



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICO MATEMÁTICAS

DIFICULTADES QUE ENFRENTAN ESTUDIANTES  
DE SECUNDARIA AL RESOLVER PROBLEMAS  
VERBALES RELACIONADOS CON SISTEMAS DE  
ECUACIONES LINEALES

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A :

JOSE LUIS GONZÁLEZ TIRADO

Directora de tesis

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

PUEBLA, PUE., ENERO 2025



*A ti que estás leyendo esto, no te rindas.  
“Shoshin Shogai”.  
“Con el mismo espíritu que se inició”.*

## AGRADECIMIENTOS

Dentro de mi corta existencia he aprendido que las cosas no siempre serán como las planeamos, por eso quiero agradecer primero a mis padres por darme el preciado regalo de la vida. Espero que estén bien dondequiera que estén y que quizá, cuando mi tiempo en el mundo terrenal se termine, nos volveremos a encontrar.

A mis profesores, que me brindaron el conocimiento y herramientas necesarias para llegar a donde estoy, en especial a la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, que me brindó su tiempo y apoyo para que esta tesis se haya terminado.

A Diana Cervantes, quién me ayudó a desarrollarme a nivel académico y emocional, quien me ha alentado a romper los patrones familiares.

A Rafael Flores, quién me ayudó a desarrollarme a nivel físico y espiritual, quien me ha motivado a participar en diversos eventos deportivos y quien me llevó a ser campeón nacional de Kobudo en más de una ocasión.

Ambos, sin conocerme, me brindaron su apoyo incondicional, me ayudaron a crecer en todos los ámbitos, me dieron consejos y palabras de aliento cuando más lo necesitaba. Mis grandes mentores.

A mi bisabuelita Amparo Tirado, que siempre le dio cariño y amor a todos sus hijos, nietos y bisnietos. La matriarca de la familia que siempre vio por todos, y que desafortunadamente falleció el año en el que entré a la facultad. Te extrañamos.

A mi hermana que es la persona que más me conoce, con quien he compartido experiencias de todo tipo. Y de quien estoy muy orgulloso por todo lo que ha logrado.

Por último, pero no por eso menos importante, a mis tías: Guadalupe y Teresa. Que nos abrieron las puertas de su casa cuando más lo necesitamos mi hermana y yo. Quiénes han velado por nosotros desde el día de nuestro nacimiento, nos han dado amor y cariño sin esperar nada a cambio. Quienes nos han enseñado las tradiciones familiares e inculcado valores. Si mi hermana y yo somos quienes somos hoy en día, es gracias a ellas. Las amo mucho.

A todos, en verdad, muchas gracias.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
<b>CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>5</b>
1.1 Antecedentes .....	5
1.2 Pregunta general de investigación .....	7
1.3 Objetivo general de investigación.....	8
1.4 Justificación.....	8
1.5 Viabilidad de la investigación.....	9
<b>CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>10</b>
2.1 Ecuaciones.....	10
2.2 Sistemas de ecuaciones lineales .....	11
2.2.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.....	13
2.2.2 Tipos de soluciones en sistemas de ecuaciones lineales .....	14
2.3 Problema y problema verbal.....	15
2.3.1 Tipos de problemas .....	17
2.3.2 Problemas verbales .....	18
2.4 Dificultad y dificultad de aprendizaje .....	20
2.5 Clasificación de dificultades.....	21
2.6 Dificultades utilizadas como referente .....	26
<b>CAPÍTULO 3: MÉTODO .....</b>	<b>28</b>
3.1 Entrevista clínica.....	29
3.2 Instrumentos de recolección de datos.....	31
3.3 Procedimiento de recolección y análisis de datos .....	35
<b>CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS .....</b>	<b>37</b>
4.1 Análisis de las respuestas de “G” .....	37
4.2 Análisis de las respuestas de “S” .....	46
4.3 Síntesis de los resultados.....	52
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>56</b>
<b>RECOMENDACIONES .....</b>	<b>58</b>
<b>ANEXO 1: ENTREVISTA CON EL PARTICIPANTE G.....</b>	<b>63</b>
<b>ANEXO 2: ENTREVISTA CON EL PARTICIPANTE S .....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXO 3: CONSENTIMIENTO ESCRITO DE G Y S.....</b>	<b>83</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Dificultades utilizadas como referente.....	27
Tabla 2 Dificultades identificadas en G.....	52
Tabla 3 Frecuencia de las dificultades identificadas en G .....	53
Tabla 4 Dificultades identificadas en S .....	54
Tabla 5 Frecuencia de las dificultades identificadas en S.....	55

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Sistema de ecuaciones lineales .....	12
Figura 2 Sistema de ecuaciones no lineales .....	12
Figura 3 Sistema compatible determinado .....	14
Figura 4 Sistema compatible indeterminado .....	15
Figura 5 Sistema incompatible .....	15
Figura 6 Modelo propuesto por Borja (2014) .....	25
Figura 7 Problemas establecidos por ChatGPT .....	32
Figura 8 Problema 1 de G .....	38
Figura 9 Problema 2 de G .....	40
Figura 10 Problema 3 de G .....	41
Figura 11 Problema 4 de G .....	43
Figura 12 Problema 5 de G .....	44
Figura 13 Problema 1 de S .....	46
Figura 14 Problema 2 de S .....	47
Figura 15 Problema 3 de S .....	49
Figura 16 Problema 4 de S .....	50
Figura 17 Problema 5 de S .....	51

## RESUMEN

Dentro de la educación básica en México, uno de los mayores problemas a nivel secundaria en los estudiantes son las matemáticas, especialmente cuando sufren la transición entre la aritmética y el álgebra. De ahí nace la curiosidad por entender mejor los desafíos que las matemáticas representan para los estudiantes, y así proponer estrategias para mejorar el aprendizaje. La presente tesis fue escrita con el objetivo de estudiar las distintas dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de tercer grado de secundaria al momento de resolver problemas verbales relacionados con los sistemas de ecuaciones con dos variables. Dentro de la recopilación de datos se hallaron algunas dificultades establecidas por el autor principal de donde partió esta investigación, por ejemplo: reconocer la estructura del sistema de ecuaciones, relacionar los datos y las incógnitas, manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones, dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas y traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático. Algunas dificultades establecidas en esa investigación no fueron encontradas y se concluye que es debido al procedimiento matemático que los participantes utilizaron. Sin embargo, se hallaron tres dificultades más en esta investigación que no fueron establecidas en las investigaciones previas a los problemas verbales, estas dificultades son: dificultades de destreza, dificultades de comprensión de problemas y abuso indiscriminado del método de ensayo y error.

Palabras clave: dificultades, sistemas de ecuaciones, problemas verbales.

## **ABSTRACT**

Within basic education in Mexico, one of the biggest problems at the junior high school or high school for students is mathematics, especially when they undergo the transition between arithmetic and algebra. Hence the curiosity to better understand the challenges that mathematics represents for students, and thus propose strategies to improve learning. The present thesis was written with the objective of studying the different difficulties faced by ninth grade high school students when solving verbal problems related to systems of equations with two variables. Within the data collection, some difficulties established by the main author of this research were found, for example: recognizing the structure of the system of equations, relating the data and the unknowns, handling and organizing the data in the system of equations, difficulty in validating the procedure and formulation in light of the answers and translation of the verbal statement into mathematical language. Some difficulties established in that research were not found and it is concluded that it is due to the mathematical procedure that the participants used. However, three more difficulties were found in this research that were not established in the previous research on verbal problems, these difficulties are: dexterity difficulties, difficulties in understanding problems and indiscriminate abuse of the trial and error method.

Key words: difficulties, systems of equations, verbal problem

## INTRODUCCIÓN

Dentro de la educación en México, la primera estimulación del razonamiento y pensamiento científico se tiene dentro de la Educación Inicial (0 – 3 años). De acuerdo con el panorama de los contenidos de la Fase 1 de la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2022a) el campo formativo “Saberes y pensamiento científico” da una estimulación temprana al explorar e investigar el mundo, y se desarrolla el pensamiento a través de la curiosidad, los sentidos y la creatividad. Durante los primeros años de vida del ser humano se aprende por medio de juegos y sensaciones, así como comparaciones en su vida cotidiana.

Durante la Fase 2 comprendida como los tres años de preescolar, se reconocen los números y el conteo al igual que la relación entre números y cantidades; en la Fase 3 (1° y 2° de primaria) conocen las operaciones básicas de adición y sustracción; en la Fase 4 (3° y 4° de primaria) trabajan con multiplicaciones, divisiones, fracciones y decimales; en la Fase 5 dan un vistazo a potencias, raíces y comienzan a usar símbolos para representar números desconocidos; en la Fase 6 (1°, 2°, 3° de secundaria) estudian el álgebra básica: ecuaciones lineales, cuadráticas, funciones, factorización, entre otros (SEP, 2022b).

A pesar de su importancia, la dificultad que presentan las matemáticas en general ha generado un rechazo por parte de la población, incluso hay estudiantes que podrían desarrollar un temor por las matemáticas, según Meza et al. (2024) “El temor hacia las matemáticas en las personas se atribuye principalmente al fracaso” (p. 5).

Específicamente en México, se puede observar este rechazo en el desempeño que presenta el país en la prueba PISA (Programme for International Student Assessment) realizada por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). Esta prueba evalúa las habilidades y conocimientos de estudiantes de 15 años en lectura, matemáticas y ciencias, en la cual el desempeño de México ha sido motivo de análisis y debate a lo largo de los años desde la primera edición de la prueba en el año 2000.

Estudiar el motivo del bajo desempeño de las matemáticas podría sonar como un trabajo complicado y arduo, pero se puede aportar con un grano de arena que sumará a las investigaciones futuras, por ejemplo, estudiar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas verbales. Este estudio sobre las dificultades ha llamado la atención de muchos investigadores tales como Borja (2014), Orozco (2014), Melissa y Utami (2023), Sandoval (2024) entre otros.

Específicamente, las dificultades que enfrentan los estudiantes de secundaria al resolver problemas verbales relacionados con sistemas de ecuaciones con dos incógnitas es un tema de interés que puede ayudar a mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje y ayudar a los estudiantes para comprender a mayor profundidad este tema.

De acuerdo con la SEP (2022b) el primer vistazo a los sistemas de ecuaciones lineales se tiene durante el segundo grado de secundaria donde los estudiantes solucionan sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. A partir de este punto, los estudiantes se encontrarán con este tema de forma regular conforme avanzan en su formación educativa, algunos podrán comprender y desarrollar mejor el tema, sin embargo, muchos otros tendrán que hacer un esfuerzo mayor para aprender o al menos comprenderlo de manera superficial.

Algunos padres de familia o los mismos estudiantes optarán por contratar asesores privados, acudir a cursos extracurriculares o cualquier otra forma de regularización con el fin de repasar, comprender o reaprender los temas vistos en sus clases de matemáticas

Pueden existir distintos motivos por los que a los estudiantes de tercer grado de secundaria se les puede dificultar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, entre ellos están los cognitivos, psicológicos, sociales, didácticos y pedagógicos (Orbe, 2015).

Los sistemas de ecuaciones se pueden encontrar al resolver muchos problemas de la vida real, desde ejemplos sencillos dentro de la vida cotidiana hasta aplicaciones y sistemas más complejos dentro de la educación superior, donde se convierten en una herramienta fundamental en una amplia gama de disciplinas teóricas y aplicadas, ya que

permiten resolver problemas que involucran múltiples variables y relaciones interdependientes. Sin importar el lugar, las matemáticas están presentes en las diversas situaciones de la vida real, en particular los sistemas de ecuaciones con dos o más variables.

Este proyecto se enfocó en estudiar, por medio de una entrevista clínica, a dos estudiantes de segundo grado de secundaria para identificar las dificultades u obstáculos que pueden enfrentarse al momento de resolver problemas verbales referentes a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se le plantearon cinco problemas verbales a los participantes para que los resolvieran al mismo tiempo que se les realizó la entrevista clínica con la finalidad de explorar su pensamiento y procesos cognitivos.

En el capítulo 1 se muestran algunos antecedentes relacionados con la investigación relacionados con las dificultades en general. A grandes rasgos, muchos autores que trabajan en educación matemática concuerdan en que existe una dificultad específica en los estudiantes: las traducciones entre el lenguaje normal o cotidiano y el lenguaje matemático. Esta dificultad es muy común en las personas, llevar las palabras comunes a un lenguaje matemático es complicado si no tienen la experiencia adecuada, pero ¿Acaso no existen más dificultades? Por medio de la pregunta y el objetivo general, se busca identificar las dificultades que los estudiantes de secundaria se enfrentan ante los problemas verbales.

En el capítulo 2 daremos un vistazo a los conceptos que la literatura tiene para las ecuaciones, sistemas de ecuaciones, métodos de resolución y los tipos de soluciones, problemas y problemas verbales, la diferencia entre dificultad de aprendizaje y dificultad en el aprendizaje. Así como las clasificaciones de estas últimas dentro de los trabajos que otros autores han realizado alrededor de las dificultades en las matemáticas.

En el capítulo 3 se habla sobre el método utilizado, se explicará el tipo de investigación y las herramientas de recolección de datos utilizadas para esta investigación: la entrevista clínica y los problemas verbales. Al igual que el procedimiento que se llevó a cabo para recabar dichos datos.

En el capítulo 4 se muestra a detalle el análisis de los datos, donde se realizará una triangulación por medio de la entrevista y las anotaciones en los procedimientos de los estudiantes para identificar las dificultades que presenten. Dentro de este análisis se hallaron algunas dificultades establecidas por Borja (2014), y se deduce que aquellas que no aparecen en los estudiantes son porque no lograron establecer los sistemas de ecuaciones como tal dentro de su procedimiento. Por otro lado, se hallaron algunas dificultades establecidas por Widada et al. (2020) y Wahyuni et al. (2023) dentro de otras áreas específicas de las matemáticas, pero relacionadas con los sistemas de ecuaciones.

# CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Antecedentes

Como se ha mencionado en la introducción, existen diversos autores que mencionan las dificultades que presentan los estudiantes en las matemáticas en general. Segura (2004) en su artículo detalla la construcción y aplicación de una secuencia didáctica para facilitar el aprendizaje y solución de sistemas de ecuaciones lineales; Ramírez et al. (2009) reporta los resultados donde clasifica las conceptualizaciones que tienen los estudiantes universitarios de primer ingreso de Costa Rica en geometría y sistemas de ecuaciones; Díaz-Levicoy (2010) en su trabajo presenta una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales mediante la resolución de problemas de contexto; Borja (2014) trabaja con la identificación de dificultades en la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y establece sus características en una investigación cualitativa con una población de estudio que reside en Quibdó, Colombia; Orbe (2015) presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner; Vega (2017) propone un acercamiento didáctico donde se considere a la visualización y variación de parámetros como elementos indispensables para introducir los sistemas de ecuaciones lineales en el nivel secundaria; Reinoso (2019) busca una interacción estudiantil adecuada y propiciar al estudiante un cambio en su metodología de representar y resolver problemas.

Los trabajos antes mencionados, aunque tienen objetivos diferentes, concuerdan en una cosa: los estudiantes tienen problemas al momento de traducir y/o entender el lenguaje matemático. Algunos autores solo mencionan ese problema de forma superficial, otros agregan otras observaciones como los problemas y errores aritméticos. Borja por su parte, consigue identificar más de estas dificultades en estudiantes de Colombia. Pero ¿Qué sucede en México?

En 2018 el puntaje promedio de México en la prueba PISA fue de 420, quedando por debajo del promedio de la OCDE de 487, mientras que la versión más reciente de la prueba realizada en 2022 el país mexicano solo obtuvo un puntaje de 407, siendo el promedio de 478. En esta última versión, México ocupó el lugar 35 de 37 países que fueron evaluados y que pertenecen a la OCDE, quedando únicamente por encima de Costa Rica y Colombia (OCDE, 2019; 2023).

De esta manera, aunque México ha mantenido un desempeño consistente en las evaluaciones PISA, siempre ha estado por debajo del promedio de la OCDE y no ha observado una mejoría significativa en sus puntuaciones. Incluso, si analizamos el puntaje promedio de la OCDE, hay una tendencia a la baja en la asignatura de matemáticas.

Como se mencionó en la introducción, se ha observado que muchos estudiantes enfrentan dificultades significativas al aprender y aplicar los conceptos relacionados con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Estas dificultades pueden surgir debido a una variedad de factores, que van desde la falta de comprensión conceptual hasta problemas con las habilidades de resolución de problemas y el razonamiento algebraico (Melisa y Sri, 2023; Orbe, 2015).

Algunos estudiantes aún tienen errores interpretativos en el lenguaje matemático y para escribir en símbolos matemáticos algunas expresiones de enunciados en problemas verbales, lo cual presentaría un obstáculo epistemológico (Ramírez et al., 2009). En el colegio se acostumbra, generalmente, a resolver problemas matemáticos de forma automatizada, por medio de repeticiones siguiendo un mismo algoritmo, esto no se limita únicamente al tema de sistemas de ecuaciones, lo podemos notar desde el conteo y aritmética básica hasta los temas más avanzados como el cálculo diferencial e integral. Esta automatización, en ocasiones, puede ser la causa de las dificultades que los estudiantes llegan a presentar, un ejemplo es cuando se enseñan ecuaciones con una variable específica como "X" y después se enfrentan a ecuaciones con "Z" (Ramírez et al., 2009). Dicho esto, no es igual realizar un ejercicio que resolver un problema, para un ejercicio basta con aplicar el algoritmo de solución de forma mecánica, mientras que para

resolver un problema pueden existir varios caminos para encontrar su solución (Díaz-Levicoy, 2010).

Si los estudiantes consideran que en las matemáticas es esencial el uso de procedimientos algorítmicos, ejecutados con una rapidez relativa, podrían producirse ciertas creencias como: si no se aprenden datos o procedimientos con rapidez entonces es una señal de inferioridad respecto a la inteligencia; no responder rápido o no usar un procedimiento eficaz implica lentitud; no responder correctamente implica deficiencia mental; no responder es señal de una estupidez absoluta; solo existe una manera de resolver un problema; comprender las matemáticas es algo que solo está al alcance de los genios (Font, 1994).

Para evitar que las matemáticas se reduzcan a utilizar únicamente un algoritmo para resolver problemas, es importante que se le plantee al estudiante problemas que lo saquen de esa zona de confort. Utilizando, por ejemplo, problemas de la vida cotidiana que impliquen el tema a tratar. Relacionar conocimientos con problemas de la vida cotidiana permite mejorar la comprensión de la abstracción presentada en primera instancia como teoría (Meza et al., 2024).

## **1.2 Pregunta general de investigación**

Ahora bien, si hablamos de problemas verbales, de acuerdo con la SEP (2022b) uno de los procesos de desarrollo de aprendizaje dentro del primer año de secundaria es modelar y resolver problemas cuyo planteamiento es una ecuación lineal. Por lo que podemos decir que los estudiantes, desde su primer año de secundaria, aprenden a resolver problemas verbales utilizando lenguaje algebraico, pero confunden palabras como “aumentado”, “disminuido”, “en total”, “el doble de”, “diez más que” entre otras expresiones, esto sería común en este primer año debido a la falta de experiencia. Sin embargo, conforme avanzan en su formación académica, este obstáculo persiste en los estudiantes, lo que nos lleva a formularnos la siguiente pregunta: ¿Qué dificultades

enfrentan dos estudiantes de tercer grado de secundaria al momento de resolver problemas verbales relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas?

### **1.3 Objetivo general de investigación**

Dado que uno de los antecedentes en el tema específico de las dificultades en problemas verbales es el trabajo que presenta Borja (2014), en el que establece una lista de dificultades encontradas durante su investigación. El objetivo de esta investigación es: identificar las dificultades que enfrentan dos estudiantes de tercer grado de secundaria al momento de resolver problemas verbales relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

### **1.4 Justificación**

Es importante que los estudiantes razonen en el proceso para resolver un problema, ya sea de índole matemático o de su día a día. Deben buscar, encontrar y escoger la mejor opción que les brinde una solución de dicho problema y así optimizar los recursos con los que cuentan. De acuerdo con Meza et al. (2024):

El desarrollo del razonamiento lógico matemático surge a partir de la comprensión matemática, esta inicia cuando el ser humano después de su nacimiento interactúa por primera vez con objetos y realiza sus primeras acciones con ellos, después avanza hacia un nivel más abstracto. (p. 12)

Esto nos indica que el ser humano ha estado en constante aprendizaje de las matemáticas que estimula su razonamiento lógico matemático. En los primeros años de vida, el ser humano aprende por medio de juegos, un ejemplo se puede ver en un niño de 4 años que juega a la tienda, aprende el concepto de intercambio para adquirir bienes. Esto es una situación que ha visto al acompañar a un adulto y lo refuerza por medio del juego. Lo mismo sucede con temas más avanzados como los sistemas de ecuaciones.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un tema fundamental en el estudio de las matemáticas en secundaria (SEP, 2022b), esta habilidad

no solo proporciona una herramienta de suma importancia para enfrentar los temas matemáticos del resto de su formación educativa, sino que también tiene un papel fundamental para comprender conceptos matemáticos más formales como diagonalización de matrices, combinación lineal, dependencia e independencia lineal dentro del álgebra lineal (Orozco, 2014). Incluso los sistemas de ecuaciones lineales tienen sus aplicaciones en investigaciones interdisciplinarias, desde economía y ciencias sociales hasta ingenierías y ciencias exactas.

Al estudiar el caso específico de dos estudiantes de secundaria, este proyecto busca identificar las áreas de dificultad que enfrentan estos estudiantes al resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Al comprender mejor las dificultades individuales de cada participante, se pueden desarrollar estrategias de enseñanza y apoyo más efectivas y/o personalizadas para ayudarles a superar dichas dificultades y mejorar su comprensión y dominio sobre el tema.

De igual forma, al investigar este tema a nivel individual, se puede obtener valiosa información acerca de las estrategias de enseñanza y aprendizaje que podrían ser más útiles y efectivas para abordar estas dificultades. También, esta información no solo beneficiará a los dos participantes involucrados, sino que también puede tener implicaciones más amplias en la enseñanza de las matemáticas en general.

### **1.5 Viabilidad de la investigación.**

Para cerrar este capítulo podemos decir que esta investigación fue viable y factible en términos de acceso a los participantes, recursos y materiales didácticos utilizados, recopilación de datos, ética, análisis de datos y aplicabilidad de los resultados.

## CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

### 2.1 Ecuaciones

Para la mayoría quizá fue complejo el proceso de transición de la aritmética básica al álgebra, pues se deja de trabajar con números y operaciones simples para trabajar con conceptos abstractos como son las variables. Algunos profesores implementarán ejercicios para buscar un número que cumpla con ciertas condiciones, ya sea de forma verbal o expresada matemáticamente. Por ejemplo:

- $2 + \square = 5$
- $\square - 3 = 10$
- $8 * \square = 64$
- $22 + 3 * \square = 40$

Esto como una introducción a lo que está por venir, explicando que el cuadro vacío representará el número deseado (solución). Algunos otros profesores entrarán de lleno al tema de las ecuaciones, utilizando directamente la variable más común: “ $x$ ”. Pero ¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una expresión matemática que establece una igualdad entre dos expresiones. En otras palabras, una ecuación es una afirmación de que dos cantidades, expresadas a través de variables y números, son iguales. Borowski y Borwein (2002) definen una ecuación como:

Una fórmula que afirma que dos expresiones tienen el mismo valor; es una ecuación idéntica (normalmente llamada identidad), que es cierta para cualquier valor de las variables, o una ecuación condicional, que sólo es cierta para algunas de las variables (las raíces de la ecuación). Por ejemplo,  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$  es una identidad y  $x^2 - 1 = 3$  es una ecuación condicional con raíces  $x = \pm 2$ .  
(p. 186)

Mientras que Tossavainen et al. (2011) define que una ecuación es “un enunciado matemático, dado en símbolos, que dice que dos objetos compatibles son iguales o equivalentes, es decir, cualquier expresión de la forma  $A = B$  es una ecuación siempre que  $A$  y  $B$  sean objetos matemáticos compatibles” (p. 2),

Las ecuaciones pueden calificarse en varios tipos según el grado y la naturaleza de las expresiones involucradas: ecuaciones algebraicas, incluyen solo números y variables con operaciones aritméticas; ecuaciones exponenciales, donde las variables están en el exponente; ecuaciones logarítmicas, las variables están dentro de un logaritmo; ecuaciones diferenciales, involucran derivadas de funciones; ecuaciones integrales, contienen (como lo indica su nombre) integrales de funciones. Resolver cualquier tipo de ecuación implica encontrar el valor o valores que hacen que la igualdad sea verdadera.

Ahora bien, el interés de esta investigación está en los sistemas que pueden formar las ecuaciones lineales de dos variables, aquellas de la forma:

$$Ax + By = C$$

Donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son coeficientes que pertenecen al conjunto de los números reales y “ $x$ ”, “ $y$ ” son incógnitas.

## **2.2 Sistemas de ecuaciones lineales**

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen un conjunto común de variables. La solución de un sistema de ecuaciones consiste encontrar los valores de las variables que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Se dividen en dos tipos: lineales, formados por ecuaciones lineales donde cada ecuación es de primer grado, que podemos observar en la Figura 1; y no lineales, que incluyen al menos una ecuación no lineal y se puede observar en la Figura 2.

Borowski y Borwein (2002) definen un sistema como “un conjunto de ecuaciones o inecuaciones que deben resolverse simultáneamente o tratarse juntas” (p. 554). Esta definición se usa en general para un sistema de ecuaciones que podría ser lineales o no.

## Figura 1

*Sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

## Figura 2

*Sistema de ecuaciones no lineales*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Según Rivera (2010) un sistema de ecuaciones lineales es:

Un conjunto de igualdades algebraicas en las que aparece una o varias incógnitas elevadas a la potencia uno. Cada una de estas ecuaciones lineales, o de primer grado, tiene la forma  $ax + by + cz + \dots = k$ , donde  $a, b, c, \dots$ , son los coeficientes de la ecuación,  $x, y, z, \dots$ , las incógnitas o variables, y  $k$  el término independiente. (p. 61)

Esta definición está más centrada a lo que esta investigación requiere, sin embargo, podemos ser más claros en cuanto a los sistemas de ecuaciones, pues la definición anterior está siendo un poco más formal que el contexto de estudiantes de secundaria pueda requerir. Incluso dentro de la literatura podemos encontrar definiciones más formales, a nivel de la educación superior, como la definición de Euler (citado por Orozco, 2014). Una persona con niveles de estudios más avanzados entenderá sin complicaciones esa definición, pero hablamos de estudiantes de educación básica, por lo que es importante empatizar con ellos y tratar de explicar lo mejor posible temas tan abstractos para ellos como lo son las ecuaciones.

### 2.2.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Existen distintos métodos para resolver sistemas de ecuaciones, dependiendo del tipo de sistema (lineal o no lineal) y de las características específicas del problema. Los métodos más comunes para resolver sistemas ecuaciones lineales y que se ven desde la educación básica son:

- Método de sustitución: Consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones y luego sustituir esa expresión en las otras ecuaciones.
- Método de reducción: Consiste en combinar las ecuaciones del sistema para eliminar una de las variables, facilitando así la resolución del sistema.
- Método de igualación: Consiste en despejar la misma variable en dos ecuaciones distintas y luego igualar las dos expresiones obtenidas.
- Método gráfico: Consiste en representar gráficamente las ecuaciones en un sistema de coordenadas y encontrar el punto o puntos de intersección, que son las soluciones del sistema.

Conforme el estudiante avanza en su carrera académica puede aprender métodos más complejos que implican matrices como:

- Método de Gauss-Jordan: Consiste en representar el sistema de ecuaciones en forma matricial y usar operaciones elementales de fila para reducir la matriz aumentada a su forma escalonada.
- Método de Cramer: Consiste en utilizar determinantes para encontrar las soluciones. Se aplica cuando el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz es distinto de cero.

Por otro lado, hay una forma distinta a las antes mencionadas en la que los estudiantes resuelven los sistemas de ecuaciones, específicamente los que tienen problemas al momento de comprender el tema o si se trabaja con coeficientes sencillos. Esta forma es la más natural y es por medio de prueba y error. Se ha visto que los estudiantes prueban específicamente con números enteros esperando a encontrar el par que cumpla con las condiciones del sistema.

### 2.2.2 Tipos de soluciones en sistemas de ecuaciones lineales

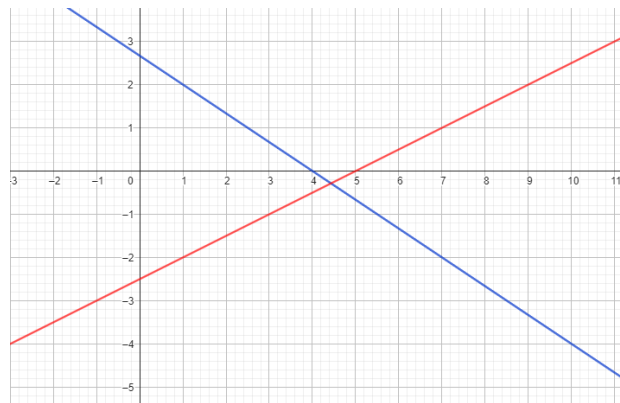
Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo con el número de soluciones que presentan, ya sea que tengan solución única, varias soluciones posibles o no tienen solución.

Un sistema compatible determinado, como se puede observar en la Figura 3, es aquel que tiene una única solución. Esto ocurre cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. En el plano se puede observar cuando las rectas se tocan en un punto.

**Figura 3**

*Sistema compatible determinado*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

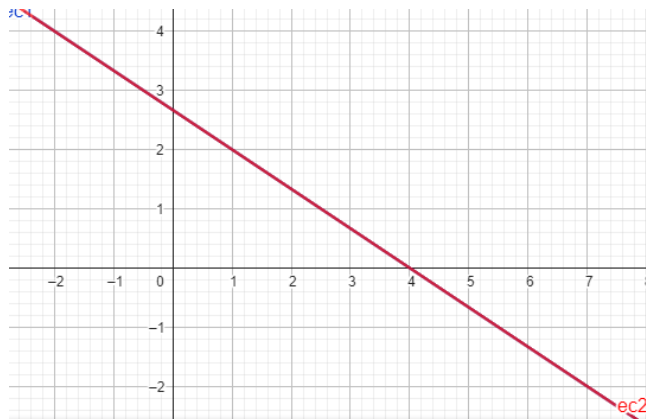


Un sistema compatible indeterminado, como podemos observar en la Figura 4, es aquel que posee infinitas soluciones. Esto ocurre generalmente cuando hay más incógnitas que ecuaciones o cuando las ecuaciones son linealmente dependientes. En el plano se observará una única recta para ambas ecuaciones.

## Figura 4

*Sistema compatible indeterminado*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$$

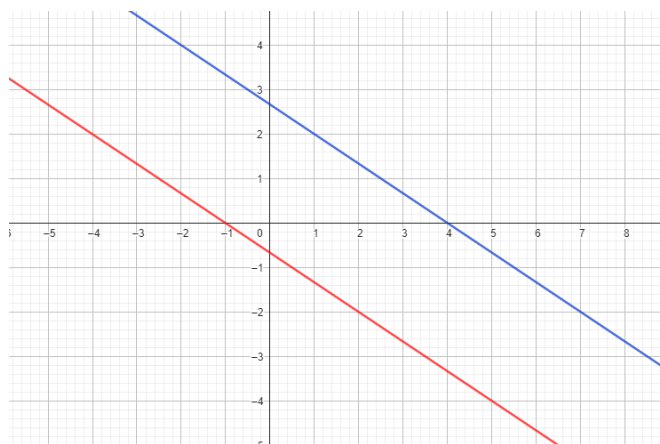


Finalmente, en la Figura 5 se puede observar un sistema incompatible, el cual se caracteriza por no tener solución. En el caso de dos o tres dimensiones, sucede cuando las ecuaciones representan rectas o planos paralelos que no se cruzan.

## Figura 5

*Sistema incompatible*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$$



### 2.3 Problema y problema verbal

Las definiciones de “problema” propuestas por diversos autores reflejan una visión multifacética y profunda sobre el concepto, subrayando tanto su complejidad como su papel en el desarrollo de pensamiento crítico y la generación del conocimiento. Un problema puede verse como una situación que desafía al individuo y que no tiene una

solución inmediata o evidente (Polya, 1954). Esto sugiere que resolver un problema implica creatividad y la aplicación de estrategias generales destacando la importancia de la experiencia y la intuición en la resolución de problemas complejos.

Dewey (2022) describe el proceso de resolución de problemas como un ciclo de reflexión en el que el problema desencadena un pensamiento crítico y una investigación que lleva solución. Aquí, el problema no solo desafía, sino que también impulsa la reflexión y el aprendizaje, destacando el proceso de descubrimiento y ajuste.

Popper (1967) ofrece una perspectiva más filosófica, define un problema como una cuestión que surge cuando las teorías existentes son insuficientes para explicar ciertos fenómenos, lo que lleva a la formulación de nuevas hipótesis y teorías. En este enfoque, un problema es un catalizador para la innovación científica, pues obliga a la formulación de nuevas hipótesis y teorías, subrayando el papel de los problemas en el avance del conocimiento.

Según Díaz y Poblete (2001), “un problema corresponde a una situación en donde el estudiante intenta responder a una pregunta hecha o realizar una tarea determinada” (p. 35). Aquí se introduce un enfoque pedagógico, porque sugiere que los problemas son herramientas educativas esenciales, diseñadas para estimular el aprendizaje activo y la aplicación de conocimientos. Finalmente, Krulik y Rudnik (como se citó en Borja, 2014) definen un problema como “situación cuantitativa o no, para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla”. Esta definición destaca la incertidumbre y la exploración de problemas, sugiriendo que los problemas son oportunidades para el descubrimiento y la creatividad.

En resumen, aunque cada autor aborda el concepto de problema desde diferentes ángulos, ya sea heurístico, reflexivo, filosófico, educativo o exploratorio; todos coinciden en que un problema es en esencia, una situación que desafía al individuo a pensar, investigar y crear, conduciendo así a un aprendizaje más profundo y a la expansión del conocimiento.

Ahora, desde el punto de vista de las matemáticas, el concepto de problema no varía mucho. Carrillo (como se citó en Guerrero, 2014) define un problema matemático como

“aquella situación real o ficticia que involucra cierto grado de incertidumbre y cuya clarificación conlleva la aplicación no mecánica del conocimiento matemático de la persona que se enfrenta a dicha situación”. Esta definición resalta la importancia de la creatividad, el razonamiento crítico y la adaptación flexible de los conceptos matemáticos, enfatizando que resolver un problema de esta índole implica más que la simple aplicación de las fórmulas; es un proceso de interpretación a circunstancias inciertas.

Borowski y Borwein (2002) definen un problema como “una cuestión matemática; una afirmación que requiere una prueba o un método de solución” (p. 449). Esta perspectiva pone de relieve al aspecto formal y estructurado de los problemas matemáticos, donde la solución implica un proceso riguroso de demostración o el desarrollo de un método específico para resolver la cuestión planteada.

En conjunto, estas definiciones resaltan que un problema matemático no solo es un desafío que surge en situaciones inciertas y que demanda creatividad, sino que también es una cuestión que requiere un enfoque riguroso y formal para ser resuelta, ya sea mediante una prueba o un método específico. Así, un problema matemático combina tanto la incertidumbre y la necesidad de razonamiento flexible como el rigor y la estructura lógica de la matemática formal.

### **2.3.1 Tipos de problemas**

No hay una clasificación única de los tipos de problemas ni un estándar de cómo deberían clasificarse, cada autor puede proponer una clasificación de acuerdo con su punto de vista o del contexto de la investigación. Sin embargo, estas clasificaciones de problemas matemáticos ayudan a entender mejor el tipo de habilidades y conocimientos que se necesitan para resolverlos, así como el propósito educativo detrás de su diseño.

Herdeiro (citado por Guerrero, 2014) propone una clasificación amplia que incluye categorías como ejercicios, problemas de palabras, problemas para demostrar, problemas para descubrir, problemas de la vida real y otros. Esta clasificación es versátil, abarcando desde problemas tradicionales hasta aquellos que invitan al descubrimiento y la aplicación práctica de las matemáticas en situaciones reales. Díaz y Poblete (2001)

dividen los problemas en rutinarios y no rutinarios, con una subdivisión adicional dentro de los rutinarios en función del contexto (real, realista, fantasioso y puramente matemático). Esta clasificación resalta la importancia del contexto y el grado de familiaridad del estudiante con el tipo de problema, haciendo una distinción entre problemas que refuerzan conocimientos previos y aquella que desafían la comprensión más allá de lo rutinario. Blanco (1993) ofrece una clasificación detallada que incluye ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de traducción, problemas de procesos, problemas sobre situaciones reales, problemas de investigación matemática, puzzles e historias matemáticas. Esta taxonomía enfatiza la variedad de habilidades cognitivas que los problemas matemáticos pueden desarrollar, desde el reconocimiento de patrones hasta la resolución creativa e investigativa. Muñoz (2011) clasifica los problemas según áreas específicas de la matemática, como problemas aritméticos, geométricos, de razonamiento lógico, de recuento sistemático, de razonamiento inductivo y de azar y probabilidad. Este enfoque destaca la naturaleza disciplinaria de los problemas matemáticos y su capacidad para profundizar en conceptos específicos. Conejo y Ortega (2013) presentan una clasificación que se enfoca tanto en la estructura del problema (ejercicio, problema contextualizado, puzzle) como en su aplicación en situaciones reales y problemáticas, haciendo hincapié en la contextualización y la variedad de formatos que un problema puede adoptar.

En conjunto, estas clasificaciones demuestran que los problemas matemáticos no solo varían en su forma y contenido, sino también en el tipo de pensamiento que provocan y en el propósito educativo que sirven. Mientras que algunos autores destacan la importancia del contexto y la naturaleza del problema, otros se enfocan en habilidades específicas que cada tipo de problema busca desarrollar, como el razonamiento. Estas diferentes perspectivas muestran la riqueza de los problemas matemáticos como herramientas pedagógicas y su capacidad para adaptarse a diversos objetivos de aprendizaje.

### **2.3.2 Problemas verbales**

Para desarrollar el razonamiento lógico matemático es necesaria la comprensión matemática que comienza desde que el niño interactúa con objetos y realiza sus

primeras acciones lógicas hasta que el niño avanza a un nivel más abstracto. Una de las alternativas que propone Meza et al. (2024) para fomentar el razonamiento lógico matemático es relacionar conocimientos con problemas reales los cuales permitirán aplicar conceptos abstractos a situaciones reales.

Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, una de las dificultades más notorias en la matemática en general que han encontrado los investigadores, ya sea de forma intencional o no, es la traducción del lenguaje natural a un lenguaje matemático. Incluso Orbe (2015) en su trabajo realiza distintas preguntas a docentes de educación secundaria, donde los cuatro concuerdan que lo más difícil de hacer es que los estudiantes hagan la traslación del lenguaje verbal al lenguaje algebraico y el resolver problemas o plantearlos. Es decir, es un tema que se ha visto desde siempre y muy probablemente se seguirá observando. En ese mismo trabajo, Orbe comenta que los docentes también coinciden en que a los estudiantes les cuesta trabajo aplicar las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones.

Es aquí donde entra un tipo de problema que se mostrará más adelante como instrumento de recopilación de datos: el problema verbal. Dentro de las clasificaciones que se han mencionado, los problemas verbales podrían entrar en una o más categorías dependiendo del autor. Por ejemplo, según la clasificación de Herdeiro (citado por Guerrero, 2014) podría entrar en problemas de palabras o problemas de la vida real; problema de traducción o problema sobre situaciones reales de acuerdo con Blanco (1993); problema rutinario de contexto real según Díaz y Poblete (2001).

Independientemente de en qué categoría entre este tipo de problemas, en este trabajo llamaremos “problemas verbales” a una cuestión o situación matemática en forma narrativa realista o fantasiosa, en donde se describe una situación con lenguaje cotidiano en lugar de expresar los datos y las relaciones matemáticas de manera directa mediante ecuaciones o fórmulas. Un problema verbal plantea un desafío que requiere interpretar el texto, identificar la información relevante y traducirla en términos matemáticos para resolverlo.

## 2.4 Dificultad y dificultad de aprendizaje

Los conceptos de “dificultad” y “dificultad de aprendizaje” pueden confundirse o ser utilizados erróneamente si no se tiene cuidado. No podemos decir que “no recordar cómo plantear una ecuación” es una dificultad de aprendizaje porque el concepto no se refiere a un simple impedimento, se refiere a una condición. Para hablar del término “dificultad de aprendizaje” debemos entender el concepto básico de dificultad, de acuerdo con la Real Academia Española, se define la palabra “dificultad” como un inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto.

Borja (2014) considera las dificultades como “la imposibilidad de proceder adecuadamente para resolver un problema, las cuales son originadas por obstáculos, falta de sentido o actitudes afectivas y emocionales, que se manifiestan a través de errores u omisiones” (p. 40). Podemos decir que una dificultad es cualquier factor que hace que una tarea o situación sea más compleja, ardua o desafiante de lo que sería en circunstancias normales. Es una parte natural de la vida y el aprendizaje, superar dificultades es a menudo un componente esencial para el crecimiento personal y profesional. En el campo de la educación matemática, una dificultad puede ser, por ejemplo, operar erróneamente números enteros, no comprender un tema algebraico, no recordar el método correcto para resolver un ejercicio, no traducir correctamente un problema verbal, etc. Estas dificultades pueden superarse con apoyo adecuado, práctica, o un cambio en la estrategia de enseñanza.

Por otro lado, las dificultades de aprendizaje son más complejas, según Mateos (2009):

Se aplica el término “dificultades de aprendizaje” a un grupo heterogéneo de trastornos caracterizados por las dificultades que tienen muchos niños para escuchar, hablar, leer, escribir, y razonar y que son intrínsecos al individuo, debiéndose a una alteración y/o disfunción del sistema nervioso central. (p. 14)

Las dificultades de aprendizaje se refirieren a trastornos que pueden tener una relación neurológica en cuanto a la actividad motora, la percepción, la capacidad de memoria, la atención y el estado emotivo y la capacidad de abstracción (Páez, 2013). Las personas pueden presentar complicaciones fuera de los mismos procesos de enseñanza o

aprendizaje, los trastornos de aprendizaje también son un factor para tomar en cuenta. Los estudiantes pueden presentar dislexia, disgrafía, agrafía; discalculia, también conocida como la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, cuyas siglas son DAM; o cualquier otra condición neurológica (Barallobre, 2016; Font, 1994; Páez, 2013). Estas dificultades son persistentes y no se resuelven simplemente con práctica o enseñanza adicional, suelen requerir intervenciones especializadas y enfoques de enseñanza personalizados.

En general, las dificultades pueden ser comunes y transitorias mientras que las dificultades de aprendizaje son más serias, persistentes, y están relacionadas con condiciones neurológicas que requieren atención especializada.

De esta manera se aclara que en esta investigación se dejará a un lado el concepto de “dificultad de aprendizaje”, porque los participantes no tienen ninguna condición neurológica que se mencionó anteriormente. Por lo tanto, se usará el concepto normal de “dificultad”, ya que se pretende identificar esas oposiciones que impiden que los estudiantes puedan resolver problemas verbales relacionados con sistemas de ecuaciones.

## **2.5 Clasificación de dificultades**

Melissa y Utami (2023) realizaron un trabajo interesante al estudiar un grupo de estudiantes clasificados en alfabetización matemática baja, media y alta. Estas investigadoras estudian las habilidades que cada grupo domina dentro de las matemáticas. Utilizan cinco de siete habilidades de alfabetización matemática que presenta la OCDE (2017), las siete habilidades son:

- **Comunicación:** Implica la habilidad de leer, interpretar y expresar ideas matemáticas. Los individuos deben ser capaces de entender enunciados y problemas, formar modelos mentales, y comunicar los resultados y justificaciones de manera efectiva.
- **Matematización:** Consiste en convertir un problema del mundo real en términos matemáticos, mediante la estructuración, conceptualización y formulación de

modelos matemáticos, así como interpretar y evaluar los resultados en el contexto del problema original.

- Representación: se refiere al uso de diversas formas de representación como gráficos, tablas, diagramas y ecuaciones, para entender situaciones matemáticas, interactuar con problemas, y presentar soluciones.
- Razonamiento y argumentación: involucra procesos lógicos que permiten relacionar y explorar elementos de un problema, hacer inferencias y justificar soluciones o afirmaciones.
- Idear estrategias para resolver problemas: esta habilidad implica la formulación de planes o estrategias para resolver problemas matemáticos, guiando su ejecución en todas las fases del proceso de resolución.
- Utilizar el lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas: incluye la comprensión y uso de expresiones simbólicas y operaciones matemáticas de acuerdo con las reglas y sistemas formales, así como el manejo de algoritmos.
- Utilización de herramientas matemáticas: Se refiere al uso adecuado de herramientas físicas y digitales, como instrumentos de medición y calculadoras, para completar tareas matemáticas, así como entender las limitaciones y capacidades de estas herramientas en la comunicación de resultados.

En conjunto, estas habilidades constituyen una alfabetización matemática completa, abarcando desde la comprensión y comunicación, hasta la aplicación práctica y el uso de herramientas matemáticas. Los estudiantes que no poseen estas habilidades fueron clasificados en una alfabetización matemática baja y media, las autoras comentan que este tipo de alumnos tienen complicaciones más grandes al momento de resolver problemas y ejercicios. Lo que evidencia que existen más dificultades en este tipo de estudiantes en comparación con sus semejantes con alfabetización matemática alta. Sin embargo, ese trabajo se centra en las habilidades que propone la OCDE y no en las dificultades, es decir, presenta una visión general. El estudio de las dificultades es amplio en cuanto a las matemáticas en general, con bastante material de referencia en cuanto a dificultades en el álgebra. Pero, en el estudio específico de sistemas de ecuaciones, no hay mucha literatura al respecto. En ocasiones las clasificaciones pueden ser un poco ambiguas pues dentro de la generalización podrían ignorarse detalles importantes.

Dentro de los trabajos relacionados con las dificultades en sistemas de ecuaciones se encuentra Widada et al. (2020) que estudia cómo superar la dificultad de comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales mediante las etnomatemáticas. Su estudio se centra únicamente en la parte de comprender los sistemas de ecuaciones, donde considera las siguientes dificultades:

- Dificultades de comprensión: hacen referencia a la capacidad del estudiante para entender el significado y la estructura de un sistema de ecuaciones lineales. Incluyen problemas para interpretar qué representa cada ecuación y cómo se relacionan entre sí.
- Dificultades de comprensión de principios: engloba los problemas para entender los principios matemáticos fundamentales detrás de los sistemas de ecuaciones como el principio de equivalencia o conceptos como independencia lineal, consistencia, o la cantidad de soluciones que puede tener un sistema.
- Dificultades de comprensión de los problemas: se dan cuando deben interpretar y transformar problemas del mundo real en sistemas de ecuaciones. Está relacionada con la comprensión lectora y la capacidad de modelar matemáticamente situaciones concretas.
- Dificultades operativas: se refieren a la habilidad para llevar a cabo correctamente las operaciones matemáticas necesarias para resolver el sistema de ecuaciones. Incluyen problemas para realizar manipulaciones algebraicas como sumar, restar, multiplicar o dividir ecuaciones.

Wahyuni et al. (2023) analiza las dificultades de los estudiantes en el tema de sistemas de ecuaciones con dos variables, enfocándose únicamente en los ejercicios algebraicos y no en problemas verbales. En dicho trabajo se clasificaron las dificultades en tres grupos:

- Dificultades conceptuales: estas radican en el hecho de que los estudiantes no son capaces de deducir información a partir de un concepto dado.
- Dificultades de principio: se dan por la falta de comprensión de las variables y falta de dominio de los fundamentos del álgebra.

- Dificultades de destreza (o habilidad): se dan por la falta de capacidad para comprender la forma del problema, la incapacidad de los estudiantes para escribir correctamente los pasos de realización y la incapacidad de los estudiantes para escribir correctamente las respuestas.

Levicoy (2010) al hacer una propuesta de enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones en estudiantes de secundaria, introduce un problema verbal buscando que los estudiantes usen distintas estrategias para solucionarlo, analizando su efectividad. Ahí presentó posibles dificultades en la resolución del problema:

- No comprender el problema.
- Dificultades para definir las variables del sistema de ecuaciones.
- Problemas para graficar las rectas que intervienen en el problema.
  - Sustituir los valores de “ $x$ ”
  - Ubicar los puntos en el plano.
- La solución encontrada no sea pertinente al contexto del problema.

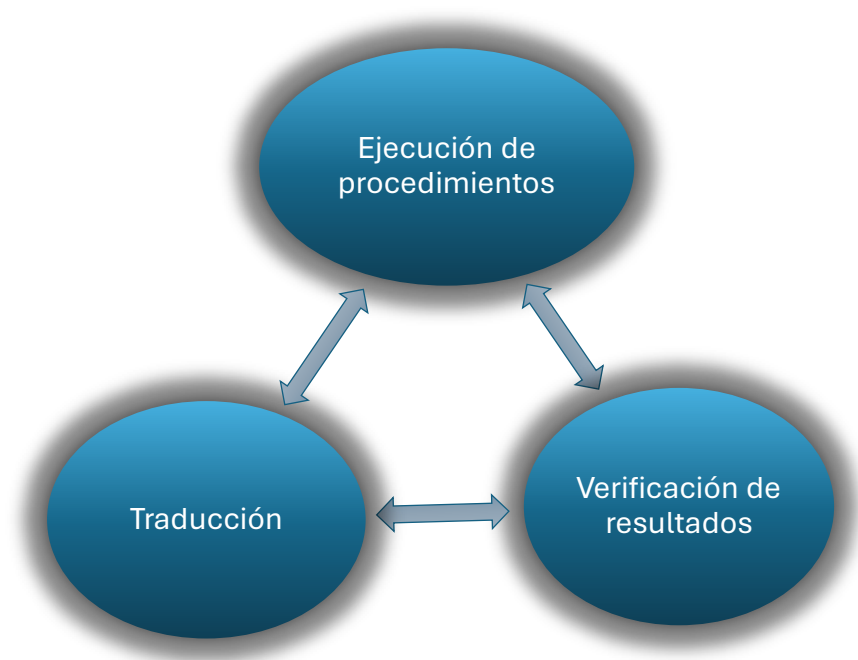
Hasta ahora se han mencionado autores que estudian las dificultades cuyos objetivos son distintos a los de esta investigación, el segundo estudia la comprensión del tema mientras que el tercero se enfoca únicamente en los ejercicios similares a los presentados en la figura 1 y no en problemas verbales. El último autor da lo que piensa que podrían ser posibles dificultades, ya que el objetivo principal de su trabajo no fue estudiarlas, sin embargo, se tomarán en cuenta en esta investigación.

Ahora bien, Borja (2014) estudia más a fondo las distintas dificultades que enfrentan al momento de resolver problemas verbales relacionados con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Su estudio se centró en estudiantes femeninas de noveno grado (lo equivalente a tercer grado de secundaria en México) que residen en Qibdó, Colombia y cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años. Borja analiza los problemas verbales tomando como punto de referencia el método cartesiano, utilizado para resolver problemas algebraicos y formulado por Descartes. Reduce los diversos pasos que se deben seguir para resolver un problema algebraico en tres etapas: traducción, ejecución de procedimientos y verificación de resultados. En la **¡Error! No se encuentra el origen d**

**e la referencia.** se muestra el modelo triangular que propone, donde las etapas se relacionan entre sí, dejando a un lado el modelo lineal que se acostumbra en trabajos como Descartes o Polya (1957).

### Figura 6

*Modelo propuesto por Borja (2014)*



Dentro de la traducción se encuentra el reconocimiento del sistema, la organización, manejo e identificación de datos e incógnitas; en la ejecución de procedimientos se encuentran el reconocimiento de los métodos de resolución de sistemas, sustitución de cantidades, manejo de operaciones y el manejo intuitivo del procedimiento.

El modelo responde a una estructura cerrada y puede finalizar en cualquiera de las etapas dependiendo de lo que el estudiante crea conveniente finalizar el ejercicio o problema ya que puede terminar donde inició, dentro de la traducción; puede terminar de la forma “tradicional” al verificar los resultados, cuando el estudiante piense que ha respondido adecuadamente, o bien dentro de su frustración lo deje tal como está aunque piense que la respuesta es incorrecta; en la ejecución del procedimiento cuando el

estudiante decida que el desafío lo supera y lo termine aún si está incompleto. Ahora, se debe tomar en cuenta que, aunque el modelo se considera de doble vía, no se puede asegurar que si un estudiante la establece en un sentido no necesariamente lo haga en sentido contrario, inclusive, el estudiante podría no completar una secuencia o un solo ciclo. Después de analizar los problemas, Borja halló las siguientes dificultades:

- Traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico.
- Relacionar los datos y las incógnitas.
- Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones.
- Reconocer la estructura del sistema de ecuaciones.
- Dificultades en aplicar el método de eliminación.
- Dificultades para operar en diferentes conjuntos numéricos.
- Dificultades para utilizar el razonamiento matemático en la deducción de términos de procedimiento.
- Dificultad para validar el procedimiento y la formulación del problema a la luz de las respuestas.

En esta investigación averiguaremos si las dificultades son las mismas, parecidas o si aún falta más por conocer. La mente de los jóvenes de 14 años puede ser complicada y quizá exista más explorar.

## **2.6 Dificultades utilizadas como referente**

Para ser más específico antes de continuar, se mencionarán las dificultades que se utilizaron como referente para el análisis de las respuestas de los estudiantes. En este trabajo se utilizarán las dificultades establecidas por Borja (2014), Wahyuni et al. (2023) y Widada et al. (2020). En la tabla 1 se pueden observar las dificultades que cada uno de los autores establece.

**Tabla 1***Dificultades utilizadas como referente*

<b>Borja (2014)</b>	<b>Widada et al. (2020)</b>	<b>Wahyuni et al. (2023)</b>
Traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico	Dificultades de comprensión	Dificultades conceptuales
Relacionar los datos y las incógnitas	Dificultades de comprensión de principios	Dificultades de principio
Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones	Dificultades de comprensión de los problemas	Dificultades de destreza (o habilidad)
Reconocer la estructura del sistema de ecuaciones	Dificultades operativas	
Dificultades en aplicar el método de eliminación		
Dificultades para operar en diferentes conjuntos numéricos		
Dificultades para utilizar el razonamiento matemático en la deducción de términos de procedimiento		
Dificultad para validar el procedimiento y la formulación del problema a la luz de las respuestas		

## CAPÍTULO 3: MÉTODO

La investigación cualitativa es un enfoque de investigación que se utiliza para explorar y comprender fenómenos sociales, comportamientos humanos, experiencias y procesos desde una perspectiva holística y profunda (Hernández et al. 2014). En lugar de buscar la objetividad completa, la investigación cualitativa valora la validez subjetiva. Esto implica comprender y reconocer la perspectiva del investigador y cómo esta puede influir en la interpretación de los datos. Una de las ventajas de la investigación cualitativa es que el proceso de investigación no es lineal, se puede regresar a otras etapas si es requerido, especialmente la revisión de literatura, que puede complementarse en cualquier etapa (Hernández et al., 2014).

Los factores que se deben tener en cuenta para la investigación cualitativa, de acuerdo con Montero (citado en Pérez, 2001), son:

1. El tipo de preguntas que se plantean en la investigación.
2. El uso del contexto natural.
3. La observación participante.
4. Las comparaciones y contrastes que se efectúan.
5. Se integran en la investigación cualitativa los conceptos “etic” y “emic”. El primero se refiere a la perspectiva externa de las personas mientras que el segundo hace referencia al punto de vista interno.
6. El concepto de cultura.

A diferencia de la investigación cuantitativa, que se centra en la medición y el análisis numérico de datos, la investigación cualitativa se enfoca en obtener una comprensión detallada del contexto y las complejidades de los fenómenos de estudio.

Dentro de las principales características de la investigación cualitativa están: el enfoque interpretativo, que busca comprender cómo las personas interpretan y dan significado a sus experiencias y el mundo que les rodea; la naturaleza exploratoria, es especialmente útil para explorar áreas de investigación donde hay poca información previa o se busca una comprensión más profunda de un fenómeno; el contexto y entorno, los investigadores cualitativos consideran el contexto en el que ocurren los fenómenos como

una parte crucial para entenderlos, estos entornos naturales o sociales son fundamentales para captar las experiencias de los participantes; datos no numéricos, se basa en la recopilación de datos como textos, transcripciones de entrevistas, notas de campo, documentos, videos y otros materiales que proporcionan información detallada y descriptiva; flexibilidad en el proceso de investigación, el diseño de la investigación suele ser flexible y adaptativo, permitiendo a los investigadores ajustar sus métodos y enfoques a medida que descubren nuevos datos o perspectivas; análisis interpretativo, en lugar de utilizar métodos estadísticos para analizar datos, la investigación cualitativa emplea análisis interpretativos para identificar patrones, temas y categorías que emergen de los datos recopilados; participación del investigador, el investigador juega un papel activo en la recolección e interpretación de los datos, y sus propias experiencias y perspectivas pueden influir en la investigación.

Dicho todo lo anterior y por la naturaleza de esta investigación donde se busca saber qué dificultades tienen los estudiantes al resolver problemas verbales y no saber cuántos estudiantes tiene dificultades, la investigación será de tipo cualitativa.

### **3.1 Entrevista clínica**

Ejemplos de métodos cualitativos incluyen entrevistas en profundidad, conversaciones estructuradas que permiten explorar las experiencias y perspectivas de los participantes; observación participante, implica la inmersión del investigador en el entorno social de los participantes para registrar sus comportamientos y prácticas cotidianas; análisis de contenido, método utilizado para analizar documentos, textos o materiales visuales, identificando patrones o temas recurrentes; estudio de caso, investigación detallada de un solo caso o un número reducido de casos con el objetivo de explorar su contexto y procesos en profundidad; grupos focales, discusiones en un grupo dirigidas por un moderador para explorar las opiniones, percepciones y actitudes de los participantes sobre un tema específico. En el caso de esta investigación se usará la entrevista clínica para profundizar en las respuestas orales y escritas que los estudiantes proporcionen durante la resolución de los problemas verbales.

Para Perpiñá (2012), la entrevista “es una técnica de recogida de información y por tanto de evaluación” (p. 23). Perpiñá hace hincapié en la diferencia entre una entrevista y una conversación, ya que la primera se planifica, tiene un propósito e intencionalidad y donde los conversadores tienen un rol específico; mientras que en la segunda es casual o informal, espontánea y cuyo único propósito es pasar el rato o divertirse. Sin embargo, una entrevista no es suficiente para el objetivo de este trabajo, pues se requiere profundizar, es ahí cuando entra un tipo de entrevista específico: la entrevista clínica. Según Tavares (2000):

La entrevista clínica es un conjunto de técnicas de investigación limitadas en el tiempo y dirigidas por un entrevistador entrenado que utiliza conocimientos psicológicos en una relación profesional, con el objetivo de describir y evaluar aspectos personales, relacionales o sistémicos (individuo, pareja, familia, red social), en un proceso dirigido a realizar recomendaciones, derivaciones o proponer algún tipo de intervención en beneficio de las personas entrevistadas. (p. 45)

De acuerdo con Gingsburg (citado en Zaskis y Hazzan, 1998) la entrevista clínica es un recurso con la capacidad de mostrar los conocimientos que el estudiante ha adquirido o no, y se ha establecido como un medio eficaz para recopilar datos en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En resumen, la entrevista clínica, como método de investigación, es una técnica cualitativa utilizada en diversas disciplinas como la psicología, la sociología y otras ciencias sociales, para recopilar información detallada y profunda sobre las experiencias, percepciones y contextualizada de los sujetos estudiados. Dentro de sus objetivos están obtener una comprensión detallada de los pensamientos y sentimientos del entrevistado; contextualización; analizar procesos psicológicos y conductuales en situaciones específicas.

Dentro de las características podemos destacar la flexibilidad, pues permite al entrevistador adaptar las preguntas en función de las respuestas del entrevistado, aunque puede tener una guía de temas o preguntas, la entrevista permite desviaciones y profundizar en temas relevantes emergentes (Perpiñá, 2012).

A través de la entrevista clínica se pudo obtener una comprensión más profunda de las necesidades y circunstancias individuales de los participantes, lo que podría permitir diseñar intervenciones educativas más efectivas. Las entrevistas completas se pueden encontrar más adelante en los anexos 1 y 2.

### **3. 2 Instrumentos de recolección de datos.**

Como se ha mencionado en la subsección 2.3.2, los problemas verbales suponen un gran desafío para los estudiantes al tratar de resolverlo, por lo que funciona como un excelente complemento para la entrevista clínica, pues mantiene trabajando la mente del estudiante durante la entrevista. Por este motivo, como instrumento de recolección de datos para esta investigación se decidió utilizar problemas verbales relacionados con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

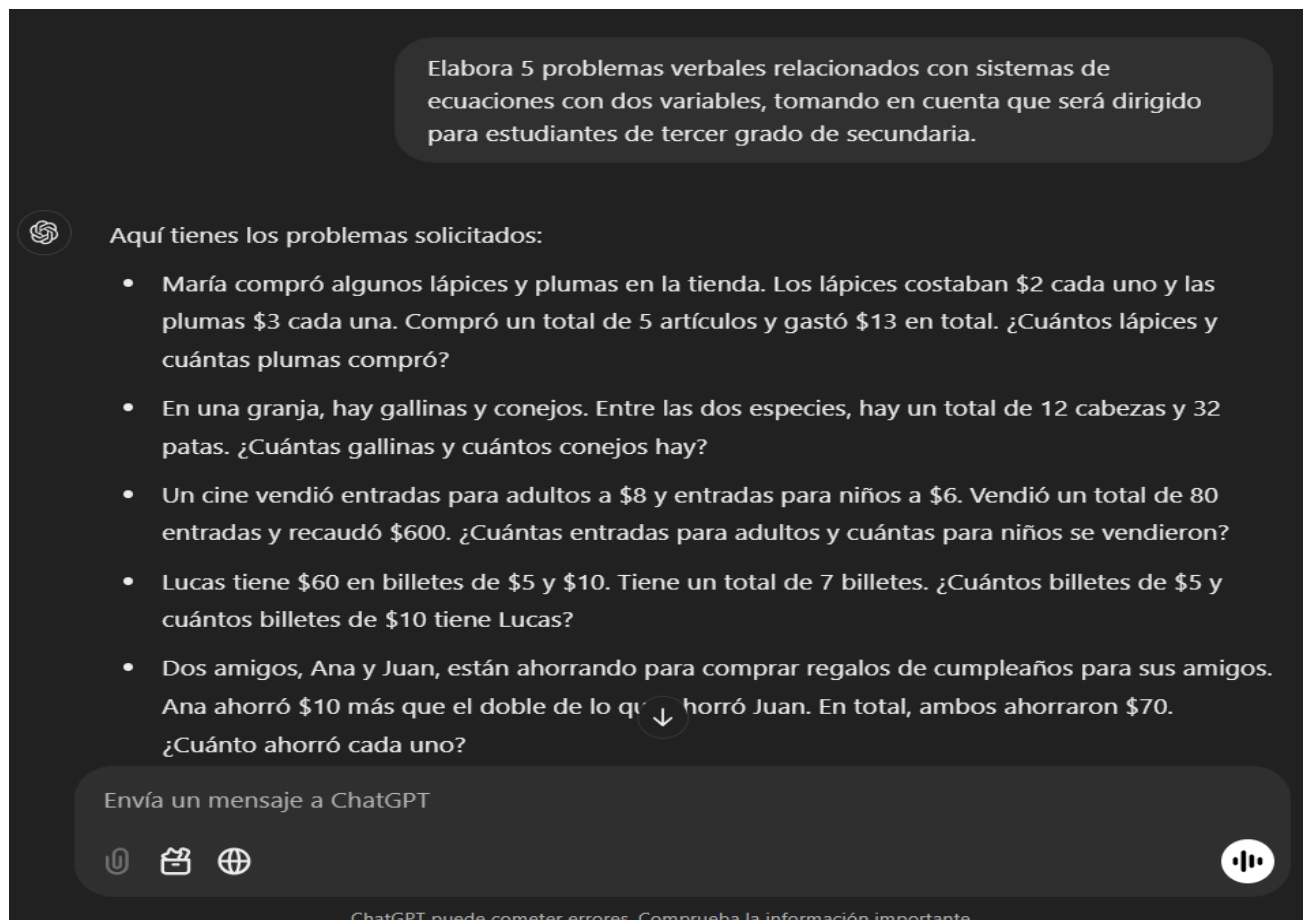
Con el fin de usar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), se decidió utilizar la herramienta vanguardista de inteligencia artificial desarrollada por OpenAi basada en la arquitectura GPT-4, llamada ChatGPT, por la capacidad para generar contenido textual coherente y variado. La participación de esta herramienta consistió en elaborar cinco problemas verbales utilizando la instrucción:

“Elabora 5 problemas verbales relacionados con sistemas de ecuaciones con dos variables, tomando en cuenta que será dirigido para estudiantes de tercer grado de secundaria.”

En la Figura 13 podemos observar la instrucción dada y los problemas arrojados por la inteligencia artificial. En el caso específico del tercer problema, se modificó la cantidad del costo de los boletos infantiles, pasando de \$6 a \$5, esto con el fin de estudiar la interacción de un problema realista con una respuesta alejada de la realidad.

## Figura 7

### Problemas establecidos por ChatGPT



Una vez modificado el problema de los boletos de cine, los enunciados finales que fueron entregados a los participantes quedaron de la siguiente forma:

#### Problema 1

María compró algunos lápices y plumas en la tienda. Los lápices costaban \$2 cada uno y las plumas \$3 cada una. Compró un total de 5 artículos y gastó \$13 en total. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas compró?

## **Problema 2**

En una granja, hay gallinas y conejos. Entre las dos especies, hay un total de 12 cabezas y 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

## **Problema 3**

Un cine vendió entradas para adultos a \$8 y entradas para niños a \$5. Vendió un total de 80 entradas y recaudó \$600. ¿Cuántas entradas para adultos y cuántas para niños se vendieron?

## **Problema 4**

Lucas tiene \$60 en billetes de \$5 y \$10. Tiene un total de 7 billetes. ¿Cuántos billetes de \$5 y cuántos billetes de \$10 tiene Lucas?

## **Problema 5**

Dos amigos, Ana y Juan, están ahorrando para comprar regalos de cumpleaños para sus amigos. Ana ahorró \$10 más que el doble de lo que ahorró Juan. En total, ambos ahorraron \$70. ¿Cuánto ahorró cada uno?

Una vez que los problemas fueron elaborados, se procedió a elaborar el protocolo de entrevista clínica como se muestra a continuación:

1. Recepción y saludo.
2. Datos básicos y establecimiento de empatía.
  - a. Iniciar con un cumplido hacia el estudiante y posteriormente solicitar que nos cuente sobre su día.
  - b. Volver a preguntar si está de acuerdo con lo que va a hacer, indagando sobre sus emociones y si realmente está cómodo.
  - c. Explicar el trabajo que el participante realizará, así como darle a entender al participante que los resultados que obtenga no tendrán un valor curricular

para él o ella, esto para evitar que se sientan incómodos o presionados durante la sesión.

- d. Agregar un comentario del tipo “Recuerdo que a tu edad a mí también (tampoco) me gustaban este tipo de problemas...” Para liberar tensión y crear confianza al estudiante.
3. Inicio de la resolución de los problemas verbales.
    - a. “Lee el problema en voz alta y explícame qué tienes que hacer”
      - i. “¿Cómo podrías solucionar este problema?”
    - b. “¿Cómo te ha ido en la escuela últimamente?”
    - c. “Cuéntame de tu familia... (Pregunta para indagar sobre su contexto familiar)”
    - d. En caso de detenerse mucho tiempo a pensar: “¿En qué piensas en este momento?”
    - e. “Explícame qué estás haciendo.”
    - f. En caso de notar que el estudiante no consigue avanzar, ayudarlo de forma indirecta. “Recuerdo que un compañero...”
    - g. “¿Conoces alguna manera de comprobar tu respuesta? ¿Por qué?”
    - h. “Este tema es un poco complicado para mí. ¿Me podrías explicar de qué se trata?”
    - i. “Imagina que le tienes que explicar a un niño más pequeño ¿Cómo lo harías?”
  4. Término de la resolución de los problemas verbales.
    - a. “¿Cómo te sientes ahora que has terminado los problemas?”
    - b. “Ayúdame a relacionar los problemas que acabas de resolver con situaciones que te han pasado”
    - c. “¿Cómo aplicarías los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el futuro?”
    - d. “¿De qué forma te ayudarán las ecuaciones en el futuro?”
  5. Cierre.
    - a. Agradecer al estudiante y al adulto responsable por la ayuda en esta investigación y darle un pequeño incentivo, cumplido o elogio al estudiante.

### **3.3 Procedimiento de recolección y análisis de datos**

Después de tener los instrumentos necesarios, se procedió a seleccionar e invitar a los estudiantes a participar en el proyecto. El acceso a los participantes se estableció con la colaboración de una cadena educativa centrada en asignaturas como inglés, lectura y matemáticas, donde los padres de familia brindaron su consentimiento para realizar las entrevistas clínicas a los participantes, al igual que el consentimiento de estos. La recopilación de datos fue concisa por cada participante, mientras que los recursos utilizados estuvieron dentro del margen aceptable, ya que se utilizaron papelería básica (papel, tinta, bolígrafos), una grabadora de voz y el mobiliario que la cadena educativa proporcionó en un espacio adecuado para realizar la actividad.

Los participantes fueron dos estudiantes que están cursando, hasta el momento que se realizó esta investigación, el tercer grado de secundaria. Ambos residen y estudian en la zona urbana de la capital del estado de Puebla, México. El primer estudiante, al cual nos referiremos a él con el seudónimo “G”, es de sexo masculino con 14 años de edad, cuyo contexto es el siguiente: “G” es hijo único; cuenta con herramientas como libros, tablet, teléfono inteligente, computadora e internet; suele acceder a distractores frecuentemente tales como videojuegos y redes sociales; en cuanto al ámbito educativo; G ha cursado su educación inicial, preescolar y primaria en instituciones privadas mientras que su educación secundaria la está cursando en una institución pública; tanto G como su madre concuerdan en que él no tiene un buen rendimiento en la asignatura de matemáticas, por lo que asiste a la cadena educativa antes mencionada como actividad extracurricular para regularizar y mejorar su rendimiento escolar. G no tiene condiciones neurológicas que puedan influir en su rendimiento escolar.

El segundo estudiante es de sexo femenino, tiene 14 años y nos referiremos a ella con el seudónimo “S”. En este caso, S no es hija única; vive únicamente con su madre y hermanas, cuenta con herramientas como libros, enciclopedias, tablet, teléfono inteligente, computadora e internet; no suele acceder a distractores frecuentemente tales como videojuegos, redes sociales o series de entretenimiento; en cuanto al ámbito educativo, S no cursó la educación inicial, pero la educación preescolar, primaria y lo que

lleva de secundaria han sido cursadas en instituciones públicas; la madre de S considera que su hija tiene un excelente rendimiento en la asignatura de matemáticas; S asiste a un centro de matemáticas como actividad extracurricular para mejorar su rendimiento escolar. S no tiene condiciones neurológicas que puedan influir en su rendimiento escolar, sin embargo, en palabras de su madre, S tuvo un período de ansiedad clínica.

A cada estudiante se les proporcionó una copia impresa de los cinco problemas verbales que tendrá que resolver. Se realizó una sesión de 40 a 50 minutos por cada participante para resolver los problemas. Estas sesiones individuales fueron supervisadas tanto por las madres de los estudiantes como por la encargada del lugar desde una distancia visible y prudente. Mientras los participantes estaban ocupados con los problemas, se realizó la entrevista clínica donde se anotaron las respuestas brindadas por el estudiante, así como algunos detalles que se observaron (lenguaje corporal, cambios en tono de voz, expresiones, etc.). Las entrevistas se pueden encontrar en los anexos 1 y 2.

Los permisos necesarios fueron brindados de forma escrita por los padres o tutores de cada participante. Estos permisos se pueden encontrar en más adelante en el anexo 3.

Al terminar la sesión, la entrevista continuó para despedir y agradecer la participación. Posteriormente se revisaron superficialmente los ejercicios para corroborar si las respuestas eran correctas o no. Luego se procedió a revisar la grabación en audio y transcribir la entrevista para su análisis junto con los procedimientos escritos y los resultados a los que llegaron los estudiantes para su respectivo análisis.

## CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para el análisis de los problemas se usará el modelo propuesto por Borja (2014) que se mencionó en la sección 2.5, y se complementará con la entrevista clínica. En cuanto a la identificación de dificultades, se utilizarán las establecidas por Borja (2014), Wahyuni et al. (2023) y Widada et al. (2020). Recordaremos que dentro de la entrevista se hará referencia al estudiante masculino como “G”, a la estudiante femenina como “S” mientras que al investigador se hará referencia como “E”.

### 4.1 Análisis de las respuestas de “G”

Al iniciar la entrevista, se le preguntó al participante si le gustan las matemáticas, como parte del proceso de *rapport*, a lo que respondió de forma negativa. Para entender mejor su respuesta, se le preguntó el motivo, a lo que G respondió lo siguiente:

G: Porque... este... en especial los... mmm... como estos, los problemas, porque me cuesta razonar el problema para contestarlo.

Como se deja ver en su respuesta, G deja claro que las matemáticas no le gustan por el nivel de dificultad que suponen. Cuando las personas realizan actividades que no les agradan, esto puede afectar su desempeño, lo que lleva a resultados deficientes. Por lo que el rechazo hacia las matemáticas ya supone una oposición para el aprendizaje, ya que se sugestionan a sí mismos que será algo complicado.

La memoria también juega un papel importante dentro de las matemáticas, si no se recuerda el tema necesario para resolver un problema entonces el desafío que supone se volverá más grande, en el siguiente fragmento de la entrevista, G necesitó del apoyo del investigador para recordar qué son los sistemas de ecuaciones.

E: *¿Ya viste los sistemas de ecuaciones?*

G: No.

E: *¿No has visto los sistemas de ecuaciones?*

G: Creo que sí.

E: *¿Sí te acuerdas... no te acuerdas?*

G: Más o menos.

E: ¿Cuáles son?

G: Los sistemas de ecuaciones son los que se usan para resolver las ecuaciones ¿No? Por ejemplo, lineales, las cuadráticas

Como se deja ver en su respuesta final, G confunde las herramientas para solucionar ecuaciones con los sistemas de ecuaciones. Entonces, aquí se pudo identificar una dificultad establecida por Borja (2014): reconocer la estructura del sistema de ecuaciones

Posteriormente G mostró tener problemas para entender completamente el problema planteado porque en el área determinada para escribir el proceso de solución, en sus anotaciones se observan que no relaciona o asigna variables con la información que presenta el problema, en su lugar solo escribe la relación del costo con los objetos y su respuesta final, tal como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

### Figura 8

Problema 1 de G

**Problema 1**  
María compró algunos lápices y plumas en la tienda. Los lápices costaban \$2 cada uno y las plumas \$3 cada una. Compró un total de 5 artículos y gastó \$13 en total. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas compró?

Plumas = 3\$  
3  
Lápices = 2  
Plumas = 3

lápices = 2\$

Al ver observar que G no escribió un procedimiento o algoritmo para resolver el problema, se deduce que no muestra una comprensión clara de cómo usar la información

proporcionada (precio por lápiz y por pluma, y gasto total) para resolver el problema de manera estructurada, esto se puede corroborar en la respuesta que G da cuando el investigador le preguntó qué tuvo que hacer para resolver el problema, a lo que el estudiante respondió.

G: Es simplemente sumar 3 veces la pluma, porque... no, no se puede sumar cuatro veces la pluma porque...  $3 + 3 = 6$  y  $3 \dots 9$  y otros 3 son 12, y como también hay que incluir los lápices nada más sumé 2 lápices, que son cuatro y 3 veces las plumas 9, 10, 11, 12, 13. no sé si me expliqué.

Esta respuesta junto con la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** nos muestra que G tiene otra dificultad establecida por Borja (2014): relacionar los datos y las incógnitas. Posteriormente se le cuestionó sobre el procedimiento que utilizó para resolver el problema, al no saber cómo expresarse correctamente, el investigador le preguntó si lo hizo al azar, por lo que G respondió:

G: En sí, por una parte, sí. Porque tiene que encontrar cuántos lápices y plumas compró y los lápices costaban 2 y las plumas 3, o sea que es la misma cantidad de pesos... bueno, la misma bueno, cuántos lápices compró los lápices es la misma cantidad que los pesos, lápices, los pesos, las 2 cantidades.

Esta respuesta, junto a la anterior, nos da a entender que G realizó sumas de manera tentativa, es decir, usó un método de ensayo y error hasta encontrar una solución que satisficiera las condiciones iniciales del problema, lo que indica una falta de familiaridad con métodos matemáticos más formales o efectivos para resolver problemas verbales. Por lo que se identifica una dificultad establecida por Wahyuni et al. (2023): dificultades de destreza.

Ahora bien, este mismo procedimiento se puede observar en el proceso de solución que la informante utilizó en el problema 2, como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** donde G solo escribió su resultado de forma directa y una secuencia numérica de los números pares, utilizando una aproximación secuencial para contar patas, pero no transforma este conteo en una ecuación matemática.

## Figura 9

### Problema 2 de G

**Problema 2**

En una granja, hay gallinas y conejos. Entre las dos especies, hay un total de 12 cabezas y 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

Gallinas = 12                      Conejos = 16

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32

G muestra una complicación clara para entender lo que se le está pidiendo en el problema, sobre todo en la relación entre las cabezas y las patas de las dos especies. Lo podemos observar en su procedimiento al no escribir la relación que podrían tener las patas y cabezas con los animales y en la respuesta que brindó G al preguntarle cómo sabe que su respuesta es correcta, el mencionó:

G: Los conejos por la secuencia y las cabezas por el... por el 12, bueno por las gallinas, pero aquí es mi confusión porque dice entre las 2 especies que no sé si entre las 2 especies, 2 cabezas y 32 patas, o las 12 cabezas y 32 patas y las 12 cabezas y 32 patas.

A lo largo del diálogo, G confunde las cantidades de cabezas y patas, y no tiene claro cuántos conejos y gallinas debe encontrar. En esta ocasión, el mayor desafío para G fue comprender por completo el enunciado. Esto se confirma cuando se le pregunta si puede verificar que sus respuestas son correctas, a lo que G respondió:



G hace la suposición de que el total de entradas se divide equitativamente entre los dos tipos de entradas: adultos y niños. Como se muestra en el siguiente fragmento de la entrevista donde se le preguntó cuál fue su procedimiento, a lo que él respondió:

G: Multipliqué el 8 por el... por la mitad que el 80, que es 40. Y me dio 320 y los mismos 40 por el 5.

Nuevamente se identifica la dificultad de comprensión del problema mencionada anteriormente. Durante su explicación G sigue modificando sus respuestas al darse cuenta de que sus respuestas no concuerdan con los requisitos del problema, como se deja ver en la siguiente respuesta que G brindó:

G: Es que...quiero quedar con esa respuesta, respuesta. Pero no es lo mismo que las entradas. El de niños lo dejé igual para 56 y el de adultos nada más le reducía el número para que diera 14 y así se formara lo de las 80 entradas. Son 56 entradas de niños y 24 entradas adultos.

Esta respuesta, junto con sus anotaciones mostradas en la Figura 9, nos muestra que persiste en resolver los problemas por medio de ensayo y error, al verificar una y otra vez si sus respuestas son correctas. Entonces, en este problema se identifican las siguientes dificultades ya mostradas en el problema 1 y 2: reconocer la estructura del sistema de ecuaciones, relacionar los datos y las incógnitas, dificultades de destreza y dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas.

Además, se observa en la Figura 9 números por doquier, sin una estructura u orden, lo cual confirma lo que se ha comentado antes de procesos de resolución por ensayo y error.

Con respecto al problema 4, como se puede observar en la Figura 10, G no escribe un procedimiento o método matemático concreto para resolverlo, simplemente se limita a escribir su respuesta final como en los problemas anteriores.

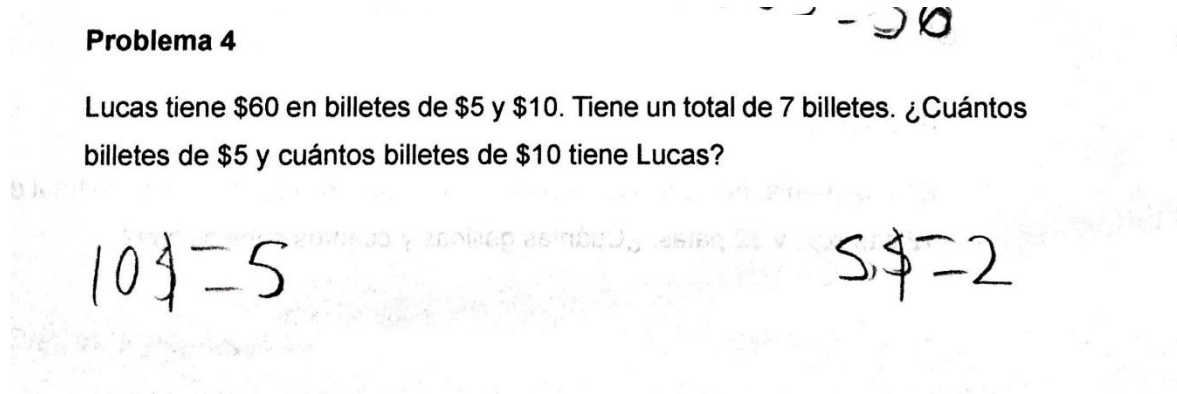
## Figura 11

### Problema 4 de G

**Problema 4**

Lucas tiene \$60 en billetes de \$5 y \$10. Tiene un total de 7 billetes. ¿Cuántos billetes de \$5 y cuántos billetes de \$10 tiene Lucas?

$10\$ = 5$        $5\$ = 2$



Al preguntarle a G sobre cuál fue su procedimiento, él respondió:

G: Igual como el primero, nada más, porque nada más tiene 7 billetes, si fueran 8 serían cuatro de 5 para formar 70 pesos. 70 pesos de 8 billetes, como son 60 de 5 y 10 no más había que sumar 10 veces el 5 o 5 veces el 2.

Esta respuesta junto a la falta de presencia de variables en su procedimiento escrito nos confirma la permanencia de la dificultad establecida por Borja (2014): relacionar los datos y las incógnitas. Ya que, en lugar de escribir variables algebraicas, escribe directamente la denominación de los billetes. Esta misma respuesta junto al enfoque de G en una estrategia repetitiva de ensayo y error y no en la aplicación de un procedimiento matemático más eficaz, nos lleva a identificar la permanencia de la dificultad establecida por Wahyuni et al. (2023): dificultades de destreza.

La situación se repite dentro del problema 5, como se puede observar en la Figura 11, G persiste en no escribir un método matemático formal. En su lugar, además de escribir su respuesta final, escribe una relación entre el 10 y el 70, así como otras anotaciones más que aparentemente no tienen sentido alguno.

## Figura 12

### Problema 5 de G

#### Problema 5

Dos amigos, Ana y Juan, están ahorrando para comprar regalos de cumpleaños para sus amigos. Ana ahorró \$10 más que el doble de lo que ahorró Juan. En total, ambos ahorraron \$70. ¿Cuánto ahorró cada uno?

10\$ Mas      +10=70      70=?

Ana=50      10\$      Juan=20

En la Figura 11 observamos que G subrayó “\$10 más que el doble” y escribe “10\$ Mas” lo que nos lleva a deducir que no entiende concretamente la expresión y por consiguiente, no sabe cómo expresarla de forma matemática, esto se confirma cuando se le pregunta sobre el enunciado, a lo que él responde:

G: Y es que Juan ahorró 30 dice que más que el doble, o sea 40, que serían 10, bueno al  $30 + 10 = 40$  que serían que ahorró 10 más. Nada más que ahí este no entendí cómo que más que el doble, o sea, sería el doble de 30. O sea que Juana más ahorró 10 y Ana los 60.

Su respuesta confirma la presencia de una de las dificultades establecidas por Borja (2014): Dificultad de comprensión y de traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático. Continuando con la entrevista, se le preguntó si eso fue lo que entendió, a lo que G respondió:

G: Eso me está dando entonces. Pero lo... pero lo cambié por esto, pero no sé si en lo que acabo de decir estoy bien. A este tipo de problemas no les entiendo,

bueno, sí les entiendo nomás que no sé cómo resolverlos y no sé qué operación usar. Por aquí pudo haber de todo.

A la luz de esta respuesta junto a la falta de un procedimiento matemático formal, se muestra de nuevo la dificultad establecida por Wahyuni et al. (2023): dificultades de destreza. Además, cuando el estudiante dice “no sé cómo resolverlos y no sé qué operación usar” evidencia un problema que se ha detectado en otras investigaciones (Cedillo, 1999; Andía, 2023), donde encuentran esta misma situación. Andía explica que los estudiantes que resolvieron los problemas por ensayo y error se dividieron en dos grupos, los que tenían noción de cómo resolver el problema por procedimientos estructurados matemáticos, pero optaron por usar el método de ensayo y error, y los estudiantes del otro subgrupo que no sabían cómo proceder. En este estudio, el estudiante selecciona la estrategia de ensayo y error, pero no relaciona los conocimientos matemáticos que ya posee para intentar utilizarlos en la resolución del problema. Si bien, hasta el momento no se le consideró como una dificultad, el comentario antes mencionado de S nos lleva a introducirla como una, ya que retrasa e incluso impide el proceso de resolución del problema. La estrategia de ensayo y error no necesariamente implica la falta de estrategias para resolver un problema, también puede implicar la falta de confianza en las habilidades del estudiante o estudiar las situaciones de forma superficial (Schoenfeld, 1985). Por lo que ahora nos referiremos a esta dificultad como “Abuso indiscriminado del método de ensayo y error”.

Ahora, cuando se le preguntó qué expresiones necesitaba para resolver el problema, su respuesta fue:

G: O sea como esto, que o sea que usa expresiones y yo no sé cómo usar una expresión o saber hacer o resolver una expresión, porque todavía no me lo han enseñado.

La deducción de las dos dificultades encontradas en este problema y en los anteriores se refuerzan a la luz de esta respuesta, pues la falta de experiencia con este tipo de problemas lo lleva a utilizar métodos que se acomodan a sus conocimientos y habilidades.

## 4.2 Análisis de las respuestas de “S”

El caso de S fue distinto desde el comienzo, mientras G mostraba más confianza al hablar, S fue más reservada en cuanto a sus respuestas. Al preguntarle sobre los sistemas de ecuaciones, S reconoció desde un principio que sí era un tema que había visto en la escuela, sin embargo, no recordaba los diversos métodos para resolverlos.

Como podemos observar en la Figura 12, S trató de escribir un sistema de ecuaciones, pero ese proceso se detuvo al tratar de escribir la segunda ecuación. En su lugar escribió el nombre y cantidad de artículos mencionados en el problema y los igualó con su respectivo costo, así como la comprobación de su respuesta debajo de estos.

### Figura 13

#### Problema 1 de S

**Problema 1**

María compró algunos lápices y plumas en la tienda. Los lápices costaban \$2 cada uno y las plumas \$3 cada una. Compró un total de 5 artículos y gastó \$13 en total. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas compró?

$$2x + 3y = 13$$

13.  $2x - 3y$

3 plumas = \$9  
2 lápices = \$4  

---

5 artículos = \$13

Si bien, logró escribir una primera ecuación, no consiguió plantear la segunda, por lo que se deduce que sí logró relacionar las variables con los datos, pero no consiguió organizarlas adecuadamente. Cuando se le preguntó qué procedimiento utilizó, ella respondió:

S: Primero quería realizar una ecuación, pero realmente no me acordé cómo se hacía entonces, pues fue ahora sí que al tanteo. Como eran cinco artículos los

que compró, pues no tenía que pasarme de cinco artículos y pues nada más que las cuentas coincidieran... y ya.

Esta respuesta nos confirma la presencia de una dificultad establecida por Borja (2014): manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones. Esta misma respuesta nos confirma la falta de experiencia en este tipo de problemas, por lo que se identifica una de las dificultades establecidas por Wahyuni et al. (2023): dificultades de destreza. Así como la dificultad: abuso indiscriminado del método de ensayo y error.

Al inicio del problema 2, se le preguntó a S cómo resolvería el problema, a lo que ella respondió:

S: Mmmmm... pues primero calcularía cuántas mmm cuántas patas, cuenta cada gallina, por ejemplo, las gallinas cuentan con dos patas y los conejos cuentan con cuatro. Entonces... eso para las patas para las cabezas... creo que igual lo haría al tanteo.

Si bien en la Figura 13 aparentemente se muestra una especie de sistema de ecuaciones inconcluso, S aclara que no se trata de dos ecuaciones, si no que está relacionando el número de patas de cada animal con el número de animales que deberían ser, es decir, el símbolo que aparenta ser un signo negativo, en realidad es un guion.

## Figura 14

### Problema 2 de S

**Problema 2**  
En una granja, hay gallinas y conejos. Entre las dos especies, hay un total de 12 cabezas y 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

$$\begin{array}{r} 4x - 4 \\ 2y - 8 \end{array} = 32z$$

4 cabezas	16 patas
8 cabezas	16 patas
<hr/>	
12 cabezas	32 patas

4 conejos  
8 gallinas

Ella consigue relacionar los datos con las variables, siendo “ $x$ ” la cantidad de conejos y “ $y$ ” la cantidad de gallinas, sin embargo, escribe una tercera variable “ $z$ ” junto al número 32, al cuestionarla sobre esa variable simplemente respondió con un lenguaje no verbal al encogerse de hombros. Por lo que se identifica una dificultad establecida por Borja (2014): relacionar datos y las incógnitas.

Al pedirle que explique su procedimiento, ella respondió lo siguiente:

S: Pues, primero serían cuatro patas de los conejos, y sus dos de las gallinas. Esto daría 32. Pues le hice el tanteo y de acá sería cuatro y de acá sería ocho, o sea de conejos sería... cuatro conejos y de gallina sería ocho gallinas. Sí, creo que sí. Primero serían cuatro cabezas... y dieciséis patas. Y luego para las gallinas, que serían ocho cabezas. Y tendrían 16 patas. Que nos terminaría dando las doce cabezas y las 32 patas. Que serían cuatro conejos y 8 gallinas.

Esta respuesta triangulada con la falta de un procedimiento matemático formal, se encuentra la dificultad establecida por Wahynui et al. (2023): dificultades de destreza. Y la dificultad: uso el método de ensayo y error.

Ahora bien, en el problema 3, S tuvo más complicaciones al momento de buscar una solución. Al inicio trató de resolver el problema justo como los dos anteriores, utilizando un método de prueba y error, tardó mucho tiempo tratando de resolverlo por este medio. Al ser el problema 3 una trampa para el método de prueba y error obligó a S a plantear un par de ecuaciones para apoyarse mejor, como se muestra en la Figura 14.

Si bien, ella consiguió relacionar las variables “ $x$ ” y “ $y$ ” con los datos, dentro de su escrito también aparecen otras variables como la “ $z$ ” y “ $w$ ”. Por lo que persiste la dificultad establecida por Borja (2014): relacionar los datos y las variables.

## Figura 15

### Problema 3 de S

#### Problema 3

Un cine vendió entradas para adultos a \$8 y entradas para niños a \$5. Vendió un total de 80 entradas y recaudó \$600. ¿Cuántas entradas para adultos y cuántas para niños se vendieron?

$$\begin{array}{l} 80w \\ 8x \quad 50 \\ 5y \quad 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} 600z \\ 80 \end{array}$$

$$8x + 5y = 80$$

$$8x + 5y = 600$$

Después de que S planteara sus dos posibles ecuaciones, trató de reflexionar cuál sería la correcta, esto no fue concretado y al final S ya no pudo dar una respuesta final. Se le preguntó por qué no usó los sistemas de ecuaciones para resolverlo, a lo que ella respondió:

S: Es que no sé, no me acuerdo

Lo que indica, junto al procedimiento interrumpido en la Figura 14, la presencia de una dificultad establecida por Wahyuni et al. (2023): dificultades de destreza.

Se le dio seguimiento a esa respuesta, preguntando si no sabe cómo pasarlo del lenguaje natural a términos matemáticos, a lo que ella respondió:

S: No me acuerdo cómo se pasa

Por lo que se confirma la presencia de una dificultad establecida por Borja (2014): traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático. Nuevamente se resalta que el tema de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas en el currículo de la Secretaría de Educación Pública (SEP) está incluido en el segundo grado de secundaria (SEP, 2022), por lo que es un tema que la estudiante ya había estudiado previamente. Se deduce que no logró comprenderlo.

El problema 4 no ha sido distinto a los tres anteriores, pues S continuó con su procedimiento de ensayo y error. En esta ocasión no se molestó en escribir alguna ecuación o variable, simplemente escribió a su manera la relación entre los datos y las condiciones iniciales para comprobar su respuesta, así como su respuesta final como se muestra en la Figura 15.

### Figura 16

Problema 4 de S

**Problema 4**

Lucas tiene \$60 en billetes de \$5 y \$10. Tiene un total de 7 billetes. ¿Cuántos billetes de \$5 y cuántos billetes de \$10 tiene Lucas?

5   2   10  
10   5   60

7

2 billetes de \$5  
5 billetes de \$10

\$5 - 2 billetes \$10  
\$10 - 5 billetes \$50

---

7 billetes \$60

Cuando se le preguntó qué hizo para resolver el problema, ella respondió lo siguiente:

S: Pues primero, separarlas... cuántos billetes de 5 tenía y cuántos billetes de... no... mmm... separar las cantidades de los billetes, o sea su valor y... este... el total que tenía que formar y pues ya al tanteo. Ya después, para comprobarlos es más la cantidad de billetes y el total de lo que obtuvo.

Esta respuesta, junto a la falta de procedimiento y la ausencia de variables, muestra la persistencia de las dificultades ya mencionadas anteriormente: relacionar los datos y las incógnitas, dificultades de destreza, abuso indiscriminado del método de ensayo y error de ensayo y error.

En el problema 5, S optó por usar un método más formal, relacionó correctamente una variable, pero, escribió la segunda variable en términos de la primera como se muestra en la Figura 16. A diferencia de G, S no tuvo complicaciones en traducir la expresión “\$10 más que el doble” establecida en el problema y evidenció un conocimiento más profundo, llegando a la solución del problema.

### Figura 17

#### Problema 5 de S

**Problema 5**

Dos amigos, Ana y Juan, están ahorrando para comprar regalos de cumpleaños para sus amigos. Ana ahorró \$10 más que el doble de lo que ahorró Juan. En total, ambos ahorraron \$70. ¿Cuánto ahorró cada uno?

$$\begin{array}{l}
 2x + 10 = 70 - x \\
 2x = 60 - x \\
 3x = 60 \\
 x = 20
 \end{array}$$

Juan = 20	—————	20
Ana = 40 + 10 =	50	—————
		50
		<u>      </u>
		\$ 70

En este problema, S consiguió plantear una ecuación correcta para modelar el problema y resolverlo con un método matemático formal. Con respecto a los sistemas de ecuaciones, S no relacionó los datos con una segunda variable y pues ella planteó una sola ecuación con una sola variable  $x$ . Esto se reafirma cuando se le pregunta por qué escribió “ $2x + 10$ ”, a lo que ella respondió:

S: Porque dice que Juan ahorró, entonces lo que ahorró Juan es  $x$  y el doble de lo que ahorró Juan o sea dos  $x$  más diez fue lo que ahorró Ana

Esta respuesta implica que S tuvo un pensamiento más profundo al saltarse el paso de plantear el sistema de dos ecuaciones e ir directamente al método de solución por igualación. La frase “lo que ahorró Juan es  $x$  y el doble de lo que ahorró Juan o sea  $2x$  más diez fue lo que ahorró Ana” nos da a entender que ella manejó lo que ahorró Ana como la variable “ $y$ ” aunque no esté escrita. De esta forma igualó lo que ahorró Juan

“ $y = 2x + 10$ ” con lo que ahorró Ana “ $y = 70 - x$ ”. Por lo que en esta ocasión S no solo resolvió correctamente el problema con un método formal, si no que lo hizo por medio de los sistemas de ecuaciones en un pensamiento más profundo de lo habitual.

### 4.3 Síntesis de los resultados

En el caso de G, presentó cuatro de las dificultades establecidas por Borja (2014), una establecida por Wahyuni et al. (2023), una establecida por Widada et al. (2020) y una no establecida anteriormente que se ha establecido en este trabajo como “abuso indiscriminado del método de ensayo y error”. Dichas dificultades se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2**

*Dificultades identificadas en G*

Dificultades establecidas por Borja (2014)	Dificultades establecidas por Wahyuni et al. (2023)	Dificultades establecidas por Widada et al. (2020)	Dificultad no establecida anteriormente
Reconocer la estructura del sistema de ecuaciones			
Relacionar los datos y las incógnitas			
Dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas	Dificultades de destreza	Dificultades de comprensión de problemas	Abuso indiscriminado del método de ensayo y error
Traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático			

En la Tabla 3, la marca de verificación “✓” indica la presencia de cada dificultad en los distintos problemas verbales. En ella se muestra que la “*dificultad de destreza*”, “*reconocer la estructura del sistema de ecuaciones*”, “*traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático*” y “*abuso indiscriminado del método de ensayo y error*” son las

dificultades más persistentes en G, mientras que la “*dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas*” aparece únicamente cuando G no logra terminar el problema.

**Tabla 3**

*Frecuencia de las dificultades identificadas en G*

Dificultad identificada	Número del problema verbal				
	1	2	3	4	5
Reconocer la estructura del sistema de ecuaciones	✓	✓	✓	✓	✓
Relacionar los datos y las incógnitas	✓	✓	✓	✓	
Dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas		✓	✓		
Traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático	✓	✓	✓	✓	✓
Dificultades de destreza	✓	✓	✓	✓	✓
Dificultades de comprensión de problemas		✓	✓		✓
Abuso indiscriminado del método de ensayo y error	✓	✓	✓	✓	✓

Por otro lado, S presentó cuatro de las dificultades establecidas por Borja (2014), una establecida por Wahyuni et al. (2023) y una no establecida anteriormente. Dichas dificultades se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4***Dificultades identificadas en S*

Dificultades establecidas por Borja (2014)	Dificultades establecidas por Wahyuni et al. (2023)	Dificultades no establecidas anteriormente
Reconocer la estructura del sistema de ecuaciones	Dificultades de destreza	Abuso indiscriminado del método de ensayo y error
Relacionar los datos y las incógnitas		
Traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático		
Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones		

En este caso, además de que S muestra menos dificultades en comparación con G, pero sí se agrega otra dificultad relacionada con el planteamiento de los sistemas de ecuaciones llamada: “*Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones*” establecida por Borja (2014). Aunque S muestra el mismo margen de dificultades, la frecuencia de estas es menor a comparación con G, como se muestra en la Tabla 5. Se observa que la “*traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático*” es la dificultad con mayor presencia, mientras que la dificultad que menos se repite es “*Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones*”.

Los participantes presentaron dificultades comunes como relacionar los datos y las variables, dificultades de destreza, la traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático y el abuso indiscriminado del método de ensayo y error. Con la diferencia que en G son más frecuentes estas dificultades que en S.

**Tabla 5***Frecuencia de las dificultades identificadas en S*

Dificultad identificada	Número del problema verbal				
	1	2	3	4	5
Relacionar los datos y las incógnitas		✓	✓	✓	
Traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático	✓	✓	✓	✓	
Dificultades de destreza	✓	✓	✓	✓	
Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones	✓				
Abuso indiscriminado del método de ensayo y error	✓	✓		✓	

## CONCLUSIONES

Los sistemas de ecuaciones están presentes en la vida cotidiana, tienen distintas aplicaciones en nuestro día a día, justo como en las situaciones hipotéticas que los problemas verbales de esta investigación han mostrado. Por ello, es importante que los estudiantes sepan resolver este tipo de problemas de forma óptima y no solo se dediquen a resolver sistemas de ecuaciones establecidos predeterminadamente como si se tratasen de una máquina, si no que se debe reflexionar a profundidad el tema para aplicarlo en situaciones reales. De ahí la importancia de identificar y analizar las dificultades que muestran los estudiantes al momento de resolver problemas verbales de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

A partir de los resultados de esta investigación podemos dar por cumplido el objetivo, que fue identificar las dificultades que enfrentan dos alumnos de tercer grado de secundaria al momento de resolver problemas verbales relacionados con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Y se consiguió responder la pregunta de investigación, cuya respuesta podemos decir que las dificultades que evidenciaron estos estudiantes son:

1. Dificultad para reconocer la estructura del sistema de ecuaciones.
2. Relacionar los datos y las incógnitas.
3. Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones.
4. Dificultad para validar el procedimiento y la formulación a la luz de las respuestas.
5. Traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático.
6. Dificultades de destreza.
7. Dificultades de comprensión de problemas.
8. Abuso indiscriminado del método de ensayo y error.

La aportación de esta investigación son las dificultades 6 y 7 que no aparecen en las establecidas por Borja (2014) con respecto a los problemas verbales, pero aparecen en otros trabajos relacionados con sistemas de ecuaciones y se identificaron en la resolución de problemas verbales. Y la dificultad 8 que no ha sido establecida con anterioridad como una dificultad.

Con respecto a la 8, se ha establecido como dificultad porque, según Borja (2014), una dificultad es la imposibilidad de proceder adecuadamente para resolver un problema. Y lo que se observó con estos estudiantes fue esto precisamente, y que tomaran esta estrategia como último recurso al verse imposibilitados para resolver el problema adecuadamente. Esto se concluyó porque los estudiantes dijeron que conocían el tema durante la entrevista, pero en el análisis se observó que no pudieron transferir ese conocimiento escolar en la resolución de los problemas verbales reales planteados, con excepción del problema 5 en la informante S.

De la misma forma, se observa que ciertas dificultades que establece Borja (2014) no aparecen en este listado. Esto es debido a que, en el trabajo de Borja, los participantes consiguieron plantear los sistemas de ecuaciones, mientras que en este trabajo los participantes no. Esto se concluye al revisar las respuestas en las que S planteó o intentó plantear los sistemas de ecuaciones y se encontró la dificultad número 3 de *“Manejo y organización de los datos en el sistema de ecuaciones”*. Lo que nos lleva a concluir que las dificultades dependen de las habilidades que tengan los estudiantes.

Cabe mencionar que la dificultad 8 fue identificada por consecuencia de un fenómeno que aparece involuntariamente debido a la naturaleza de la investigación y que se ha visto en otros trabajos de esta índole. Aunque el ensayo y error sea uno de los procedimientos aceptados dentro del método natural (Echavarría et al. 2010), este debería ir desapareciendo dentro del camino de las matemáticas conforme el estudiante va creciendo en su formación académica.

## RECOMENDACIONES

Como se mencionó en el apartado anterior, algunas dificultades establecidas por Borja (2014) no aparecen en el listado final de este trabajo. Por lo que se recomienda que en futuras investigaciones se clasifiquen los estudiantes de acuerdo con su alfabetización matemática para estudiar las interacciones por separado y con mayor profundidad, una clasificación recomendada es la que presentan Melisa y Utami (2023).

Por otro lado, se recomienda estudiar la tendencia de usar el método de ensayo y error que presentan los estudiantes en cualquier nivel educativo, especialmente en estudiantes de educación superior. Se podría analizar la efectividad de métodos alternativos de enseñanza para evitar el uso excesivo del método de ensayo y error, así como evaluar intervenciones pedagógicas específicas para fomentar métodos más estructurados y analíticos

## REFERENCIAS

- Andía, V. B. (2023) *Situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales para desarrollar el Razonamiento Algebraico Elemental en la Educación Básica Regular* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].
- Barallobres, G. (2016). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje en matemática. *Educación matemática*, 28(1), 39-68.
- Blanco, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon* 25, 49-60.
- Borja, E. (2014). *Dificultades en la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2*. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.
- Borowski, E. y Borwein, J. (2002) *Collins dictionary of mathematics* (2nd Edition). Collins
- Cedillo, T. E. (1999). Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico: Un estudio con niños de 11-12 años de edad. *Educación Matemática*, 11(2), 16-31.
- Conejo, L., y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática*, 25(3), 129-158.
- Dewey, J. (2022). *How we think*. DigiCat.
- Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (45), 33-42.
- Díaz-Levicoy, D. (2010). *Sistema de ecuaciones y resolución de problemas: una propuesta de enseñanza y aprendizaje* [Contribución a Actas de Congreso]. III Reunión de Pampeana de Educación Matemática. Santa Rosa, Argentina.
- Echavarría, J. D. L., Gómez, C. A. R., Aristazábal, M. U. Z., & Vanegas, J. O. (2010). El método analítico como método natural. *Nómadas. Critical Journal of Social and Juridical Sciences*, 25(1), 327-353.
- Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17(1), 10-16.

- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Mateos, R. (2009). Dificultades de aprendizaje. *Educational Psychology*, 15(1), 13-19.
- Melisa, M., y Utami, N. S. (2023). Students' mathematical literacy in solving problems system of equation of three variables. *Jurnal Pendidikan Matematika (JUPITEK)*, 6(1), 42-48.
- Meza, H.; Meza, D.; Arguello, F.; Vaca, E. (2024). Miedo a las matemáticas: ¿Por qué a los estudiantes no les gusta esta asignatura? *Revista Científica Mundo Recursivo*, 7(1), 1-191
- Muñoz, C. (2011). Tipos de problemas matemáticos. *Pedagogía Magna* 11, 265-274
- OECD (2019), *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
- OECD (2023), *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>.
- Orbe, J. (2015) *Metodología para enseñar sistemas de ecuaciones lineales a alumnos de 2° de la ESO basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner*. [Tesis de Maestría, Universidad Internacional de la Roja] Reunier Repositorio Digital.
- Páez, J. (2013). *Dificultades de aprendizaje*. Cuadernos de Educación y Desarrollo, 32.
- Perpiñá, C. (Coord.) (2012). *Manual de la entrevista psicológica* (Primera ed.). Ediciones Pirámide.
- Polya, G. (1957). *How to Solve it*. N.J.: Princeton University Press. USA.
- Popper, K. (1967). *La lógica de la investigación científica*. (Primera ed.)
- Ramírez, G., Chavarría, J., Barahona, C., y Mora, M. (2009). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de geometría y sistemas de ecuaciones: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso.

- Reynoso, I. (2019). *Sistema de ecuaciones lineales 2x2 y su aplicación en contextos reales*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Master de Formación del Profesorado] Repositorio digital de la Universidad Nacional de Educación. <http://repositorio.unae.edu.ec/handle/56000/2050>
- Rivera, P. (2010). *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por alumnos de segundo grado de educación secundaria a través del uso de geogebra*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Aguascalientes] Archivo digital. <http://hdl.handle.net/11317/650>
- Secretaría de Educación Pública. (2022a). *Currículo nacional aplicable a la educación inicial: Programa sintético de la fase 1*. <https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/08/2.pdf>
- Secretaría de Educación Pública. (2022b). *Programas de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria: programas sintéticos de las fases 2 a 6*. [https://www.dof.gob.mx/2023/SEP/ANEXO ACUERDO 080823 FASES 2 A 6.pdf](https://www.dof.gob.mx/2023/SEP/ANEXO_ACUERDO_080823_FASES_2_A_6.pdf)
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Tavares, M. (2000). A entrevista clínica. *Psicodiagnóstico*, 5, 45-56.
- Tossavainen, T., Attorps, I., y Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education*, 6(2), 127-147.
- Wahyuni, S., Noviani, J., y Ismayanti, E. S. (2023). Analysis of High School Students' Difficulties in the Material of Two Variable Linear Equation Systems. *El-Hadhary: Jurnal Penelitian Pendidikan Multidisiplin*. 1(1), 39-51.
- Widada, W., Herawaty, D., Rahman, M. H., Yustika, D., Gusvarini, E. P., y Anggoro, A. F. D. (2020, February). Overcoming the difficulty of understanding systems of linear equations through learning ethnomathematics. *Journal of Physics: Conference Series* 1470(1), 12-74.

Zazkis, R., y Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

## ANEXO 1: ENTREVISTA CON EL PARTICIPANTE G

G: ¿Solo tengo que resolver los problemas y me vas a hacer preguntas y yo tengo que responder... y ya?

E: *Sí, sí, nada más... o sea, yo te voy haciendo preguntas... este... no sé de la escuela y vamos viendo ¿no? que... que... que va pasando mientras tú lo resuelves, ¿no? entonces vamos a empezar.*

G: ¿No importa si me equivoco? ¿Verdad?

E: *Sí, no importa. Tú ve leyendo el problema, toma el tiempo que creas necesario y... este*

G: Acabo unas y ¿Doy la vuelta así?

E: *Ajá. Si necesitas hojas extras pues ya me avisas ¿no? Y aquí te las voy dando. entonces con eso no... no te preocupes. Entonces ve pensando. Me vas diciendo... igual a lo mejor si no le entiendes, pues todo lo que se te venga, todo lo que se te pase por la mente vémelo diciendo no, no te guardes nada*

G: OK,

E: *Espero que no te guardes nada.*

E: *Sí, sí, y este, pues ya vamos viendo. Dime ¿Te gustan las matemáticas?*

G: No tanto.

E: *¿Por qué?*

G: Porque... este... en especial los... mmm... como estos, los problemas, porque me cuesta razonar el problema para contestarlo.

E: *Ahorita ¿Qué es lo que estás viendo en la escuela?*

G: Antes de salir de vacaciones, empecé a ver trigonometría.

E: *¿Ya viste los sistemas de ecuaciones?*

G: No.

E: *¿No has visto los sistemas de ecuaciones?*

G: Creo que sí.

E: *¿Sí te acuerdas... no te acuerdas?*

G: Más o menos.

E: *¿Cuáles son?*

G: Los sistemas de ecuaciones son los que se usan para resolver las ecuaciones ¿No? Por ejemplo, lineales, las cuadráticas

E: *Las ecuaciones lineales son las normales para que encontrar el valor de equis. Las ecuaciones cuadráticas son cuando tienes, por ejemplo, equis cuadrada más ocho equis. Los sistemas de ecuaciones son cuando tienes dos variables, por lo general son equis y ye, ¿eso ya lo viste?*

G: ¡Ya!

E: *¿sí? ¿Cuándo lo viste? ¿Este año?*

G: El año pasado y este año.

G: ¿Puedo poner la respuesta acá abajo?

E: *Claro, Claro.*

G: Voy a poner la cantidad. Estos son los números que compré, bueno, bueno, los lápices que compré y las plumas que compré.

E: *Muy bien ahora, ayúdame leyendo en voz alta. ¿Qué es lo que dice el problema?*

G: María compró algunos lápices y plumas en la tienda, los lápices costaban 2 pesos cada uno y las plumas 3 cada una, compró un total de 5 artículos y gastó 13 pesos en total. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas compró?

*E: OK, ¿qué es lo que tuviste que hacer?*

G: Es simplemente sumar 3 veces la pluma, porque... no, no se puede sumar cuatro veces la pluma porque...  $3 + 3 = 6$  y  $3 \dots 9$  y otros 3 son 12, y como también hay que incluir los lápices nada más sumé 2 lápices, que son cuatro y 3 veces las plumas 9, 10, 11, 12, 13. no sé si me expliqué.

*E: Sí, más o menos, entonces... no utilizaste ningún sistema de ecuaciones. Muy bien, ¿cómo nombrarías este procedimiento?*

G: Una adivinanza.

*E: ¿Una adivinanza? ¿Lo hiciste al azar?*

G: En sí, por una parte, sí. Porque tiene que encontrar cuántos lápices y plumas compró y los lápices costaban 2 y las plumas 3, o sea que es la misma cantidad de pesos... bueno, la misma bueno, cuántos lápices compró los lápices es la misma cantidad que los pesos, lápices, los pesos, las 2 cantidades.

*E: Ok, y ¿cómo puede saber si es correcta tu respuesta?*

G: Porque solo dice que gastó 3 en total y no se puede pasar de 13. Y por eso la razón sumé 3. Bueno, como hablemos en primera persona compré 3 veces la pluma y 2 veces los lápices. O sea que serían por los 3 lápices son 9, no, bueno, por 3 plumas 9 y por lo y por los lápices que serían 2, 4 pesos.

*E: Si quieres, puedes seguir con él siguiente.*

*E: ¿Ya todo esto bien? OK, ¿Qué dice el problema?*

G: En una granja de gallinas y conejos. Entre las 2 especies hay un total de 12 cabezas y 32 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos... cuántos conejos son?

*E: OK. ¿Qué fue lo que hiciste?*

G: En las cabezas... puse las gallinas y las patas, en los conejos, pero no podía poner las 32 patas y tuve porque cada conejo como tiene 2 patas, tuve que hacer 2, 4, 6, 8, 10 toda esta secuencia y contar de acá hasta acá para que me den dieciséis conejos.

*E: Conejos... ¿Y, el otro qué son?*

G: Gallinas que serían las 12 cabezas, porque cada gallina nada más tiene una cabeza.

*E: ¿Y los conejos?*

G: Porque entre las 2 especies hay un total de 12 cabezas y 32 patas. Lo que sería entre las 2 que hay 12 cabezas y 32 patas. Por cada una, sí, ¿No? O sea, entre las gallinas hay 12 cabezas y 32 patas, y los conejos 12 cabezas y 32 patas.

*E: OK, entonces, ¿cómo sabemos que la respuesta o cómo sabes tú que tu respuesta sería correcta?*

G: Los conejos por la secuencia y las cabezas por el... por el 12, bueno por las gallinas, pero aquí es mi confusión porque dice entre las 2 especies que no sé si entre las 2 especies, 2 cabezas y 32 patas, o las 12 cabezas y 32 patas y las 12 cabezas y 32 patas.

*E: OK.*

G: Ahí sí, no sabría cuál sería el resultado. Si estoy bien o mal, porque entre las 2 especies, lo vuelvo a repetir, no sé si entre todo esto esté lo mismo que esto y entre todo esto lo mismo acá o que sea 12 cabezas y 32 patas.

*E: OK, sigue, sigue con él con el siguiente problema.*

*E: ¿Y en la escuela te han tocado buenos profesores, tú piensas que han sido buenos, han sido malos?*

G: No. Bien.

*E: ¿Han sido amables tus profesores, se han preocupado más por el aprendizaje que por las calificaciones?*

G: Sí, sí, bueno, por una parte, las calificaciones y el otro el aprendizaje.

*E: Por lo general los profesores se dedican nada más a escribir en el pizarrón y hacen el procedimiento, este... este es el procedimiento, se los explico y ahora ustedes hagan los ejercicios, no como si fuera... como si fuera una maquinita. O les pone...*

G: Sí, escribe el procedimiento en todo... todo... todo... y de ahí ya nos van explicando paso por paso o lo... lo vuelven a borrar y nos vuelven a explicar... lo... lo vuelven a reescribir y ya lo van haciendo paso por paso.

*E: ¿Y les ponen problemas de este tipo?*

G: Ahorita ya no

*E: Ya no, ¿antes sí?. O es dependiendo del tema.*

G: Antes sí. Y por un bueno 50 por parte del tema y el otro 50 por parte de así Nomás. Bueno, antes si nos dejaban problemas, pero ahora ya.

*E: ¿Los exámenes son personalizados o es el mismo para todos? A personalizados me refiero a que a lo mejor les da....*

G: Diferentes.

*E: ¿Son distintos para cada uno? o por ejemplo, tiene cuatro exámenes distintos para evitar que copien.*

G: No, tiene todos iguales, nada más que en los exámenes del ahorita del parcial, ahora sí como que revolvieron unas diferentes y otros iguales.

*E: ¿Pasas mucho tiempo en Internet?*

G: ¿Paso?

*E: ajá. En redes sociales... este... no sé, TikTok, Facebook, juegos en línea.*

G: Eso, también me gusta investigar cosas que... no sé... más de... química

*E: Te gusta la química... ¿Qué otras materias te gustan o qué otra cosa te llama la atención?*

G: Ahorita solo química... ah... antes me gustaba la historia.

*E: ¿Este por ejemplo, algún deporte, alguna serie, película que seas fan?*

G: EL fútbol y hace no mucho pasé una serie que se llama The Flash, que estaba muy buena.

*E: ¿Cuánto tiempo le dedicas más o menos al Internet o a las series?*

G: En una serie es nada más cuando me aburro... a las redes sociales, nada más cuando quiero mandar mensajes y al Internet, o sea, ¿lo que es Internet abarca juegos y todo eso?

*E: Sí, sí, todo... este no sé, estás jugando, supongamos no Call of Duty estás jugando este y gi oh, no, este o cualquier tipo de juegos, todo todo eso abarca, ya sea de consola, sea de de celular o PC.*

G: Por ejemplo, ahorita entre semana nada bueno más que el celular y eso nomás como... Um hace rato... y en... y en el transcurso de la tarde.

G: El sábado me la paso todo el día. Todo el día, como domingo hasta las 10. No, no, no, domingo como hasta las 8.

*E: ¿Como cuántas horas más o menos?*

G: Los sábados 2, no, no, de 3 hasta yo creo que era. El domingo, el domingo bueno, ya está, los domingos de igual como 3 de la tarde a 8 de la noche. Ya acabé.

*E: Igual lee el problema en voz alta.*

G: Sí me vendió entradas para adultos a 8 pesos y entradas para niños a 5 pesos, vendió un total de 80 entradas y recordó 600 pesos. ¿Cuántas entradas para adultos y cuántas para niños se vendieron?

*E: ¿Entonces, cuál fue tu procedimiento?*

G: Multipliqué el 8 por el... por la mitad que el 80, que es 40. Y me dio 320 y los mismos 40 por el 5.

*E: ¿Ok, lo dividiste a la mitad, dijiste?*

G: Lo divide a la mitad.

*E: Hay mitad de adultos y mitad de niños. OK.*

G: Y me dio 200 que 320 y 200 son 520, pero ahí no forman los 600 y como cada entrada del niño cuesta 5 pesos, porque si cuento de 8 no... no serían 600, serían como 616...

600, ¿verdad? Y me me resultó más fácil hacer la de los niños que hice toda esta secuencia y me dio el resultado, 16 niños más. Que son 56 niños, o sea, 56 entradas de niños y 40 de adultos.

*E: OK. ¿Sería tu respuesta final?*

G: A todo esto que son los 16 niños me dieron los 600 pesos, pero ya vi mi error, que que esto tiene y estos 2 tienen que dar lo mismo que a las 8 de entrada.

*E: Ok, puedes corregir si gustas.*

G: ¿Ah, no?

*E: ¿Tu profesor los alienta a utilizar aplicaciones?*

G: No, no, todo mental... mental o así en hojas.

*E: ¿Y has pensado que vas a estudiar? ¿Qué te gustaría?*

G: Químico farmacobiólogo o ingeniero químico.

*E: Muy buenas opciones ¿Ya tienes más o menos pensado en la universidad?*

G: No es no es acá me quiero ir a España. Y ahí la quiero estudiar, pero tengo que conseguir beca para ir.

*E: Muy bien, muy bien. Qué bueno. No es muy común que jóvenes como tú, sobre todo en secundaria, ya tengan pensado qué es lo que van a hacer. Qué bueno.*

G: Andaba pensando todo esto desde primero, más o menos, y ya armando todo lo que quiero hacer en un futuro.

*E: Entonces hay que trabajar fuerte, ¿no? para para que puedas cumplir con tus metas, yo espero que las cumplas.*

G: Y también, bueno, tengo ese sueño y también quiero dar la vuelta alguna noche en todavía también, pero ahí sí hay que esforzarse más.

*E: Sí, es posible si tú lo quieres. Muy bien ¿cómo vas?*

G: Es que...quiero quedar con esa respuesta, respuesta. Pero no es lo mismo que las entradas. El de niños lo dejé igual para 56 y el de adultos nada más le reducía el número para que diera 14 y así se formara lo de las 80 entradas. Son 56 entradas de niños y 24 entradas adultos

*E: Ok, puedes pasar con el siguiente.*

*E: Veo que te gusta el anime, ¿Qué animes has visto?*

G: Naruto. My hero academy y Demon Slayer

*E: Muy buenas, muy buenos. ¿Los ves en español o en su idioma original?*

G: Naruto en idioma original. Y a los demás en español. Es que a Naruto sí le queda su idioma original. Aunque por ratitos le pongo subtítulos porque tampoco le entiendo tanto. Ya terminé.

*E: Lee el enunciado.*

G: Un día porque Lucas tiene 60 en billetes, 60 plazas en billetes de 5 y 10 tiene el total de 7 billetes. ¿Cuántos billetes de 5 y cuántos billetes de 10 hay? No, tiene Lucas. Es de 10 al 5 y de 5 al 2

*E: ¿Qué método utilizaste? ¿cuál fue tu procedimiento?*

G: Igual como el primero, nada más, porque nada más tiene 7 billetes, si fueran 8 serían cuatro de 5 para formar 70 pesos. 70 pesos de 8 billetes, como son 60 de 5 y 10 no más había que sumar 10 veces el 5 o 5 veces el 2.

*E: Al revisar tu respuesta... Cuando revisas tu respuesta, ¿cómo sabes que estás seguro de que es correcta?*

G: Porque no puede pasarse de 60 y tampoco de 7 billetes.

*E: Te aseguras que las cantidades que te muestran sean...*

G: Exactas para que no se pase ni de 60 ni de 7.

*E: Perfecto, pues ya casi acabamos, ya solo te falta uno.*

*E: ¿Y hasta el momento, ¿cómo vas en cuanto a matemáticas en la escuela?*

G: 6.

G: Sí, bueno, en este 7 en el anterior 6.

*E: ¿Y en toda la secundaria?*

G: No 8 y 9 en primero, llegando a tercero bajaron mis calificaciones.

*E: ¿Qué temas han sido los que más te han costado trabajo?*

G: Ecuaciones de primer grado, de segundo grado, de todo de todo en general. Y también lo que estoy viendo, que es trigonometría. Antes de salir de vacaciones, como un mes antes vi el teorema de Pitágoras.

*E: ¿Teorema de Pitágoras? ¿Se te hizo sencillo?*

G: sí,

*E: ¿fácil de entender?*

G: Al principio me costó trabajo, pero después le entendí.

*E: ¿Cuál es la condición que debe cumplir el triángulo para aplicar el teorema de Pitágoras?*

G: Bueno, en sí solo hay un lado A, B y C en los problemas. Puede ser que encuentres el lado A, el lado B o el lado C, porque cada uno tiene sus diferentes fórmulas y diferente forma de resolver cada fórmula.

*E: Ok, pero acuérdate que para utilizar el teorema de Pitágoras necesitamos una condición especial para el triángulo porque no puede ser cualquier triángulo.*

G: Ha... a un triángulo rectángulo.

*E: Muy bien, ¿cuál es esta condición para que sea un triángulo rectángulo?*

G: Que tenga diferentes lados.

*E: Ah, no, no necesariamente.*

G: Bueno, algún lado sea como el triángulo y como el otro, como un rectángulo.

*E: Sí, más o menos en otras palabras. ¿Cuánto tienen que medir sus ángulos o uno de sus ángulos?*

G: Ah, yo sí, no me acuerdo, pero, sí, sí sé cuanto tenía que medir pero no me acuerdo.

*E: La medida de ese ángulo es lo que le da el nombre del triángulo rectángulo. Tiene tener un valor específico. Veo que te distraes con facilidad ¿verdad? Cuando te platico dejas de escribir.*

G: Luego me quedo pensando en la cabeza mientras hablo. Creo que ya.

E: Ok, ¿cuáles fueron tus respuestas?

G: 40 y 30

E: ¿Qué dice el enunciado?

G: 2 amigos, Ana y Juan están narrando para comprar regalos de cumpleaños para sus amigos. Ana ahorró 10, más que el doble de ahorro Juan. En total ambos se ahorraron 70. ¿Cuánto ahorró cada uno? Y es que Juan ahorró 30 dice que más que el doble, o sea 40, que serían 10, bueno al  $30 + 10 = 40$  que serían que ahorró 10 más. Nada más que ahí este no entendí cómo que más que el doble, o sea, sería el doble de 30. O sea que Juana más ahorró 10 y Ana los 60.

*E: Eso fue lo que entendiste.*

G: Eso me está dando entonces. Pero lo... pero lo cambié por esto, pero no sé si en lo que acabo de decir estoy bien. A este tipo de problemas no les entiendo, bueno, sí les entiendo nomás que no sé cómo resolverlos y no sé qué operación usar. Por aquí pudo haber de todo.

*E: Sí puedes, puedes utilizar lo que tú quieras. El procedimiento que tú necesites es válido, no te voy a limitar a usar una sola fórmula, no, tú hazle como lo entiendas.*

G: Yo creo que aquí esa ecuación.

G: Y es que es 10... Igual a 70. No sé a qué se refiere con 10 más que el doble.

*E: ¿A que te imaginas que pueda referirse?*

G: La cantidad que tiene Juan se dobló por 10 más serán 40, ¿no? Bueno, no siento, no, porque es nada más 70.

*E: ¿Te quedas con esa respuesta?*

G: No, creo que esto es ecuación, porque ambos ahorran 70 pesos, pero no sabemos cuánto ahorró Juan. Ana ahorró 10 más que el doble de lo que ahorró pan, que supongo que espero que sean 30 porque es que sigo sin entender esta parte, 10 más que el doble. ¿Ahorró el doble? O nada más ahorró 10 pesos más que él.

*E: ¿Si lo pudieras resolver con una ecuación, cómo lo Harías? ¿La asignaría es una variable a cada nombre, o lo dejarías así este Ana y Juan?*

G: Sería X y Y.

*E: ¿Ah, OK, lo haces? ¿quién sería X y quién sería Y?*

G: Juan sería X y Ana sería Y porque no sabemos cuánto ahorró Juan, entonces sería X y Y porque supongo... porque sabemos que Ana ahorró 10 más que el doble que él ahorró... que él ahorró.

*E: ¿Entonces, ¿cómo lo expresarías?*

G: Hay que usar una expresión.

*E: Exacto. Dice Ana ahorró 10 más que el doble. Entonces, si Juan ahorró X pesos, ¿cuánto ahorro Ana?*

G: 10 pesos más que el doble que él. 10 pesos, bueno, aquí ya 10 pesos más que el doble de lo que ahorró Juan. Los 10 pesos más que el doble serían 20 pesos, porque 10 pesos más que el doble de los fondos. Para mí el doble sería 30-60. Más los 10 pesos. ¿Algo así? Es que las expresiones no me las había enseñado.

*E: ¿Qué expresiones?*

G: O sea como esto, que o sea que usa expresiones y yo no sé cómo usar una expresión o saber hacer o resolver una expresión, porque todavía no me lo han enseñado.

*E: Esto se supone que lo tenemos que empezar viendo desde primero de secundaria, de acuerdo con la SEP. El profesor se tiene que encargar de cubrir esa parte. Si yo te estoy hablando de ecuaciones, tengo que asegurarme de que puedas entender el concepto. Por ejemplo, en esta expresión que a ti te está costando el trabajo 10 más que el doble. Te has encontrado a lo mejor en algún momento, problemas como: Juan tiene el doble de la edad de su hermana María ¿no? entonces, ¿cómo vas a expresar ese problema verbal?*

G: O sea, para mí el doble es el doble. ¿Juan tiene 30 años, no? Y usted dijo que el doble de lo que tiene bueno Ana tiene o bueno Ana tiene el doble que tiene Juan, serían 60, para mí eso es el doble, pero 10 más que el doble. Ajá, el doble de 20, 40 y le somos los 10, 50. Bueno, eso es lo que yo entendí. Y es que Ana ahorró 10 más que el doble, porque ambos cerraron 70 y no se pueden pasar de 70. Y ahorró 10 más que el doble, que sería 20 y el otro día a 50 que es 60.

*E: Ya comprobaste la respuesta.*

G: Sí, aquí estoy más seguro que el anterior.

¿Cuántas formas hay para resolver las ecuaciones?

*E: Hay muchas formas. Para un sistema de ecuaciones puedes utilizar el método de eliminación...*

G: Ah, sí, sí, sí, ya recuerdo, eliminación, por sustitución, por igualación y por factorización

*E: Ahora que has terminado ¿Cómo te sientes?*

G: No sé.

*E: ¿No sabes?*

G: Siento que estoy mal porque es. O sea, se que no lo resolví como se debía, si no que busqué el camino más fácil para no complicarme tanto y hacer tantas cuentas, cuentas y cuentas. Porque también a veces me pasa de que encuentro una ecuación o fracción

difícil y el profesor la resuelve con como 5 pasos y yo nada más con 2. Pero me da el mismo resultado, ajá, pero no sé qué hago para que me dé ese resultado.

*E: Eso es lo que siempre hay que pensar, no importa cómo lo hagas siempre y cuando entiendas lo que estás haciendo. Muchas veces los sistemas de ecuaciones, así como nos los enseñan en la escuela que tienes que escribir  $X$  más  $Y$  igual a tanto y luego abajo  $3X$  más  $2$  y igual a tanto... Y ahora resuélvelo por el método que te estoy pidiendo. A veces no es óptimo como lo estás haciendo. No es lo que pasa y lo que estás haciendo tú en 2 pasos lo puedes resolver y lo resuelves de forma rápida. ¿Cuál es la desventaja? A lo mejor que tú estás inseguro de tu respuesta porque no sabes qué estás haciendo.....*

G: O no usé el método correcto.

*E: Exacto, no estás seguro si utilizaste el método correcto. Porque a ti te enseñaron en la escuela que lo tienes que utilizar con letras, ¿no? También otra desventaja de hacerlo como lo estás haciendo tú, es que cuando se vuelven sistemas más más grandes, o con más variables, se puede dificultar más resolverlo al tanteo. Así será más probable que nos equivoquemos.*

*Pero no es que estés mal del todo, es natural que busques y encuentres tu propio método o procedimiento para solucionar problemas. Tu intuición es la que está trabajando. Supongamos que una persona no va a la escuela, como en el caso de las personas que viven en la sierra que viven en este, en comunidades, en zonas rurales, no, un ejemplo podrían ser las personas mayores, hacen así sus tipos de cuentas, hacen una comparación con algo que ya conoce y parten de ahí para poder encontrar el valor de las cosas. Otro ejemplo, y hablando de animes, hay uno que apenas salió, se llama *The Weakest Tamer Began a Journey to Pick Up Trash* cuenta la historia de una niña abandonada que trata de sobrevivir en un mundo de fantasía, y una forma de sobrevivir es cazando ratones, ella los caza y los vende. El carnicero le dice, “te voy a pagar  $X$  monedas por cada ratón que tú traigas” y conforme va pasando el anime, ella va empezando a conocer el concepto del dinero y cada moneda nueva que le entregan siempre hace las comparaciones con ratones. Entonces es una forma de aprender. Cuando ella caza una serpiente le pagan con una moneda de plata y ella lo relaciona con cantidades en ratones, igualmente cuando necesita pagar algo o pregunta sobre algún*

*costo, hace sus comparaciones con ratones para saber si es mucho o es poco. Entonces ahí ella está aprendiendo a multiplicar sin saber que está multiplicando, porque no conoce el concepto de las matemáticas. Y es más o menos lo que te está pasando. Estás aplicando los conceptos y las bases de los sistemas de ecuaciones, pero todavía no estás muy seguro de cómo aplicarlos correctamente, o de una manera formal matemática. Pero no es que esté erróneo, no, sino que hay que trabajar un poco más con este tipo de relaciones, para una mejor comprensión.*

*E: ¿Ahora te has encontrado este tipo de problemas en algún momento de tu vida?*

G: Bueno, por el momento no, pero sí creo que en algún momento los llegue a utilizar.

*E: Pues bueno, esto sería todo, te agradezco mucho tu participación,*

G: De nada, bueno, espero que te haya servido.

*E: Por supuesto, todo sirve, muy bien G, ya nos veremos la siguiente semana, ten un buen día.*

G: igualmente, nos vemos el lunes.

## ANEXO 2: ENTREVISTA CON EL PARTICIPANTE S

*E: ¿Entonces, alguna pregunta con lo que vas a hacer? ¿no? Entonces puedes empezar con el primero. Cuando lo acabes me avisas ¿de acuerdo?*

*E: ¿Me puedes contar qué es lo que estás haciendo? ¿Cómo lo estás haciendo?*

S: Es que realmente no me acuerdo cómo es... pues... primero se... para... Lo que sería el precio de los lápices y el precio de las plumas y poner el resultado, no sé cuánto sería el total que se gastó.

*E: ¿Ya habías visto sistemas de ecuaciones en la escuela?*

S: Creo que ya... en segundo

*E: ¿Cuáles fueron los métodos que viste para resolver los sistemas de ecuaciones?*

S: No, no, no recuerdo.

*E: Aquí si este trata de ir pensando y moviendo mientras vamos conversando, no, para que no haya problemas. Ya si de verdad sientes que te desconcentro demasiado, tú me avisas, para que te dé un tiempo. ¿Ahorita que estás viendo en la escuela?*

S: Ahorita estaba viendo raíz cuadrada, simplificación, suma, resta y multiplicación de raíz cuadrada.

*E: ¿Qué materias son las que te gustan más?*

S: Creo que artes e historia.

*E: Eres más de humanidades, ¿verdad?*

S: Se podría decir que sí.

*E: ¿Y las que menos te gustan, además de matemáticas?*

S: Pues ya no tomo ahorita geografía, pero no me gustaba y... creo que ya.

*E: ¿Qué redes sociales utilizas más?*

S: YouTube y.... nada más, casi no paso tiempo en internet

*E: ¿Y qué te gusta hacer en tu tiempo libre?*

S: En mi tiempo libre, normalmente... solo conversar con mis hermanas. Bueno, solo si están.

*E: ¿No tienes alguna actividad deportiva?*

S: Pues practicar, pero en modo juego, no tanto como específicamente practicarlo como el deporte.

*E: ¿Qué tipo de series te gustan?*

S: Es que no soy tanto de ver series o películas, porque, frecuentemente no es como que tenga mucho tiempo para esas actividades

*E: ¿Haces otras actividades extracurriculares?*

S: Pues... además de kumon... nada más... bueno banda de música.

*E: ¿Qué instrumento tocas?*

S: Saxofón.

*E: ¿Cuál es la melodía que más te gusta tocar?*

S: Ammm... no, no sé.

*E: ¿Quedó? Ok... A ver, cuéntame ¿Qué fue lo que hiciste?*

S: Primero quería realizar una ecuación, pero realmente no me acordé cómo se hacía entonces, pues fue ahora sí que al tanteo. Como eran cinco artículos los que compré, pues no tenía que pasarme de cinco artículos y pues nada más que las cuentas coincidieran... y ya.

*E: Ok ¿Cómo comprobarías tu respuesta?*

S: Pues sumando los precios y sumando los artículos.

*E: Entonces vamos con el segundo, lee, lee en voz alta.*

S: Sí. En una granja y gallinas y conejos. Entre las 2 especies hay un total de 12 cabezas y 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

*E: ¿qué utilizarías o qué podrías usar?*

S: Mmmmm... pues primero calcularía cuántas mmm cuántas patas, cuenta cada gallina, por ejemplo, las gallinas cuentan con dos patas y los conejos cuentan con cuatro. Entonces... eso para las patas para las cabezas... creo que igual lo haría al tanteo.

*E: Mhm, ve explicando qué vas haciendo, cómo lo haces*

S: Pues, primero serían cuatro patas de los conejos, y sus dos de las gallinas. Esto daría 32. Pues le hice el tanteo y de acá sería cuatro y de acá sería ocho, o sea de conejos sería... cuatro conejos y de gallina sería ocho gallinas. Sí, creo que sí. Primero serían

cuatro cabezas... y dieciséis patas. Y luego para las gallinas, que serían ocho cabezas. Y tendrían 16 patas. Que nos terminaría dando las doce cabezas y las 32 patas. Que serían cuatro conejos y 8 gallinas.

*E: Ok... igualmente, ¿cómo compruebas tu respuesta?*

S: Pues igual, sumando los resultados de cuánto fueron por las cabezas de gallina y las cabezas de conejos, y luego los ve las patas de las gallinas y las patas de los conejos.

*E: Pasamos con el tercero, igual, en voz alta.*

S: Sí. Un cine vendí entradas para adultos a 8 pesos, mientras para niños a 5 pesos vendió un total de 80 entradas y recaudó 600. ¿Cuántas entradas para adultos y cuántas entradas para niños se vendieron? Primero de separar cuánto fueron de los adultos y cuanto fueron de los niños... y el total.

*E: Bueno, en lo que lo vas resolviendo. ¿Ya has pensado qué vas a estudiar?*

S: Si lo he estado pensando, pero... mmmm... Todavía no tengo ni idea clara de lo que me llama la atención.

*E: Todavía no tienes definida tu carrera, pero ¿Qué tal la preparatoria?*

S: En la preparatoria si, ya. A la Lázaro Cárdenas del Río.

*E: ¿De la BUAP? ¿La que está en el centro?*

S: No, es que por el temblor la cambiaron. Ahora está por galería Serdán.

*E: ¿Qué piensas que vas a ver en la prepa en cuanto a matemáticas?*

S: Realmente no sé... mmmm... Igual y de lo que estoy viendo, pero con otros procedimientos.

*E: Hasta ahorita, ¿qué es lo más complicado en matemáticas a lo que te has enfrentado?*

S: Mmmm... Pues lo que más se me dificultó fueron potencias las potencias.

*E: ¿Por qué?*

S: Es que... ammm... En ocasiones era como sacar la potencia, pero había veces en las que cambiaba, por ejemplo, en el número uno se quedaba igual uno y en otros cambiaba... y sí, cambiaba mucho.

*E: ¿Como han sido tus profesores en matemáticas durante estos tres años y es secundaria?*

S: Creo que bien, bueno, no, en primero de secundaria, tenía un maestro que dejaba trabajos y ya los dejaba, o sea, nada más los firmaba y ya o sea, no, no los revisaba y no siempre explicaba los temas. Luego, en segundo de secundaria, sí tuve un maestro que sí explica muy bien y este enseñar muchas clases si eran buenas y yo ahorita en tercero de secundaria pues sí, explican bien, pero como que no especifican muchas cosas, o sea, como que omite muchos detalles.

*E: ¿En algún momento has aplicado las matemáticas en tu día?*

S: Sí, bueno, la mayoría, mmmm... dejando a un lado lo básico como sumas y multiplicaciones, sí, pero no son tan necesarias.

*E: ¿Cómo calificarías tu memoria en matemáticas?*

S: Muy mala. Es que hay veces en las que sí retengo las cosas y sí, me quedo con eso. Y en otras como ahorita que no me acuerdo de nada y se me olvida y ya.

*E: ¿Tú cómo piensas que aprenden matemáticas las personas que viven en zonas más retiradas? Por ejemplo, en zonas rurales... en comunidades.*

S: Pues considero que... de lo que se les puede enseñar, por ejemplo, si está en la posibilidad de que, este, si... en la escuela, si... les enseñan bien, pues o en otras cosas, como lo podría ser, como las matemáticas normalmente se aplican en casi todo, pues sí es como necesario aprenderlas, por lo que considero que, o sea, de alguna manera u otra, pues si... ¿Van a aprender de cierta manera?

*E: Ajá, por ejemplo, en la Antigüedad, pues todavía no conocíamos todos esos conceptos, ¿no? ¿Cómo piensas que aprendían matemáticas las personas?*

S: Pues... creo que... según si lo tengo bien entendido, la escritura y las matemáticas se me hicieron por medio de la economía. Con la economía se dio como de... necesitamos ver cuánto tenemos, cuánto dimos y... y pues a organizar, administrar... Entonces, pues eso fue como la base de.... de que uno aprende.

*E: Dijiste algo muy curioso, la presión de la o más bien la creación de la de una escritura y la aparición de las matemáticas. Eso, definir un antes y un después, no dentro de la historia.*

*E: ¿Ya lo acabaste? ¿Qué es lo que has intentado hacer?*

S: Igual al tanteo.

*E: ¿Por qué no usas los sistemas de ecuaciones para resolverlo?*

S: Es que no sé, no me acuerdo

*E: OK ¿no recuerdas cómo se hace? Muy bien aquí sí es importante diferenciar: ¿no recuerdas? o ¿No sabes cómo pasarlo del lenguaje natural a términos matemáticos?*

S: No me acuerdo como se pasa

*E: Bien, ¿Qué sería lo primero que tienes que hacer cuando ves un problema así y lo quieres pasar a un lenguaje matemático?*

S: Puedes separar todos los datos....

(La participante se queda callada pensando, no tiene una idea clara de cómo proceder)

*E: ¿Qué información tienes?*

S: El dinero y las entradas.

*E: ¿Y cuántos tipos de entradas tienes?*

*E: Vuelve a leer el problema.*

S: Un cine vende entradas para adultos a 8 pesos y entradas para niños a 5, vendieron un total de 80 entradas y recaudó 600. ¿Cuántos entradas para adultos y cuentas para niños su vencido?

*E: Entonces, nuevamente, aquí debemos tener mucho cuidado para diferenciar un total de otro, cuando hablamos de los 600 nos referimos al dinero, ¿verdad? Es decir, el monto total del costo de los dos tipos de entradas. ¿Pero el 80 qué es?*

S: Es el total del número de las entradas.

*E: ¿Cómo quedaría esta ecuación?*

*E: En fin, ¿qué te parece si lo dejamos pendiente, si pasamos al siguiente?*

S: ¿Vuelvo a leer...?

*E: Sí, también en voz alta.*

S: Lucas tiene 60 billetes de cinco y diez, tiene un total de siete billetes ¿Cuántos billetes de cinco y cuántos billetes de diez tiene Lucas?

S: Ya terminé

*E: OK, ¿qué fue lo que hiciste?*

S: Pues primero, separarlas... cuántos billetes de 5 tenía y cuántos billetes de... no... mmm... separar las cantidades de los billetes, o sea su valor y... este... el total que tenía que formar y pues ya al tanteo. Ya después, para comprobarlos es más la cantidad de billetes y el total de lo que obtuvo.

*E: Ahora pasamos al último.*

S: Ammm... dos amigos Ana y Juan, están ahorrando para comprar regalos de cumpleaños para sus amigos. Ana ahorro diez pesos más que el doble de lo que ahorro Juan, en total ambos ahorraron 70. ¿Cuánto ahorro cada uno?

*E: ¿Sientes que algo no te cuadra?*

S: Sí... pero no sé.

*E: ¿Por qué escribiste dos equis mas diez?*

S: Porque dice que Juan ahorró, entonces lo que ahorró Juan es  $x$  y el doble de lo que ahorró Juan o sea dos  $x$  más diez fue lo que ahorró Ana

*E: ¿Y el 70 que representa?*

S: mmm...el total.

(Vuelve a intentarlo y en esta ocasión logra resolver el problema)

*E: Bien, ¿cómo comprobaste tu respuesta?*

S: Pues poner lo que salió del resultado como  $x$  o sea lo que colaboró Juan. Y ya, pues multiplicarlo por 2 y sumarle 10, que eso fue lo que hizo Ana y sumarlo y que coincidiera con los setenta que ahorraron, nada más.

*E: ¿Ahora por qué piensas que este de acá (se hace referencia al problema 3) se te dificultó más?*

S: mmmm.. creo que por las cantidades, bueno, no, creo que sí, bueno por los valores por así decirlo. Porque estos manejan con  $x$ , y con  $y$ , y este nada más con  $x$ .

*E: ¿Cómo te sentiste ahorita después de resolverlo?*

S: Pues creo que bien... mmm.... Un poco ansiosa

*E: Bueno, eso sería todo, en verdad te agradezco tu ayuda y participación.*

# ANEXO 3: CONSENTIMIENTO ESCRITO DE G Y S

Puebla, Puebla, México

## 1. Datos del entrevistado

Nombre completo	G.
Fecha de nacimiento	

## 2. Receptor(es) de la información

Receptor(es)	JOSE LUIS GONZALEZ TIRADO BENÉMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Contacto para consultas o ejercicio de derechos ARCO	Jose.gonzaleztir@alumno.buap.mx

## 3. Procedimiento

Durante la participación en esta investigación, el participante resolverá ejercicios matemáticos mientras el receptor realizará preguntas de seguimiento. Los datos de información serán recolectados por medios escritos, videográficos y/o fonográficos de manera digital o análoga.

## 4. Datos e información recabados

Los datos y/o información que se recolectan de forma directa o indirecta son:

- Nombre completo
- Fecha de nacimiento
- Instituciones educativas a las que ha asistido.
- Matrícula estudiantil actual
- Género
- Información socioeconómica
- Declaraciones y respuestas producto de la entrevista

No se recaba ningún tipo de dato sensible o que pudiera colocar en riesgo la integridad de la persona.

## 5. Tratamiento de los datos

Nunca se usarán tus datos de tal forma que se exhiba la identidad del participante, ni dato alguno que pueda relacionarse directamente con el participante. Todos los datos de identidad son anonimizados o pseudo-anonimizados para que cualquier persona, si lo leyera, no pudiera identificar a la persona.

Los datos e información son almacenados de forma segura, así como cualquier medio o soporte por el que se almacenen.

Los datos e información del participante sólo serán transferidos a las personas que formen parte de la investigación en calidad de investigadores, evaluadores o auditores. Aun así, los datos serán proporcionados de manera pseudo-anonimizada para proteger su identidad.

#### 6. Derechos ARCO

El participante podrá, en cualquier momento y sin limitación alguna, solicitar a los correos indicados en el capítulo 2 el ejercicio de sus derechos de Acceso, Rectificación, Cancelación y Oposición sobre los datos e información que se posea.

#### 7. Uso y destino de los datos e información recabada

Los datos e información son únicamente utilizados para los siguientes fines:

- Generar cálculos estadísticos agregados para su análisis, dentro de un contexto investigativo.
- Las declaraciones o respuestas a preguntas, problemas y ejercicios son utilizados para fines de análisis y estudio en un contexto investigativo. Estos pueden ser comparados y publicados, sin indicar datos de identificación.
- Ser utilizados para fines de mejora continua.

#### 8. Acuerdo

He leído y comprendido la totalidad del presente documento. Asimismo, he decidido libre y voluntariamente participar en el presente caso de estudio y/o investigación.

Renuncio a exigir cualquier pago de regalías, derechos de imagen, licencias o cualquier otro tipo de compensación presente o futura derivado de los datos o información aquí proporcionada.

Manifiesto mi consentimiento en el sentido más amplio y necesario para satisfacer los requisitos legales en México e internacionales, bajo los principios que señala la Ley Federal de Protección de Datos Personales en posesión de los Particulares. Para efectos internacionales, consiento que mis datos sean tratados bajo los estándares del GDPR y/o California Consumer Privacy Act.



G. NOMBRE Y FIRMA DEL PARTICIPANTE



NOMBRE Y FIRMA DEL PADRE O TUTOR

**1. Datos del entrevistado**

Nombre completo	S...
Fecha de nacimiento	

**2. Receptor(es) de la información**

Receptor(es)	JOSE LUIS GONZALEZ TIRADO BENÉMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Contacto para consultas o ejercicio de derechos ARCO	Jose.gonzaleztir@alumno.buap.mx

**3. Procedimiento**

Durante la participación en esta investigación, el participante resolverá ejercicios matemáticos mientras el receptor realizará preguntas de seguimiento. Los datos de información serán recolectados por medios escritos, videográficos y/o fonográficos de manera digital o análoga.

**4. Datos e información recabados**

Los datos y/o información que se recolectan de forma directa o indirecta son:

- Nombre completo
- Fecha de nacimiento
- Instituciones educativas a las que ha asistido.
- Matrícula estudiantil actual
- Género
- Información socioeconómica
- Declaraciones y respuestas producto de la entrevista

No se recaba ningún tipo de dato sensible o que pudiera colocar en riesgo la integridad de la persona.

**5. Tratamiento de los datos**

Nunca se usarán tus datos de tal forma que se exhiba la identidad del participante, ni dato alguno que pueda relacionarse directamente con el participante. Todos los datos de identidad son anonimizados o pseudo-anonimizados para que cualquier persona, si lo leyera, no pudiera identificar a la persona.

Los datos e información son almacenados de forma segura, así como cualquier medio o soporte por el que se almacenen.

Los datos e información del participante sólo serán transferidos a las personas que formen parte de la investigación en calidad de investigadores, evaluadores o auditores. Aun así, los datos serán proporcionados de manera pseudo-anonimizada para proteger su identidad.

#### 6. Derechos ARCO

El participante podrá, en cualquier momento y sin limitación alguna, solicitar a los correos indicados en el capítulo 2 el ejercicio de sus derechos de Acceso, Rectificación, Cancelación y Oposición sobre los datos e información que se posea.

#### 7. Uso y destino de los datos e información recabada

Los datos e información son únicamente utilizados para los siguientes fines:

- Generar cálculos estadísticos agregados para su análisis, dentro de un contexto investigativo.
- Las declaraciones o respuestas a preguntas, problemas y ejercicios son utilizados para fines de análisis y estudio en un contexto investigativo. Estos pueden ser comparados y publicados, sin indicar datos de identificación.
- Ser utilizados para fines de mejora continua.

#### 8. Acuerdo

He leído y comprendido la totalidad del presente documento. Asimismo, he decidido libre y voluntariamente participar en el presente caso de estudio y/o investigación.

Renuncio a exigir cualquier pago de regalías, derechos de imagen, licencias o cualquier otro tipo de compensación presente o futura derivado de los datos o información aquí proporcionada.

Manifiesto mi consentimiento en el sentido más amplio y necesario para satisfacer los requisitos legales en México e internacionales, bajo los principios que señala la Ley Federal de Protección de Datos Personales en posesión de los Particulares. Para efectos internacionales, consiento que mis datos sean tratados bajo los estándares del GDPR y/o California Consumer Privacy Act.

S

\_\_\_\_\_  
NOMBRE Y FIRMA DEL  
PARTICIPANTE



\_\_\_\_\_  
NOMBRE Y FIRMA  
DEL PADRE O TUTOR