m_1-k} > 0$ para el cual se satisfacen las condiciones de la Definición 2.19. Sea $q_{n(m_1-k)}$ un punto del conjunto denso N perteneciente a la bola abierta $B(x_{m_1-k}, \gamma_{m_1-k})$ y que no pertenece al conjunto A_1, consecuentemente existe un homeomorfismo $g_{m_1-k} : X \to X$ tal que que para cada $0 \leq j < k$ cumple lo siguiente

$g_{m_1-k} \circ \cdots \circ g_{m_1}(p_{m_1-k}) = g_{m_1-k}(x_{m_1-k}) = q_{n(m_1-k)}$,

$g_{m_1-k} \circ \cdots \circ g_{m_1}(p_{m_1-j}) = q_{n(m_1-j)}$ y

$g_{m_1-k}(z) = z$, para cada punto z en $X - B(x_{m_1-k}, \rho_{m_1-k})$.

Una vez realizado este procedimiento para cada punto p_i con $1 \leq i \leq m_1$, definimos el homeomorfismo f_1 del espacio X en sí mismo como la composición $g_1 \circ \cdots \circ g_{m_1}$. Es claro que para cada $1 \leq i \leq m_1$ la imagen del punto p_i bajo f_1 es el punto $q_{n(i)}$. Además, note que para cualquier $x \in X$ se tiene que

$d(x, g_{m_1}(x)) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ y

$d(x, g_{m_1-j}(x)) < \frac{\varepsilon_1}{2m_1}$, para cada $1 \leq j < m_1$,

de aquí que $d(x, f(x)) < \varepsilon_1$. No sólo eso, para cualquier punto z que pertenezca al conjunto $X - \bigcup_{i=1}^{m_1} B(p_i, \frac{\varepsilon_1}{2})$ se tiene que $f_1(z) = z$. Dado que el espacio topológico X es localmente compacto, la cerradura de la bola abierta $B(p_i, \frac{\varepsilon_1}{2})$ es un conjunto compacto, para cada $1 \leq i \leq m_1$, se sigue que la cerradura del conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{m_1} B(p_i, \tfrac{\varepsilon_1}{2})$$

es un conjunto compacto, denotémoslo por K_1. Puesto que la función f_1^{-1} es continua, existe un número positivo δ_1 de modo que si x y y son dos puntos cualesquiera de X tales que $d(x,y) \geq 2^{-1}$ entonces ocurre que $d(f_1(x), f_1(y)) \geq \delta_1$. Ya que f_1^{-1} es un homeomorfismo que es igual a la identidad fuera de un compacto, ocurre que para cualesquiera dos puntos x y y que pertenecen al conjunto compacto $cl_X(B(K_1, \frac{\varepsilon_1}{2}))$, tales que $d(x,y) \geq 2^{-1}$ entonces $d(f_1(x), f_1(y)) \geq \delta_1$. Consideremos

$$r_1 = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : q_j \notin \{f_1(p_i) : 1 \leq i \leq m_1\}\}.$$

Sea ε_2 un real positivo que satisfaga lo siguiente

(1) $\varepsilon_2 < 2^{-2}\alpha$,

(2) $\varepsilon_2 < 2^{-3}\delta_1$ y

(3) $\varepsilon_2 < d(q_{r_1}, A_1)$.

Así, existe $\gamma(2) > 0$ de manera que para cualesquiera dos puntos $x, y \in B(q_{r_1}, \gamma(2))$ se puede hallar un homeomorfismo de X en sí mismo que manda el punto x en el punto y y, a todo punto z que pertenezca al conjunto $X - B(q_{r_1}, \frac{\varepsilon_2}{4})$ lo deja fijo. Nuevamente, note que del inciso (1) de la Observación 2.20 se tiene que $\gamma(2) < \frac{\varepsilon_2}{4}$. Dado que M es un conjunto denso en X y f_1 es un homeomorfismo, entonces el conjunto $f_1(M)$ también es denso en X. Sea

$$m_2 = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : f_1(p_j) \in B(q_{r_1}, \gamma(2)) \text{ y } m_1 < j\}.$$

Hagamos $n(m_2) = r_1$. Sea g_{m_2} un homeomorfismo de X en X que cumple que

$$g_{m_2}(f_1(p_{m_2})) = q_{n(m_2)},$$

$$g_{m_2}(z) = z, \text{ para todo } z \in X - B(q_{n(m_2)}, \frac{\varepsilon_2}{4}) \text{ y}$$

dado que $\frac{\varepsilon_2}{4} < d(f_1(p_{m_2}), A_1)$ entonces se tiene que $g_{m_2}(f_1(p_i)) = f_1(p_i)$, para cada $1 \leq i \leq m_1$. Ahora considere ρ_{m_2-1} un real positivo tal que

$$\rho_{m_2-1} < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_2}{4m_2}, d(g_{m_2}(f_1(p_{m_2-1})), q_{n(m_2)}), d(g_{m_2}(f_1(p_{m_2-1})), A_1)\}.$$

Sean $\gamma_{m_2-1} > 0$ un número real positivo, g_{m_2-1} un homeomorfismo de X en sí mismo y $q_{n(m_2-1)}$ un punto de N perteneciente a la bola abierta $B(g_{m_2} \circ f_1(p_{m_2-1}), \gamma_{m_2-1})$ de manera que se cumple lo siguiente

$g_{m_2-1}(g_{m_2} \circ f_1(p_{m_2-1})) = q_{n(m_2-1)}$ y

$g_{m_2-1}(z) = z$, para todo $z \in X - B(g_{m_2} \circ f_1(p_{m_2-1}), \rho_{m_2-1})$.

Observe que de acuerdo a la manera en que se eligió el número ρ_{m_2-1} también ocurre lo siguiente

$g_{m_2-1} \circ g_{m_2}(f_1(p_i)) = g_{m_2-1}(f_1(p_i)) = f_1(p_i) = q_{n(i)}$, para cada $0 < i \leq m_1$.

De la misma forma en que procedimos en la construcción del homeomorfismo f_1, suponga que para algún natural k con $0 < k < m_2 - m_1 + 1$, hemos construido homeomorfismos $g_{m_2}, g_{m_2-1}, \ldots, g_{m_2-(k-1)}$. Construiremos el homeomorfismo g_{m_2-k}. Consideremos el punto

$$x_{m_2-k} = g_{m_2-(k-1)} \circ \cdots \circ g_{m_2} \circ f_1(p_{m_2-k})$$

y ρ_{m_2-k} un real positivo estrictamente menor que:

$$\text{mín}\{\frac{\varepsilon_2}{4m_2}, d(x_{m_2-k}, A_1), d(x_{m_2-k}, \{q_{n(i)} : m_2 - (k-1) \leq i \leq m_2\})\}.$$

Entonces existe un γ_{m_2-k} positivo que es menor que ρ_{m_2-k}, de modo que podemos elegir un punto $q_{n(m_2-k)}$ en el denso N que pertenezca a la bola abierta $B(x_{m_2-k}, \gamma_{m_2-k})$. Para los puntos $q_{n(m_2-k)}$ y x_{m_2-k} existe un homeomorfismo $g_{m_2-k} : X \to X$ tal que

$g_{m_2-k}(g_{m_2-(k-1)} \circ \cdots \circ g_{m_2} \circ f_1(p_{m_2-k})) = g_{m_2-k}(x_{m_2-k}) = q_{n(m_2-k)}$,

$g_{m_2-k}(z) = z$, para todo $z \in X - B(x_{m_2-k}, \rho_{m_2-k})$ y

$g_{m_2-k} \circ \cdots \circ g_{m_2} \circ f_1(p_i) = q_{n(i)}$, con $1 \leq i \leq m_1$ o bien $m_2 - (k-1) \leq i \leq m_2$.

Continuando con este proceso para cada natural j entre m_1+1 y m_2 habremos construido un homeomorfismo g_j de X en X. Definimos entonces el homeomorfismo f_2 como la composición $g_{m_1+1}\circ\cdots\circ g_{m_2}$. Notemos que f_2 cumple lo siguiente

(1) $f_2\circ f_1(p_i)=q_{n(i)}$, para cada $1\leq i\leq m_2$.

(2) $f_2(z)=z$, para todo $z\in X-\bigcup_{i=m_1+1}^{m_2}B(f_1(p_i),\frac{\varepsilon_2}{2})$ y

(3) $d(z,f_2(z))<\varepsilon_2$, para todo $z\in X$.

Denotemos por K_2 a la cerradura del conjunto $\bigcup_{i=m_1+1}^{m_2}B(f_1(p_i),\frac{\varepsilon_2}{2})$. Análogamente, dado que la función f_2^{-1} es uniformemente continua sobre el compacto K_2, existe $\delta_2>0$ tal que si $d(x,y)\geq 2^{-2}$ entonces $d(f_2(x),f_2(y))\geq\delta_2$.

Procediendo de la misma manera uno puede construir una sucesión de números positivos $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots$; una sucesión de enteros positivos $r_1,r_2,\ldots$; una sucesión de naturales $m_1,m_2,\ldots$; una sucesión de reales positivos $\delta_1,\delta_2,\ldots$; una sucesión de conjuntos compactos $K_1,K_2,\ldots$; una sucesión de homeomorfismos $f_1,f_2,\ldots$ de X en X y una sucesión de homeomorfismos $h_1,h_2,\ldots$ de X en sí mismo que satisfacen las siguientes condiciones.

(i) $h_1=f_1$, $h_2=f_2\circ f_1$ y $h_k=f_k\circ\cdots\circ f_1$.

(ii) $\varepsilon_k<2^{-k}\alpha$.

(iii) $\varepsilon_k<2^{-(k+1)}\delta_j$, para cada $j<k$.

(iv) $r_k=\text{mín}\{j\in\mathbb{N}:q_j\notin\{h_k(p_i):1\leq i\leq m_k\}\}$.

(v) $q_{n(m_k)}$ pertenece al conjunto $\{h_{m_k}(p_i):1\leq i\leq m_{k+1}\}$.

(vi) Si x no pertenece a K_k, entonces $f_k(x)=x$ y, si $i\leq m_{k-1}$, entonces $h_k(p_i)=h_{k-1}(p_i)$.

Aplicando el criterio de convergencia de homeomorfismos, el límite de la sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ existe y es un homeomorfismo tal que $h(M)=N$. †

Teorema 2.24. *El cubo de Hilbert es homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables.*

Demostración. De los Teoremas 4.2 y 2.4 de [16] de Fletcher, se sabe que el cubo de Hilbert es un espacio fuertemente localmente homogéneo. Dado que el cubo de Hilbert es un espacio métrico, separable y localmente compacto, del Teorema 2.23 se concluye que el cubo de Hilbert es un espacio homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables. †

Capítulo 3

El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables

3.1. Aspectos generales

Es grato mencionar que la totalidad de este último capítulo de la tesis es trabajo original en conjunto de la Dra. Patricia Pellicer Covarrubias, la Dra. María de Jesús López Toriz y mío.

Para comenzar estableceremos una relación de equivalencia entre los subconjuntos densos y numerables de un espacio topológico X. A partir de esta relación definiremos en 3.1 el *grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables* de un espacio topológico separable X, el cual denotaremos por $g_{HDN}(X)$. El primer resultado relevante de este capítulo se encuentra en esta sección, es el Teorema 3.5 que nos proporciona una cota superior del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de cualquier continuo; tal como se hace en la aritmética cardinal, poseer una cota superior nos facilita el cálculo preciso del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de cualquier continuo.

Definición 3.1. Sean X un espacio topológico separable y M y N dos subconjuntos numerables y densos de X. Diremos que los conjuntos M y N están relacionados si existe un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h(M) = N$. A este hecho lo denotamos por $M \sim N$.

Lema 3.2. *La relación $\sim$ definida en 3.1 es de equivalencia.*

Demostración. Sean X un espacio topológico separable y M, N y D subconjuntos numerables y densos de X, tales que $M \sim N$ y $N \sim D$. Entonces existen homeomorfismos h_1 y h_2 del espacio X en sí mismo que cumplen que $h_1(M) = N$ y $h_2(N) = D$.

Es claro que el homeomorfismo identidad I_X cumple que $I_X(M) = M$. Además, note que h_1^{-1} la función inversa de h_1 es un homeomorfismo de X en sí mismo de manera que $h_1^{-1}(N) = M$. Finalmente, la composición $h_2 \circ h_1 : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $h_2 \circ h_1(M) = D$. Por lo tanto la relación $\sim$ es de equivalencia. †

Si X es un espacio topológico separable y M es un subconjunto numerable y denso de X, entonces a la clase de equivalencia del conjunto denso M la denotaremos por $[M]_\sim$.

Definición 3.3. Sea X un espacio topológico separable. El *grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables* del espacio X es el número cardinal

$$|\{[M]_\sim : M \text{ es un subconjunto denso numerable de } X\}|,$$

el cual denotaremos por $g_{_{HDN}}(X)$.

Lema 3.4. *Si X es un espacio homogéneo con respecto a conjuntos denso numerables, entonces el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es 1.*

Demostración. Se sabe de la definición 2.1 que para cualesquiera dos subconjuntos numerables y densos de X, digamos M y N, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(M) = N$. Esto implica que la relación $\sim$ definida en 3.1 determina una sola clase de equivalencia. Por lo tanto el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es $g_{_{HDN}}(X) = 1$. †

Teorema 3.5. *Si X es un continuo no degenerado, entonces el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X está acotado superiormente por el número cardinal $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Observe que la cardinalidad del continuo X es igual a $\mathfrak{c}$, esto implica que:

$$|\{M \subset X : M \text{ tiene cardinalidad igual a } \omega\}| = \mathfrak{c}.$$

Por lo tanto el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del continuo X cumple que $g_{_{HDN}}(X) \leq \mathfrak{c}$. †

Teorema 3.6. *Sea X un continuo no degenerado. Si M y N son dos conjuntos densos y numerables de X tales que $M \sim N$, entonces ocurre lo siguiente:*

(i) $|M \cap E(X)| = |N \cap E(X)|$,

(ii) $|M \cap R(X)| = |N \cap R(X)|$.

Demostración. Sean M y N dos conjuntos densos y numerables del continuo X. Suponga que $M \sim N$, esto implica que existe un homeomorfismo h del continuo X en sí mismo de manera que $h(M) = N$. Del Lema 1.4 y como h es un homeomorfismo se tiene que

$$h(M \cap E(X)) = h(M) \cap h(E(X)) = N \cap E(X),$$

de aquí se sigue que $|M \cap E(X)| = |N \cap E(X)|$.

Del Corolario 1.8 y como h es un homeomorfismo se tiene que

$$h(M \cap R(X)) = h(M) \cap h(R(X)) = N \cap R(X),$$

de aquí se sigue que $|M \cap R(X)| = |N \cap R(X)|$. †

El Teorema 3.6 dice que siempre que dos conjuntos densos y numerables de un continuo no degenerado X estén relacionados según $\sim$, que se definió en 3.1, entonces ocurrirá que ambos conjuntos contienen la misma cantidad de puntos extremos o de puntos de ramificación del continuo no degenerado X.

Teorema 3.7. *Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos arcos y M y N dos subconjuntos denso numerables de los arcos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Si las intersecciones $M\cap E([a,b])$ y $N\cap E([c,d])$ son vacías, entonces existe un homeomorfismo $h:[a,b]\to[c,d]$ el cual cumple que $h(a)=c$, $h(b)=d$ y $h(M)=N$.*

Demostración. Note que los conjuntos M y N no contienen puntos extremos de los arcos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Como $[a,b]$ y $[c,d]$ son arcos, existen homeomorfismos $f_1:[a,b]\to[0,1]$ y $f_2:[0,1]\to[c,d]$ tales que $f_1(a)=0$, $f_1(b)=1$, $f_2(0)=c$ y $f_2(1)=d$. Así, los conjuntos $f_1(M)$ y $f_2^{-1}(N)$ son subconjuntos densos del arco $[0,1]$ que no contienen puntos extremos. Del Lema 1.29 se sabe que existe un homeomorfismo creciente $f:(0,1)\to(0,1)$ tal que $f(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$.

Además, del Lema 1.28 se sabe que existe un homeomorfismo creciente h_1 del arco $[0,1]$ en sí mismo tal que $h_1|_{(0,1)}=f$, esto implica que $h_1(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$. Es más, se tiene que $h_1(0)=0$ y $h_1(1)=1$. Defina h como la composición $f_2\circ h_1\circ f_1$. Observe que ocurre lo siguiente:

$$h(M)=f_2\circ h_1\circ f_1(M)=f_2(f_2^{-1}(N))=N,$$

$$h(a)=f_2\circ h_1\circ f_1(a)=f_2\circ h_1(0)=f_2(0)=c,$$

$$h(b)=f_2\circ h_1\circ f_1(b)=f_2\circ h_1(1)=f_2(1)=d.$$

Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Teorema 3.8. *Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos arcos y M y N dos subconjuntos denso numerables de los arcos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Si las intersecciones $M\cap E([a,b])$ y $N\cap E([c,d])$ tienen cardinalidad igual a 1, entonces existe un homeomorfismo $h:[a,b]\to[c,d]$ el cual cumple que $h(M\cap(E[a,b]))=N\cap E([c,d])$ y $h(M)=N$.*

Demostración. Suponga sin perder generalidad que el conjunto M contiene al punto a y el conjunto N contiene al punto c. Como $[a,b]$ y $[c,d]$ son arcos, existen homeomorfismos $f_1:[a,b]\to[0,1]$ y $f_2:[0,1]\to[c,d]$ tales que $f_1(a)=0$, $f_1(b)=1$, $f_2(0)=c$ y $f_2(1)=d$. Así, los conjuntos $f_1(M)$ y $f_2^{-1}(N)$ son subconjuntos densos del arco $[0,1]$ los cuales contienen al punto 0. Del Lema 1.29 se sabe que existe un homeomorfismo creciente $f:(0,1)\to(0,1)$ tal que $f(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$.

Además, del Lema 1.28 se sabe que existe un homeomorfismo creciente h_1 del arco $[0,1]$ en sí mismo tal que $h_1|_{(0,1)}=f$, esto implica que $h_1(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$. Es más, se tiene que $h_1(0)=0$ y $h_1(1)=1$. Defina h como la composición $f_2\circ h_1\circ f_1$. Observe que ocurre lo siguiente:

$$h(M)=f_2\circ h_1\circ f_1(M)=f_2(f_2^{-1}(N))=N,$$

$$h(a)=f_2\circ h_1\circ f_1(a)=f_2\circ h_1(0)=f_2(0)=c,$$

$$h(b)=f_2\circ h_1\circ f_1(b)=f_2\circ h_1(1)=f_2(1)=d.$$

Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Teorema 3.9. *Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos arcos y M y N dos subconjuntos denso numerables de los arcos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Si las intersecciones $M\cap E([a,b])$ y $N\cap E([c,d])$ tienen cardinalidad igual a 2, entonces existe un homeomorfismo $h:[a,b]\to[c,d]$ el cual cumple que $h(a)=c$, $h(b)=d$ y $h(M)=N$.*

Demostración. Note que los conjuntos M y N contienen a los dos puntos extremos de los arcos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Como $[a,b]$ y $[c,d]$ son arcos, existen homeomorfismos $f_1:[a,b]\to[0,1]$ y $f_2:[0,1]\to[c,d]$ tales que $f_1(a)=0$, $f_1(b)=1$, $f_2(0)=c$ y $f_2(1)=d$. Así, los conjuntos $f_1(M)$ y $f_2^{-1}(N)$ son subconjuntos densos del arco $[0,1]$ que contienen a los dos puntos extremos. Del Lema 1.29 se sabe que existe un homeomorfismo creciente $f:(0,1)\to(0,1)$ tal que $f(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$.

Además, del Lema 1.28 se sabe que existe un homeomorfismo creciente h_1 del arco $[0,1]$ en sí mismo tal que $h_1|_{(0,1)}=f$, esto implica que $h_1(f_1(M))=f_2^{-1}(N)$. Es más, se tiene que $h_1(0)=0$ y $h_1(1)=1$. Defina h como la composición $f_2\circ h_1\circ f_1$. Observe que ocurre lo siguiente:

$$h(M)=f_2\circ h_1\circ f_1(M)=f_2(f_2^{-1}(N))=N,$$

$$h(a)=f_2\circ h_1\circ f_1(a)=f_2\circ h_1(0)=f_2(0)=c,$$

$$h(b) = f_2 \circ h_1 \circ f_1(b) = f_2 \circ h_1(1) = f_2(1) = d.$$

Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Teorema 3.10. *El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un arco es 3.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del arco $[0,1]$. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Cada uno de los conjuntos M y N están conformados únicamente por puntos ordinarios del arco* $[0,1]$.

Note que los conjuntos M y N no contienen a los puntos extremos del arco $[0,1]$. Del Teorema 3.7 se sabe que existe un homeomorfismo h del arco $[0,1]$ en sí mismo tal que $h(M) = N$. Por lo tanto, todos los conjuntos densos y numerables del arco $[0,1]$ que satisfacen la propiedad P1 pertenecen a la clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3,1 del conjunto denso M.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del arco $[0,1]$ que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D no contiene puntos extremos del arco $[0,1]$. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D \subset [0,1] : D \text{ es denso numerable en } [0,1] \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene solamente a uno de los puntos extremos del arco* $[0,1]$.

Del Teorema 3.8 se sabe que existe un homeomorfismo h del arco $[0,1]$ en sí mismo de manera que $h(M) = N$. Por lo tanto, todos los subconjuntos densos y numerables que contienen a exactamente un punto extremo del arco $[0,1]$ pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto M con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Ahora, suponga que D es un conjunto denso y numerable del arco $[0,1]$ que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, del

Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos extremos del arco $[0,1]$. Por lo tanto, la clase de equivalencia a la que pertenecen los conjuntos M y N es el conjunto:

$$\{D \subset [0,1] : D \text{ es denso numerable en } [0,1] \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Ambos conjuntos densos, M y N, contienen a los dos puntos extremos del arco* $[0,1]$.

Note que los conjuntos M y N contienen a ambos puntos extremos del arco $[0,1]$. Del Teorema 3.9 se sabe que existe un homeomorfismo h del arco $[0,1]$ en sí mismo, de manera que $h(M)=N$. Por lo tanto, todos los subconjuntos densos y numerables del arco $[0,1]$ que contienen a los dos puntos extremos pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un conjunto denso y numerable del arco $[0,1]$ que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M, del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D contiene a los dos puntos extremos del arco $[0,1]$. Por lo tanto, la clase de equivalencia de los conjuntos denso numerables M y N es la siguiente:

$$\{D \subset [0,1] : D \text{ es denso numerable en } [0,1] \text{ y posee la propiedad P3}\}.$$

Luego, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un arco es igual a 3. †

3.2. n-odos simples

A un $3-odo$ simple se le llama *triodo simple*. En esta sección encontramos un ejemplo del cálculo del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un triodo simple, este ejemplo es de ayuda para comprender el proceso de demostración del Teorema 3.12, el cual dice que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un $n-odo$ simple, con $n \geq 3$, es igual a $2(n+1)$.

Teorema 3.11. *El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un triodo simple es 8.*

Demostración. Sea X un triodo simple. Denotemos por r al punto de ramificación del triodo X y a sus puntos extremos por e_1, e_2 y e_3. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables de X. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N están conformados únicamente por puntos ordinarios de X.*

Del Teorema 3.7 sabemos que existen homeomorfismos

$$f_1 : [r, e_1] \to [r, e_1],$$

$$f_2 : [r, e_2] \to [r, e_2] \text{ y}$$

$$f_3 : [r, e_3] \to [r, e_3]$$

tales que para cada $i \in \{1,2,3\}$ se cumple que

$$f_i(M \cap [r, e_i]) = N \cap [r, e_i],$$

$$f_i(e_i) = e_i \text{ y}$$

$$f_i(r) = r.$$

En virtud del Teorema 1.34 existe un homeomorfismo h del triodo simple X en sí mismo tal que $h|_{[r,e_1]} = f_i$, para cada $i \in \{1,2,3\}$. Observe que el homeomorfismo h cumple que $h(M) = N$. De aquí que la clase de equivalencia del conjunto denso M contiene todos los conjuntos densos y numerables del triodo simple X que están conformados únicamente por puntos ordinarios.

Considere D un conjunto denso y numerable del triodo simple X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D está conformado únicamente por puntos ordinarios del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$$\{D \subset X : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Los conjuntos M y N no contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene solamente un punto extremo del triodo simple X.*

Supongamos sin perder generalidad que el punto extremo e_1 pertenece al conjunto denso M. Denotemos por $e_{n(1)}$ al punto extremo del triodo simple X que pertenece al conjunto N, y por $e_{n(2)}$ y $e_{n(3)}$ a los puntos extremos de X que no pertenecen al conjunto N. De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_1 : [r,e_1] \to [r,e_{n(1)}],$$

$$f_2 : [r,e_2] \to [r,e_{n(2)}] \text{ y}$$

$$f_3 : [r,e_3] \to [r,e_{n(3)}]$$

tales que para cada $i \in \{1,2,3\}$ se cumple que

$$f_i(M \cap [r,e_i]) = N \cap [r,e_{n(i)}],$$

$$f_i(e_i) = e_{n(i)} \text{ y}$$

$$f_i(r) = r.$$

En virtud del Teorema 1.34 existe un homeomorfismo h del triodo simple X en sí mismo tal que $h|_{[r,e_i]} = f_i$, para cada $i \in \{1,2,3\}$. Observe que el homeomorfismo h cumple que $h(M) = N$. De aquí que la clase de equivalencia del conjunto denso M contiene a los conjuntos denso numerables que no contienen al punto de ramificación de X y que solamente contienen a uno de los puntos extremos del triodo simple X.

Ahora, si D es un conjunto denso y numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, entonces del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D no contiene al punto de ramificación del espacio X y solamente contiene a uno de los puntos extremos del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$\{D \subset X : D$ es denso numerable en X y posee la propiedad $P2\}$.

Propiedad P3. *Los conjuntos M y N no contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene dos puntos extremos del triodo simple X.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_2 y e_3 pertenecen al conjunto denso M y denotemos por $e_{n(2)}$ y $e_{n(3)}$ a los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso N y por $e_{n(1)}$ al punto extremo de X que no pertenece al conjunto N.

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(\{e_2, e_3\}) = \{e_{n(2)}, e_{n(3)}\}$, esto implica que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjunto densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, la clase de equivalencia a la que pertenecen los conjuntos densos M y N contiene a todos los conjuntos densos y numerables que no contienen al punto de ramificación de X y que contienen exactamente dos puntos extremos del triodo simple X.

Considere D un conjunto denso y numerable que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D no contiene al punto de ramificación de X y contiene exacatamente a dos puntos extremos del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$\{D \subset X : D$ es denso numerable en X y posee la propiedad $P3\}$.

Propiedad P4. *Los conjuntos M y N no contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene a los tres puntos extremos del triodo simple X.*

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 es un testigo de que los conjunto densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, la clase de equivalencia a la que pertenecen los conjuntos densos M y N contiene a los conjuntos denso numerables que satisfacen la propiedad P4.

Por otra parte, si D es un conjunto denso y numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, entonces del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D satisface la propiedad P4. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$$\{D \subset X : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Los conjuntos M y N contienen al punto de ramificación de X y no contienen ningún punto extremo del triodo simple X.*

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(r) = r$, esto implica que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, la clase de equivalencia a la que pertenecen los conjuntos densos M y N contiene a todos los conjuntos densos y numerables que satisfacen la propiedad P5.

Sea D un conjunto denso y numerable que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que el conjunto denso D contiene al punto de ramificación de X y no contiene a los puntos extremos del triodo simple X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D \subset X : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Los conjuntos M y N contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene un punto extremo del triodo simple X.*

Supongamos sin perder generalidad que el punto extremo e_1 pertenece al conjunto denso M, denotemos por $e_{n(1)}$ al punto extremo de X que pertenece al conjunto denso N y por $e_{n(2)}$ y $e_{n(3)}$ a los puntos extremos que no están contenidos en el conjunto N.

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(e_1) = e_{n(1)}$ y que $h(r) = r$, esto implica que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto de la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables que poseen la propiedad P6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto M.

Ahora, si D es un conjunto denso y numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, entonces del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene al punto de ramificación de X y solamente uno de los puntos extremos del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso X es el conjunto:

$$\{N \subset X : N \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Prepiedad P7. *Los conjuntos M y N contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene dos puntos extremos del triodo simple X.*

Supongamos sin perder generalidad que los puntos extremos e_2 y e_3 pertenecen al conjunto denso M, denotemos por $e_{n(2)}$ y $e_{n(3)}$ a los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso N y por $e_{n(1)}$ al punto extremo de X que no está contenido en el conjunto N.

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(\{e_2, e_3\}) = \{e_{n(2)}, e_{n(3)}\}$, esto implica que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto de la relación $\sim$ definida en 3.1, dicha clase contiene a todos los conjuntos densos y numerables que satisfacen la propiedad P7.

Ahora, si D es un conjunto denso numerable que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M, entonces del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D contiene al punto de ramificación de X y a exactamente dos puntos extremos del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto M es el conjunto:

$$\{D \subset X : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P7\}.$$

Propiedad P8. *Los conjuntos M y N contienen al punto de ramificación de X y cada uno contiene a los tres puntos extremos del triodo simple X.*

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 es un testigo de que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, los conjuntos denso numerables que poseen la propiedad P8 pertenecen a la clase de equivalencia de los conjuntos densos M y N.

Considere D un conjunto denso y numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia de M. Del Teorema 3.6 se sigue que el conjunto D contiene al punto de ramificación de X y también a los tres puntos de ramificación del triodo simple X. Por lo tanto la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$$\{D \subset X : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P8\}.$$

Luego, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un triodo simple X es $g_{_{HDN}}(X) = 8$. †

Teorema 3.12. *Sea X un $n-odo$ simple, para algún $n \geq 3$. El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es igual a $2(n+1)$.*

Demostración. Denotemos por r al punto de ramificación del $n-odo$ simple X y numeremos el conjunto de puntos extremos $E(X)$ del $n-odo$ simple X como $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos del $n-odo$ simple X tales que las intersecciones $M \cap E(X)$ y $N \cap E(X)$ tengan la misma cardinalidad, digamos κ, con $0 \leq \kappa \leq n$.

Sin perder generalidad, supongamos que para cada $1 \leq i \leq \kappa$, el punto extremo e_i pertenece al conjunto denso M, y que para cada $\kappa < i \leq n$, el punto extremo e_i no pertenece al conjunto M.

Numeremos el conjunto de puntos extremos $E(X)$ como $E(X) = \{e_{n(i)} : 1 \leq i \leq n\}$, de manera que para cada $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$, el punto extremo $e_{n(i)}$ pertenece al conjunto N, y para cada $\kappa < i \leq n$, el punto extremo $e_{n(i)}$ no pertenece al conjunto N.

Así, los conjuntos densos poseen alguna de las siguientes dos propiedades:

Propiedad P1κ. *Los conjuntos densos M y N no contienen al punto de ramificación r.*

De los Teoremas 3.7 y 3.8 para cada $1 \leq i \leq n$ existe un homeomorfismo $f_i : [r, e_i] \to [r, e_{n(i)}]$ tal que

$$f_i(M \cap [r, e_i]) = N \cap [r, e_{n(i)}],$$

$$f_i(e_i) = e_{n(i)} \text{ y}$$

$$f_i(r) = r.$$

Del Teorema 1.34 se sabe que existe un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h|_{[r,e_i]} = f_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Observe que el homeomorfismo h cumple que $h(M) = N$. Por tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, la clase de equivalencia del conjunto M contiene a todos los conjuntos densos y numerables del $n-odo$ simple X que poseen la propiedad P1κ.

Ahora, suponga que D es un conjunto denso numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que el conjunto denso D no contiene al punto de ramificación r y que contiene κ puntos extremos del $n-odo$ simple X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\kappa\}.$$

Propiedad P2κ. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene al punto de ramificación r.*

Observe que el homeomorfismo del caso en el que los conjuntos densos no contienen al punto de ramificación cumple las siguientes propiedades

$h(r) = r$ y

$h(M \cap E(X)) = N \cap E(X)$.

Esto implica que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Por lo tanto, los conjuntos densos y numerables del $n-odo$ simple X que poseen la propiedad P2κ pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un conjunto denso numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que el punto de ramificación r pertenece al conjunto denso D y que el conjunto D contiene κ puntos extremos del $n-odo$ simple X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\kappa\}.$$

Note que el conjunto $\{0,\dots,n\}$ tiene cardinalidad $n+1$. Así, de lo anterior se concluye que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un $n-odo$ simple es $g_{HDN}(X) = 2(n+1)$. †

3.3. Gráficas completas

¿Para cada número natural n existe una gráfica completa cuyo grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables sea igual a n? En esta sección mostramos que la respuesta a esta cuestión es que, para cada $n \geq 4$, la gráfica completa con n vértices tiene grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables igual a n.

Dado que en la sección anterior ya conocimos la técnica que se usa para calcular el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables, presentamos inmediatamente la manera de calcular el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de una gráfica completa con n vértices en el resultado siguiente.

Teorema 3.13. *Si X es una gráfica completa con n vértices, para algún $n \geq 4$, entonces el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es igual a $n+1$.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables de la gráfica completa X. Numeremos el conjunto de vértices $V(X)$ de la gráfica completa X como $V(X) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P0. *Los conjuntos M y N no contienen vértices de la gráfica completa X.*

Del Teorema 3.7 se sabe que existe un homeomorfismo $f_{(i,j)}$ de la arista $[v_i, v_j]$ en sí misma, para cada $1 \leq i < j \leq n$, que satisface lo siguiente

$$f_{(i,j)}(M \cap [v_i, v_j]) = N \cap [v_i, v_j],$$

$$f_{(i,j)}(v_i) = v_i \text{ y}$$

$$f_{(i,j)}(v_j) = v_j.$$

En virtud del Teorema 1.36 se puede hallar un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h|_{[v_i,v_j]} = f_{(i,j)}$, para cada $1 \leq i < j \leq n$. Esto implica que el homeomorfismo h cumple que $h(M) = N$. Por tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, se tiene que la clase de equivalencia a la que pertenece el conjunto denso M contiene a todos los conjuntos densos y numerables de la gráfica completa X que no contienen vértices de X.

Considere D un subconjunto denso y numerable de la gráfica completa X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D no contiene vértices de la gráfica completa X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P0\}.$$

Para cada número cardinal κ tal que $1 \leq \kappa < n$, se tiene la propiedad siguiente.

Propiedad Pκ. *Las intersecciones $M \cap V(X)$ y $N \cap V(X)$ tienen cardinalidad κ.*

Supongamos sin perder generalidad que el vértice v_i pertenece al conjunto denso M, para cada $1 \leq i \leq \kappa$, y que el vértice v_i no pertenece al conjunto denso M, para cada $\kappa < i \leq n$.

Numeremos el conjunto de vértices como $V(X) = \{v_{n(i)} : 1 \leq i \leq n\}$, de manera que el vértice $v_{n(i)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $1 \leq i \leq \kappa$, y el vértice $v_{n(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $\kappa < i \leq n$.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existe un homeomorfismo $f_{(i,j)}$ de la arista $[v_i, v_j]$ en la arista $[v_{n(i)}, v_{n(j)}]$, para cada $1 \leq i < j \leq n$, que satisface lo siguiente

$$f_{(i,j)}(M \cap [v_i, v_j]) = N \cap [v_{n(i)}, v_{n(j)}],$$

$$f_{(i,j)}(v_i) = v_{n(i)} \text{ y}$$

$$f_{(i,j)}(v_j) = v_{n(j)}.$$

En virtud del Teorema 1.36 se puede hallar un homeomorfismo $h : X \to X$ de manera que $h|_{[v_i,v_j]} = f_{(i,j)}$, para cada $1 \leq i < j \leq n$. Esto implica que el homeomorfismo h cumple que $h(M) = N$. Por tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. Es más, todos los conjuntos densos y numerables de la gráfica completa X que contienen κ vértices pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, considere D un conjunto denso numerable de X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene κ vértices de la gráfica completa X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P\kappa\}.$$

Propiedad Pn. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene al conjunto de vértices $V(X)$.*

Observe que el homeomorfismo del caso en que los conjuntos densos satisfacen la propiedad P0 cumple que $h(M) = N$, es decir que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Note que esta clase de equivalencia contiene a todos los subconjuntos densos y numerables de X que contienen a todos los vértices de la gráfica completa X.

Ahora, suponga que D es un conjunto denso y numerable de la gráfica completa X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que el conjunto D contiene al conjunto de vértices de la gráfica completa X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } Pn\}.$$

Como para cada $0 \leq k \leq n$, la propiedad Pk determina una clase de equivalencia distinta, se concluye que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de la gráfica completa X con n vértices es $g_{HDN}(X) = n + 1$. †

Corolario 3.14. *Para cada número natural n tal que $n \in \{1, 3\}$ o $n \geq 5$ existe un continuo cuyo grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables es igual a n.*

Demostración. Sea X una curva cerrada simple. Como X es un espacio homogéneo, del Teorema 3.4 se sabe que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables es 1.

Del Teorema 3.10 se sabe que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un arco es igual a 3.

Sea n un número natural tal que $n \geq 5$. Denotemos por m al número natural tal que $n = m + 1$. Del Teorema 3.13 se sabe que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de una gráfica completa con m vértices es igual a $m + 1$, es decir, igual a n. †

3.4. Árboles

¿Para cada número natural n existe un árbol cuyo grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables sea igual a n? En esta parte respondemos parcialmente a esta pregunta.

Nos concentramos en hallar una expresión algebraica que permita determinar el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un tipo de árbol en particular. Los árboles con los que trabajamos son aquellos que tienen únicamente dos puntos de ramificación, ambos con el mismo orden. En el Teorema 3.16 probamos que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de cualquier árbol es finito. En los teoremas 3.17, 3.18 y 3.19 calculamos la cantidad de clases de equivalencia de subconjuntos densos y numerables de un árbol con la forma de la letra H que determina la relación $\sim$ definida en 3.1, estos tres resultados se usan en el Teorema 3.20 para determinar el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de un árbol con la forma de la letra H. Posteriormente se analiza otro ejemplo, el de un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden cuatro. Estos dos ejemplos proporcionan una estructura en la manera en que determinaremos el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de cualquier árbol que tiene solamente dos puntos de ramificación, ambos del mismo orden.

Teorema 3.15. *Sean X un árbol que contiene exactamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden $k+1$, e un punto extremo de X y r un punto de ramificación de X. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo y el punto e es consecutivo al punto r, entonces el punto extremo $h(e)$ es consecutivo al punto de ramificación $h(r)$.*

Demostración. Sean e un punto extremo del árbol X, r un punto de ramificación del árbol X tales que son consecutivos y $h : X \to X$ un homeomorfismo. De la Definición 1.22 se sabe que si y pertenece al arco $[r,e]$ entonces $y = e$, o bien $y = r$ o bien y es un punto ordinario. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que $h(e)$ es un punto extremo de X, $h(r)$ es un punto de ramificación de X y para cada $z \in [h(e),h(r)] -$

$\{h(e), h(r)\}$, el punto $h(z)$ es un punto ordinario. Por lo tanto, $h(e)$ y $h(r)$ son puntos consecutivos. †

Teorema 3.16. *Sea X un árbol. El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es finito.*

Demostración. Para proporcionar una cota superior del grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X, suponga que la órbita del punto x es el conjunto $\tau(x) = \{x\}$, para cada punto extremo y cada punto de ramificación x del árbol X. Dado que X es un árbol, se tiene que el conjunto de puntos extremos $E(X)$ y el conjunto de puntos de ramificación $R(X)$ son finitos. Numerémoslos como:

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq |E(X)|\} \text{ y } R(X) = \{r_n : 1 \leq n \leq |R(X)|\}.$$

Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X. Recuerde que del Teorema 3.6 se sabe que si dos conjuntos densos contienen cantidades distintas de puntos extremos o de puntos de ramificación, entonces dichos conjuntos densos no pertenecen a la misma clase de equivalencia, así, debemos considerar los siguientes casos:

(1) *Los conjuntos M y N están constituidos únicamente de puntos ordinarios.*

Denotemos por $\mathscr{A}$ al conjunto de arcos A contenidos en X cuyos puntos extremos son un punto extremo y otro de ramificación, o bien los dos son puntos de ramificación, y el resto de los puntos son puntos ordinarios de X. Note que para cada arco $A \in \mathscr{A}$ se sabe que existe un homeomorfismo h_A del arco A en sí mismo de manera que $h_A(M \cap A) = N \cap A$ y h deja fijos a los puntos extremos del arco A.

Definamos una función h del árbol X en sí mismo como $h(x) = h_A(x)$, si $x \in A$, para algún arco $A \in \mathscr{A}$. Note que si x es un punto extremo de X, entonces existe un único arco $A \in \mathscr{A}$, de manera que A tiene por puntos extremos al punto x y a un punto de ramificación de la gráfica X, así $h(x) = h_A(x) = x$. Ahora bien, si x es un punto de ramificación, entonces para cualquier arco $A \in \mathscr{A}$, de manera que el punto x es un punto extremo del arco A, se tiene que $h(x) = h_A(x) = x$. Por lo tanto, la función h está bien definida. Además, dado que para cualquier arco $A \in \mathscr{A}$ se tiene que h_A es un homeomorfismo del arco A en sí mismo, se sigue que la función h es un homeomorfismo del árbol X en sí mismo. Por lo tanto, los conjuntos densos y numerables M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a conjuntos denso numerables de X.

(2) *Los conjuntos M y N contienen la misma cantidad de puntos extremos.*

Observe que si x es un punto extremo que pertenece al conjunto M y ocurre que x no pertenece al conjunto denso N, entonces como la órbita del punto x es el conjunto $\{x\}$, se tiene que no existe un homeomorfismo h de la gráfica X en sí misma de manera que $h(M) = N$. Esto implica que, para que los conjuntos densos M y N pertenezcan a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1, debe suceder que

$$M \cap E(X) = N \cap E(X).$$

(3) *Los conjuntos M y N contienen la misma cantidad de puntos de ramificación.*

Observe que si x es un punto de ramificación que pertenece al conjunto M y ocurre que x no pertenece al conjunto denso N, entonces como la órbita del punto x es el conjunto $\{x\}$, se tiene que no existe un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que $h(M) = N$. Esto implica que, para que los conjuntos densos M y N pertenezcan a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1, debe suceder que

$$M \cap R(X) = N \cap R(X).$$

Recuerde que el conjunto de puntos extremos $E(X)$ y el conjunto de puntos de ramificación $R(X)$ son finitos, así, para calcular el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X basta calcular la cantidad de subconjuntos del conjunto $E(X) \cup R(X)$.

Dado que el conjunto $E(X) \cup R(X)$ es finito, existe una cantidad finita de subconjuntos de la unión $E(X) \cup R(X)$. Como para cada punto

$x \in X$ se supuso que la órbita $\tau(x)$ es el singular $\{x\}$, se tiene que cada subconjunto de la unión $E(X) \cup R(X)$ determina una clase de equivalencia de subconjuntos denso numerables del árbol X con respecto a la relación $\sim$ definida en 3,1. Por lo tanto, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X está acotado por el número cardinal $2^{|E(X) \cup R(X)|}$.

†

Teorema 3.17. *Sea X un árbol con la forma de la letra H. Existen seis clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que no contienen puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación. Denotemos por r_1 y r_2 a los dos puntos de ramificación de X. Numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos e_1 y e_2 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_3 y e_4 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos.*

Del Teorema 3.7 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_1, r_2]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_2, e_n]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_1, r_2]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M\cap[r_2,e_n])=N\cap[r_2,e_n]$, para cada $3\leq n\leq 4$,

$f_0(r_1)=r_1$ y $f_0(r_2)=r_2$,

$f_n(r_1)=r_1$ y $f_n(e_n)=e_n$, para cada $1\leq n\leq 2$ y

$f_n(r_2)=r_2$ y $f_n(e_n)=e_n$, para cada $3\leq n\leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]}=f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]}=f_n$, para cada $1\leq n\leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]}=f_n$, para cada $3\leq n\leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M)=N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se tiene que los puntos de ramificación y los puntos extremos del árbol X no pertenecen al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Los conjuntos M y N contienen solamente un punto extremo del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo al punto extremo que pertenece al conjunto N, y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X)=\{e_{i(n)} : 1\leq n\leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto extremo que pertenece al conjunto N es el punto $e_{i(1)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P2 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que los puntos de ramificación del árbol X no pertenecen al conjunto D y solamente uno de los puntos extremos de X pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Los conjuntos M y N contienen exactamente dos puntos extremos los cuales son consecutivos a un mismo punto de ramificación del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N, y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4,$$

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P3 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D no contiene a los puntos de ramificación de X y que dos de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Es más, del Teorema 3.15 se tiene que los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a un mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P3\}.$$

Propiedad P4. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente dos puntos extremos del árbol X los cuales son consecutivos a puntos de ramificación distintos.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_3 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y

$r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(3)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P4 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se tiene que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y que exactamente dos de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto denso D. Además, del Teorema 3.15 se sigue que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos a puntos de ramificación diferentes. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Los conjuntos M y N contienen exactamente tres puntos extremos del árbol X.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_2, e_3 y e_4 pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X y, numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\}$$

de manera que para cada $2 \leq n \leq 4$, el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N y los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$.

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 4$, esto implica que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P5 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto denso D y que exactamente tres puntos extremos de X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Los conjuntos M y N contienen a todos los puntos extremos del árbol X.*

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(e_n) = e_n$, para cada $1 \leq n \leq 4$, esto implica que la función h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D no contiene a los puntos de ramificación de X y que todos los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso y numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Luego, existen seis clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación. †

Teorema 3.18. *Sea X un árbol con la forma de la letra H. Existen seis clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X. Denotemos por r_1 y r_2 a los dos puntos de ramificación de X. Numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos e_1 y e_2 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_3 y e_4 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos.*

Del Teorema 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_1, r_2]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_2, e_n]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_1, r_2]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_2, e_n]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_1$ y $f_0(r_2) = r_2$,

$f_n(r_1) = r_1$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_2$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Es decir que la clase de equivalencia del conjunto denso M contiene a todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación de X y que satisfacen la propiedad P1.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto D contiene a los dos puntos de ramificación de X y que no contiene puntos extremos de X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Los conjuntos M y N contienen solamente un punto extremo del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo al punto extremo que pertenece al conjunto N, y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto extremo que pertenece al conjunto N es el punto $e_{i(1)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen al conjunto de puntos de ramificación y que contienen solamente a uno de los puntos extremos de X pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable de X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sigue que el conjunto D contiene a los dos puntos de ramificación de X y solamente contiene a uno de los puntos extremos del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Los conjuntos M y N contienen exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos a un mismo punto de ramificación del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N, y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Además, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contengan a los dos puntos de ramificación de X y que contienen a exactamente dos puntos extremos que son consecutivos a un mismo punto de ramificación pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto M.

Suponga que D es un conjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene a los dos puntos de ramificación de X y además, contiene a dos puntos extremos de X. Por otra parte, del Teorema 3.15 se sabe que los dos puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos a un mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P3\}.$$

Propiedad P4. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente dos puntos extremos del árbol X los cuales son consecutivos a puntos de ramificación distintos.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_3 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(3)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Es decir, que la clase de equivalencia del conjunto denso M contiene a todos los conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los puntos de ramificación y que satisfacen la propiedad P4.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación del árbol X y dos de sus puntos extremos pertenecen al conjunto D, además, del Teorema 3.15 se sabe que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos a puntos de ramificación distintos. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Los conjuntos M y N contienen exactamente tres puntos extremos del árbol X.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_2, e_3 y e_4 pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X y, numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\}$$

de manera que para cada $2 \leq n \leq 4$, el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N y los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y, los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$.

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 4$, esto implica que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$, dicha clase de equivalencia contiene a todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P5.

Suponga que D es un subconjunto denso numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación del árbol X y tres de sus puntos extremos pertenecen al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Los conjuntos M y N contienen a todos los puntos extremos del árbol X.*

Observe que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(e_n) = e_n$, para cada $1 \leq n \leq 4$, esto implica que la función h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1, tal clase de equivalencia contiene a los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X y que poseen la propiedad P6.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Luego, existen seis clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X. †

Teorema 3.19. *Sea X un árbol con la forma de la letra H. Existen nueve clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que contienen solamente a uno de los dos puntos de ramificación con respecto a la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos de X tales que cada uno de ellos contenga solamente a uno de los puntos de ramificación del árbol X. Denotemos por r_1 al punto de ramificación de X que pertenece al conjunto denso M y por r_2 al punto de ramificación que no pertenece al conjunto M. Análogamente, denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso N y por $r_{a(2)}$ al punto de ramificación que no pertenece al conjunto N. Además, enumeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos e_1 y e_2 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_3 y e_4 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. También, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 4\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ sean consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y los puntos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ sean consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad R1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos del árbol X.*

Del Teorema 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto denso D contiene a exactamente uno de los puntos de ramificación del árbol X y no contiene puntos extremos de X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R1\}.$$

Propiedad R2. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente un punto extremo, el cual es consecutivo al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M, y el punto extremo $e_{i(1)}$ pertenece al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y} f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R2 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente uno de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se sabe que el punto extremo que pertenece al conjunto denso D es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R2\}.$$

Propiedad R3. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente un punto extremo, el cual no es consecutivo al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que e_3 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M y, que el punto extremo $e_{i(3)}$ pertenece al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M\cap[r_2,e_n]) = N\cap[r_{a(2)},e_{i(n)}]$, para cada $3\leq n\leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1\leq n\leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3\leq n\leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1\leq n\leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3\leq n\leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R3 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente uno de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Es más, del Teorema 3.15 se sabe que el punto extremo que pertenece al conjunto D no es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R3\}.$$

Propiedad R4. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Como los conjuntos M y N satisfacen la propiedad R4, se tiene que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso

M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R4 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso numerable del árbol X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación de X y a exactamente dos puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se tiene que los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al punto de ramificación del árbol X que pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R4\}.$$

Propiedad R5. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos a puntos de ramificación distintos.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_3 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(3)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3 \leq n \leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R5 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente dos puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Además, del Teorema 3.15 se sigue que los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a puntos de ramificación distintos. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R5\}.$$

Propiedad R6. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales no son consecutivos al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Como los conjuntos M y N satisfacen la propiedad R6, se tiene que e_3 y e_4 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $3 \leq n \leq 4$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 3 \leq n \leq 4.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable de X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente dos puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Es más, del Teorema 3.15 se sigue que los dos puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D no son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R6\}.$$

Propiedad R7. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de los cuales exactamente dos no son consecutivos al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que los puntos extremos e_2, e_3 y e_4 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(2)}$, $e_{i(3)}$ y $e_{i(4)}$ pertenecen al conjunto N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad R2 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $2 \leq n \leq 4$. Por lo tanto, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R7 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente tres de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que dos de los puntos extremos pertenecientes al conjunto denso D no son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R7\}.$$

Propiedad R8. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de los cuales exactamente dos son consecutivos al punto de ramificación contenido en el conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que los puntos extremos e_1, e_2 y e_4 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(4)}$ pertenecen al conjunto N.

Observe que el homeomorfismo que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad R3 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{1,2,4\}$. Por lo tanto, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R8 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación y exactamente tres puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que dos de los puntos extremos pertenecientes al conjunto denso D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R8\}.$$

Propiedad R9. *Los conjuntos M y N contienen a los cuatro puntos extremos del árbol X.*

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad R1 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 4$. Por lo tanto, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$. Así, todos los subconjuntos denso numerables del árbol X que contienen solamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad R1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación y todos los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } R9\}.$$

Luego, existen nueve clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a exactamente uno de los puntos de ramificación de X. †

Teorema 3.20. *Sea X un árbol con la forma de la letra H. El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables de X es igual a 21.*

Demostración. Del Teorema 3.17 se sabe que existen seis clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que no contienen puntos de ramificación. Además, del Teorema 3.18 se sabe que existen seis clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que contienen a los dos puntos de ramificación. Adicionalmente, del Teorema 3.19 se sabe que existen nueve clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación del árbol X. Por lo tanto, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X es $g_{HDN}(X) = 21$. †

Teorema 3.21. *Sea X un árbol que contiene únicamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden 4. Existen diez clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que no contienen puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación. Denotemos por r_1 y r_2 a los dos puntos de ramificación de X. Numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos e_1, e_2 y e_3 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_4, e_5 y e_6 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos del árbol X.*

Del Teorema 3.7 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_1, r_2]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_2, e_n]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_1, r_2]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_2, e_n]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_1$ y $f_0(r_2) = r_2$,

$f_n(r_1) = r_1$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_2$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación y ninguno de los puntos extremos pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Los conjuntos M y N contienen exactamente a uno de los puntos extremos del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que el punto extremo e_1 pertenece al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo al punto extremo que pertenece al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto extremo que pertenece al conjunto N es el punto $e_{i(1)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P2 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y que exactamente uno de los puntos extremos de X pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos al mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto

$r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P3 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente dos de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los dos puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P3\}.$$

Propiedad P4. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos a puntos de ramificación distintos.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_4 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(4)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P4 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente dos de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a puntos de ramificación distintos. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, los cuales son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $1 \leq n \leq 3$. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P5 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente tres de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los tres puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de los cuales solamente dos son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $n \in \{1,2,4\}$, y que los puntos e_1 y e_2 son consecutivos al punto de ramificación r_1, así, el punto extremo e_4 es consecutivo al punto de ramificación r_2. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a dos de los puntos puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(4)}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente tres de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que solamente dos puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Propiedad P7. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, de los cuales tres son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto extremo e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $3 \leq n \leq 6$. Denotemos por $r_a(1)$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a solamente uno de los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

tal que el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$, el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$, y que el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $n \in \{3, \ldots, 6\}$.

Observe que el homeomorfismo h obtenido en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P3 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 6$, esto implica que $h(M) = N$. Es decir, que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P7 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente cuatro de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que tres de los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es numerable y denso en } X \text{ y posee la propiedad } P7\}.$$

Propiedad P8. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, de los cuales dos son consecutivos a un mismo punto de ramificación y los otros dos son consecutivos al otro punto de ramificación.*

Suponga sin perder generalidad que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $n \in \{2,3,5,6\}$. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Enumeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$; el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$ y el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $n \in \{2,3,5,6\}$.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P8 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente cuatro de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que dos de los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos un mismo punto de ramificación, y que los otros dos puntos extremos son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P8\}.$$

Propiedad P9. *Cada uno de los conjuntos M y N exactamente contiene cinco puntos extremos.*

Suponga sin perder generalidad que el punto extremo e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $2 \leq n \leq 6$. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo solamente a dos de los puntos puntos extremos que pertenecen al conjunto N y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $2 \leq n \leq 6$.

Observe que el homeomorfismo h del caso en el que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 es tal que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 6$. Por lo tanto, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P9 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X pertenece al conjunto D y exactamente cinco de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P9\}.$$

Propiedad P10. *Los conjuntos M y N contienen los seis puntos extremos del árbol X.*

Observe que el punto e_n pertenece a los conjuntos densos M y N, para cada $1 \leq n \leq 6$. Además, note que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(e_n) = e_n$. Así, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que poseen la propiedad P10 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que ninguno de los puntos de ramificación del árbol X

pertenece al conjunto D y que los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es numerable y denso en } X \text{ y posee la propiedad } P10\}.$$

Luego, existen diez clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. †

Teorema 3.22. *Sea X un árbol que contiene únicamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden 4. Existen diez clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación de X con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación. Denotemos por r_1 y r_2 a los dos puntos de ramificación de X. Numeremos el conjunto de puntos extremos como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos e_1, e_2 y e_3 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_4, e_5 y e_6 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos del árbol X.*

Del Teorema 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_1, r_2]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_2, e_n]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_1, r_2]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_1, e_n]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_2, e_n]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_1$ y $f_0(r_2) = r_2$,

$f_n(r_1) = r_1$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_2$ y $f_n(e_n) = e_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación de X pertenecen al conjunto D y que ninguno de los puntos extremos pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Los conjuntos M y N contienen exactamente a uno de los puntos extremos del árbol X.*

Sin perder generalidad suponga que el punto extremo e_1 pertenece al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo al punto extremo que pertenece al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto extremo que pertenece al conjunto N es el punto $e_{i(1)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P2 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente uno de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos al mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M\cap[r_1,r_2]) = N\cap[r_{a(1)},r_{a(2)}],$$

$$f_n(M\cap[r_1,e_n]) = N\cap[r_{a(1)},e_{i(n)}], \text{ para cada } 1\leq n\leq 3,$$

$$f_n(M\cap[r_2,e_n]) = N\cap[r_{a(2)},e_{i(n)}], \text{ para cada } 4\leq n\leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1\leq n\leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4\leq n\leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1\leq n\leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4\leq n\leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P3 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación del árbol X pertenecen al conjunto D y exactamente dos de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los dos puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P3\}.$$

Propiedad P4. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos a puntos de ramificación distintos.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_4 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(4)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 2$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P4 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente dos de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a puntos de ramificación distintos. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, los cuales son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $1 \leq n \leq 3$. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X y que poseen la propiedad P5 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente tres de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que los tres puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de los cuales solamente dos son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $n \in \{1,2,4\}$, y que los puntos e_1 y e_2 son consecutivos al punto de ramificación r_1, así, el punto extremo e_4 es consecutivo al punto de ramificación r_2. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a dos de los puntos puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y los puntos extremos que pertenecen al conjunto N son los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(4)}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente tres de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que solamente dos puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Propiedad P7. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, de los cuales tres son consecutivos a un mismo punto de ramificación.*

Sin perder generalidad suponga que el punto extremo e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $3 \leq n \leq 6$. Denotemos por $r_a(1)$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo a solamente uno de los puntos extremos que pertenecen al conjunto N y, por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

tal que el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$, el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$, y que el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $n \in \{3, \ldots, 6\}$.

Observe que el homeomorfismo h obtenido en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P3 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $3 \leq n \leq 6$, esto implica que $h(M) = N$. Es decir, que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P7 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, sea D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente cuatro de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que tres de los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al mismo punto de ramificación. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es numerable y denso en } X \text{ y posee la propiedad } P7\}.$$

Propiedad P8. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, de los cuales dos son consecutivos a un mismo punto de ramificación y los otros dos son consecutivos al otro punto de ramificación.*

Suponga sin perder generalidad que el punto e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $n \in \{2, 3, 5, 6\}$. Denotemos por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Enumeremos el conjunto de puntos

extremos como
$$E(X)=\{e_{i(n)}:1\leq n\leq 6\},$$
de manera que el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1\leq n\leq 3$; el punto $e_{i(n)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $4\leq n\leq 6$ y el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $n\in\{2,3,5,6\}$.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0:[r_1,r_2]\to[r_{a(1)},r_{a(2)}]$,

$f_n:[r_1,e_n]\to[r_{a(1)},e_{i(n)}]$, para cada $1\leq n\leq 3$ y

$f_n:[r_2,e_n]\to[r_{a(2)},e_{i(n)}]$, para cada $4\leq n\leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M\cap[r_1,r_2])=N\cap[r_{a(1)},r_{a(2)}]$,

$f_n(M\cap[r_1,e_n])=N\cap[r_{a(1)},e_{i(n)}]$, para cada $1\leq n\leq 3$,

$f_n(M\cap[r_2,e_n])=N\cap[r_{a(2)},e_{i(n)}]$, para cada $4\leq n\leq 6$,

$f_0(r_1)=r_{a(1)}$ y $f_0(r_2)=r_{a(2)}$,

$f_n(r_1)=r_{a(1)}$ y $f_n(e_n)=e_{i(n)}$, para cada $1\leq n\leq 3$ y

$f_n(r_2)=r_{a(2)}$ y $f_n(e_n)=e_{i(n)}$, para cada $4\leq n\leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]}=f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]}=f_n$, para cada $1\leq n\leq 3$ y

$h|_{[r_2,e_n]}=f_n$, para cada $4\leq n\leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M)=N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P8 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente cuatro de los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto D. Además, del Teorema 3.15 se tiene que dos de los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos un mismo punto de ramificación, y que los otros dos puntos extremos son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P8\}.$$

Propiedad P9. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente cinco puntos extremos.*

Suponga sin perder generalidad que el punto extremo e_n pertenece al conjunto denso M, para cada $2 \leq n \leq 6$. Denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación del árbol X que es consecutivo solamente a dos de los puntos puntos extremos que pertenecen al conjunto N y por $r_{a(2)}$ al otro punto de ramificación. Además, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$, los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ son consecutivos al punto $r_{a(2)}$ y el punto $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $2 \leq n \leq 6$.

Observe que el homeomorfismo h del caso en el que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 6$. Por lo tanto, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P9 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y exactamente cinco de los puntos extremos de X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P9\}.$$

Propiedad P10. *Los conjuntos M y N contienen los seis puntos extremos del árbol X.*

Observe que el punto e_n pertenece a los conjuntos densos M y N, para cada $1 \leq n \leq 6$. Además, note que el homeomorfismo h del caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(e_n) = e_n$. Así, el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que poseen la propiedad P10 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que los dos puntos de ramificación y todos los puntos extremos del árbol X pertenecen al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es numerable y denso en } X \text{ y posee la propiedad } P10\}.$$

Luego, existen diez clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. †

Teorema 3.23. *Sea X un árbol que contiene únicamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden 4. Existen dieciséis clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que solamente* *contienen a uno de los dos puntos de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos numerables y densos en X tales que cada uno de ellos contenga a uno de los puntos de ramificación del árbol X. Denotemos por r_1 al punto de ramificación de X que pertenece al conjunto denso M y por r_2 al punto de ramificación que no pertenece al conjunto M. Análogamente denotemos por $r_{a(1)}$ al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso N y por $r_{a(2)}$ al punto de ramificación que no pertenece al conjunto N. Además, enumeremos el conjunto de puntos extremos del árbol X como

$$E(X) = \{e_n : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos e_1, e_2 y e_3 sean consecutivos al punto de ramificación r_1 y los puntos e_4, e_5 y e_6 sean consecutivos al punto de ramificación r_2. También, consideremos la siguiente numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{i(n)} : 1 \leq n \leq 6\},$$

de manera que los puntos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ sean consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y los puntos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ sean consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$. Así, los conjuntos M y N poseen alguna de las siguientes propiedades.

Propiedad P1. *Los conjuntos M y N no contienen puntos extremos.*

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M\cap[r_2,e_n]) = N\cap[r_{a(2)},e_{i(n)}]$, para cada $4\leq n\leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1\leq n\leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4\leq n\leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_n]} = f_n$, para cada $1\leq n\leq 2$ y

$h|_{[r_2,e_n]} = f_n$, para cada $3\leq n\leq 4$.

Además, la función h cumple que $h(M)=N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente un punto de ramificación y poseen la propiedad P1 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenezca a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se sabe que solamente uno de los puntos de ramificación de X pertenece al conjunto denso D y ninguno de los puntos extremos pertenece al conjunto D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P1\}.$$

Propiedad P2. *Cada uno de los conjuntos M y N contienen exactamente un punto extremo, el cual es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M, y que el punto extremo $e_{i(1)}$ pertenece al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y$f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, la clase de equivalencia del conjunto denso M contiene a todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P2.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a un punto extremo del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que el punto extremo que pertenece al conjunto D es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P2\}.$$

Propiedad P3. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente un punto extremo, el cual no es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que e_3 es el punto extremo de X que pertenece al conjunto denso M, y que el punto extremo $e_{i(3)}$ pertenece al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P3 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a un punto extremo del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que el punto extremo que pertenece al conjunto D no es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P3\}.$$

Propiedad P4. *Cada uno de los conjuntos M y N contienen exactamente dos puntos extremos, los cuales son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Como los conjuntos M y N satisfacen la propiedad P4, podemos suponer que e_1 y e_2 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(2)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P4 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a dos puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P4\}.$$

Propiedad P5. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, de los cuales solamente uno es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Sin perder generalidad suponga que e_1 y e_4 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$ y $e_{i(4)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P5 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a dos puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente uno de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P5\}.$$

Propiedad P6. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente dos puntos extremos, los cuales no son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Como los conjuntos M y N satisfacen la propiedad P6, suponga que e_4 y e_5 son los puntos extremos de X que pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(4)}$ y $e_{i(5)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7 y 3.8 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P6 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a dos puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D no son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P6\}.$$

Propiedad P7. *Cada uno de los conjuntos M y N contienen exactamente tres puntos extremos, los cuales son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_1, e_2 y e_3 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(3)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1,r_2] \to [r_{a(1)},r_{a(2)}],$$

$$f_n : [r_1,e_n] \to [r_{a(1)},e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3,$$

$$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}], \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6,$$

$$f_0(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_n(r_1) = r_{a(1)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$f_n(r_2) = r_{a(2)} \text{ y } f_n(e_n) = e_{i(n)}, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$$h|_{[r_1, r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 1 \leq n \leq 3 \text{ y}$$

$$h|_{[r_2, e_n]} = f_n, \text{ para cada } 4 \leq n \leq 6.$$

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P7 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a tres puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P7\}.$$

Propiedad P8. *Cada uno de los conjuntos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de modo que únicamente dos de ellos son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_1, e_2 y e_4 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}$, $e_{i(2)}$ y $e_{i(4)}$ pertenecen al conjunto denso N.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n : [r_1, e_n] \to [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n : [r_2, e_n] \to [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_n(M \cap [r_1, e_n]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{i(n)}]$, para cada $1 \leq n \leq 3$,

$f_n(M \cap [r_2, e_n]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{i(n)}]$, para cada $4 \leq n \leq 6$,

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_n(r_1) = r_{a(1)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$f_n(r_2) = r_{a(2)}$ y $f_n(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

En virtud del Teorema 1.35 se puede hallar un homeomorfismo h del árbol X en sí mismo de manera que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_n]} = f_n$, para cada $1 \leq n \leq 3$ y

$h|_{[r_2, e_n]} = f_n$, para cada $4 \leq n \leq 6$.

Además, la función h cumple que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P8 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a tres puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente dos de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P8\}.$$

Propiedad P9. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, de modo que solamente uno de ellos es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_3, e_5 y e_6 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(3)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ pertenecen al conjunto denso N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P8 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{3, 5, 6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P9 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del

Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a tres puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente uno de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P9\}.$$

Propiedad P10. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente tres puntos extremos, los cuales son consecutivos al punto de ramificación que no pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_4, e_5 y e_6 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ pertenecen al conjunto denso N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P7 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{4,5,6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P10 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a tres puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que no pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P10\}.$$

Propiedad P11. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, tres de los cuales son consecutivos al* *punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_1, e_2, e_3 y e_6 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(1)}, e_{i(2)}$, $e_{i(3)}$ y $e_{i(6)}$ pertenecen al conjunto denso N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P6 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{1,2,3,6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P11 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a cuatro puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente tres de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P11\}.$$

Propiedad P12. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente cuatro puntos extremos, de los cuales solamente dos son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_2, e_3, e_5 y e_6 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(2)}, e_{i(3)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ pertenecen al conjunto denso N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P5 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{2,3,5,6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P12 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a cuatro puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente dos de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P12\}.$$

Propiedad P13. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene cuatro puntos extremos, de los cuales solamente uno es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que los puntos extremos e_3, e_4, e_5 y e_6 pertenecen al conjunto denso M y que los puntos extremos $e_{i(3)}$, $e_{i(4)}$, $e_{i(5)}$ y $e_{i(6)}$ pertenecen al conjunto denso N.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P4 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{3,4,5,6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P13 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a cuatro puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente uno de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D es consecutivo al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P13\}.$$

Propiedad P14. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente cinco puntos extremos, de los cuales tres son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que el punto extremo e_i pertenece al conjunto denso M, para cada $n \in \{1,2,3,5,6\}$ y, que el punto extremo $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $n \in \{1,2,3,5,6\}$.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P3 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $n \in \{1,2,3,5,6\}$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P14 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a cinco puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente tres de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P14\}.$$

Propiedad P15. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene exactamente cinco puntos extremos, de modo que solamente dos de ellos son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso correspondiente.*

Suponga sin perder generalidad que el punto extremo e_i pertenece al conjunto denso M, para cada $2 \leq n \leq 6$ y, que el punto extremo $e_{i(n)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $2 \leq n \leq 6$.

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en que los conjuntos densos poseen la propiedad P2 cumple que $h(e_n) = e_{i(n)}$, para cada $2 \leq n \leq 6$ y, que $h(M) = N$. Es decir que el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P15 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y exactamente a cinco puntos extremos del árbol X. Del Teorema 3.15 se sabe que solamente dos de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P15\}.$$

Propiedad P16. *Cada uno de los conjuntos densos M y N contiene al conjunto de puntos extremos del árbol X.*

Observe que el homeomorfismo h que se obtuvo en el caso en el que los conjuntos densos poseen la propiedad P1 cumple que $h(M) = N$, Por lo tanto el homeomorfismo h es un testigo de que los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Así, todos los subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación de X y que poseen la propiedad P16 pertenecen a la clase de equivalencia del conjunto denso M.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene solamente a uno de los puntos de ramificación y a los seis puntos extremos del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto denso numerable M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y posee la propiedad } P16\}.$$

Luego, se concluye que el árbol X posee 16 clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que contienen a solamente un punto de ramificación con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1. †

Teorema 3.24. *Sea X un árbol que contiene únicamente dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden 4. El grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X es igual a 36.*

Demostración. Del Teorema 3.21 se sabe que existen 10 clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que no contienen puntos de ramificación.

Además, del Teorema 3.22 se sabe que existen 10 clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X.

Finalmente, del Teorema 3.23 se sabe que existen 16 clases de equivalencia distintas de conjuntos denso numerables que contienen exactamente a uno de los dos puntos de ramificación del árbol X.

Luego, el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X es $g_{HDN}(X) = 36$. †

Teorema 3.25. *Sean X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$ y $0 \leq n \leq k$. Las siguientes proposiciones son verdaderas.*

(1) *Si n es un número par, entonces existen $\frac{n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

(2) *Si n es un número impar, entonces existen $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean n un entero no negativo tal que $0 \leq n \leq k$ y M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente n puntos extremos y ningún punto de ramificación. Así existen dos enteros no negativos, n_1 y n_2, tales que

$$n_1 + n_2 = n \text{ y}$$

existen n_1 puntos extremos contenidos en el conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_1, existen n_2 puntos extremos que pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_2.

Numeremos el conjunto de puntos extremos como $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_1, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_2, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto e_i pertenece al conjunto M, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto e_i pertenece al conjunto M, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

Denote por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Dado que el conjunto N contiene n puntos extremos y deseamos construir un homeomorfismo del espacio X en sí mismo que mande el conjunto

M en N, suponga que el conjunto N contiene n_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y contiene n_2 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$.

Consideremos una función biyectiva $\lambda : \{1,\dots,2k\} \to \{1,\dots,2k\}$ que posea las siguientes propiedades:

(i) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto $e_{\lambda(i)}$ pertenece al conjunto N, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto $e_{\lambda(i)}$ pertenece al conjunto N, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

que satisfacen las siguientes condiciones

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$, $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_i(e_i) = e_{\lambda(i)}$, para cada $1 \leq i \leq 2k$,

$f_i(r_1) = r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

$f_i(r_2) = r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i(M \cap [r_1, e_i]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i(M \cap [r_2, e_i]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

En virtud del Teorema 1.35 existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_i]} = f_i$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$h|_{[r_2,e_i]} = f_i$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

Así, se tiene que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente n puntos extremos del árbol X y que no contiene a ninguno de los puntos de ramificación de X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente n_1 puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a uno de los puntos de ramificación y que exactamente n_2 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto M está conformada precisamente de aquellos subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen ninguno de los puntos de ramificación del árbol X y contienen exactamente n puntos extremos, de los cuales n_1 puntos extremos son consecutivos un mismo punto de ramificación, y n_2 son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X.

Si n es un entero par, es sabido que existen $\frac{n}{2}+1$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a n. Se concluye que existen $\frac{n}{2}+1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (1) es verdadera.

Si n es un entero impar, es sabido que existen $\frac{n+1}{2}$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a n. Se concluye que existen $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (2) es verdadera. †

Teorema 3.26. *Sean X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$ y $0 \leq n \leq k$. Las siguientes proposiciones son verdaderas.*

(1) *Si n es un número par, entonces existen* $\frac{n}{2}+1$ *clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

(2) *Si n es un número impar, entonces existen* $\frac{n+1}{2}$ *clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

Demostración. Sean n un entero no negativo tal que $0 \leq n \leq k$ y M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente n puntos extremos y a los dos puntos de ramificación. Así existen dos enteros no negativos, n_1 y n_2, tales que

$$n_1 + n_2 = n \text{ y}$$

existen n_1 puntos extremos contenidos en el conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_1, existen n_2 puntos extremos que pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_2.

Numeremos el conjunto de puntos extremos como $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_1, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_2, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto e_i pertenece al conjunto M, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto e_i pertenece al conjunto M, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

Denote por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Dado que el conjunto N contiene n puntos extremos y deseamos construir un homeomorfismo del espacio X en sí mismo que mande el conjunto

M en N, suponga que el conjunto N contiene n_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y contiene n_2 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$.

Consideremos una función biyectiva $\lambda : \{1, \ldots, 2k\} \to \{1, \ldots, 2k\}$ que posea las siguientes propiedades:

(i) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto $e_{\lambda(i)}$ pertenece al conjunto N, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto $e_{\lambda(i)}$ pertenece al conjunto N, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

que satisfacen las siguientes condiciones

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$, $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_i(e_i) = e_{\lambda(i)}$, para cada $1 \leq i \leq 2k$,

$f_i(r_1) = r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

$f_i(r_2) = r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i(M \cap [r_1, e_i]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i(M \cap [r_2, e_i]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

En virtud del Teorema 1.35 existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$$h|_{[r_1,e_i]} = f_i, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_i]} = f_i, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

Así, se tiene que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente n puntos extremos del árbol X y que contiene a los dos puntos de ramificación de X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente n_1 puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a uno de los puntos de ramificación y que exactamente n_2 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto M está conformada precisamente de aquellos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y a exactamente n puntos extremos del árbol X, de los cuales n_1 puntos extremos son consecutivos un mismo punto de ramificación, y n_2 son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X.

Si n es un entero par, es sabido que existen $\frac{n}{2}+1$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a n. Se concluye que existen $\frac{n}{2}+1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen los dos puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (1) es verdadera.

Si n es un entero impar, es sabido que existen $\frac{n+1}{2}$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a n. Se concluye que existen $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que contienen los dos puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (2) es verdadera. †

Teorema 3.27. *Sean X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$ y $k+1 \leq n \leq 2k$. Las siguientes proposiciones son verdaderas.*

(1) *Si n es un número par, entonces existen* $\frac{2k-n}{2}+1$ *clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

(2) *Si n es un número impar, entonces existen* $\frac{2k-n+1}{2}$ *clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

Demostración. Sean n un entero no negativo tal que $k+1 \leq n \leq 2k$ y M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente n puntos extremos y ningún punto de ramificación. Observe que si $m = 2k-n$, entonces se tiene que $0 \leq m < k$. Ahora considere dos enteros no negativos, m_1 y m_2, tales que

$$m_1 + m_2 = m, \text{ y}$$

existen m_1 puntos extremos que no pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_1, existen m_2 puntos extremos que no pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_2.

Numeremos el conjunto de puntos extremos como $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_1, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_2, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $1 \leq i \leq m_1$ y

(iv) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $k+1 \leq i \leq k+m_2$.

Denote por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Dado que el conjunto N contiene n puntos extremos y deseamos construir un homeomorfismo del espacio X en sí mismo que mande el conjunto M en N, suponga que m_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ no pertenecen al conjunto denso N y m_2 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$ no pertenecen al conjunto denso N.

Consideremos una función biyectiva $\lambda : \{1,\ldots,2k\} \to \{1,\ldots,2k\}$ que posea las siguientes propiedades:

(i) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k,$$

que satisfacen las siguientes condiciones

$$f_0(r_1) = r_{a(1)},\ f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_i(e_i) = e_{\lambda(i)}, \text{ para cada } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$f_i(r_1) = r_{a(1)}, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k,$$

$$f_i(r_2) = r_{a(2)}, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k,$$

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_i(M \cap [r_1, e_i]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$f_i(M \cap [r_2, e_i]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

En virtud del Teorema 1.35 existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_i]} = f_i, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_i]} = f_i, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

Así, se tiene que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente n puntos extremos del árbol X y que no contiene a ninguno de los puntos de ramificación de X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente n_1 puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a uno de los puntos de ramificación y que exactamente n_2 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto M está conformada precisamente de aquellos subconjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen ninguno de los puntos de ramificación del árbol X y contienen exactamente n puntos extremos, de los cuales n_1 puntos extremos son consecutivos un mismo punto de ramificación, y n_2 son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X.

Si n es un entero par, es sabido que existen $\frac{2k-n}{2}+1$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a $2k-n$. Se concluye que existen $\frac{2k-n}{2}+1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (1) es verdadera.

Si n es un entero impar, es sabido que existen $\frac{2k-n+1}{2}$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a $2k-n$. Se concluye que existen $\frac{2k-n+1}{2}$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (2) es verdadera. †

Teorema 3.28. *Sean X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$ y $k+1 \leq n \leq 2k$. Las siguientes proposiciones son verdaderas.*

(1) Si n es un número par, entonces existen $\frac{2k-n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

(2) Si n es un número impar, entonces existen $\frac{2k-n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables de X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Demostración. Sean n un entero no negativo tal que $k+1 \leq n \leq 2k$ y M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen exactamente n puntos extremos y a los dos puntos de ramificación. Observe que si $m = 2k-n$, entonces se tiene que $0 \leq m < k$. Ahora considere dos enteros no negativos, m_1 y m_2, tales que

$$m_1 + m_2 = m, \text{ y}$$

existen m_1 puntos extremos que no pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_1, existen m_2 puntos extremos que no pertenecen al conjunto M que son consecutivos al punto de ramificación r_2.

Numeremos el conjunto de puntos extremos como $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_1, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_2, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $1 \leq i \leq m_1$ y

(iv) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $k+1 \leq i \leq k+m_2$.

Denote por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X de manera que se cumpla todo lo siguiente. Dado que el conjunto N contiene n puntos extremos y deseamos construir un homeomorfismo del espacio X en sí mismo que mande el conjunto M en N, suponga que m_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ no pertenecen al conjunto denso N y m_2 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$ no pertenecen al conjunto denso N.

Consideremos una función biyectiva $\lambda : \{1,\ldots,2k\} \to \{1,\ldots,2k\}$ que posea las siguientes propiedades:

(i) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $1 \leq i \leq n_1$ y

(iv) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $k+1 \leq i \leq k+n_2$.

De los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9 se sabe que existen homeomorfismos

$$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k,$$

que satisfacen las siguientes condiciones

$$f_0(r_1) = r_{a(1)},\ f_0(r_2) = r_{a(2)},$$

$$f_i(e_i) = e_{\lambda(i)}, \text{ para cada } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$f_i(r_1) = r_{a(1)}, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k,$$

$$f_i(r_2) = r_{a(2)}, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k,$$

$$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}],$$

$$f_i(M \cap [r_1, e_i]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$f_i(M \cap [r_2, e_i]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

En virtud del Teorema 1.35 existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_i]} = f_i, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_i]} = f_i, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

Así, se tiene que $h(M) = N$. Por lo tanto, los conjuntos densos M y N pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.

Ahora, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente n puntos extremos y a los dos puntos de ramificación de X. Del Teorema 3.15 se sabe que exactamente n_1 puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos a uno de los puntos de ramificación y que exactamente n_2 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X, con $n_1 + n_2 = 2k - n$. Por lo tanto, la clase de equivalencia del conjunto M está conformada precisamente de aquellos subconjuntos densos y numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación del árbol X y a exactamente n puntos extremos, de los cuales n_1 puntos extremos son consecutivos un mismo punto de ramificación, y n_2 son consecutivos al otro punto de ramificación del árbol X, con $n_1 + n_2 = 2k - n$.

Si n es un entero par, es sabido que existen $\frac{2k-n}{2} + 1$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a $2k - n$. Se concluye que existen $\frac{2k-n}{2} + 1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (1) es verdadera.

Si n es un entero impar, es sabido que existen $\frac{2k-n+1}{2}$ pares distintos de enteros no negativos cuya suma es igual a $2k-n$. Se concluye que existen $\frac{2k-n+1}{2}$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen n puntos extremos. Por lo tanto, la proposición (2) es verdadera. †

Teorema 3.29. *Sea X un árbol que solamente contiene dos puntos de ramificación, de orden $k+1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si n es un entero no negativo tal que $0 \leq n \leq k$, entonces existen $n+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que están conformados de puntos ordinarios, exactamente un punto de ramificación y de exactamente n puntos extremos del árbol X con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X tales que cada uno contiene solamente uno de los puntos de ramificación del árbol X y n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$. Denotemos por r_1 al punto de ramificación del árbol X que pertenece al conjunto M y por r_2 al punto de ramificación que no pertenece al conjunto M. Numeremos el conjunto de puntos extremos del árbol X como sigue:

$$E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\},$$

de manera que para cada $1 \leq i \leq k$, el punto extremo e_i sea consecutivo al punto de ramificación r_1, y que para cada $k+1 \leq i \leq 2k$, el punto extremo e_i sea consecutivo al punto de ramificación r_2.

Al punto de ramificación del árbol X que pertenece al conjunto N, lo denotaremos por $r_{a(1)}$ y al punto de ramificación que no pertenece a N, lo denotaremos por $r_{a(2)}$.

Propiedad P0. *Los conjuntos densos M y N no contienen puntos extremos.*

Consideremos una numeración más del conjunto de puntos extremos como sigue:

$$E(X) = \{e_{m(i)} : 1 \leq m \leq 2k\},$$

de manera que el punto extremo $e_{m(i)}$ sea consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1 \leq i \leq k$; y el punto $e_{m(i)}$ sea consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

En virtud de los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9, existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{m(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{m(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$, $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_0(M \cap [r_1, r_2]) = N \cap [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i(r_1) = r_{a(1)}$, $f_i(e_i) = e_{m(i)}$, para cada $1 \leq i \leq k$,

$f_i(M \cap [r_1, e_i]) = N \cap [r_{a(1)}, e_{m(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$,

$f_i(r_2) = r_{a(2)}$, $f_i(e_i) = e_{m(i)}$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$ y

$f_i(M \cap [r_2, e_i]) = N \cap [r_{a(2)}, e_{m(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

Del Teorema 1.35 se sabe que existe un homeomorfismo $h : X \to X$, tal que se cumple lo siguiente:

$h|_{[r_1, r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1, e_i]} = f_i$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$h|_{[r_2, e_i]} = f_i$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$.

De aquí que $h(M) = N$, por lo tanto M y N pertenecen a una misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Por lo tanto se tiene la siguiente contención:

$\{D : D$ es denso y numerable en X y satisface la propiedad P0$\} \subset [M]_{\sim}$.

Para evidenciar la otra contención, consideremos D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto denso M. Del Teorema 3.6 se tiene que el conjunto D contiene exactamente a uno de los puntos de ramificación del árbol X y ninguno de los puntos extremos de X pertenece al conjunto D. Esto implica que la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso y numerable en } X \text{ y satisface la propiedad P0}\}.$$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq k$.

Propiedad Pn. *Los conjuntos densos M y N contienen exactamente n puntos extremos.*

Dado que el conjunto M contiene n puntos extremos, se pueden hallar dos números enteros no negativos n_1 y n_2 cuya suma es n, $0 \leq n_1 \leq n$, $0 \leq n_2 \leq n$ y de modo que el conjunto M contiene n_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación r_1 y n_2 puntos extremos que son consecutivos al punto de ramificación r_2. Además, suponga que el conjunto denso N contiene n_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ y n_2 puntos extremos que son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$.

Suponga sin perder generalidad que el punto extremo e_i pertenece al conjunto denso M, para cada $i \in \{1, \ldots, n_1, k+1, \ldots, k+n_2\}$. Además, consideremos una numeración del conjunto de puntos extremos

$$E(X) = \{e_{m(i)} : 1 \leq i \leq 2k\},$$

de manera que el punto extremo $e_{m(i)}$ pertenece al conjunto denso N, para cada $i \in \{1, \ldots, n_1, k+1, \ldots, k+n_2\}$.

En virtud de los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9, existen homeomorfismos

$f_0 : [r_1, r_2] \to [r_{a(1)}, r_{a(2)}]$,

$f_i : [r_1, e_i] \to [r_{a(1)}, e_{m(i)}]$, para cada $1 \leq i \leq k$ y

$f_i : [r_2, e_i] \to [r_{a(2)}, e_{m(i)}]$, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$f_0(r_1) = r_{a(1)}$, $f_0(r_2) = r_{a(2)}$,

$f_0(M\cap[r_1,r_2]) = N\cap[r_{a(1)},r_{a(2)}]$,

$f_i(r_1) = r_{a(1)}$, $f_i(e_i) = e_{m(i)}$, para cada $1 \le i \le k$,

$f_i(M\cap[r_1,e_i]) = N\cap[r_{a(1)},e_{m(i)}]$, para cada $1 \le i \le k$,

$f_i(r_2) = r_{a(2)}$, $f_i(e_i) = e_{m(i)}$, para cada $k+1 \le i \le 2k$ y

$f_i(M\cap[r_2,e_i]) = N\cap[r_{a(2)},e_{m(i)}]$, para cada $k+1 \le i \le 2k$.

Del Teorema 1.35 se sabe que existe un homeomorfismo $h : X \to X$, tal que se cumple lo siguiente:

$h|_{[r_1,r_2]} = f_0$,

$h|_{[r_1,e_i]} = f_i$, para cada $1 \le i \le k$ y

$h|_{[r_2,e_i]} = f_i$, para cada $k+1 \le i \le 2k$.

De aquí que $h(M) = N$, y por lo tanto M y N pertenecen a una misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Es decir, que se tiene la siguiente contención

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y satisface la propiedad } Pn\} \subset [M]_\sim.$$

Para mostrar la otra contención, suponga que D es un subconjunto denso y numerable del árbol X, el cual pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente uno de los puntos de ramificación del árbol X y a exactamente n puntos extremos. Además, del Teorema 3.15 se sabe que n_1 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto D son consecutivos al punto de ramificación que pertenece al conjunto denso D, y se sabe que n_2 de los puntos extremos que pertenecen al conjunto denso D son consecutivos al punto de ramificación de X que no pertenece al conjunto denso D. Por lo tanto, se tiene que la clase de equivalencia del conjunto denso M es la siguiente:

$$\{D : D \text{ es denso numerable en } X \text{ y satisface la propiedad } Pn\}.$$

Adicionalmente, note que existen $n+1$ combinaciones distintas de números naturales cuya suma es igual a n. Por lo tanto existen $n+1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables que contienen exactamente uno de los puntos de ramificación y a n puntos extremos. †

Teorema 3.30. *Sea X un árbol que solamente contiene dos puntos de ramificación, de orden $k+1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si n es un entero no negativo tal que $k+1 \leq n \leq 2k$, entonces existen $2k-n+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que están conformados de puntos ordinarios, exactamente un punto de ramificación y de exactamente n puntos extremos del árbol X con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Sean M y N dos subconjuntos densos y numerables del árbol X tales que cada uno contiene solamente uno de los puntos de ramificación del árbol X y n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$. Denotemos por r_1 al punto de ramificación del árbol X que pertenece al conjunto M y por r_2 al punto de ramificación que no pertenece al conjunto M.

Note que si $m = 2k-n$ se tiene que $0 \leq m < k$. Dado que M contiene n puntos extremos, se pueden hallar dos números naturales m_1 y m_2 tales que $m_1 + m_2 = m$, existen exactamente m_1 puntos extremos que son consecutivos al punto de ramificación r_1 los cuales no pertenecen al conjunto M, existen exactamente m_2 puntos extremos que son consecutivos al punto de ramificación r_2 los cuales no pertenecen al conjunto denso M y $1 \leq m_1 \leq k$ y $1 \leq m_2 \leq k$.

Numeremos el conjunto de puntos extremos $E(X) = \{e_i : 1 \leq i \leq 2k\}$ de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

(i) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_1, para cada $1 \leq i \leq k$,

(ii) el punto e_i es consecutivo al punto de ramificación r_2, para cada $k+1 \leq i \leq 2k$,

(iii) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $k-m_1 < i \leq k$ y

(iv) el punto e_i no pertenece al conjunto M, para cada $2k-m_2<i\leq 2k$.

Denote por $r_{a(1)}$ y $r_{a(2)}$ a los puntos de ramificación del árbol X. Suponga que m_1 puntos extremos consecutivos al punto de ramificación $r_{a(1)}$ no pertenecen al conjunto N y que m_2 puntos que son consecutivos al punto de ramificación $r_{a(2)}$ tampoco pertenecen al conjunto denso N.

Consideremos una función biyectiva $\lambda : \{1,\ldots,2k\}\to\{1,\ldots,2k\}$ que posea las siguientes propiedades:

(i) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(1)}$, para cada $1\leq i\leq k$,

(ii) el punto $e_{\lambda(i)}$ es consecutivo al punto de ramificación $r_{a(2)}$, para cada $k+1\leq i\leq 2k$,

(iii) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $k-n_1<i\leq k$ y

(iv) el punto $e_{\lambda(i)}$ no pertenece al conjunto N, para cada $2k-n_2<i\leq 2k$.

En virtud de los Teoremas 3.7, 3.8 y 3.9, existen homeomorfismos

$$f_0:[r_1,r_2]\to[r_{a(1)},r_{a(2)}],$$

$$f_i:[r_1,e_i]\to[r_{a(1)},e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1\leq i\leq k \text{ y}$$

$$f_i:[r_2,e_i]\to[r_{a(2)},e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1\leq i\leq 2k$$

que satisfacen las siguientes propiedades:

$$f_0(r_1)=r_{a(1)},\ f_0(r_2)=r_{a(2)},$$

$$f_0(M\cap[r_1,r_2])=N\cap[r_{a(1)},r_{a(2)}],$$

$$f_i(r_1)=r_{a(1)},\ f_i(e_i)=e_{\lambda(i)}, \text{ para cada } 1\leq i\leq k,$$

$$f_i(M\cap[r_1,e_i])=N\cap[r_{a(1)},e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } 1\leq i\leq k,$$

$$f_i(r_2)=r_{a(2)},\ f_i(e_i)=e_{\lambda(i)}, \text{ para cada } k+1\leq i\leq 2k \text{ y}$$

$$f_i(M\cap[r_2,e_i])=N\cap[r_{a(2)},e_{\lambda(i)}], \text{ para cada } k+1\leq i\leq 2k.$$

Del Teorema 1.35 se sabe que existe un homeomorfismo $h : X \to X$, tal que se cumple lo siguiente:

$$h|_{[r_1,r_2]} = f_0,$$

$$h|_{[r_1,e_i]} = f_i, \text{ para cada } 1 \leq i \leq k \text{ y}$$

$$h|_{[r_2,e_i]} = f_i, \text{ para cada } k+1 \leq i \leq 2k.$$

De aquí que $h(M) = N$, y por lo tanto M y N pertenecen a una misma clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1. Es decir, que todos los conjuntos densos y numerables del árbol X que contengan exactamente un punto de ramificación y exactamente n puntos extremos, con $k < n \leq 2k$, de modo que m_1 puntos extremos que son consecutivos a un punto de ramificación no pertenecen a dicho conjunto denso, m_2 puntos extremos que son consecutivos al otro punto de ramificación no pertenecen a dicho conjunto denso y la suma de los números naturales m_1 y m_2 es igual a $2k - n$, pertenecen a la clase de equivalencia determinada por la relación $\sim$ definida en 3.1 del conjunto denso y numerable M

Para mostrar la otra contención, considere D un subconjunto denso y numerable del árbol X que pertenece a la clase de equivalencia del conjunto M. Del Teorema 3.6 se sabe que el conjunto denso D contiene exactamente un punto de ramificación y a exactamente n de los puntos extremos de X. Además, del Teorema 3.15 se sigue que m_1 de los puntos extremos que son consecutivos a un punto de ramificación no pertenecen al conjunto D, y que exactamente m_2 de los puntos extremos que son consecutivos al otro punto de ramificación no pertenecen al conjunto denso D, de modo que $m_1 + m_2 = 2k - n$. Por lo tanto, se tiene que la clase de equivalencia del conjunto denso M es el conjunto:

$$\{D : D \text{ es denso numerable de } X \text{y posee la propiedad } Pn\}$$

Dado que existen $m+1$ pares de números naturales mayores o iguales que uno y menores o iguales a k cuya suma es igual a m, se tiene que si $k+1 \leq n \leq 2k$, entonces existen $(2k-n)+1$ clases de equivalencia distintas de conjuntos densos y numerables que contienen n puntos extremos y un punto de ramificación. †

Teorema 3.31. *Sea X un árbol que contiene solamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Existen $(k+1)^2$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables que contienen solamente un punto de ramificación, con respecto a la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. Del Teorema 3.29, se sabe que para cada $0 \leq n \leq k$, existen $n+1$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables que contienen solamente un punto de ramificación y n puntos extremos. Además, del Teorema 3.30 se sabe que si $k+1 \leq n \leq 2k$, entonces existen $(2k-n)+1$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables que contienen solamente un punto de ramificación y n puntos extremos.

Observe que cuando $k+1 \leq n \leq 2k$ ocurre que $0 \leq 2k-n < k$. Esto implica que para cada $k+1 \leq n \leq 2k$ existe un único entero no negativo m tal que $0 \leq m < k$ de modo que, si M es un conjunto denso y numerable del árbol X que contiene exactamente un punto de ramificación y exactamente n puntos extremos, entonces existen exactamente $(2k-n)+1$ clases de equivalencia de conjuntos densos con dicha propiedad. De aquí que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables que contienen solamente un punto de ramificación es

$$2\Big(\sum_{n=0}^{k-1} n+1\Big)+(k+1).$$

Si cambiamos el índice haciendo $n+1=m$, entonces se obtiene que la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} 2\Big(\sum_{m=1}^{k} m\Big)+(k+1) &= 2\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= k(k+1)+(k+1) \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, un árbol X que solamente contiene dos puntos de ramificación, cada uno de ellos de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$, posee $(k+1)^2$ clases de equivalencia de conjuntos densos y numerables que contienen a exactamente uno de los puntos de ramificación, con respecto de la relación $\sim$ definida en 3.1. †

Teorema 3.32. *Sea X un árbol que contiene exactamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden $k+1$, para algún $k \geq 2$. Existen exactamente $\frac{1}{2}(k^2+3k)+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación, con respecto de la relación $\sim$ definida en 3.1.*

Demostración. La prueba la haremos en dos casos, el primero cuando k es par, y el segundo cuando k es impar.

Caso 1. *El número natural k es par.*

Del Teorema 3.25 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por A al conjunto de todos los enteros no negativos pares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es par, es

$$\left(\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)+\frac{k}{2}+1. \tag{3.1}$$

Por otra parte, del Teorema 3.27 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{2k-n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es par. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{3.2}$$

De las expresiones 3.1 y 3.2 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen una cantidad par de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big]+\frac{k}{2}+1. \tag{3.3}$$

Del Teorema 3.25 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por B al conjunto de todos los enteros no negativos impares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \tag{3.4}$$

Por otra parte, del Teorema 3.27 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{(2k-n)+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es impar. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \tag{3.5}$$

De las expresiones 3.4 y 3.5 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen una cantidad impar de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\Big(\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big)\Big]. \tag{3.6}$$

Para obtener el total de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que no contienen puntos de ramificación basta sumar las expresiones 3.3 y 3.6, es decir:

$$\begin{aligned} & 2\left[\left(\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)\right]+\frac{k}{2}+1+2\left[\left(\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)\right] \\ = \quad & 2\left[\left(\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)+\left(\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)\right]+\frac{k}{2}+1. \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Dado que los conjuntos A y B contienen $\frac{k}{2}$ elementos y su unión es igual al conjunto $\{0,\ldots,k-1\}$, se sigue que la expresión 3.7 es igual a:

$$\begin{aligned} & 2\left[\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sum_A n+\frac{k}{4}+\frac{1}{2}\sum_B n\right]+\frac{k}{2}+1 \\ = \quad & 2\left[\frac{3k}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1} n\right]+\frac{k}{2}+1 \\ = \quad & 2\left[\frac{3k}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(k-1)k}{2}\right]+\frac{k}{2}+1 \\ = \quad & \frac{3k}{2}+\frac{(k-1)k}{2}+\frac{k}{2}+1 \\ = \quad & \frac{1}{2}(3k+k^2-k+k)+1 \\ = \quad & \frac{1}{2}(k^2+3k)+1 \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Caso 2. *El número natural k es impar.*

Del Teorema 3.25 se sabe que para cada entero $0\leq n\leq k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por A al conjunto de todos los enteros no negativos pares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0\leq n\leq k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right). \qquad (3.9)$$

Por otra parte, del Teorema 3.27 se sabe que para cada entero $k+1\leq n\leq 2k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{(2k-n)}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0\leq 2k-n<k$ y es par. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no

contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{3.10}$$

De las expresiones 3.9 y 3.10 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen una cantidad par de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)\Big] \tag{3.11}$$

Del Teorema 3.25 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por B al conjunto de todos los enteros no negativos impares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}. \tag{3.12}$$

Por otra parte, del Teorema 3.27 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{(2k-n)+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es impar. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales no contienen puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right). \tag{3.13}$$

De las expresiones 3.12 y 3.13 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen una cantidad impar de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big]+\frac{k+1}{2}. \tag{3.14}$$

Para obtener el total de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que no contienen puntos de ramificación basta sumar las expresiones 3.11 y 3.14, así, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & 2\left[\textstyle\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]+2\left[\textstyle\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & 2\left[\textstyle\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\textstyle\sum_{n\in B}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]+\frac{k+1}{2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dado que el conjunto A contiene $\frac{k+1}{2}$ elementos, el conjunto B contiene $\frac{k-1}{2}$ elementos y su unión es igual al conjunto $\{0,\ldots,k-1\}$, se sigue que la expresión 3.15 es igual a:

$$\begin{aligned} = \quad & 2\Big[\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{A}n+\Big(\frac{1}{2}\Big)\frac{k-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{B}n\Big]+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & 2\Big[\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1}n\Big]+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & k+1+\frac{k-1}{2}+\frac{(k-1)k}{2}+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & \frac{3}{2}(k+1)+\frac{k-1}{2}(k+1) \\ = \quad & \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ = \quad & \frac{1}{2}(k^2+3k)+1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por lo tanto, se tiene lo deseado. †

Teorema 3.33. *Sea X un árbol que contiene exactamente dos puntos de ramificación, cada uno de orden* $k+1$, *para algún* $k\geq 2$. *Existen exactamente* $\frac{1}{2}(k^2+3k)+1$ *clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación, con respecto de la relación* $\sim$ *definida en 3.1.*

Demostración. La prueba la haremos en dos casos, el primero cuando k es par, y el segundo cuando k es impar.

Caso 1. *El número natural k es par.*

Del Teorema 3.26 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por A al conjunto de todos los enteros no negativos pares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es par, es

$$\Big(\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big)+\frac{k}{2}+1. \tag{3.17}$$

Por otra parte, del Teorema 3.28 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{2k-n}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es par. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big) \tag{3.18}$$

De las expresiones 3.17 y 3.18 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen una cantidad par de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big]+\frac{k}{2}+1. \tag{3.19}$$

Del Teorema 3.26 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por B al conjunto de todos los enteros no negativos impares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \tag{3.20}$$

Por otra parte, del Teorema 3.28 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{(2k-n)+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es impar. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \tag{3.21}$$

De las expresiones 3.20 y 3.21 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen una cantidad impar de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big]. \tag{3.22}$$

Para obtener el total de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que contienen a los dos puntos de ramificación basta sumar las expresiones 3.19 y 3.22, es decir:

$$\begin{aligned} & 2\Big[\Big(\textstyle\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big)\Big]+\frac{k}{2}+1+2\Big[\Big(\textstyle\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big)\Big] \\ = \quad & 2\Big[\Big(\textstyle\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big)+\Big(\textstyle\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big)]+\frac{k}{2}+1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dado que los conjuntos A y B contienen $\frac{k}{2}$ elementos y su unión es igual al conjunto $\{0,\ldots,k-1\}$, se sigue que la expresión 3.23 es igual a:

$$\begin{aligned} & 2\left[\tfrac{k}{2}+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_A n+\tfrac{k}{4}+\tfrac{1}{2}\sum_B n\right]+\tfrac{k}{2}+1 \\ = \quad & 2\left[\tfrac{3k}{4}+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{n=0}^{k-1} n\right]+\tfrac{k}{2}+1 \\ = \quad & 2\left[\tfrac{3k}{4}+\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{(k-1)k}{2}\right]+\tfrac{k}{2}+1 \\ = \quad & \tfrac{3k}{2}+\tfrac{(k-1)k}{2}+\tfrac{k}{2}+1 \\ = \quad & \tfrac{1}{2}(3k+k^2-k+k)+1 \\ = \quad & \tfrac{1}{2}(k^2+3k)+1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Caso 2. *El número natural k es impar.*

Del Teorema 3.26 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por A al conjunto de todos los enteros no negativos pares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{3.25}$$

Por otra parte, del Teorema 3.28 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es par, existen exactamente $\frac{(2k-n)}{2}+1$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es par. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es par, es

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{3.26}$$

De las expresiones 3.25 y 3.26 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que no contienen puntos de ramificación y que contienen una cantidad par de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in A}\Big(\frac{n}{2}+1\Big)\Big] \tag{3.27}$$

Del Teorema 3.26 se sabe que para cada entero $0 \leq n \leq k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{n+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos. Denotemos por B al conjunto de todos los enteros no negativos impares que son menores que k. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $0 \leq n \leq k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)+\frac{k+1}{2}. \tag{3.28}$$

Por otra parte, del Teorema 3.27 se sabe que para cada entero $k+1 \leq n \leq 2k$ tal que n es impar, existen exactamente $\frac{(2k-n)+1}{2}$ clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y exactamente n puntos extremos. Además, note que $2k-n$ cumple que $0 \leq 2k-n < k$ y es impar. Así se tiene que la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X los cuales contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen exactamente n puntos extremos, para algún $k+1 \leq n \leq 2k$ que es impar, es

$$\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \tag{3.29}$$

De las expresiones 3.28 y 3.29 se tiene que, la cantidad de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación y que contienen una cantidad impar de puntos extremos es igual a

$$2\Big[\sum_{n\in B}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big]+\frac{k+1}{2}. \tag{3.30}$$

Para obtener el total de clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que contienen a los dos puntos de ramificación basta sumar las expresiones 3.27 y 3.30, así, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & 2\left[\sum_{n\in A}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\right]+2\left[\sum_{n\in B}\left(\tfrac{n+1}{2}\right)\right]+\tfrac{k+1}{2} \\ = \quad & 2\left[\sum_{n\in A}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)+\sum_{n\in B}\left(\tfrac{n+1}{2}\right)\right]+\tfrac{k+1}{2}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dado que el conjunto A contiene $\frac{k+1}{2}$ elementos, el conjunto B contiene $\frac{k-1}{2}$ elementos y su unión es igual al conjunto $\{0,\ldots,k-1\}$, se sigue que la expresión 3.31 es igual a:

$$\begin{aligned} = \quad & 2\Big[\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{A}n+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{B}n\Big]+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & 2\Big[\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1}n\Big]+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & k+1+\frac{k-1}{2}+\frac{(k-1)k}{2}+\frac{k+1}{2} \\ = \quad & \frac{3}{2}(k+1)+\frac{k-1}{2}(k+1) \\ = \quad & \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ = \quad & \frac{1}{2}(k^2+3k)+1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo tanto, se tiene lo deseado. †

Teorema 3.34. *Para cada número natural $k\geq 2$, existe un árbol X tal que el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X es igual a $2k^2+5k+3$.*

Demostración. Sea X un árbol que contiene exactamente dos puntos de ramificación, cuyo orden es igual a $k+1$. Del Teorema 3.32 se sabe que existen:

$$\frac{1}{2}(k^2+3k)+1 \tag{3.33}$$

clases de equivalencia de conjuntos denso numerables que no contienen puntos de ramificación. Además, del Teorema 3.33 se sabe que existen:

$$\frac{1}{2}(k^2+3k)+1 \tag{3.34}$$

clases de equivalencia de conjuntos denso numerables del árbol X que contienen a los dos puntos de ramificación. Por último, del Teorema 3.31 se tiene que existen:

$$(k+1)^2 \tag{3.35}$$

clases de equivalencia de conjuntos denso numerables de X que contienen exactamente a uno de los puntos de ramificación del árbol X. Así, para obtener el grado de homogeneidad con respecto a conjuntos denso numerables del árbol X basta sumar las expresiones 3.33, 3.34 y 3.35. De aquí que:

$$\begin{aligned} g_{HDN}(X) &= \left(\frac{1}{2}(k^2+3k)+1\right)+\left(\frac{1}{2}(k^2+3k)+1\right)+(k+1)^2 \\ &= k^2+3k+2+k^2+2k+1 \\ &= 2k^2+5k+3. \end{aligned}$$

Luego, se tiene lo deseado. †

Bibliografía

[1] A. ILLANES Y S. B. NADLER, JR., *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[2] A. V. ARHANGEL'SKII AND J. VAN MILL, *On the cardinality of countable dense homogeneous spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 11, 4031-4038.

[3] B. FITZPATRICK, JR. AND N. F. LAUER, *Densely homogeneous spaces I.* Houston J. Math. **13** (1987), no. 1, 19-25.

[4] B. FITZPATRICK, JR. AND H. X. ZHOU, *Densely homogeneous spaces II*. Houston J. Math. **14** (1988), no. 1, 57-68.

[5] C. L. HAGOPIAN, *A characterization of solenoids,* Pac. J. Math., **68** (1977) 425-435.

[6] F. HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, *Teoría de conjuntos, una introducción,* tercera edición, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 2011.

[7] G. S. UNGAR, *Countable dense homogeneity and n-homogeneity*, Fund. Math. **99** (1978), 155-160.

[8] G. S. UNGAR, *On all kinds of homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), 393-400.

[9] J. R. MUNKRES, *Topology: A First Course,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersy, 1975.

[10] J. VAN MILL, *A countable dense homogeneous space with a dense rigid open subspace*. Fund. Math. **201** (2008), no. 1, 91-98.

[11] J. VAN MILL, *On countable dense and strong n-homogeneity*. Fund. Math. **214** (2011), no. 3, 215-239.

[12] J. VAN MILL, *On countable dense and n-homogeneity*. Canad. Math. Bull. **56** (2013), no. 4, 860-869.

[13] J. VAN MILL, *Strong local homogeneity and coset spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, No. 8, (2005), 2243-2249.

[14] J. VAN MILL, *Strong local homogeneity does not imply countable dense homogeneity*. Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), no. 1, 143-148.

[15] K. KURATOWSKI, *Topology,* Volumen II. Academic Press Inc. Pland, 1968.

[16] P. FLETCHER, R. A. MCCOY, *Galois spaces, representable spaces and strongly locally homogeneous spaces,* Fundamenta Mathematicae, **73**(1971) 85-91.

[17] R. BENNETT, *Countable dense homogeneous spaces,* Fundamenta Mathematicae, **74** (1972) 189-194.

[18] R. ENGELKING, *General topology,* segunda edición, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[19] R. HERNÁNDEZ-GUTIÉRREZ, M. HRUŠÁK AND J. VAN MILL, *Countable dense homogeneity and λ-sets*. Fund. Math. **226** (2014), no. 2, 157-172.

[20] S. B. NADLER, JR., *Continuum theory: an introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[21] S. WATSON AND P. SIMON, *Open subspaces of countable dense homogeneous spaces*, Fund. Math. **141** (1992), 101-108.