BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL PAPEL QUE JUEGAN LOS CONDUCTORES DE LOS IDEALES FRACCIONALES EN LA TEORÍA DE LOS ANILLOS DE BURNSIDE Y LAS FUNCIONES ZETA.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CRISTHIAN VÁZQUEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID VILLA HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUEBLA.

Índice general

Introducción

A finales del siglo XIX, W. Burnside introdujo las ideas de lo que actualmente se conoce como el anillo de Burnside, pero fue Solomon en 1967 en su artículo "The Burnside algebra of a finite group" quien le da la estructura algebraica de anillo.

En 1977, L. Solomon [15] introdujo una función Zeta para un orden; la cual requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, desde entonces C.J. Bushnell e I. Reiner han desarrollado aún más esta función y algunas de sus generalizaciones.

En 2009, D. Villa Hernández [7] obtuvo la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo p y p^2.

En 2016, J. M. Ramírez Contreras y D. Villa Hernández [13] obtuvieron la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo p^3.

En 2020, C. Vázquez Rosas y D. Villa Hernández [6] determinaron de forma explícita las $(n+1)!$ clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito del anillo de Burnside $B_p(C_{p^n})$, que se desprenden de su estrucutra de producto fibrado de la clase de isomorfismo del ideal fraccional $\mathbb{Z}_p^n$ del anillo $B_p(C_{p^{n-1}})$.

De acuerdo con la definición dada por Solomon para la función Zeta de un orden, es necesario conocer todos sus ideales de índice finito [15], lo cual puede ser complicado. En este sentido C. J. Bushnell y I. Reiner emplearon un método que depende solo del número finito de clases de isomorfismo de los ideales de índice finito [1]. Sin embargo, para el estudio del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^n, donde p es un entero primo, obtuvimos los siguiente:

Para $B_p(C_p)$ existen 2 clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito. [8]

Para $B_p(C_{p^2})$ existen 9 clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito.[8]

Para $B_p(C_{p^3})$ existen $82+7p+5(p-1)+3(p-2)$ clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito. [14]

Los dos primeros casos muestra que esta es una mejor alternativa al método usado por Solomon, sin embargo, el tercer caso nos muestra que este segundo método pronto se vuelve complicado ya que muestra un comportamiento exponencial con respecto al número de las clases de isomorfismo, además, de que aparece el parámetro p.

De acuerdo a los dos métodos anteriores, en este trabajo de tesis empleamos un tercer método que solo depende de los conductores, para lo cual sabemos que son $2, 3$ y 4 en los tres casos anteriores, respectivamente. En general, conjeturamos que existen exactamente $n + 1$ conductores para $B_p(C_{p^n})$.

La contribución principal de este trabajo será trabajar dicha conjetura y adaptarla a la teoría de funciones L.

Capítulo 1

Módulos, Pullbacks y Producto Tensorial.

Módulos, Pullbacks y Producto Tensorial.

A lo largo de este primer capítulo daremos los preliminares necesarios acerca de la estructura del anillo de Burnside y una caracterización que ha sido utilizada en trabajos anteriores para las clases de isomorfismo que se obtienen de su diagrama pullback.

Observación 1.1. En esta sección Δ denotará un anillo no necesariamente conmutativo con unidad. Todos los Δ-módulos son izquierdos a menos que se indique lo contrario. Dados dos Δ-módulos L y M, denotamos por $Hom_{\Delta}(L, M)$ al grupo aditivo que consiste de todos los Δ-homomorfismos de L en M. Para cada $\varphi \in Hom_{\Delta}(L, M)$, denotaremos con $Ker(\varphi)$ al núcleo de φ, con $Im(\varphi)$ la imagen de φ y $Cok(\varphi)$ el cokernel de φ, i.e,

$$Cok(\varphi) = \frac{M}{\varphi(L)}.$$

Definición 1.1. Una sucesión de Δ-módulos y Δ-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \to \cdots \tag{1.1}$$

es exacta si $Kerf_i = Imf_{i-1}$, para cada i.

Este tipo de sucesiones tambien suele llamarse Δ-exacta en X_i para cada i.

Definición 1.2. Una sucesión exacta corta es una sucesión de la forma

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0. \tag{1.2}$$

Observación 1.2. De 1,2, se cumplen las siguientes tres condiciones:

- f es inyectiva;
- $kerg = Imf$;

- g es sobreyectiva.

En este caso, g induce un isomorfismo, a saber:

$$\frac{M}{f(L)} \cong N.$$

La sucesión exacta 1,2 se escinde si existe $h \in Hom(N, M)$ tal que $g \circ h = 1_N$.

Definición 1.3. Un diagrama de Δ-módulos y Δ-homomorfismos

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & M \arrow[d, "g"] \\ & N \end{tikzcd}$$

es conmutativo si $g \circ f = h$.

Teorema 1.1. *Sea*

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

una sucesión exacta corta de Δ-morfismos de Δ-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- *Existe un Δ-morfismo de Δ-módulos $h \in Hom_\Delta(M, L)$ tal que $h \circ f = 1_L$.*
- *Existe un Δ-morfismo de Δ-módulos $h' \in Hom_\Delta(N, M)$ tal que $g \circ h' = 1_N$.*

Definición 1.4. Dado un par de Δ-homomorfismos $f_i : A \to M_i \quad i = 1, 2$ definimos un Δ-módulo X, llamado "pushout"de la pareja (f_1, f_2) por:

$$X = \frac{M_1 \dot{+} M_2}{\{(f_1(a), -f_2(a)) : a \in A\}},$$

es decir, X se obtiene de la suma directa externa $M_1 \dot{+} M_2$ identificando la imagen de A en M_1 con la imagen de A en M_2. Existe un diagrama conmutativo (llamado diagrama de pushout o suma fibrada)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M_1 \arrow[d, "g_1"] \\ M_2 \arrow[r, "g_2"'] & X, \end{tikzcd}$$

donde g_i es definido por la composición

$$M_i \to M_1 \dot{+} M_2 \to X \quad i = 1, 2.$$

Observación 1.3. El pushout X es caracterizado hasta isomorfismo por una propiedad universal, a saber, dado cualquier diagrama de Δ-módulos y Δ-homomorfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M_1 \arrow[d, "g_1'"] \\ M_2 \arrow[r, "g_2'"'] & X', \end{tikzcd}$$

existe un único Δ-homomorfismo $\psi : X \to X'$ tal que:

$$\psi \circ g_i = g_i' \quad i = 1, 2.$$

Definición 1.5. Dados Δ-homormorfismos $f_i : M_i \to B \quad i = 1, 2$ podemos formar su "pullback"(o producto fibrado):

$$Y = \{(m_1, m_2) \in M_1 \dot{+} M_2 : f_1(m_1) = f_2(m_2)\}.$$

Existe un diagrama pullback conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & M_1 \arrow[d, "f_1"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"'] & B, \end{tikzcd}$$

donde $g_i(m_1, m_2) = m_i \quad i = 1, 2.$

Observación 1.4. El pullback es caracterizado por la siguiente propiedad universal: dado cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g_1'"] \arrow[d, "g_2'"'] & M_1 \arrow[d, "f_1"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"'] & B, \end{tikzcd}$$

existe un único $\varphi : Y' \to Y$ tal que

$$g_i' = g_i \circ \varphi \quad i = 1, 2.$$

Nota 1.1. En general, dadas dos flechas f_1 y f_2 con igual codominio en un categoría $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f_1"] \\ A \arrow[r, "f_2"'] & C, \end{tikzcd}$$

un pullback de f_1 y f_2 consiste de dos flechas

$$\begin{tikzcd} A \times_{\mathcal{C}} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & B \\ A, & \end{tikzcd}$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times_{\mathcal{C}} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & B \arrow[d, "f_1"] \\ A \arrow[r, "f_2"] & C \end{tikzcd}$$

conmuta y tiene la siguiente propiedad universal:

Para cada diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, bend left, "z_1"] \arrow[ddr, bend right, "z_2"'] & & \\ & & B \arrow[d, "f_1"] \\ & A \arrow[r, "f_2"'] & C \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $u : Z \to A \times_{\mathcal{C}} B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "z_1"] \arrow[ddr, bend right, "z_2"'] & & \\ & A \times_{\mathcal{C}} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmuta. En pocas palabras obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "z_1"] \arrow[ddr, bend right, "z_2"'] & & \\
& A \times_{\mathcal{C}} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & B \arrow[d, "f_1"] \\
& A \arrow[r, "f_2"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Producto Tensorial

Definición 1.6. Sean M un módulo derecho y N un módulo izquierdo sobre Δ un anillo con unidad y P un grupo abeliano aditivo. Una función $f : M \times N \to P$ tal que $(m, n) \mapsto f(m, n)$ es balanceada si para cada $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $r \in \Delta$:

$$\begin{array}{lll}
f(m_1 + m_2, n) & = & f(m_1, n) + f(m_2, n); \\
f(m, n_1 + n_2) & = & f(m, n_1) + f(m, n_2); \\
f(m, rn) & = & f(mr, n).
\end{array}$$

Definición 1.7. Con la notación de la definición anterior, sean $f : M \times N \to P$ y $\varphi : M \times N \to T$ balanceadas de $M \times N$ hacia los grupos abelianos aditivos P y T respectivamente. Decimos que f se puede factorizar a travéz de T si existe un homomorfismo de grupos $f^* : T \to P$ tal que

$$f = f^* \circ \varphi,$$

es decir,

$$f(m, n) = f^*(\varphi(m, n)) \ \ \forall (m, n) \in M \times N.$$

En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dr, dotted, "f^*"] & \\
M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & P.
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.2. *Sea M y N módulos derecho e izquierdo, respectivamente. Existe un grupo abeliano T y una función balanceada $t : M \times N \to T$ tal que*

- *Los elementos $t(m, n)$ generan al grupo aditivo T y de hecho cada elemento de T es una suma finita de la forma:*

$$\sum t(m_i, n_i) \ \ m_i \in M, n_i \in N.$$

- *Toda función balanceada de $M \times N$ en cualquier grupo abeliano P se puede factorizar a través de T.*

Observación 1.5. En el teorema anterior, si F es el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base los elementos de $M \times N$ y H el subgrupo de F generado por las sumas formales:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n); \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2); \\ (m, rn) - (mr, n), \end{cases}$$

para todo $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $r \in R$, se puede ver que:

$$T = F \diagup H$$

y además

$$\begin{array}{rccc} t: & M \times N & \to & T \\ & (m, n) & \mapsto & (n, m) + H \end{array}$$

Definición 1.8. El grupo abeliano T del teorema anterior es llamado el producto tensorial de M y N, el cual es único hasta isomorfismo y lo denotaremos como sigue:

$$M \otimes_\Delta N.$$

Teorema 1.3.

- *Sea N un Δ-módulo izquierdo, entonces existe un Δ-isomorfismo $\Delta \otimes_\Delta N \cong N$ de módulos izquierdos.*

- *Si M es un Δ-bimódulo y N un Δ-módulo izquierdo, entonces $M \otimes_\Delta N$ es un Δ-módulo izquierdo.*

- *Si Δ es un anillo conmutativo, entonces tenemos los siguientes isomorfismos de Δ-módulos:*

  $$\left(\dot{\sum_{i \in I}} M_i \right) \otimes_\Delta N \cong \dot{\sum_{i \in I}} (M_i \otimes_\Delta N)$$

  y

  $$M \otimes_\Delta \left(\dot{\sum_{i \in I}} N_i \right) \cong \dot{\sum_{i \in I}} (M \otimes_\Delta N_i)$$

  para todo conjunto de índices I.

Capítulo 2

Medida de Haar

Para este capítulo hablaremos sobre la medida de Haar y algunas de sus propiedades que nos ayudaran a entender como se comporta dicha medida cuando hablamos de la función Zeta y L, además, se dará la construcción de los enteros $p-$ádicos que utilizaremos a lo largo de todo este trabajo.

La medida de Haar

Definición 2.1. Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ el conjunto de los números reales no negativos. Un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$ es una función

$$|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$$

que satisface las siguientes condiciones:

- $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Definición 2.2. Un valor absoluto sobre un campo $\mathbb{K}$ es llamado no arquimediano si además satisface:

$$|x + y| \leq \text{ máx } \{|x|, |y|\}$$

para todo $x, y \in \mathbb{K}$, en otro caso se dice que el valor absoluto es arquimediano.

Definición 2.3. Sea $|\cdot|_p$ un valor absoluto p-ádico sobre $\mathbb{Q}$ (el cual es no arquimediano). Denotamos por $\mathcal{C}$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de elementos de $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$ y por $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ al conjunto de sucesiones que convergen a cero con respecto a $|\cdot|_p$. Definimos y denotamos el campo de los números p-ádicos como sigue:

$$\mathbb{Q}_p = \mathcal{C} \diagup \mathcal{N}.$$

donde $\mathcal{N}$ es un ideal maximal del anillo $\mathcal{C}$.

Definición 2.4. El anillo de los enteros p-ádicos es el conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \geq 0 \text{ con } a_i \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq a_i \leq p-1\}.$$

Teorema 2.1. *$\mathbb{Z}_p$ es un subanillo de $\mathbb{Q}_p$.*

Proposición 2.1. *El grupo de las unidades de los enteros p-ádicos es el conjunto*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p = 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i, \ \textit{tal que } a_0 \neq 0\}.$$

Proposición 2.2. *El anillo $\mathbb{Z}_p$ es local cuyo ideal máximo es el ideal principal*

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p \leq \frac{1}{p}\}.$$

Corolario 2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, el siguiente es un isomorfismo de anillos:*

$$\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}.$$

Proposición 2.3. *El anillo $\mathbb{Z}_p$ y el grupo $\mathbb{Z}_p^*$ son compactos.*

Corolario 2.2. *El anillo $\mathbb{Q}_p$ y el grupo $\mathbb{Q}_p^*$ son localmente compactos.*

Teorema 2.2. *Sea $(G, *)$ un grupo topológico localmente compacto. Existe una medida regular de borel, única salvo multiplicaciones por constantes positivas tal que*

- $\int_U dx > 0$ *para cada U conjunto no vacío y abierto de Borel.*
- $\int_{x*E} dx = \int_E dx$ *para cada conjunto E de Borel.*

Definición 2.5. La medida descrita en el Teorema anterior es una medida de Haar sobre G.

Observación 2.1. $(\mathbb{Q}_p, +)$ es un grupo topológico abeliano localmente compacto, asi que existe una medida de Haar dx sobre $(\mathbb{Q}_p, +)$.

Observación 2.2. Como $\mathbb{Z}_p$ es compacto, al ser la medida dx regular, se tiene:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx < \infty,$$

así, normalizando esta condición por

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

obtenemos que dx es única.

Observación 2.3. La medida de Haar dx asigna a cada subconjunto abierto compacto U un número real no negativo

$$\int_U dx,$$

que satisface

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} dx,$$

donde los U_n son subconjuntos abiertos compactos en $\mathbb{Q}_p$ disjuntos dos a dos, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ es igualmente compacto. Además se cumple que:

$$\int_{x_0+U} dx = \int_U dx.$$

Proposición 2.4. *Sea $d(xa)$ definida por*

$$d(ax)(U) = dx(aU),$$

entonces $d(ax)$ es una medida de Haar y para cada $a \in \mathbb{Q}_p^*$ se tiene

$$d(ax) = |a|_p dx,$$

es decir, para cada conjunto de Borel U

$$\int_{aU} dx = |a|_p \int_U dx.$$

Demostración. Sea $T_a : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ donde $T_a = ax$. Observemos que T_a está bien definida y es inyectiva ya que $T_a(x) = T_a(y)$ si y solo si $ax = ay$ si y solo si $x = y$. Por otro lado consideremos $y \in \mathbb{Q}_p$, entonces $T_a(a^{-1}y) = y$, así T_a es sobreyectiva.
Notemos que T_a es la restricción del producto $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ al conjunto $\{a\} \times \mathbb{Q}_p$, luego T_a y T_a^{-1} son continuas, y por tanto T_a es un homeomorfismo. Por otro lado, la invarianza bajo traslaciones en dx implica la invarianza bajo traslaciones en $d(ax)$, esto es, para cualquier $y \in \mathbb{Q}_p$ se tiene

$$\begin{aligned} d(ax)(y+U) &= d(x)(a(y+U)) \\ &= dx(ay+aU) \\ &= dx(aU) \\ &= d(ax)(U), \end{aligned}$$

por lo tanto, $d(ax)$ es una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p$. Ahora por el Teorema anterior existe una constante $C(a)$ tal que

$$\int_{aU} dx = C(a) \int_U dx,$$

para el cálculo de $C(a)$ se puede elegir cualquier conjunto compacto U, en particular podemos considerar $U = \mathbb{Z}_p$.
Supongamos que $a \in \mathbb{Z}_p$, entonces $|a|_p = p^{-k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, luego

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^k-1} (i + p^k\mathbb{Z}_p),$$

entonces

$$1 = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} dx = \int\limits_{\sqcup_{i=0}^{p^k-1}(i+p^k\mathbb{Z}_p)} dx = \sum_{i=0}^{p^k-1} \int\limits_{p^k\mathbb{Z}_p} dx = p^k \int\limits_{p^k\mathbb{Z}_p} dx,$$

como $|a|_p = p^{-k}$, entonces $a = p^k u$ para algún $u \in \mathbb{Z}_p^*$ y usando que $\mathbb{Z}_p = u\mathbb{Z}_p$ se obtiene

$$\int\limits_{a\mathbb{Z}_p} dx = \int\limits_{p^k u\mathbb{Z}_p} dx = \int\limits_{p^k\mathbb{Z}_p} dx = |a|_p,$$

de este modo, $C(a) = |a|_p$. Por lo tanto:

$$d(ax) = |a|_p dx, \ a \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Nota: El caso $a \notin \mathbb{Z}_p$ se aborda de manera similar. ■

Propiedades

1.- Podemos definir una integral sobre un subconjunto arbitrario medible $A \subset I$ con I un intervqlo cerrado, utilizando la función caracteristica,

$$\Phi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in A \\ 0 & \text{si } \ x \notin A \end{cases}$$

dicha integral esta dada como sigue:

$$\int_A f(x)dx = \int_I \Phi_A(x) f(x) dx$$

2.- Si conocemos la integral sobre un grupo G y $H \trianglelefteq G$, entonces

$$\int\limits_{\frac{G}{H}} f(x)dx = \int\limits_{G} f(x)\Phi_{\frac{G}{H}}(x)dx$$

3.- Si $I = I_1 \times I_2$ y $s(t_1, t_2) = s(t_1)s(t_2)$ entonces

$$\int\limits_{I_1\times I_2} s_1(t_1)s_2(t_2)dt_1dt_2 = \int\limits_{I_1} s_1(t_1)dt_1 \int\limits_{I_2} s_2(t_2)dt_2$$

Para más detalles ver [17] aspectos básicos del análisis p-ádico.

Capítulo 3

Anillo de Burnside

En esta sección sea un grupo finito G, el anillo de Burnside $B(G)$ es definido como el anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismo de G-conjuntos con la suma dada por la unión disjunta y la multiplicación por el producto cartesiano. El anillo de Burnside $B(G)$ es libre como grupo abeliano, con base dada por las clases de isomorfismo de los G-conjuntos transitivos de la forma $\frac{G}{H}$ para subgrupos H de G; dos de los cuales se identifican si sus estabilizadores H son conjugados en G, es decir,

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}\left(\frac{G}{H}\right)$$

donde $\mathcal{C}(G)$ es la familia de las clases de conjugación de subgrupos de G. Para más información sobre el anillo de Burnside ver [16].

Con frecuencia, se estudia el anillo de Burnside de un grupo finito G usando el homomorfismo marca $\varphi : B(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$. Para $K \leq G$, la $K-$ésima coordenada de φ es definida como $\varphi_K(X) = |X^K|$, para X un G-conjunto, extendiendo linealmente φ a $B(G)$.

El anillo $\widetilde{B}(G) := \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$ es el anillo de las funciones de super clase $f : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{Z}$ con la multiplicación dada coordenada a coordenada; el cual es llamado el *anillo fantasma* de G y juega un importante papel para explicar G-conjuntos utilizando sus puntos fijos dados. En particular, se puede mostrar que el homomorfismo marca es inyectivo.

Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y sea $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos. Denotamos los siguientes productos tensoriales por

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p \left(\frac{G}{H}\right)$$

y

$$\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{B}(G) = \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$$

donde tenemos que $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p$-orden y $\widetilde{B}_p(G)$ un $\mathbb{Z}_p$-orden máximo.

Observación 3.1. Sea $q \in \mathbb{Z}$ un número primo. Notemos que $B_q(G) \subseteq \widetilde{B}_q(G)$. Sabemos que para todo $x \in \widetilde{B}_q(G)$, se tiene que $|G|x \in B_q(G)$ por lo que si q no divide a $|G|$, entonces $|G|$ es unidad en $\mathbb{Z}_q$ y así tenemos que $x \in B_q(G)$, concluyendo que $B_q(G) = \widetilde{B}_q(G)$.

Ejemplo 3.1. (Caracterización de $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$). Consideremos a $C_{p^n} =< a >$ un grupo cíclico generado por a de orden p^n. Sea

$$\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{H_0 =< a >, H_1 =< a^p >, H_2 =< a^{p^2} >, \dots, H_n =< a^{p^n} >\}$$

y sea $a_i = \frac{C_{p^n}}{H_i}$ para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}_p a_i$$

luego, el homomorfismo marca φ induce la siguiente inclusión:

$$\begin{array}{ccc} B_p(C_{p^n}) & \to & \mathbb{Z}_p^{n+1} \\ X & \mapsto & (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_1}(X), \dots, \varphi_{H_n}(X)) \end{array}$$

puesto que C_{p^n} es abeliano, entonces

$$\varphi_H\left(\frac{C_{p^n}}{K}\right) = \begin{cases} \left|\frac{C_{p^n}}{K}\right| & \text{si} \quad H \subseteq K \\ 0 & \text{si} \quad H \nsubseteq K \end{cases}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} a_0 = \frac{C_{p^n}}{H_0} & \longmapsto & (1, 1, \dots, 1) \\ a_1 = \frac{C_{p^n}}{H_1} & \longmapsto & (0, p, \dots, p) \\ a_2 = \frac{C_{p^n}}{H_2} & \longmapsto & (0, 0, p^2, \dots, p^2) \\ & \vdots & \\ a_n = \frac{C_{p^n}}{H_n} & \longmapsto & (0, 0, \dots, p^n) \end{array}$$

Definición 3.1. Con base al ejemplo anterior, definimos y denotamos el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^n como sigue:

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) : x_i - x_{i+1} \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \cdots, n-1\}$$

o equivalentemente

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) : x_n - x_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \cdots, n-1\}.$$

donde $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$ como subanillo.

Capítulo 4

Función Zeta para el anillo de Burnside

El objetivo principal de este capítulo es dar a conocer de forma explícita la función Zeta del anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p, p^2 y p^3, asi como la teoría necesaria para su desarrollo y algunos resultados importantes que utilizaremos más adelante en el último capítulo.

Definición 4.1. Sea R un $D.I.P$ con campo de fracciones K, sea L una extensión finita de K y sea S la cerradura entera de R en L, entonces S es un dominio de Dedeking con campo de fracciones L.

Definición 4.2. Sean R un dominio de Dedekind con campo de cocientes K y B una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, para cualquier K-espacio de dimesion finita V, diremos que un R-submódulo M es una R-retícula plena en V si M es finitamente generado, y es tal que $KM = V$, donde

$$KM = \{\sum \alpha_i l_i \ \ (\text{suma finita}) \ \ : \alpha_i \in K, l_i \in M\}$$

Definición 4.3. Sea R un dominio de Dedekind con campo de cocientes K. Un R-ideal fraccional en K es un R-submódulo finitamente generado M contenido en K tal que $KM = K$.

Definición 4.4. Sean R un dominio de Dedekind con campo de cocientes K y B una K-álgebra de dimensión finita. Diremos que un subanillo Λ de B es un R-orden en B si el centro de Λ contiene a R, y además Λ es una R-retícula plena en B.

Definición 4.5. Definimos la función Zeta $\zeta_\Lambda(s)$ de un orden Λ como sigue:

$$\sum_{\substack{I \leq \Lambda, ideal \\ (\Lambda:I)<\infty}} (\Lambda : I)^{(-s)}$$

que, en el caso de $B(G), \widetilde{B}(G), B_p(G), \widetilde{B}_p(G)$ convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de

$$\{s \in \mathbb{C} | Re(s) > 1\}.$$

Observación 4.1. Sea E_p una $\mathbb{Q}_p$-álgebra en el campo de los enteros p-ádicos, Λ un $\mathbb{Z}_p$-orden, V_p un E_p módulo y sea M_p, N_p dos Λ-retículas plenas en V_p. Definimos

$$Z_\Lambda(M_p; s) = \sum_{\substack{N_p \subseteq \Lambda_p \\ N_p \cong M_p}} (\Lambda_p : N_p)^{-s}.$$

Por lo tanto:

$$\zeta_{\Lambda_p}(s) = \sum_{M_p} Z_{\Lambda_p}(M_p; s)$$

donde esta suma finita se extiende sobre todos los representantes de las clases de isomorfismo de las Λ-retículas plenas en V_p.

Definición 4.6. Sea M una Λ-retícula plena en V_p, definimos y denotamos al conductor de M en Λ como sigue:

$$\{M : \Lambda\} = \{\alpha \in B : \alpha M \subseteq \Lambda\}.$$

Observación 4.2. Sea $\Phi_{\{M:\Lambda\}}$ la función caracterísca en Λ de $\{M : \Lambda\}$. Ahora, elegimos la Medida de Haar d^*x sobre el conjunto de unidades Λ^*. Para conjuntos medibles $E \subset \Lambda, E' \subset \Lambda^*$ es conveniente escribir

$$\mu(E) = \int_E dx, \quad \mu^*(E') = \int_{E'} d^*x.$$

Tenemos que:

$$Z_\Lambda(M; s) = \mu^*(Aut_\Lambda M)^{-1}(\Lambda : M)^{-s} \int_{x \in \Lambda^*} \Phi_{\{M:\Lambda\}}(x)\|x\|_\Lambda^* d^*x$$

donde $\|x\|_\Lambda = (Lx : L)$, para $x \in \Lambda^*$, la cual es independiente de la elección de la $\mathbb{Z}_p$-retícula plena L en Λ, además es multiplicativa. Más aún, se puede ver que $\|x\|_\Lambda = 1$ siempre que x sea una unidad en algún $\mathbb{Z}_p$-orden en Λ.

Función Zeta para $B_p(C_p)$.

Observemos por [8] que los únicas clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de indice finito de $B_p(C_p)$ son:

1) $M_1 = B_p(C_p)$
2) $M_2 = \mathbb{Z}_p^2$

y que en lo sucesivo denotaremos por $B_1 = B_p(C_p)$ y $\bar{B}_1 = \mathbb{Z}_p^2$, entonces

$$\zeta_{B_1}(s) = Z_{B_1}(B_1; s) + Z_{B_1}(\bar{B}_1; s).$$

Ahora vamos a calcular cada una de las anteriores, para ello elegimos la medida de Haar d^*x sobre $(\mathbb{Q}_p^*)^2$ donde $d^*x = (d^*\alpha)^2$, y es tal que $d^*\alpha$ es una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p^*$, además

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$$

por lo tanto, tenemos $\mu((\mathbb{Z}_p^*)^2) = 1$, y como B_1 es local, se sigue $rad(B_1) = (p,p)\mathbb{Z}_p^2$, luego

$$B_1 = (B_1^*) \cup [(p,p)\mathbb{Z}_p^2]$$

- Calculemos $Z_{B_1}(B_1; s)$, notemos que $\{B_1; B_1\} = B_1$ y $Aut_{B_1} = B_1^*$, de donde $\mu^*(Aut_{B_1}B_1)^{-1} = (\bar{B}_1^* : B_1^*) = (p-1)$, por tanto:

  $$Z_{B_1}(B_1 : s) = (p-1) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2 \cap [B_1^* \cup (p\mathbb{Z}_p)^2]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x$$

  es decir,

  $$Z_{B_1}(B_1; s)) = (p-1)\mathcal{I}_0$$

  en donde $\mathcal{I}_0$ es la integral que aporta el conductor B_1.

- Para el caso $Z_{B_1}(\bar{B}_1; s)$ se tiene $\{\bar{B}_1; B_1\} = (p\mathbb{Z}_p)^2$ y $Aut_{B_1}\bar{B}_1 = \bar{B}_1^*$, entonces $\mu^*(Aut_{B_1}\bar{B}_1)^{-1} = 1$, más aún $(\bar{B}_1; B_1) = p$. Por lo tanto

  $$Z_{B_1}(\bar{B}_1; s) = p^s \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2 \cap (p\mathbb{Z}_p)^2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x$$

  es decir,

  $$Z_{B_1}(\bar{B}_1; s) = p^s\mathcal{I}_1$$

  en donde $\mathcal{I}_1$ es la integral que aporta el conductor $(p,p)\bar{B}_1$.

  De los dos puntos anteriores tendríamos:

$$\boldsymbol{\zeta_{B_1}(s) = (p-1)\mathcal{I}_0 + p^s\mathcal{I}_1}$$

donde

$$\mathcal{I}_0 = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^2 \cap [B_1^* \cup (p\mathbb{Z}_p)^2]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x = \frac{1-2p^{-s}+p^{1-2s}}{(p-1)(1-p^{-s})^2}$$

y

$$\mathcal{I}_1 = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^2 \cap (p\mathbb{Z}_p)^2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x = \frac{(p^{-s})^2}{(1-p^{-2})^2}.$$

Función Zeta para $B_p(C_{p^2})$.

Nos ocupamos ahora por el caso $B_2 = B_p(C_{p^2})$ y sea $\bar{B}_2 = \mathbb{Z}_p^3$ luego, por [8] sabemos que las únicas clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de B_2 son:

$\boldsymbol{M_1 = B_2}$,
$\{M_1 : B_2\} = B_2$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_1 = B_2^*$,
$\mu^*(B_2^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_2 : M_1)^{-s} = 1$,
$\boldsymbol{M_2 = \bar{B}_2}$,
$\{M_2 : B_2\} = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_2 = \bar{B}_2^*$,
$\mu^*(\bar{B}_2^*)^{-1} = 1$,
$(B_2 : M_2)^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_3 = \mathbb{Z}_p \times B_1}$,
$\{M_3 : B_2\} = (p, p, p)M_3$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_3 = M_3^*$,
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_2 : M_3)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_4 = B_1 \times \mathbb{Z}_p}$,
$\{M_4 : B_2\} = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_4 = M_4^*$,
$\mu^*(M_4^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_2 : M_4)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - x \in p\mathbb{Z}_p\}}$,
$\{M_5 : B_2\} = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_5 = M_5^*$,
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_2 : M_5)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : y - x, z - x \in p\mathbb{Z}_p\}}$,
$\{M_6 : B_2\} = (p, p, p)M_3$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_6 = M_6^*$,

$\mu^*(M_6^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_2 : M_6)^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - y \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$,
$\{M_7 : B_2\} = (p, p, p)M_3$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_7 = M_7^*$,
$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)$,
$(B_2 : M_7)^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$,
$\{M_8 : B_2\} = (p, p, p)M_3$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_8 = \bar{B}_2^*$,
$\mu^*(\bar{B}_2^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_2 : M_8)^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\}}$.
$\{M_9 : B_2\} = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$,
$\mathrm{Aut}_{B_2} M_9 = M_6^*$,
$\mu^*(M_6^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_2 : M_9)^{-s} = p^{2s}$.

Por lo anterior los únicos conductores son $B_2, (p, p, p)M_3, (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$.

Por lo tanto

$$\zeta_{B_2}(s) = \sum_{i=1}^{9} Z_{B_2}(M_i; s)$$

donde

$$\begin{array}{rcl}
Z_{B_2}(B_2; s) & = & p(p-1)^2\mathcal{I}_0 \\
Z_{B_2}(\bar{B}_2; s) & = & p^{3s}\mathcal{I}_2 \\
Z_{B_2}(M_3; s) & = & (p-1)p^{2s}\mathcal{I}_1 \\
Z_{B_2}(M_4; s) & = & (p-1)p^{2s}\mathcal{I}_2 \\
Z_{B_2}(M_5; s) & = & (p-1)p^{2s}\mathcal{I}_2 \\
Z_{B_2}(M_6; s) & = & (p-1)^2p^{s}\mathcal{I}_1 \\
Z_{B_2}(M_7; s) & = & p(p-1)p^{s}\mathcal{I}_1 \\
Z_{B_2}(M_8; s) & = & p(p-1)^2p^{s}\mathcal{I}_1 \\
Z_{B_2}(M_9; s) & = & (p-1)^2p^{2s}\mathcal{I}_2
\end{array}$$

y donde los conductores:

$$\mathcal{N}_0 = B_2, \;\; \mathcal{N}_1 = (p, p, p)M_3, \;\; \mathcal{N}_2 = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$$

aportan las siguientes integrales:

$$\mathcal{I}_0 = \int\limits_{[B_2^* \cap (p\mathbb{Z}_p \times pB_1] - \{0\}} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \frac{1 - 3p^{-s} + 3p^{-2s} + (-1 - p + p^2)p^{-3s} + 2(1-p)p^{1-4s} + (p-1)^{2-5s}}{p(p-1)^2(1-p^{-s})^3},$$

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{[(p\mathbb{Z}_p \times pB_1] - \{0\}} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^3} d^*x = \frac{p^{-3s}(1 - 2p^{-s} + p^{1-2s})}{(p-1)(1-p^{-s})^3}$$

e

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{[p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p] - \{0\}} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^3} d^*x = \frac{(p^{-s})^5}{(1-p^{-s})^3}.$$

De este modo:

$$\boldsymbol{\zeta_{B_2}(s) = p(p-1)^2\mathcal{I}_0 + [(1 - 2p + p^3)x + (p-1)x^2]\mathcal{I}_1 + [(p^2-1)x^2 + x^3]\mathcal{I}_2}$$

donde $x = p^s$.

Función Zeta para $B_p(C_{p^3})$.

Nos ocupamos ahora por el caso $B_3 = B_p(C_{p^3})$ y sea $\bar{B}_3 = \mathbb{Z}_p^4$ luego,por [14] sabemos que

$$\zeta_{B_3} = \sum_{i=1}^{97} Z_{B_3}(M_i; s)$$

donde las M_i son las únicas clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de B_3, a saber,

$\boldsymbol{M_1 = B_3}$
$\{M_1 : B_3\} = B_3$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_1 = B_3^*$,
$\mu^*(B^*)^{-1} = p^3(p-1)^3$
$(B_3 : M_1)^{-s} = 1$,
$\boldsymbol{M_2 = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - v) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_2 : B_3\} = (p, p, p, p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_2 = M_2^*$,
$\mu^*(M_2^*)^{-1} = p^3(p-1)^2$,
$(B_3 : M_2)^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_3 = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - u), (w - v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_3 : B_3\} = (p, p, p, p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_3 = M_3^*$,
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_3)^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_4 = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_4 : B_3\} = (p, p, p, p)\, M_8$,

$\mathrm{Aut}_{B_3} M_4 = M_4^*$,
$\mu^*(M_4^*)^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_4)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_5 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (w-v)\,,(t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_5 : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_5 = M_5^*$,
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_5)^{-s} = p^{s}$,
$\boldsymbol{M_6 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v)\,,(t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_6 : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_6 = M_6^*$,
$\mu^*(M_6^*)^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_6)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_7 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u)\,,(w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_7 : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_7 = M_7^*$,
$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_7)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_8 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_8 : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_8 = M_8^*$,
$\mu^*(M_8^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_8)^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_9 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_9 : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_9 = M_9^*$,
$\mu^*(M_9^*)^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_9)^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{10} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{10} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{10} = M_{10}^*$,
$\mu^*(M_{10}^*)^{-1} = p^2(p-1)$
$(B_3 : M_{10})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{11} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{11} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{11} = M_{11}^*$,
$\mu^*(M_{11}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{11})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{12} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{12} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{12} = M_{12}^*$,
$\mu^*(M_{12}^*)^{-1} = p(p-1)$,

$(B_3 : M_{12})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{13} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - u)\,, (w - v)\,, (t - w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{13} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{13} = M_{13}^*$,
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3$,
$(B_3 : M_{13})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{14} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - v)\,, (t - w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{14} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{14} = M_{14}^*$,
$\mu^*(M_{14}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{14})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{15} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - u)\,, (t - w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{15} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{15} = M_{15}^*$,
$\mu^*(M_{15}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{15})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{16} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t - w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{16} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{16} = M_{16}^*$,
$\mu^*(M_{16}^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_3 : M_{16})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{17} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v - u)\,, (w - v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{17} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{17} = M_{17}^*$,
$\mu^*(M_{17}^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{17})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{18} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w - v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{18} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{18} = M_{18}^*$,
$\mu^*(M_{18}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{18})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{19} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v - u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{19} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{19} = M_{19}^*$,
$\mu^*(M_{19}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{19})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{20} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{20} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{20} = M_{20}^*$,
$\mu^*(M_{20}^*)^{-1} = p(p-1)$,
$(B_3 : M_{20})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{21} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v - u)\,, (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$

$\{M_{21} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{21} = M_{21}^*$,
$\mu^*(M_{21}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{21})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{22} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{22} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{22} = M_{22}^*$,
$\mu^*(M_{22}^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_3 : M_{22})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{23} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t - u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{23} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{23} = M_{23}^*$,
$\mu^*(M_{23}^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_3 : M_{23})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{24} = \mathbb{Z}_p^4}$
$\{M_{24} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{24} = M_{24}^*$,
$\mu^*(M_{24}^*)^{-1} = 1$,
$(B_3 : M_{24})^{-s} = p^{6s}$,
$\boldsymbol{M_{25} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{25} : B_3\} = (p, p, p, p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{25} = B_3^*$,
$\mu^*(B^*)^{-1} = p^3(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{25})^{-s} = p^{s}$,
$\boldsymbol{M_{26} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t), (t - w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{26} : B_3\} = (p, p, p, p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{26} = M_5^*$,
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{26})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{27} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - v + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{27} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{27} = M_3^*$,
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{27})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{28} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v - u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{28} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{28} = M_{28}^*$,
$\mu^*(M_{28}^*)^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{28})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{29} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - v + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{29} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{29} = M_7^*$,

$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{29})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{30} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{30} : B\} = \big(p, p^2, p^2, p^2\big)\, M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{30} = M_{30}^*,$
$\mu^*(M_{30}^*)^{-1} = p(p-1)^2,$
$(B_3 : M_{30})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{31} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{31} : B\} = \big(p, p^2, p^2, p^2\big)\, M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{31} = M_{17}^*,$
$\mu^*(M_{17}^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{31})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{32} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t)\,,(t-w) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{32} : B_3\} = \big(p, p^2, p^2, p^2\big)\, M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{32} = M_{13}^*,$
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3,$
$(B_3 : M_{32})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{33} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v)\,,(t-w) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{33} : B_3\} = \big(p, p^2, p^2, p^2\big)\, M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{33} = M_{33}^*,$
$\mu^*(M_{33}^*)^{-1} = (p-1)^2,$
$(B_3 : M_{33})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{34} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{34} : B_3\} = \big(p, p^2, p^3, p^3\big)\, M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{34} = M_{19}^*,$
$\mu^*(M_{19}^*)^{-1} = p(p-1)^2,$
$(B_3 : M_{34})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{35} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{35} : B_3\} = \big(p, p^2, p^3, p^3\big)\, M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{35} = M_{21}^*,$
$\mu^*(M_{21}^*)^{-1} = (p-1)^2,$
$(B_3 : M_{35})^{-s} = p^{5s},$
$\boldsymbol{M_{36} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{36} : B_3\} = \big(p, p^2, p^3, p^3\big)\, M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{36} = M_{36}^*,$
$\mu^*(M_{36}^*)^{-1} = (p-1),$
$(B_3 : M_{36})^{-s} = p^{5s},$
$\boldsymbol{M_{37} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \big(p^2u-w+t\big) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{37} : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8,$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{37} = B^*,$
$\mu^*(B^*)^{-1} = p^3(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{37})^{-s} = p^{s},$

$\boldsymbol{M_{38} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{38} : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8,$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{38} = M_3^*,$
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{38})^{-s} = p^{2s},$
$\boldsymbol{M_{39} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{39} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{39} = M_9^*,$
$\mu^*(M_9^*)^{-1} = p^2(p-1)^2,$
$(B_3 : M_{39})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{40} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t)\,, (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{40} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{40} = M_5^*,$
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = p^2(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{40})^{-s} = p^{2s},$
$\boldsymbol{M_{41} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{41} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{41} = M_7^*,$
$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{41})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{42} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{42} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{42} = M_{11}^*,$
$\mu^*(M_{11}^*)^{-1} = p(p-1)^2,$
$(B_3 : M_{42})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{43} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u - w + t) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{43} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{43} = M_{17}^*,$
$\mu^*(M_{17}^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{43})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{44} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u - w) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{44} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B} M_{44} = M_{44}^*,$
$\mu^*(M_{44}^*)^{-1} = p(p-1)^2,$
$(B : M_{44})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{45} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u - w + t)\,, (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{45} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{45} = M_{13}^*,$
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3,$
$(B_3 : M_{45})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{46} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u - w)\,, (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{46} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$

$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{46} = M_{46}^*$,
$\mu^*(M_{46}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{46})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{47} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{47} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{47} = M_{15}^*$,
$\mu^*(M_{15}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{47})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{48} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{48} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{48} = M_{48}^*$,
$\mu^*(M_{48}^*)^{-1} = (p-1)$,
$(B_3 : M_{48})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{49}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pav-(1+pa)w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-t)\,,(v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{49}\,(a) : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{49}\,(a) = M_{49}^*\,(a)\,,$
$\mu^*(M_{49}^*(a))^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{49}\,(a))^{-s} = p^s$,
$\boldsymbol{M_{50}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pav-(1+pa)w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{50}\,(a) : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{50}\,(a) = M_{50}^*\,(a)\,,$
$\mu^*(M_{50}^*(a))^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{50}\,(a))^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{51} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(p^2v-w+t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{51} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{51} = M_3^*$,
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{51})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{52} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(p^2v-w+t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{52} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{52} = M_4^*$,
$\mu^*(M_4^*)^{-1} = p^2(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{52})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{53} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-u)\,,(t-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{53} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{53} = M_{53}^*$,
$\mu^*(M_{53}^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{53})^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{54}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (av-(1+a)w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\,,(v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{54}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{54}\,(a) = M_{54}^*\,(a)\,,$
$\mu^*(M_{54}^*(a))^{-1} = p(p-1)^3$,

$(B_3 : M_{54}(a))^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{55} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{55} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{55} = M_{55}^*$,
$\mu^*(M_{55}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{55})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{56}(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (av-(1+a)w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{56}(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{56}(a) = M_{56}^*(a)$,
$\mu^*(M_{56}^*(a))^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{56}(a))^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{57} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pv-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{57} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{57} = M_7^*$,
$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{57})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{58} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pv-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{58} : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{58} = M_8^*$,
$\mu^*(M_8^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{58})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{59} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{59} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{59} = M_{17}^*$,
$\mu^*(M_{17}^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{59})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{60} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \right\}}$
$\{M_{60} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{60} = M_{18}^*$,
$\mu^*(M_{18}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{60})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{61} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+t), (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{61} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{61} = M_{13}^*$,
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3$,
$(B_3 : M_{61})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{62} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{62} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{62} = M_{14}^*$,
$\mu^*(M_{14}^*)^{-1} = (p-1)^2$,
$(B_3 : M_{62})^{-s} = p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{63} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w), (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$

$\{M_{63}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{63}=M_{63}^*$,
$\mu^*(M_{63}^*)^{-1}=(p-1)^2$,
$(B_3:M_{63})^{-s}=p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{64}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{64}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{64}=M_{64}^*$,
$\mu^*(M_{64}^*)^{-1}=(p-1)$,
$(B_3:M_{64})^{-s}=p^{5s}$,
$\boldsymbol{M_{65}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pv-w+t)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{65}:B_3\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{65}=B^*$,
$\mu^*(B_3^*)^{-1}=p^3(p-1)^3$,
$(B_3:M_{65})^{-s}=p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{66}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pv-w+t)\in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{66}:B_3\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{66}=M_2^*$,
$\mu^*(M_2^*)^{-1}=p^3(p-1)^2$,
$(B_3:M_{66})^{-s}=p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{67}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{67}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{67}=M_5^*$,
$\mu^*(M_5^*)^{-1}=p^2(p-1)^3$,
$(B_3:M_{67})^{-s}=p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{68}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+pt)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{68}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{68}=M_{53}^*$,
$\mu^*(M_{53}^*)^{-1}=p(p-1)^3$,
$(B_3:M_{68})^{-s}=p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{69}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{69}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{69}=M_{69}^*$,
$\mu^*(M_{69}^*)^{-1}=p(p-1)^2$,
$(B_3:M_{69})^{-s}=p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{70}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{70}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{70}=M_6^*$,
$\mu^*(M_6^*)^{-1}=p^2(p-1)^2$,
$(B_3:M_{70})^{-s}=p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{71}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+pt)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{71}:B_3\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3}M_{71}=M_{55}^*$,

$\mu^*(M_{55}^*)^{-1} = p(p-1)^2,$
$(B_3 : M_{71})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{72} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{72} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{72} = M_{72}^*,$
$\mu^*(M_{72}^*)^{-1} = p(p-1),$
$(B_3 : M_{72})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{73}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pau - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ \left(p^2u - w + t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{73}\,(a) : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8,$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{73}\,(a) = B^*,$
$\mu^*(B^*)^{-1} = p^3(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{73}\,(a))^{-s} = p^{s},$
$\boldsymbol{M_{74}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(p^2u - w + t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{74}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{74}\,(a) = M_3^*,$
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{74}\,(a))^{-s} = p^{2s},$
$\boldsymbol{M_{75}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pau - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{75}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{75}\,(a) = M_5^*,$
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = p^2(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{75}\,(a))^{-s} = p^{2s},$
$\boldsymbol{M_{76}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{76}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{76}\,(a) = M_7^*,$
$\mu^*(M_7^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{76}\,(a))^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{77}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u - w + at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{77}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{77}\,(a) = M_{17}^*,$
$\mu^*(M_{17}^*)^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{77}\,(a))^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{78} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{78} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{78} = M_{78}^*,$
$\mu^*(M_{78}^*)^{-1} = (p-1)^2,$
$(B_3 : M_{78})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{79}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - w + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{79}\,(a) : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{79}\,(a) = M_{13}^*,$
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3,$
$(B_3 : M_{79}\,(a))^{-s} = p^{4s},$

$\boldsymbol{M_{80} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{80} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{80} = M_{13}^*$,
$\mu^*(M_{13}^*)^{-1} = (p-1)^3$.
$(B_3 : M_{80})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{81}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-v+at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{81}\,(a) : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{81}\,(a) = B^*$,
$\mu^*(B^*)^{-1} = p^3(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{81}\,(a))^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{82} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{82} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{82} = M_{82}^*$,
$\mu^*(M_{82}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{82})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{83} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{83} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{83} = M_{53}^*$,
$\mu^*(M_{53}^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{83})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{84}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{84}\,(a) : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{84}\,(a) = M_{53}^*$,
$\mu^*(M_{53}^*)^{-1} = p(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{84}\,(a))^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{85}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{85}\,(a) : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{85}\,(a) = M_5^*$,
$\mu^*(M_5^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{85}\,(a))^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{86}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(pav-(1+pa)w-p^2u+t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{86}\,(a) : B_3\} = (p,p,p,p)\, M_8$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{86}\,(a) = M_{49}^*\,(a)$,
$\mu^*(M_{49}^*(a))^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{86}\,(a))^{-s} = p^{2s}$,
$\boldsymbol{M_{87} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(p^2v-w-p^2u+t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{87} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{87} = M_3^*$,
$\mu^*(M_3^*)^{-1} = p^2(p-1)^3$,
$(B_3 : M_{87})^{-s} = p^{3s}$,
$\boldsymbol{M_{88}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (av-(1+a)w-pu+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{88}\,(a) : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}$,

$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{88}\,(a) = M^*_{54}\,(a)\,,$
$\mu^*(M^*_{54}(a))^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{88}\,(a))^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{89} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w-pu) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{89} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{89} = M^*_{53},$
$\mu^*(M^*_{53})^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{89})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{90} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-pu-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{90} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{90} = M^*_{7},$
$\mu^*(M^*_{7})^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{90})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{91} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{91} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{91} = M^*_{17},$
$\mu^*(M^*_{17})^{-1} = p(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{91})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{92} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{92} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{92} = M^*_{13},$
$\mu^*(M^*_{13})^{-1} = (p-1)^3.$
$(B_3 : M_{92})^{-s} = p^{5s},$
$\boldsymbol{M_{93} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w-u) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{93} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{93} = M^*_{78},$
$\mu^*(M^*_{78})^{-1} = (p-1)^2,$
$(B_3 : M_{93})^{-s} = p^{5s},$
$\boldsymbol{M_{94} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(pv-w-p^2u+t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{94} : B_3\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{94} = B^*,$
$\mu^*(B^*_3)^{-1} = p^3(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{94})^{-s} = p^{3s},$
$\boldsymbol{M_{95} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu+w-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{95} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{95} = M^*_{5},$
$\mu^*(M^*_{5})^{-1} = p^2(p-1)^3,$
$(B_3 : M_{95})^{-s} = p^{4s},$
$\boldsymbol{M_{96} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu+w-v+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$
$\{M_{96} : B_3\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},$
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{96} = M^*_{53},$
$\mu^*(M^*_{53})^{-1} = p(p-1)^3,$

$(B_3 : M_{96})^{-s} = p^{4s}$,
$\boldsymbol{M_{97} = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu + w - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\{M_{97} : B_3\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24}$,
$\mathrm{Aut}_{B_3} M_{97} = M_{82}^*$,
$\mu^*(M_{82}^*)^{-1} = p(p-1)^2$,
$(B_3 : M_{97})^{-s} = p^{4s}$,
donde $a \in= \{1, \cdots, p-1\}$.

Por lo anterior los únicos conductores son $B_1,\ (p,p,p,p)M_8,\ (p,p^2,p^2,p^2)M_{16},\ (p,p^2,p^3,p^3)M_{24}$. Haciendo los cálculos necesarios obtenemos:

$$\zeta_{B_3}(s) = p^3(p-1)^3\mathcal{I}_0 +$$

$$[p^2(p-1)^2(p^3+p^2-1)x + p(p-1)^2(p^3+p^2+p-1)x^2 + p(p-1)^2x^3]\mathcal{I}_1 +$$

$$[(-p^2+2p^3+p^4-3p^5+p^7)x^2 + (-1+2p+p^2-2p^3-2p^4+p^5+p^6)x^3 +$$

$$(2-3p+p^4)x^4 + (p-1)x^5]\mathcal{I}_2 +$$

$$[(p^2-2p^4+p^6)x^3 + (1-2p^2-p^3+p^4+p^5)x^4 + (-2+p^2+p^3)x^5 + x^6]\mathcal{I}_3,$$

en donde $x = p^s$ y los conductores:

$$\mathcal{N}_0 = B_1,\ \mathcal{N}_1 = (p,p,p,p)M_8,\ \mathcal{N}_2 = (p,p^2,p^2,p^2)M_{16},\ \mathcal{N}_3 = (p,p^2,p^3,p^3)M_{24}$$

aportan las siguientes integrales:

$$\mathcal{I}_0 = \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap B_3} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^3} d^*x = \frac{1}{p^3(p-1)^3} + \mathcal{I}_3,$$

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap (p,p,p,p)[\mathbb{Z}_p \times B_2]} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^3} d^*x =$$

$$\frac{(p^{-s})^4\left(1 - 3\left(p^{-s}\right) + 3\left(p^{-s}\right)^2 + \left(p^2-p-1\right)\left(p^{-s}\right)^3 - 2p\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^4 + p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^5\right)}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^4},$$

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap (p,p^2,p^2,p^2)[\mathbb{Z}_p^2 \times B_1]} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^3} d^*x = \frac{(p^{-s})^7\left(1 - 2\left(p^{-s}\right) + p\left(p^{-s}\right)^2\right)}{\left(p-1\right)\left(1-p^{-s}\right)^4},$$

$$\mathcal{I}_3 = \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap (p,p^2,p^3,p^3)\mathbb{Z}_p^4} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x = \frac{(p^{-s})^9}{(1-p^{-s})^4}.$$

Los conductores de los ideales fraccionales de $B_p(C_{p^n})$.

Teorema 4.1. *Los únicos conductores de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito en* $B_p(C_{p^n})$ *son:*

$$\mathcal{N}_0 = B_p(C_{p^n}),$$

$$\mathcal{N}_i = (p, p^2, ..., p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, ..., p^i}_{(n-i+1)-veces})\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) \quad y \quad i = 1, ..., n-1, \quad y$$

$$\mathcal{N}_n = \left(p, p^2, ..., p^n, p^n\right)\mathbb{Z}_p^{n+1}.$$

Teorema 4.2. *Existen polinomios* $f_i\,(p^s) \in \mathbb{Z}\,[p^s]$ *de grado:*

$$\partial\left(f_i(p^s)\right) \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

para $i = 0, ..., n$ *tal que:*

$$\zeta_{B_p(C_{p^n})}(s) = \sum_{i=0}^{n} f_i\,(p^s) \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1} \cap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x.$$

Teorema 4.3. *Existe una fórmula recursiva para calcular:*

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1} \cap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x,$$

para $i = 0, ..., n..$ *Además de puede ver que*

$$\boldsymbol{\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1} \cap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x = \frac{g_i(p^{-s})}{p^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}\,(p-1)^{n-i}\,(1-p^{-s})^{n+1}}},$$

donde $g_i(p^{-s}) \in \mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$ *es un polinomio de grado:*

$$\partial\left(g_i(p^{-s})\right) = \frac{n(n+3)}{2},$$

para $i = 0, ..., n.$

Para los detalles y las demostraciones ver [10].

Capítulo 5

Series de Hurwitz y Funciones Zeta Parciales

La finalidad de este capítulo es dar la teoría necesaria sobre las series de Hurwitz y las funciones Zeta Parciales con el fin de buscar una relación entre el anillo de Burnside y las funciones L con ayuda del análisis p-ádico.

A lo largo de este apartado A es una $\mathbb{Q}$-álgebra semisimple de dimensión finita, Δ un $\mathbb{Z}$-orden y M un ideal izquierdo de Δ tal que

$$\mathbb{Q}M = A.$$

Observación 5.1. La ventaja de usar el enfoque de las series de Hurwitz, es que una de ellas se puede expresar en términos de otras series de Hurwitz que están unidas a los componentes simples de A. La función Zeta parcial $Z_\Delta(M, s)$ usualmente no puede expresarse en términos de funciones zeta parciales para componentes simples.

En lo sucesivo $\Delta^\times$ es el grupo de unidades de un anillo Δ.

Definición 5.1. Una $\mathbb{Z}$-retícula completa en un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V de dimensión fiinita es un submódulo L en V que extiende a V sobre $\mathbb{Q}$.

Observación 5.2. Usamos la misma terminología cuando $\mathbb{Q}$ es reemplazado por $\mathbb{Q}_p$. Cuando $\mathbb{Q}$ es reemplazado por R, también exigimos que L sea un grupo discreto de V.

Definición 5.2. Un $\mathbb{Z}$-orden en una $\mathbb{Q}$-álgebra de dimensión finita A es un subanillo de A que también es una $\mathbb{Z}$-retícula completa en A. Esta definición se vale para $\mathbb{Z}_p$-ordenes.

Definición 5.3. Una función Zeta parcial es

$$Z_\Delta(M, s) = \sum_{X \cong M} (\Delta : X)^{-s}$$

donde s es una variable compleja y la suma se extiende sobre todos los ideales izquierdos X de Δ para $X \cong M$ como Δ-módulos.

Definición 5.4. Sean G un grupo y H_1, H_2 subgrupos de G, decimos que H_1 es conmensurable con H_2 si $H_1 \cap H_2$ tiene un índice finito tanto en H_1 como en H_2.

Observación 5.3. El índice del grupo generalizado

$$(H_1 : H_2) = \frac{(H_1 : H_1 \cap H_2)}{(H_2 : H_1 \cap H_2)}$$

está bien definido.

Ejemplo 5.1. Dos $\mathbb{Z}$-retículas completas en el mismo $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V de dimension finita son subgrupos conmensurables en V.

Definición 5.5. Un subgrupo W de $A^\times$ es llamado un subgrupo aritmetico si es conmesurable con $\Delta^\times$ para algún $\mathbb{Z}$-orden Δ en A.

Definición 5.6. Una tripleta admisible izquierda (W, L, m) en A consiste de un subgrupo aritmetico W de $A^\times$, una $\mathbb{Z}$-retícula completa L en A y un elemento $m \in A$ tal que

$$WL = L \text{ y } \ W(m + L) = m + L$$

es decir,

$$wL = L \ \text{ y } \ wm - m \in L \ \ \forall w \in W$$

Analogamente, definimos una tripleta admisible derecha (m, L, W) excepto que W actúa sobre L y $m + L$ desde la derecha.

Definición 5.7. Para $x \in A^\times$ definimos

$$\|x\| = (Mx : M)$$

para cualquier $\mathbb{Z}$-reticula.

Observación 5.4. La definición anterior solo depende de x y no de M. Como A es semisimple, también tenemos

$$\|x\| = (xM : M) \text{ para } \ x \in A^\times.$$

Más aún,

$$\|w\| = 1,$$

si w es un elemento de algún subgrupo aritmetico de $A^\times$. Escribiremos $\|x\|_A$ cuando sea necesario especificar el álgebra A.

Definición 5.8. Dada una tripleta admisible (W, L, m) en A, la serie de Hurwitz $F(s; W, L, m)$ está definida como sigue:

$$F(s; W, L, m) = \sum_{x \in W \backslash [(m+L) \cap A^\times]} \|x\|^s,$$

donde s es una variable compleja y la suma se extiende sobre un conjunto de representantes x de las W-órbitas en $(m + L) \cap A^\times$. Análogamente, para una tripleta admisible derecha (m, L, W) definimos $F(s; m, L, W)$.

Teorema 5.1. *Sea $F(s; W, L, m)$ una serie de Hurwitz, entonces*

- *$F(s;W,L,m)$ converge absoluta y uniformemente sobre conjuntos compactos a una función holomorfica de s en la región $Re(s)>1$.*
- *Las series de Hurwitz admiten una continuación análitica a una función meromorfa en todo el s-plano. Si $A=\prod_{i=1}^{r} A_i$ donde A_i son álgebras simples, entonces $F(s;W,L,m)$ tiene un polo de orden r en $s=1$.*

Ejemplo 5.2. Sea Δ un $\mathbb{Z}$-orden en A y M un ideal izquierdo completo de Δ. Podemos formar la función Zeta parcial como sigue:

$$Z_\Delta(M,s)=\sum_{X\cong M}(\Delta:X)^s,$$

definimos

$$M^{-1}=\{x\in A: Mx\subset\Delta\}$$

y

$$Aut_\Delta M=\{x\in A^\times : Mx=M\}$$

entonces M^{-1} es una $\mathbb{Z}$-retícula completa en A y $Aut_\Delta M$ es un subgrupo aritmetico de $A^\times$ que actúa sobre M^{-1}a la izquierda. De este modo

$$(Aut_\Delta(M),M^{-1},0)$$

es un tripleta admisible izquierda en A. Luego podemos expresar a la función Zeta parcial como sigue:

$$Z_\Delta(M,s)=(\Delta,M)^{-s}F(s;Aut_\Delta(M),M^{-1},0).$$

La ecuación funcional para una serie de Hurwitz $F(s)$ implicará "factores gamma"que deben considerarse como una contribución al primo arquimidiano ∞ de $\mathbb{Q}$, que se definen como sigue:

Definición 5.9. Denotemos por Γ la función gamma de Euler y

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{R}}(s)&=&\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2}),\\ \gamma_{\mathbb{C}}(s)&=&(2\pi)^{1-s}\Gamma(s),\\ \gamma_{\mathbb{H}}(s)&=&(2\pi)^{-2s}\Gamma(2s),\end{aligned}$$

donde $\mathbb{H}$ es la álgebra de los Cuaternianos Hamiltonianos. Si B es una R-álgebra simple de dimensión finita, tenemos

$$B\cong M_n(K)$$

para $n\geq 1$, donde $K=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$.

Definición 5.10. Definimos

$$\gamma_B(s)=\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_K(ns-j).$$

Finalmente, para una $\mathbb{Q}$-álgebra semisimple A, tenemos

$$A_\infty = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_i B_i$$

donde B_i son $\mathbb{R}$-álgebras simples y definimos

$$\gamma_A(s) = \prod_i \gamma_{B_i}(s).$$

Definición 5.11. Para una tripleta admisible (W, L, m) en A, escribimos

$$\tilde{F}(s; W, L, m) = \gamma_A(s) F(s; W, L, m)$$

para referirnos a tal función como una serie extendida de Hurwitz. La siguiente ecuación funcional es mucho más clara cuando se expresa en términos de funciones $\tilde{F}$ que F.

Definición 5.12. Sea $tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}}} : A \to \mathbb{Q}$ la función traza reducida, definimos

$$\theta_A : A \to \mathbb{C}^\times$$

como

$$\theta_A(x) = e^{(2i\pi tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}}}(x))}$$

Observación 5.5. Notemos que para todo $x, y \in A$

$$\theta_A(x + y) = \theta_A(x)\theta_A(y)$$

y

$$\theta_A(xy) = \theta_A(yx).$$

Definición 5.13. Si L es una $\mathbb{Z}$-retícula completa en A, definimos

$$L^\perp = \{x \in A : \theta_A(xL) = \{1\}\} = \{x \in A : tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}}}(xL) \subset \mathbb{Z}\}$$

la función traza es no degenerada, entonces esta es otra $\mathbb{Z}$-retícula completa en A y

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Además, para cualquier otra $\mathbb{Z}$-retícula completa M en A, se tiene

$$(M : L) = (L^\perp : M^\perp).$$

Más aún, si W es un subgrupo aritmético de $A^\times$ tal que $WL = L$, entonces

$$L^\perp W = L^\perp.$$

Teorema 5.2. ***(Ecuación Funcional para Series de Hurwitz)***
Sea A una $\mathbb{Q}$-álgebra semisimple de dimensión finita y (W, L, m) una tripleta izquierda adminisible en A. Existe una $\mathbb{Z}$-retícula M en A que satisface:

$$m \in M, L \subset M, WM = M$$

y W actúa trivialmente sobre $\frac{M}{L}$. Para cualquier M y cualquier $b \in L^\perp, (b, M^\perp, W)$ es una tripleta derecha admisible en A y

$$\tilde{F}(s; W, L, m) = (L^\perp : L)^{\frac{1}{2}} \sum_{b \in \frac{L^\perp}{M^\perp}} \theta_A(mb)\tilde{F}(1 - s; b, M^\perp, W).$$

Observación 5.6.

- La existencia de la retícula M que satisface la primera ecuación del Teorema anterior es sencilla, basta tomar

$$M = \mathbb{Z}m + L.$$

La admisibilidad de las tripletas $(b, M^{\perp}, W), b \in L^{\perp}$ es inmediata.

- El lado izquierdo de la segunda ecuación del Teorema no depende de M

Definición 5.14. Sea Δ un orden máximo en A, definimos y denotamos el discriminante absoluto de A como sigue:

$$d_A = (\Delta^{\perp} : \Delta)$$

el cual es un entero positivo.

Observación 5.7. Notemos que d_A es una versión ligeramente diferente de la constante

$$(L^{\perp} : L)^{\frac{-1}{2}}$$

d_A es independiente de la elección de Δ y puede ser calculado en términos de A. Además

$$\begin{aligned} (L^{\perp} : L) &= (L^{\perp} : \Delta^{\perp})(\Delta^{\perp} : \Delta)(\Delta : L), \\ (L^{\perp} : L) &= (\Delta : L)^2 d_A, \\ (L^{\perp} : L)^{\frac{-1}{2}} &= (L : \Delta) d_A^{\frac{-1}{2}}. \end{aligned}$$

Definición 5.15. Definimos la función Zeta clásica de Hurwitz,

$$\zeta(s; a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-s} \quad Re(s) > 1$$

donde $0 < a \leq 1$.

Observación 5.8. Sabemos $\zeta(s; a)$ satisface una ecuación funcional (para $Re(s) < 0$) a saber,

$$\zeta(s; a) = 2\Gamma(1 - s)(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} (sen(\frac{\pi s}{2}) cos(2\pi an) + cos(\frac{\pi s}{2}) sen(2an\pi))) n^{s-1},$$

si tomamos $a = \frac{1}{k}, \quad k \geq 2$ como un entero, esto expresa a $\zeta(s; a)$ como una combinación lineal de

$$\zeta(1 - s; \frac{j}{k}), \quad 0 < j \leq k,$$

como en la segunda ecuación del Teorema anterior.

Notemos que

$$\zeta(s; k^{-1}) + \zeta(s; 1 - k^{-s}) = F(s; \{1\}, \mathbb{Z}, k^{-1}).$$

Ahora si en el Teorema de la ecuación Funcional para Series de Hurwitz tomamos $m = 0$, entonces podemos elegir $M = L$ para obtener un caso especial, a saber:

$$\tilde{F}(s; W, L, 0) = (L^{\perp} : L)^{\frac{-1}{2}} \tilde{F}(1 - s; 0, L^{\perp}, W).$$

Corolario 5.1. ***(Ecuación Funcional para Funciones Zeta Pariales)***
Sea Δ un $\mathbb{Z}$-orden en una $\mathbb{Q}$-álgebra A semisimple de dimensión finita, y sea M una Δ-retícula plena izquierda en A. Sea Δ' un $\mathbb{Z}$-orden máximo en A. Entonces

$$\gamma_A(s)Z_\Delta(s)(M,s) = (\Delta : M)^{-s}(M^{-1} : \Delta')d_A^{\frac{-1}{2}}\gamma_A(1-s)F(1-s;0,(M^{-1})^\perp, Aut_\Delta M)$$

Observación 5.9. En ciertos casos, es posible expresar la serie de Hurwitz

$$F(1-s;0,(M^{-1})^\perp, Aut_\Delta M)$$

en términos de una función Zeta parcial $Z_\Delta(M', 1-s)$ para alguna Δ-retícula derecha M'. El punto crucial parece ser cuándo se da la siguiente igualdad:

$$(M^{-1})^\perp = (M')^{-1} \text{ para algún } M'.$$

En el caso donde $\Delta = RG$, el anillo de grupo de un grupo finito G sobre un anillo R de enteros en un campo algebraico tenemos

$$(M^{-1})^\perp = (M^\perp)^{-1}$$

y obtenemos una ecuación funcional para $Z_\Delta(M,s)$ en el que el lado derecho involucra el contragradiente de M.

Reducción al Caso Simple

Lema 5.1. *Sea (W, L, m) un tripleta admisible en A, y W' un subgrupo aritmetico de $A^\times$ tal que (W', L, m) es tambien admisible, entonces*

$$F(s;W',L,m) = (W : W')F(s;W,L,m).$$

Lema 5.2. *Sea (W, L, m) una tripleta admisible en A y sean M, N retículas W-estables en A, tal que $N \subset L \subset M, m \in M$ y W actúa trivialmente sobre $\frac{M}{N}$ entonces, para cada $l \in L$, la tripleta $(W, N, l+m)$ es admisible y*

$$F(s;W,L,m) = \sum_{l\in\frac{L}{N}} F(s;W,N,l+m).$$

Lema 5.3. *Para $i = 1,2$, sea (W_i, L_i, m_i) una tripleta admisible en el álgebra A_i, entonces $(W_1 \times W_2, L_1 \times L_2, (m_1, m_2))$ es un tripleta admisible en $A_1 \times A_2$ y*

$$F(s;W_1 \times W_2, L_1 \times L_2, (m_1,m_2)) = F(s;W_1,L_1,m_1)F(s;W_2,L_2,m_2).$$

Observación 5.10. Los lemas anteriores son válidos al reemplazar F por $\tilde{F}$.

Notación 5.1. Sea $A = \prod_{i=1}^{r} A_i$, donde las A_i son álgebras simples y escribimos $x \mapsto x_i$ para la proyección canónica $A \to A_i$. Si $E \subset A$, escribimos E_i para su imagen en A_i. En particular, si Δ es un orden máximo en A, tenemos

$$\Delta = \prod \Delta_i$$

y Δ_i es un orden máximo en A_i.

Definición 5.16. Sea (W, L, m) una tripleta admisible en A. Decimos que se descompone si

$$W = \prod_{i=1}^{r} W_i \quad L = \prod_{i=1}^{r} L_i.$$

Observación 5.11. Si esto se satisface, entonces (W_i, L_i, m_i) es una tripleta admisible en A_i para cada i, luego el Lema 5.3 resulta

$$F(s; W, L, m) = \prod_{i=1}^{r} F(s; W_i, L_i, m_i).$$

Es más conveniente escribir $(W, L, m)_i$ en lugar de (W_i, L_i, m_i).

Definición 5.17. Sea Δ un orden máximo en A y un entero positivo "c". Una tripleta admisible (W, L, m) en A es un tripleta congruente (relativa a Δ con conductor "c") si

$$\text{L es una retícula izquierda } \; cm \in L \;\; y \;\; W = W_c = (1 + c\Delta) \cap \Delta^{\times}$$

W_c es un subgrupo aritmetico de $A^{\times}$ para cualquier entero positivo c.

Observación 5.12. Notemos que W_c es un subgrupo aritmetico de $A^{\times}$ para cualquier entero positivo **c**. Cualquier tripleta congruente se descompone y cada factor $(W, L, m)_i$ es una tripleta congruente en A_i relativo al orden máximo Δ_i y con conductor **c**.

Proposición 5.1. *Sea (W, L, m) una tripleta admisible en A y Δ un orden máximo en A. Existe una Δ-retícula M tal que $L \subset M, m \in M$ y existe un entero positivo "c" tal que $cM \subset L$. Si $W_c = (1 + c\Delta) \cap \Delta^{\times}$, tenemos*

$$\begin{aligned} F(s; W, L, m) &= (W_c : W) \sum_{l \in \frac{L}{cM}} F(s; W_c, cM, m + l) \\ &= (W_c : W) \sum_{l \in \frac{L}{cM}} \prod_{i=1}^{r} F(s; (W_c, cM, m + l)_i) \end{aligned}$$

Demostración. La existencia de M y c son inmediatas y la expresión para $F(s; W, L, m)$ se siguen de los lemas 5.1-5.3. ∎

Notemos que cada $(W_c, cM, m + l)_i$ es una tripleta congruente a Δ_i con conductor **c**.

Corolario 5.2. *Cualquier serie de Hurwitz asociada a A se puede escribir como una combinación lineal finita de productos de series de Hurwitz de tripletas congruentes en componentes simples de A.*

Proposición 5.2. *Sea M_1 otra $\mathbb{Z}$-retícula que satisface el Teorema de la Ecuación Funcional para Series de Hurwitz, entonces*

$$\sum_{b \in \frac{L^{\perp}}{M^{\perp}}} \theta_A(mb) F(s; b, M^{\perp}, W) = \sum_{b_1 \in \frac{L^{\perp}}{M^{\perp}}} \theta_A(mb_1) F(s; b_1, M_1^{\perp}, W).$$

Teorema 5.3. *Para cualquier $\mathbb{Z}$-retícula M y cualquier $b \in L^{\perp}, (b, M^{\perp}, W)$ es una tripleta admisible derecha en A y*

$$\tilde{F}(s; W, L, m) = (L^{\perp} : L)^{\frac{-1}{2}} \sum_{b \in \frac{L^{\perp}}{M^{\perp}}} \theta_A(mb) \tilde{F}(1 - s; b, M^{\perp}, W).$$

Supongamos que la condición anterior se cumple bajo las siguientes hipótesis adicionales.

i) *A es un álgebra simple.*

ii) *(W, L, m) es un tripleta congruente relativa a algún Δ-orden máximo y conductor c.*

iii) *M es una Δ-retícula izquierda y $cM \subset L$, entonces la condición inicial se cumple en general.*

Observación 5.13. Dados *i)* y *ii)*, uno puede encontrar siempre a M tal que satisfaga *iii)*.

Integrales Zeta

Sea A una $\mathbb{Q}$-álgebra simple de dimensión finita con centro K y $dim_K A = n^2, n \geq 1$. Sea Δ-algún orden máximo en A.
Denotemos por $Ad(A)$ el grupo de Adeles finitos de A y $J(A)$ el grupo de Ideles finitos de A. Si L es una Δ-retícula en A, establecemos

$$U(\Delta) = \prod_P \Delta_P^\times \text{ y } Ad(L) = \prod_P L_P.$$

Aquí, P corre sobre los lugares no arquimidianos de K, y el subíndice p denota la completación p-ádica. De este modo $U(A)$ y $Ad(L)$ son subgrupos compactos abiertos de $J(A)$ y $Ad(A)$ respectivamente.

Definición 5.18. Si $x \in J(A)$, escribimos

$$\|x\| = ((AdL)x : AdL)$$

para alguna L Δ-retícula completa en A.

Si vemos a $A^\times$ encajado en $J(A)$ en la diagonal, entonces

$$\|x\| = (Lx : L) \text{ para } x \in A^\times,$$

esta definición coincide con la de $\|x\|$ que se definio con anterioridad.

Definición 5.19. Sea $\mathcal{F}(A)$ quien denota el espacio de las funciones localmente constantes de soporte compacto

$$\Phi : Ad(A) \to \mathbb{C}.$$

Esto se extiende sobre $\mathbb{C}$, por funciones de la forma

$$\Phi(x) = \prod_P \phi_P(x_p) \text{ con } x = (x_p) \in Ad(A),$$

donde para cada P la función ϕ_P es un elemento del espacio de las funciones localmente constantes de soporte compacto $\mathcal{F}(A_p)$ que van de A_p a $\mathbb{C}$ y ϕ_P es la función caracteristica de Δ_p, sea $\psi : J(A) \to \mathbb{C}^\times$ un caracter continuo con imagen finita el cual es trivial sobre $A^\times$.

Definición 5.20. Sea

$$Z(\phi, \psi, s) = \int_{J(A)} \phi(x)\psi(x)\|x\|^s d^\times x, \ \ \phi \in \mathcal{F}(A) \ \ , Re(s) > 1,$$

donde $d^\times x$ es la medida de Haar sobre $J(A)$. La elección de $d^\times x$ es irrelevante pero por conveniencia tomamos aquella que

$$\int_{U(\Delta)} d^\times x = 1.$$

Teorema 5.4. *Sea χ el único caracter de $J(K)$ para el cual $\psi = \chi \cdot nr$, donde "nr" denota la función norma reducida*

$$J(A) \to J(K).$$

Entonces χ es un caracter de Hecke de K, y sea $L_K(s, \chi)$ quien denota esta L-función. Entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{F}(A)$ tenemos

$$Z(\phi, \psi, s) = \prod_{j=0}^{n-1} L_K(ns - j, \chi) \cdot \prod_P g_P(s)$$

donde $g_P(s) \in \mathbb{C}[p^s, p^{-s}]$ para todo P (siendo p el primo racional por debajo de P). Además $g_P = 1$, en particular

- *$Z(\phi, \psi, s)$ admite una continuación análitica a una función meromorfica sobre el plano s.*
- *Si ψ es no trivial, entonces $Z(\phi, \psi, s)$ es una función completa de s*
- *Si ψ es trivial, entonces $Z(\phi, \psi, s)$ es holomorfa excepto posiblemente para polos simples en $s = \frac{j}{n}$ con $1 \leq j \leq n$.*

Definición 5.21. Sea dx la medida de Haar sobre $Ad(\Delta)$ para la cual

$$\int_{Ad(\Delta)} dx = d_A^{-\frac{1}{2}}$$

donde $d_A = (\Delta^{\perp} : \Delta)$. Sea $\theta_A : Ad(A) \to \mathbb{C}^{\times}$ el caracter dado por

$$\theta_A(x) : \prod_P \theta_P(x_p) \text{ con } x = (x_p) \in Ad(A)$$

donde

$$\theta_P(y) = e^{2\pi i T(y)} \text{ donde } T(y) = tr_{\frac{A_P}{\mathbb{Q}_P}}, y \in A_P.$$

Aquí tr denota la función traza reducida y para $\alpha \in \mathbb{Q}_p$,

$$e^{2\pi i \alpha} \text{ significa } e^{2\pi i \alpha_0}$$

con $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$ la parte principal de α.

Observación 5.14. Esta definición coincide con

$$e^{2\pi i tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}}}(x)}, \quad x \in A$$

cuando $x \in A \subset Ad(A)$.
El par

$$(x, y) \mapsto \theta_A(xy) \;\; x, y \in Ad(A)$$

es no degenerado e identifica a $Ad(A)$ con su dual de Pontjagin.

Observación 5.15. Si L es una Δ-retícula completa en A, podemos formar $Ad(L)$ y tomar su complemento ortogonal $(Ad(L))^{\perp}$ con respeto a esta pareja.

Observación 5.16. Si

$$L^{\perp} = \{x \in A : \theta_A(xL) = \{1\}\} = \{x \in A : tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}}}(xL) \subset \mathbb{Z}\},$$

se sigue que $Ad(L^{\perp}) = (Ad\ L)^{\perp}$ y usaremos el simbolo $Ad\ \ L^{\perp}$ para este grupo.

Definición 5.22. Para $\phi \in \mathcal{F}(A)$, pongamos

$$\hat{\phi}(y) = \int\limits_{Ad(A)} \phi(x)\theta_A(xy)dx \ \ y \in Ad(A),$$

entonces $\hat{\phi} \in \mathcal{F}(A)$.

Teorema 5.5. *Sea A, ψ como antes y definimos $\gamma_A(s)$ como en la definición* 5,10 *entonces para todo $\phi \in \mathcal{F}(A)$, tenemos*

$$\gamma_A(s)Z(\phi, \psi, s) = \gamma_A(1-s)Z(\hat{\phi}, \psi^{-1}, 1-s)$$

Observación 5.17. La medida definida en 5.21 es la medida de Haar que es su propio dual sobre $Ad(A)$ para el par

$$(x, y) \mapsto \theta_A(xy)$$

Por lo tanto, es la medida de Haar correcta para definir la transformada de Fourier $\hat{\phi}$ como en 5.22.

Para los detalles y las demostraciones ver [4].

Capítulo 6

Funciones L para $B_p(C_{p^3})$

A lo largo de este capítulo sean A una álgebra semisimple de dimensión finita sobre un campo racional p-ádico $\mathbb{Q}_p$, Δ un $\mathbb{Z}_p$-orden en A y M un ideal izquierdo de Δ de índice finito, además sea A^* el grupo de las unidades de A y $\Psi : A \to S^1$ un caracter (es decir, un homomorfismo continuo al circulo unitario complejo) de A^* que es de orden finito y trivial en el subgrupo Aut_ΔM.

Definición 6.1. Definimos y denotamos la función L local como sigue:

$$L_\Delta(M, s, \Psi) = \sum_N \Psi(N)(\Delta : N)^{-s}, \quad Re(s) > 1,$$

donde la suma se extiende sobre todos los ideales izquierdos N de Δ tales que $N \cong M$. Aquí $\Psi(N)$ es definida por la formula

$$\Psi(N) = \Psi(x)$$

para todo $x \in A^*$, tal que $N = Mx$.

Observación 6.1. Dado que Ψ es trivial sobre $Aut_\Delta M$, $\Psi(N)$ es independiente de la elección de x en la formula de anterior. Entonces $L_\Delta(M, s, \Psi)$ es una serie de potencias en p^{-s} con coeficientes en el anillo $\mathbb{Z}[\Psi]$ el cual se obtiene adjuntando a $\mathbb{Z}$ los valores de Ψ, que por supuesto son las raices de la unidad.

Observación 6.2. Para los casos $B(G), \bar{(}G), B_p(G)$ y $B_p(G)$ con G un grupo finito, la suma se extiende sobre todos los ideales de indice finito tal que $N \cong M$, y converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\{s \in \mathbb{C} | Re(s) > 1\}$.

Definición 6.2. Sea $\Phi_{\{M,\Delta\}}$ la función caracteristica en A de $\{M, \Delta\}$ y elegimos la medida de Haar d^*x en el grupo de unidades A^*. Para conjuntos medibles $E \subset A, E' \subset A^*$, será conveniente escribir

$$\mu(E) = \int_E dx \ \text{ y } \ \mu(E') = \int_{E'} d^*x$$

entonces:

$$L_\Delta(M, s, \Psi) = \mu^*(Aut_\Delta M)^{-1}(\Delta : M)^{-s} \int\limits_{x \in A^*} \Phi_{\{M:\Delta\}}(x)\}\Psi(x)\|x\|_A^s d^*x.$$

donde $\|x\|_A = (Yx : Y)$ para $x \in A^*$ y Y es una $\mathbb{Z}_p$-retícula completa.

Función L para $B_p(C_p)$

Sea $B_1 = B_p(C_p)$ el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p, recordemos que

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2 : x - y \in p\mathbb{Z}_p\}.$$

Sabemos que las únicas clases de isomorfismo de los ídeales fraccionales de B_1 de índice finito son:

$$B_1 \text{ y } \bar{B}_1$$

donde $\bar{B}_1 = \mathbb{Z}_p^2$ y en lo sucesivo B_i^* denotará las unidades de B_i. Elegimos la medida de Haar d^*x sobre $(\mathbb{Q}_p^*)^2$ tal que $d^*x = (d^*x_1)^2$, donde d^*x_1 es una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p^*$ tal que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*x_1 = 1.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mu^*(\bar{B}_1^*) = 1$$

Sea $\Psi = (\Psi_{t_1}, \Psi_{t_2}) : (\mathbb{Q}_p^*)^2 \to S^1$ un caracter continuo de orden finito, el cual es trivial sobre $(\mathbb{Z}_p^*)^2$, donde

$$\Psi_t : \mathbb{Q}_p^* \to S^1$$

esta definida por $\Psi_t(p) = e^{\frac{2i\pi}{t}}$, para $0 < t \in \mathbb{Z}$, y $\Psi(b_1, b_2) = \Psi_{t_1}(b_1)\Psi_{t_2}(b_2)$, para cada $(b_1, b_2) \in (\mathbb{Q}_p^*)^2$.

- Calculemos ahora la función L para $\bar{B}_1 = \mathbb{Z}_p^2$, que por definición es:

$$L_{\bar{B}_1}(\bar{B}_1, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{\bar{B}_1}\bar{B}_1)^{-1}(\bar{B}_1 : \bar{B}_1)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2} \Phi_{\{\bar{B}_1 : \bar{B}_1\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$= \mu^*(\bar{B}_1^*)^{-1} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2} \Phi_{\{\bar{B}_1\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x = \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2 \cap \mathbb{Z}_p^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x$$

$$= \left[\int\limits_{\uplus_{n=0}^{\infty} p^n\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_1}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1 \right] \left[\int\limits_{\uplus_{m=0}^{\infty} p^m\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_2}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1 \right]$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} [\Psi_{t_1}(p)p^{-s}]^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} [\Psi_{t_2}(p)p^{-s}]^m \right).$$

Por lo tanto tenemos:

$$L_{\bar{B}_1}(\bar{B}_1, s, \Psi) = \frac{1}{(1 - \Psi_{t_1}(p)p^{-s})(1 - \Psi_{t_2}(p)p^{-s})}$$

- Ahora calculemos $L_{B_1}(B_1, s, \Psi)$, sabemos que $B_1 = B_1^* \uplus (p,p)\mathbb{Z}_p^2$ donde B_1^* y además,

   a) $Aut_{B_1} B_1 = B_1^*$,

   b) $\mu^*(B_1^*)^{-1} = p-1$,

   c) $\{B_1 : B_1\} = B_1$

   entonces:

$$L_{B_1}(B_1, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{B_1} B_1)^{-1}(B_1 : B_1)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2} \Phi_{\{B_1:B_1\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$(p-1) \int\limits_{[B_1^* \uplus (p,p)\mathbb{Z}_p^2] \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$(p-1)\left[\int\limits_{B_1^* \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x + \int\limits_{[(p,p)\mathbb{Z}_p^2] \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x\right] =$$

$$(p-1)\int\limits_{B_1^*} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x + (p-1) \int\limits_{[(p,p)\mathbb{Z}_p^2] \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$(p-1)\frac{1}{(p-1)} + (p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)p^{-2s} \int\limits_{[\mathbb{Z}_p^2] \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$1 + (p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)p^{-2s} L_{\bar{B}_1}(\bar{B}_1, s, \Psi).$$

   Por lo tanto obtenemos

$$L_{B_1}(B_1, s, \Psi) = [1 - \Psi_{t_1}(p)p^{-s} - \Psi_{t_2}(p)p^{-s} + \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)p^{1-2s}] L_{\bar{B}_1}(\bar{B}_1, s, \Psi).$$

- Por último calculemos $L_{B_1}(\bar{B}_1, s, \Psi)$, observemos que:

   a) $Aut_{B_1} \bar{B}_1 = \bar{B}_1^*$,

   b) $\{\bar{B}_1 : B_1\} = (p,p)\mathbb{Z}_p^2$,

c) $(\bar{B}_1 : B_1) = p$

entonces,

$$L_{B_1}(\bar{B}_1, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{\bar{B}_1} B_1)^{-1}(B_1 : \bar{B}_1)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2} \Phi_{\{\bar{B}_1 : B_1\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$p^s \int\limits_{(p,p)\mathbb{Z}_p^2 \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x = \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)p^{-s} \int\limits_{[\mathbb{Z}_p^2] \cap (\mathbb{Q}_p^*)^2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

así

$$L_{B_1}(\bar{B}_1, s, \Psi) = [\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)p^{-s}]L_{\bar{B}_1}(\bar{B}_1, s, \Psi).$$

Función L para $B_p(C_{p^2})$

Sea $B_2 = B_p(C_{p^2})$ el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^2, además, recordemos que

$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3; y - x \in p\mathbb{Z}_p, z - y \in p^2\mathbb{Z}_p\}.$$

Sabemos que las únicas clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de B_2 de índice finito son:

$M_1 = B_2$,
$M_2 = \bar{B}_2$,
$M_3 = \mathbb{Z}_p \times B_1$,
$M_4 = B_1 \times \mathbb{Z}_p$,
$M_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - x \in p\mathbb{Z}_p\}$,
$M_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : y - x \in p\mathbb{Z}_p, z - x \in p\mathbb{Z}_p\}$,
$M_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - y \in p^2\mathbb{Z}_p\}$,
$M_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\}$,
$M_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\}$.

Elegimos la medida de Haar d^*x sobre $(\mathbb{Q}_p^*)^3$ tal que $d^*x = (d^*x_1)^3$, donde d^*x_1 es una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p^*$ tal que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*x_1 = 1.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mu^*(\bar{B}_2^*) = 1$$

Sea $\Psi = (\Psi_{t_1}, \Psi_{t_2}, \Psi_{t_3}) : (\mathbb{Q}_p^*)^3 \to S^1$ un caracter continuo de orden finito, el cual es trivial sobre $(\mathbb{Z}_p^*)^3$, donde

$$\Psi_t : \mathbb{Q}_p^* \to S^1$$

esta definida por $\Psi_t(p) = e^{\frac{2i\pi}{t}}$, para $0 < t \in \mathbb{Z}$, y $\Psi(b_1, b_2, b_3) = \Psi_{t_1}(b_1)\Psi_{t_2}(b_2)\Psi_{t_3}(b_3)$, para cada $(b_1, b_2, b_3) \in (\mathbb{Q}_p^*)^3$.

- Calculemos ahora la función L para $\bar{B}_2 = \mathbb{Z}_p^3$, entonces por definición tenemos:

$$L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{\bar{B}_2}\bar{B}_2)^{-1}(\bar{B}_2 : \bar{B}_2)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3} \Phi_{\{\bar{B}_2:\bar{B}_2\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$\mu^*(\bar{B}_2^*)^{-1} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3} \Phi_{\{\bar{B}_2\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^3\cap(\mathbb{Q}_p^*)^3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$\left[\int\limits_{\uplus_{n=0}^{\infty}p^n\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_1}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right]\left[\int\limits_{\uplus_{m=0}^{\infty}p^m\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_2}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right]\left[\int\limits_{\uplus_{l=0}^{\infty}p^l\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_3}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right]$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}[\Psi_{t_1}(p)p^{-s}]^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}[\Psi_{t_2}(p)p^{-s}]^m\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}[\Psi_{t_3}(p)p^{-s}]^l\right).$$

Por lo tanto:

$$L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi) = \frac{1}{(1-\Psi_{t_1}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_2}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_3}(p)p^{-s})}.$$

- Ahora calculemos $L_{B_2}(B_2, s, \Psi)$, sabemos que $B_2 = B_2^* \uplus [p\mathbb{Z}_p \oplus pB_1]$ y además,

  a) $Aut_{B_2}B_2 = B_2^*$,

  b) $\mu^*(B_2^*)^{-1} = p(p-1)^2$,

  c) $\{B_2 : B_2\} = B_2$

entonces:

$$L_{B_2}(B_2, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{B_2}B_2)^{-1}(B_2 : B_2)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3} \Phi_{\{B_2:B_2\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$p(p-1)^2 \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3\cap[B_2^*\uplus(p\mathbb{Z}_p\times pB_1)]} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$p(p-1)^2 \int\limits_{[(\mathbb{Q}_p^*)^3\cap B_2^*]\uplus[(\mathbb{Q}_p^*)^3\cap(p\mathbb{Z}_p\times pB_1)]} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$\left[p(p-1)^2 \int\limits_{[(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap B_2^*]} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right] + \left[p(p-1)^2 \int\limits_{[(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap (p\mathbb{Z}_p \times pB_1)]} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right] =$$

$$1 + p(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{-3s} \left[\int\limits_{[(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap (\mathbb{Z}_p \times B_1)]} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right] =$$

$$1 + \left[\frac{p(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{-3s}}{(1-\Psi_{t_1}(p)p^{-s})}\right]\left[\frac{1-(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p))p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)(1-\Psi_{t_2}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_3}(p)p^{-s})}\right] =$$

$$\left[1 - \left(\sum_{i=1}^{3} \Psi_{t_i}(p)\right) p^{-s} + (\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p) + \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_3}(p) + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p))p^{-2s} + \right.$$

$$\left(\prod_{i=1}^{3} \Psi_{t_i}(p)\right)(p^2-p-1)p^{-3s} + \left(\prod_{i=1}^{3} \Psi_{t_i}(p)\right)(\Psi_{t_2}(p)+\Psi_{t_3}(p))(p-p^2)p^{-4s} +$$

$$\left. \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)(p^3-p^2)p^{-5s}\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- Ahora calculemos $L_{B_2}(\bar{B}_2, s, \Psi)$, observemos que:

  a) $Aut_{B_2}\bar{B}_2 = \bar{B}_2^*$, y $\mu^*(\bar{B}_2^*)^{-1} = 1$

  b) $\{\bar{B}_2 : B_2\} = (p, p^2, p^2)\bar{B}_2$,

  c) $(\bar{B}_2 : B_2) = p^3$

  entonces:

$$L_{B_2}(\bar{B}_2, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{B_2}\bar{B}_2)^{-1}(B_2 : \bar{B}_2)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3} \Phi_{\{\bar{B}_2 : B_2\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$p^{3s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap (p,p^2,p^2)\bar{B}_2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)p^{-2s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap \bar{B}_2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

Por lo tanto:

$$L_{B_2}(\bar{B}_2, s, \Psi) = \Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)p^{-2s}L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_3 = \mathbb{Z}_p \times B_1$, entonces:

$$L_{B_2}(M_3, s, \Psi) = p^{-s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap M_3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= p^{-s}\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)\left[1 - (\Psi_{t_2}(p) + \Psi_{t_3}(p))p^{-s} + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_4 = B_1 \times \mathbb{Z}_p$, entonces:

$$L_{B_2}(M_4, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap \mathbb{Z}_p^3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - x \in p\mathbb{Z}_p\}$, entonces:

$$L_{B_2}(M_5, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap \mathbb{Z}_p^3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3 : y - x, z - x \in p\mathbb{Z}_p\}$, entonces:

$$L_{B_2}(M_6, s, \Psi) = p^{-2s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap M_3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[\frac{(p-1)\prod_{i=1}^{3}\Psi_{t_i}(p)}{p^{2s}}\right]\left[1 - (\Psi_{t_2}(p) + \Psi_{t_3}(p))p^{-s} + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 : z - y \in p^2\mathbb{Z}_p\}$, entonces:

$$L_{B_2}(M_7, s, \Psi) = p^{1-2s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap M_3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{3} \Psi_{t_i}(p)\right] p^{1-2s}\left[1 - (\Psi_{t_2}(p) + \Psi_{t_3}(p))p^{-s} + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 : px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\}$, entonces:

$$L_{B_2}(M_8, s, \Psi) = p^{1-2s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap M_3} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[\frac{(p-1)\prod_{i=1}^{3} \Psi_{t_i}(p)}{p^{-1+2s}}\right]\left[1 - (\Psi_{t_2}(p) + \Psi_{t_3}(p))p^{-s} + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

- $M_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 : x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\}$, entonces:

$$L_{B_2}(M_9, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^3 \cap \bar{B}_2} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

$$= \left[(p-1)^2p^{-3s}\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\Psi_{t_3}^2(p)\right] L_{\bar{B}_2}(\bar{B}_2, s, \Psi).$$

Función L para $B_p(C_{p^3})$

En lo sucesivo denotemos por:

$$\mathcal{J}_1 = 1 - \Psi_{t_3}(p)p^{-s} - \Psi_{t_4}(p)p^{-s} + \Psi_{t_3}(p)\Psi_{t_4}(p)p^{1-2s}$$

y

$$\mathcal{J}_2 =$$

$$\left[1 - \left(\sum_{i=2}^{4} \Psi_{t_i}(p)\right) p^{-s} + (\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}(p) + \Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_4}(p) + \Psi_{t_3}(p)\Psi_{t_4}(p))p^{-2s}\right.$$

$$\left(\prod_{i=2}^{4} \Psi_{t_i}(p)\right)(p^2 - p - 1)p^{-3s} + \left(\prod_{i=2}^{4} \Psi_{t_i}(p)\right)(\Psi_{t_3}(p) + \Psi_{t_4}(p))(p - p^2)p^{-4s} +$$

$\Psi_{t_2}(p)\Psi_{t_3}^2(p)\Psi_{t_4}^2(p)(p^3 - p^2)p^{-5s}]$.

Sea $\mathrm{B}_3 = B_p(C_{p^3})$ el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^3, además, recordemos que

$$B_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - x \in p\mathbb{Z}_p, w - y \in p^2\mathbb{Z}_p, w - z \in p^3\mathbb{Z}_p\} \subseteq \bar{B}_3$$

Elegimos una medida de Haar d^*x sobre $(\mathbb{Q}_p^*)^4$ tal que $d^* = (d^*x_1)^4$ tal que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*x_1 = 1$$

luego, $\mu^*(\bar{B}_3) = 1$.

Sea $\Psi = (\Psi_{t_1}, \Psi_{t_2}, \Psi_{t_3}, \Psi_{t_4}) : (\mathbb{Q}_p^*)^4 \to S^1$ un caracter continuo de orden finito, el cual es trivial sobre $(\mathbb{Z}_p^*)^4$, donde $\Psi_t : \mathbb{Q}_p^* \to S^1$ está definido por $\Psi_t(p) = e^{(\frac{2\pi i}{t})}$ para $t \in \mathbb{Z}$ y $\Psi(b_1, b_2, b_3, b_3) = \Psi_{t_1}(b_1)\Psi_{t_2}(b_2)\Psi_{t_3}(b_3)\Psi_{t_4}(b_4)$ para cada $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in (\mathbb{Q}_p^*)^4$.

Aplicando nuestra definición de la función L para $\bar{B}_3$ tenemos

$$L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi) = \mu^*(Aut_{\bar{B}_3}\bar{B}_3)^{-1}(\bar{B}_3 : \bar{B}_3)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4} \Phi_{\{\bar{B}_3 : \bar{B}_3\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

pero

a) $Aut_{\bar{B}_3}\bar{B}_3 = \bar{B}_3^*$, y $\mu^*(\bar{B}_3^*)^{-1} = 1$

b) $\{\bar{B}_3 : \bar{B}_3\} = \bar{B}_3$,

c) $(\bar{B}_3 : \bar{B}_3)^{-s} = 1$

entonces

$$L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi) = \mu^*(\bar{B}_3)^{-1} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4} \Phi_{\{\bar{B}_3\}}(x)\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^4 \cap (\mathbb{Q}_p^*)^4} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$\left[\int\limits_{\uplus_{n=0}^{\infty} p^n\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_1}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right] \left[\int\limits_{\uplus_{m=0}^{\infty} p^m\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_2}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right] \left[\int\limits_{\uplus_{l=0}^{\infty} p^l\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_3}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right] \left[\int\limits_{\uplus_{k=0}^{\infty} p^k\mathbb{Z}_p^*} \Psi_{t_4}(x_1)\|x_1\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x_1\right]$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}[\Psi_{t_1}(p)p^{-s}]^n\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty}[\Psi_{t_2}(p)p^{-s}]^m\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty}[\Psi_{t_3}(p)p^{-s}]^l\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty}[\Psi_{t_4}(p)p^{-s}]^k\right)$$

$$= \frac{1}{(1-\Psi_{t_1}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_2}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_3}(p)p^{-s})(1-\Psi_{t_4}(p)p^{-s})}$$

Así

$$L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(1-\Psi_{t_i}(p)p^{-s})}.$$

A continuación calcularemos las 97 funciones L que corresponden a los ideales respectivos.

- $M_1 = B_3$ entonces:

$$L_{B_3}(B_3, s, \Psi) = p^3(p-1)^3 \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4} \Phi_{\{B_3\}}(x)\Psi(x)\|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^4} d^*x =$$

$$p^3(p-1)^3 \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap B_3} \Psi(x)\|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^4} d^*x =$$

$$\left[p^3(p-1)^3 \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap B_3^*} \Psi(x)\|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^4} d^*x\right] + \left[p^3(p-1)^3 \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap [(p,p,p,p)(\mathbb{Z}_p \times B_2)]} \Psi(x)\|x\|^s_{\mathbb{Q}_p^4} d^*x\right] =$$

$$1 + p^{3-4s}(p-1)^3 \left(\prod_{v=1}^{4}\Psi_{t_v}(p)\right)\left[\frac{1}{(1-\Psi_{t_1}(p)p^{-s})}\right]\frac{\mathcal{J}_2}{p(p-1)^2}\left[\frac{1}{\prod_{v=2}^{4}(1-\Psi_{t_v}(p)p^{-s}}\right] =$$

$$1 + \left[p^{2-4s}(p-1)\left(\prod_{v=1}^{4}\Psi_{t_v}(p)\right)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi) =$$

$$\left[\prod_{v=1}^{4}(1-\Psi_{t_v}(p)p^{-s}) + p^{2-4s}(p-1)\left(\prod_{v=1}^{4}\Psi_{t_v}(p)\right)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi)$$

- $\boldsymbol{M_8 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$ entonces:

$$L_{B_3}(M_8,s,\Psi) = p^{1+3s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p)p^{-4s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$p^{1-s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap (\mathbb{Z}_p \times M_8)} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$p^{1-s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \left[\frac{1}{(1-\Psi_{t_1}(p)p^{-s})}\right] \left[\frac{\mathcal{J}_2}{p(p-1)^2 \prod_{k=2}^{4}(1-\Psi_{t_k}(p)p^{-s})}\right] =$$

$$\left[p^{-s} \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi)$$

- $\boldsymbol{M_2 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_2,s,\Psi) = p^{3-3s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-3s} \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_3 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u), (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_3,s,\Psi) = p^{2-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_4 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_4, s, \Psi) = p^{2-2s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s} \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_5 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (w-v)\,, (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_5, s, \Psi) = p^{2-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_6 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v)\,, (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_6, s, \Psi) = p^{2-2s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s} \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_7 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u)\,, (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_7, s, \Psi) = p^{1-2s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-2s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{25} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t - w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{25}, s, \Psi) = p^{3-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-3s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{26} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t)\,, (t - w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{26}, s, \Psi) = p^{2-2s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{37} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{37}, s, \Psi) = p^{3-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-3s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{38} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{38}, s, \Psi) = p^{2-2s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s}(p-1) \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{49}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pav-(1+pa)w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-t)\,,(v-t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$,
entonces:

$$L_{B_3}(M_{49}(a),s,\Psi) = p^{2-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1)\prod_{k=1}^{4}\Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{50}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pav-(1+pa)w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$,
entonces:

$$L_{B_3}(M_{50}(a),s,\Psi) = p^{2-2s}(p-1)^2 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s}\prod_{k=1}^{4}\Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{73}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pau-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (p^2u-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p\Big\}}$,
entonces:

$$L_{B_3}(M_{73}(a),s,\Psi) = p^{3-3s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-3s}(p-1)\prod_{k=1}^{4}\Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{86}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pav-(1+pa)w-p^2u+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$,
entonces:

$$L_{B_3}(M_{86}(a),s,\Psi) = p^{2-2s}(p-1)^3 \prod_{k=1}^{4} \Psi_{t_k}(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_8} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-2s}(p-1)\prod_{k=1}^{4}\Psi_{t_k}(p)\mathcal{J}_2\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{16} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{16}, s, \Psi) = p^{5s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)p^{-7s}\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$p^{-2s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap(\mathbb{Z}_p^2\times B_1)}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$p^{-2s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\left[\frac{1}{\prod_{k=1}^{2}(1-\Psi_{t_k}(p)p^{-s})}\right]\left[\frac{\mathcal{J}_1}{(p-1)\prod_{k=3}^{4}(1-\Psi_{t_k}(p)p^{-s})}\right] =$$

$$\left[p^{-2s}\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi)$$

- $\boldsymbol{M_9 = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_9, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{10} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{10}, s, \Psi) = p^{2-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-4s}\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{11} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{11}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{12} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{12}, s, \Psi) = p^{1-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{13} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u), (w-v), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{13}, s, \Psi) = p^{-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{14} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-v), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{14}, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{15} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{15}, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{17} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u)\,,(w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{17},s,\Psi) = p^{1-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{18} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{18},s,\Psi) = p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{27} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{27},s,\Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{28} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{28},s,\Psi) = p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{29} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{29},s,\Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{30} = \left\{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{30}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1) \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{31} = \left\{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{31}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{32} = \left\{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u-v+t), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{32}, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{33} = \left\{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (u-v), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{33}, s, \Psi) = p^{-3s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-3s}(p-1) \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{39} = \Big\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2 u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{39}, s, \Psi) = p^{2-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{40} = \Big\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t), (t - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{40}, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{41} = \Big\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{41}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{42} = \Big\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{42}, s, \Psi) = p^{1-3s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{51} = \Big\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2 v - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p, \ (u - t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{51}, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{52} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2 v - w + t) \in p^3 \mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{52}, s, \Psi) = p^{2-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-4s}(p-1) \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{53} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p^2 \mathbb{Z}_p, \ (v-u), (t-v) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{53}, s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{54}(a) = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (av - (1+a)w + t) \in p^2 \mathbb{Z}_p, \ (t-u), (v-t) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{54}(a), s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{55} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p^2 \mathbb{Z}_p, \ (t-v) \in p\mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{55}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1) \Psi_{t_1}^2(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^4(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{56}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (av-(1+a)w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{56}(a),s,\Psi) = p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{57} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{57},s,\Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{58} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{58},s,\Psi) = p^{1-3s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{65} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{65},s,\Psi) = p^{3-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{3-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{66} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{66}, s, \Psi) = p^{3-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{3-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{74}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{74(a)}, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{75}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pau - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{75(a)}, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{76}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{76(a)}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{81}\ (a)} = \left\{ \boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p} \right\}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{81(a)}, s, \Psi) = p^{3-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{3-5s}(p-1)^2\Psi t_1(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{87}} = \left\{ \boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ \left(p^2v - w - p^2u + t\right) \in p^3\mathbb{Z}_p} \right\}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{87}, s, \Psi) = p^{2-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}^2(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{88}\ (a)} = \left\{ \boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (av - (1+a)w - pu + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v - t) \in p\mathbb{Z}_p} \right\}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{88(a)}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{89}} = \left\{ \boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v - w - pu) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v - t) \in p\mathbb{Z}_p} \right\}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{89}, s, \Psi) = p^{1-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\mathcal{J}_1\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{90}} = \left\{ \boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv - pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p} \right\}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{90}, s, \Psi) = p^{1-3s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\prod_{k=2}^{4}\Psi_{t_k}^2(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{16}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-3s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{94} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pv - w - p^2 u + t) \in p^3 \mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{94}, s, \Psi) = p^{3-4s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{16}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{3-4s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \prod_{k=2}^{4} \Psi_{t_k}^2(p) \mathcal{J}_1 \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $M_{24} = \mathbb{Z}_p^4$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{24}, s, \Psi) = \mu^*(M_{24}^*)^{-1}(B_3 : M_{24})^{-s} \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap (p, p^2, p^3, p^3) M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$p^{-3s} \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \Psi_{t_3}^3(p) \Psi_{t_4}^3(p) \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap \mathbb{Z}_p^4} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x =$$

$$\left[p^{-3s} \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \Psi_{t_3}^3(p) \Psi_{t_4}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{19} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v - u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t - v) \in p^2 \mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{19}, s, \Psi) = p^{1-6s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{20} = \left\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (t - v) \in p^2 \mathbb{Z}_p \right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{20}, s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1) \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1) \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{21} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u)\,,(t-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{21},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{22} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{22},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{23} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{23},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{34} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{34},s,\Psi) = p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{35} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{35},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{36} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{36},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{43} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{43},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{44} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{44},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{45} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w+t)\,,(t-v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{45},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{46} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w)\,,(t-v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{46},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{47} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{47},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{48} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{48},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{59} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{59},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{60} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{60},s,\Psi) = p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{61} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t)\,,(t-u) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{61},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right]L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{62} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{62},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{63} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w)\,,(t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{63},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{64} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{64},s,\Psi) = p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{67} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{67},s,\Psi) = p^{2-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{68} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{68},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{69} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{69},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{70} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{70},s,\Psi) = p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{71} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{71},s,\Psi) = p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{72} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{72},s,\Psi) = p^{1-5s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{77}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{77}(a),s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{78} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u-v) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{78},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{79}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u-v+at) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{79}(a),s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{80} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces

$$L_{B_3}(M_{80},s,\Psi) = p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{81}\,(a) = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-v+at) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{81},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3,s,\Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{83} = \Big\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{83},s,\Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{84}\,(a) = \Big\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at) \in p\mathbb{Z}_p \Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{84}(a), s, \Psi) = p^{1-6s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-6s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{85}\,(a) = \Big\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at) \in p\mathbb{Z}_p \Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{85}(a), s, \Psi) = p^{2-6s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-6s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{91} = \Big\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p \Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{91}, s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{92} = \Big\{ (u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p \Big\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{92}, s, \Psi) = p^{-4s}(p-1)^3 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4 \cap M_{24}} \Psi(x) \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{93} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{93}, s, \Psi) = p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{-4s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{95} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu+w-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{95}, s, \Psi) = p^{2-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{2-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{96} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu+w-v+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{96}, s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^3\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

- $\boldsymbol{M_{97} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu+w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$, entonces:

$$L_{B_3}(M_{97}, s, \Psi) = p^{1-5s}(p-1)^2\Psi_{t_1}(p)\Psi_{t_2}^2(p)\prod_{k=3}^{4}\Psi_{t_k}^3(p)\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^4\cap M_{24}}\Psi(x)\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s d^*x$$

$$= \left[p^{1-5s}(p-1)^2 \Psi_{t_1}(p) \Psi_{t_2}^2(p) \prod_{k=3}^{4} \Psi_{t_k}^3(p) \right] L_{\bar{B}_3}(\bar{B}_3, s, \Psi).$$

Conclusiones

Para el estudio de la función L en el caso general $B_p(C_{p^n})$ se pueden agrupar de acuerdo al número de conductores del mismo.

Es importante calcular las funciones L del caso p y p^2 ya que son utilizadas para los casos porteriores.

En general conocer la función L para el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^n deberá iniciar por conocer $L_{B_p(C_{p^n})}(B_p(C_{p^n}), s, \Psi)$.

Referencias

[1] C. J. Bushnell and I. Reiner, *Zeta functions of arithmetic orders and Solomont́s conjetures*, Math. Z. 173 (2) (1980), 135-161.

[2] C. J. Bushnell and I. Reiner, *L-functions of arithmetic orders and asymptotic distribution of ideals*. Math 327 (1981a), 156-183.

[3] C. J. Bushnell and I. Reiner, *Functional equations for L- functions of arithmetic orders*. Math. 329 (1981b), 88-123.

[4] C. J. Bushnell and I. Reiner, *Funtional equations for Hurwitz series and parcial zeta functions of orders*, J. Reine Angew. Math. 364 (1986), 130-148.

[5] C. J. Bushnell and I. Reiner, *New asymptotic formulas for the distribution of left ideals of orders*, Math 364 (1986) 149-170.

[6] C. Vázquez Rosas, D. Villa Hernández y B. Zavala López, *Algunos ideales de índice finito en el anillo de Burnside* $B_p(C_{p^n})$. Matemáticas y sus Aplicaciones 14, 1era edición (2020), 5-25.

[7] D. Villa-Hernández, *Zeta functions of Burnside rings of groups of order* p *and* p^2, Communications in Algebra, 37 (2009), 1758-1786 .

[8] D. Villa-Hernández, *Zeta function of the Burnside rings for cyclic groups* Int.J. Algebra, 5 (26) (2011), 1255-1266.

[9] D. Villa-Hernández, *Functional Equations for Zeta functions of Burnside rings*, JP J. Algebra Number Theory Appl. 29 (1) (2013), 1-16.

[10] D. Villa-Hernández, J.M Ramirez Contreras C. Vázquez Rosas *Conductors of fractional ideals in Burnside rings for cyclic p-groups an their zeta funtion*, Rev. integr. Temas Mat. 43 (1) (2025), $1-15$.

[11] I. Reiner, *Maximal Orders*, Academic Press, London-New York (1975).

[12] I. Reiner, *Zeta functions of Integral Representations*, Comm. Algebra, 8 (10) (1980), 911-925.

[13] J. M. Ramírez-Contreras and D. Villa-Hernández, *Solomon's Zeta function of* $B_p(C_{p^3})$. Int. Electron. J. Algebra, 20 (2016), 1-27.

[14] J. M Ramírez-Contreras, C. Vázquez-Rosas and D. Villa-Hernández, *Zeta function of the Burnside ring for* C_{p^3}. Rev. integr. Temas Mat. 41 (1) (2023), $1-26$.

[15] L. Solomon, *Zeta functions and Integral Representation Theory*, Advances in Math. 26 (3) (1977), 306-326.

[16] S. Bouc, *Burnside rings*, Handbook of algebra, North-Holland, Amsterdam, Vol 2, (2000), $739-804$.

[17] V. A. Aguilar Arteaga, Tesis de maestría, *Funciones Zeta locales de iguza vía la fórmula de la fase estacionaria*, FCFM-BUAP, 2014.