BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"La integral de Henstock-Kurzweil desde el punto de vista de la teoría de los espacios de Banach"

T E S I S

presentada para obtener el título de

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta

Luis Ángel Gutiérrez Méndez

Asesores de la Tesis

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Junio de 2015

Agradecimiento

En algunas ocasiones las circunstacias económicas son limitantes para alcanzar ciertos logros académicos. Es decir, si una persona desea prepararse académicamente, en general, no será posible si su situación económica no es la adecuada. Más aún, si hay personas que dependen económicamente de ella. Por tal motivo, quiero agradecer públicamente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme proporcionado una beca durante el tiempo que duró mi proyecto doctoral. Gracias a esta beca pude concentrarme plenamente en mis estudios y, de esta manera, alcanzar uno de los más grandes anhelos de mi vida profesional.

Por todo esto y más, siempre estaré al servicio de la sociedad.

Simbología

$\mathbb{N}$	—	El conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$	—	El conjunto de los números reales.
$\mathcal{C}^+(A)$	—	$\{\hat{\varepsilon} : A \to \mathbb{R} \mid \hat{\varepsilon}$ es continuo en A y $\hat{\varepsilon}(x) > 0,$ para todo $x \in A\}$.
$[a,b]$	—	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
$C[a,b]$	—	$\{F : [a,b] \to \mathbb{R} \mid F$ es continua en $[a,b]\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
$\mathcal{B}_c[a,b]$	—	$\{F \in C[a,b] \mid F(a) = 0\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
$BV[a,b]$	—	$\{g : [a,b] \to \mathbb{R} \mid g$ es de variación acotada en $[a,b]\}$.
$NBV[a,b]$	—	$\{g \in BV[a,b] \mid g(a) = 0$ y $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0),$ para todo $x_0 \in (a,b)\}$
l_∞	—	$\{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid (x_n)$ es una sucesión acotada$\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
c	—	$\{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid (x_n)$ es una sucesión convergente$\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
c_0	—	$\{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
l_p	—	$\{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\}$ con la $\|\cdot\|_p$-norma, siendo $1 \leq p \leq \infty$.
K	—	Espacio de Hausdorff compacto.
$C(K)$	—	$\{F : K \to \mathbb{R} \mid F$ es continua en $K\}$ con la $\|\cdot\|_\infty$-norma.
$X \cong Y$	—	Espacios isométricamente isomorfos.
$X \simeq Y$	—	Espacios isomorfos.
$L(X,Y)$	—	$\{T : X \to Y \mid T$ es un operador lineal$\}$.
$B(X,Y)$	—	$\{T : X \to Y \mid T$ es un operador lineal acotado$\}$.
$K(X,Y)$	—	$\{T : X \to Y \mid T$ es un operador lineal compacto$\}$.
$WK(X,Y)$	—	$\{T : X \to Y \mid T$ es un operador lineal débilmente compacto$\}$.
$DP(X,Y)$	—	$\{T : X \to Y \mid T$ es un operador lineal completamente continuo$\}$.
$(X, \|\cdot\|)$	—	Espacio normado (Banach) haciendo énfasis en su norma.
$\tau_{\|\cdot\|}$	—	La topología generada por la norma (topología fuerte) de $(X, \|\cdot\|)$.
τ_w	—	La topología débil del espacio $(X, \|\cdot\|)$.
X^*	—	El dual topológico de X.
$M^\perp$	—	$\{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0,$ para cada $x \in M\}$, donde $M \subset X$.

$[f]$	—	$\{g : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f = g$ en $[a,b],$ casi donde sea$\}$.
$\mathcal{HK}[a,b]$	—	$\{[f] \,:\, f$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]\}$.
$\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$	—	La completación del espacio $\mathcal{HK}[a,b]$ bajo la norma de Alexiewicz.

Introducción

Kurzweil [36] en el año 1957 y Henstock [24] en el año 1961 definen, de manera independiente, una integral. Estas integrales son equivalentes para funciones reales definidas en un intervalo compacto. Debido a esto, algunos autores la llaman **integral de Henstock-Kurzweil**, aunque no es un nombre universal ya que también se le conoce como:

Integral de Riemann generalizada. Se debe a que es una integral de tipo Riemann con la cual se extiende el espacio de las funciones Riemann integrables. Es decir, es una integral que está definida en términos de sumas de Riemann, cuyo espacio de funciones integrables contiene propiamente al espacio de las funciones Riemann integrables.

Integral de Henstock. Se debe a que Henstock fue el primero en realizar un estudio sistemático de esta integral.

Integral de Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil. Se debe a que esta integral es equivalente a las integrales de Denjoy y Perron. Precisamente, Henstock reconoció que esta integral es equivalente a la integral de Perron y, por tanto, a la integral de Denjoy. Aunque una demostración de esto último fue descubierta a finales de la década de los ochenta.

Integral medidora. Se debe a que la definición clásica de esta integral emplea particiones etiquetadas subordinadas por una función medidora para formar las sumas de Riemann. Es decir, las sumas de Riemann consideradas en esta integral son del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

donde f es una función real definida en $[a,b]$, $\{x_0,\ldots,x_n\}$ es una partición clásica de $[a,b]$ y, para todo $i=\overline{1,n}$, $x_{i-1}-\delta(t_i)\leq t_i\leq x_i+\delta(t_i)$ siendo δ una función positiva (función medidora) definida en $[a,b]$.

En esta tesis hacemos referencia a esta integral como la integral de Henstock-Kurzweil. Algunas de las propiedades más importantes que tiene esta integral son:

a) Toda función Henstock-Kurzweil integrable es Lebesgue medible.

b) Toda función Lebesgue integrable en un intervalo compacto es Henstock-Kurzweil integrable en el mismo intervalo. Además, los valores de las integrales coinciden.

c) Proporciona una solución general al problema de las primitivas.
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable, excepto quizá en un conjunto a lo más numerable, en $[a,b]$, entonces f' es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,x]$ y $\int_a^x f' = f(x)-f(a)$, para todo $x\in[a,b]$.

d) Se puede calcular la integral de una función Henstock-Kurzweil integrable a través de un límite de integrales.
Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ si y sólo si existe $A\in\mathbb{R}$ tal que para todo $c\in(a,b)$ la restricción de f a $[a,c]$ es Henstock-Kurzweil integrable y $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f = A$. En este caso, $A=\int_a^b f$.

Además, el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables tiene teoremas de convergencia similares a los del espacio de funciones Lebesgue integrables, ya que cuenta con un teorema de convergencia acotada, monótona, dominada y con un lema de Fatou. También tiene un teorema de convergencia más general que estos: *teorema de equi-integrabilidad* (conocido también como el teorema de la convergencia uniforme de Henstock).

Dado que la integral de Henstock-Kurzweil es una integral relativamente nueva y, teniendo en consideración sus propiedades, algunos investigadores han centrado su atención en esta integral. Entre algunas líneas de investigación que han considerado estos investigadores están las siguientes:

I) Analizar, dentro del marco de los espacios normados, el espacio de las funciones reales Henstock-Kurzweil integrables.

II) Investigar que propiedades tiene la integral de Henstock-Kurzweil al extenderla a funciones vectoriales, en particular a funciones que toman valores en un espacio de Banach.

III) Analizar, dentro del marco de los espacios vectoriales topológicos, el espacio de las funciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables.

En general, los resultados originales de esta tesis están incluidos en la primera de las líneas de investigación mencionadas anteriormente. Es decir, estos resultados son concernientes al espacio $\mathcal{HK}[a,b]$ dotado con la norma de Alexiewicz

$$||f||_A = \sup_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x f \right|.$$

Donde $\mathcal{HK}[a,b]$ es el espacio cociente que resulta al definir en

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es Henstock-Kurzweil integrable en } [a,b]\}$$

la relación de equivalencia $\sim$ dada por $f \sim g$ *si y sólo si* $f = g$ *excepto en un conjunto de medida Lebesgue cero.*

La motivación de estre trabajo de tesis se debe a lo siguiente:

a) Dado que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es un espacio de Banach, este resulta ser deficiente desde el punto de vista de la teoría de los espacios normados. En el sentido de que la mayoría de los resultados que se tienen en esta teoría asumen la completés de estos espacios. Lo anterior no excluye la posibilidad de que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ cumpla con algunas propiedades que también son de interés en la teoría de los espacios normados. Por tanto, investigamos cuales de estas propiedades se tienen en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$.

b) Al no ser $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ un espacio de Banach es natural centrar nuestra atención en su completación, la cual denotamos por $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. En este caso, demostramos algunas propiedades relevantes de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ como un espacio normado.

c) $\mathcal{HK}[a,b]$ dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz es un espacio ultrabornológico y por tanto tonelado. Por lo cual, en dicho espacio se verifican algunos teoremas fundamentales del análisis funcional, como el teorema de la gráfica cerrada y el principio del acotamiento uniforme. Al tener en consideración que $L_1[a,b]$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{HK}[a,b]$, nos vimos motivados a investigar si $L_1[a,b]$ dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz es ultrabornológio.

Con base en lo anterior, y con el objetivo de hacer este trabajo de tesis lo más autocontenido posible, hemos organizado este trabajo de tesis en cuatro capítulos:

Capítulo 1. En este capítulo se enuncian algunos conceptos de la teoría de los espacios normados que son empleados en los capítulos principales de esta tesis: capítulos 3 y 4. En la **sección 1.1** se consideran a las topologías débil y débil* y algunos conceptos y resultados que se tienen para estas. En la **sección 1.2** se consideran a los operadores débilmente compactos y completamente continuos, y las propiedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, $*$-Dunford-Pettis, aproximación y aproximación acotada. En la **sección 1.3** se consideran diferentes tipos de bases de Schauder y se menciona la relación que existe entre estas bases y las propiedades de aproximación y aproximación acotada. En la **sección 1.4** se considera la importancia que tienen los isomorfismos e isomorfismos isométricos, y técnicas para analizar la estructura algebraica y topológica de los espacios normados. Hacemos hincapié en que este capítulo sólo es de preliminares y que no existe ninguna aportación de parte de nosotros a dicha teoría.

Capítulo 2. En este capítulo se proporciona un panorama general de los resultados básicos e importantes de la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil. En la **sección 2.1** se enuncian las definiciones de las integrales de Kurzweil y Henstock, la equivalencia de estas integrales y la relación que tiene esta con las integrales de Riemann y Lebesgue. En la **sección 2.2** se mencionan algunas propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil. En la **sección 2.3** se enuncia el teorema fundamental del cálculo. En la **sección 2.4** se mencionan algunos teoremas de convergencia que se cumplen en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables, donde el teorema 2.4.2 es un resultado original de esta tesis. En la **sección 2.5** se menciona el lema de Saks-Henstock y la importancia que tiene este en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil. Todo el material expuesto en este capítulo se localiza en libros especializados en el tema, excepto el lema 2.4.1 y el teorema 2.4.2, resultados originales de esta tesis, los cuales están publicados en [12].

Capítulo 3. En este capítulo se hace un análisis dentro del marco de los espacios normados de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$. En la **sección 3.1** demostramos que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{HK}[a,b]$ es igual a la cardinalidad del conjunto de los números reales y que existe una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ que lo dota de una estructura de espacio de Banach. En la **sección 3.2** demostramos que la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es natural y tonelada. En la **sección 3.3** demostramos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia complementada de c_0 y una copia no complementada de l_1. Además, demostramos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no tiene las propiedades de Radon-Riesz, Schur y $*$-Dunford-Pettis, pero sí la propiedad de Dunford-Pettis y una versión fuerte de la propiedad $*$-Dunford-Pettis. Todos los resultados expuestos en este capítulo son resultados originales de esta tesis. Las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 están publicados en [22], las otras proposiciones se han enviado a una revista para su posible publicación.

Capítulo 4: En este capítulo se hace un análisis, dentro del marco de los espacios normados, de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. En la **sección 4.1** demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$. También, demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ contiene una copia complementada de c_0, tiene una base de Schauder y tiene las propiedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, aproximación y aproximación acotada. Además, demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ no es débilmente secuencialmente completo y no tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur. En la **sección 4.2** demostramos que todas las proposiciones de la sección 4.1 son válidas si las formulamos para $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. También, demostramos que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene una copia de l_∞ y tampoco copias complementadas de $L_1[a,b]$ ni de l_p, para todo $1 \leq p < \infty$. Además, demostramos que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado, no es reflexivo y no tiene bases de Schauder que sean incondicionales, ni acotadamente completas, ni reductoras. Para todo espacio de Banach E, demostramos que $K(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$ no es un subespacio complementado en $B(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$, ni isomorfo a ningún subespacio complementado de un espacio dual. Por último, demostramos que $L_1[a,b]$ dotado con la topología de Alexiewicz no es tonelado. Todos los resultados de este capítulo, excepto los teoremas 4.1.1 y 4.2.1, son resultados originales de esta tesis, los cuales están publicados en [20] y [21].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares: Teoría de los espacios normados

El objetivo de este capítulo es recordar algunos conceptos de la teoría de los espacios normados que son empleados en los capítulos principales de esta tesis: capítulos 3 y 4. Las demostraciones de la mayoría de los teoremas que se enuncian aquí se pueden consultar en libros especializados en el tema, como [1], [9] y [39]. Para aquellos teoremas que se localizan en artículos de investigación citamos las referencias bibliográficas.

1.1. Las topologías débil y débil*

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio normado y sea X^* el dual topológico de X. Si τ es una topología en X que cumple lo siguiente:*

a) Todo elemento $x^* \in X^*$ es continuo considerando la topología τ.

b) Si τ' es una topología en X que cumple el inciso anterior, entonces $\tau \subseteq \tau'$.

*Entonces a esta topología (la cual denotaremos por τ_w) se le llama **topología débil** de X.*

A una propiedad topológica que se esté considerando bajo la topología débil se le añadirá la palabra **débilmente**. Por ejemplo, *débilmente compacto*, *relativamente débilmente compacto*, etc.

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio normado, sea X^* el dual topológico de X y sea (x_n) una sucesión en X.*

a) (x_n) ***converge débilmente*** *a* $x \in X$ *(lo cual denotaremos por* $x_n \xrightarrow{\tau_w} x$*) si, para todo* $x^* \in X^*$*, la sucesión de escalares* (x^*x_n) *converge a* x^*x*.*

b) (x_n) *es* ***débilmente de Cauchy*** *si, para todo* $x^* \in X^*$*, la sucesión de escalares* (x^*x_n) *es de Cauchy.*

En todo espacio normado de dimensión algebraica finita, toda sucesión débilmente de Cauchy es débilmente convergente. Lo anterior no se cumple para algunos espacios normados de dimensión algebraica infinita.

Definición 1.1.3. *Un espacio normado* X *es* ***débilmente secuencialmente completo*** *si, toda sucesión débilmente de Cauchy en* X *es débilmente convergente.*

Dado que la topología débil de un espacio normado X está contenida en la topología fuerte de X, toda sucesión convergente en X es débilmente convergente. En general, el recíproco no se cumple.

Definición 1.1.4. *Un espacio normado* X *tiene la* ***propiedad de Schur***[1] *si, toda sucesión en* X *que converge débilmente, converge al mismo límite considerando la topología fuerte.*

Existe una propiedad más general que la de Schur, la cual enunciamos a continuación.

Definición 1.1.5. *Un espacio normado* X *tiene la* ***propiedad de Radon-Riesz***[2] *o la* ***propiedad de Kadets-Klee***[3] *si, toda sucesión* (x_n) *en* X *que converge débilmente a* $x \in X$ *y* $||x_n|| \to ||x||$*, la sucesión* (x_n) *converge a* x *considerando la topología fuerte.*

Todo espacio normado que tiene la propiedad de Schur tiene la propiedad de Radon-Riesz. En general, el recíproco no se cumple, siendo l_2 un ejemplo de ello.

A continuación enunciamos la definición de topología débil*.

[1] El nombre de esta propiedad se debe a que Schur ([45]) demostró que el espacio l_1 tiene tal propiedad.

[2] Este nombre se debe a que Radon ([41]), y Riesz ([42], [43]) demostraron que los espacios $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ con $1 < p < \infty$ tienen tal propiedad cuando (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida positiva.

[3] Este nombre se debe a que Kadets ([31], [32]) y Klee ([34]) usaron versiones de la propiedad de Radon-Riesz para demostrar que todos los espacios de Banach separables de dimensión algebraica infinita son homeomorfos entre sí.

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio normado y sea X^* el dual topológico de X. Si τ es una topología en X^* que cumple con lo siguiente:*

a) Para cada $x \in X$, el funcional lineal $T : X^* \to \mathbb{F}$ definido por $T(x^*) = x^*x$ es continuo con respecto a τ.

b) Si τ' es una topología en X^* que cumple con el inciso anterior, entonces $\tau \subseteq \tau'$.

Entonces a esta topología (la cual denotaremos por τ_{w^*}) se le llama ***topología débil**** *de X^*.*

A una propiedad topológica que se esté considerando bajo la topología débil* se le añadirá la expresión **débilmente***. Por ejemplo, *débilmente* compacto*, *relativamente débilmente* compacto*, etc.

Definición 1.1.7. *Sea X un espacio normado, sean X^* y X^{**} el dual y doble dual topológico de X, respectivamente, y sea Q el mapeo natural que va de X a X^{**}. Una sucesión (x_n^*) en X^** ***converge débilmente**** *a $0 \in X^*$ (lo cual denotaremos por $x_n^* \xrightarrow{\tau_{w^*}} 0$) si, para todo $x^{**} \in Q(X)$, la sucesión $(x^{**}x_n^*)$ converge a 0.*

Las topologías débil y débil* del dual topológico de un espacio normado X coinciden si y sólo si X es reflexivo. Por tanto, las topologías fuerte, débil y débil* del dual topológico de un espacio normado X coinciden si y sólo si X es de dimensión algebraica finita.

A continuación enunciamos dos teoremas que están en términos de la topología débil*.

Teorema 1.1.1. *Sea X un espacio normado y sea X^* el dual topológico de X. La topología débil* relativa a la bola unitaria cerrada del espacio X^* es inducida por una métrica si y sólo si X es separable.*

Teorema 1.1.2. *[29] Sea X un espacio normado y sea X^* el dual topológico de X. Si X tiene la propiedad $*$-Dunford-Pettis[4] y la bola unitaria cerrada del espacio X^* es débil* secuencialmente compacto, entonces X es un espacio de Schur.*

[4]Este concepto se define en la siguiente sección.

Finalizamos esta sección mencionando una caracterización de las sucesiones débilmente convergentes y débilmente de Cauchy del espacio $\mathcal{C}[a,b]$ dotado con la norma uniforme.

Teorema 1.1.3. *Sea (F_n) una sucesión en $\mathcal{C}[a,b]$ y sea $F \in \mathcal{C}[a,b]$.*

a) La sucesión (F_n) converge débilmente a F si y sólo si

- I) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, *para todo* $x \in [a,b]$, *y*
- II) *existe un* $M > 0$ *tal que* $||F_n||_\infty \leq M$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b) La sucesión (F_n) es débilmente de Cauchy si y sólo si

- I) $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ *existe, para todo* $x \in [a,b]$, *y*
- II) *existe un* $M > 0$ *tal que* $||F_n||_\infty \leq M$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Algunas clases de operadores lineales

En esta sección enunciamos dos tipos de operadores: operadores débilmente compactos y operadores completamente continuos. Además, enunciamos las propiedades de Dunford-Pettis, recíproca de Dunford-Pettis, $*$-Dunford-Pettis, aproximación y aproximación acotada.

Definición 1.2.1. *Sean X y Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal.*

*a) T es un **operador débilmente compacto** si, para todo conjunto acotado B de X, $T(B)$ es un conjunto relativamente débilmente compacto en Y.*

*b) T es un operador **completamente continuo**[5] o **Dunford-Pettis** si, para todo conjunto K débilmente compacto de X, $T(K)$ es un conjunto compacto en Y.*

Para todo par de espacios normados X y Y los conjuntos

$$WK(X,Y) = \{T : X \to Y \,|\, T \text{ es un operador débilmente compacto}\}$$

$$DP(X,Y) = \{T : X \to Y \,|\, T \text{ es un operador completamente continuo}\}$$

son espacios vectoriales bajo las operaciones usuales de funciones. En general, no existe una relación de contención entre los conjuntos $WK(X,Y)$ y $DP(X,Y)$.

[5]Este concepto fue establecido por Hilbert [26].

Definición 1.2.2. *Un espacio normado X tiene:*

*a) La **propiedad de Dunford-Pettis**[6] si, para todo espacio normado Y, cualquier operador débilmente compacto que va de X a Y es completamente continuo.*

*b) La **propiedad recíproca de Dunford-Pettis** si, para todo espacio normado Y, cualquier operador completamente continuo que va de X a Y es débilmente compacto.*

Ejemplos de espacios normados que tienen la propiedad de Dunford-Pettis y la propiedad recíproca de Dunford-Pettis son los espacios $\mathcal{C}(K)$.

A continuación enunciamos una formulación equivalente de la propiedad de Dunford-Pettis en términos de las propiedades intrínsicas del espacio normado en cuestión. *Un espacio normado X tiene la propiedad de **Dunford-Pettis** si, para toda sucesión (x_n) en X que converge débilmente a 0 y para toda sucesión (x_n^*) en X^* que converge débilmente a 0, la sucesión $(x_n^* x_n)$ converge a 0.* Si en la formulación anterior consideramos la topología débil* de X^* en lugar de su topología débil obtenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.3. *Un espacio normado X tiene la propiedad **$*$-Dunford-Pettis** si, para toda sucesión (x_n) en X que converge débilmente a 0 y para toda sucesión (x_n^*) en X^* que converge débilmente* a 0, la sucesión $(x_n^* x_n)$ converge a 0.*

Si un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis, o la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, entonces no necesariamente todo subespacio cerrado de X tiene tal propiedad. Aunque si el subespacio es complementado, entonces sí la tiene.

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio normado y sea M un subespacio cerrado de X. M es **complementado** en X si, existe un subespacio cerrado N de X tal que:*

a) $X = M + N$, es decir, $X = \{m + n : m \in M \text{ y } n \in N\}$.

[6] Este concepto fue establecido por Grothendieck ([19]) en honor a Dunford y Pettis quienes demostraron ([10]) que los espacios $L_1(S, \Sigma, \lambda)$ tienen tal propiedad cuando λ es la medida de Lebesgue sobre la σ-álgebra Σ de los subconjuntos Lebesgue medibles de un intervalo finito o infinito S en $\mathbb{R}^n$.

b) $M \cap N = \{0\}$.

Teorema 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach que tiene la propiedad de Dunford-Pettis (respectivamente, propiedad recíproca de Dunford-Pettis). Si Y es un subespacio complementado en X, entonces Y tiene la propiedad de Dunford-Pettis (respectivamente, propiedad recíproca de Dunford-Pettis).*

Cerramos esta sección enunciando las propiedades de aproximación y aproximación acotada.

Definición 1.2.5. *Un espacio normado X tiene la **propiedad de aproximación** si, para todo conjunto compacto K de X y para todo $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal acotado de rango finito $T : X \to X$ tal que $||T(x) - x|| < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Si además existe una constante t tal que $||T|| \leq t$, entonces se dice que X tiene la **propiedad de aproximación acotada**.*

Es claro que todo espacio normado que tiene la propiedad de aproximación acotada tiene la propiedad de aproximación. En general, el recíproco no se cumple[7].

1.3. Bases de Schauder

En esta sección enunciamos el concepto de base de Schauder y algunas clases de este tipo de bases: condicionales, incondicionales, reductoras y acotadamente completas. Además, mencionamos la relación que existe entre las bases de Schauder y las propiedades de aproximación y aproximación acotada.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n) \subset X$ es una **base de Schauder** para X si, para cada x en X, existe una sucesión única de escalares (α_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.*

Espacios de Banach que tienen una base de Schauder son el espacio c_0, los espacios l_p, donde $1 \leq p < \infty$, y el espacio $\mathcal{C}[a,b]$. En el ejemplo siguiente exhibimos una base de Schauder para el espacio $\mathcal{C}[0,1]$.

[7] Figiel y Johnson ([13]) demostraron que existen espacios de Banach separables dimensionalmente infinitos que tienen la propiedad de aproximación, pero que carecen de la propiedad de aproximación acotada.

Ejemplo 1.3.1. *Sea* $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathcal{C}[0,1]$ *definida de la manera siguiente: Para* $n = 0, 1$ *sea* $s_0(t) = 1$ *y* $s_1(t) = t$, *para todo* $t \in [0,1]$. *Para* $n \geq 2$ *sea*

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m \left[t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1\right)\right] & si \quad \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1, \\ 1 - 2^m \left[t - \left(\frac{2n-1}{2^m} - 1\right)\right] & si \quad \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1, \\ 0 & de\ otra\ forma, \end{cases}$$

donde $m \in \mathbb{N}$ *tiene la propiedad de que* $2^{m-1} < n \leq 2^m$. *De esta forma se tiene que* (s_n) *es una base de Schauder (conocida como la* ***base de Schauder clásica****) para el espacio* $\mathcal{C}[0,1]$.

A continuación enunciamos cuatro tipos de bases de Schauder.

Definición 1.3.2. *Sea* X *un espacio de Banach, sea* X^* *el dual topológico de* X *y sea* (x_n) *una base de Schauder para* X. *Para cada* $x^* \in X^*$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *sea* $||x^*||_{(m)}$ *la norma de la restricción de* x^* *a* $[\{x_n : n > m\}]$. *La base de Schauder* (x_n) *es* ***reductora*** *si,* $\lim_{m\to\infty} ||x^*||_{(m)} = 0$ *para todo* $x^* \in X^*$.

Definición 1.3.3. *Sea* X *un espacio de Banach y sea* (x_n) *una base de Schauder para* X. (x_n) *es* ***acotadamente completa*** *si, para toda sucesión de escalares* (α_n) *con la propiedad de que* $\sup_m ||\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n||$ *es finito, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *converge.*

Definición 1.3.4. *Sea* X *un espacio de Banach y sea* (x_n) *una base de Schauder para* X. (x_n) *es una* ***base incondicional***[8] *si, para todo* $x \in X$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *es incondicionalmente convergente. En caso contrario,* (x_n) *es una* ***base condicional****.*

Toda base de Schauder es incondicional ó condicional. Por otro lado, existen bases de Schauder reductoras que son condicionales o incondicionales y bases de Schauder acotadamente completas que son condicionales o incondicionales. Sin embargo, en general, no existe una relación entre las bases reductoras y acotadamente completas.

Ejemplo 1.3.2. *Sea* (e_n) *la sucesión de vectores unitarios standard.*

- *En* c_0 *la sucesión* (e_n) *es reductora, pero no acotadamente completa.*

[8]Este concepto se debe a James [28]. Sin embargo otros investigadores ya habían estudiado este tipo de bases antes que él. Uno de ellos fue Karlin [33] quien llamó a tales bases como **absolutas**.

- *En l_1 la sucesión (e_n) es acotadamente completa, pero no reductora.*
- *En l_p, siendo $1 < p < \infty$, la sucesión (e_n) es acotadamente completa y reductora.*

El teorema siguiente menciona la relación que existe entre las bases de Schauder y las propiedades de aproximación y aproximación acotada.

Teorema 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach. Si X tiene una base de Schauder, entonces tiene la propiedad de aproximación acotada.*

En general, el recíproco del teorema anterior no es válido. Es decir, existen espacios de Banach que tienen la propiedad de aproximación acotada pero no tienen bases de Schauder[9].

1.4. Isomorfismos e isomorfismos isométricos

En esta sección enunciamos los conceptos de isomorfismo e isomorfismo isométrico, y mencionamos la importancia que tienen estos en el estudio de los espacios normados. Además, se mencionan algunas técnicas para analizar el comportamiento algebraico y topológico de los espacios normados.

Definición 1.4.1. *Sean $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. T es un **isomorfismo** si, T es inyectivo, continuo y el mapeo inverso T^{-1} es continuo sobre el rango de T. Si $||T(x)||_Y = ||x||_X$, para todo $x \in X$, entonces T es un **isomorfismo isométrico**.*

Definición 1.4.2. *Sean X y Y espacios normados.*

*a) Y contiene una **copia** de X si, existe un isomorfismo que va de X a Y. Si tal isomorfismo es isométrico, se dice que Y contiene una **copia isométrica** de X.*

*b) X y Y son **isomorfos** (lo cual denotaremos por $X \simeq Y$) si, existe un isomorfismo suprayectivo que va de X a Y. Si tal isomorfismo es isométrico, se dice que X y Y son **isométricamente isomorfos** (lo cual denotaremos por $X \cong Y$).*

[9]El primer ejemplo de este tipo de espacios se debe a Szarek [48].

La mayoría de las propiedades más importantes que un espacio normado puede tener se preservan bajo los isomorfismos.

Teorema 1.4.1. *Sea X un espacio de Banach. Si X es isomorfo a un espacio reflexivo, o débilmente secuencialmente completo, o que tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, Radon-Riesz o Dunford-Pettis, entonces X tiene la misma propiedad.*

A continuación enunciamos un teorema que determina cuándo un espacio normado no es isométricamente isomorfo al dual topológico de ningún espacio normado, pero antes enunciaremos la definición de punto extremal y el comportamiento que tienen estos bajo los isomorfismos isométricos.

Definición 1.4.3. *Sea X un espacio vectorial y sea $K \subset X$. Un vector $z \in K$ es un* ***punto extremal*** *de K si, para todo $x, y \in K$ tales que $z = (1/2)(x+y)$, $z = x = y$.*

Teorema 1.4.2. *[8] Sean X y Y espacios de Banach, sea $T : X \to Y$ un isomorfismo isométrico y sean $x \in K \subseteq X$. Entonces, x es un punto extremal de K si y sólo si $T(x)$ es un punto extremal de $T(K)$.*

Teorema 1.4.3. *Un espacio normado dimensionalmente infinito cuya bola unitaria cerrada tiene un número finito de puntos extremales no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado.*

El dual topológico de todo subespacio de un espacio normado X es isométricamente isomorfo a un espacio cociente del dual topológico de X.

Teorema 1.4.4. *Sea M un subespacio de un espacio normado X. Entonces existe un isomorfismo isométrico que identifica M^* con el espacio cociente $X^*/M^\perp$ tal que si un elemento de M^* es identificado con el elemento $x^*+M^\perp$ de $X^*/M^\perp$ se tiene que la acción de $x^*+M^\perp$ sobre M está dada por la fórmula $(x^* + M^\perp)(m) = x^*m$.*

Otra técnica que se emplea para obtener información de la estructura algebraica y topologica de un espacio normado es determinar si tal espacio contiene una copia de c_0 o l_1.

Teorema 1.4.5. *Sea X un espacio de Banach.*

a) Si X contiene una copia de c_0, entonces ninguna base de Schauder para X es acotadamente completa.

b) Si X contiene una copia de l_1, entonces ninguna base de Schauder para X es reductora.

Teorema 1.4.6. *([11],[30]) Sean X y Y espacios de Banach.*

a) Si X y Y contienen una copia complementada de c_0, entonces $WK(X,Y)$ no es un subespacio complementado en $B(X,Y)$.

b) Si Y contiene una copia complementada de c_0, entonces $K(X,Y)$ no es un subespacio complementado en $B(X,Y)$.

Por tal motivo existen teoremas que proporcionan condiciones para determinar cuándo un espacio normado contiene una copia de c_0 o l_1.

Teorema 1.4.7. *Sea K un espacio métrico compacto. Si X es un subespacio complementado dimensionalmente infinito de $\mathcal{C}(K)$, entonces X contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.*

Teorema 1.4.8. *Sea X un espacio de Banach y sea X^* el dual topológico de X.*

a) X^* contiene una copia de c_0 si y sólo si X contiene una copia complementada de l_1.

b) Si X^* contiene una copia de $L_1[a,b]$, entonces X contiene una copia del espacio l_1.

Otra técnica que se usa para investigar la estructura algebraica y topologica de un espacio normado es determinar si tal espacio no tiene ciertas propiedades.

Teorema 1.4.9. *Sea X un espacio normado, sea X^* el dual topológico de X y sea Y un espacio de Banach que tiene la propiedad de Dunford-Pettis y no la propiedad de Schur. Si X^* contiene una copia de Y, entonces X contiene una copia de l_1.*

Teorema 1.4.10. *[30] Sean X y Y espacios de Banach. Si Y tiene la propiedad de aproximación acotada y $K(X,Y)$ no es un subespacio complementado en $L(X,Y)$, entonces $K(X,Y)$ no es isomorfo al dual de ningún espacio normado ni isomorfo a un subespacio complementado de ningún espacio dual.*

Capítulo 2

La integral de Henstock-Kurzweil

El objetivo de este capítulo es proporcionar un panorama general de los resultados más elementales e importantes de la integral de Henstock-Kurzweil. Las demostraciones de los resultados que se exponen en este capítulo, excepto la del lema 2.4.1 y las de los teoremas 2.4.1 y 2.4.2, se localizan en libros especializados en el tema, como [3], [17], [38] y [47].

El lema 2.4.1 y el teorema 2.4.2 son resultados originales de esta tesis, los cuales están publicados en [12]. En dichos resultados se establece un teorema de convergencia para el espacio de las funciones vectoriales Henstock-Kurzweil integrables definidas en un intervalo no acotado.

2.1. Definiciones

Antes de enunciar las definiciones de las integrales de Kurzweil (definición 2.1.5) y Henstock (definición 2.1.4) mencionaremos algunos conceptos técnicos que se emplean en ambas definiciones.

Definición 2.1.1. *Una **partición etiquetada** de $[a,b]$ es una colección finita de pares ordenados*

$$\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n},$$

*tal que $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ es una partición clásica del intervalo $[a,b]$ y el punto t_i, llamado la **etiqueta** asociada al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, cumple que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Definición 2.1.2. *Sea $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. La función δ es una* ***función medidora***[1] *sobre $[a,b]$ si, para todo $t \in [a,b]$, $\delta(t) > 0$.*

Definición 2.1.3. *Sea $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medidora y sea $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a,b]$. $\mathcal{P}$ está* ***subordinada*** *por δ o $\mathcal{P}$ es* ***δ-fina*** *si, para todo $i = 1, \ldots, n$,*

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)].$$

Dada una partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ se puede construir una función medidora δ sobre $[a,b]$ tal que $\mathcal{P}$ esté subordinada por δ. El recíproco también se cumple, como se establece en el siguiente resultado el cual se le atribuye a Cousin [7].

Lema de Cousin.[2] *Sea $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medidora. Entonces existe una partición etiquetada $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ subordinada por δ.*

Definición 2.1.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. f es* ***Henstock integrable*** *en $[a,b]$ si, existe una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función medidora δ sobre $[a,b]$ tal que si $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada por δ, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon.$$

En este caso $\int_a^x f = F(x) - F(a)$, para todo $x \in [a,b]$.

Definición 2.1.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. f es* ***Kurzweil integrable*** *en $[a,b]$ si, existe un $C \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función medidora δ sobre $[a,b]$ tal que si $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada por δ, entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - C \right| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

[1]Este concepto aparece en la literatura inglesa como *gauge*, pero dado el rol que tiene en la definición de la integral de Henstock-Kurzweil la traducimos como *función medidora*.

[2]Para ver un resultado similar al lema de Cousin y algunas de sus aplicaciones invitamos al lector a consultar [5], [6], [18], [37] y [46].

El siguiente resultado establece la equivalencia de las integrales de Henstock y Kurzweil para funciones reales.

Teorema 2.1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. f es Henstock integrable en $[a, b]$ si y sólo si f es Kurzweil integrable en $[a, b]$. En este caso, el valor de las integrales coinciden.*

Con base en el teorema anterior, a las integrales definidas por Henstock y Kurzweil las llamaremos indistintivamente como la **integral de Henstock-Kurzweil**. Cuando nos refiramos a esta integral tendremos en mente la definición 2.1.5.

Teorema 2.1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$. El número real C que cumple con la definición 2.1.5 es único.*

Con base en el teorema anterior, al único número real C que cumple con la definición 2.1.5 le llamaremos **la integral de Henstock-Kurzweil** de f sobre $[a, b]$ y lo denotaremos por $\int_a^b f$.

A continuación enunciaremos dos teoremas en los cuales se establece la relación que existe entre las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil.

Teorema 2.1.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y el valor de las integrales coinciden.*

En general, el recíproco del teorema anterior no se cumple. Es decir, existen funciones que son Henstock-Kurzweil integrables en $[a, b]$, pero no Riemann integrables sobre el mismo intervalo. Un ejemplo de lo anterior es la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Teorema 2.1.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Lebesgue integrable en $[a, b]$, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y el valor de las integrales coinciden.*

En general, el recíproco del teorema anterior no se cumple. Es decir, existen funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, b]$ que no son Lebesgue integrables sobre el mismo intervalo. Un ejemplo de lo anterior es la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 2x\cos(\pi/x^2) + \frac{2\pi}{x}\sin(\pi/x^2) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2.2. Propiedades elementales

Es de interés que una integral posea las propiedades de linealidad y positividad dado que estas implican otras propiedades. Los dos teoremas siguientes mencionan que la integral de Henstock-Kurzweil tiene estas dos propiedades importantes.

Teorema 2.2.1. ***(Propiedad de Linealidad)*** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

- *$f + g$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

- *cf es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

Teorema 2.2.2. ***(Propiedad de Positividad)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Ahora enunciaremos dos resultados que son consecuencias de las propiedades de linealidad y positividad.

Corolario 2.2.1. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Corolario 2.2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$. Si $m, M \in \mathbb{R}$ cumplen que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes y necesarias para determinar cuándo una función es Henstock-Kurzweil integrable. Este criterio es útil cuando no se puede predecir ni estimar el valor de una integral.

Teorema 2.2.3. ***(Criterio de Cauchy)*** *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función medidora δ sobre $[a,b]$ tal que si $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ y $\mathcal{Q} = \{([y_{i-1}, y_i], s_i)\}_{i=1}^m$ son particiones etiquetadas de $[a,b]$ subordinadas por δ, entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m f(s_i)(y_i - y_{i-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Otra propiedad deseable para una integral es que sea aditiva con respecto a los subintervalos, propiedad que tiene la integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema 2.2.4. ***(Propiedad de Aditividad)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $c \in (a,b)$. f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ si y sólo si la restricción de f sobre $[a,c]$ y $[c,b]$ es Henstock Kurzweil integrable. En este caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Los dos colorarios siguientes son consecuencias de la propiedad de aditividad.

Corolario 2.2.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$. Si $[c,d] \subseteq [a,b]$, entonces la restricción de f a $[c,d]$ es Henstock-Kurzweil integrable.*

Corolario 2.2.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$. Si $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, entonces las restricciones de f a cada uno de los subintervalos $[c_{i-1}, c_i]$ son Henstock-Kurzweil integrables y*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_i-1}^{c_i} f.$$

A continuación enunciamos un teorema establecido por Hake [23] para la integral de Perron.

Teorema 2.2.5. [3] *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ si y sólo si existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $c \in (a,b)$ la restricción de f al intervalo $[a,c]$ es Henstock-Kurzweil integrable y*

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f = A.$$

En este caso, $A = \int_a^b f$.

El teorema anterior pone de manifiesto una propiedad de la integral de Henstock-Kurzweil que la diferencia de las integrales de Riemann y Lebesgue, ya que si este teorema se reformula para estas dos últimas integrales el teorema es falso.

Otra propiedad que tiene la integral de Henstock-Kurzweil que la diferencia de las integrales de Riemann y Lebesgue es la de ser una **integral condicional**. Es decir, existen funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ que al hacer la composición de estas con la función valor absoluto la función resultante no es Henstock-Kurzweil integrable sobre el mismo intervalo. Un ejemplo de esto es la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 2x\cos(\pi/x^2) + \frac{2\pi}{x}\sin(\pi/x^2) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Si una función f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y $|f|$ no es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ se dice que f es **condicionalmente integrable**. Pero si f y $|f|$ son funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ se dice que f es **absolutamente integrable** y, en este caso, el siguiente resultado establece la comparación entre los valores de las integrales de f y $|f|$.

Teorema 2.2.6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es absolutamente integrable en $[a,b]$, entonces*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

[3] En este teorema se considera el caso para el punto extremo derecho del intervalo $[a,b]$, pero se puede reformular de manera análoga para el punto extremo izquierdo.

Cerramos esta sección enunciando un teorema que proporciona una caracterización de las funciones Henstock-Kurzweil integrables las cuales son Lebesgue integrables.

Teorema 2.2.7. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. f es absolutamente Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ si y sólo si f es Lebesgue integrable en $[a, b]$. En este caso, el valor de las integrales coinciden.*

2.3. Teorema fundamental del cálculo

Hay dos aspectos a los cuales tradicionalmente se les llama el teorema fudamental del cálculo: uno es concerniente a la *integración de derivadas* y el otro a la *diferenciación de integrales*. En esta sección enunciamos ambos aspectos para la integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema fundamental del cálculo (integración de derivadas). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $[a, b]$, entonces la función f' es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

El teorema anterior menciona que toda función diferenciable se puede recuperar a través de su derivada empleando la integral de Henstock-Kurzweil. Es decir, la integral de Henstock-Kurzweil proporciona una solución general al problema de las primitivas. Esta es otra propiedad que tiene la integral de Henstock-Kurzweil que la diferencia de las integrales de Riemann y Lebesgue.

El teorema anterior se puede generalizar al pedir que la función f sea diferenciable en $[a, b]$ excepto en un conjunto a lo más numerable, pero manteniendo la condición de que f sea continua en $[a, b]$: *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable excepto a lo más en un conjunto numerable en $[a, b]$, entonces f' es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$, para todo $x \in [a, b]$.*

Antes de establecer la parte del teorema fundamental del cálculo referente a la diferenciación de integrales enunciaremos el concepto de integral indefinida.

Definición 2.3.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$. A la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f, \text{ para todo } x \in (a, b],$$

y $F(a) = 0$ se le llama la ***integral indefinida*** *de f.*

Teorema fundamental del cálculo (diferenciación de integrales). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y sea F la integral indefinida de f. Entonces:*

a) *F es continua en $[a, b]$.*

b) *Si f es continua en $c \in (a, b)$, entonces F es diferenciable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Cerramos esta sección mencionando un resultado que proporciona una caracterización de las funciones absolutamente integrables en términos de la integral indefinida.

Teorema 2.3.1. *Sea f una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y sea F la integral indefinida de f. f es absolutamente integrable en $[a, b]$ si y sólo si F es de variación acotada en $[a, b]$. En este caso,*

$$\int_a^b |f| = Var(F; [a, b]).$$

2.4. Teoremas de convergencia

En esta sección enunciamos algunos teoremas de convergencia que se tienen para el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables. Para facilitar la lectura, el símbolo (f_n) denotará una sucesión de funciones reales definidas en un intervalo compacto $[a, b]$, excepto cuando se diga lo contrario, y el símbolo $HK[a, b]$ representará el conjunto de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, b]$.

Teorema de la convergencia monótona. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea (f_n) una sucesión monótona en $HK[a, b]$ tales que, para todo*

$x \in [a,b]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces $f \in HK[a,b]$ si y sólo si la sucesión $(\int_a^b f_n)$ es acotada. En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

El teorema anterior asume que la sucesión (f_n) es creciente o decreciente. Sin embargo, no toda sucesión de funciones es monótona. Por tal motivo, el siguiente resultado[4] es de gran utilidad.

Lema de Fatou. *Sea (f_n) una sucesión en $HK[a,b]$ y $\alpha \in HK[a,b]$. Si $\alpha(x) \leq f_n(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n < \infty$, entonces la función $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y*

$$-\infty < \int_a^b \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n < \infty.$$

El siguiente resultado es una extensión a la integral de Henstock-Kurzweil de un teorema probado en 1908 por Lebesgue.

Teorema de la convergencia dominada. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea (f_n) una sucesión en $HK[a,b]$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Si existen funciones $\alpha, \omega \in HK[a,b]$ con la propiedad de que $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in HK[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

El siguiente teorema de convergencia está formulado en términos de las propiedades intrínsicas de la integral de Henstock-Kurzweil: equi-integrabilidad.

Definición 2.4.1. *Una sucesión (f_n) en $HK[a,b]$ es* ***equi-integrable*** *si, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función medidora δ sobre $[a,b]$ tal que si $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada por δ, entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^n f_n(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[4] Aunque en las hipótesis del lema de Fatou no se requiere que la sucesión sea creciente o decreciente en su demostración se emplea el teorema de la convergencia monótona.

Teorema de equi-integrabilidad.[5] *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea (f_n) una sucesión en $HK[a,b]$. Si (f_n) es equi-integrable y, para todo $x \in [a,b]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, entonces $f \in HK[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

McLeod [38] y Gordon [16] demostraron, de manera independiente, que los teoremas de la convergencia monótona y dominada son consecuencias del teorema de equi-integrabilidad.

Todos los teoremas que hemos mencionado anteriormente asumen que la sucesión (f_n) converja puntualmente. El siguiente teorema considera convergencia uniforme en vez de convergencia puntual.

Teorema de la convergencia uniforme. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea (f_n) una sucesión en $HK[a,b]$. Si (f_n) converge uniformemente a f en $[a,b]$, entonces $f \in HK[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

En general, el teorema anterior no es válido cuando consideramos intervalos no acotados. Antes de ver un ejemplo de esto (ejemplo 2.4.1) enunciaremos una formulación equivalente de la definición de la integral de Henstock-Kurzweil para funciones que toman valores en un espacio de Banach y que están definidas en un intervalo no acotado del conjunto de los números reales. De aquí hasta terminar esta sección, los símbolos f y (f_n) representarán una función y una sucesión de funciones que toman valores en un espacio de Banach X, respectivamente.

Definición 2.4.2. [6] *Sea X un espacio de Banach y $f : [a,\infty) \to X$ una función. La función f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,\infty)$ si, existe un*

[5] A este teorema también se le conoce como el teorema de la convergencia uniforme de Henstock, dado que la equi-integrabilidad hace a la integrabilidad de la sucesión (f_n) uniforme en el sentido de que: *Si $\varepsilon > 0$, entonces existe una función medidora que cumple con la definición* (2.1.5) *para todas las funciones que están en* (f_n).

[6] Esta definición se puede reformular para intervalos de la forma $(-\infty,b]$ y $(-\infty,\infty)$, en este último caso se consideran los intervalos $(-\infty,a]$ y $[a,\infty)$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

$A \in X$ tal que para todo $c \in (a, \infty)$ la restricción de f al intervalo $[a, c]$ es Henstock-Kurzweil integrable[7] *y*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = A.$$

En este caso, la integral de f en $[a, \infty)$ (la cual denotaremos por $\int_a^\infty f$) es A.

Ejemplo 2.4.1. *Sea $X = \mathbb{R}$ y sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $[a, \infty)$ por*

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[a,a+n]}(x).$$

Entonces, (f_n) converge uniformemente en $[a, \infty)$ a la función constante cero, $\int_a^\infty f_n = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y el $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n = 1$.

En el teorema 2.4.2 veremos que si f es el límite en el sentido de Moore de una sucesión (f_n) de funciones Henstock-Kurzweil integrables sobre un intervalo no acotado, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre el mismo intervalo y el valor de su integral es el límite de las integrales de la sucesión (f_n). Antes de establecer este teorema de convergencia, el cual es un resultado original de esta tesis, enunciaremos el concepto de *convergencia en el sentido de Moore* y la relación que tiene esta con la convergencia uniforme.

Definición 2.4.3. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y sean f y (f_n) una función y una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente. La sucesión (f_n)* ***converge en el sentido de Moore***[8] *a f en A si, para todo $\hat{\varepsilon} \in \mathcal{C}^+(A)$, donde*

$$\mathcal{C}^+(A) = \{\hat{\varepsilon} : A \to \mathbb{R} \,|\, \hat{\varepsilon} \text{ es continua en } A \text{ y } \hat{\varepsilon}(x) > 0, \text{ para todo } x \in A\},$$

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, entonces

$$||f_n(x) - f(x)|| < \hat{\varepsilon}(x), \text{ para todo } x \in A.$$

[7] En el sentido de la definición 2.1.5, considerando la norma en vez del valor absoluto en la desigualdad 2.1.

[8] Este concepto no está en la literatura que hemos consultado. La nombramos así dado que esta está basada en las ideas de una convergencia que empleó Moore [40] en su estudio de las ecuaciones integrables lineales.

Si una sucesión de funciones (f_n) converge en el sentido de Moore a una función f en A, entonces (f_n) converge uniformemente a f en A. En general, el recíproco no es válido, excepto si A es un conjunto compacto.

Teorema 2.4.1. *[40] Sean f y (f_n) una función y una sucesión de funciones definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente. Si (f_n) converge uniformemente a f en A y A es compacto, entonces (f_n) converge en el sentido de Moore a f en A.*

El siguiente lema es un resultado auxiliar para la demostración del teorema 2.4.2. En este lema proporcionamos una caracterización de la convergencia en el sentido de Moore en términos de la convergencia uniforme.

Lema 2.4.1. *Sean f y (f_n) una función y una sucesión de funciones definidas en $[a,\infty)$, respectivamente. La sucesión (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a,\infty)$ si y sólo si existe $M > a$ tal que:*

a) (f_n) converge uniformemente a f en $[a, M]$.

b) $f_n - f \equiv 0$ en $[M,\infty)$, excepto para un número finito de índices.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que la sucesión (f_n) converge en el sentido de Moore a la función f en $[a,\infty)$ y, para cada $M > a$,

$$f_n - f \not\equiv 0 \text{ en } [M,\infty), \text{ para un número infinito de índices.} \tag{2.2}$$

Sea $M_1 = |a|+1$. Acorde a (2.2), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_1} - f \not\equiv 0$ en $[M_1,\infty)$. Esto último implica que existe $x_1 \geq |a|+1$ tal que $f_{n_1}(x_1) - f(x_1) \neq 0$. Sea $M_2 = x_1+1$. Acorde a (2.2), existe $n_2 \in \mathbb{N}$ mayor que n_1 tal que $f_{n_2} - f \not\equiv 0$ en $[M_2,\infty)$. Esto último implica que existe $x_2 > x_1$ tal que $f_{n_2}(x_2) - f(x_2) \neq 0$. Empleando este procedimiento de manera recursiva obtenemos dos sucesiones (f_{n_k}) y (x_k) con las siguientes propiedades:

I) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ y $x_{k+1} > x_k$.

II) $x_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

III) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \neq 0$.

Definamos $c_k = ||f_{n_k}(x_k) - f(x_k)||/2$ y $\hat{\varepsilon} : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } x \in [a, x_1], \\ c_k & \text{si } x = x_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \\ \left(\frac{c_{k+1}-c_k}{x_{k+1}-x_k}\right)(x - x_k) + c_k & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}], \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Así, $\hat{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{+}[a,\infty)$ y, dado que (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a,\infty)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, entonces $||f_n(x) - f(x)|| < \hat{\varepsilon}(x)$, para todo $x \in [a,\infty)$. En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > m$, $||f_{n_k}(x_k) - f(x_k)|| < \hat{\varepsilon}(x_k)$. Lo anterior es una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $M > a$ tal que:

I) (f_n) converge uniformemente a f en $[a, M]$.

II) $f_n - f \equiv 0$ en $[M,\infty)$, excepto para un número finito de índices.

Acorde a II), para todo $i = 1, \ldots, j$, sea $f_{n_i} - f \not\equiv 0$ en $[M,\infty)$. Con base a I) y el teorema 2.4.1, (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a, M]$. Sea $\hat{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{+}[a,\infty)$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$,

$$||f_n(x) - f(x)|| < \hat{\varepsilon}(x), \text{ para todo } x \in [a, M].$$

Así, si $n \geq \max\{m, n_1, \ldots, n_j\}$,

$$||f_n(x) - f(x)|| < \hat{\varepsilon}(x), \text{ para todo } x \in [a,\infty).$$

La anterior desigualdad implica que (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a,\infty)$. □

Teorema 2.4.2. [9] *Sean f y (f_n) una función y una sucesión de funciones Henstock-Kurzweil integrables definidas en $[a,\infty)$, respectivamente. Si (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a,\infty)$, entonces f es Henstok-Kurzweil integrable en $[a,\infty)$ y*

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} f_n. \tag{2.3}$$

Demostración. Dado que (f_n) converge en el sentido de Moore a f en $[a,\infty)$ existe, acorde al lema (2.4.1), $M > a$ tal que:

I) (f_n) converge uniformemente a f en $[a, M]$.

II) $f_n - f \equiv 0$ en $[M,\infty)$, excepto para un número finito de índices.

[9] En [12] este teorema está formulado para la integral impropia de Riemann vectorial. Sin embargo, las técnicas empleadas ahí también son válidas si consideramos la integral de Henstock-Kurzweil sobre intervalos no acotados.

Con base a I) y el teorema de la convergencia uniforme, f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, M]$. Acorde a II), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n = f$ en $[M, \infty)$ y, por tanto, f es Henstock-Kurzweil integrable en $[M, \infty)$. Así, f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, \infty)$.

Veamos la validez de (2.3).

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^\infty f_n - \int_a^\infty f \right\| &= \left\| \left(\int_a^M f_n + \int_M^\infty f_n \right) - \left(\int_a^M f + \int_M^\infty f \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\int_a^M f_n - \int_a^M f \right) + \left(\int_M^\infty f_n - \int_M^\infty f \right) \right\|. \end{aligned}$$

Como las integrales $\int_M^\infty f_n$ y $\int_M^\infty f$ existen y $\int_M^\infty f_n - \int_M^\infty f = \int_M^\infty (f_n - f) = 0$,

$$\left\| \int_a^\infty f_n - \int_a^\infty f \right\| = \left\| \int_a^M f_n - \int_a^M f \right\|.$$

Con base a la igualdad anterior y el teorema de la convergencia uniforme,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f.$$

$\square$

2.5. Lema de Saks-Henstock

El lema de Saks-Henstock[10] es de suma importancia en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil ya que este resultado se aplica en la mayoría de las demostraciones de los resultados más importantes que hay en esta teoría. Por ejemplo, se usa para demostrar que la integral indefinida de una función Henstock-Kurzweil integrable es continua y diferenciable (excepto en un conjunto de medida Lebesgue cero). También se emplea en la demostración del teorema de la convergencia monótona, el cual se usa para demostrar el lema de Fatou y, este último, para demostrar el teorema de la convergencia dominada.

Antes de formular el lema de Saks-Henstock enunciaremos la defininción de subpartición etiquetada.

[10] Henstock en la página 197 de [25] atribuye este lema a Saks [44]. Sin embargo, el uso de este lema en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil se debe a Henstock.

Definición 2.5.1. *Sea* $[a,b]$ *un intervalo compacto. Una* ***subpartición etiquetada*** *de* $[a,b]$ *es una colección finita de pares ordenados* $\{([y_{i-1},y_i],s_i)\}_{i=1}^m$ *tal que* $\{[y_{i-1},y_i]\}_{i=1}^m$ *es una colección de subintervalos no translapados de* $[a,b]$ *y* $s_i \in [y_{i-1},y_i]$*, para todo* $i=1,\ldots,m$.

Lema de Saks-Henstock. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función Henstock-Kurzweil integrable en* $[a,b]$ *y para* $\varepsilon>0$ *sea* δ *una función medidora en* $[a,b]$ *tal que si* $\mathcal{P}=\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n$ *es una partición etiquetada de* $[a,b]$ *subordinada por* δ*, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f\right|<\varepsilon.$$

Si $\{([y_{i-1},y_i],s_i)\}_{i=1}^m$ *es una subpartición etiquetada de* $[a,b]$ *tal que* $[y_{i-1},y_i]\subset[s_i-\delta(s_i),s_i+\delta(s_i)]$*, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^m\left\{f(s_i)(y_i-y_{i-1})-\int_{y_{i-1}}^{y_i} f\right\}\right|<\varepsilon.$$

Corolario 2.5.1. [11] *Con las mismas hipótesis del lema de Saks-Henstock,*

$$\sum_{i=1}^m\left|f(s_i)(y_i-y_{i-1})-\int_{y_{i-1}}^{y_i} f\right|\leq 2\varepsilon.$$

En general, el resultado anterior ya no es válido cuando extendemos la integral de Henstock-Kurzweil a funciones vectoriales.

[11] Este resultado es conocido como el Lema fuerte de Saks-Henstock.

Capítulo 3

El espacio cociente de las funciones Henstock-Kurzweil integrables

En este capítulo hacemos un análisis del espacio cociente que resulta al definir en el espacio vectorial de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, b]$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por: *$f \sim g$ si y sólo si $f = g$ excepto en un conjunto de medida de Lebesgue cero o, equivalentemente, si f y g tienen la misma integral indefinida.* A este espacio cociente lo denotamos por $\mathcal{HK}[a, b]$, y hacemos referencia a él como el *espacio cociente de las funciones Henstock-Kurzweil integrables.* Este capítulo está conformado por tres secciones:

Sección 3.1. En esta sección demostramos que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{HK}[a, b]$ coincide con la cardinalidad del conjunto de los números reales (proposición 3.1.1). Con base a esto último, demostramos que existe una norma en $\mathcal{HK}[a, b]$ que genera una estructura de espacio de Banach (proposición 3.1.2).

Sección 3.2. En esta sección demostramos que la topología débil de $\mathcal{HK}[a, b]$, considerando en este último la norma de Alexiewicz $|| \cdot ||_A$, es natural[1] (proposición 3.2.1), pero no tonelada[2] (proposición 3.2.2).

[1]La definición de este concepto se enuncia en la sección 3.2.
[2]La defínción de este concepto se localiza en el apéndice A.3

Sección 3.3. En esta sección demostramos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia complementada de c_0 (proposición 3.3.1) y una copia no complementada de l_1 (proposición 3.3.3). Como una consecuencia de la proposición 3.3.1 demostramos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur (proposición 3.3.2). Además, demostramos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (proposición 3.3.4), pero no la propiedad $*$-Dunford-Pettis (proposición 3.3.5). Sin embargo, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ cumple una versión más fuerte de la propiedad $*$-Dunford-Pettis (proposición 3.3.6).

Todas las proposiciones que aparecen en este capítulo son resultados originales de esta tesis. Las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 están publicadas en [22]. Las otras proposiciones se han enviado a una revista (indexada en JCR) para su posible publicación.

3.1. El espacio $\mathcal{HK}[a,b]$

Una de las propiedades que se buscan al definir una norma en un espacio normado es la de generar una estructura de espacio de Banach. Así, nos vemos motivados a preguntarnos ¿existe una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ que lo dote de una estructura de espacio de Banach? La respuesta a la anterior pregunta es afirmativa (proposición 3.1.2). Antes de demostrar la proposición 3.1.2 demostramos el siguiente resultado que se empleará en la demostración de la proposición referida.[3]

Proposición 3.1.1. *La cardinalidad del conjunto $\mathcal{HK}[a,b]$ es igual a la cardinalidad del conjunto de los números reales.*

Demostración. Sea $G : \mathcal{HK}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ el mapeo definido por $G(f) = F$, donde F es la integral indefinida de f. Así, G es inyectivo y, por tanto,

$$card\,(\mathcal{HK}[a,b]) \leq card\,(\mathcal{C}[a,b])\,.$$

Con base en la desigualdad anterior y teniendo en consideración que

$$card\,(\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es constante}\}) = c = card\,(\mathcal{C}[a,b])\,,$$

[3]El símbolo c empleado en las demostraciones de las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 representa la cardinalidad del conjunto de los números reales.

$$card\,(\mathcal{HK}[a,b]) = c.$$

□

Proposición 3.1.2. *Existe una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ que genera una estructura de espacio de Banach.*

Demostración. Dado que $L_1[a,b]$ es un espacio de Banach de dimensión algebraica infinita,

$$dim(L_1[a,b]) \geq c.$$

Acorde a la desigualdad anterior y teniendo en consideración que $L_1[a,b]$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{HK}[a,b]$,

$$c \leq dim(\mathcal{HK}[a,b]). \tag{3.1}$$

Como $dim\,(\mathcal{HK}[a,b]) \leq card\,(\mathcal{HK}[a,b])$ se tiene, con base en la proposición 3.1.1, que

$$dim(\mathcal{HK}[a,b]) \leq c. \tag{3.2}$$

Acorde a las desigualdades (3.1) y (3.2),

$$dim(\mathcal{HK}[a,b]) = c. \tag{3.3}$$

Así, con base a (3.3), el teorema A.2.2 y la hipótesis del continuo obtenemos la conclusión deseada. □

En ciertos contextos no solo basta con definir una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ que genere una estructura de espacio de Banach. También es importante que esta norma esté relacionada con la integral de Henstock-Kurzweil. ¿En qué sentido una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ debe estár relacionda con la integral de Henstock-Kurzweil? Una respuesta a la pregunta anterior está dada en la siguiente sección.

3.2. Topologías naturales en $\mathcal{HK}[a,b]$

En el marco de los espacios vectoriales topológicos[4], un marco más general que el de los espacios normados, algunos autores han definido topologías vectoriales[5] en $\mathcal{HK}[a,b]$ que están relacionadas con la integral de Henstock-Kurzweil en el sentido de la siguiente definición.

[4]La definición de este tipo de espacios está dada en el apéndice A.3.

[5]La definición de este concepto se enuncia en el apéndice A.3.

Definición 3.2.1. [6] *Una topología vectorial* τ *en* $\mathcal{HK}[a,b]$ *es* ***natural*** *si, para toda sucesión* (f_n) *en* $\mathcal{HK}[a,b]$ *tal que* $f_n \to 0$ *bajo dicha topología,* $\int_a^x f_n \to 0$*, para todo* $x \in [a,b]$*.*

Höning [27] demostró que no existe una norma en $\mathcal{HK}[a,b]$ que genere una estructura de espacio de Banach y que la topología generada por esta sea natural[7]. Por tanto, la topología generada por la norma de la proposición 3.1.2 no es natural.

Un ejemplo de una topología natural en $\mathcal{HK}[a,b]$ es la generada por la norma de Alexiewicz [2], norma que quizá sea la más estudiada en $\mathcal{HK}[a,b]$. Esta norma se define de la siguiente manera: *Sea* $f \in \mathcal{HK}[a,b]$*. La norma de Alexiewicz de* f *se define como*

$$||f||_A = \sup\left\{\left|\int_a^x f\right| : \text{para todo } x \in (a,b]\right\}.$$

Si $f \in \mathcal{HK}[a,b]$ y F es la integral indefinida de f, entonces $||f||_A = ||F||_\infty$. Por tanto, si (f_n) es una sucesión en $\mathcal{HK}[a,b]$ tal que $||f_n||_A \to 0$ y (F_n) es la sucesión de las integrales indefinidas de (f_n), entonces $\int_a^x f_n \to 0$, para todo $x \in [a,b]$. Así, la topología generada por la norma de Alexiewicz es natural. Además, $\mathcal{HK}[a,b]$ dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz es un espacio ultrabornológico[8] (ver [15]) y, por tanto, tonelado. Sin embargo, acorde a lo demostrado por Höning en [27], la norma de Alexiewicz no genera una estructura de espacio de Banach en $\mathcal{HK}[a,b]$.

Dado que las topologías débil y normada de un espacio normado tienen ciertas similitudes, por ejemplo tienen los mismos conjuntos acotados y el mismo espacio dual, nos vemos motivados a investigar algunas propiedades de la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$.

Proposición 3.2.1. *La topología débil del espacio* $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ *es natural.*

[6] Esta definición es la que comunmente se considera en la literatura referente al tema. Sin embargo, esta definición se puede generalizar empleando redes en vez de sucesiones. Esta última definición es equivalente a la definición 3.2.1 para topologías metrizables o ultrabornológicas.

[7] En ese mismo artículo, Höning menciona que la técnica que él empleó sirve para demostrar que en $\mathcal{HK}[a,b]$ no existen topologías naturales y de Fréchet.

[8] La definición de este concepto se enuncia en el apéndice A.3.

Demostración. Sea τ_w la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ y sea (f_n) una sucesión en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tal que

$$f_n \xrightarrow{\tau_w} 0.$$

Con base en la definición 1.1.2 inciso a),

$$x^* f_n \to 0, \text{ para todo } x^* \in (\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*.$$

Acorde a lo anterior y al teorema 4.2.1,

$$\int_a^b f_n g \to 0, \text{ para toda } g \in NBV[a,b].$$

Así, al considerar la función $g \in NBV[a,b]$ definida por $g(x) = \chi_{[a,x]}(x)$,

$$\int_a^x f_n \to 0, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Por tanto, τ_w es una topología natural. □

Proposición 3.2.2. *La topología débil del espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es tonelada.*

Demostración. Sean τ_A y τ_w las topologías fuerte y débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$, respectivamente. Supongamos que τ_w es tonelada. Así, acorde a la proposición 3.2.1 y al hecho de que toda topología natural y tonelada en $\mathcal{HK}[a,b]$ contiene a la topología de Alexiewicz (ver [14]),

$$\tau_A \subseteq \tau_w.$$

Con base en lo anterior y teniendo en consideración que la topología débil de un espacio normado está contenida en la topología fuerte,

$$\tau_A = \tau_w.$$

Lo anterior implica que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es de dimensión algebraica finita, lo cual es una contradición acorde a (3.3) de la proposición 3.1.2. □

Acorde a la proposición 3.2.1, la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es natural y, por tanto, está relacionada con la integral de Henstock-Kurzweil. Sin embargo, con base en la proposición 3.2.2, la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es tonelada y, por tanto, carece de una propiedad importante en la teoría de los espacios vectoriales topológicos.

3.3. Propiedades del espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$

Como se mencionó en la sección anterior, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es un espacio de Banach. Como una consecuencia de esto último, se tiene que el espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es isomorfo al dual de ningún espacio normado y, por tanto, no es reflexivo. Sin embargo, la no completés de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no impide que en este espacio se cumplan otras propiedades de los espacios normados. En esta sección demostramos algunas de estas.

Proposición 3.3.1. *El espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia complementada de c_0.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a,b] = [0,1]$. Construiremos un operador $T : c_0 \to (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ que sea lineal, inyectivo, acotado y cuyo operador inverso T^{-1} sea continuo sobre el rango de T.

Sea $(\alpha_k) \in c_0$. Definamos la función $f_{(\alpha_k)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_{(\alpha_k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \alpha_k & \text{si} \quad x = 1/k, \\ \left(\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{(1/k-1)-(1/k)}\right)(x - \frac{1}{k}) + \alpha_k & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}), \text{ para } k \geq 2. \end{cases}$$

De esta forma se tiene que $f_{(\alpha_k)}$ es continua en $[0,1]$ y derivable, excepto quizá en los puntos de la forma $1/k$, en $(0,1)$. Donde $f'_{(\alpha_k)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f'_{(\alpha_k)}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{(1/k-1)-(1/k)} & \text{si } x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}), \text{ para } k \geq 2, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Por el teorema fundamental del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil, $f'_{(\alpha_k)}$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[0,1]$ y

$$\int_0^x f'_{(\alpha_k)} = f(x), \quad \text{para todo } x \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Definamos el operador $T : c_0 \to (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ por

$$T((\alpha_k)) = f'_{(\alpha_k)}.$$

Así, T es lineal. Además:

El operador T es inyectivo: Sea (α_k) un elemento del kernel de T. Es decir, $T((\alpha_k)) = 0$ y, por tanto, $f^{-1}_{(\alpha_k)} \equiv 0$. Acorde a (3.4), $f'_{(\alpha_k)}(x) = 0$, para todo $x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1})$ y $k \geq 2$. Es decir, $\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{(1/k-1)-(1/k)} = 0$ y, por ende, $\alpha_{k-1} = \alpha_k$, para todo $k \geq 2$. Esto último implica que (α_k) es una sucesión constante, y teniendo en consideración que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, T es un operador inyectivo.

El operador T es acotado: Sea $(\alpha_k) \in c_0$. Acorde a (3.5),

$$\left|\int_0^x f'_{(\alpha_k)}\right| = \left|f_{(\alpha_k)}(x)\right|, \text{ para todo } x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

a) Si $x = 0$, entonces $f_{(\alpha_k)}(0) = 0$ y, por tanto, $\left|f_{(\alpha_k)}(0)\right| \leq ||(\alpha_k)||_\infty$

b) Si $x = 1/k$, entonces $f_{(\alpha_k)}(\frac{1}{k}) = \alpha_k$ y, por tanto, $\left|f_{(\alpha_k)}(\frac{1}{k})\right| \leq ||(\alpha_k)||_\infty$

c) Si $x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1})$, para algún $k \geq 2$, entonces

$$f_{(\alpha_k)}(x) = \left(\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{(1/k-1)-(1/k)}\right)\left(x - \frac{1}{k}\right) + \alpha_k$$

y, por tanto, el par ordenado $(x, f_{(\alpha_k)}(x))$ forma parte de la recta que une a los puntos $\left(\frac{1}{k-1}, \alpha_{k-1}\right)$ y $\left(\frac{1}{k}, \alpha_k\right)$. Así, $\left|f_{(\alpha_k)}(x)\right| \leq ||(\alpha_k)||_\infty$

Con base en los incisos a), b) y c),

$$\left|\int_0^x f'_{(\alpha_k)}\right| = |f_{(\alpha_k)}(x)| \leq ||(\alpha_k)||_\infty, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Acorde a esta última desigualdad y teniendo en consideración que

$$||T((\alpha_k))||_A = \left|\left|f'_{(\alpha_k)}\right|\right|_A = \sup\left\{\left|\int_0^x f'_{(\alpha_k)}\right| \,:\, x \in [0,1]\right\},$$

se tiene que $||T((\alpha_k))||_A \leq ||(\alpha_k)||_\infty$. Así, T es un operador acotado.

El operador T^{-1} es acotado en el rango de T: Sea

$$A = \{f_{(\alpha_k)} \,|\, (\alpha_k) \in c_0\}.$$

Veamos que A es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}[0,1]$. En efecto, sea $f \in \bar{A}$ y sea $(f_{(\alpha_{k,n})})$ una sucesión en A tal que

$$f_{(\alpha_{k,n})} \text{ converge uniformemente a } f \text{ en } [0,1]. \tag{3.7}$$

a) Si $x = 0$, entonces $f_{(\alpha_{k,n})}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como consecuencia de (3.7), $\lim_{n\to\infty} f_{(\alpha_{k,n})}(0) = 0$. Es decir, $f(0) = 0$.

b) Si $x = 1/k$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, entonces $f_{(\alpha_{k,n})}(\frac{1}{k}) = \alpha_{k,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, como consecuencia de (3.7), $\lim_{n\to\infty} f_{(\alpha_{k,n})}(\frac{1}{k}) = f(\frac{1}{k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\beta_k = f(\frac{1}{k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que f es continua en 0 y $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}) = 0$. Es decir, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$. Lo cual implica que $(\beta_k) \in c_0$.

c) Si $x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1})$, entonces $f_n(x) = \left(\frac{\alpha_{k-1,n}-\alpha_{k,n}}{(1/k-1)-(1/k)}\right)\left(x - \frac{1}{k}\right) + \alpha_{k,n}$, para cualquier $k \geq 2$. Luego, como consecuencia de (3.7),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\alpha_{k-1,n}-\alpha_{k,n}}{(1/k-1)-(1/k)}\right)\left(x-\frac{1}{k}\right)+\alpha_{k,n}\right]\\ &= \left(\frac{\beta_{(k-1)}-\beta_k}{(1/k-1)-(1/k)}\right)\left(x-\frac{1}{k}\right)+\beta_k.\end{aligned}$$

Con base a los incisos a), b) y c), $f \in A$ y, por tanto, A es cerrado en $\mathcal{C}[0,1]$. Así, A es un espacio de Banach. Ahora consideremos el operador $\Phi : (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A) \to \mathcal{C}[0,1]$ definido por $\Phi(f) = F$, donde F es la integral indefinida de f. De esta forma se tiene que Φ es lineal, inyectivo y

$$||f||_A = \sup\left\{\left|\int_0^x f\right| \,:\, x \in [0,1]\right\} = \sup\left\{|F(x)| \,:\, x \in [0,1]\right\} = ||F||_\infty.$$

Es decir, Φ es una isometría lineal. Dado que $\Phi\left(T(c_0)\right) = A$ y teniendo en consideración que A es un espacio de Banach, $T(c_0)$ también es un espacio de Banach. Así, al considerar que el operador lineal $T : c_0 \to T(c_0)$ es biyectivo, el operador T^{-1} es acotado.

Dado que $T : c_0 \to (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ es un operador lineal, inyectivo, acotado y cuyo operador inverso T^{-1} es continuo en el rango de T, se tiene que $(\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ contiene una copia de c_0. Al ser $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ un espacio separable (ver [47]), c_0 está como copia complementada en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ ya que todo espacio normado separable que contiene una copia de c_0 es complementada. $\square$

Proposición 3.3.2. *El espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur.*

Demostración. Si un espacio normado tiene la propiedad de Radon-Riesz o la propiedad de Schur, entonces todo subespacio cerrado de él tiene la misma propiedad. Así, la conclusión se sigue de la proposición 3.3.1 y del hecho de que c_0 no tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur. $\square$

Proposición 3.3.3. *El espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia no complementada de l_1.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a,b] = [0,1]$. Sea $(\beta_k) \in l_1$ y sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_k|$. Definamos $\alpha_k = x - \sum_{i=1}^{k} |\beta_i|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión (α_k) está en c_0. Ahora, sea $T : l_1 \to (\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ el operador definido por $T((\beta_k)) = f'_{(\alpha_k)}$. Donde $f'_{(\alpha_k)}$ es la derivada de la función $f_{(\alpha_k)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{(\alpha_k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \alpha_k & \text{si} \quad x = 1/k, \\ \left(\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{(1/k-1)-(1/k)}\right)(x - \frac{1}{k}) + \alpha_k & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}), \text{ para } k \geq 2. \end{cases}$$

La demostración de que $T : l_1 \to (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ es lineal, inyectivo, acotado y cuyo operador inverso T^{-1} es continuo en el rango de T es similar a la demostración del operador $T : c_0 \to (\mathcal{HK}[0,1], ||\cdot||_A)$ de la proposición 3.3.1. Por tanto, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia de l_1. Supongamos que dicha copia es complementada en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$. Así, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$ contiene una copia (complementada) de l_∞, y al ser $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$ débilmente secuencialmente completo, l_∞ es débilmente secuencialmente completo. Esto último es una contradicción. Por tanto, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia no complementada de l_1. $\square$

Ahora, demostraremos que el conjunto de los operadores débilmente compactos que van de un espacio normado E a $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ está contenido en el conjunto de los operadores completamente continuos. Es decir, demostraremos que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Proposición 3.3.4. *El espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{HK}[a,b]$ y sea (x_n^*) una sucesión en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$ tales que

$$f_n \xrightarrow{\tau_w} 0 \quad \text{y} \quad x_n^* \xrightarrow{\tau_w} 0. \tag{3.8}$$

Si $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es la completación de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$, entonces $\mathcal{HK}[a,b]$ es denso en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Así, a las sucesiones (f_n) y (x_n^*) las podemos considerar como sucesiones en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ y $\left(\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}\right)^*$, respectivamente. Por tanto, con base a (3.8) y al inciso a) de la proposición 4.2.1,

$$x_n^* f_n \to 0.$$

Con lo cual obtenemos la conclusión deseada. □

Acorde a la proposición 3.3.4, el operador evaluación

$$\Lambda : (\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A) \times (\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$$

definido por

$$\Lambda(f, x^*) = x^* f$$

es secuencialmente continuo considerando las topologías débiles de los espacios $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ y $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$. Sin embargo, si consideramos la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ y la topología débil* de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$, el operador Λ no es secuencialmente continuo. Esto último es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.5. *El espacio* $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ *no tiene la propiedad $*$-Dunford-Pettis.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Dado que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es un espacio separable (ver [47]) se tiene, con base en el teorema 1.1.1, que la topología débil* relativa a la bola unitaria cerrada de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$ está inducida por una métrica. Con base en lo anterior y al teorema 1.1.2, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tiene la propiedad de Schur. Esto último es una contradicción acorde a la proposición 3.3.2. □

Si consideramos la topología fuerte de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ y la topología débil* de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$, el operador Λ es secuencialmente continuo. Lo anterior se demuestra a continuación.

Proposición 3.3.6. *Sean (f_n) y (x_n^*) sucesiones en $\mathcal{HK}[a,b]$ y $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*$, respectivamente. Si $f_n \xrightarrow{||\cdot||_A} 0$ y $x_n^* \xrightarrow{\tau_{w^*}} 0$, entonces*

$$x_n^* f_n \to 0.$$

Demostración. En la teoría de los espacios normados, si (x_n) es un sucesión en un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$ y (x_n^*) es una sucesión en el dual topológico de X tales que $x_n \overset{||\cdot||}{\longrightarrow} 0$ y $x_n^* \overset{\tau_{w^*}}{\longrightarrow} 0$, entonces

$$x_n^* x \to 0. \tag{3.9}$$

La razón principal que garantiza la validez de (3.9) es el principio del acotamiento uniforme. En la teoría de los espacios vectoriales topológicos los espacios tonelados cumplen el principio del acotamiento uniforme. Así, la conclusión se sigue del hecho de que $\mathcal{HK}[a,b]$ dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz es tonelado (ver [14]). $\square$

Capítulo 4

La completación del espacio cociente de las funciones Henstock-Kuzrweil integrables

En este capítulo hacemos un análisis, dentro del marco de la teoría de los espacios normados, de la completación de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$. A esta completación la denotamos por $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ y hacemos referencia a ella como la *completación del espacio cociente de las funciones Henstock-Kurzweil integrables.* Este capítulo está conformado por dos secciones:

Sección 4.1. En esta sección demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$, el cual es isométricamente isomorfo a $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$, es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$ (proposición 4.1.1). Además, demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ contiene una copia de c_0 (proposición 4.1.2), tiene las propiedades de Dunford-Pettis y recíproca de Dunford-Pettis (proposiciones 4.1.3 y 4.1.4, respectivamente), tiene una base de Schauder (proposición 4.1.5) y tiene las propiedades de aproximación y aproximación acotada (proposición 4.1.6). También, demostramos que $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ no es débilmente secuencialmente completo (proposición 4.1.8) y no tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur (proposiciones 4.1.9 y 4.1.10, respectivamente).

Sección 4.2. En esta sección demostramos que todas las proposiciones de la sección 4.1 son válidas si las formulamos para el espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ (proposición 4.2.1). Además, demostramos que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia no complementada de l_1 (proposición 4.2.2), no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado (proposición 4.2.3), no es reflexivo (proposición 4.2.5) y no tiene bases de Schauder que sean incondicionales, ni acotadamente completas, ni reductoras (proposición 4.2.6). También, demostramos que, para todo espacio de Banach E, el subespacio $K(E,\widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$ no es complementado en $B(E,\widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$ y no es isomorfo a ningún subespacio complementado de un espacio dual (proposición 4.2.8). Aún más, demostramos que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene una copia de l_∞, ni copias complementadas de $L_1[a,b]$ y de l_p, para todo $1 < p < \infty$ (proposiciones 4.2.10, 4.2.11 y 4.2.9, respectivamente). Cerramos esta sección demostrando que $L_1[a,b]$ dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz no es tonelado (proposición 4.2.12).

Todos los resultados que aparecen en este capítulo, salvo los teoremas 4.1.1 y 4.2.1, son resultados originales de esta tesis. Los cuales están publicados en [20] y [21]. Para hacer cómoda la lectura de este capítulo, hicimos los siguientes ajustes:

- La proposición 4.1.1 forma parte de la demostración del lema 12 de [21].
- Las proposiciones 4.1.4, 4.1.5 y 4.1.6 son reformulaciones de las proposiciones 3.5 y 3.2 y del corolario 3.3 de [20], respectivamente.
- Las proposiciones 4.1.10 y 4.2.10 son reformulaciones de los comentarios dados en [21] y [20], respectivamente.

4.1. El espacio $\mathcal{B}_c[a,b]$

Como se mencionó en la sección 1.4, una técnica que se usa para analizar la estructura algebraica y topológica de un espacio normado es emplear espacios isomorfos a él. En esta sección empleamos dicha técnica con base en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *[?] El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ es isométricamente isomorfo a $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$.*

Todos los resultados de esta sección son concernientes a $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$, donde

$$\mathcal{B}_c[a,b] = \{F : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, F \text{ es continua en } [a,b] \text{ y } F(a) = 0\}.$$

Proposición 4.1.1. *El espacio $\mathcal{B}_c[a,b]$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$.*

Demostración. Sea $H : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ el operador definido por $H(F) = F(a)$. Así, H es lineal y continuo. Es decir, H es un funcional lineal acotado de $\mathcal{C}[a,b]$. Por tanto, el kernel de H, $ker(H)$, es un hiperplano de $\mathcal{C}[a,b]$. Es decir,

$$\mathcal{C}[a,b] = ker(H) \oplus W,$$

donde $ker(H) = \{F \in \mathcal{C}[a,b] \,:\, F(a) = 0\} = \mathcal{B}_c[a,b]$ y W es un subespacio cerrado unidimensional de $\mathcal{C}[a,b]$. □

Como una consecuencia del resultado anterior se tienen las siguientes tres proprosiciones.

Proposición 4.1.2. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ contiene una copia complementada de c_0.*

Demostración. Acorde a la proposición 4.1.1, $\mathcal{B}_c[a,b]$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$. Por tanto, con base en el teorema 1.4.7, obtenemos la conclusión deseada. □

Proposición 4.1.3. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Por la proposición 4.1.1, $\mathcal{B}_c[a,b]$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$. Así, con base al teorema 1.2.1 y al hecho de que $\mathcal{C}[a,b]$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (ver [4]), obtenemos la conclusión deseada. □

Proposición 4.1.4. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.*

Demostración. Con base en la proposición 4.1.1, $\mathcal{B}_c[a,b]$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a,b]$. Así, acorde al teorema 1.2.1 y al hecho de que $\mathcal{C}[a,b]$ tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis (ver [19]), obtenemos la conclusión deseada. □

En las demostraciones de las proposiciones 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4 se usa el hecho de que $\mathcal{B}_c[a, b]$ es un subespacio complementado en $\mathcal{C}[a, b]$. En las demostraciones de las proposiciones 4.1.5 y 4.1.7 ese hecho no es fundamental.

Proposición 4.1.5. *El espacio* $(\mathcal{B}_c[a, b], ||\cdot||_\infty)$ *tiene una base de Schauder.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a, b] = [0, 1]$. Sea (s_n) una sucesión en $\mathcal{B}_c[0, 1]$ definida de la siguiente manera:

- Para $n = 1$, sea $s_1(t) = t$, para todo $t \in [0, 1]$.
- Para $n \geq 2$ y $m \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $2^{m-1} < n \leq 2^m$, sea

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m \left[t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1\right)\right] & \text{si } \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1, \\ 1 - 2^m \left[t - \left(\frac{2n-1}{2^m} - 1\right)\right] & \text{si } \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Así, la sucesión (s_n) es la base de Schauder clásica, sin considerar el primer elemento, de $\mathcal{C}[0, 1]$. Por tanto, no es complicado verificar que (s_n) es una base de Schauder para el espacio $\mathcal{B}_c[0, 1]$. □

Dado que todo espacio de Banach que tiene una base de Schauder no sólo tiene la propiedad aproximación sino también la propiedad de aproximación acotada, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la proposición 4.1.5.

Proposición 4.1.6. *El espacio* $(\mathcal{B}_c[a, b], ||\cdot||_\infty)$ *tiene las propiedades de aproximación y aproximación acotada.*

Proposición 4.1.7. *El conjunto de los puntos extremales de la bola unitaria cerrada del espacio* $(\mathcal{B}_c[a, b], ||\cdot||_\infty)$ *es vacío.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea F un elemento de la bola unitaria cerrada de $(\mathcal{B}_c[a, b], ||\cdot||_\infty)$. Al ser F una función continua en $[a, b]$, para $\varepsilon = 1/2$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|F(x)| < \frac{1}{2}, \text{ para todo } x \in [a, a + \delta).$$

Sea r cualquier función continua en $[a, a + \delta]$ con la propiedad de que

$$r(a) = 0 = r(a + \delta) \text{ y } 0 < ||r||_\infty < \frac{1}{2}.$$

Definamos las funciones G y H de la siguiente manera:

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + r(x) & \text{si} \quad x \in [a, a+\delta], \\ F(x) & \text{si} \quad x \in [a+\delta, b]. \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} F(x) - r(x) & \text{si} \quad x \in [a, a+\delta], \\ F(x) & \text{si} \quad x \in [a+\delta, b]. \end{cases}$$

Así, G y H son continuas y $||G||_\infty = 1 = ||H||_\infty$. Es decir, G y H están en la bola unitaria cerrada de $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$.

Dado que $F = (1/2)(G+H)$ y F es un punto extremal, $F = G = H$. Lo anterior es una contradicción ya que $G \neq H$. $\square$

Haciendo uso del teorema 1.1.3 obtenemos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 4.1.8. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ no es débilmente secuencialmente completo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|b-a| \geq 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [a, b-\frac{1}{n}], \\ n(x-b)+1 & \text{si} \quad x \in (b-\frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Así, (F_n) es una sucesión en $\mathcal{B}_c[a,b]$ y

- $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ existe, para todo $x \in [a,b]$.
- $||F_n||_\infty = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, con base en el teorema 1.1.3, (F_n) es una sucesión débilmente de Cauchy en $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$.

Supongamos que la sucesión (F_n) converge débilmente a una función G en $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$. Entonces, acorde al teorema 1.1.3, $G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Así,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [a,b), \\ 1 & \text{si} \quad x = b. \end{cases}$$

Por tanto, G no es una función continua. Lo anterior es una contradicción dado que $G \in \mathcal{B}_c[a,b]$. Así, (F_n) no converge débilmente en $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$. $\square$

Proposición 4.1.9. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ no tiene la propiedad de Radon-Riesz.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|b-a| \geq 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{n}{n(b-a)-1}\right)(x-a) & \text{si } \ x \in [a, b-1/n], \\ 2n(b-x)-1 & \text{si } \ x \in (b-1/n, b-1/2n], \\ 2n(x-b)+1 & \text{si } \ x \in (b-1/2n, b]. \end{cases}$$

Así, (F_n) es una sucesión en $\mathcal{B}_c[a,b]$. Además:

- (F_n) converge puntualmente en $[a,b]$ a la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = (x-a)/(b-a)$.
- $||F_n||_\infty = 1$, para todo $n \geq 2$.

Por tanto, con base en el teorema 1.1.3, (F_n) converge débilmente a F. Además, $||F_n||_\infty \to ||F||_\infty$. Sin embargo, (F_n) no converge a F en el espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$. □

Si un espacio normado tiene la propiedad de Schur, entonces tiene la propiedad de Radon-Riesz. Por tanto, con base en la proposición 4.1.9, el siguiente resultado se obtiene de manera inmediata.

Proposición 4.1.10. *El espacio $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ no tiene la propiedad de Schur.*

4.2. La completación de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$

La mayoría de las propiedades más importantes que un espacio normado puede tener se preservan bajo los isomorfismos y, en particular, bajo los isomorfismos isométricos. Así, al ser $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ isométricamente isomorfo a $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$, todas las proposiciones que se localizan en la sección anterior también son válidas si se formulan para el espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Por tanto, la siguiente proposición se obtiene de manera inmediata.

Proposición 4.2.1. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ cumple con las siguientes propiedades:*

a) Tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

b) Tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.

c) Tiene una base de Schauder y las propiedades de aproximación y aproximación acotada.

d) Contiene una copia complementada de c_0.

e) No tiene las propiedades de Radon-Riesz y Schur.

f) No es débilmente secuencialmente completo.

Acorde al siguiente teorema, empleando el espacio

$$NBV[a,b] = \left\{ g \in BV[a,b] \mid g(a) = 0 \ \text{ y } \lim_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0), \forall x_0 \in (a,b) \right\},$$

dotado con la norma de la variación

$$||g|| = Var(g; [a,b])$$

también podemos obtenemos información de la estructura algebraica y topológica de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ (proposición 4.2.2).

Teorema 4.2.1. *[47] El espacio $NBV[a,b]$ dotado con la norma de la variación es isométricamente isomorfo al dual topológico de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$.*

Proposición 4.2.2. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia no complementada de l_1.*

Demostración. Acorde al teorema 4.2.1,

$$NBV[a,b] \cong (\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)^*.$$

Por tanto, el dual topológico de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es isométricamente isomorfo a $NBV[a,b]$. Es decir,

$$\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}^* \cong NBV[a,b]. \tag{4.1}$$

Interpretando el teorema 2.3.1 en términos de isomorfismos isométricos, $NBV[a,b]$ contiene un subespacio isométricamente isomorfo a $L_1[a,b]$. Así, con base a (4.1) y al inciso b) del teorema 1.4.8, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia de l_1.

Supongamos que l_1 está como copia complementada en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Entonces, por el teorema 1.4.8, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}^*$ contiene una copia de c_0. Así, acorde a (4.1), $NBV[a,b]$ contiene una copia de c_0. Lo cual es una contradicción. $\square$

El dual de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es isométricamente isomorfo a un espacio normado, acorde a (4.1) de la proposición 4.2.2. Sin embargo, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado.

Proposición 4.2.3. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado.*

Demostración. Acorde a la proposición 4.1.7, el conjunto de los puntos extremales de la bola unitaria cerrada de $(\mathcal{B}_c[a,b], ||\cdot||_\infty)$ es vacío. Dado que los puntos extremales se preservan bajo los isomorfismos isométricos (teorema 1.4.2) se tiene, con base al teorema 4.1.1, que el conjunto de los puntos extremales de la bola unitaria cerrada de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es vacío. Así, al ser $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ de dimensión algebraica infinita se tiene, acorde al teorema 1.4.3, que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es isométricamente isomorfo al dual de ningún espacio normado. $\square$

La proposición anterior menciona que no existe un espacio normado tal que su dual topológico tenga la misma estructura algebraica, métrica y topológica que la de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Lo anterior no excluye la posibilidad de que exista un espacio normado tal que su dual topológico tenga la misma estructura algebraica y topológica que la de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Por lo cual nos preguntamos ¿existe un espacio normado tal que su dual topológico sea isomorfo a $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$?

Proposición 4.2.4. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es isomorfo al dual de ningún espacio normado.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea X un espacio normado y sea X^* el dual topológico de X tal que

$$\widehat{\mathcal{HK}[a,b]} \simeq X^*. \tag{4.2}$$

Dado que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es separable (ver [47]), $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ también es separable. Así, acorde a (4.2), X^* es separable.

Con base a (4.2) y al inciso d) de la proposición 4.2.1, X^* contiene una copia complementada de c_0. Dado que c_0 tiene la propiedad de Dunford-Pettis y no tiene la propiedad de Schur se tiene, con base al teorema 1.4.9, que X contiene una copia de l_1. Por tanto, acorde al teorema 1.4.4, l_1^* es isométricamente isomorfo a $X^*/l_1^{\perp}$. Es decir

$$l_1^* \cong X^*/l_1^{\perp} \tag{4.3}$$

Dado que l_1^* es isométricamente isomorfo a l_∞ se tiene, acorde a (4.3), que

$$l_\infty \simeq X^*/l_1^{\perp}.$$

Con base en esto último y al hecho de que X^* es separable, l_∞ es separable. Lo cual es una contradicción. □

Como una consecuencia inmediata de la proposición 4.2.3 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.5. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no es reflexivo.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Así, el mapeo canónico que va de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ al doble dual topológico de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es suprayectivo y, por tanto,

$$\widehat{\mathcal{HK}[a,b]} \cong \widehat{\mathcal{HK}[a,b]}^{**}.$$

Es decir, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es isométricamente isomorfo al dual topológico de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}^{*}$. Lo cual es una contradicción acorde a la proposición 4.2.3. □

En las demostraciones de las tres proposiciones siguientes hacemos uso del hecho de que c_0 y l_1 están contenidos como copias en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$.

Proposición 4.2.6. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no tiene una base de Schauder que sea acotadamente completa, ni reductora.*

Demostración. Con base en la proposición 4.2.2 y el inciso d) de la proposición 4.2.1, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia de l_1 y una copia complementada de c_0. Por tanto, acorde al teorema 1.4.5, obtenemos la conclusión deseada. □

Proposición 4.2.7. *El conjunto de los operadores débilmente compactos que van $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ en sí mismos no es un subespacio complementado en el espacio normado de los operadores acotados que van de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$.*

Demostración. Con base al inciso d) de la proposición 4.2.1, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia complementada de c_0. Así, acorde al inciso a) del teorema 1.4.6, se obtiene la conclusión deseada. $\square$

Proposición 4.2.8. *Sea E un espacio de Banach. Entonces, el espacio $K(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$:*

a) No es un subespacio complementado en $B(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$.

b) No es isomorfo al dual de ningún espacio normado, ni isomorfo a un subespacio complementado de ningún espacio dual.

Demostración. .

a) Con base al inciso d) de la proposición 4.2.1, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia complementada de c_0. Así, acorde al inciso b) del teorema 1.4.6, obtenemos la conclusión deseada.

b) Acorde al inciso anterior, $K(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$ no es un subespacio complementado en $B(E, \widehat{\mathcal{HK}[a,b]})$. Así, dado que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ tiene la propiedad de aproximación (inciso c) de la proposición 4.2.1) se tiene, con base al teorema 1.4.10, la conclusión deseada.

$\square$

Así como nos da información de la estructura algebraica y topológica de un espacio normado el hecho de saber que este contiene una copia (complementada) de c_0 o l_1. También, podemos obtener información de dicha estructura si sabemos que el espacio normado en cuestión contiene una copia (complementada) de l_p, para algún $1 < p \leq \infty$. Por lo cual nos preguntamos ¿$\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia (complementada) de l_p, para algún $1 < p \leq \infty$?

Proposición 4.2.9. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene una copia complementada de l_p, para todo $1 < p < \infty$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea $p \in (1, \infty)$ tal que l_p es isomorfo a un subespacio complementado de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Dado que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (inciso a) de la proposición 4.2.1), y al preservarse esta propiedad bajo los isomorfismos y los subespacios complementados (teorema 1.2.1), l_p tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Esto último es una contradicción ya que ningún espacio de Banach reflexivo dimensionalmente infinito tiene tal propiedad. $\square$

Proposición 4.2.10. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene una copia de l_∞.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea W un subespacio de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ isomorfo a l_∞. Es decir,

$$W \simeq l_\infty \tag{4.4}$$

Al ser $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ separable (ver [47]), $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es separable y, por tanto, W es separable. Así, acorde a (4.4), l_∞ es separable. Lo cual es una contradicción. □

Acorde a la proposición 4.2.9, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene copias complementadas de los espacios l_p, siendo $1 < p < \infty$. Sin embargo, estos últimos si están contenidos como copias en $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ dado que éste es un hiperplano de $\mathcal{C}[a,b]$ (teorema 4.1.1 y demostración de la proposición 4.1.1).

Cerramos esta sección con dos proposiciones formulados para el espacio $L_1[a,b]$. Estas proposiciones fueron motivadas por las siguientes preguntas:

- Al ser $L_1[a,b]$ un subespacio vectorial de $\mathcal{HK}[a,b]$, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene una copia de $L_1[a,b]$. ¿Esta copia es complementada?
- $\mathcal{HK}[a,b]$ con la topología generada por la norma de Alexiewicz es un espacio ultrabornológico y, por ende, un espacio tonelado. Así, dentro del marco de la teoría de los espacios vectoriales topológicos, $\mathcal{HK}[a,b]$ con dicha toplogía goza de varias propiedades. ¿$L_1[a,b]$ con la topología relativa inducida por la topología de Alexiewicz es un espacio ultrabornológico?

Proposición 4.2.11. *El espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ no contiene una copia complementada de $L_1[a,b]$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea W un subespacio complementado de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ tal que

$$W \simeq L_1[a,b]. \tag{4.5}$$

Con base en el inciso b) de la proposición 4.2.1, $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis. Así, acorde al teorema 1.2.1, W tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis. Por tanto, con base a (4.5) y al teorema 1.4.1, $L_1[a,b]$ tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis. Lo cual es una contradicción. □

Proposición 4.2.12. *El espacio* $L_1[a,b]$ *dotado con la topología generada por la norma de Alexiewicz no es un espacio tonelado.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sean $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_A$ la norma usual y la norma de Alexiewicz en $L_1[a,b]$, respectivamente. Consideremos el mapeo identidad i que va de $(L_1[a,b], ||\cdot||_1)$ a $(L_1[a,b], ||\cdot||_A)$. Es decir,

$$i : (L_1[a,b], ||\cdot||_1) \to (L_1[a,b], ||\cdot||_A) \text{ definido por } i(f) = f.$$

Dado que $||f||_A \leq ||f||_1$, para todo $f \in L_1[a,b]$, i es acotado y, por tanto, tiene gráfica cerrada. Así, al ser i el mapeo identidad, i^{-1} tiene gráfica cerrada. Por tanto, al ser $(L_1[a,b], ||\cdot||_A)$ un espacio tonelado y $(L_1[a,b], ||\cdot||_1)$ un espacio de Banach, i^{-1} es acotado. Como los operadores i y i^{-1} son acotados, $(L_1[a,b], ||\cdot||_A)$ es un espacio de Banach. Así, al ser $L_1[a,b]$ denso en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ es un espacio de Banach. Lo cual es una contradicción. $\square$

Conclusiones

Las conclusiones respecto a los resultados presentados en esta tesis son las siguientes:

I) Respecto al espacio $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$.

a) Aunque $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es un espacio de Banach, sí cumple con otras propiedades que son de interés en la teoría de los espacios normados. Por ejemplo, $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (proposición 3.3.4), una versión fuerte de la propiedad $*$-Dunford-Pettis (proposición 3.3.6) y contiene una copia (complementada) de c_0 (proposición 3.3.1). Hacemos énfasis en que la técnica empleada en la demostración de esto útlimo sirve para demostrar que otros subespacios de c_0 también están contenidos como copias en $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$. Un ejemplo de ello es la proposición 3.3.3 en donde se demuestra que $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ contiene una copia (no complementada) de l_1.

b) En la teoría de los espacios vectoriales topológicos, la topología débil de $(\mathcal{HK}[a,b], ||\cdot||_A)$ no es de mayor utilidad que la topología generada por la norma de Alexiewicz. En el sentido de que esta topología no es tonelada (proposición 3.2.2), aún siendo natural (proposición 3.2.1).

II) Respecto al espacio $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$

a) Aunque $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ es un espacio de Banach, no tiene muchas de las propiedades deseables para los espacios normados. Por ejemplo, no es isomorfo al dual de ningún espacio normado (proposición 4.2.4), no es reflexivo (proposición 4.2.5), no es débilmente secuencialmente completo (inciso f) de la proposición 4.2.1) y no tiene las propiedades de Radon-Riez y Shur (inciso e) de la proposición 4.2.1). Tampoco tiene bases de Schauder que sean acotadamente completas, ni reductoras (proposición 4.2.6). Sin embargo, al saber que $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$ contiene copias no complementadas de los l_p, para todo $1 \leq p < \infty$ (proposición 4.2.9) y una copia complementada de c_0 (proposición 4.2.2) se puede obtener un amplio conocimiento de la estructura algebraica y topológica de $\widehat{\mathcal{HK}[a,b]}$. Ejemplo de esto último son las proposiciones 4.2.7 y 4.2.8.

Gran parte de los resultados originales de esta tesis se encuentran publicados en los siguientes artículos:

- L. A. Gutiérrez, J. A. Escamilla, M. G. Raggi, and J. F. Estrada, The closed graph theorem and the space of Henstock-Kurzweil integrable functions with the Alexiewicz norm, *Abstract and Applied Analysis*, vol. **2013**, Article ID 476287, 4 pages, 2013. doi:10.1155/2013/476287

- L. A. Gutiérrez, J. A. Escamilla, F. J. Mendoza, and M. G. Morales, The use of an isometric isomorphism on the completion of the space of Henstock-Kurzweil integrable functions, *Journal of Function Spaces and Applications*, vol. **2013**, Article ID 715789, 5 pages, 2013. doi:10.1155/2013/715789

- L. A. Gutiérrez and J. A. Escamilla, Some results about completion of the space of Henstock-Kurzweil integrable functions, *Int. Journal of Math. Analysis* **8**(2014), no. 7, 307-315.

- J. A. Escamilla, M. G. Raggi, L. A. Gutiérrez, and F. Hernández, A convergence theorem for the improper Riemann integral of Banach space-valued functions, *International Journal of Mathematical Analysis* **8**(2014), no. 50, 2451-2460.

Teniendo como base los resultados de esta tesis, futuros proyectos de investigación son:

I) Investigar que utilidad podemos obtener de la proposición 3.1.2 en el marco de los espacios vectoriales topológicos.

II) Como las integrales de Henstock y Kurzweil no son equivalentes, en general, para funciones que toman valores en un espacio de Banach X, es deseable hacer un análisis similar al de esta tesis de los siguientes espacios:

a) $\{f : [a, b] \to X \mid f$ es una función Henstock integrable en $[a, b]\}$.

b) $\{f : [a, b] \to X \mid f$ es una función Kuzweil integrable integrable en $[a, b]\}$.

Ambos dotados con la norma de Alexiewicz.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Espacios vectoriales

Definición A.1.1. *Un **espacio vectorial** sobre un campo de escalares $\mathbb{F}$ es un conjunto X de objetos llamados **vectores** junto con una operación $+$ de $X \times X$ a X llamada **adición de vectores** y una operación $\cdot$ de $\mathbb{F} \times X$ a X llamada **multiplicación de vectores por escalares** que satisfacen las siguientes condiciones:*

a) El par $(X, +)$ es un grupo abeliano.

b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, sean $x, y \in X$ y sea 1 la identidad en $\mathbb{F}$. Entonces:

- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$.
- $1 \cdot x = x$.

Un concepto importante en la teoría de los espacios vectoriales es el de independencia lineal: *Sea X un espacio vectorial y sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. El conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es **linealmente independiente** si, para cualquier conjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{F}$ tal que*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

se tiene que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Con el concepto de indepenencia lineal se define la dimensión algebraica de un espacio vectorial: *Sea X un espacio vectorial. Entonces:*

a) *X es de* ***dimensión algebraica finita*** *si, existe un $n \in \mathbb{N}$ (el cual se denota por $dim(X) = n$) tal que cualquier conjunto de $n+1$ vectores, o más, no es linealmente independiente.*

b) *X es de* ***dimensión algebraica infinita*** *si, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de n vectores linealmente independiente. En este caso, $dim(X) = \infty$.*

En general, dados dos espacios vectoriales siempre existe una infinidad de funciones definidas entre ellos. Sin embargo, son de interés aquellas que preservan la estructura algebraica de los espacios vectoriales en cuestión.

Definición A.1.2. *Sean X y Y espacios vectoriales. Un* ***operador lineal*** *o* ***transformación lineal*** *de X a Y es una función $T : X \to Y$ tal que, para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,*

$$T(\lambda x + \beta y) = \lambda T(x) + \beta T(y).$$

El conjunto de los operadores lineales forma un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de funciones: *Sean X y Y espacios vectoriales y sean $T_1, T_2 : X \to Y$ operadores lineales. El conjunto*

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y \,|\, T \text{ es un operador lineal}\}$$

junto con las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas puntualmente por

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x) &= T_1(x) + T_2(x) \\ (\lambda \cdot T)(x) &= \lambda T(x) \end{aligned}$$

forma un espacio vectorial.

A.2. Espacios normados

Definición A.2.1. *Sea X un espacio vectorial. Una* ***norma*** *en X es una función (denotada por $||\cdot||$) que va de X a $\mathbb{R}$ tal que, para cada $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$,* *a)* $||x|| \geq 0$,

b) $||x|| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,

c) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$,

d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Un **espacio normado** es un par $(X, ||\cdot||)$, donde X es un espacio vectorial y $||\cdot||$ es una norma definida en X. Usualmente, cuando no hay lugar a confusión respecto a la norma que está siendo considerada, un espacio normado es denotado por X.

Operadores lineales que van de un espacio normado X a un espacio normado Y que son de importancia en la teoría de los espacios normados son aquellos que tienen relación con las normas de X y Y.

Definición A.2.2. *Sean X y Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. T es **acotado** si, para todo conjunto acotado B en X, $T(B)$ es un conjunto acotado en Y.*

Si X y Y son espacios normados, entonces el conjunto

$$B(X, Y) = \{T : X \to Y \,|\, T \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

forma un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de funciones. En la teoría de los espacios normados también existen otros conjuntos de operadores lineales que son de importancia: operadores débilmente compactos $WK(X, Y)$, operadores completamente continuos $DP(X, Y)$ y operadores compactos $K(X, Y)$.

Teorema A.2.1. *Sean X y Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal.*

a) *Si T es compacto, entonces T es débilmente compacto y completamente continuo.*

b) *Si T es débilmente compacto o completamente continuo, entonces T es acotado.*

Acorde al teorema anterior,

$$K(X,Y) \subseteq WK(X,Y) \subseteq B(X,Y) \subseteq L(X,Y).$$

$$K(X,Y) \subseteq DP(X,Y) \subseteq B(X,Y) \subseteq L(X,Y).$$

Dado un espacio normado X, dos conjuntos importantes de operadores acotados son el dual y doble dual topológicos de X.

Definición A.2.3. *Sea X un espacio normado. El **dual topológico** de X se denota y define como*

$$X^* = \{T : X \to \mathbb{F} \,|\, T \text{ es un operador lineal acotado}\}.$$

*A los elementos de X^* se les llama **funcionales lineales acotados**, y se les denota por x^*. El **segundo dual topológico** de X, el cual lo denotaremos por X^{**}, es el dual topológico de X^*.*

Sea X un espacio normado y sea $x_0 \in X$. El funcional $Q_{x_0} : X^* \to \mathbb{F}$ definido por

$$Q_{x_0}(x^*) = x^* x_0$$

es un elemento del dual topológico de X^*. Es decir, $Q_{x_0} \in X^{**}$. Al mapeo $Q : X \to X^{**}$ que cumple con la propiedad de que a cada $x_0 \in X$ le asigna el funcional Q_{x_0} se le conoce como el *mapeo natural,* o el *embebimiento canónico*, de X.

Definición A.2.4. *Sea X un espacio normado. X es reflexivo si, X es isométricamente isomorfo a X^{**} bajo el mapeo natural de X.*

Si X es un espacio normado, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = ||x - y||$$

es una métrica que está relacionada con la estructura algebraica de X.

Teorema A.2.2. *Sea X un espacio normado dotado con la métrica generada por su norma. La suma de vectores $+ : X \times X \to X$ y la multiplicación de vectores por escalares $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ son funciones continuas.*

Dado que un espacio normado tiene, considerando en él la métrica generada por su norma, una estructura de espacio métrico, es natural preguntarse si tal espacio métrico es completo.

Definición A.2.5. *Sea X un espacio normado dotado con la métrica generada por su norma. X es un **espacio de Banach** si, toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

En algunas partes de esta tesis decimos que una norma $||\cdot||$ en X es de Banach si, la métrica generada por $||\cdot||$ cumple la definición anterior.

En todo espacio vectorial se puede definir una norma, aunque no siempre una norma de Banach. Existen criterios para determinar cuándo esto es posible.

Teorema A.2.3. [35] *Sea X un espacio vectorial y sea $\aleph_0$ la cardinalidad del conjunto de los números naturales. X es un espacio de Banach bajo alguna norma si y sólo si la $dim(X) < \aleph_0$ o $dim(X)^{\aleph_0} = dim(X)$.*

Definición A.2.6. *Sea X un espacio normado y sea d la métrica generada por la norma de X. La **topología fuerte** de X (la cual denotamos por $\tau_{||\cdot||}$) es la topología inducida por d.*

A.3. Espacios vectoriales topológicos

Antes de enunciar la definición de espacio vectorial topológico (definición A.3.2) mencionaremos los conceptos de conjunto convexo, balanceado y absorbente.

Definición A.3.1. *Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$.*

*a) A es **convexo** si, $\lambda A + (1-\lambda)A \subset A$, para todo $\lambda \in [0,1]$.*

*b) A es **balanceado** si, $\lambda A \subset A$, para todo $|\lambda| \leq 1$.*

*c) A es **absorbente** si, para todo $x \in X$ existe $\lambda_x > 0$ tal que $x \in \lambda A$, para todo $\lambda \geq \lambda_x$.*

Definición A.3.2. [1] *Sea X un espacio vectorial y sea τ una topología Hausdorff en X.*

[1] Algunos autores no asumen que τ sea Hausdorff al definir una topología vectorial. Sin embargo, la mayoría de los resultados de la teoría de los espacios vectoriales topológicos asumen tal propiedad.

a) τ *es una* ***topología vectorial*** *si, las operaciones vectoriales de suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares son funciones continuas bajo* τ*.*

b) (X, τ) *es un* ***espacio vectorial topológico*** *si,* τ *es una topología vectorial.*

Una característica de las topologías vectoriales es que se pueden determinar a través de una base de vecindades del origen. Por tal motivo, varios conceptos de la teoría de los espacios vectoriales topológicos están en términos de las vecindades del origen. Una clasificación de los espacios vectoriales topológicos está en términos del concepto de *espacio localmente convexo.*

Definición A.3.3. *Sea* X *un espacio vectorial topológico.* X *es un* ***espacio localmente convexo*** *si, existe una base local del origen de* X *conformada por conjuntos convexos.*

Dentro de la clase de los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, los espacios tonelados y ultrabornológicos son de gran importancia.

Definición A.3.4. *Sea* X *un espacio localmente convexo.* X *es un* ***espacio tonelado*** *si, todo conjunto convexo, balanceado, absorbente y cerrado de* X *es una vecindad del origen.*

Definición A.3.5. *Sea* X *un espacio localmente convexo.* X *es un* ***espacio ultrabornológico*** *si, es un límite inductivo de espacios de Banach.*

Dejando aparte a los espacios de Fréchet, posiblemente los mejores espacios desde el punto de vista del análisis funcional son los espacios ultrabornolgícos.

Al lector interesado en conocer acerca de la teoría elemental de los espacios vectoriales topológicos lo remitimos a la referencia [49].

Bibliografía

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, New York, USA, 2006.

[2] A. Alexiewicz, Linear functionals on Denjoy integrable functions, *Colloq. Math.* **1**(1948), 289-293.

[3] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration,* Graduate Studies in Mathematics vol. 32, American Mathematical Society, USA, 2000.

[4] R. G. Bartle, N. Dunford, and J. T. Schwartz, Weak compactness and vector measures, *Canad. J. Math.* **7**(1955), 289-305.

[5] M. Botsko, Unified Treatment of Various Theorems in Elementary Analysis, *Amer. Math. Monthly* **94**(1987), 450-452.

[6] M. Botsko, The Use of Full Covers in Analysis, *Amer. Math. Monthly* **96**(1989), 328-333.

[7] P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, *Acta. Math.,* **19**(1894).

[8] A. Curnock, An introduction to extreme points and applications in isometric Banach space theory, *in Proceedings of the Analysis Group,* Goldsmiths College, University of London, May 1998, part of early doctoral work.

[9] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces,* Springer, New York, USA, 1984.

[10] N. Dunford and B. J. Pettis, Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **47**(1940), 323-392.

[11] G. Emmanuele, Remarks on the uncomplemented subspace $W(E, F)$, *Journal of Functional Analysis* **99**(1991), no. 1, 125-130.

[12] J. A. Escamilla, M. G. Raggi, L. A. Gutiérrez, and F. Hernández, A Convergence Theorem for the Improper Riemann Integral of Banach Space-valued Functions, *International Journal of Mathematical Analysis* **8**(2014), no. 50, 2451-2460.

[13] T. Figiel and W. B. Johnson, The approximation property does not imply the bounded approximation property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **41**(1973), 197-200.

[14] J. L. Gámez, Integraciones de Denjoy de funciones con valores en espacios de Banach, *Tesis Doctoral*, Universidad Complutense de Madrid, 1997.

[15] A. Gilioli, Natural ultrabornological, noncomplete, normed function spaces, *Arch. Math.* **61**(1993), no. (5), 465-477.

[16] R. A. Gordon, Another look at a convergence theorem for the Henstock integral, *Real Analysis Exchange* **15**(1989-1990), no.2, 724-728.

[17] R. A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* Graduate Studies in Mathematics vol. 4, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1994.

[18] R. A. Gordon, The use of tagged partitions in elementary real analysis, *Amer. Math. Monthly* **105**(1998), no.2, 107-117 and 886.

[19] A. Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\mathcal{C}(K)$, *Canad. J. Math.* **5**(1953), 129-173.

[20] L. A. Gutiérrez and J. A. Escamilla, Some Results about Completion of the Space of Henstock-Kurzweil Integrable Functions, *Int. Journal of Math. Analysis* **8**(2014), no. 7, 307-315.

[21] L. A. Gutiérrez, J. A. Escamilla, F. J. Mendoza, and M. G. Morales, The Use of an Isometric Isomorphism on the Completion of the Space of Henstock-Kurzweil Integrable Functions, *Journal of Function Spaces and Applications* vol. **2013**, Article ID 715789, 5 pages, 2013. doi:10.1155/2013/715789

[22] L. A. Gutiérrez, J. A. Escamilla, M. G. Raggi, and J. F. Estrada, The Closed Graph Theorem and the Space of Henstock-Kurzweil Integrable Functions with the Alexiewicz Norm, *Abstract and Applied Analysis* vol. **2013**, Article ID 476287, 4 pages, 2013. doi:10.1155/2013/476287

[23] H. Hake, Über de la Vallée Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinitionen von Perron, *Math. Annalen* **83**(1921), 119-142.

[24] R. Henstock, Definitions of Riemann type of the variational integrals, *Proc. Lond. Math. Soc.* **11**(1961), no. 3, 402-418.

[25] R. Henstock, *Lectures on the theory of integration,* World Scientific Pub. Co., Singapore, 1988.

[26] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, IV, *Nachr. Kgl. Gesells. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1906), 157-227.

[27] C. S. Höning, There is no natural Banach space norm on the space of Kurzweil-Henstock-Denjoy-Perron integrable functions, *in Proceedings of the 30th Seminario Brasileiro de Análise,* 1989, 387-397.

[28] R. C. James, Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math. (2)*, **52**(1950), 518-527.

[29] J. A. Jaramillo, A. Prieto, and I. Zalduendo, Sequential convergences and Dunford-Pettis properties, *Annales Academia Scientiarum Fennicae Mathematica* **25**(2000), 467-475.

[30] J. Johnson, Remarks on Banach spaces of compact operators, *Journal of Functional Analysis* **32**(1979), no. 3, 304-311.

[31] M. I. Kadets, On strong and weak convergence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **122**(1958), 13-16.

[32] M. I. Kadets, A proof of the topological equivalence of all separable infinite dimensional Banach spaces, *Functional Anal. Appl.* **1**(1967), 53-62.

[33] S. Karlin, Bases in Banach spaces, *Duke Math. J.* **15**(1948), 971-985.

[34] V. L. Klee, Mappings into normed linear spaces, *Fund. Math.* **49**(1960-1961), 25-34.

[35] A. H. Kruse, Badly incomplete normed linear spaces, *Mathematische Zeitschrift* **83**(1964), 314-320.

[36] J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czechoslov. Math. J.* **7**(1957), no. 82, 418-449.

[37] J. Mawhin, *Analyse,* 2nd Edition, DeBoeck Universite, 1997.

[38] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral,* Carus Monograph, no. 20, Mathematical Association of America, Washington, 1980.

[39] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, USA, 1998.

[40] E. H. Moore, On the foundations of the theory of linear integral equations, *Bull. Amer. Math.* **46**(1911-1912), 151-161.

[41] J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien* **122**(1913), 1295-1438.

[42] F. Riesz, Sur la convergence en moyenne, I, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **4**(1928-1929), 58-64.

[43] F. Riesz, Sur la convergence en moyenne, II, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **4**(1928-1929), 182-185.

[44] S. Saks, Sur les fonctions d'intervalle, *Fundamenta Math.*, **10**(1927), 211-224.

[45] J. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **151**(1920), 79-111.

[46] P. Shanahan, Unified Proof of Several Basic Theorems of Real Analysis, *Amer. Math. Monthly* **79**(1972), 895-898.

[47] C. Swartz, *Introducction to gauge integrals*, World Scientific Publishing Co., Signapore, 2001.

[48] S. J. Szarek, A Banach space without a basis which has the bounded approximation property, *Acta Math.* **159**(1987), 81-98.

[49] A. Wilansky, *Modern Methods in Topolological Vector Spaces*, McGraw-Hill Inc., USA, 1978.