



BUAP

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ingeniería

Secretaría de Investigación Estudios de Posgrado

**“MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESPUESTA
DINÁMICA DE SISTEMAS DE 1 GDL”**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERÍA

Presenta:

ING. RODRIGO HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

Director de tesis:

M.I. MARTÍN CASTILLO FLORES

Codirector de tesis:

M.I. DOLORES CUELLAR JUÁREZ

Puebla, Pue.

Junio 2020



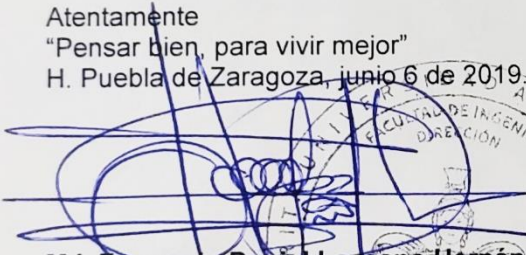
Oficio No. 1401/2019

C. Rodrigo Hernández González
Pasante de la Maestría en Ingeniería
con opción terminal en Estructuras
Facultad de Ingeniería, BUAP.
Presente

Por medio del presente, el suscrito M.I. Fernando Daniel Lazcano Hernández, Director de la Facultad de Ingeniería, de acuerdo a su solicitud de aprobación de Tema de Tesis, le autoriza desarrollar el tema intitulado **Métodos numéricos para respuesta dinámica de sistemas de 1 GDL**. Para obtener el grado de Maestro en Ingeniería con opción terminal en Estructuras. Asignándose como Director al M.I. Martín Castillo Flores y Co-director a la M.I. Dolores Cuellar Juárez.

Sin otro particular de momento, reciba un cordial saludo.

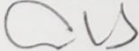
Atentamente
"Pensar bien, para vivir mejor"
H. Puebla de Zaragoza, junio 6 de 2019.


M.I. Fernando Daniel Lazcano Hernández
Director

C.c.p M.I. Martín Castillo Flores y M.I. Dolores Cuellar Juárez, Director y Co-director del tema de tesis.

C.c.p. Archivo

ABH/MCF/sco*



H. Puebla de Zaragoza, a 10 de junio de 2020

M.I. FERNANDO DANIEL LAZCANO HERNÁNDEZ
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
P R E S E N T E

Por medio de la presente informo que la tesis autorizada en el Oficio No. 1401/2019 con el tema titulado: **“Métodos numéricos para respuesta dinámica de sistemas de 1 GDL”**, de la cual fui asignado como director, ha sido concluida, alcanzando y cumpliendo satisfactoriamente con los objetivos planeados inicialmente.

Por lo anterior no tengo inconveniente en que el alumno Rodrigo Hernández González, con matrícula 218470108, continúe con los trámites de titulación pertinentes para la obtención del grado de Maestro en Ingeniería con opción terminal en Estructuras.

Hago válida la ocasión para reiterar a usted la seguridad de su más alta y distinguida consideración.

Atentamente



M.I. Martín Castillo Flores

Director de tema de tesis - Coordinador
de la Maestría en Ingeniería con opción
terminal en Estructuras

C.c.p. Archivo

C.c.p. interesado

DEDICATORIA

A mi madre,

Mi compañera y amiga, la mujer que me llena de orgullo, que con su ejemplo ha formado en mí un espíritu de lucha y superación, que nunca se ha dado por vencida, que me ha enseñado a salir siempre adelante, que ha compartido conmigo noches de desvelo y siempre ha tenido las palabras correctas.

La mujer que con paciencia me ha enseñado, escuchado, aconsejado, y que con su esfuerzo me ha dado las herramientas necesarias para abrirme paso en este mundo, siempre con perseverancia y responsabilidad.

Al igual que en cada momento, en este logro ha estado presente, brindándome su apoyo incondicional, motivándome a hacer las cosas de la mejor manera y siempre creyendo en mí.

Son estos y muchos más motivos por los que hoy me llena de satisfacción el poder dedicarle mi trabajo de tesis.

ÍNDICE

RESUMEN	VI
ABSTRACT	VI
INTRODUCCIÓN	VII
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES	9
1.1. Software Didáctico	10
1.2. Programas de Dinámica Estructural	12
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	14
2.1. Conceptos Generales	14
2.2. Ecuación de Movimiento: Fuerza Externa	19
2.3. Ecuación de Movimiento: Excitación Sísmica	20
2.4. Solución Clásica de Ecuación de Movimiento	21
2.5. Evaluación Numérica de la Respuesta Dinámica	34
2.5.1. Método Basado en la Interpolación de la Excitación	35
2.5.2. Método de la Diferencia Central	40
2.5.3. Método de Newmark	46
2.5.4. Método de Wilson	55
CAPÍTULO 3. PROGRAMACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS	64
3.1. Descripción del Programa ReDi v1.0	64
3.2. Ejemplos de Cálculo	69
CAPÍTULO 4. VALIDACIÓN DE RESULTADOS	80
4.1. Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad	80
4.2. Aceleración Aplicada en la Base de la Estructura	92
4.3. Sistema Sobreamortiguado	95
CONCLUSIONES	101
BIBLIOGRAFÍA	102
ANEXOS	104

RESUMEN

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar una herramienta computacional que permita conocer la respuesta dinámica de una estructura de un grado de libertad mediante los métodos numéricos de Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark y Wilson, como consecuencia de una excitación en la base o en el grado de libertad, así como de sus condiciones iniciales.

El programa fue realizado en Microsoft Office Excel y en este documento se presenta la explicación y el desarrollo de cada uno de los métodos, sus expresiones de cálculo, y sus limitaciones.

La intención de este programa es servir como herramienta en los cursos de Dinámica Estructural tanto de la Licenciatura en Ingeniería civil como la Maestría en Ingeniería Estructural.

ABSTRACT

The main goal of this work is to develop a computational tool which allows to know the dynamic response of a single degree of freedom structure through the numerical methods of Interpolation of Excitation, Central Difference, Newmark's, and Wilson's as result of an earthquake excitation or a force applied at the structure, as well as its initial conditions.

The program was created in Microsoft Office Excel and this document presents the explanation and development of each of the methods, their calculation expressions, and their limitations.

The intention of this program is to work as a tool in the Structural Dynamics courses of both the Bachelor of Civil Engineering and the Master's Degree in Structural Engineering.

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas con mayor importancia en el área de estudio de la Ingeniería Estructural es la respuesta de las estructuras ante cargas dinámicas o variantes en el tiempo. Estas cargas pueden ser producto de diferentes causas, por ejemplo, maquinaria, viento o movimiento del terreno.

Los sismos son una de las excitaciones dinámicas que afectan en mayor medida las estructuras y al ser movimientos tan complejos, su descripción se realiza a través de historias de tiempo, generalmente a partir de la aceleración del terreno.

A partir de algunas idealizaciones, el análisis y diseño de estructuras que sean capaces de resistir los efectos producidos por estas cargas son posibles de realizar en programas de cálculo estructural mediante modelaciones de las estructuras, sin embargo, el uso de estos programas se debe hacer de manera profesional y requieren de conocimientos que permitan su correcta utilización.

Uno de los objetivos de este trabajo es desarrollar una herramienta computacional que permita a estudiantes de ingeniería comprender algunos de los conceptos de la dinámica estructural y reflexione la importancia de estos en la respuesta de las estructuras sometidas a estas condiciones.

Se busca que sea un programa de fácil acceso y cuente con una interfaz gráfica intuitiva en la que el estudiante pueda visualizar de manera inmediata los cambios en la respuesta dinámica al modificar las propiedades de la estructura, la fuerza o aceleración a la que es sometida, así como las condiciones iniciales en que se encuentra la estructura.

Como uno de los objetivos del análisis dinámico estructural es la descripción del comportamiento que una estructura pueda tener al ser sometida a excitaciones dinámicas, y así proporcionar herramientas para un diseño adecuado y que sea seguro, es sumamente importante que este comportamiento sea el más cercano a la realidad posible.

Como se explica en el desarrollo de este trabajo, para encontrar la respuesta de una estructura es necesario recurrir a métodos numéricos, dado la imposibilidad de describir las aceleraciones sísmicas mediante una función continua. Con el fin de que el estudiante conozca diferentes métodos de cálculo, este programa brindará la posibilidad de encontrar la respuesta dinámica a través de los métodos de Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark y Wilson.

Cada uno de estos métodos es explicado y se realiza la demostración de las expresiones que utiliza, con la intención de que el estudiante pueda comprender el planteamiento y las suposiciones que hace cada uno de los autores de los métodos, y las implicaciones que tiene en los resultados encontrados, así como sus limitaciones.

Posteriormente se muestra una descripción del programa de cálculo que ha sido desarrollado (ReDi v1.0), su interfaz, características y opciones; así como algunos ejemplos de cálculo y una comparativa entre sus resultados. Por último, se realiza una validación de los resultados del programa ReDi v1.0 y se muestran las conclusiones resultado de este trabajo.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

Actualmente los estudiantes universitarios viven en un mundo rodeado por la tecnología, en su vida diaria se ha vuelto indispensable el uso de celulares, tabletas, y equipos de cómputo.

Lejos de prohibir el uso de estas herramientas, se debe buscar la manera de aplicarlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que al ver el aprendizaje desde un enfoque constructivista, en el que el docente es un facilitador, el estudiante necesita de experiencias de aprendizaje, y estas herramientas tecnológicas son un manera de generarlas, ya sea a través de pizarrones electrónicos, plataformas educativas, aplicaciones interactivas, kits de robótica, entre otras; esta filosofía ya es aceptada e implementada en muchas instituciones educativas.

Según la Teoría del Aprendizaje de Piaget, el aprendizaje es un proceso que sólo tiene sentido ante situaciones de cambio. Es por eso que al permitirle al estudiante realizar simulaciones o experimentar a través de distintas herramientas tratará de hallar respuestas, planteándose cada vez más interrogantes e investigando por su cuenta, hasta que alcanza el punto de conocimiento que lo satisface. (Regader, 2015).

El uso de estas tecnologías nos permite acelerar procesos, con lo que se consigue disminuir el tiempo de dedicación a los mismos. Además de organizar actividades e interactuar en el espacio-tiempo generado por las tecnologías (Schiavo, 2007).

En el ámbito educativo, estas herramientas tecnológicas favorecen la generación de aprendizajes significativos. El potencial que tienen estas tecnologías no garantiza por sí mismo una mejora en el aprendizaje, esto depende en gran medida de la integración con los contenidos y actividades de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, aun teniendo toda esta variedad de herramientas, resulta prácticamente imposible encontrar una que se ajuste exactamente a las necesidades del docente, debido a la extensa variedad de temas tan específicos estudiados en clase.

Una herramienta básica, no solo en la educación, sino también en el campo laboral, es la computadora y el uso de software, por lo que es de suma importancia que los estudiantes comiencen a involucrarse en el manejo de software especializado a su área de conocimiento, pues seguramente serán una constante en su vida profesional.

No solo se trata de aprender a manejar un software comercial, si no de comprender sus fundamentos teóricos y saber qué es lo que está realizando el software internamente, para tener una correcta interpretación de los resultados que se visualizan, además de porque puede haber variación en los resultados.

En los cursos de ingeniería, con frecuencia nos encontramos con temas que, por su grado de complejidad, se requiere de una extensa cantidad de tiempo para su enseñanza, y más aún para poner en práctica los conocimientos adquiridos, viéndose limitados y sin oportunidad de reflexionar sobre los resultados.

Dada esta necesidad, se comienzan a desarrollar pequeños programas con fines educativos que permitan resolver con mayor velocidad los ejercicios en clase, y se puedan comparar más ejercicios entre sí.

1.1. Software Didáctico

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, una de las herramientas que más se ha fomentado es el software educativo.

“El software educativo es un producto tecnológico diseñado para apoyar procesos educativos que utilizan tanto el profesor como el alumno para alcanzar determinados propósitos. Además, es un medio de presentación y desarrollo de contenidos educativos, como puede ser un libro o un video, con su propio formato expresivo y secuencia narrativa” (Morales, 1998).

El proceso de seleccionar una herramienta adecuada para una determinada clase está en función de las necesidades de enseñanza y aprendizaje de los alumnos; además se debe aprovechar las ventajas que ofrecen las tecnologías más actuales.

En la creación de nuevas herramientas computacionales se deben tener presentes los contenidos temáticos y los objetivos que se persiguen; si se pierde de vista esto, no se podrá cumplir con la intención de ser un instrumento de ayuda en el aprendizaje y enseñanza del tema que se trate.

“La creación de programas interactivos no es una tarea sencilla. Es necesario tener amplios conocimientos de uno o varios lenguajes programación, y requiere de la formulación de objetivos educativos que se pretende enseñar de forma interactiva” (Hinojoza, 2009).

Con el uso de este tipo de herramientas interactivas se tienen algunas ventajas como las siguientes:

- Si se cuenta con apoyos visuales, estos facilitan la asociación del concepto con el fenómeno físico y sus diferentes representaciones, lo que puede mejorar su proceso de análisis.
- Se puede hacer uso de las técnicas de animación para mostrar la evolución de ciertos fenómenos en un lapso, lo cual es muy conveniente en la enseñanza de temas que así lo requieren.
- Se tiene mayor velocidad en la resolución de ejemplos y ejercicios, con lo que se pueden realizar una mayor cantidad mejorando así la práctica.

Una característica importante de los programas es su interfaz gráfica, ya que ésta permite al usuario interactuar con estos. La interfaz debe tener ciertas características que le permitan al usuario entender fácilmente su operación, así como la comprensión del tema que se trata de enseñar.

Se debe procurar minimizar la complejidad en la operación del programa para el usuario, así como decidir qué parámetros se mantienen constantes y cuáles se le permitirán modificar. Definiendo también de qué manera el usuario podrá introducirlos, y de qué manera lo hará.

Es de igual importancia el documentar las bases teóricas y las técnicas de programación utilizadas, esto con el fin de fundamentar los resultados arrojados y

permitir, si así se desea, que se puedan realizar futuras modificaciones o mejoras al programa elaborado.

Se deberá contar con el material confeccionado a partir de la etapa inicial de análisis, conteniendo diagramas de entidades y relaciones, estructuras de datos, diagrama de flujos de procesos, diseño modular descendente, etc. (Cataldi, 2006).

Así como es deseable la elaboración de un manual del programa en el que se muestre su operación y cuente con una guía rápida de ejemplos recurrentes.

1.2. Programas de Dinámica Estructural

La dinámica estructural es un tema base en la formación de los ingenieros civiles, y es de suma importancia que los conceptos y métodos pertenecientes a la materia sean comprendidos, para así poder aplicarlos en el campo profesional.

Existen algunos sitios web con propósitos educativos relacionados con la dinámica estructural, pero solo exploran conceptos sobre sismos, como su generación, sus efectos y prevención de desastres. No profundizan en el análisis matemático de la ingeniería sísmica y la dinámica estructural (Valencia, Ramírez, Gómez & Thomson, 2010).

Dado que en el diseño de edificios se consideran aspectos estructurales en los cuales existen grandes incertidumbres de su comportamiento real ante excitaciones dinámicas, se requiere el uso de modelos matemáticos cada vez más aproximados para predecir el comportamiento dinámico que pueden experimentar durante su vida útil (Muria & González, 1995).

En este trabajo se programará una herramienta que permita al estudiante comparar los resultados de la respuesta dinámica de sistemas de un grado de libertad obtenidos mediante cuatro diferentes métodos numéricos (Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark y Wilson).

El comportamiento dinámico de los sistemas no es sencillo de enseñar en un medio estático como el papel o el pizarrón, ya que, al ser este dependiente del tiempo, es importante no sólo obtener el valor máximo de la respuesta dinámica (que se trata

de solo un instante de tiempo), sino también observar y analizar cómo evoluciona su representación gráfica temporalmente (Hinojoza, 2009).

Al ser esta situación un problema evidente, en varias universidades se ha implementado el uso de programas comerciales de cálculo estructural como un apoyo para la resolución de ejemplos en clase, debido a que estos programas permiten calcular la respuesta dinámica de la estructura que se haya modelado.

Sin embargo, estos programas fueron diseñados con fines de análisis estructural con necesidades y características educativas casi nulas y además sin existir de por medio una adecuada adaptación al proceso enseñanza-aprendizaje (Mendoza, 2001).

Además, puede no ser tan óptimo el uso de estos programas para ejemplos sencillos, ya que es común que estos programas pidan al usuario datos adicionales a las propiedades dinámicas y se puede volver engorroso o distraer al estudiante de los conceptos que realmente están siendo estudiados.

Al contar con esta herramienta, los estudiantes podrán comprender con mayor facilidad y aplicar los conceptos adquiridos de una manera más eficiente, en una interfaz más intuitiva y diseñada con fines didácticos.

Los usos de las herramientas tecnológicas y su impacto en la educación dependen en gran medida del conocimiento y aprovechamiento de dichas características (Caicedo, Montes, Ochoa, 2013).

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La respuesta de una estructura ante cargas dinámicas es una importante área de estudio en la física y la ingeniería, para efectos de este trabajo, el término dinámica se refiere sencillamente a variante en el tiempo, por lo tanto, una carga dinámica es cualquier fuerza en que su magnitud, dirección y/o posición varía con el tiempo (Clough & Penzien, 2003).

Cualquiera que sea la causa de la excitación, el movimiento resultante en la estructura provoca desplazamientos y esfuerzos en esta. Un análisis de estos desplazamientos y esfuerzos es el objeto de estudio de la dinámica estructural (Hummar, 2002).

En un sentido amplio, un sistema dinámico es aquel cuyas variables experimentan variaciones en el tiempo y, si se conocen las influencias externas que actúan sobre el sistema, podrá predecirse el comportamiento de este (Cassano, 2009).

2.1. Conceptos Generales

Desde el punto de vista de la ingeniería sísmica, el tema central de la dinámica es estudiar y entender la vibración de una estructura cuando está sujeta a una fuerza lateral u horizontal, o a un movimiento sísmico en su base (Chopra, 2014).

Para esto es necesario contar con un modelo matemático en el que se vean involucradas las propiedades y las condiciones de la estructura que intervienen en su comportamiento, específicamente en su respuesta dinámica.

La respuesta dinámica de una estructura consiste en determinar el movimiento, velocidad y aceleraciones de su masa cuando está sometida a una fuerza lateral o a un movimiento sísmico en su base. (Hinojoza, 2009).

Esta respuesta depende de la magnitud y duración de la excitación, de las propiedades dinámicas de la estructura (masa, rigidez y amortiguamiento) y de las características de los depósitos del suelo donde está cimentada. (Bazan & Meli, 1983).

De manera general, podemos clasificar las estructuras en dos categorías: sistemas de un grado de libertad y sistemas de varios grados de libertad, esto con el fin de estudiar adecuadamente la respuesta de cada uno.

El número de grados de libertad de un sistema corresponde al número mínimo de coordenadas necesarias para definir la posición en el espacio y en el tiempo de todas las partículas de masa del sistema (Paz, 1992). Cuando se trata de sistemas rígidos, en los cuales no puede haber desplazamiento relativo entre las partículas, las propiedades de la masa se pueden describir referidas a su centro de masa. Por lo que los grados de libertad que interesan son aquéllos en los que se consideran fuerzas generalizadas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración (García, 1998).

Debido a esto es posible reducir los grados de libertad de una estructura, por ejemplo, para el siguiente marco con 12 grados de libertad en un caso estático, podemos considerar que las fuerzas inerciales más importantes son las que generan las masas m_1 y m_2 al desplazarse lateralmente, por lo que se considera un sistema reducido de dos grados de libertad, los cuales son los desplazamientos laterales 1 y 2.

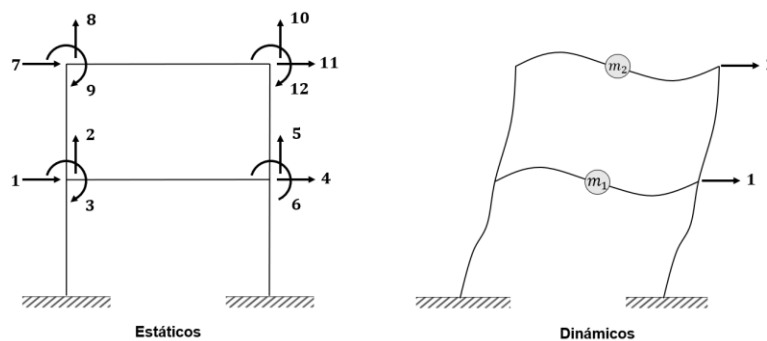


Figura 2.1.1. Grados de Libertad. (Autoría Propia, 2020).

A diferencia de las cargas estáticas, las cargas dinámicas como lo son las fuerzas sísmicas ocasionan en el sistema una respuesta dependiente del tiempo.

Podemos identificar tres elementos en un sistema de un grado de libertad que son susceptibles a generar fuerzas internas en función de una variación en el estado de movimiento de la masa. En particular, la masa genera una fuerza de inercia en

función de su aceleración; el resorte, una fuerza restitutiva en función del desplazamiento; y el amortiguador, una fuerza disipadora en función de la velocidad. Estas tres fuerzas internas se oponen a un cambio en el estado de movimiento en que se encuentra la masa en un momento dado, y su interacción con la fuerza externa define el movimiento de la masa en un instante dado. (Laureano, Terán & De Arriaga, 2003).

Masa

Definida como una medida de la cantidad de materia. La masa es la propiedad intrínseca de un cuerpo, que mide su inercia, es decir, la resistencia del cuerpo a cambiar su movimiento. (Sepúlveda, 2006).

Vibración

Se define como vibración al fenómeno mecánico donde se produce oscilación con respecto a un punto en los sistemas con masa y rigidez. (Castillo, 2018).

Periodo Natural de Vibración

Es el tiempo necesario para completar un ciclo de vibración o de oscilación, es decir el tiempo en que se repita el fenómeno. (Castillo, 2018).

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, [s] \quad (2.1.1)$$

Frecuencia Natural de Vibración

Se define como el número de ciclos que ocurren por segundo durante el fenómeno de vibración o de oscilación. (Castillo, 2018).

$$f = \frac{1}{T}, [Hz] \quad (2.1.2)$$

Frecuencia Circular Natural de Vibración

Se define como una velocidad angular con la cual vibra el sistema. (Castillo, 2018).

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, [rad/s] \quad (2.1.3)$$

También se puede calcular como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, [\text{rad/s}] \quad (2.1.4)$$

Sistemas de Un Grado de Libertad

Un sistema de un GDL puede considerarse como una idealización de una estructura de un nivel. Cada elemento estructural (viga, columna, muro, etcétera) de la estructura real contribuye a las propiedades inerciales, elásticas y de disipación de la energía de la estructura. Sin embargo, en el sistema idealizado, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puros distintos: el componente de masa, el componente de rigidez y el componente de amortiguamiento. (Chopra, 2014).

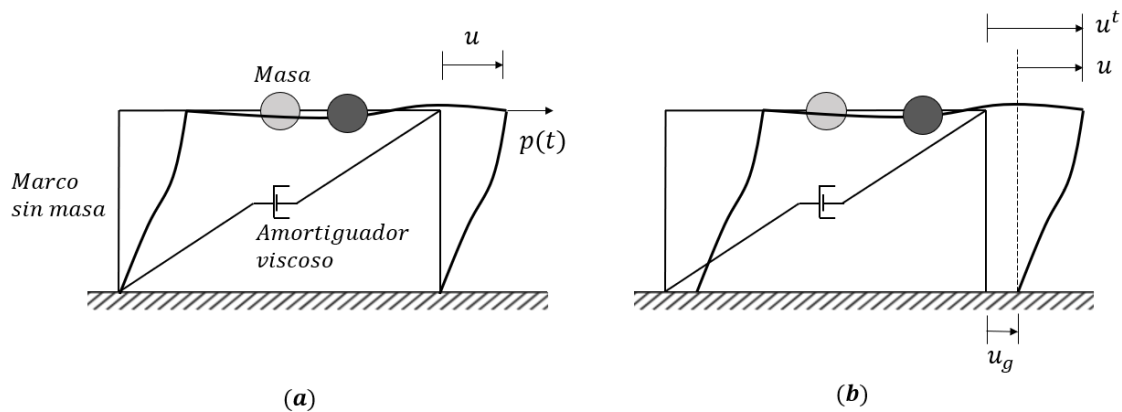


Figura 2.1.2. Sistema de un grado de libertad. (Autoría propia, 2020).

En la figura 2.1.2 se observan dos tipos de excitación dinámica, en el inciso (a) la fuerza externa $p(t)$ en la dirección lateral y en el inciso (b) el movimiento del terreno $u_g(t)$ inducido por un sismo. En ambos casos u indica el desplazamiento relativo entre la masa y la base de la estructura.

Fuerzas de Rigidez

La rigidez se define como la relación entre las fuerzas externas y las deformaciones que ellas inducen en un cuerpo. (Reyes, 1998).

Para un sistema elástico-lineal la relación entre la fuerza lateral f_S y la deformación resultante u es:

$$f_S = ku \quad (2.1.5)$$

donde k es la rigidez lateral del sistema; sus unidades son fuerza/longitud.

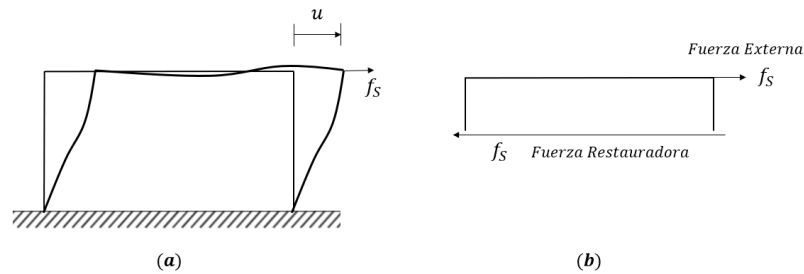


Figura 2.1.3. Fuerzas de rigidez. (Autoría Propia, 2020).

Fuerzas de Amortiguamiento (Viscoso)

En el amortiguamiento, la energía del sistema en vibración se disipa por diversos mecanismos y con frecuencia más de un mecanismo puede estar presente al mismo tiempo, por lo que, a diferencia de la rigidez de una estructura, el coeficiente de amortiguamiento no puede calcularse a partir de las dimensiones de la estructura y las dimensiones de los elementos estructurales.

El coeficiente de amortiguamiento se selecciona de modo que la energía disipada sea equivalente a todos los mecanismos de amortiguamiento combinados presentes en la estructura real. Esta idealización se denomina amortiguamiento viscoso equivalente. (Chopra, 2014).

La fuerza de amortiguamiento se relaciona con la velocidad a través del amortiguador viscoso lineal:

$$f_D = c\dot{u} \quad (2.1.6)$$

donde la constante c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso; tiene unidades de fuerza tiempo/longitud.

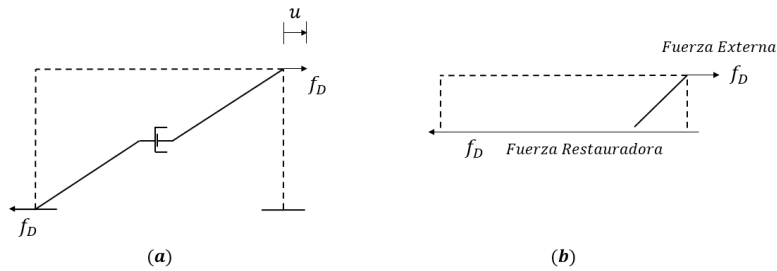


Figura 2.1.4. Fuerzas de amortiguamiento. (Autoría propia, 2020).

2.2. Ecuación de Movimiento: Fuerza Externa

En la figura 2.2.1 se muestra un marco idealizado de un nivel, sometido a una fuerza dinámica $p(t)$ aplicada de manera externa en la dirección del GDL u . Esta notación indica que la fuerza p varía con el tiempo t . El desplazamiento resultante de la masa también varía con el tiempo y se indica mediante $u(t)$.

En esta misma figura se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa en un cierto instante de tiempo. Éstas incluyen la fuerza externa $p(t)$, la fuerza de rigidez f_S y la fuerza de amortiguamiento f_D .

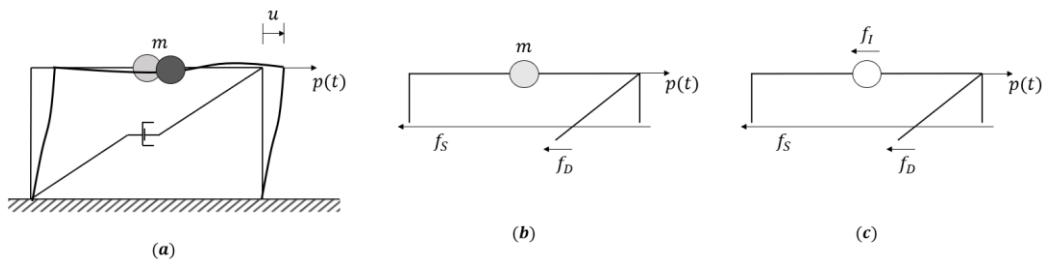


Figura 2.2.1. Fuerzas actuantes en sistema de 1 GDL. (Autoría propia, 2020).

Considerando a la fuerza externa y al desplazamiento, velocidad y aceleración positivos en la dirección del eje x , las fuerzas restauradoras f_S y f_D actuarán en sentido opuesto, dado que son las fuerzas internas que se oponen a la deformación y a la velocidad respectivamente.

De esta manera la fuerza resultante a lo largo del eje x es $p(t) - f_S - f_D$, y a partir de la Segunda Ley del Movimiento de Newton se tiene:

$$p(t) - f_S - f_D = m\ddot{u}(t) \quad (2.2.1)$$

Sustituyendo f_S y f_D y reordenando la ecuación se tiene:

$$m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - ku(t) = p(t) \quad (2.2.2)$$

Ésta es la ecuación de movimiento que controla el desplazamiento $u(t)$ de la estructura idealizada, que se supone elástica lineal, sometida a una fuerza externa dinámica $p(t)$. (Chopra, 2014)

2.3. Ecuación de Movimiento: Excitación Sísmica

Un caso particular en la ecuación de movimiento es cuando la estructura está sujeta a una aceleración en su base. En este caso el desplazamiento total de la estructura será la suma del desplazamiento del suelo y del desplazamiento relativo entre la estructura y el suelo:

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t) \quad (2.3.1)$$

La ecuación de movimiento para el sistema idealizado de un nivel de la figura 2.3.1, sometido a la excitación sísmica, puede deducirse a partir del equilibrio dinámico.

$$f_I + f_S + f_D = 0 \quad (2.3.2)$$

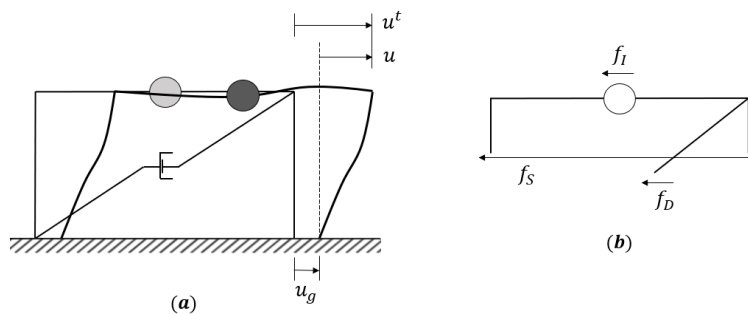


Figura 2.3.1. Excitación sísmica en sistema de 1 GDL. (Autoría propia, 2020).

Es importante aclarar que únicamente el movimiento relativo $u(t)$ entre la masa y la base, produce fuerzas de rigidez y de amortiguamiento (es decir, el componente $u_g(t)$ no produce fuerzas internas). Solo la fuerza de inercia f_I se relaciona con la aceleración $\ddot{u}^t(t)$ de la masa mediante:

$$f_I = m\ddot{u}^t \quad (2.3.3)$$

Sustituyendo f_I , f_S y f_D y reordenando la ecuación se tiene:

$$m(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)) - c\dot{u}(t) - ku(t) = 0 \quad (2.3.4)$$

$$m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.3.5)$$

Si se comparan las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.7) se observa que las ecuaciones de movimiento para la estructura sometida a dos excitaciones distintas son una misma.

Entonces, el movimiento del terreno puede sustituirse por la fuerza ficticia equivalente p_{eff} (siglas en inglés para equivalent fictitious force).

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.3.6)$$

Esta fuerza es igual a la masa por la aceleración del terreno, que actúa opuesta a la aceleración. (Chopra, 2014).

2.4. Solución Clásica de Ecuación de Movimiento

La ecuación de movimiento para un sistema lineal de un GDL sometido a una fuerza externa es la ecuación diferencial de segundo orden que se obtuvo con anterioridad:

$$m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - ku(t) = p(t) \quad (2.4.1)$$

Es necesario definir las condiciones iniciales de desplazamiento $u(0)$ y de velocidad $\dot{u}(0)$ en el que se encuentra el sistema, es decir en el tiempo $t = 0$.

Por lo regular, la estructura está en reposo antes de la aparición de la excitación dinámica, de modo que la velocidad y el desplazamiento iniciales son cero.

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden consiste en la suma de la solución complementaria $u_c(t)$ y la solución particular $u_p(t)$, es decir, $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$.

Como la ecuación diferencial es de segundo orden, se involucran dos constantes de integración. Éstas aparecen en la solución complementaria y se evalúan a partir del conocimiento de las condiciones iniciales.

La solución clásica se utilizará para resolver la ecuación diferencial en los casos de vibración libre, vibración forzada escalonada y vibración forzada linealmente creciente; sin amortiguamiento y con amortiguamiento.

Vibración Libre Sin Amortiguamiento (VLSA)

La entrada de energía al sistema se da mediante las denominadas condiciones iniciales. Debido a la ausencia de amortiguamiento, no existe disipación de energía por lo que las estructuras vibrarían eternamente. Es obvio que es un caso teórico, sin embargo, es fundamental para comprender fenómenos más complejos. (Castillo, 2018).

Simplificando la ecuación de movimiento para el caso de VLSA, obtenemos la ecuación a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.4.2)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (2.4.3)$$

Dónde A y B son constantes con valores aún por determinar, los cuales se obtienen a partir de las Condiciones Iniciales para el sistema.

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = A\cos(\omega(0)) + B\sin(\omega(0)) \quad (2.4.4)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = u(0) \quad (2.4.5)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.3) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado.

$$\dot{u}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \quad (2.4.6)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, en el tiempo $t = 0$.

$$\dot{u}(0) = -\omega A\sin(\omega(0)) + \omega B\cos(\omega(0)) \quad (2.4.7)$$

$$\dot{u}(0) = \omega B \quad (2.4.8)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \quad (2.4.9)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.3) se llega a la solución de la ecuación de movimiento para una VLSA.

$$u(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t \quad (2.4.10)$$

Vibración Forzada Sin Amortiguamiento Fuerza Escalonada

Simplificando la ecuación de movimiento para el caso de VFSA, y una fuerza escalonada se obtiene la ecuación a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_o \quad (2.4.11)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (2.4.12)$$

La solución particular se obtendrá con el Método de Coeficientes Indeterminados, como se trata de una fuerza constante, la forma de la solución particular u_p es una constante. Dado que las constantes A y B, ya se encuentran en la solución complementaria, se propone:

$$u_p = C \quad (2.4.13)$$

Derivando la ecuación, se obtiene:

$$\dot{u}_p = 0 \quad (2.4.14)$$

$$\ddot{u}_p = 0 \quad (2.4.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de movimiento, resulta:

$$m(0) + k(C) = p_o \quad (2.4.14)$$

Por lo tanto, el valor de la constante C es igual a:

$$C = \frac{p_o}{k} \quad (2.4.15)$$

Dado que $u_p = C$, entonces:

$$u_p = \frac{p_o}{k} \quad (2.4.16)$$

Como la solución de la ecuación es la suma de la solución complementaria y la solución particular:

$$u(t) = u_c + u_p \quad (2.4.17)$$

Se obtiene:

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.18)$$

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, considerando un desplazamiento nulo en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = A\cos(\omega(0)) + B\sin(\omega(0)) + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.19)$$

$$0 = A + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.20)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = -\frac{p_o}{k} \quad (2.4.21)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.18) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado.

$$\dot{u}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \quad (2.4.22)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, considerando una velocidad nula en el tiempo $t = 0$.

$$\dot{u}(0) = -\omega A\sin(\omega(0)) + \omega B\cos(\omega(0)) \quad (2.4.23)$$

$$0 = \omega B \quad (2.4.24)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = 0 \quad (2.4.25)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.18) se llega a la solución de la ecuación de movimiento para una VFSA debida a una Fuerza Escalonada:

$$u(t) = -\frac{p_o}{k} \cos \omega t + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.26)$$

$$u(t) = \frac{p_o}{k} (1 - \cos \omega t)$$

Vibración Forzada Sin Amortiguamiento Fuerza Linealmente Creciente

Simplificando la ecuación de movimiento para el caso de VFSA y una fuerza linealmente creciente, se tiene la ecuación a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = \frac{p_o}{t_r} t \quad (2.4.27)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.4.28)$$

La solución particular se obtendrá con el método de Coeficientes Indeterminados, como se trata de una fuerza linealmente creciente, la forma de la solución particular u_p es de la forma $mx + b$. Dado que las constantes A y B, ya se encuentran en la solución complementaria, se propone:

$$u_p = Ct + D \quad (2.4.29)$$

Derivando la ecuación, se obtiene

$$\dot{u}_p = C \quad (2.4.30)$$

$$\ddot{u}_p = 0 \quad (2.4.31)$$

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de movimiento, resulta:

$$m(0) + k(Ct + D) = \frac{p_o}{t_r} t \quad (2.4.32)$$

$$kCt + kD = \frac{p_o}{t_r}t + 0 \quad (2.4.33)$$

Por lo tanto:

$$kCt = \frac{p_o}{t_r}t \quad kD = 0$$

Por lo tanto, el valor de la constante C es igual a:

$$C = \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.34)$$

Dado que $u_p = Ct + D$, entonces:

$$u_p = \frac{p_o}{kt_r}t \quad (2.4.35)$$

Como la solución de la ecuación es:

$$u(t) = u_c + u_p \quad (2.4.36)$$

Se obtiene:

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{p_o}{kt_r}t \quad (2.4.37)$$

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, considerando un desplazamiento nulo en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = A\cos(\omega(0)) + B\sin(\omega(0)) + \frac{p_o}{kt_r}t \quad (2.4.38)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = 0 \quad (2.4.39)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.37) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado

$$\dot{u}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.40)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, considerando una velocidad nula en el tiempo $t = 0$.

$$\dot{u}(0) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega(0)) + \omega B \operatorname{cos}(\omega(0)) + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.41)$$

$$0 = \omega B + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.42)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = -\frac{p_o}{\omega kt_r} \quad (2.4.43)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.37) se llega a la solución de la ecuación de movimiento para una VFSA debida a una Fuerza Linealmente Creciente.

$$u(t) = -\frac{p_o}{\omega kt_r} \operatorname{sen} \omega t + \frac{p_o}{kt_r} t \quad (2.4.44)$$

$$u(t) = \frac{p_o}{kt_r} \left(t - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right)$$

Amortiguamiento

En la realidad las estructuras que vibran libremente atenúan su respuesta conforme avanza el tiempo, a este fenómeno se le conoce como amortiguamiento de la vibración y se puede definir como la propiedad de la estructura de disipar energía.

Las principales fuentes de amortiguamiento estructural son:

- Rozamiento o Fricción Interna
- Calor
- Agrietamiento
- Deformaciones permanentes

Estas y otras causas harán que la estructura que vibra libremente tienda al reposo. (Castillo, 2018).

Amortiguamiento Viscoso

El amortiguamiento viscoso es una hipótesis donde se considera que las fuerzas generadas por el amortiguamiento son directamente proporcionales a la velocidad. La razón de esta hipótesis es que conduce a modelos matemáticos relativamente simples que tienen un buen nivel de aproximación contra la realidad de acuerdo con la experimentación. (Castillo, 2018).

La idea es agrupar la contribución de todas las fuentes de disipación de energía en un conjunto de parámetros modales, mientras la estructura se encuentre en su rango elástico-lineal.

De acuerdo con el nivel de amortiguamiento se tienen distintos comportamientos dinámicos en las estructuras, desde un amortiguamiento nulo hasta estructuras con tanto amortiguamiento que ni siquiera vibran.

A la frontera entre los casos en que las estructuras vibran y dejan de vibrar, se le llama amortiguamiento crítico C_{CR} .

Porcentaje o Fracción de Amortiguamiento

Se define como la razón entre el coeficiente de amortiguamiento C y el coeficiente de amortiguamiento crítico C_{CR} . (Castillo, 2018).

$$\zeta = \frac{C}{C_{CR}} \quad (2.4.45)$$

La solución de los casos de vibración tratados anteriormente debe ahora ampliarse por medio de la inclusión del término de amortiguamiento, debido a que las ecuaciones (2.4.10), (2.4.26) y (2.4.44) implican que el sistema vibra libremente a perpetuidad manteniendo la amplitud constante.

Vibración Libre Con Amortiguamiento

La introducción de un amortiguamiento de tipo viscoso (es decir, proporcional a la velocidad) hace que la ecuación de movimiento para una VLCA sea la siguiente:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.4.46)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = e^{-\zeta\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sen\omega_D t) \quad (2.4.47)$$

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = e^{-\zeta\omega(0)}(A\cos(\omega_D(0)) + B\sen(\omega_D(0))) \quad (2.4.48)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = u(0) \quad (2.4.49)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.47) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t}(A\omega_D\sen\omega_D t + A\zeta\omega\cos\omega_D t - B\omega_D\cos\omega_D t \\ + B\zeta\omega\sen\omega_D t) \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, en el tiempo $t = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) = -e^{-\zeta\omega(0)}(A\omega_D\sen(\omega_D(0)) + A\zeta\omega\cos(\omega_D(0)) \\ - B\omega_D\cos(\omega_D(0)) + B\zeta\omega\sen(\omega_D(0))) \\ \dot{u}(0) = A\zeta\omega + B\omega_D \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = \frac{\dot{u}(0) + A\zeta\omega}{\omega_D} = \frac{\dot{u}(0) + u(0)\zeta\omega}{\omega_D} \quad (2.4.52)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.47) resulta la solución de la ecuación de movimiento para una VLSA.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + u(0)\zeta\omega}{\omega_D} \sen\omega_D t \right) \quad (2.4.53)$$

Vibración Forzada Con Amortiguamiento Fuerza Escalonada

Simplificando la ecuación de movimiento para el caso de VFCA, y una Fuerza Escalonada se tiene la ecuación a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_o \quad (2.4.54)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = e^{-\zeta\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sen\omega_D t) \quad (2.4.55)$$

La solución particular se obtiene con el método de Coeficientes Indeterminados, como se trata de una fuerza constante, la forma de la solución particular u_p es una constante. Dado que las constantes A y B, ya se encuentran en la solución complementaria, se propone:

$$u_p = C \quad (2.4.56)$$

Derivando la ecuación, se obtiene

$$\dot{u}_p = 0 \quad (2.4.57)$$

$$\ddot{u}_p = 0 \quad (2.4.58)$$

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de movimiento, resulta:

$$m(0) + c(0) + k(C) = p_o \quad (2.4.59)$$

Por lo tanto, el valor de la constante C es igual a:

$$C = \frac{p_o}{k} \quad (2.4.60)$$

Dado que $y_p = C$, entonces

$$u_p = \frac{p_o}{k} \quad (2.4.61)$$

Como la solución de la ecuación es

$$u(t) = u_c + u_p \quad (2.4.62)$$

Se obtiene:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sen\omega_D t) + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.63)$$

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, considerando un desplazamiento nulo en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = e^{-\zeta\omega(0)}(A\cos(\omega_D(0)) + B\sen(\omega_D(0))) + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.64)$$

$$0 = A + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.65)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = -\frac{p_o}{k} \quad (2.4.66)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.63) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t}(A\omega_D\sen\omega_D t + A\zeta\omega\cos\omega_D t - B\omega_D\cos\omega_D t \\ + B\zeta\omega\sen\omega_D t) \end{aligned} \quad (2.4.67)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, considerando una velocidad nula en el tiempo $t = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) = -e^{-\zeta\omega(0)}(A\omega_D\sen(\omega_D(0)) + A\zeta\omega\cos(\omega_D(0)) \\ - B\omega_D\cos(\omega_D(0)) + B\zeta\omega\sen(\omega_D(0))) \end{aligned} \quad (2.4.68)$$

$$0 = A\zeta\omega + B\omega_D \quad (2.4.69)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = \frac{A\zeta\omega}{\omega_D} = -\frac{p_o\zeta\omega}{k\omega_D} \quad (2.4.70)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.63) se llega a la solución de la ecuación de movimiento para una VFCA debida a una Fuerza Escalonada.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(-\frac{p_o}{k} \cos\omega_D t - \frac{p_o\zeta\omega}{k\omega_D} \sen\omega_D t \right) + \frac{p_o}{k} \quad (2.4.71)$$

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \left(1 - e^{-\zeta\omega t} \left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta\omega}{\omega_D} \sen\omega_D t \right) \right)$$

Vibración Forzada Con Amortiguamiento Linealmente Creciente

Simplificando la ecuación de movimiento para el caso de VFCA, y una fuerza linealmente creciente se tiene la ecuación a resolver:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \frac{p_o}{t_r}(t) \quad (2.4.72)$$

La solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$u_c = e^{-\zeta\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) \quad (2.4.73)$$

La solución particular se obtiene con el método de Coeficientes Indeterminados, como se trata de una fuerza linealmente creciente, la forma de la solución particular u_p es de la forma $mx + b$. Dado que las constantes A y B, ya se encuentran en la solución complementaria, se propone:

$$u_p = Ct + D \quad (2.4.74)$$

Derivando la ecuación, resulta

$$\dot{u}_p = C \quad (2.4.75)$$

$$\ddot{u}_p = 0 \quad (2.4.76)$$

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$m(0) + c(C) + k(Ct + D) = \frac{p_o}{t_r}t \quad (2.4.77)$$

$$cC + kCt + kD = \frac{p_o}{t_r}t + 0 \quad (2.4.78)$$

Por lo tanto:

$$kCt = \frac{p_o}{t_r}t \quad cC + kD = 0$$

Por lo tanto, el valor de la constante C es igual a:

$$C = \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.79)$$

Sustituyendo

$$c \frac{p_o}{kt_r} + kD = 0 \quad (2.4.80)$$

Por lo tanto, el valor de la constante D es igual a:

$$D = -\frac{c}{k} \left(\frac{p_o}{kt_r} \right) \quad (2.4.81)$$

Dado que $u_p = Ct + D$, entonces:

$$u_p = \frac{p_o}{kt_r} t - \frac{c}{k} \left(\frac{p_o}{kt_r} \right) \quad (2.4.82)$$

Como la solución de la ecuación es

$$u(t) = u_c + u_p \quad (2.4.83)$$

Se obtiene:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos\omega_D t + B \sin\omega_D t) + \frac{p_o}{kt_r} \left(t - \frac{c}{k} \right) \quad (2.4.84)$$

Para una Condición Inicial de Desplazamiento, considerando un desplazamiento nulo en el tiempo $t = 0$.

$$u(0) = e^{-\zeta\omega(0)} (A \cos(\omega_D(0)) + B \sin(\omega_D(0))) + \frac{p_o}{kt_r} \left(t - \frac{c}{k} \right) \quad (2.4.85)$$

$$0 = A - \frac{p_o}{kt_r} \left(\frac{c}{k} \right) \quad (2.4.86)$$

Por lo tanto, el valor de la constante A es igual a:

$$A = \frac{p_o}{kt_r} \left(\frac{c}{k} \right) \quad (2.4.87)$$

Como la primera derivada de la ecuación (2.4.84) es la velocidad, esto permite evaluar la velocidad en un tiempo determinado

$$\dot{u}(t) = -e^{-\zeta\omega t}(A\omega_D \text{sen}\omega_D t + A\zeta\omega \text{cos}\omega_D t - B\omega_D \text{cos}\omega_D t + B\zeta\omega \text{sen}\omega_D t) + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.88)$$

Para una Condición Inicial de Velocidad, considerando una velocidad nula en el tiempo $t = 0$.

$$\dot{u}(0) = -e^{-\zeta\omega(0)}(A\omega_D \text{sen}(\omega_D(0)) + A\zeta\omega \text{cos}(\omega_D(0)) - B\omega_D \text{cos}(\omega_D(0)) + B\zeta\omega \text{sen}(\omega_D(0))) + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.89)$$

$$0 = A\zeta\omega + B\omega_D + \frac{p_o}{kt_r} \quad (2.4.90)$$

Por lo tanto, el valor de la constante B es igual a:

$$B = -\frac{p_o}{\omega_D kt_r} - \frac{A\zeta\omega}{\omega_D} = -\frac{p_o}{\omega_D kt_r} \left(1 + \frac{\zeta\omega c}{k}\right) \quad (2.4.91)$$

Al sustituir los valores de A y B en la ecuación (2.4.84) se llega a la solución de la ecuación de movimiento para una VFCA debida a una Fuerza Linealmente Creciente.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(\frac{p_o}{kt_r} \left(\frac{c}{k} \right) \text{cos}\omega_D t - \frac{p_o}{\omega_D kt_r} \left(1 + \frac{\zeta\omega c}{k} \right) \text{sen}\omega_D t \right) + \frac{p_o}{kt_r} \left(t - \frac{c}{k} \right) \quad (2.4.92)$$

El método clásico de solución para la ecuación de movimiento se limita a casos específicos, con aplicaciones de fuerzas en condiciones claramente definidas, constantes o armónicas, y no es posible considerar el comportamiento inelástico esperado de las estructuras durante sismos si el movimiento del terreno es intenso.

2.5. Evaluación Numérica de la Respuesta Dinámica

Los casos previos corresponden a excitaciones definidas por funciones continuas, y por tal motivo es posible realizar una solución analítica como se ha demostrado, sin embargo, uno de los mayores intereses en la ingeniería civil es la respuesta de

las estructuras ante sismos y resulta imposible definir las aceleraciones producidas por estos de manera analítica.

Como no es posible obtener una solución analítica de la ecuación de movimiento si la carga o la aceleración del suelo varían arbitrariamente con el tiempo, es necesario utilizar un método numérico para resolver la ecuación de movimiento.

Los métodos numéricos son algoritmos desarrollados para resolver problemas por medio de la transformación de operaciones complicadas a operaciones aritméticas (Quintana & Villalobos, 2005).

Cabe resaltar la importancia de que el método numérico a emplear tenga buena convergencia, precisión, estabilidad y aplicaciones computacionales.

A continuación, se explica el funcionamiento y se demuestran las expresiones de los métodos de Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark y Wilson.

2.5.1. Método Basado en la Interpolación de la Excitación

A continuación, se desarrolla el método de Interpolación de la Excitación a partir del procedimiento expuesto en el libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras, las demostraciones se han ampliado con el fin de dar mayor claridad a la explicación del método.

En el caso de los sistemas lineales es posible desarrollar un procedimiento numérico muy eficiente mediante la interpolación de la excitación en cada intervalo de tiempo y el desarrollo de la solución exacta.

Si los intervalos de tiempo son cortos, la interpolación lineal es satisfactoria. En la figura 2.5.1 se muestra que durante el intervalo de tiempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ la función de excitación está dada por:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (2.5.1)$$

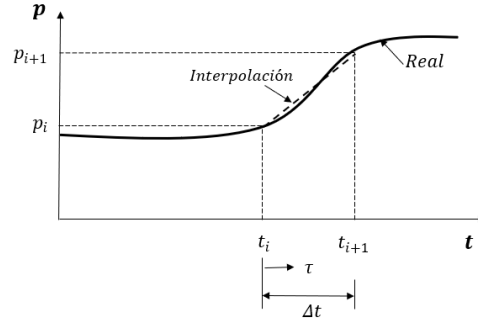


Figura 2.5.1. Notación para una excitación interpolada linealmente. (Autoría propia, 2020)

Considerando primero un sistema no amortiguado, se tiene que la ecuación de movimiento para una VFSA es:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2.5.2)$$

Como $p(t)$ está dado por valores discretos $p_i = p(t_i)$ para i de 0 a N , consecuentemente la respuesta estará dada de forma discreta como: u_i , \dot{u}_i y \ddot{u}_i .

Los valores discretos satisfacen la ecuación (2.5.2) de forma discreta, es decir:

$$m\ddot{u}_i + ku_i = p_i \quad (2.5.3)$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

Si las ecuaciones (2.5.3) se aplican sucesivamente para para i de 0 a N , se tiene un método numérico.

La ecuación por resolver es:

$$m\ddot{u}(\tau) + ku(\tau) = p(\tau) \quad (2.5.4)$$

$$m\ddot{u}(\tau) + ku(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (2.5.5)$$

La ecuación (2.5.5) requiere información de instante de tiempo t_i .

La respuesta $u(\tau)$ durante el intervalo de $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ es la suma de tres partes:

- Vibración Libre debida a Condiciones Iniciales en $\tau = 0$
- Pulso Rectangular debido a Fuerza Escalonada p_i con Condiciones Iniciales nulas.

- Rampa Ascendente debida a Fuerza Linealmente Creciente de 0 a Δt_i en tiempo τ .

De las soluciones a la ecuación de movimiento para los casos de vibración libre debida a condiciones iniciales, fuerza escalonada y fuerza linealmente creciente sin amortiguamiento y ajustando las ecuaciones, tenemos que:

Respuesta dinámica en términos de desplazamiento:

$$u(\tau) = \left[u_i \cos \omega \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \operatorname{sen} \omega \tau \right] + \left[\frac{p_i}{k} (1 - \cos \omega \tau) \right] + \left[\frac{\Delta p_i}{k} \left(\frac{t}{\Delta t_i} - \frac{\operatorname{sen} \omega \tau}{\omega \Delta t_i} \right) \right] \quad (2.5.6)$$

Respuesta dinámica en términos de velocidad:

$$\dot{u}(\tau) = \left[-u_i \omega \operatorname{sen} \omega \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \omega \cos \omega \tau \right] + \left[\frac{p_i}{k} (\omega \operatorname{sen} \omega \tau) \right] + \left[\frac{\Delta p_i}{k \Delta t_i} (1 - \cos \omega \tau) \right] \quad (2.5.7)$$

Al evaluar $\tau = \Delta t_i$ en las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) se obtiene

$$u_{i+1} = \left[u_i \cos \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \operatorname{sen} \omega \Delta t_i \right] + \left[\frac{p_i}{k} (1 - \cos \omega \Delta t_i) \right] + \left[\frac{\Delta p_i}{k} \left(\frac{\Delta t_i}{\Delta t_i} - \frac{\operatorname{sen} \omega \Delta t_i}{\omega \Delta t_i} \right) \right] \quad (2.5.8)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \left[-u_i \omega \operatorname{sen} \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \omega \cos \omega \Delta t_i \right] + \left[\frac{p_i}{k} (\omega \operatorname{sen} \omega \Delta t_i) \right] + \left[\frac{\Delta p_i}{k \Delta t_i} (1 - \cos \omega \Delta t_i) \right] \quad (2.5.9)$$

Al evaluar $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ en las ecuaciones (2.5.6) y (2.5.7) se obtiene el desplazamiento u_{i+1} y la velocidad \dot{u}_{i+1} .

$$u_{i+1} = u_i \cos \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \operatorname{sen} \omega \Delta t_i \quad (2.5.10)$$

$$+ \frac{p_i}{k} \left(\frac{1 - \cos \omega \Delta t_i - \omega \Delta t_i - \operatorname{sen} \omega \Delta t_i}{\omega \Delta t_i} \right) \\ + p_{i+1} \left(\frac{\omega \Delta t_i - \operatorname{sen} \omega \Delta t_i}{k \omega \Delta t_i} \right)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -u_i \omega \operatorname{sen} \omega \Delta t_i + \dot{u}_i \cos \omega \Delta t_i \quad (2.5.11)$$

$$+ \frac{p_i}{k} \left[\omega \operatorname{sen} \omega \Delta t_i - \frac{1}{\Delta t_i} (1 - \cos \omega \Delta t_i) \right] \\ + p_{i+1} \left[\frac{1}{k \omega \Delta t_i} (1 - \cos \omega \Delta t_i) \right]$$

Las ecuaciones se pueden escribir como fórmulas de recurrencia:

Respuesta dinámica en términos de desplazamiento

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (2.5.12)$$

Respuesta dinámica en términos de velocidad

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'u_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (2.5.13)$$

Si bien es posible elaborar otras cuatro constantes para la aceleración, es conveniente despejar de la ecuación (2.5.3), obteniendo así:

Respuesta dinámica en términos de aceleración

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \quad (2.5.14)$$

De manera similar, se puede obtener la respuesta dinámica ahora para un caso con amortiguamiento.

Ahora la ecuación por resolver es:

$$m\ddot{u}(\tau) + c\dot{u}(\tau) + ku(\tau) = p(\tau) \quad (2.5.15)$$

$$m\ddot{u}(\tau) + c\dot{u}(\tau) + ku(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (2.5.16)$$

De igual forma, la respuesta $u(\tau)$ durante el intervalo de $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ es la suma de tres partes, por lo que se pueden tomar las soluciones a la ecuación de movimiento para los casos de vibración libre debida a condiciones iniciales, fuerza escalonada y fuerza linealmente creciente con amortiguamiento y ajustar las ecuaciones.

Al repetir la deducción ahora para el caso con amortiguamiento, se obtienen las fórmulas de recurrencia:

Respuesta dinámica en términos de desplazamiento

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (2.5.17)$$

Respuesta dinámica en términos de velocidad

$$\dot{u}_{i+1} = A'\dot{u}_i + B'\ddot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (2.5.18)$$

Dónde las constantes son:

$$A = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_D\Delta t + \text{cos}\omega_D\Delta t \right) \quad (2.5.19)$$

$$B = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\frac{1}{\omega_D} \text{sen}\omega_D\Delta t \right) \quad (2.5.20)$$

$$C = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} + e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{sen}\omega_D\Delta t - \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} \right) \text{cos}\omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (2.5.21)$$

$$D = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} + e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\frac{2\zeta^2-1}{\omega_D\Delta t} \text{sen}\omega_D\Delta t + \frac{2\zeta}{\omega\Delta t} \text{cos}\omega_D\Delta t \right) \right] \quad (2.5.22)$$

$$A' = -e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_D\Delta t \right) \quad (2.5.23)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\text{cos}\omega_D\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_D\Delta t \right) \quad (2.5.24)$$

$$C' = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{sen}\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t} \text{cos}\omega_D\Delta t \right] \right\} \quad (2.5.25)$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t} \left[1 - e^{-\zeta\omega\Delta t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_D\Delta t + \text{cos}\omega_D\Delta t \right) \right] \quad (2.5.26)$$

Las expresiones de las ocho constantes para el caso con amortiguamiento $\zeta < 1$ son tomadas del libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras.

2.5.2. Método de la Diferencia Central

A continuación, se desarrolla el método de Diferencia Central con base en el procedimiento expuesto en el libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras, las demostraciones se han ampliado con el fin de dar mayor claridad a la explicación del método.

El Método de la Diferencia Central está basado en una aproximación por diferencias finitas de las derivadas temporales del desplazamiento, es decir, la velocidad y la aceleración.

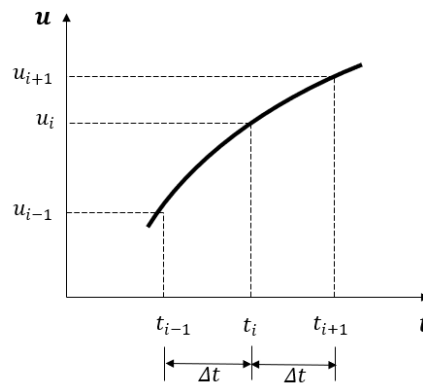


Figura 2.5.2. Diferencia central. (Autoría propia, 2020)

Dado que se trata de un método numérico, las derivadas temporales se obtienen mediante diferenciación numérica, es decir una serie de procedimientos para derivar funciones que están definidas mediante datos tabulados o mediante curvas determinadas en forma experimental. (Michavila, 1985)

Una opción es aproximar la función en la vecindad del punto en que se desea la derivada, mediante una parábola de segundo, tercer o mayor grado, y utilizar entonces la derivada de la parábola en ese punto como la derivada de la función (Purcell, 2012).

Para este desarrollo se utiliza una serie de Taylor, es decir una serie de potencias en $(x - a)$ capaz de representar una función $f(x)$ definida en un intervalo, mismo que contiene un punto que puede ser derivado en cualquier orden (Espinosa, 2012).

Supongamos una función con números $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ tales que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (2.5.27)$$

para x que pertenece a algún intervalo en torno de a .

Entonces su primer y segunda derivada serían:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \dots \quad (2.5.28)$$

$$f''(x) = 2! c_2 + 3! c_3(x - a) + 4 \cdot 3c_4(x - a)^2 + \dots \quad (2.5.29)$$

Al sustituir $x = a$ y resolver para c_n , se obtiene

$$c_0 = f(a) \quad (2.5.30)$$

$$c_1 = f'(a) \quad (2.5.31)$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad (2.5.32)$$

y, más generalmente:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2.5.33)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.5.27), resulta:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \quad (2.5.34)$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Ahora, considerando la función de desplazamiento $\mathbf{u}(t)$ en $(t_i + \Delta t)$, la serie de Taylor desarrollada con respecto al punto t_i es:

$$u(t_i + \Delta t) = u_i + \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\ddot{\ddot{u}}_i}{3!}(\Delta t)^3 + \dots \quad (2.5.35)$$

En donde \mathbf{u}_i es la ordenada que corresponde a t_i , y $(t_i + \Delta t)$ se encuentra en la región de convergencia.

De manera similar, ahora la serie para $\mathbf{u}(t)$, en $(t_i - \Delta t)$, está dada por:

$$u(t_i - \Delta t) = u_i - \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 - \frac{\ddot{\ddot{u}}_i}{3!}(\Delta t)^3 + \dots \quad (2.5.36)$$

Utilizando únicamente los primeros tres términos de las ecuaciones (2.5.35) y (2.5.36), se puede obtener una expresión para \dot{u}_i restando de la ecuación (2.5.36) la ecuación (2.5.35).

$$\begin{array}{r} u(t_i - \Delta t) = u_i - \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 \\ - \\ u(t_i + \Delta t) = u_i + \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 \end{array}$$

Resulta

$$u(t_i - \Delta t) - u(t_i + \Delta t) = -2\dot{u}_i(\Delta t) \quad (2.5.37)$$

Despejando \dot{u}_i se obtiene:

$$\dot{u}_i = \frac{u(t_i + \Delta t) - u(t_i - \Delta t)}{2(\Delta t)} \quad (2.5.38)$$

La ecuación se denomina la primera aproximación por Diferencias Centrales de \dot{u}_i , para t , y designando los puntos uniformemente espaciados a la derecha de t_i como t_{i+1} , t_{i+2} , etc. y los puntos a la izquierda de t_i como t_{i-1} , t_{i-2} , etc. e identificando las ordenadas correspondientes como \mathbf{u}_{i+1} , \mathbf{u}_{i+2} , \mathbf{u}_{i-1} , \mathbf{u}_{i-2} , respectivamente, reescribiendo la ecuación (2.5.38), se obtiene la expresión de diferencia central para la velocidad.

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(\Delta t)} \quad (2.5.39)$$

Para obtener la segunda derivada se puede seguir un procedimiento similar, ahora sumando las ecuaciones (2.5.35) y (2.5.36) considerando nuevamente solo los primeros tres términos.

$$\begin{aligned} u(t_i - \Delta t) &= u_i - \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 \\ + \\ u(t_i + \Delta t) &= u_i + \dot{u}_i(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2!}(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Resulta

$$u(t_i - \Delta t) + u(t_i + \Delta t) = 2u_i + \ddot{u}_i(\Delta t)^2 \quad (2.5.40)$$

Despejando \ddot{u}_i se obtiene:

$$\ddot{u}_i = \frac{u(t_i + \Delta t) + u(t_i - \Delta t) - 2u_i}{(\Delta t)^2} \quad (2.5.41)$$

La ecuación se denomina la primera aproximación por Diferencias Centrales de \ddot{u}_i , para t , y utilizando la notación descrita previamente, se puede reescribir la ecuación (2.5.40), y obtener la expresión de diferencia central para la aceleración.

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.5.42)$$

Considerando un sistema amortiguado, se tiene que la ecuación de movimiento para una VFCA es:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i \quad (2.5.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.5.39) y (2.5.42), resulta:

$$m \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(\Delta t)} + ku_i = p_i \quad (2.5.44)$$

En esta ecuación los valores de u_i y u_{i-1} se irán conociendo a partir de la aplicación del procedimiento para cada uno de los pasos de tiempo anteriores.

Por lo que la incógnita a resolver será u_{i+1} , despejando de la ecuación (2.5.44) se tiene:

$$\frac{mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} - \frac{2mu_i}{(\Delta t)^2} + \frac{mu_{i-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{cu_{i+1}}{2(\Delta t)} - \frac{cu_{i-1}}{2(\Delta t)} + ku_i = p_i$$

$$\frac{mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} + \frac{cu_{i+1}}{2(\Delta t)} = p_i + \frac{2mu_i}{(\Delta t)^2} - \frac{mu_{i-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{cu_{i-1}}{2(\Delta t)} - ku_i$$

Agrupando términos semejantes y reescribiendo la ecuación, resulta:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2(\Delta t)} \right] u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2(\Delta t)} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i \quad (2.5.45)$$

Para simplificar la ecuación, se puede escribir como constantes algunos términos de esta:

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2(\Delta t)} \quad (2.5.46)$$

$$a = \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2(\Delta t)} \quad (2.5.47)$$

$$b = k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \quad (2.5.48)$$

Quedando la ecuación escrita como:

$$\hat{k}u_{i+1} = p_i - au_{i-1} - bu_i \quad (2.5.49)$$

O bien

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \quad (2.5.50)$$

Donde

$$\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i \quad (2.5.51)$$

Entonces la incógnita u_{i+1} está dada por:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}} \quad (2.5.52)$$

Dado que los valores de u_{i+1} dependerán de u_i y u_{i-1} para calcular el valor del desplazamiento en $i = 1$ será necesario conocer los valores de u_0 y de u_{-1} , en el

caso el desplazamiento inicial se trata de una condición inicial cuyo valor es conocido. Para el cálculo de u_{-1} , se procederá de la siguiente manera:

De acuerdo con la ecuación (2.5.39) para un valor en $t = 0$, se tiene que:

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2(\Delta t)} \quad (2.5.53)$$

Y de acuerdo con la ecuación (2.5.42) para un valor en $t = 0$, se tiene que:

$$\ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.5.54)$$

Despejando el valor de u_1 de la ecuación (2.5.53) resulta:

$$u_1 = 2\dot{u}_0(\Delta t) + u_{-1} \quad (2.5.55)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.5.54) se tiene:

$$\ddot{u}_0 = \frac{2\dot{u}_0(\Delta t) - 2u_0 + 2u_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.5.56)$$

De la cual se puede despejar el valor de u_{-1} quedando en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración iniciales.

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0(\Delta t) + \frac{\ddot{u}_0(\Delta t)^2}{2} \quad (2.5.57)$$

Tanto los valores iniciales de desplazamiento u_0 y velocidad \dot{u}_0 , como el intervalo de tiempo Δt son valores conocidos, por lo que solo resta encontrar la aceleración inicial.

Considerando la ecuación de movimiento (2.5.43) ahora para un $t = 0$ es decir, un tiempo inicial $t = 0$.

$$m\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + ku_0 = p_0 \quad (2.5.58)$$

Se puede despejar la aceleración inicial \ddot{u}_0 .

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \quad (2.5.59)$$

Con este conjunto de ecuaciones es ahora posible determinar la respuesta dinámica en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, conociendo la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema o bien valores que permitan su cálculo.

La condición para obtener valores más aproximados al utilizar este método es contar con pasos de tiempo los suficientemente cortos, para esto se debe cumplir la relación:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi} \quad (2.5.60)$$

De no cumplir esta relación, los resultados obtenidos podrían distar de la realidad, siendo valores sin sentido.

2.5.3. Método de Newmark

A continuación, se desarrolla el método de Newmark tomando como base el procedimiento expuesto en el libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras, las demostraciones se han ampliado con el fin de dar mayor claridad a la explicación del método.

El Método de Newmark es un método basado en las expresiones que rigen el movimiento con aceleración variable, es decir, un caso en que la aceleración no es constante y por lo tanto esta puede encontrarse definida por una función.

Como se trata de un método paso a paso en el tiempo, la aceleración en cada intervalo de tiempo puede ser aproximada a distintas funciones; a continuación, se presentan dos tipos de aproximación:

- Aceleración Promedio Constante
- Aceleración Lineal

Aceleración Promedio Constante

Para esta aproximación se considera la aceleración como una función igual a una constante y es expresada como el promedio de una aceleración inicial \ddot{u}_i y una

$$\int \dot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{2} \tau + \dot{u}_i d\tau \quad (2.5.67)$$

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{4} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + c \quad (2.5.68)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la posición $u(\tau)$ será igual a la posición inicial u_i

$$u_i = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{4} (0)^2 + \dot{u}_i(0) + c \quad (2.5.69)$$

$$u_i = c \quad (2.5.70)$$

Teniendo que la constante es igual a la posición inicial, la posición es igual a:

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{4} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + u_i \quad (2.5.71)$$

Al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.66) se obtiene la expresión para calcular la velocidad \dot{u}_{i+1} :

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{2} \Delta t + \dot{u}_i \quad (2.5.72)$$

De la misma manera, al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.71) se obtiene la expresión para calcular el desplazamiento u_{i+1} :

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}}{4} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.73)$$

De la ecuación (2.5.73) es posible expresar la aceleración \ddot{u}_{i+1} en términos del desplazamiento u_{i+1}

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{4\dot{u}_i}{(\Delta t)} - \ddot{u}_i \quad (2.5.74)$$

Si se sustituye la aceleración \ddot{u}_{i+1} en la ecuación (2.5.72), resulta:

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\dot{u}_i + \left[\frac{4(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{4\dot{u}_i}{(\Delta t)} - \ddot{u}_i \right]}{2} \Delta t + \dot{u}_i \quad (2.5.75)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\frac{4(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{4\dot{u}_i}{(\Delta t)}}{2} \Delta t + \dot{u}_i \quad (2.5.76)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \left[\frac{2(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{2\dot{u}_i}{(\Delta t)} \right] \Delta t + \dot{u}_i \quad (2.5.77)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{2(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_i \quad (2.5.78)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{2(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)} - \dot{u}_i \quad (2.5.79)$$

Se sustituyen las ecuaciones (2.5.74) y (2.5.79) en la ecuación de movimiento para un instante $i + 1$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.80)$$

$$m \left[\frac{4(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{4\dot{u}_i}{(\Delta t)} - \ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{2(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)} - \dot{u}_i \right] + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.81)$$

$$\frac{4mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} - \frac{4mu_i}{(\Delta t)^2} - \frac{4m\dot{u}_i}{(\Delta t)} - m\ddot{u}_i + \frac{2cu_{i+1}}{(\Delta t)} - \frac{2cu_i}{(\Delta t)} - c\dot{u}_i + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.82)$$

Agrupando términos semejantes para u_{i+1}

$$\frac{4mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} + \frac{2cu_{i+1}}{(\Delta t)} + ku_{i+1} \quad (2.5.83)$$

$$= p_{i+1} + \frac{4mu_i}{(\Delta t)^2} + \frac{2cu_i}{(\Delta t)} + \frac{4m\dot{u}_i}{(\Delta t)} + c\dot{u}_i + m\ddot{u}_i$$

$$\left[\frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{(\Delta t)} + k \right] u_{i+1} \quad (2.5.84)$$

$$= p_{i+1} + \left[\frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{(\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{4m}{(\Delta t)} + c \right] \dot{u}_i + m\ddot{u}_i$$

Para simplificar la ecuación, se pueden escribir como constantes algunos términos:

$$\hat{k} = \frac{4}{(\Delta t)^2} m + \frac{2}{(\Delta t)} c + k \quad (2.5.85)$$

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[\frac{4m}{(\Delta t)^2} + \frac{2c}{(\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{4m}{(\Delta t)} + c \right] \dot{u}_i + m\ddot{u}_i \quad (2.5.86)$$

Quedando la ecuación escrita como:

$$\hat{k} u_{i+1} = \hat{p}_{i+1} \quad (2.5.87)$$

Entonces la incógnita u_{i+1} está dada por:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (2.5.88)$$

La velocidad puede calcularse con la ecuación (2.5.79), y la aceleración puede obtenerse con la ecuación (2.5.74) o bien con base en la ecuación de movimiento:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m} \quad (2.5.89)$$

Con este conjunto de ecuaciones es ahora posible determinar la respuesta dinámica en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, conociendo la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema o bien valores que permitan su cálculo.

El método de Newmark considerando una aceleración promedio constante es incondicionalmente estable para cualquier intervalo de tiempo, es decir no existe restricción para un valor de Δt ya que:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (2.5.90)$$

Sin embargo, es recomendable que Δt sea lo suficientemente pequeño para obtener valores más aproximados.

Aceleración Lineal

Para esta aproximación se considera la aceleración como una recta que pasa por los puntos de aceleración inicial \ddot{u}_i en un tiempo inicial t_i y de aceleración final \ddot{u}_{i+1} , en un tiempo final t_{i+1} , como se observa en la figura 2.5.4.

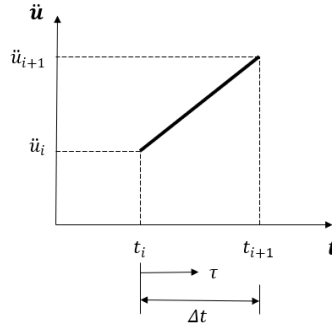


Figura 2.5.4. Aceleración lineal. (Autoría Propia, 2020)

Considerando la ecuación de una recta con pendiente m y ordenada b :

$$y = mx + b \quad (2.5.91)$$

Se tiene entonces que la aceleración para un tiempo τ es igual a:

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \tau + \ddot{u}_i \quad (2.5.92)$$

Como la velocidad es la integral de la aceleración respecto al tiempo

$$\int \ddot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \tau + \ddot{u}_i d\tau \quad (2.5.93)$$

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + c \quad (2.5.94)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la velocidad $\dot{u}(\tau)$ será igual a la velocidad inicial \dot{u}_i

$$\dot{u}_i = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} (0)^2 + \ddot{u}_i(0) + c \quad (2.5.95)$$

$$\dot{u}_i = c \quad (2.5.96)$$

Teniendo que la constante es igual a la velocidad inicial, la velocidad es igual a:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (2.5.97)$$

Ahora, como la posición es la integral de la velocidad con respecto al tiempo

$$\int \dot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i d\tau \quad (2.5.98)$$

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + c \quad (2.5.99)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la posición $u(\tau)$ será igual a la posición inicial u_i

$$u_i = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} (0)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (0)^2 + \dot{u}_i(0) + c \quad (2.5.100)$$

$$u_i = c \quad (2.5.101)$$

Teniendo que la constante es igual a la posición inicial, la posición es igual a:

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + u_i \quad (2.5.102)$$

Al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.97) se obtiene la expresión para calcular la velocidad \dot{u}_{i+1} :

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} (\Delta t)^2 + \ddot{u}_i (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.103)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{2} (\Delta t) - \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \ddot{u}_i (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.104)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{2} (\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.105)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.106)$$

De la misma manera, al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.102) se obtiene la expresión para calcular el desplazamiento u_{i+1} :

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} (\Delta t)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.107)$$

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} (\Delta t)^2 - \frac{\ddot{u}_i}{6} (\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.108)$$

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} (\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{3} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.109)$$

$$u_{i+1} = \left(\frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \right) (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.110)$$

De la ecuación (2.5.110) es posible expresar la aceleración \ddot{u}_{i+1} en términos del desplazamiento u_{i+1}

$$u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i (\Delta t) = \left(\frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \right) (\Delta t)^2 \quad (2.5.111)$$

$$\frac{(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \quad (2.5.112)$$

$$\frac{6(u_{i+1} - u_i) - 6\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} = \ddot{u}_{i+1} + 2\ddot{u}_i \quad (2.5.113)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{6(u_{i+1} - u_i) - 6\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} - 2\ddot{u}_i \quad (2.5.114)$$

Si se sustituye la aceleración \ddot{u}_{i+1} en la ecuación (2.5.106), resulta:

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\left[\frac{6(u_{i+1} - u_i) - 6\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} - 2\ddot{u}_i \right] + \ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.115)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\frac{6(u_{i+1} - u_i) - 6\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)} - \ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.116)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \left[\frac{3(u_{i+1} - u_i) - 3\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)^2} - \frac{\ddot{u}_i}{2} \right] (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.117)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{3(u_{i+1} - u_i) - 3\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)} - 3\ddot{u}_i - \frac{\ddot{u}_i (\Delta t)}{2} + \dot{u}_i \quad (2.5.118)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{3(u_{i+1} - u_i) - 3\dot{u}_i (\Delta t)}{(\Delta t)} - 2\ddot{u}_i - \frac{(\Delta t)}{2} \ddot{u}_i \quad (2.5.119)$$

Se sustituyen las ecuaciones (2.5.114) y (2.5.119) en la ecuación de movimiento para un instante $i + 1$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.120)$$

$$m \left[\frac{6(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\Delta t)} - 2\ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{3(u_{i+1} - u_i)}{(\Delta t)} - 2\dot{u}_i - \frac{(\Delta t)}{2}\ddot{u}_i \right] + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.121)$$

$$\frac{6mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} - \frac{6mu_i}{(\Delta t)^2} - \frac{6m\dot{u}_i}{(\Delta t)} - 2m\ddot{u}_i + \frac{3cu_{i+1}}{(\Delta t)} - \frac{3cu_i}{(\Delta t)} - 2c\dot{u}_i - \frac{(\Delta t)c}{2}\ddot{u}_i + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.5.122)$$

Agrupando términos semejantes para u_{i+1}

$$\frac{6mu_{i+1}}{(\Delta t)^2} + \frac{3cu_{i+1}}{(\Delta t)} + ku_{i+1} \quad (2.5.123)$$

$$= p_{i+1} + \frac{6mu_i}{(\Delta t)^2} + \frac{3cu_i}{(\Delta t)} + \frac{6m\dot{u}_i}{(\Delta t)} + 2c\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)c}{2}\ddot{u}_i$$

$$\left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\Delta t)} + k \right] u_{i+1} \quad (2.5.124)$$

$$= p_{i+1} + \left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{6m}{(\Delta t)} + 2c \right] \dot{u}_i + \left[2m + \frac{(\Delta t)c}{2} \right] \ddot{u}_i$$

Para simplificar la ecuación, se pueden escribir como constantes algunos términos:

$$\hat{k} = \frac{6}{(\Delta t)^2} m + \frac{3}{(\Delta t)} c + k \quad (2.5.125)$$

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[\frac{6m}{(\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{6m}{(\Delta t)} + 2c \right] \dot{u}_i + \left[2m + \frac{(\Delta t)c}{2} \right] \ddot{u}_i \quad (2.5.126)$$

Quedando la ecuación escrita como:

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_{i+1} \quad (2.5.127)$$

Entonces la incógnita u_{i+1} está dada por:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (2.5.128)$$

La velocidad puede calcularse con la ecuación (2.5.119), y la aceleración puede obtenerse con la ecuación (2.5.114) o bien con base en la ecuación de movimiento:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \quad (2.5.129)$$

Con este conjunto de ecuaciones es ahora posible determinar la respuesta dinámica en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, conociendo la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema o bien valores que permitan su cálculo.

La condición para obtener valores más aproximados al utilizar este método es contar con pasos de tiempo los suficientemente cortos, para esto se debe cumplir la relación:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551 \quad (2.5.130)$$

Sin embargo, debido a que los intervalos de tiempo deben ser mucho menores para obtener una respuesta con mayor aproximación, esta no es ninguna limitante para el método.

2.5.4. Método de Wilson

A continuación, se desarrolla el método de Wilson partiendo del procedimiento descrito en el libro Humar, J. L., 2002. Dynamics of structures, las demostraciones se han ampliado con el fin de dar mayor claridad a la explicación del método.

Al igual que el Método de Newmark, el Método de Wilson es un método basado en las expresiones que rigen el movimiento con aceleración variable, y la considera a esta una variación de forma lineal; sin embargo, con el fin de proporcionar una estabilidad incondicional al método es introducido un factor θ .

Para esta aproximación se considera la aceleración como una recta que pasa por los puntos de aceleración inicial \ddot{u}_i en un tiempo inicial t_i y de aceleración final $\ddot{u}_{i+\theta}$, en un tiempo final $t_{i+\theta}$, como se observa en la figura 2.5.5.

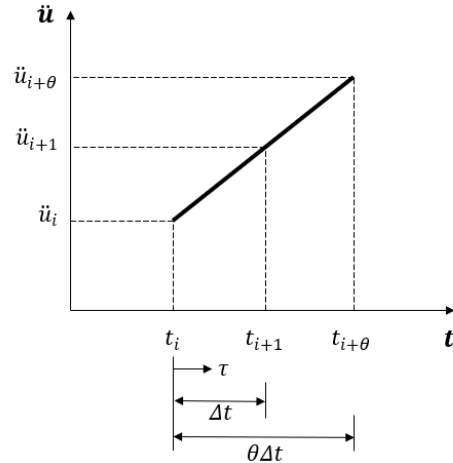


Figura 2.5.5. Aceleración lineal en un intervalo $\theta\Delta t$. (Autoría propia, 2020)

Considerando la ecuación de una recta con pendiente m y ordenada b :

$$y = mx + b \quad (2.5.131)$$

Se tiene entonces que la aceleración para un tiempo τ es igual a:

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta\Delta t} \tau + \ddot{u}_i \quad (2.5.132)$$

Como la velocidad es la integral de la aceleración respecto al tiempo

$$\int \ddot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta\Delta t} \tau + \ddot{u}_i d\tau \quad (2.5.133)$$

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + c \quad (2.5.134)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la velocidad $\dot{u}(\tau)$ será igual a la velocidad inicial \dot{u}_i

$$\dot{u}_i = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} (0)^2 + \ddot{u}_i(0) + c \quad (2.5.135)$$

$$\dot{u}_i = c \quad (2.5.136)$$

Teniendo que la constante es igual a la velocidad inicial, la velocidad es igual a:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (2.5.137)$$

Ahora, como la posición es la integral de la velocidad con respecto al tiempo

$$\int \dot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i d\tau \quad (2.5.138)$$

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{6\theta\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + c \quad (2.5.139)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la posición $u(\tau)$ será igual a la posición inicial u_i

$$u_i = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{6\theta\Delta t} (0)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (0)^2 + \dot{u}_i(0) + c \quad (2.5.140)$$

$$u_i = c \quad (2.5.141)$$

Teniendo que la constante es igual a la posición inicial, la posición es igual a:

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{6\theta\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + u_i \quad (2.5.142)$$

Al evaluar $\tau = \theta\Delta t$ en la ecuación (2.5.137) se obtiene la expresión para calcular la velocidad $\dot{u}_{i+\theta}$:

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{2\theta\Delta t} (\theta\Delta t)^2 + \ddot{u}_i(\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.143)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{2} (\theta\Delta t) - \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t) + \ddot{u}_i(\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.144)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{2} (\theta\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.145)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} + \ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.146)$$

De la misma manera, al evaluar $\tau = \theta\Delta t$ en la ecuación (2.5.142) se obtiene la expresión para calcular el desplazamiento $u_{i+\theta}$:

$$u_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} (\theta\Delta t)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t)^2 + \dot{u}_i(\theta\Delta t) + u_i \quad (2.5.147)$$

$$u_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{6} (\theta\Delta t)^2 - \frac{\ddot{u}_i}{6} (\theta\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t)^2 + \dot{u}_i(\theta\Delta t) + u_i \quad (2.5.148)$$

$$u_{i+\theta} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{6} (\theta\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{3} (\theta\Delta t)^2 + \dot{u}_i(\theta\Delta t) + u_i \quad (2.5.149)$$

$$u_{i+\theta} = \left(\frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \right) (\theta\Delta t)^2 + \dot{u}_i(\theta\Delta t) + u_i \quad (2.5.150)$$

De la ecuación (2.5.150) es posible expresar la aceleración $\ddot{u}_{i+\theta}$ en términos del desplazamiento $u_{i+\theta}$

$$u_{i+\theta} - u_i - \dot{u}_i(\theta\Delta t) = \left(\frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \right) (\theta\Delta t)^2 \quad (2.5.151)$$

$$\frac{(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \quad (2.5.152)$$

$$\frac{6(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} = \ddot{u}_{i+\theta} + 2\ddot{u}_i \quad (2.5.153)$$

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - 2\ddot{u}_i \quad (2.5.154)$$

Si se sustituye la aceleración $\ddot{u}_{i+\theta}$ en la ecuación (2.5.146), resulta:

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\left[\frac{6(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - 2\ddot{u}_i \right] + \ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.155)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{\frac{6(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - \ddot{u}_i}{2} (\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.156)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \left[\frac{3(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{3\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - \frac{\ddot{u}_i}{2} \right] (\theta\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.157)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)} - 3\dot{u}_i - \frac{\ddot{u}_i(\theta\Delta t)}{2} + \dot{u}_i \quad (2.5.158)$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)} - 2\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)}{2}\ddot{u}_i \quad (2.5.159)$$

Se sustituyen las ecuaciones (2.5.154) y (2.5.159) en la ecuación de movimiento para un instante $i + \theta$

$$m\ddot{u}_{i+\theta} + c\dot{u}_{i+\theta} + ku_{i+\theta} = p_{i+\theta} \quad (2.5.160)$$

$$m \left[\frac{6(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - 2\ddot{u}_i \right] + c \left[\frac{3(u_{i+\theta} - u_i)}{(\theta\Delta t)} - 2\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)}{2}\ddot{u}_i \right] + ku_{i+\theta} = p_{i+\theta} \quad (2.5.161)$$

$$\frac{6mu_{i+\theta}}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6mu_i}{(\theta\Delta t)^2} - \frac{6m\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} - 2m\ddot{u}_i + \frac{3cu_{i+\theta}}{(\theta\Delta t)} - \frac{3cu_i}{(\theta\Delta t)} - 2c\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)c}{2}\ddot{u}_i + ku_{i+\theta} = p_{i+\theta} \quad (2.5.162)$$

Agrupando términos semejantes para $u_{i+\theta}$

$$\frac{6mu_{i+\theta}}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3cu_{i+\theta}}{(\theta\Delta t)} + ku_{i+\theta} \quad (2.5.163)$$

$$= p_{i+\theta} + \frac{6mu_i}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3cu_i}{(\theta\Delta t)} + \frac{6m\dot{u}_i}{(\theta\Delta t)} + 2c\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i + \frac{(\theta\Delta t)c}{2}\ddot{u}_i$$

$$\left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\theta\Delta t)} + k \right] u_{i+\theta} \quad (2.5.164)$$

$$= p_{i+\theta} + \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\theta\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)} + 2c \right] \dot{u}_i + \left[2m + \frac{(\theta\Delta t)c}{2} \right] \ddot{u}_i$$

Para simplificar la ecuación, se pueden escribir como constantes algunos términos:

$$\hat{k} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} m + \frac{3}{(\theta\Delta t)} c + k \quad (2.5.165)$$

$$\hat{p}_{i+\theta} = p_{i+\theta} + \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3c}{(\theta\Delta t)} \right] u_i + \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)} + 2c \right] \dot{u}_i + \left[2m + \frac{(\theta\Delta t)c}{2} \right] \ddot{u}_i \quad (2.5.166)$$

Quedando la ecuación escrita como:

$$\hat{k}u_{i+\theta} = \hat{p}_{i+\theta} \quad (2.5.167)$$

Entonces la incógnita $u_{i+\theta}$ está dada por:

$$u_{i+\theta} = \frac{\hat{p}_{i+\theta}}{\hat{k}} \quad (2.5.168)$$

La velocidad $\dot{u}_{i+\theta}$ puede calcularse con la ecuación (2.5.159), y la aceleración $\ddot{u}_{i+\theta}$ puede obtenerse con la ecuación (2.5.154) o bien con base en la ecuación de movimiento:

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{p_{i+\theta} - c\dot{u}_{i+\theta} - ku_{i+\theta}}{m} \quad (2.5.169)$$

Como la aceleración se ha asumido como una variación lineal del tiempo inicial t_i hasta un tiempo final $t_{i+\theta}$, la fuerza excitadora también se asume como una variación lineal en el mismo intervalo de tiempo, y la fuerza $p_{i+\theta}$ puede obtenerse igualando las pendientes para los intervalos $\theta\Delta t$ y Δt .

$$\frac{p_{i+\theta} - p_i}{\theta\Delta t} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t} \quad (2.5.170)$$

Despejando de la ecuación, se puede obtener la proyección de la fuerza excitadora $p_{i+\theta}$, en términos de la proyección p_{i+1}

$$p_{i+\theta} = \theta(p_{i+1} - p_i) + p_i \quad (2.5.171)$$

Como se observa en la figura 2.5.5, la aceleración está definida por una función lineal en la cual la pendiente es constante, por lo que tomando un punto en el intervalo definido por un tiempo t_{i+1} , y una aceleración \ddot{u}_{i+1} , se plantea lo siguiente:

$$\frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta \Delta t} \quad (2.5.172)$$

Despejando de la ecuación, se puede obtener la aceleración \ddot{u}_{i+1} , en términos de la proyección $\ddot{u}_{i+\theta}$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} + \ddot{u}_i \quad (2.5.173)$$

Para obtener las expresiones que permiten conocer la velocidad y el desplazamiento en cada paso de tiempo $i + 1$, se reescribe la aceleración ahora solo para el intervalo Δt definido por la aceleración inicial \ddot{u}_i en un tiempo inicial t_i y de aceleración final \ddot{u}_{i+1} , en un tiempo final t_{i+1} , como se observa en la figura 2.5.4.

Se tiene entonces que la aceleración para un tiempo τ es igual a:

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \tau + \ddot{u}_i \quad (2.5.174)$$

Como la velocidad es la integral de la aceleración respecto al tiempo

$$\int \ddot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \tau + \ddot{u}_i d\tau \quad (2.5.175)$$

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + c \quad (2.5.176)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la velocidad $\dot{u}(\tau)$ será igual a la velocidad inicial \dot{u}_i

$$\dot{u}_i = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} (0)^2 + \ddot{u}_i(0) + c \quad (2.5.177)$$

$$\dot{u}_i = c \quad (2.5.178)$$

Teniendo que la constante es igual a la velocidad inicial, la velocidad es igual a:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (2.5.179)$$

Ahora, como la posición es la integral de la velocidad con respecto al tiempo

$$\int \dot{u}(\tau) d\tau = \int \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \tau^2 + \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i d\tau \quad (2.5.180)$$

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + c \quad (2.5.181)$$

Para resolver la constante de integración se considera un tiempo inicial t_i en el que $\tau = 0$ y por lo tanto la posición $u(\tau)$ será igual a la posición inicial u_i

$$u_i = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} (0)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (0)^2 + \dot{u}_i(0) + c \quad (2.5.182)$$

$$u_i = c \quad (2.5.183)$$

Teniendo que la constante es igual a la posición inicial, la posición es igual a:

$$u(\tau) = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} \tau^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} \tau^2 + \dot{u}_i \tau + u_i \quad (2.5.184)$$

Al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.179) se obtiene la expresión para calcular la velocidad \dot{u}_{i+1} :

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} (\Delta t)^2 + \ddot{u}_i (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.185)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{2} (\Delta t) - \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \ddot{u}_i (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.186)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{2} (\Delta t) + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.187)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2} (\Delta t) + \dot{u}_i \quad (2.5.188)$$

De la misma manera, al evaluar $\tau = \Delta t$ en la ecuación (2.5.184) se obtiene la expresión para calcular el desplazamiento u_{i+1} :

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{6\Delta t} (\Delta t)^3 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.189)$$

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} (\Delta t)^2 - \frac{\ddot{u}_i}{6} (\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{2} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.190)$$

$$u_{i+1} = \frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} (\Delta t)^2 + \frac{\ddot{u}_i}{3} (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.191)$$

$$u_{i+1} = \left(\frac{\ddot{u}_{i+1}}{6} + \frac{\ddot{u}_i}{3} \right) (\Delta t)^2 + \dot{u}_i (\Delta t) + u_i \quad (2.5.192)$$

Con este conjunto de ecuaciones es ahora posible determinar la respuesta dinámica en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, conociendo la masa, el amortiguamiento y la rigidez del sistema o bien valores que permitan su cálculo.

Respecto al valor de θ , aunque el valor óptimo es de 1.420815, generalmente se utiliza un valor de $\theta = 1.42$, que proporcionará estabilidad y precisión a la solución numérica.

Este método puede generar alargamientos artificiales del periodo y reducción de amplitud, los cuales dependerán de las características de la carga como de la longitud del paso de tiempo. Este mecanismo de decaimiento puede considerarse como un amortiguamiento artificial, el cual se agrega al amortiguamiento real existente.

La estabilidad del método de Wilson radica en el valor de θ , que además establece la exactitud de la solución, de tal manera que si $\theta = 1$, da como resultado el método de Newmark considerando una aceleración lineal, el cual tiene una estabilidad limitada a la relación:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551 \quad (2.5.193)$$

Sin embargo, para valores con $\theta \geq 1.37$ el método es incondicionalmente estable para cualquier intervalo de tiempo, es decir no existe restricción para un valor de Δt ya que:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (2.5.194)$$

Sin embargo, es recomendable que Δt sea lo suficientemente pequeño para obtener valores más aproximados.

CAPÍTULO 3. PROGRAMACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Dado que los métodos numéricos explicados anteriormente requieren de procesos iterativos para una serie de valores que expresan los intervalos de tiempo y la manera en cómo se comportan las fuerzas que se aplican al sistema, resultaría una tarea muy complicada resolver estos problemas manualmente sin ayuda de una computadora, y más tratándose para registros con una gran cantidad de datos, es por eso que como parte de este trabajo, se ha elaborado un programa de cálculo en Microsoft Office Excel, el cual permite al usuario obtener la respuesta dinámica de una estructura ante una excitación.

3.1. Descripción del Programa ReDi v1.0

Dado que es posible que la estructura reciba una excitación ya sea directamente en su grado de libertad o bien en su base, este programa permite seleccionar entre dos tipos de excitación:

- Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad
- Aceleración Aplicada en la Base

Además, para cada uno de estos casos, el programa brinda al usuario la opción de realizar el cálculo por cada uno de los Métodos Numéricos para la Evaluación de la Respuesta Dinámica presentados en el Capítulo 2, los cuales son:

- Método Basado en la Interpolación de la Excitación
- Método de la Diferencia Central
- Método de Newmark con Aceleración Promedio Constante
- Método de Newmark con Aceleración Lineal
- Método de Wilson

Una vez calculada, la respuesta dinámica es mostrada en un histograma, en el cual además se muestra una tabla con valores máximos positivos y negativos. En el caso de una Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad las opciones que despliega el programa son las siguientes:

- Fuerza

- Desplazamiento
- Velocidad
- Aceleración
- Reacción
- Desplazamiento Estático

Para el caso de Aceleración en la Base, se pueden visualizar las siguientes opciones:

- Aceleración del Suelo (g)
- Aceleración del Suelo
- Fuerza Ficticia Equivalente
- Desplazamiento
- Velocidad
- Pseudo Velocidad
- Aceleración
- Aceleración Total
- Aceleración Total (g)
- Pseudo Aceleración
- Pseudo Aceleración (g)
- Cortante Basal

Para el cálculo de la respuesta dinámica, el usuario debe introducir las siguientes propiedades de la estructura:

- Periodo Natural de Vibración
- Rigidez Lateral
- Fracción de Amortiguamiento

Además de las denominadas Condiciones Iniciales de Desplazamiento y Velocidad, el Intervalo de Paso de Tiempo y por supuesto el registro de la excitación a la cual está sometida la estructura, este puede ser un registro de fuerzas o de aceleraciones dependiendo si se trata de una excitación en el grado de libertad o en la base, respectivamente.

El programa maneja tres sistemas de unidades: Sistema Internacional (SI), Sistema MKS, y Sistema Común de Estados Unidos (U.S.C.S.), los datos de entrada y de salida se ingresan y se muestran respectivamente, de acuerdo con el sistema seleccionado.

Propiedades de la estructura	SI	MKS	USCS
Aceleración debida a la fuerza de gravedad g	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Periodo natural de vibración T	s	s	s
Fracción de amortiguamiento ζ	adimensional	adimensional	adimensional
Rigidez lateral K	kN/m	kgf/cm	kip/in
Frecuencia circular natural de vibración ω	rad/s	rad/s	rad/s
Frecuencia cíclica natural de vibración f	Hz	Hz	Hz
Masa lateral M	tonne	kgf-s ² /cm	kip-s ² /in
Peso W	kN	kgf	kip
Coficiente de amortiguamiento crítico C_{cr}	tonne/s	kgf-s/cm	kip-s/in
Coficiente de amortiguamiento C	tonne/s	kgf-s/cm	kip-s/in
Frecuencia circular amortiguada de vibración ω_D	rad/s	rad/s	rad/s
Fuerza aplicada en el grado de libertad	SI	MKS	USCS
Fuerza p_i	kN	kgf	kip
Desplazamiento u_i	m	cm	in
Velocidad \dot{u}_i	m/s	cm/s	in/s
Aceleración \ddot{u}_i	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Reacción R_i	kN	kgf	kip
Desplazamiento Estático u_{st_i}	m	cm	in
Aceleración aplicada en la base	SI	MKS	USCS
Aceleración Suelo (g) \ddot{u}_{g_i}	g	g	g
Aceleración Suelo \ddot{u}_{g_i}	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Fuerza Ficticia Equivalente p_{eff_i}	kN	kgf	kip
Desplazamiento u_i	m	cm	in
Velocidad \dot{u}_i	m/s	cm/s	in/s
Pseudo-velocidad Sv_i	m/s	cm/s	in/s
Aceleración \ddot{u}_i	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Aceleración Total \ddot{U}_i	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Aceleración Total (g) \ddot{U}_i	g	g	g
Pseudo-aceleración Sa_i	m/s ²	cm/s ²	in/s ²
Pseudo-aceleración (g) Sa_i	g	g	g
Cortante Basal V_{b_i}	kN	kgf	kip

Tabla 3.2.1. Sistemas de Unidades. (Autoría propia, 2020).

A continuación, se muestra una vista general del programa.



Figura 3.1.1. Vista principal del programa. (Autoría propia, 2020).

Lo primero que se debe realizar es la selección del caso con el que se esté trabajando, ya sea una fuerza aplicada en el grado de libertad o una aceleración aplicada en la base. Es muy importante la selección correcta del sistema de unidades, sobre todo al trabajar con aceleraciones en la base.

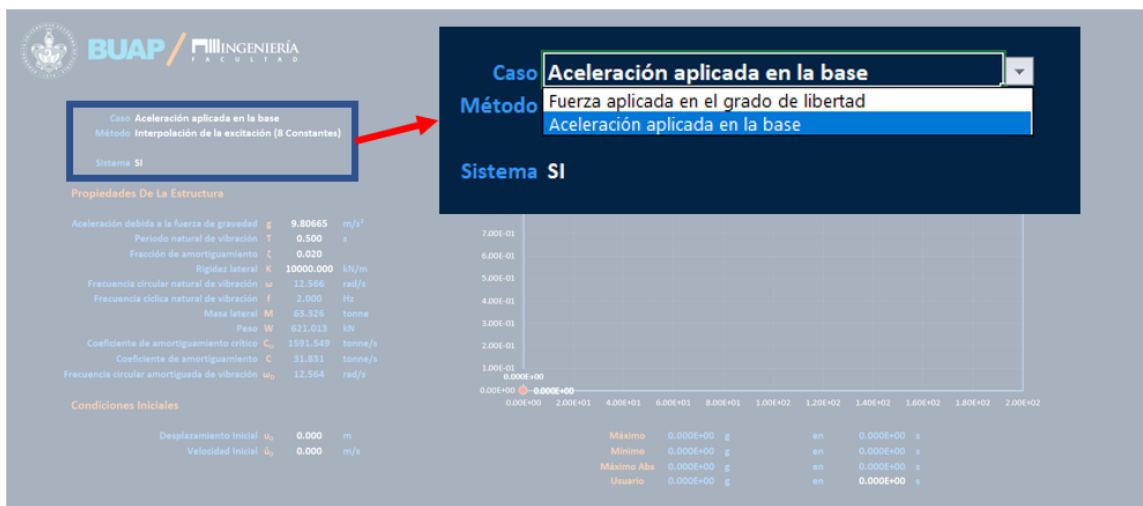


Figura 3.1.2. Selección de tipo de excitación. (Autoría propia, 2020).

Posteriormente se indica el Método Numérico con el que se calculará la respuesta dinámica, esta opción se puede modificar posteriormente cuantas veces se desee para visualizar la diferencia en los resultados.

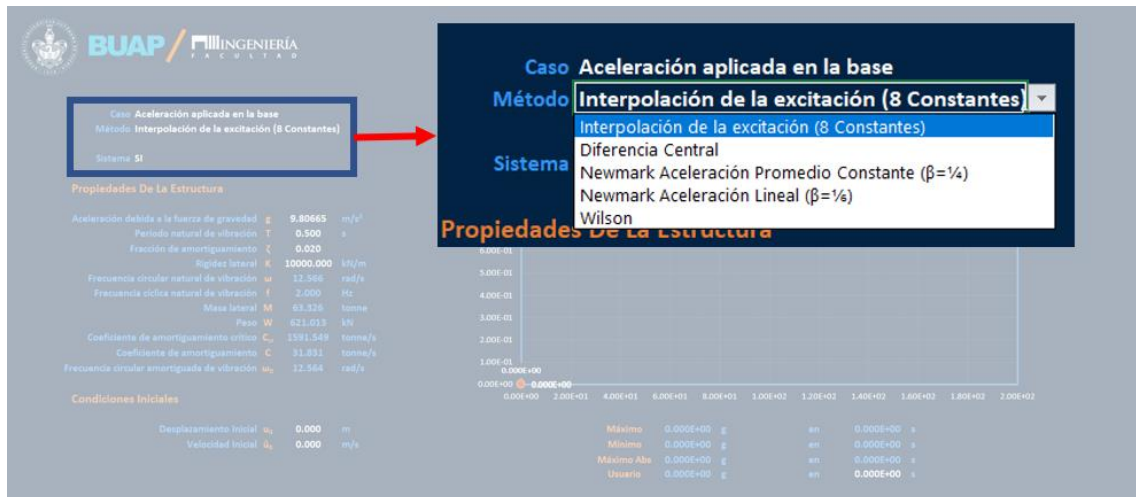


Figura 3.1.3. Selección del Método Numérico. (Autoría propia, 2020).

Se introducen las propiedades de la estructura, las cuales permanecen constantes y no dependen del registro de excitación, también se introducen las condiciones iniciales en que está sometida.

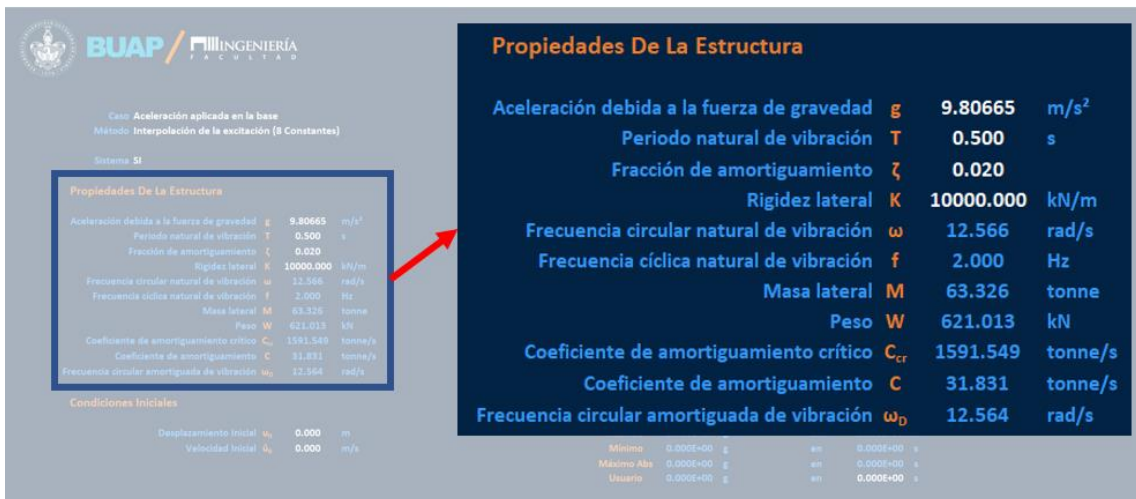


Figura 3.1.4. Propiedades de la estructura. (Autoría propia, 2020).

Posteriormente se introduce el registro de excitación para el cuál se desea conocer la respuesta dinámica.



Figura 3.1.5. Registro de Aceleraciones. (Autoría propia, 2020).

Finalmente se puede seleccionar el histograma de respuesta a visualizar.

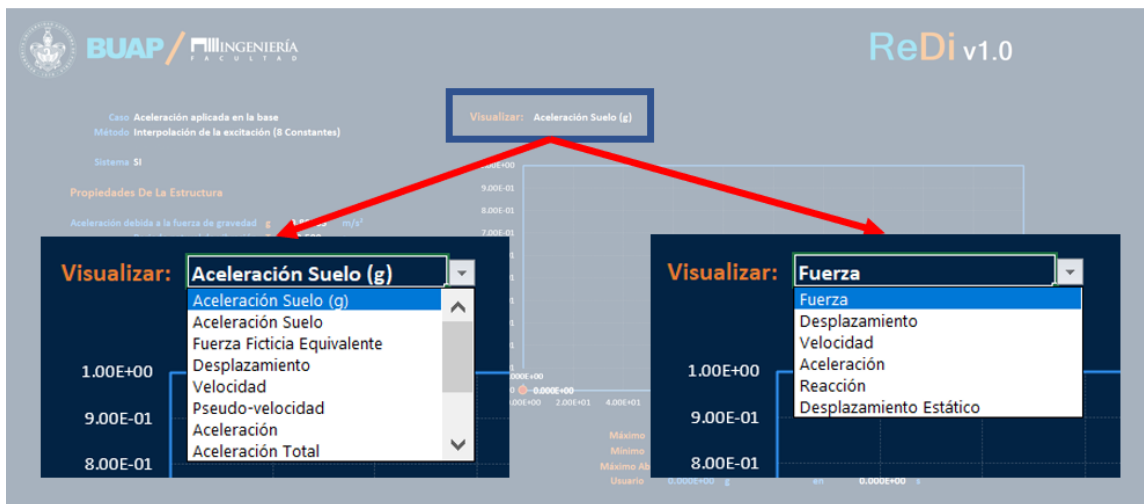


Figura 3.1.6. Respuesta dinámica. (Autoría propia, 2020).

3.2. Ejemplos de Cálculo

Los siguientes son ejemplos de cálculo de respuesta dinámica, en ellos se comparan las respuestas en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración entre los métodos numéricos de Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark con Aceleración Promedio Constante, Newmark con Aceleración Lineal y Wilson.

Ejemplo 1. Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad

Un sistema de un grado de libertad tiene las siguientes propiedades: $k = 400 \frac{kN}{m}$, $T_n = 1 \text{ s}$ ($\omega_n = 6.283 \frac{rad}{s}$) y $\zeta = 0.1$. Determine la respuesta $u(t)$ de este sistema durante los primeros dos segundos para la fuerza $p(t)$ definida por una fuerza de pulso sinusoidal de un ciclo $10 \text{ sen}(\pi t/0.4)$.

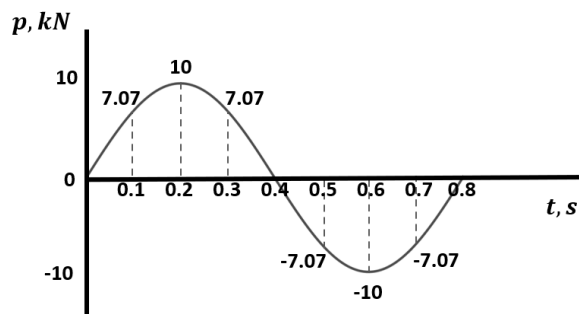


Figura 3.2.1. Fuerza de Pulso Sinusoidal. (Autoría propia, 2020).

Se ingresan todos los datos de entrada, la fuerza se toma por valores definidos a cada paso de tiempo $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.



Figura 3.2.2. Entrada de datos. (Autoría propia, 2020).

En la opción visualizar se selecciona la respuesta a mostrar, debajo de ella se muestran los valores máximos y mínimos para cada registro, con la opción de usuario se puede conocer la respuesta en el instante deseado.

En las figuras 3.2.3 a 3.2.7 se muestra la respuesta dinámica obtenida en términos de desplazamiento para cada uno de los métodos.



Figura 3.2.3. Desplazamiento por el Método de Interpolación de la Excitación. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.4. Desplazamiento por el Método de Diferencia Central. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.5. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Promedio Constante. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.6. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Lineal. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.7. Desplazamiento por el Método de Wilson. (Autoría propia, 2020).

En las Tablas 3.2.2. a 3.2.4. se muestran los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de la estructura para cada uno de los métodos numéricos.

Desplazamiento (m)						
	Tiempo (s)	Interpolación de la Excitación	Diferencia Central	Newmark Aceleración Promedio Constante	Newmark Aceleración Lineal	Wilson
Vibración Forzada	0.0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.1	1.11E-03	0.00E+00	1.50E-03	1.03E-03	9.56E-04
	0.2	7.45E-03	6.57E-03	7.46E-03	7.16E-03	6.66E-03
	0.3	1.85E-02	1.92E-02	1.75E-02	1.80E-02	1.69E-02
	0.4	2.72E-02	2.98E-02	2.56E-02	2.69E-02	2.57E-02
	0.5	2.51E-02	2.80E-02	2.42E-02	2.54E-02	2.52E-02
	0.6	8.45E-03	9.53E-03	9.52E-03	9.62E-03	1.16E-02
	0.7	-1.73E-02	-1.96E-02	-1.40E-02	-1.57E-02	-1.15E-02
Vibración Libre	0.8	-3.95E-02	-4.46E-02	-3.54E-02	-3.82E-02	-3.35E-02
	0.9	-4.59E-02	-5.01E-02	-4.39E-02	-4.60E-02	-4.32E-02
	1.0	-3.51E-02	-3.63E-02	-3.66E-02	-3.67E-02	-3.81E-02
	1.1	-1.30E-02	-1.07E-02	-1.76E-02	-1.57E-02	-2.14E-02
	1.2	1.12E-02	1.59E-02	5.28E-03	8.50E-03	3.47E-04
	1.3	2.85E-02	3.34E-02	2.39E-02	2.70E-02	1.96E-02
	1.4	3.36E-02	3.64E-02	3.24E-02	3.40E-02	3.05E-02
	1.5	2.59E-02	2.56E-02	2.90E-02	2.84E-02	3.05E-02
1.6	9.91E-03	6.50E-03	1.60E-02	1.34E-02	2.07E-02	

Tabla 3.2.2. Comparación de Desplazamiento entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

Desplazamiento (Continuación) (m)						
	Tiempo (s)	Interpolación de la Excitación	Diferencia Central	Newmark Aceleración Promedio Constante	Newmark Aceleración Lineal	Wilson
Vibración Libre	1.7	-7.79E-03	-1.27E-02	-9.23E-04	-4.59E-03	5.47E-03
	1.8	-2.06E-02	-2.50E-02	-1.57E-02	-1.90E-02	-9.87E-03
	1.9	-2.45E-02	-2.65E-02	-2.36E-02	-2.51E-02	-2.04E-02
	2.0	-1.91E-02	-1.80E-02	-2.26E-02	-2.18E-02	-2.33E-02

Tabla 3.2.2. Comparación de Desplazamiento entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

Velocidad (m/s)						
	Tiempo (s)	Interpolación de la Excitación	Diferencia Central	Newmark Aceleración Promedio Constante	Newmark Aceleración Lineal	Wilson
Vibración Forzada	0.0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.1	3.24E-02	3.28E-02	3.00E-02	3.09E-02	2.87E-02
	0.2	9.38E-02	9.60E-02	8.91E-02	9.13E-02	8.53E-02
	0.3	1.14E-01	1.16E-01	1.11E-01	1.13E-01	1.08E-01
	0.4	4.52E-02	4.42E-02	5.11E-02	4.91E-02	5.29E-02
	0.5	-9.49E-02	-1.01E-01	-8.02E-02	-8.68E-02	-6.98E-02
	0.6	-2.29E-01	-2.38E-01	-2.13E-01	-2.21E-01	-1.97E-01
	0.7	-2.64E-01	-2.71E-01	-2.58E-01	-2.63E-01	-2.46E-01
Vibración Libre	0.8	-1.55E-01	-1.52E-01	-1.69E-01	-1.64E-01	-1.71E-01
	0.9	2.74E-02	4.16E-02	-1.63E-03	1.15E-02	-2.14E-02
	1.0	1.79E-01	1.97E-01	1.48E-01	1.64E-01	1.18E-01
	1.1	2.48E-01	2.61E-01	2.31E-01	2.42E-01	2.05E-01
	1.2	2.20E-01	2.20E-01	2.27E-01	2.27E-01	2.16E-01
	1.3	1.17E-01	1.03E-01	1.46E-01	1.34E-01	1.58E-01
	1.4	-1.67E-02	-3.92E-02	2.40E-02	4.53E-03	5.55E-02
	1.5	-1.28E-01	-1.50E-01	-9.28E-02	-1.12E-01	-5.35E-02
	1.6	-1.81E-01	-1.92E-01	-1.65E-01	-1.76E-01	-1.33E-01
	1.7	-1.62E-01	-1.57E-01	-1.74E-01	-1.72E-01	-1.62E-01
	1.8	-8.73E-02	-6.87E-02	-1.22E-01	-1.08E-01	-1.36E-01
	1.9	9.79E-03	3.50E-02	-3.49E-02	-1.31E-02	-6.94E-02
2.0	9.19E-02	1.13E-01	5.51E-02	7.55E-02	1.20E-02	

Tabla 3.2.3. Comparación de Velocidad entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

Aceleración (m/s ²)						
	Tiempo (s)	Interpolación de la Excitación	Diferencia Central	Newmark Aceleración Promedio Constante	Newmark Aceleración Lineal	Wilson
Vibración Forzada	0.0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	0.1	6.13E-01	6.57E-01	6.01E-01	6.18E-01	5.73E-01
	0.2	5.75E-01	6.07E-01	5.81E-01	5.89E-01	5.58E-01
	0.3	-1.74E-01	-2.06E-01	-1.33E-01	-1.55E-01	-1.06E-01
	0.4	-1.13E+00	-1.23E+00	-1.08E+00	-1.12E+00	-9.93E-01
	0.5	-1.57E+00	-1.68E+00	-1.55E+00	-1.59E+00	-1.46E+00
	0.6	-1.03E+00	-1.06E+00	-1.10E+00	-1.09E+00	-1.07E+00
	0.7	3.19E-01	4.17E-01	1.80E-01	2.51E-01	8.40E-02
	0.8	1.76E+00	1.95E+00	1.61E+00	1.72E+00	1.42E+00
Vibración Libre	0.9	1.78E+00	1.92E+00	1.74E+00	1.80E+00	1.57E+00
	1.0	1.16E+00	1.18E+00	1.26E+00	1.24E+00	1.22E+00
	1.1	2.00E-01	9.27E-02	4.05E-01	3.16E-01	5.13E-01
	1.2	-7.20E-01	-9.05E-01	-4.93E-01	-6.20E-01	-2.77E-01
	1.3	-1.27E+00	-1.45E+00	-1.13E+00	-1.24E+00	-8.93E-01
	1.4	-1.30E+00	-1.39E+00	-1.31E+00	-1.35E+00	-1.16E+00
	1.5	-8.63E-01	-8.21E-01	-1.03E+00	-9.79E-01	-1.02E+00
	1.6	-1.64E-01	-1.57E-02	-4.26E-01	-3.07E-01	-5.77E-01
	1.7	5.11E-01	7.01E-01	2.55E-01	3.97E-01	3.07E-03
	1.8	9.23E-01	1.07E+00	7.75E-01	8.84E-01	5.19E-01
	1.9	9.55E-01	1.00E+00	9.76E-01	1.01E+00	8.13E-01
	2.0	6.40E-01	5.67E-01	8.23E-01	7.65E-01	8.16E-01

Tabla 3.2.4. Comparación de Aceleración entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

Ejemplo 2. Aceleración Aplicada en la Base de la Estructura

Determinar la respuesta dinámica de una estructura con periodo natural de vibración $T_n = 0.5 \text{ s}$, rigidez lateral $k = 20 \frac{\text{Kip}}{\text{in}}$ y una fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.02$. La cual será sometida a la aceleración del terreno de El Centro, California producto del sismo del Valle Imperial en 1940, este registro es tomado del libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras.

Como se explicó en el capítulo 2, cuando existe una aceleración del suelo, el principio del método es el mismo, solo se deberá agregar la aceleración $\ddot{u}_g(t)$ y al multiplicarse por la masa se transformará en una fuerza efectiva $p_{eff}(t)$, la cual se tomará como si fuera la fuerza aplicada en el grado de libertad.

Se ingresan todos los datos de entrada y el registro de aceleraciones al programa, a continuación, se muestra el histograma de aceleración normalizada.



Figura 3.2.8. Respuesta dinámica. (Autoría propia, 2020).

En la opción visualizar se selecciona la respuesta a mostrar, debajo de ella se muestran los valores máximos y mínimos para cada registro.

En las figuras 3.2.9 a 3.2.13 se muestra la respuesta dinámica obtenida en términos de desplazamiento para cada uno de los métodos.



Figura 3.2.9. Desplazamiento por el Método de Interpolación de la Excitación. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.10. Desplazamiento por el Método de Diferencia Central. (Autoría propia, 2020).

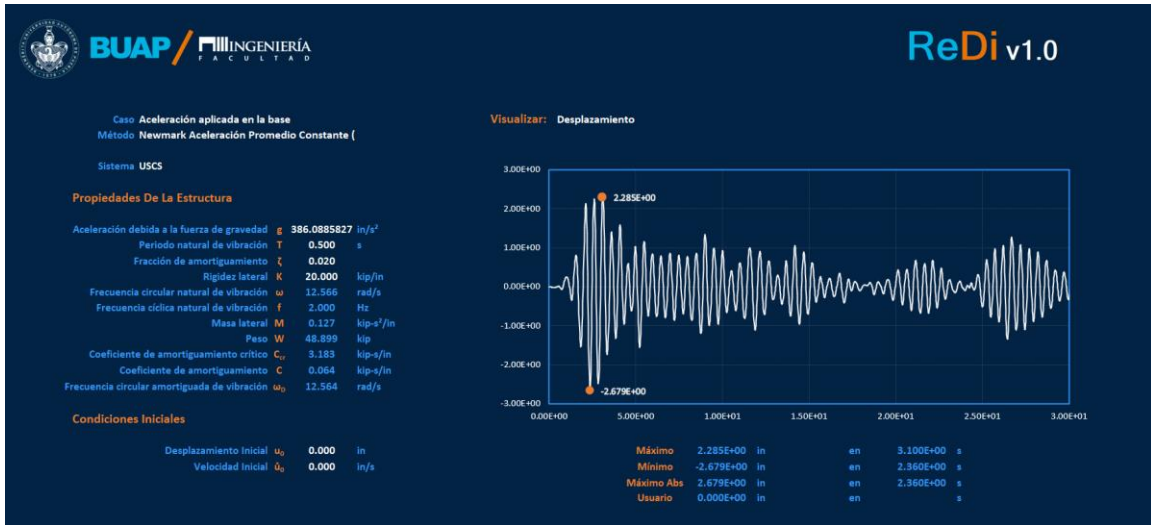


Figura 3.2.11. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Promedio Constante. (Autoría propia, 2020).

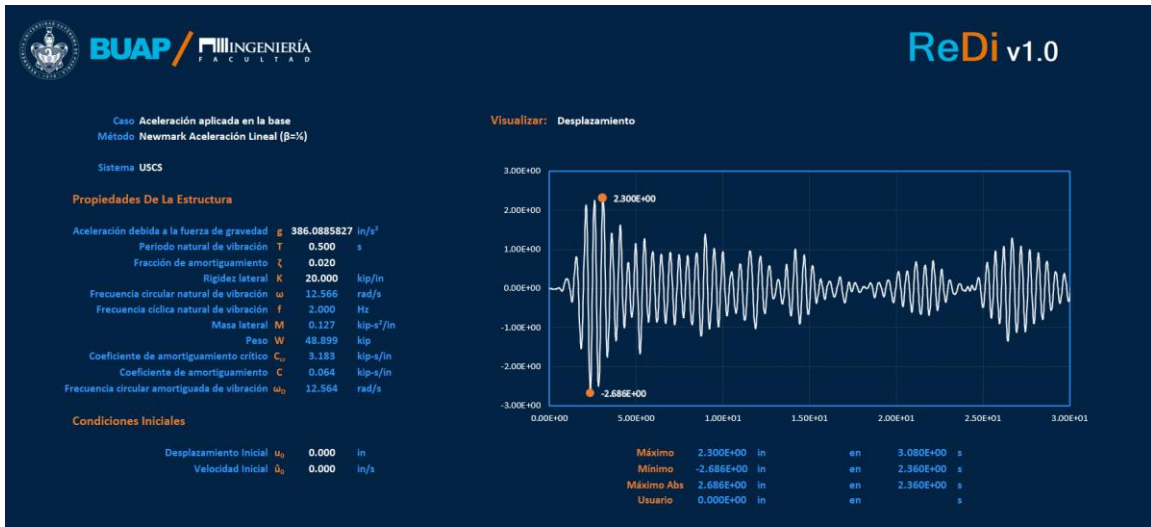


Figura 3.2.12. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Lineal. (Autoría propia, 2020).



Figura 3.2.13. Desplazamiento por el Método de Wilson. (Autoría propia, 2020).

A continuación, se muestra una tabla con los valores máximos y mínimos de desplazamiento, velocidad y aceleración para cada uno de los métodos.

	Desplazamiento (in)		Velocidad (in/s)		Aceleración (in/s ²)	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Interpolación de la Excitación	-2.67E+00	2.31E+00	-3.18E+01	3.22E+01	-4.09E+02	4.85E+02
Diferencia Central	-2.70E+00	2.34E+00	-3.20E+01	3.25E+01	-4.12E+02	4.88E+02
Newmark Aceleración Promedio Constante	-2.68E+00	2.29E+00	-3.19E+01	3.17E+01	-4.11E+02	4.86E+02
Newmark Aceleración Lineal	-2.69E+00	2.30E+00	-3.19E+01	3.19E+01	-4.11E+02	4.87E+02
Wilson	-2.70E+00	2.27E+00	-3.19E+01	3.11E+01	-4.10E+02	4.83E+02

Tabla 3.2.5. Comparación de Respuesta Dinámica entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

CAPÍTULO 4. VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Con el fin de dar validez a los resultados obtenidos por ReDi v1.0, en este capítulo se modelan ejercicios de diversos autores que se han resuelto con los métodos de Interpolación de la Excitación, Diferencia Central, Newmark y Wilson, una vez encontrada la respuesta dinámica con el programa ReDi v1.0, se comparan los resultados.

Se hacen dos validaciones al programa, la primera de ellas es a todos los métodos numéricos programados con el caso de Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad, y posteriormente se verifica que pueda ser utilizado también en el caso de Excitación en la Base.

4.1. Fuerza Aplicada en el Grado de Libertad

Se modela el siguiente ejercicio de vibración libre, presentado en el libro Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras.

Considere el siguiente problema de vibración libre: $m\ddot{u} + ku = 0$, $\dot{u}(0) = 0$ y $u(0) = 1$, cuya solución teórica es $u(t) = \cos\omega_n t$.

La solución de cada método se compara con la solución presentada en el libro de Chopra.

Para la solución de este problema se comienza por ingresar todos los datos de entrada, se tomarán además valores de $T_n = 1s$ y $\Delta t = 0.1s$, esto con la finalidad de tener una relación $\Delta t/T_n = 0.1$.



Figura 4.1.1. Condiciones de Vibración Libre con $\Delta t/T_n = 0.1$. (Autoría propia, 2020).

A continuación, se presentan las gráficas de la respuesta de desplazamiento por cada método.

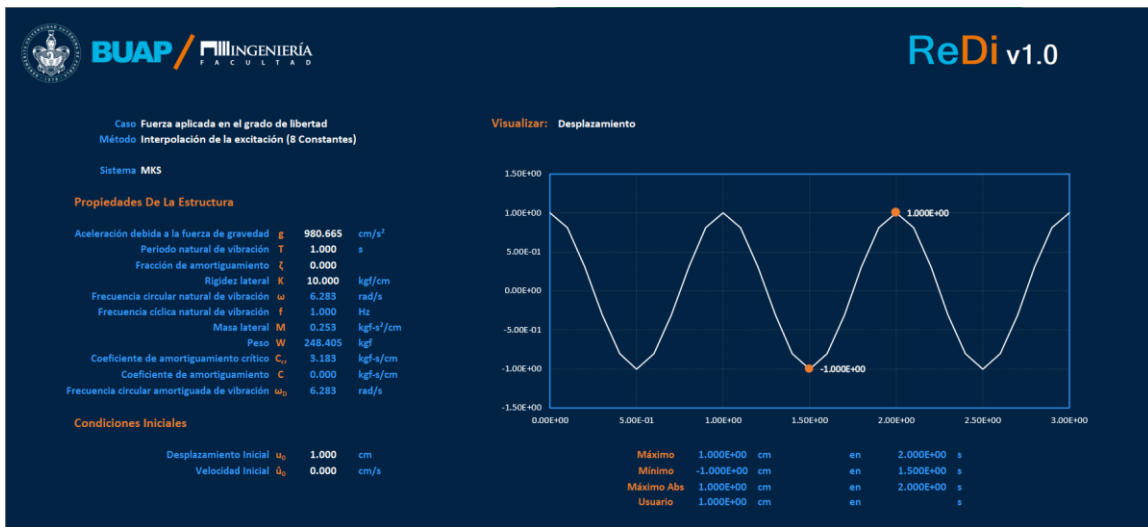


Figura 4.1.2. Desplazamiento por el Método de Interpolación de la Excitación. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.3. Desplazamiento por el Método de Diferencia Central. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.4. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Promedio Constante. (Autoría propia, 2020).

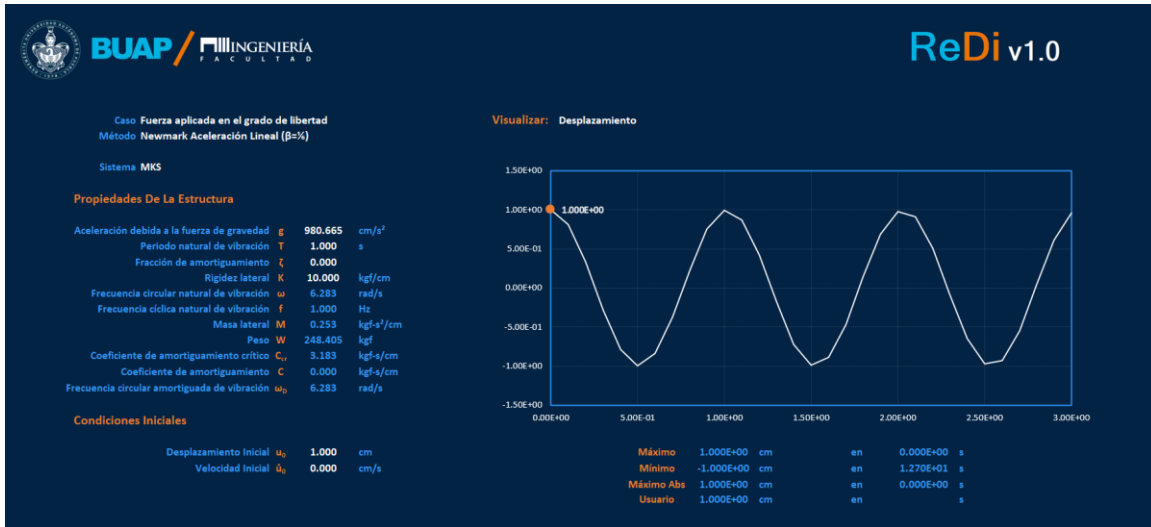


Figura 4.1.5. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Lineal. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.6. Desplazamiento por el Método de Wilson. (Autoría propia, 2020).

Las soluciones anteriores se han exportado a una sola gráfica y posteriormente se ha superpuesto la solución mostrada en el libro de Chopra.

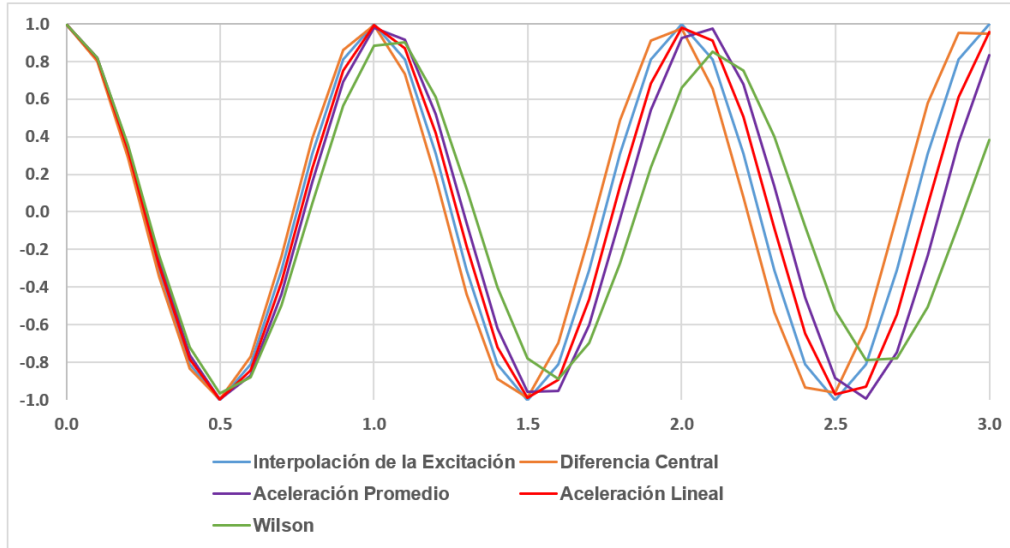


Figura 4.1.7. Respuestas a Vibración Libre en términos de desplazamiento con el programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

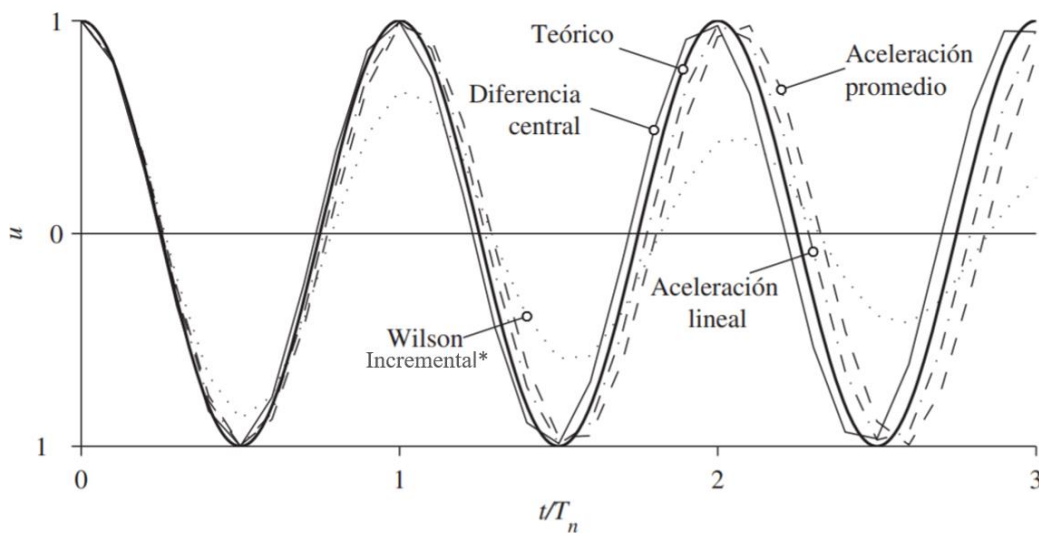


Figura 4.1.8. Solución de Vibración Libre con $\Delta t/T_n = 0.1$ mediante cuatro métodos numéricos* y solución exacta. (Chopra, 2014).

* Soroushian, A., et al., 2011. Two versions of the Wilson- θ Time Integration Method.

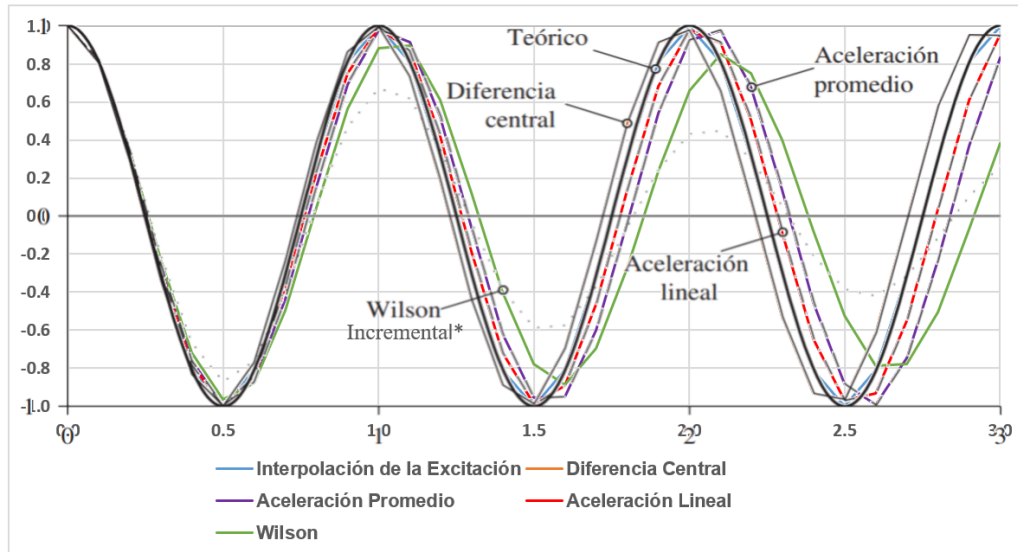


Figura 4.1.9. Comparativa de Respuestas a Vibración Libre entre Chopra y programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

Aunque este problema no fue solucionado por el Método de Interpolación de la Excitación en el libro de Chopra, se puede observar que es el método más aproximado a la solución teórica.

Para los Métodos de Diferencia Central, Newmark con Aceleración Promedio Constante y Newmark con Aceleración Lineal se observa una coincidencia exacta entre la solución mostrada por Chopra y la solución en el programa ReDi v1.0.

En el caso del Método de Wilson hay una clara diferencia entre ambas soluciones, cabe mencionar que en el libro de Chopra no se muestra como fue calculada ni se presenta el desarrollo del método. De acuerdo con el artículo “Two Versions of the Wilson- θ Time Integration Method” de Soroushian, A., et al., el método utilizado por Chopra está basado en una formulación incremental del método, es decir, no corresponde al método original de Wilson y no debería ser presentado como tal.

Como aún no queda evidenciado que la solución obtenida con el programa ReDi v1.0 para el Método de Wilson es correcta, la validación del programa se realiza comparando la solución de un caso de vibración libre presentada por K. J. Bathe y E. L. Wilson en el artículo “Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods”.

Se considera el problema de vibración libre: $m\ddot{u} + ku = 0$, $\dot{u}(0) = 0$ y $u(0) = 1$, cuya solución teórica es $u(t) = \cos\omega_n t$.

A continuación, se muestra la solución para $\Delta t/T_n = 0.1$ y $\Delta t/T_n = 0.01$.

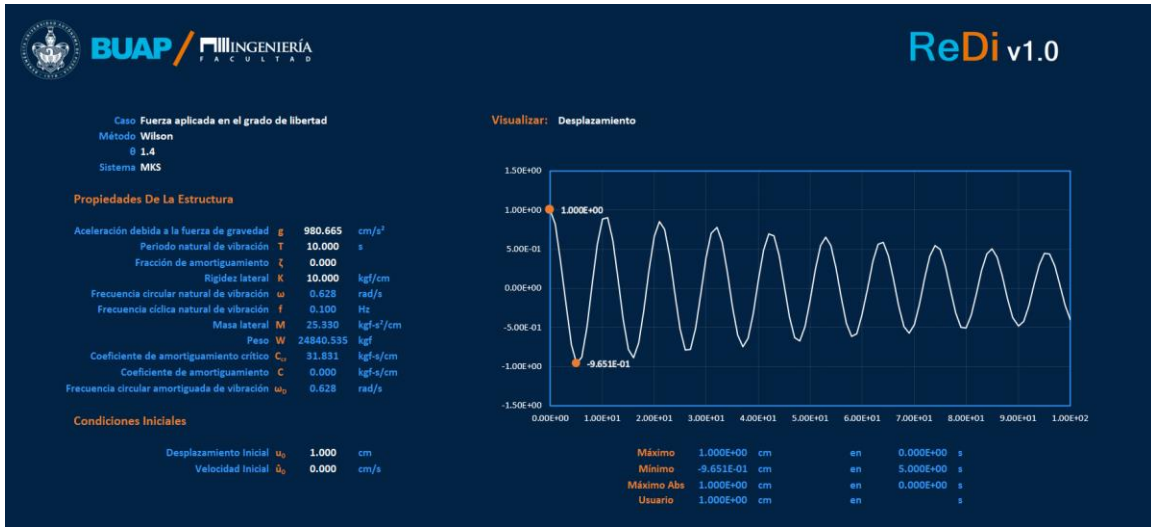


Figura 4.1.10. Desplazamiento para vibración libre con $\Delta t/T_n = 0.1$ mediante el método de Wilson. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.11. Desplazamiento para vibración libre con $\Delta t/T_n = 0.01$ mediante el método de Wilson. (Autoría propia, 2020).

Las soluciones anteriores se han exportado a una sola gráfica y posteriormente se ha superpuesto la solución mostrada en el artículo de Bathe y Wilson.

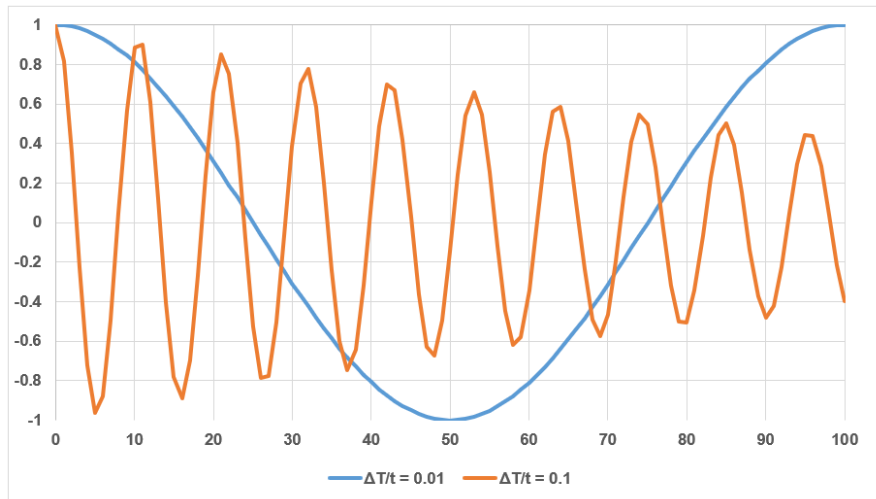


Figura 4.1.12. Respuestas a Vibración Libre en términos de desplazamiento con programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

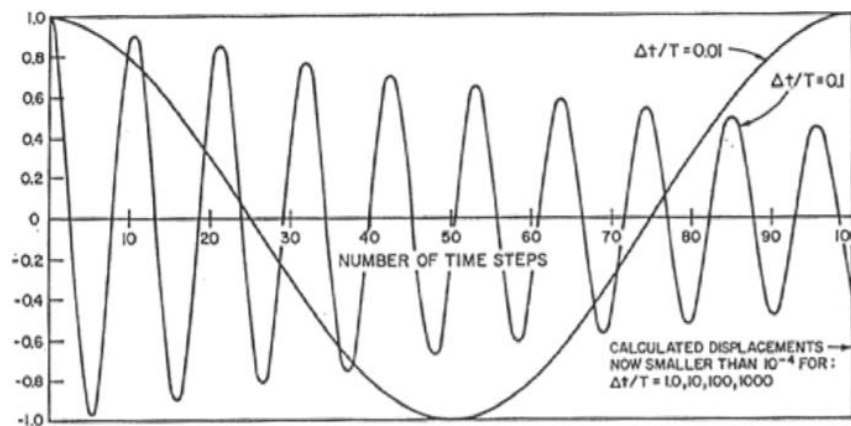


Figura 4.1.13. Solución de Vibración Libre con $\Delta t/T_n = 0.1$ y $\Delta t/T_n = 0.01$ mediante el método de Wilson. (Bathe, K. J. & Wilson, E. L., 1973).

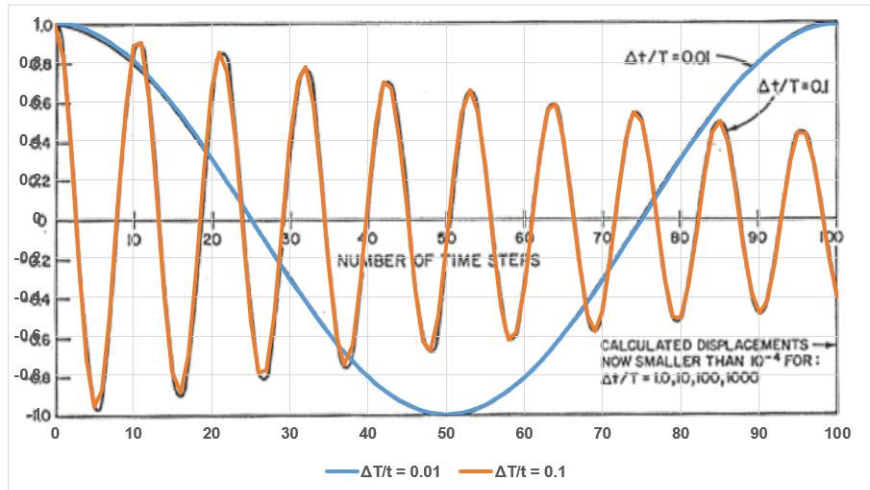


Figura 4.1.14. Comparativa de Respuestas a Vibración Libre entre Bathe, K. J. & Wilson, E. L. y programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

Es evidente la coincidencia entre la solución mostrada por Bathe y Wilson y la solución en el programa ReDi v1.0 para vibración libre, con lo que queda validada la correcta programación del método.

Se realiza además una última validación para el Método de Wilson con el siguiente ejemplo presentado en el libro Humar, J. L., 2002. Dynamics of structures.

Un sistema de un grado de libertad tiene las siguientes propiedades: $m = 2.533 \text{ kip} \frac{s^2}{in}$, $k = 100 \frac{kip}{in}$, $T_n = 1 \text{ s}$ ($\omega_n = 6.283 \frac{rad}{s}$) y $\zeta = 0.1$. Determine la respuesta $u(t)$ durante el primer segundo de este sistema para la fuerza $p(t)$ definida por una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo $100 \text{ sen}(\frac{\pi t}{0.6})$. Considere un valor de $\theta = 1.5$

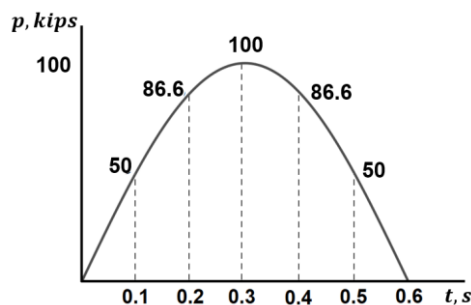


Figura 4.1.15. Fuerza de Pulso Sinusoidal. (Autoría propia, 2020).

Para el cual Humar presenta la siguiente solución en una tabla de valores.

Time	u_n	\dot{u}_n	\ddot{u}_n	$p_{n+\theta}$	$u_{n+\theta}$ (Eq. a)	$\ddot{u}_{n+\theta}$ (Eq. b)	\ddot{u}_{n+1} (Eq. c)	\dot{u}_{n+1} (Eq. d)	u_{n+1} (Eq. e)	u_n (theoretical)
0.0	0.0000	0.0000	0.00	75.0	0.0894	23.837	15.89	0.7946	0.0265	0.0000
0.1	0.0265	0.7946	15.89	104.9	0.3508	22.923	20.58	2.6188	0.1932	0.0323
0.2	0.1932	2.6181	20.58	106.7	0.7634	6.197	10.99	4.1966	0.5419	0.2254
0.3	0.5419	4.1966	10.99	79.9	1.1806	-19.507	-9.34	4.2791	0.9827	0.6204
0.4	0.9827	4.2791	-9.34	31.7	1.3934	-42.927	-31.73	2.2254	1.3265	1.0961
0.5	1.3265	2.2254	-31.73	-25.0	1.2237	-52.993	-45.91	-1.6564	1.3668	1.4251
0.6	1.3668	-1.6564	-45.91	0.0	0.7011	-19.467	-28.28	-5.3658	1.0010	1.3772
0.7	1.0010	-5.3658	-28.28	0.0	0.0143	8.039	-4.07	-6.9832	0.3634	0.8683
0.8	0.3634	-6.9832	-4.07	0.0	-0.6018	30.041	18.67	-6.2529	-0.3174	0.1105
0.9	-0.3174	-6.2529	18.67	0.0	-0.9640	40.323	33.11	-3.6641	-0.8252	-0.5974
1.0	-0.8252	-3.6641	33.11							-1.0073

Figura 4.1.16. Solución por el Método de Wilson con $\theta = 1.5$. (Humar, 2002).

Para la solución en el programa ReDi v1.0 se ingresan todos los datos de entrada, la fuerza se toma por valores definidos a cada paso de tiempo $\Delta t = 0.1s$.



Figura 4.1.17. Entrada de datos. (Autoría propia, 2020).

En las figuras 4.1.18. a 4.1.20. se muestra la respuesta dinámica obtenida en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración para el Método de Wilson.



Figura 4.1.18. Desplazamiento por el Método de Wilson con $\theta = 1.5$. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.19. Velocidad por el Método de Wilson con $\theta = 1.5$. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.1.20. Aceleración por el Método de Wilson con $\theta = 1.5$. (Autoría propia, 2020).

Para verificar la coincidencia del método entre el programa ReDi v1.0 y el ejercicio resuelto por Humar, se muestra en la Tabla 4.1.1. los valores de la respuesta dinámica para desplazamiento, velocidad y aceleración.

Tiempo (s)	Desplazamiento (in)		Velocidad (in/s)		Aceleración (in/s ²)	
	Humar	ReDi v1.0	Humar	ReDi v1.0	Humar	ReDi v1.0
0.1	2.65E-02	2.65E-02	7.95E-01	7.94E-01	1.59E+01	1.59E+01
0.2	1.93E-01	1.93E-01	2.62E+00	2.62E+00	2.06E+01	2.06E+01
0.3	5.42E-01	5.42E-01	4.20E+00	4.19E+00	1.10E+01	1.10E+01
0.4	9.83E-01	9.82E-01	4.28E+00	4.28E+00	-9.34E+00	-9.35E+00
0.5	1.33E+00	1.33E+00	2.23E+00	2.22E+00	-3.17E+01	-3.17E+01
0.6	1.37E+00	1.37E+00	-1.66E+00	-1.66E+00	-4.59E+01	-4.59E+01
0.7	1.00E+00	1.00E+00	-5.37E+00	-5.36E+00	-2.83E+01	-2.82E+01
0.8	3.63E-01	3.63E-01	-6.98E+00	-6.98E+00	-4.07E+00	-4.03E+00
0.9	-3.17E-01	-3.17E-01	-6.25E+00	-6.24E+00	1.87E+01	1.87E+01
1.0	-8.25E-01	-8.24E-01	-3.66E+00	-3.66E+00	3.31E+01	3.31E+01

Tabla 4.1.1. Comparación de Respuesta Dinámica Humar vs. ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

Se puede observar una coincidencia prácticamente exacta, con una pequeña variación en cifras decimales, la cual se atribuye a que el ejercicio resuelto en el libro de Humar utiliza redondeos en expresiones mostradas que son utilizadas como constantes para facilitar su solución.

El artículo de Soroushian, A., et al., la comparación de la respuesta al problema de vibración libre con el artículo de Bathe, K. J. & Wilson, E. L., y la comparación de la respuesta con el problema de fuerza pulso sinusoidal de medio ciclo de Humar, J. L. se consideran herramientas suficientes para validar el programa ReDi v1.0 en su solución con el Método de Wilson.

4.2. Aceleración Aplicada en la Base de la Estructura

Una vez que se han validado los resultados de respuesta dinámica por los cinco métodos para el caso de Fuerza Aplicada, solo basta verificar que, al ingresar un registro de Aceleración del Suelo Normalizado, este sea correctamente transformado a una Fuerza Ficticia Equivalente $p_{eff}(t)$, por lo que basta realizarlo con un método.

Para esta validación se obtiene la respuesta de desplazamiento de tres sistemas diferentes debido a la aceleración del terreno de El Centro, California producto del sismo del Valle Imperial en 1940, con periodos de $T_n = 0.5s$, $T_n = 1.0s$, y $T_n = 2.0s$ y un amortiguamiento $\zeta = 0.02$ para todos los casos, posteriormente se fija el periodo en $T_n = 2.0s$ y se varía el amortiguamiento en $\zeta = 0.00$ y $\zeta = 0.05$; estos resultados son presentados en el libro de Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras.

Se realiza la validación utilizando el Método de Interpolación de la Excitación, ya que es el utilizado en el libro.

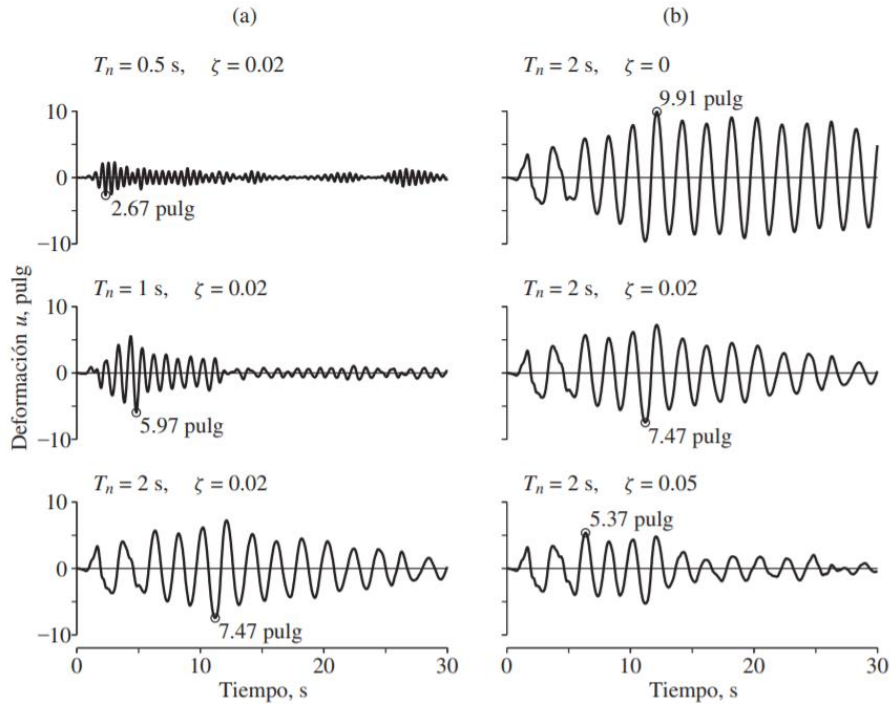


Figura 4.2.1. Respuesta de Deformación para el sismo de El Centro. (Chopra, 2014).

Los datos de entrada son los mismos que los utilizados en el Ejemplo 2 de este capítulo, variando en esta ocasión el periodo.

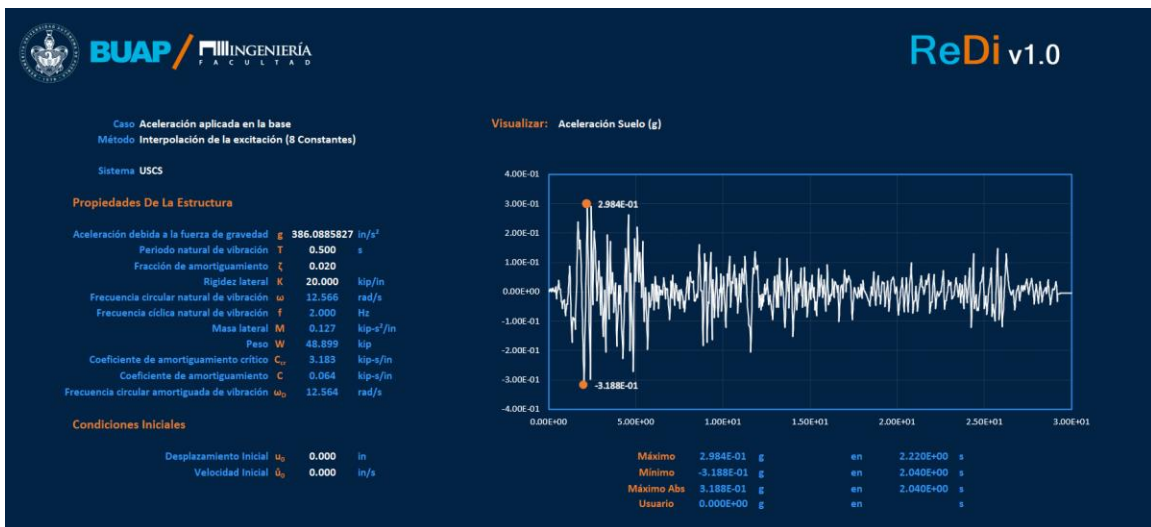


Figura 4.2.2. Aceleración del Sismo de El Centro. (Autoría propia, 2020).

Al visualizar los histogramas de desplazamiento, se observa una coincidencia en los resultados, tanto en el histograma como en los desplazamientos máximos.

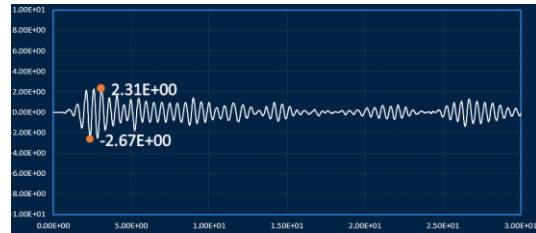


Figura 4.2.3. Comparación de Desplazamiento con $T_n = 0.5s$ y $\zeta = 0.02$. (Autoría propia, 2020).

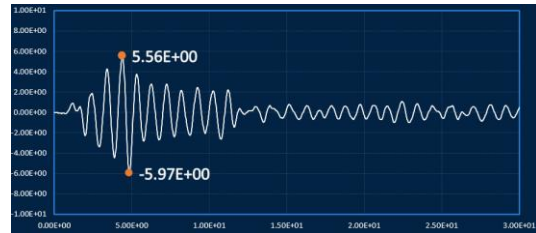
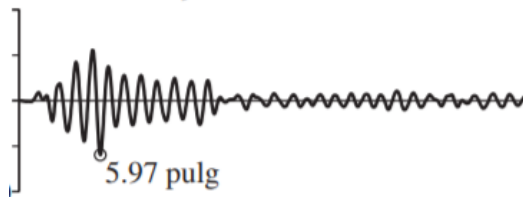


Figura 4.2.4. Comparación de Desplazamiento con $T_n = 1.0s$ y $\zeta = 0.02$. (Autoría propia, 2020).

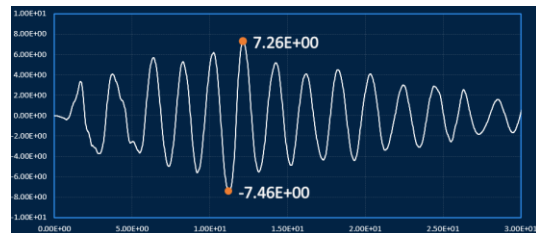
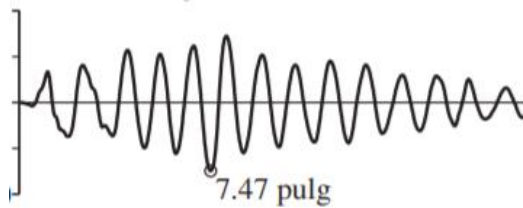


Figura 4.2.5. Comparación de Desplazamiento con $T_n = 2.0s$ y $\zeta = 0.02$. (Autoría propia, 2020).

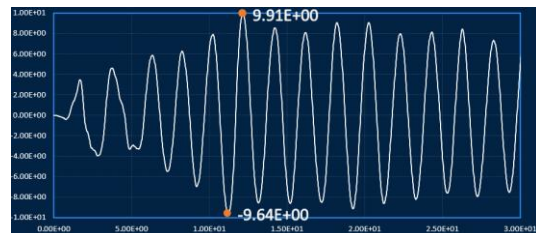
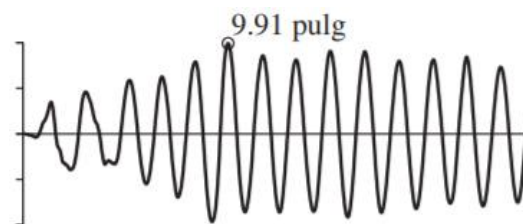


Figura 4.2.6. Comparación de Desplazamiento con $T_n = 2.0s$ y $\zeta = 0.00$. (Autoría propia, 2020).

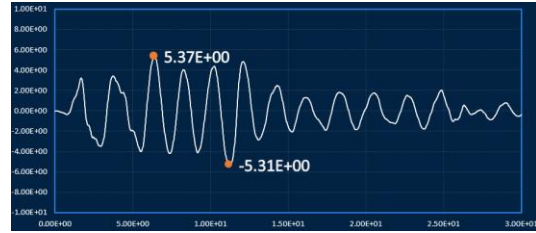
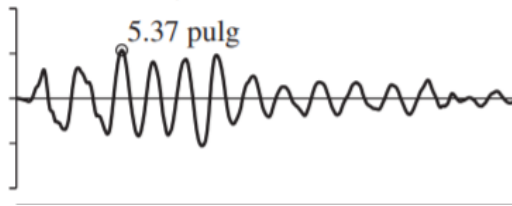


Figura 4.2.7. Comparación de Desplazamiento con $T_n = 2.0s$ y $\zeta = 0.05$. (Autoría propia, 2020).

Periodo, Amortiguamiento	Desplazamiento (in)	
	Chopra	ReDi v1.0
$T_n = 0.5s$, $\zeta = 0.02$	2.67	2.67
$T_n = 1.0s$, $\zeta = 0.02$	5.97	5.97
$T_n = 2.0s$, $\zeta = 0.02$	7.47	7.46
$T_n = 2.0s$, $\zeta = 0.00$	9.91	9.91
$T_n = 2.0s$, $\zeta = 0.05$	5.37	5.37

Tabla 4.2.1. Comparación de Desplazamiento Chopra vs. ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

Es evidente la coincidencia entre el libro de Chopra y el programa ReDi v1.0, con lo cual queda demostrado el correcto funcionamiento y la validez de la respuesta dinámica para el caso de Aceleración Aplicada en la Base de la Estructura.

4.3. Sistema Sobreamortiguado

Por último, y aunque pueda quedar fuera de las estructuras de interés de la ingeniería civil, se realiza una validación de los métodos Diferencia Central, Newmark y Wilson para el caso de un sistema con porcentaje de amortiguamiento $\zeta > 1$, cabe mencionar que debido a que en el método de Interpolación de la Excitación se han utilizado expresiones que son consecuencia de resolver la ecuación de movimiento para un caso subamortiguado no es posible resolver estos sistemas sin tener que reescribir las ocho constantes ahora para un caso con amortiguamiento mayor al crítico.

Para su validación, se modela el siguiente ejercicio del libro Zill, D. G., 2009. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.

Considere el siguiente problema de vibración libre: $\ddot{u} + 5\dot{u} + 4u = 0$, $\dot{u}(0) = 1$ y $u(0) = 1$, cuya solución teórica que presenta el autor es $u(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$.

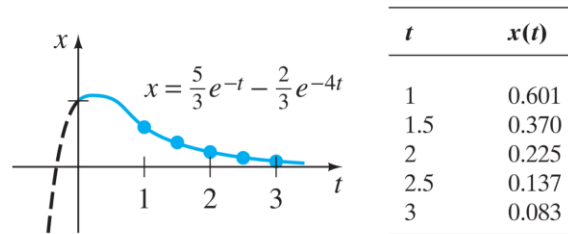


Figura 4.3.1. Solución teórica del ejercicio. (Zill, 2009).

Para la solución de este problema se comienza por ingresar todos los datos de entrada, de la ecuación dada se identifican valores de $m = 1$, $c = 5$, y $k = 4$.

Dado que los datos de entrada en el programa ReDi v1.0 son periodo, rigidez y fracción de amortiguamiento, se identifican valores de $T_n = \pi s$ y $\zeta = 1.25$. Se ingresa intervalos $\Delta t = 0.05s$, esto con la finalidad de tener una comparación más precisa con la solución exacta presentada por el autor.



Figura 4.3.2. Entrada de datos ejercicio con sobre amortiguamiento. (Autoría propia, 2020).

A continuación, se presentan las gráficas de la respuesta de desplazamiento por cada método.



Figura 4.3.3. Desplazamiento por el Método de Diferencia Central. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.3.4. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Promedio Constante. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.3.5. Desplazamiento por el Método de Newmark Aceleración Lineal. (Autoría propia, 2020).



Figura 4.3.6. Desplazamiento por el Método de Wilson. (Autoría propia, 2020).

Las soluciones anteriores se han exportado a una sola gráfica y posteriormente se ha superpuesto la solución mostrada en el libro de Zill.

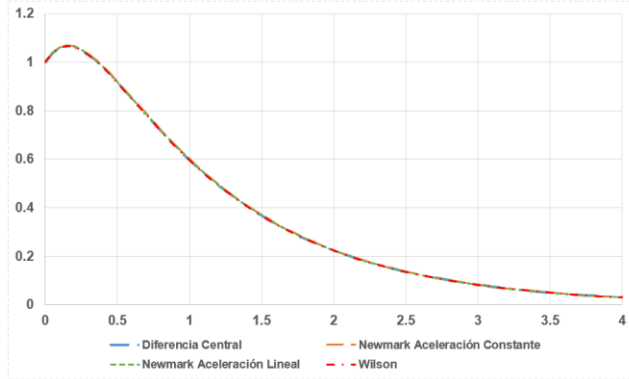


Figura 4.3.7. Respuestas en términos de desplazamiento con el programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

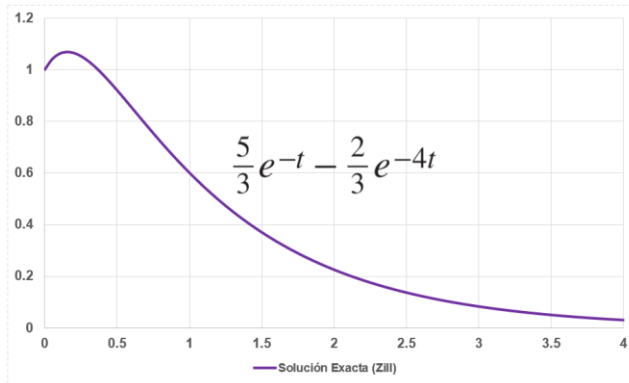


Figura 4.3.8. Solución exacta del modelo (Solución de Zill). (Autoría propia, 2020).

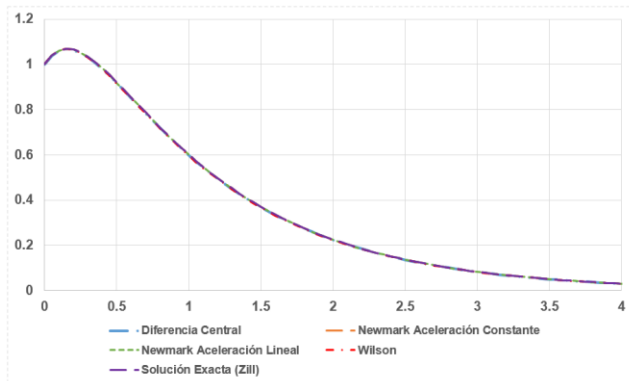


Figura 4.3.9. Comparativa de Respuestas al ejercicio entre solución exacta de Zill y programa ReDi v1.0. (Autoría propia, 2020).

Para los Métodos de Diferencia Central, Newmark con Aceleración Promedio Constante, Newmark con Aceleración Lineal y Wilson se observa una coincidencia entre la respuesta de cada uno de ellos y la solución exacta obtenida de forma analítica por Zill.

Además, en la tabla se muestra a continuación una comparación de la respuesta dinámica en términos de desplazamiento para los primeros tres segundos.

	Desplazamiento					
	0.5s	1.0s	1.5s	2.0s	2.5s	3.0s
Solución Exacta (Zill)	9.21E-01	6.01E-01	3.70E-01	2.25E-01	1.37E-01	8.30E-02
Diferencia Central	9.17E-01	5.97E-01	3.68E-01	2.24E-01	1.36E-01	8.25E-02
Newmark Aceleración Promedio Constante	9.21E-01	6.01E-01	3.70E-01	2.25E-01	1.37E-01	8.29E-02
Newmark Aceleración Lineal	9.20E-01	6.00E-01	3.69E-01	2.25E-01	1.36E-01	8.28E-02
Wilson	9.16E-01	5.96E-01	3.67E-01	2.23E-01	1.35E-01	8.21E-02

Tabla 4.3.1. Comparación de Desplazamiento entre Métodos. (Autoría propia, 2020).

Es evidente la coincidencia entre la solución analítica exacta mostrada por Zill y el programa ReDi v1.0, recordando que la precisión de la respuesta será mayor con un intervalo cada vez más pequeño.

Con esto queda demostrado el correcto funcionamiento y la validez de la respuesta dinámica para el caso de una estructura sobreamortiguada utilizando los métodos de Diferencia Central, Newmark con Aceleración Promedio Constante, Newmark con Aceleración Lineal y Wilson.

CONCLUSIONES

De acuerdo con las validaciones realizadas se observa que ReDi v1.0 proporciona resultados correctos y por lo tanto será una herramienta confiable para la enseñanza y aprendizaje de la dinámica estructural.

En este documento se presentan las demostraciones de cada método numérico, por lo que se cuenta con una buena referencia bibliográfica para su estudio.

Con la validación del Método de Wilson se hizo evidente la diferencia entre dos formulaciones distintas para este método, y se demostró que este programa utiliza la formulación original desarrollada por el autor.

Los métodos de Diferencia Central, Newmark y Wilson proporcionan una solución adecuada para cualquier nivel de amortiguamiento.

El método basado en la Interpolación de la Excitación únicamente se programó con las ocho constantes correspondientes al caso subamortiguado ($\zeta < 1$).

Todas las estructuras civiles corresponden al caso subamortiguado ($\zeta < 1$) y por lo tanto todos los métodos numéricos presentados en ReDi v1.0 pueden ser empleados.

Con ReDi v1.0 se pueden hallar respuestas muy cercanas a las soluciones exactas debido a que el usuario puede elegir cualquier intervalo de tiempo corto (por ejemplo 0.001).

Cuando se emplean intervalos de tiempo Δt muy cortos las respuestas de todos los métodos numéricos programados convergen entre sí.

Se recomienda conocer los límites de estabilidad para los métodos de Diferencia Central, Newmark con Aceleración Lineal y Wilson; o bien utilizar métodos incondicionalmente estables.

Para el desarrollo de Espectros de Respuesta Elásticos se recomienda emplear un método numérico incondicionalmente estable.

BIBLIOGRAFÍA

Bathe, K. J. & Wilson, E.L., 1973. Stability and accuracy analysis of direct integration methods.

Bazan, E. & Meli, R., 1983. Manual de diseño sísmico de edificios, de acuerdo con el reglamento de construcciones para el Distrito Federal.

Caicedo, A., Montes, J. & Ochoa-Angrino, S., 2013. Aprender de y con la tecnología: algunos resultados de investigación sobre la integración de las TIC en la educación superior.

Cassano, A. M., 2009. Análisis de estructuras bajo acciones dinámicas.

Castillo, M., 2018. Apuntes del curso dinámica estructural Maestría en Estructuras

Cataldi, Z., 2006. El ciclo de vida y la matriz de actividades como base para el diseño y el desarrollo metodológico de software educativo.

Chopra, A. K., 2014. Dinámica de estructuras.

Clough, R. & Penzien, J., 1995. Dinámica de las estructuras.

Cruz, C., 2015. Confiabilidad de la fracción del amortiguamiento crítico inferida a partir de registros sísmicos en edificios.

Espinosa, E. R., 2012. Métodos numéricos.

García, L. E., 1998. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico.

Hinojoza, O., 2009. Software para la enseñanza de la dinámica estructural.

Humar, J. L., 2002. Dynamics of structures.

Laureano, A. L., Terán, A. & De Artiaga, F., 2003. Un enfoque didáctico-cognitivo del análisis de los conceptos de los sistemas de un grado de libertad.

Mendoza, M., 2001. Metodología para el desarrollo de software educativo multimedia.

Michavila, F. & Gavete, L., 1985. Programación y cálculo numérico.

- Morales, C., 1998. Evaluación de software educativo.
- Muria, D. & González, R., 1995. Propiedades dinámicas de edificios de la Ciudad de México.
- Paz, M., 1992. Dinámica estructural teoría y cálculo. Reverté.
- Purcell, 2012. Cálculo.
- Quintana, P. & Villalobos, E., 2005. Métodos numéricos con aplicaciones en Excel. Reverté.
- Reyes, L. E., 1998. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico.
- Regader, B., 2015. La teoría del aprendizaje de Jean Piaget. Psicología y Mente.
- Schiavo, E., 2007. Investigación científica y tecnológica en el campo de las TIC: ¿conocimientos técnicos, contextuales o transversales?
- Soroushian, A., Farjoodi, J., Bargi, K., Rajabi, M., Saaed, A., Arghavani, M. & Sharifpour, M. M., 2011. Two versions of the Wilson- θ Time Integration Method.
- Trejo, F., 2007. Análisis comparativo de métodos numéricos en integración directa para evaluar la respuesta dinámica de las estructuras.
- Valencia de Oro, A. L., Ramírez, J. M., Gómez, D. & Peter, T., 2010. Aplicación interactiva para la educación en dinámica estructural.
- Wilson, E. L., 2004. Análisis estático y dinámico de estructuras.
- Zill, D. G., 2009. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado.

ANEXOS

Límites de Estabilidad de los Métodos Numéricos

	Límite de Estabilidad	
Interpolación de la Excitación	Incondicionalmente Estable	
Diferencia Central	$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$	
Newmark Aceleración Promedio Constante	Incondicionalmente Estable	
Newmark Aceleración Lineal	$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551$	
Wilson	Si $\theta = 1$	$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551$
	Si $\theta > 1.37$	Incondicionalmente Estable

Tabla A1. Límites de Estabilidad. (Autoría propia, 2020).