



BENEMÉRITA
UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS

ALGORITMOS DE PROCESAMIENTO Y
ANÁLISIS DE ELECTROCARDIOGRAMAS:
TEORÍA E IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

José Luis Juárez Silva

Director:

Moisés Soto Bajo

Co-Director:

Andrés Fraguera Collar

PUEBLA, PUE.

FECHA: 7 de junio de 2023

*Dedicado a mis padres, hermanos, amigos, y profesores. Todos ellos
grandes compañías a lo largo mi vida.*

Agradecimientos

En estos párrafos siguientes, quiero agradecer de forma infinita a aquellas personas que me han acompañado durante mi formación académica, y también en mi vida. Sin ellos, sin su inspiración, sin todo lo que aportaron, estoy seguro de que nunca podría haber terminado este trabajo.

Quiero agradecer a mis padres. A mí madre por siempre tener la confianza en mí, y estar apoyándome en todo lo que haga. Siempre a mi lado, sin importar lo duro que parezca la situación. A mi padre, de quien recibí muchas lecciones y consejos, y a quien siempre he admirado por sobresalir en los malos tiempos, enseñarme a trabajar y aprender a hacer las cosas, enseñarme a ser alguien de bien, mi primer héroe en la vida.

A mis hermanas, quienes me han sacado muchas carcajadas que me ayudaron en momentos difíciles e incluso imposibles con sus jugarretas y sus bromas. Gracias por la felicidad que aportaron en esta etapa de mi vida.

A mi hermano, mi compañero de vida. Siempre estuviste ahí conmigo ayudándome y protegiéndome de todo y de todos, no solo en el ámbito estudiantil, sino también social y demás. Por ser mi rival, inspiración y mi apoyo. Muchas gracias por ser un gran ejemplo, por tus consejos, tus críticas, por todo lo que me has apoyado y defendido.

Agradezco también a los pocos amigos que tuve en este trayecto, en especial a Aldi Alberto Papalotzi Sánchez, y a Cristian Pérez Islas, quienes fueron de los primeros amigos que he llegado a tener en mi vida. Gracias por hacer este viaje mas ameno.

Agradezco al Dr. Andrés Fraguela Collar, quien me recibió de brazos abiertos y me abrió la mente a la idea de que las matemáticas no se tratan solo hacer cuentas, si no de razonar para tener un mejor entendimiento de éstas, y así poderlas aplicar a otras áreas, abriendo así un mar de posibilidades en esta bella disciplina.

Un especial agradecimiento a mi asesor de tesis, el Dr. Moisés Soto Bajo. Muchas gracias por su gran tutela, sus lecciones, apoyos e infinita paciencia. Sin su apoyo no podría haber terminado esto. Gracias por ayudarme en todo lo que necesité de este trabajo. Sus consejos y las grandes clases que me ha dado, en donde me di cuenta de muchos de los errores que tenía, de cómo corregirlos y aprender de ellos. Por ser una gran inspiración en mi carrera y ámbito profesional. Por ser un ejemplo más a seguir

Faltaron muchas personas a quienes agradecer, sin embargo, sepan que siempre los tengo presentes cada día de mi vida. Y en este trabajo, no es la excepción.

Simplemente. Muchas gracias a todos, por todo.

Introducción

Durante la historia de la Medicina, se han desarrollado muchos procedimientos y herramientas para poder detectar ciertas patologías, una cualidad muy deseable de tales herramientas es que sean lo menos invasoras posible, un ejemplo de tales herramientas es **el electrocardiograma**. Esta herramienta es muy importante en la actualidad para el estudio y diagnóstico del corazón, ya que ayuda a detectar anomalías en este órgano, tales como el Síndrome de Brugada, el cual puede llegar a causar muerte súbita. ([2]) Además, es una herramienta bastante práctica, económica y accesible a la comunidad.

Un electrocardiograma (**ECG** para abreviar) es una herramienta que estudia la actividad eléctrica del corazón, registrando las diferencias de potencial eléctrico en distintos electrodos situados en varios puntos del cuerpo. Estas mediciones al ser interpretadas por un médico, brindan información acerca de cómo está trabajando el corazón en ese momento. De esta forma, se puede brindar un diagnóstico médico sobre su funcionamiento ([7], [8], [9]).

Sin embargo, uno de los problemas que el ECG presenta es que este no refleja únicamente la actividad propia del corazón; impulsos eléctricos de otros procesos en el cuerpo son registrados por el ECG, tales como el movimiento de una parte del cuerpo, la respiración, entre otras actividades. También están los problemas ajenos al cuerpo, como los movimientos e interferencias en los electrodos. Todo esto genera variabilidad en el registro de las señales, lo cual dificulta su interpretación. Todo esto contribuye al **ruido** de la señal, así como oscilaciones de alta frecuencia inherentes al proceso de medición y al fenómeno en sí.

Ante esta problemática, se han desarrollado algoritmos y técnicas para reducir de cierta forma los efectos del ruido y facilitar la obtención de información en el análisis de señales y en particular del ECG. Muchas de estas herramientas están basadas en teorías matemáticas (Transformadas de Fourier, Laplace, Z, Wavelet, ...), en ellas frecuentemente ejercen unos objetos matemáticos llamados **filtros** (algunos tipos son: de pasa-bajo, pasa-alto, pasa-banda, ...) que permiten analizar de mejor forma las señales.

El uso de estos filtros ayuda a detectar en la señal cierta información de interés que debido al ruido llega a ser difícil de encontrar. En el caso del ECG, la mayor parte de su información está registrada en los llamados **puntos fiduciaros**. Con ellos se puede estudiar de mejor forma las ondas y segmentos que se presentan en el ECG para así poder

caracterizarlos y brindar información del corazón a los médicos.

Algo característico de estos puntos es que en ellos se da una especie de “giro” o “curva” notable. Estos detalles se pueden apreciar por medio de la “pendiente” y “curvatura” que puede presentar la señal en algunas de sus componentes. Sin embargo, estos conceptos no tienen sentido para una señal en sí.

Podemos ver a una señal S de longitud $n \in \mathbb{N}$ como elemento de \mathbb{R}^n , y de esta forma desarrollar herramientas que nos permitan abordar el concepto de “pendiente” o “curvatura” para un vector. Pero puede ocurrir que n sea muy grande para poder analizar toda la señal en sí, por lo que debemos dividir a la señal para así analizar segmentos de esta y encontrar las características que buscamos en ella.

En este trabajo de tesis se desarrollara una herramienta que busque afrontar esta problemática y poder implementarla en un algoritmo para la detección de los puntos fiduciaros por medio de la pendiente - curvatura que pueda presentar la señal en ciertas partes de esta. A esta herramienta se le conocerá como **los filtros de curvatura**.

Notación

- \mathbb{R} : Conjunto de los números reales.
- \mathbb{N} : Conjunto de los números naturales (enteros positivos).
- \mathbb{Z} : Conjunto de los números enteros.
- \mathbb{R}^n : Conjunto de las n – *tuplas* de números en \mathbb{R} .
- \bar{X} : Denota la media aritmética de $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.
- $\langle X, Y \rangle$: Denota el producto escalar entre $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Es decir, $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$.
- $a|b$: Para $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a divide a b si $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$. Se denota por $a|b$.
- $a \nmid b$: Para $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a no divide a b si $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$. Se denota por $a \nmid b$.

Índice general

Introducción	I
1. Fundamentos básicos	1
1.1. La fisiología del corazón	1
1.2. Sistema de conducción eléctrica del corazón	3
1.3. El electrocardiograma	4
1.3.1. Origen del electrocardiograma.	5
1.3.2. El electrocardiograma actual: las derivaciones del ECG.	6
1.3.3. Las ondas características del ECG	11
2. Desarrollo de Filtros	15
2.1. Influencia del ruido	15
2.2. Los Filtros Promedio	18
2.2.1. Definición y propiedades	18
2.3. Los Filtros pendiente	20
2.3.1. Definición y propiedades	20
2.3.2. Sobre la definición de los filtros pendiente	29
2.4. Los Filtros de Curvatura	32
2.4.1. Definición y propiedades	32
2.4.2. Sobre la definición de los filtros de curvatura	52
3. Coeficientes promedio, pendiente y curvatura	58
3.1. Definición de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura.	58
3.2. Sobre el significado de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura.	61
4. Aplicación de filtros al análisis de ECG	78
5. Algoritmo pendiente-curvatura	90
5.1. Pre-procesamiento	90
5.2. Localización de picos R_m	92

5.3. Estimación del complejo QRS	94
5.4. Estimación de los puntos fiduciaros restantes	97
5.5. Resumen del algoritmo	100
5.6. Resultados	101
Conclusión	105
5.7. Conclusión.	105
A. Resultados auxiliares	106
A.1. Fórmulas de Faulhaber.	106
A.2. Identidad de Parseval.	106
B. Demostraciones	109
B.1. Filtros pendiente	109
B.2. Filtros de curvatura	111
Bibliografía	117

Capítulo 1

Fundamentos básicos

El corazón es uno de los órganos principales del cuerpo humano debido a la función que desempeña, y su estudio data de hace más de 2000 años ([12]). Históricamente, éste ha sido considerado uno de los órganos más importantes y que ha centrado la atención de médicos e investigadores. En la actualidad las fallas cardíacas representan por mucho una de las causas más frecuentes de muerte en el mundo occidental ([1]). Todo esto motiva la importancia clínica y científica de su estudio, que ha ido creciendo con el paso de los años.

El objetivo es profundizar en el conocimiento acerca de su funcionamiento y sus desórdenes. Además, los tratamientos que se hacen en este órgano a veces son demasiado costosos y/o invasivos, por lo que otro tema de investigación es tratar de mejorar las técnicas de tratamiento de enfermedades cardíacas. Por otra parte, una de las herramientas clínicas básicas y principales para estudiar el funcionamiento del corazón es el *Electrocardiograma (ECG)*, que aporta información sobre su comportamiento eléctrico. Por esto, es necesario también conocer la naturaleza de este tipo de prueba.

Como preámbulo al resto del texto, es conveniente hacernos una pequeña idea de cómo se estudia el corazón, analizando su estructura (cómo está formado), y fisiología (cómo funciona), con especial atención a los aspectos eléctricos, así como familiarizarnos con la naturaleza del ECG.

1.1. La fisiología del corazón

El corazón es el órgano del cuerpo encargado de bombear la sangre a través de éste por medio del sistema circulatorio, con el cual logra llevarla a los demás órganos. Éste está formado por dos bombas separadas, (ver [10]). Además, cada una de estas bombas está dividida en 2 partes (cámaras): las aurículas y los ventrículos. Las primeras funcionan como

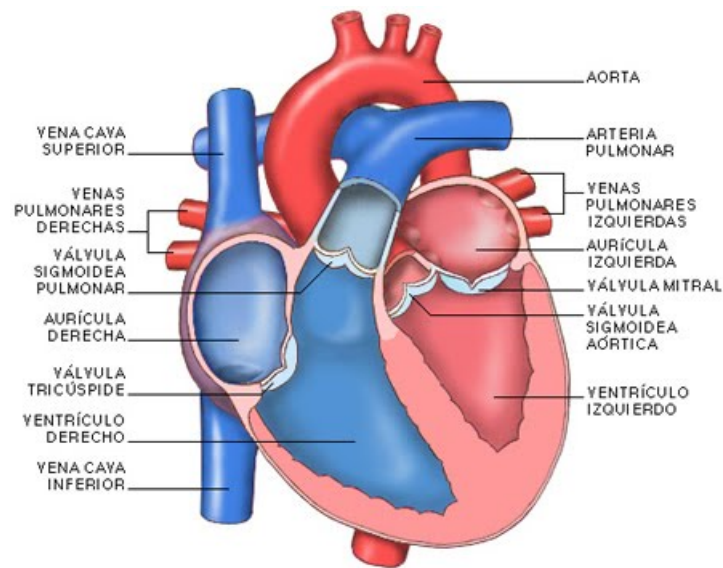


Figura 1.1: Estructura del músculo cardiaco. Fuente: http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/3ESO/aparato_circulatorio/contenidos4.htm (DIC-2021)

pequeñas bombas que hacen pasar la sangre a los ventrículos, y estos últimos bombean la sangre hacia sus respectivos destinos (pulmones y otros órganos).

El proceso de bombeo del corazón está dado por dos movimientos: sístole y diástole. En el primero el corazón se contrae para expulsar la sangre por una aurícula o ventrículo, mientras que en el segundo se relaja para recibir la sangre. El proceso completo de sístole y diástole se llama **latido cardiaco**, y al evento cardiaco que ocurre desde el inicio de un latido hasta el inicio de otro se le llama **ciclo cardiaco**. ([7])

En estos movimientos actúan 4 válvulas, las cuales ayudan al proceso de bombeado: Válvula tricúspide, Válvula pulmonar, Válvula mitral y Válvula aórtica. Dichas válvulas son las que permiten la transición de sangre de un ventrículo a otro, y realizan el proceso de oxigenación en la sangre.

Por medio de los latidos, se define la **frecuencia cardiaca**, la cual es sencillamente el número de latidos que se efectúan por minuto; el concepto de frecuencia cardiaca es muy importante, debido a que ayuda a conocer el estado del corazón, y en particular a saber si una persona sufre alguna anomalía cardiaca.

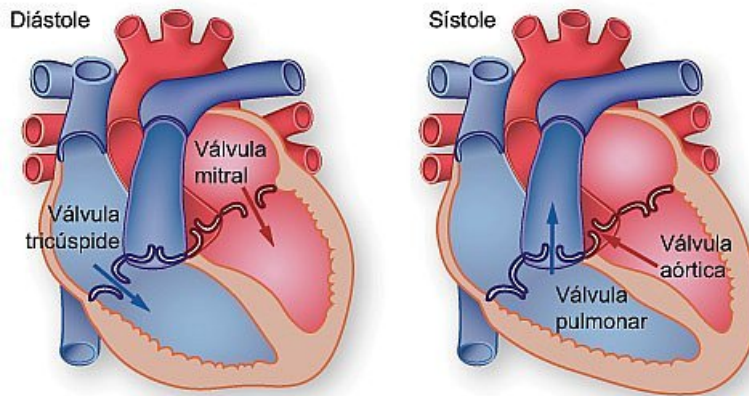


Figura 1.2: Proceso de bombeo del corazón, diástole y sístole. Fuente: <https://www.texasheart.org> (JUN-2020)

1.2. Sistema de conducción eléctrica del corazón

Como se mencionó antes, el proceso de bombeo en el corazón se lleva a cabo mediante la contracción y relajación de los músculos del corazón. Estos movimientos son posibles gracias a las propiedades electrofisiológicas del corazón. La actividad mecánica de todo el órgano está controlada por impulsos eléctricos que se producen y propagan en los tejidos de este órgano, los cuales permiten la conducción de estas señales eléctricas. Esto es lo que se conoce como el sistema de conducción eléctrica del corazón.

Las células cardíacas son eléctricamente excitables. Su comportamiento ante estímulos eléctricos se regula a partir de variaciones del potencial eléctrico; en concreto, se define a través del potencial transmembrana, que es la diferencia del potencial en su interior (potencial intracelular) y su exterior (potencial extracelular). La forma en que reacciona viene regida por un patrón, llamado potencial de acción. Un potencial de acción es la respuesta de una célula cardíaca a un impulso eléctrico, y define la forma en que cambia el potencial transmembrana ([12]).

A nivel macroscópico, cada ciclo se genera por un impulso eléctrico, el cual empieza desde el nodo sinusal. Periódicamente, se mandan señales nerviosas al corazón para decirle a qué ritmo debe latir (ya sea más rápido, o más lento) dependiendo de la actividad que se esté realizando. Una idea gráfica de la fisiología eléctrica del corazón está dada en la fig. 1.3.

Este impulso viaja rápidamente hacia las aurículas, produciéndose la despolarización auricular y su correspondiente contracción. Después de

Sistema de conducción eléctrica del corazón.

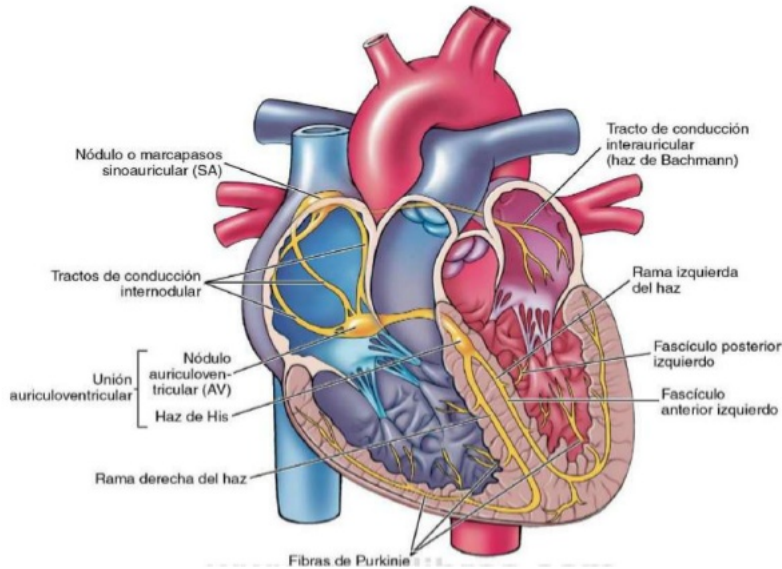


Figura 1.3: Representación eléctrica de las fibras musculares de excitación y conducción. Fuente: <https://sites.google.com/site/portafoliovirtualdeuci/alteraciones-del-ritmo-y-la-conduccion> (JUN-2020)

esto, el impulso se propaga hacia el nodo aurículo-ventricular (nodo A-V), donde sufre una ligera pausa hasta que los ventrículos se repolarizan, se relajan y llenan de sangre. A continuación, el impulso eléctrico viaja por el haz de His y se distribuye por los ventrículos a través de las fibras de Purkinje. La conducción por medio de las células ventriculares provoca la despolarización de los ventrículos. Posteriormente, se produce la correspondiente contracción. La sangre en los ventrículos es expulsada y estos poco a poco se repolarizan y se relajan, volviendo a su estado inicial. De esta forma, queda terminado un ciclo cardíaco ([7], [6], [8]).

1.3. El electrocardiograma

Hasta ahora, se ha visto en qué consiste la actividad eléctrica del corazón y cómo ésta influye en el funcionamiento de este órgano. Sin embargo, no se ha descrito cómo se mide o estudia esta actividad.

Es obvio que la tarea de examinar el corazón de forma directa conlleva un grado alto de dificultad técnica y de riesgo para la seguridad del paciente (o persona observada). Por ello, se han desarrollado herra-

mientas para poder estudiar el corazón de forma segura y no invasiva. Una de las herramientas más extendidas para medir la actividad eléctrica del corazón es el electrocardiograma (que se abrevia normalmente como ECG o EKG¹). [8]

Un electrocardiograma es un tipo de prueba médica que consiste en un registro de diferencias de potencial eléctrico sobre distintos puntos de la piel del sujeto, lo que refleja la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. Esta se obtiene colocando electrodos en la superficie. Estos electrodos miden diferencias de potencial y mandan esa información a la máquina ECG. Esta información se utiliza para conocer la salud cardiovascular del paciente y diagnosticar enfermedades o malestares que se reflejan en la actividad eléctrica de dicho órgano.

1.3.1. Origen del electrocardiograma.

El primer electrocardiograma fue realizado en 1887 por August D. Waller [9]. Él hizo muchas pruebas para diseñar su idea, usando a su bulldog Jimmy en varios experimentos. Colocó en sus patas unos baldes con solución salina conectados a un dispositivo, de manera que actuaban como electrodos. Este dispositivo se encargaba de grabar las diferencias de potencial entre ambos electrodos (ver fig. 1.4).

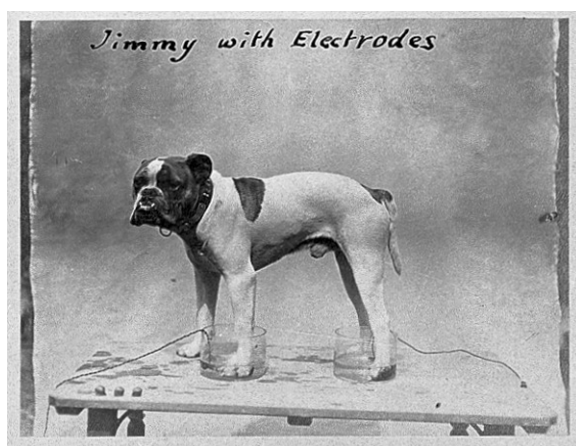


Figura 1.4: Los primeros experimentos del ECG realizados en Jimmy, el Bulldog de Waller. Fuente: <http://www.somosmedicina.com/2017/02/cardiologo-que-enfado-parlamento.html> (JUN-2020)

Pero fue el fisiólogo Holandés Willem Einthoven quien fue más allá de las pruebas que hizo Waller, sofisticando el invento. Él utilizó tres elec-

¹Esta abreviatura para el electrocardiograma es utilizada en ocasiones para evitar que se le confunda con el electroencefalograma, cuya abreviatura es EEG.

trodos conectados en cada uno de sus brazos y su pierna izquierda. Esto generalizó las grabaciones que hacía Waller, pues mientras el primero grababa las diferencias de potencial por medio de 2 electrodos, Einthoven usaba 3, lo cual hacía la grabación más completa (ver fig. 1.5).

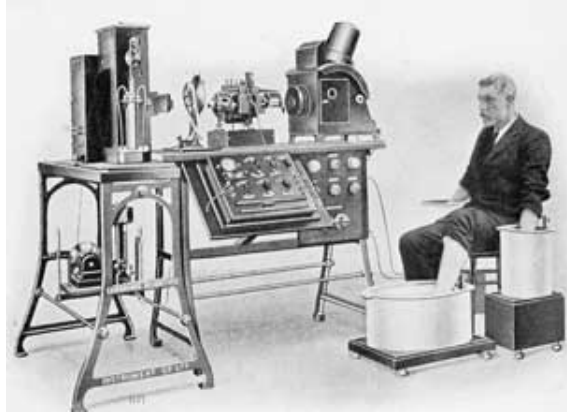


Figura 1.5: El electrocardiograma usado por Einthoven, en donde usa 3 electrodos. Fuente: <https://www.historiadelamedicina.org> (JUN-2020)

1.3.2. El electrocardiograma actual: las derivaciones del ECG.

Vamos a describir la estructura del electrocardiograma actual, en su forma más usual. Este viene dado en términos de derivaciones, que son el resultado de ciertas operaciones con las mediciones obtenidas en los distintos electrodos.

Las derivaciones básicas vienen definidas en términos de los potenciales comentados anteriormente, denotados por ϕ_{BI} , ϕ_{BD} y ϕ_{PI} , que corresponden a las mediciones en el brazo izquierdo, brazo derecho y pierna izquierda, respectivamente. Concretamente, las derivaciones vienen definidas así:

$$I = \phi_{BI} - \phi_{BD} \quad (1.1)$$

$$II = \phi_{PI} - \phi_{BD} \quad (1.2)$$

$$III = \phi_{PI} - \phi_{BI} \quad (1.3)$$

Así, los cambios de potencial que se registran en cada derivación serán el resultado combinado de las variaciones en el potencial en los dos electrodos que definen esa derivación. Note que las derivaciones I , II , III son

en realidad las diferencias de potencial que hay entre los 3 electrodos. Estas forman un triángulo sobre el torso, el cual es llamado **el triángulo de Einthoven**. (fig. 1.6).

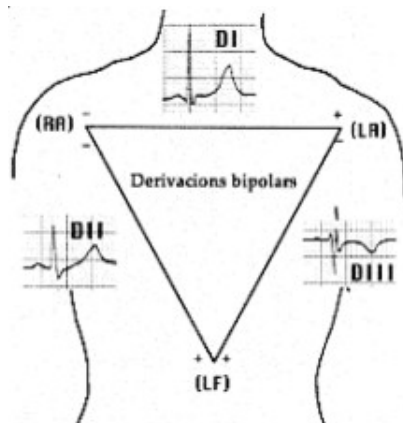


Figura 1.6: Las tres derivaciones I , II , III forman el triángulo de Einthoven. Modificado de: <https://curaraveces.wordpress.com/2015/11/12/willem-einthoven-y-el-electrocardiografo-de-270-kg/> (JUN-2020)

Este tipo de derivaciones suele recibir el nombre *dipolares*, ya que miden las diferencias de potencial entre dos electrodos. De hecho, una idea central en el estudio de la actividad eléctrica del corazón se basa en tratar a ese órgano como si fuera un dipolo en un volumen conductor (medio tridimensional conductor de electricidad). Un dipolo es un par de cargas opuestas de igual magnitud (es decir, con carga eléctrica $-q$ y q) separadas por una distancia d . La fuerza del dipolo y el campo eléctrico que genera vienen dadas por su *momento dipolar* p , que es un vector cuya dirección va del polo negativo al polo positivo y cuya magnitud está dada por $p = qd$. Para más detalles consultar [7] y [12].

Por como están definidas, es claro que si se conocen cualesquiera dos de las tres derivaciones en algún instante de tiempo dado, la tercera se puede calcular fácilmente por medio de una suma de las otras dos. Ésta es la así llamada **Ley de Einthoven** [9]. Un ejemplo de esto es el que sigue: si se conocen las derivaciones I y III , la derivación II se puede calcular como sigue:

$$II = I + III. \quad (1.4)$$

En efecto, pues por la definición de las derivaciones, y por un cálculo fácil, se tiene que:

$$I + III = \phi_{BI} - \phi_{BD} + \phi_{PI} - \phi_{BI} = \phi_{PI} - \phi_{BD} = II.$$

Este hecho es importante porque nos dice que podemos medir sólo dos derivaciones y calcular la tercera. Además, la información de la derivación que está siendo omitida no proporciona información nueva a la obtenida en las otras dos. Así, podemos decir que no es necesario calcular directamente con esa derivación, ya que podemos expresarla en términos de las otras dos. Muchas máquinas ECG hacen esto, midiendo las diferencias de potencial en las derivaciones I y II y calculando III.

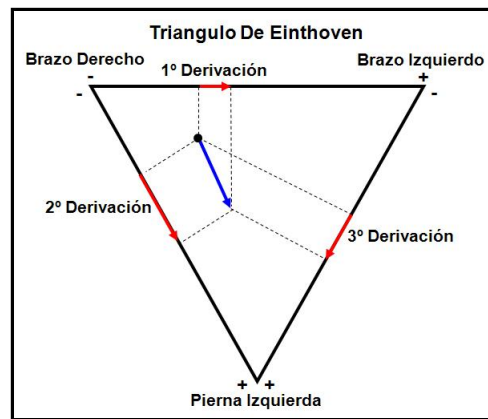


Figura 1.7: El triángulo de Einthoven, y el vector corazón en su interior. Fuente: <http://diagnostico-x.blogspot.com/2016/04/triangulo-de-einthoven-sencillo.html> (JUN-2020)

Durante el ciclo cardíaco las fuentes eléctricas que se presentan pueden ser aproximadas por sus momentos dipolares, y la suma de todos éstos describe un dipolo singular, el cual es un resumen del comportamiento general. A este vector suma se le conoce como **vector corazón**, y mediante él se pueden interpretar los potenciales obtenidos en cada una de las derivaciones, pues éstos pueden ser vistos como una proyección del vector corazón a través de cada una de las derivaciones *I*, *II* y *III* (fig. 1.7). El vector corazón es parte central del análisis del ECG. La posición de éste se asume estática, pero su magnitud y sentido varían durante el ciclo cardíaco [12].

Las derivaciones *I*, *II* y *III* no son suficientes para poder dar una lectura rigurosa de la actividad eléctrica del corazón, pues hay un espacio de aproximadamente 60° entre cada derivación, lo que hace relativamente grosera (poco precisa) su lectura. Es por esto que se añaden otras tres derivaciones para ayudar a precisarla. Éstas son las **derivaciones de extremidades aumentadas (unipolares)**, las cuales se comportan

de forma parecida a las derivaciones dipolares, con la excepción de que éstas miden la diferencia de voltaje entre una de estas derivaciones y el promedio de las otras dos restantes ([10] y [14], cap. 6, sec. 6.2.2). Las derivaciones unipolares son:

1. **aVR** = $\phi_{BD} - \frac{\phi_{BI} + \phi_{PI}}{2}$: Diferencia entre el del brazo derecho, y el promedio de los voltajes del brazo izquierdo y la pierna izquierda.
2. **aVL** = $\phi_{BI} - \frac{\phi_{BD} + \phi_{PI}}{2}$: Diferencia entre el voltaje del brazo izquierdo, y el promedio de los voltajes del brazo derecho y la pierna izquierda.
3. **aVF** = $\phi_{PI} - \frac{\phi_{BI} - \phi_{BD}}{2}$: Diferencia entre el voltaje de la pierna izquierda, y el promedio de los voltajes del ambos brazos.

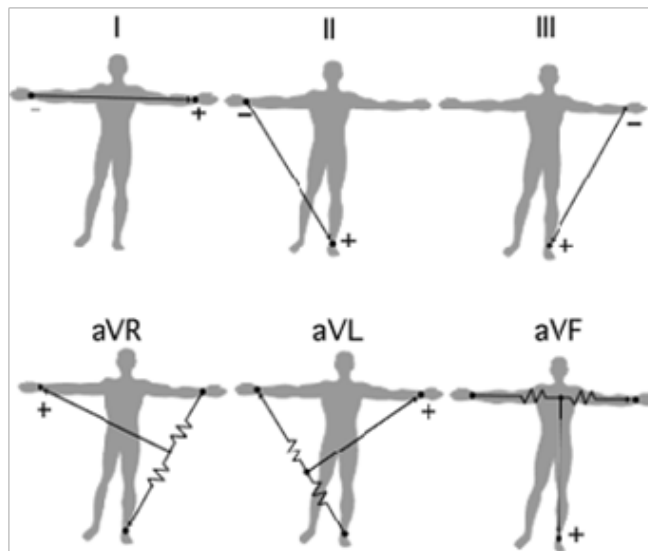


Figura 1.8: Las derivaciones dipolares *I, II, III*, y las derivaciones aumentadas *aVF, aVR, y aVL*. Fuente: http://www.ub.edu/LabFisio/index.php?option=com_content&view=article&id=29&Itemid=148 (JUN-2020)

Por la ley de Einthoven, podemos reducir estas derivaciones a una forma más simple [10], la cual es

$$aVR = -\frac{I + II}{2}. \quad (1.5)$$

$$aVL = I - \frac{II}{2}. \quad (1.6)$$

$$aVF = II - \frac{I}{2}. \quad (1.7)$$

Estas 6 derivaciones (dipolares y aumentadas) reflejan la actividad eléctrica del corazón en el **plano frontal** (fig. 1.8). Para registrar esta actividad en el ECG de forma más completa, se consideró conveniente el añadir electrodos que reflejan otras direcciones no pertenecientes a este plano. En el ECG estándar, se añaden otras 6 derivaciones ubicadas dentro del denominado plano horizontal (fig. 1.9). Así, el ECG estándar se compone de 12 derivaciones.

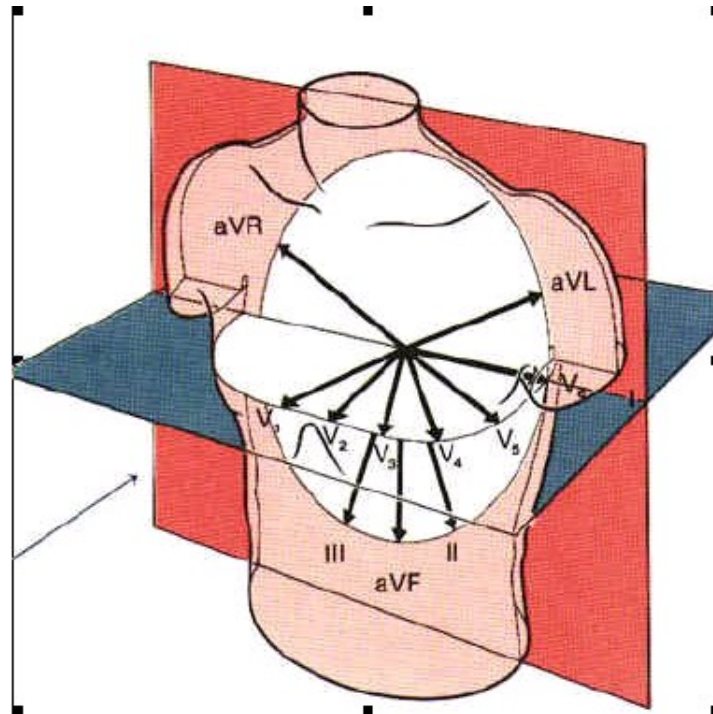


Figura 1.9: Las 12 derivaciones del ECG, junto con los planos en los que trabajan. Fuente: <https://www.portalesmedicos.com/publicaciones/articulos/1838/3/Electrocardiografia-basica> (JUN-2020)

Las derivaciones del plano horizontal son denominadas **derivaciones precordiales**, y son denotadas **V1, V2, V3, V4, V5, V6**. Éstas se

calculan a partir de seis electrodos colocados directamente en el pecho (fig. 1.9). En éstas se compara el electrodo con el electrodo negativo, que en este caso es el llamado **Terminal de Wilson**, que se define como la media de las tres derivaciones dipolares (ver [14], cap. 6, sec. 6.2.2). Por ello, éstas derivaciones se consideran unipolares. El terminal central de Wilson se denotara por ϕ_{WCT} , y está definida como:

$$\phi_{WCT} = \frac{\phi_{BI} + \phi_{BD} + \phi_{PI}}{3}.$$

1.3.3. Las ondas características del ECG

Ahora que hemos visto la actividad eléctrica del corazón y hemos visto que el ECG mide esta actividad, una pregunta natural sería la siguiente: **¿Cómo se manifiesta la actividad eléctrica del corazón en el ECG?** El entender bien cómo el ECG refleja el funcionamiento electrofisiológico del corazón es importante, y tiene aplicación en el diagnóstico médico, por ejemplo.

Como ya se ha dicho, en un latido intervienen varios procesos, que tienen su contraparte electrofisiológica, y en consecuencia son detectados por el ECG, manifestándose en las distintas derivaciones en forma de deflexiones llamadas **ondas** (fig. 1.10).

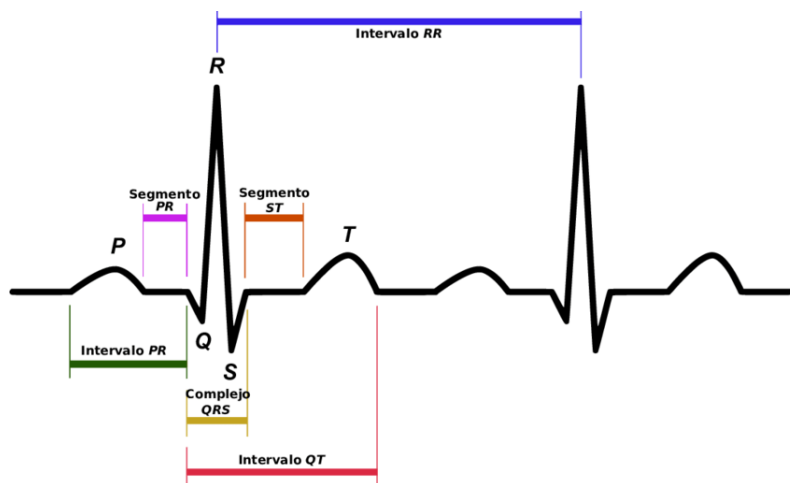


Figura 1.10: Las ondas y segmentos característicos del ECG. Fuente: https://www.researchgate.net/figure/Figura-12-Ondas-intervalos-y-segmentos-que-conforman-el-electrocardiograma_fig2_246992000 (JUN-2020)

Concretamente, en estas ondas se reflejan los procesos de polarización y despolarización que hay en el corazón. La estructura típica (idealizada)

<i>Concepto</i>	<i>Valor normal</i>	<i>Límite normal</i>
Ancho de onda P ($P_f - P_i$)	110ms	$\pm 20ms$
Intervalo PQ o PR ($Q_i - P_i$)	160ms	$\pm 40ms$
Ancho QRS ($J - Q_i$)	100ms	$\pm 20ms$
Intervalo QT ($T_f - Q_i$)	400ms	$\pm 40ms$
Segmento ST ($T_i - J$)	150ms	–
Ancho de onda T ($T_f - T_i$)	150ms	–
Amplitud onda P	0.15mV	$\pm 0.05mV$
Altitud complejo QRS	1.5mV	$\pm 0.5mV$
Segmento ST	0.0mV	$\pm 0.1mV$
Amplitud onda T	0.3mV	$\pm 0.2mV$

Cuadro 1.1: Valores de referencia para distintas ondas y segmentos en el ECG. Fuente: [15]

del perfil de una derivación en un intervalo correspondiente a un latido se compone de las siguientes ondas, en orden de aparición ([9], [8]):

- **Onda P:** es reflejo de la despolarización (estimulación) de las aurículas; es decir, su contracción.
- **Complejo QRS:** es reflejo del estímulo (despolarización) de las células ventriculares; es decir, de la contracción de los ventrículos. Está formado por las ondas Q, R y S, normalmente.
- **Onda T:** es reflejo de la repolarización ventricular; es decir, cuando las células ventriculares recuperan su carga inicial, se relajan, y así el proceso puede repetirse de nuevo.

En la estructura básica del ECG, también son importantes los segmentos o intervalos que preceden o siguen a cada onda, pues estos de igual forma nos brindan información útil. Estos segmentos son:

- **Intervalo P-Q o P-R:** Está formado desde el inicio de la onda P, y el comienzo del complejo QRS (fig 1.10). Refleja la duración entre el comienzo de la contracción de las aurículas y el comienzo de la contracción de los ventrículos. Un intervalo P-Q normal es de unos 0.16 segundos. A menudo, este intervalo se denomina intervalo P-R porque es frecuente que la onda Q esté ausente.
- **Intervalo Q-T:** es el intervalo entre el inicio del complejo QRS y el final de la onda T, y refleja la duración de la contracción en los ventrículos. Normalmente su duración es de aproximadamente 0.35 segundos.

- **Segmento ST:** es el periodo de tiempo comprendido entre el final del complejo QRS y el comienzo de la onda T.
- **Intervalo R-R:** este intervalo está comprendido entre dos picos R consecutivos, y se usa para describir la frecuencia cardiaca, en latidos por minuto.

Estas ondas están caracterizadas por distintas propiedades: la duración (anchura de la base), la amplitud (altura), morfología (forma), entre otras cosas. La medición de duraciones y amplitudes de las ondas es relativamente simple, una vez que se han determinado los puntos de inicio (onset) y final (offset), así como los puntos donde las ondas alcanzan su valor extremo (máximo o mínimo); éstos son los llamados **puntos fiduciaros**.

Con objeto de analizar estas ondas, definimos los siguientes puntos característicos, que identifican el inicio y final de dichas ondas, así como donde alcanzan su máximo o mínimo, según el caso (fig. 1.11):

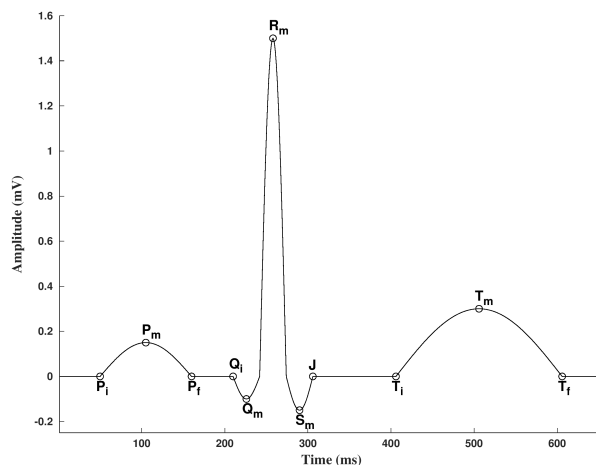


Figura 1.11: Los puntos fiduciaros del ECG. Fuente: [15]

- Los puntos P_i y P_f marcan el inicio y final de la onda P, respectivamente. El punto P_m denota el instante donde la onda P tiene su máximo o mínimo.
- El complejo QRS, en su forma completa, está formado por las ondas Q, R y S. Los puntos Q_i y J marcan el comienzo y final del complejo, y los puntos Q_m , R_m y S_m marcan el máximo/mínimo de las ondas Q, R y S, respectivamente.

- Los puntos T_i y T_f marcan el inicio y final de la onda T, respectivamente. El punto T_m denota el instante donde la onda T tiene su máximo o mínimo.

Todas estas características del ECG (presencia o no de ondas; duraciones de ondas, segmentos e intervalos; amplitudes; distribución de éstas por las 12 derivaciones) brindan a los médicos información relevante para conocer el estado del corazón. En consecuencia, se ha dedicado mucho esfuerzo al desarrollo de metodologías para el análisis de estas ondas, y en resumen, del ECG. Por este motivo, el disponer de algoritmos eficaces para la estimación de estos puntos es de vital importancia en las aplicaciones. En resumen, la estimación de los puntos fiduciaros es el punto clave para saber “dónde están” las ondas, intervalos y segmentos, y poder hacer mediciones sobre ellos ([10], [14]).

Con este problema en mente, uno de los propósitos de esta tesis es el estudio de una herramienta, llamada filtros de curvatura, introducida en [15] para el diseño de un algoritmo de detección de puntos fiduciaros. Esto se hará en el siguiente capítulo. En capítulos posteriores se describe dicho algoritmo.

Capítulo 2

Desarrollo de Filtros

Como se ha comentado antes, el proceso del análisis de una señal ECG depende de la detección de los puntos fiduciaros. Desafortunadamente, esta tarea no es sencilla, debido a la variabilidad alta de las señales que aparecen en el ECG, así como la aparición de contribuciones de origen diverso, que no están relacionadas directamente con la actividad eléctrica del corazón, pero también se manifiestan en el ECG. Todo esto hace que la detección de los puntos fiduciaros sea bastante difícil. Es por eso que se han desarrollado diversas herramientas matemáticas y multitud de técnicas para realizar esta tarea de forma más eficiente [7], [12], [10], [5].

Una de estas herramientas, en la que estamos interesados en esta tesis, son los filtros de curvatura introducidos en [15]. En este capítulo, se explicarán los filtros de curvatura, y se introducen otro tipo de filtros de naturaleza similar, con el objetivo de estudiarlos como potenciales herramientas para el análisis de señales, y en particular de ECG.

2.1. Influencia del ruido

Uno de los problemas que nos encontramos a la hora de analizar este tipo de señales, que provienen de mediciones reales de fenómenos biológicos, es la presencia de ruido, entendido como perturbaciones de cierto tipo en la señal que dificultan el análisis de la misma. Esto se debe, en el caso de ECG, a la propia variabilidad del fenómeno (la actividad eléctrica del corazón).

En particular, éste nos dificulta la tarea de la detección de los puntos fiduciaros. Por tanto, uno de los objetivos de los filtros que se van a introducir es reducir de cierta manera la influencia del ruido que hay en la señal.

Un primer método elemental para el análisis de señales, que puede utilizarse para la detección de los puntos fiduciaros es el *análisis de pendien-*

te. La pendiente consiste en tomar de la señal pares de puntos contiguos y medir sus diferencias; es decir, dada la señal $S = (s_k)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$, ($n \in \mathbb{N}$), se construye su señal pendiente

$$\pi S = (\pi_k S)_{k=1,2,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (2.1)$$

la cual se define de la siguiente manera:

$$\pi_k S = \frac{s_{k+1} - s_k}{(k+1) - k} = s_{k+1} - s_k \quad (1 \leq k \leq n-1). \quad (2.2)$$

Si se considera el segmento entre los nodos k y $k+1$, es claro que $\pi_k S$ es la pendiente de este segmento. Por tanto, la señal pendiente en su entrada k -ésima, es decir, el numero $\pi_k S$ nos indica si la señal S sufre un incremento (o decremento) entre los nodos k y $k+1$, y también nos indica cuánto aumenta (o disminuye). Concretamente:

- a) Si $\pi_k S > 0$, la señal S sufre un *incremento* entre los nodos k y $k+1$.
- b) Si $\pi_k S < 0$, la señal S sufre un *decremento* entre los nodos k y $k+1$.
- c) Si $\pi_k S = 0$, la señal S es *constante* (ni aumenta, ni disminuye) entre los nodos k y $k+1$.
- d) $|\pi_k S|$ cuantifica el salto de la señal S en términos absolutos entre los nodos k y $k+1$.

Además, cuando πS cambia de signo en los nodos $k-1$ y k ($\pi_{k-1} S \cdot \pi_k S < 0$), entonces S tiene un “pico” en dicho nodo k , que se abrirá hacia arriba (convexo) si $\pi_{k-1} S < 0$ y $\pi_k S > 0$, y se abrirá hacia abajo (cóncavo) si $\pi_{k-1} S > 0$ y $\pi_k S < 0$. En resumen, la señal pendiente nos proporciona información geométrica de la señal original de forma local.

Con esta información, a priori es fácil localizar los inicios y finales de las ondas en el ECG, pues éstas están caracterizadas por un cambio en la tendencia de la señal en estos puntos, que se espera se refleje en la pendiente. Concretamente, si la onda está establecida hacia arriba, el inicio y el final estarán caracterizados por una región cóncava. Según lo descrito arriba sobre la interpretación geométrica de la señal pendiente, estos cambios deberían verse reflejados en los valores $\pi_k S$. Esto puede verse gráficamente de la siguiente manera: en los inicios y finales de las ondas, la señal S sufre una especie de “giro” (ver a,b de figura 2.1).

En el caso de los picos R , este cambio es bastante notorio, pues además del cambio de signo de la señal pendiente en ellos, ésta aumenta o disminuye en gran cantidad. Es decir, si un pico R se encuentra entre los nodos j y $j+1$ ($j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) de la señal S , entonces $|\pi_j S|$ es

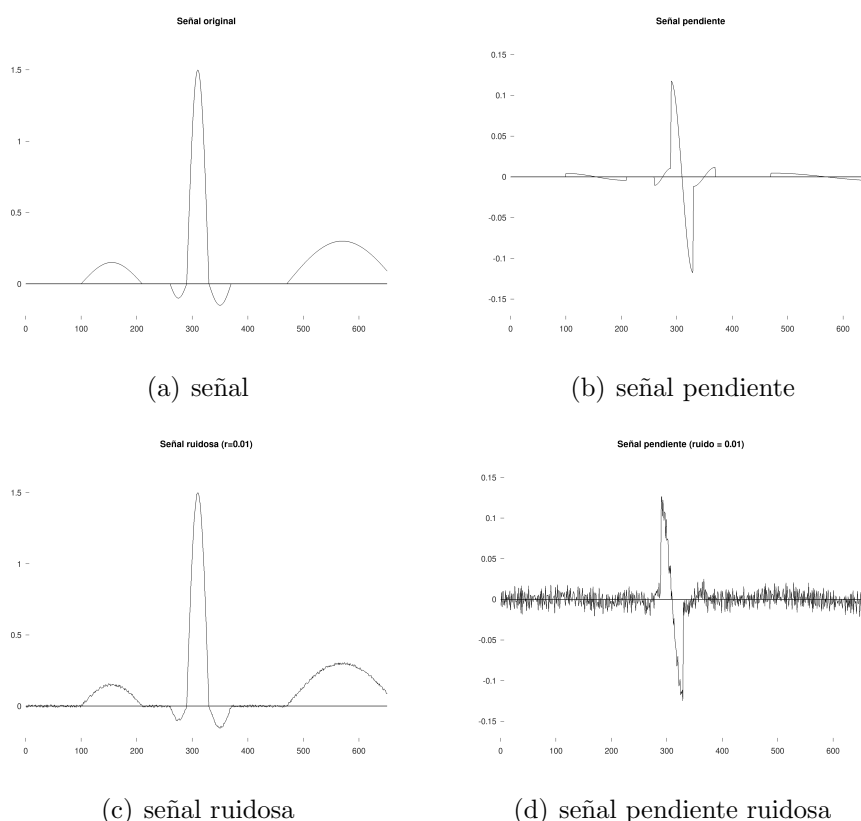


Figura 2.1: Señal ECG idealizada y su señal pendiente, ambas perturbadas con un ruido aleatorio de amplitud 0.01.

un valor mayor comparado con los de otros en la señal πS . Con esto, la influencia del ruido no afecta mucho su detección.

Pero, en general, esto no es así. Los inicios y finales de estas ondas no son fáciles de detectar debido a la variabilidad que hay en algunas mediciones de la señal. Es decir, los puntos P_i, P_f, T_i, T_f , el inicio de la onda Q (Q_i), y el final de la onda S (el punto J) en ocasiones están precedidos (o seguidos) por un segmento que no es del todo isoelectrico (un segmento que no es del todo constante), lo cual hace difícil ver en qué nodo de la señal ésta realiza un “giro”. También en ocasiones el ancho de sus ondas es muy corto, lo cual hace que en algunos ECG no se detecten algunas de éstas (esto ocurre usualmente en la onda Q).

En cuanto a los picos de las ondas P y T (P_m, T_m), la amplitud de sus ondas a veces es menor a la intensidad el ruido, pues el ECG es sensible a otras actividades presentes en el cuerpo como la respiración, el movimiento, entre otras. Estos obstáculos están presentes en el ECG, y juntos hacen que la tarea de detectar los puntos fiduciaros no sea fácil.

(fig. 2.1 c-d).

Todos estos factores hacen que los puntos fiduciaros sean casi indistinguibles del ruido regular y la variabilidad de la señal, por lo que desarrollaremos unos cuantos filtros para estimar estos puntos fiduciaros y así llegar a nuestro objetivo, el cual es encontrarlos.

2.2. Los Filtros Promedio

En esta sección, se busca explicar lo que llamamos **filtros promedio**. Al tratar con señales ruidosas, se busca reducir de cierta forma la influencia del ruido en su análisis, es por eso que en algunos procedimientos se realiza el promediado de ésta. La razón de esto es porque al promediar la señal se compensa el ruido de alta frecuencia. Esta idea nos dice que el promedio juega un papel importante a la hora de procesar la señal, es por ello que haremos la siguiente definición.

2.2.1. Definición y propiedades

Definición 2.1. Para $n \in \mathbb{N}$, se define el **filtro promedio** ($\tilde{\chi}_n$) como

$$\tilde{\chi}_n = (\tilde{\chi}_{n,k})_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

donde $\tilde{\chi}_{n,k} = 1 \quad (1 \leq k \leq n)$.

Ahora, conviene normalizar el filtro promedio, por lo que calculamos la norma de $\tilde{\chi}_n$.

$$\|\tilde{\chi}_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \tilde{\chi}_{n,k}^2 = \sum_{k=1}^n 1 = n \Rightarrow \|\tilde{\chi}_n\| = \sqrt{n}. \quad (2.4)$$

Así, hacemos la siguiente definición:

Definición 2.2. Para $n \in \mathbb{N}$, se define el **filtro promedio normalizado** (χ_n) como

$$\chi_n = \frac{\tilde{\chi}_n}{\|\tilde{\chi}_n\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\chi}_n \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Es decir, tenemos que χ_n viene dado por

$$\chi_n = (\chi_{n,1}, \chi_{n,2}, \dots, \chi_{n,n}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.6)$$

Dado $X \in \mathbb{R}^n$, consideramos su proyección con respecto al espacio generado por χ_n como sigue:

Definición 2.3. Sea $X \in \mathbb{R}^n$ una señal cualquiera. Se define a X_{pr} como:

$$X_{pr} = (X_{pr,k})_{k=1,2,\dots,n} = \langle X, \chi_n \rangle \chi_n \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Es decir, X_{pr} es la proyección ortogonal de X sobre el subespacio generado por χ_n . A X_{pr} se le conocerá como la **parte promedio** de X .

Para una señal dada $X \in \mathbb{R}^n$, X_{pr} es una señal que contiene la información dada por el promedio de X .

Observación 2.4. Si $Y = (c, c, \dots, c) \in \mathbb{R}^n$ ($c \in \mathbb{R}$) es una señal constante, entonces su parte promedio es ella misma. Efectivamente,

$$\langle Y, \chi_n \rangle = \sum_{k=1}^n c \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{c}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{cn}{\sqrt{n}} = c\sqrt{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y_{pr,k} &= \langle Y, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \\ &= (c\sqrt{n}) \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= c = Y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Es decir, el espacio generado por χ_n es el espacio (unidimensional) de las señales constantes.

Ahora calculamos la parte promedio de una señal en general.

Proposición 2.5. Sea $X \in \mathbb{R}^n$ una señal cualquiera. Entonces se tiene que

$$X_{pr,k} = \bar{X} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.8)$$

es decir, $X_{pr} = \sqrt{n} \bar{X} \chi_n = \bar{X} \tilde{\chi}_n$.

Demostración. Calcularemos la parte promedio de la señal X . Denotamos $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Primero vemos que

$$\langle X, \chi_n \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{k=1}^n x_k. \quad (2.9)$$

Así, para $1 \leq k \leq n$, $X_{pr,k}$ viene dado como sigue:

$$\begin{aligned} X_{pr,k} &= \langle X, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k \right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \end{aligned}$$

Es decir, $X_{pr,k} = \bar{X}$, para $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Como se puede ver, X_{pr} es el vector que nos regresa el promedio de la señal en cada entrada, el “nivel directo” de la señal. También puede verse como una aproximación de nivel cero, reportada en todo el soporte de X .

2.3. Los Filtros pendiente

En esta sección se presenta un concepto que resulta muy útil para capítulos posteriores, el cual es el **filtro pendiente**.

2.3.1. Definición y propiedades

Como se dijo antes, el análisis de pendiente resulta ser muy complicado al tratar con señales ruidosas, pero eso no significa que la idea sea del todo inservible. El problema con la señal pendiente vista anteriormente es que da información muy localizada de la señal (cada pendiente solo considera dos nodos), lo que la hace extremadamente sensible al ruido de alta frecuencia. Por tanto, aquí se buscará extender este concepto de pendiente a más de dos puntos para remediar este problema. Para la discretización de señales continuas, se usarán promedios integrales sobre un conjunto de intervalos delimitados por una malla finita.

La idea detrás de esto es ver qué tan parecido es un pedazo de señal a una recta, o qué recta aproximaría bien localmente a la señal. Para ello, usaremos como referencia una recta de pendiente unidad; es decir, analíticamente, el polinomio $p(x) = x$ como referencia ¹. Para nuestro propósito, fijamos $n \geq 2$ entero, esto para que se pueda formar de cierta forma una recta (pues mínimo, se necesitan dos puntos).

Como se está trabajando con señales discretas, se busca discretizar p . Para $1 \leq k \leq n$, integramos a p sobre una familia de intervalos consecutivos de la forma $I_k = [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$; note que cada intervalo tiene longitud igual a 1. De este modo, al integrar sobre I_k tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} p(x) dx &= \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(k + \frac{1}{2})^2 - (k - \frac{1}{2})^2}{2} = \frac{k + \frac{1}{4} + k - \frac{1}{4}}{2} = k. \end{aligned}$$

¹Un caso particular de $p(x)$ sería $p(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), pero éste sería el caso constante, el cual ya se vio anteriormente con los filtros promedio.

De este modo, hemos logrado discretizar a p , a través de promedios integrales. Llamemos $K \in \mathbb{R}^n$ a tal discretización. De este modo, podemos definir a K como sigue:

$$K = \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} p(x) dx \right)_{k=1,2,\dots,n} = (k)_{k=1,2,\dots,n} = (1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.10)$$

Recordando la proposición 2.5, podemos ver que el promedio de nuestra señal puede ser expresado en términos de su parte promedio, es decir, para $k = 1, 2, \dots, n$, se cumple que:

$$\bar{K} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \langle K, \chi_n \rangle \chi_{n,k} = K_{pr,k}. \quad (2.11)$$

Con esto, quitaremos a K su media \bar{K} . Esto es para hacer nuestro filtro ortogonal a señales constantes. Básicamente lo que se hace es quitarle a K su proyección con respecto a χ_n (es decir, K_{pr}) para lograr la ortogonalidad. Es fácil ver que:

$$K_{pr,k} = \bar{K} = \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.12)$$

De esta forma, obtenemos que:

$$\begin{aligned} K_k - \bar{K} &= k - \langle K, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \\ &= k - K_{pr,k} \\ &= k - \frac{n+1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Motivados por lo anterior, haremos la siguiente definición:

Definición 2.6. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, definimos el **filtro pendiente** ($\tilde{\ell}_n$) como

$$\tilde{\ell}_n = (\tilde{\ell}_{n,1}, \tilde{\ell}_{n,2}, \dots, \tilde{\ell}_{n,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

donde

$$\tilde{\ell}_{n,k} = k - \frac{n+1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.14)$$

Una propiedad de los filtros pendiente es que estos son antisimétricos, esto en el sentido del resultado siguiente.

Proposición 2.7. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Entonces para todo $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que:

$$\tilde{\ell}_{n,k} = -\tilde{\ell}_{n,n-k+1}. \quad (2.15)$$

Demostración. Notemos que la demostración depende de la paridad de n . Así, tenemos dos casos:

- **Caso 1.-** Si n es impar, entonces $\frac{n+1}{2}$ es entero. De este modo, si $n = 2m - 1$ ($m \in \mathbb{N}$) entonces $\frac{n+1}{2} = m$. Así para $1 \leq k < m$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{n,n-k+1} &= (n - k + 1) - \frac{n + 1}{2} \\ &= -k + \frac{n + 1}{2} \\ &= -\tilde{\ell}_{n,k}. \end{aligned}$$

Si $m < k \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} m < k &\Rightarrow 2m < m + k \\ &\Rightarrow 2m - 1 < k + m - 1 \\ &\Rightarrow n - k + 1 < m. \end{aligned}$$

Como $n - (n - k + 1) + 1 = k$ este caso se reduce al anterior. Para el caso central se tiene que si $k = m$ entonces:

$$\begin{aligned} n - k + 1 &= n - m + 1 \\ &= 2m - 1 - m + 1 \\ &= m. \end{aligned}$$

Se comprueba directamente que

$$\tilde{\ell}_{n,n-k+1} = -\tilde{\ell}_{n,m} = 0.$$

Así, $\tilde{\ell}_n$ es antisimétrico respecto al cero.

- **Caso 2.-** Si n es par, entonces $\frac{n+1}{2}$ no es entero. Así si $n = 2m$ ($m \in$

ℕ) entonces $\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2}$. Para $1 \leq k \leq m$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_{n,n-k+1} &= n - k + 1 - \frac{n+1}{2} \\ &= 2m - k + 1 - m - \frac{1}{2} \\ &= m + \frac{1}{2} - k \\ &= \frac{n+1}{2} - k \\ &= -\tilde{\ell}_{n,k}.\end{aligned}$$

Si $m < k \leq n$ entonces

$$\begin{aligned}m < k &\Rightarrow 2m < m + k \\ &\Rightarrow n < m + k \\ &\Rightarrow n \leq m + k - 1 \\ &= n - k + 1 \leq m.\end{aligned}$$

Es decir, este caso se reduce al anterior. Note que aquí no hay casos centrales debido a que $\frac{n+1}{2}$ no es entero. ■

Tal como se hizo con los filtros promedio, normalizaremos a nuestros filtros pendiente $\tilde{\ell}_n$. Para ello, dividiremos a $\tilde{\ell}_n$ sobre su norma, la cual es

$$\|\tilde{\ell}_n\| = \sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}} = \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}}. \quad (2.16)$$

La demostración de este resultado se puede ver en el apéndice B.1. Procedemos a normalizar el filtro pendiente; para $(k = 1, 2, \dots, n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\ell}_{n,k}}{\|\tilde{\ell}_n\|} &= \frac{k - \frac{n+1}{2}}{\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}}} \\ &= \frac{2k - n - 1}{2\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}}} = \frac{\sqrt{3}(2k - n - 1)}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2k - n - 1)}{\sqrt{n^3 - n}} = \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}}(2k - n - 1).\end{aligned}$$

De esta forma, haremos la siguiente definición:

Definición 2.8. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se define el **filtro pendiente normalizado** (ℓ_n) como

$$\ell_n = (\ell_{n,1}, \ell_{n,2}, \dots, \ell_{n,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.17)$$

donde

$$\ell_{n,k} = \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}}(2k - n - 1) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.18)$$

Una propiedad que se obtiene del filtro pendiente ℓ_n con respecto al filtro promedio χ_n es la siguiente:

Lema 2.9. Los filtros χ_n y ℓ_n son ortogonales; es decir,

$$\langle \chi_n, \ell_n \rangle = 0. \quad (2.19)$$

Demostración. No es difícil verificar que estos filtros son ortogonales. En efecto

$$\begin{aligned} \langle \chi_n, \ell_n \rangle &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{\frac{3}{n^3 - n}}(2k - n - 1) \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{n(n^3 - n)}} \left[2 \sum_{k=1}^n k - n(n+1) \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{n(n^3 - n)}} [n(n+1) - n(n+1)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Utilizando adecuadamente los filtros pendiente se puede ver (de forma local) qué tan parecida es la señal a una recta. Antes de ver esto, daremos un par de definiciones para poder aclarar mejor nuestro análisis y explicar esta idea.

Definición 2.10. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $X \in \mathbb{R}^n$, se define la **parte lineal de X** (X_ℓ) como $X_\ell = (X_{\ell,1}, X_{\ell,2}, \dots, X_{\ell,n}) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$X_{\ell,k} = \langle X, \ell_n \rangle \ell_{n,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.20)$$

Es decir, X_ℓ es la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por ℓ_n .

Para cualquier vector de \mathbb{R}^n se pueden extraer su parte lineal y su parte promedio. Además ambos vectores son ortogonales por el lema 2.9.

Definición 2.11. Sea $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). Dado $X \in \mathbb{R}^n$, se define su **parte afín** (X_{af}) como $X_{af} = (X_{af,1}, X_{af,2}, \dots, X_{af,n}) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$X_{af,k} = X_{pr,k} + X_{\ell,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

Es decir, se tiene que

$$X_{af,k} = \langle X, \chi_n \rangle \chi_{n,k} + \langle X, \ell_n \rangle \ell_{n,k}. \quad (2.22)$$

Un caso ilustrativo ocurre cuando tratamos de encontrar la parte afín X_{af} de una señal afín:

Proposición 2.12. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ una señal afín; es decir, para ciertos $\mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$x_k = \mu k + \nu. \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.23)$$

Entonces, se tiene que

$$X_{af,k} = x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.24)$$

Es decir, $X_{af} = X$.

Demostración. Sea X una señal afín dada como en el enunciado. De acuerdo a la definición 2.11, la parte afín de una señal es la suma de sus partes promedio y lineal, por lo que procedemos a calcular ambas por separado y al final sumarlas.

La parte promedio viene dada de la siguiente manera: para $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} X_{pr,k} &= \langle X, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mu k + \nu) \\ &= \frac{1}{n} \left(\mu \sum_{k=1}^n k + n\nu \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\mu \frac{n(n+1)}{2} + n\nu \right). \end{aligned}$$

Es decir,

$$X_{pr,k} = \frac{\mu(n+1)}{2} + \nu \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.25)$$

Por otra parte, tenemos que calcular la parte lineal X_ℓ . Por la proposición B.2, tenemos que:

$$\langle X, \ell_n \rangle = \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}} \mu = \|\tilde{\ell}_n\| \mu. \quad (2.26)$$

De esta manera, la parte lineal de nuestra señal afín viene dada por

$$X_{\ell,k} = \langle X, \ell_n \rangle \ell_{n,k} = \|\tilde{\ell}_n\| \mu \frac{\tilde{\ell}_{n,k}}{\|\tilde{\ell}_n\|} = \tilde{\ell}_{n,k} \mu \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.27)$$

Lo último que hay que hacer es calcular X_{af} . Para $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} X_{af,k} &= X_{pr,k} + X_{\ell,k} \\ &= \frac{\mu(n+1)}{2} + \nu + \mu \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \\ &= \mu k + \nu. \end{aligned}$$

Por lo tanto; al calcular X_{af} para una señal afín X , recuperamos la misma señal, es decir:

$$X_{af,k} = \mu k + \nu = x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.28)$$

■

Observación 2.13. *Una observación acerca de nuestro filtro pendiente normalizado es que éste es la discretización de una recta formada por n puntos, lo cual generaliza a la señal pendiente vista en la sección 2.1, la cual está formada por sólo dos puntos. En efecto, tomando el caso particular en el que $n = 2$ se tendría que $\ell_2 = (\ell_{2,1}, \ell_{2,2}) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, y para $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ obtenemos:*

$$\langle X, \ell_n \rangle = x_1 \ell_{2,1} + x_2 \ell_{2,2} = \frac{-x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}},$$

la cual es, básicamente, la **señal pendiente (incremento) normalizada**, ya que:

$$\pi_k X = x_{k+1} - x_k \quad (1 \leq k \leq n-1). \quad (2.29)$$

Se verá esto con más detalle en una sección posterior.

En la demostración anterior, pudimos observar un resultado interesante, el cual se da en la proposición B.2. De aquí se puede proporcionar un análisis como el que sigue.

Supongamos que tenemos una señal afín dada $L \in \mathbb{R}^n$, de la cual se desconocen los parámetros (μ, ν) que la definen, pero se conoce su producto punto con el filtro pendiente ℓ_n . Entonces por la ecuación 2.26 podemos calcular su pendiente fácilmente.

$$\mu = \frac{\langle X, \ell_n \rangle}{\|\tilde{\ell}_n\|} = \sqrt{\frac{12}{n^3 - n}} \langle L, \ell_n \rangle. \quad (2.30)$$

Este cálculo puede hacerse de forma similar a una señal cualquiera $X \in \mathbb{R}^n$, y obtener así un concepto de pendiente para la señal X . Téngase en cuenta que la señal $X - X_{af}$ es ortogonal a las señales afines. En consecuencia, hacemos la siguiente definición.

Definición 2.14. *Sea $X \in \mathbb{R}^n$ una señal dada. Entonces se define su pendiente generalizada, o promedio, como*

$$\mu(X) = \sqrt{\frac{12}{n^3 - n}} \langle X, \ell_n \rangle = \frac{12}{n^3 - n} \langle X, \tilde{\ell}_n \rangle. \quad (2.31)$$

Un análisis de las pendientes en una señal se abordará en el siguiente capítulo.

Del mismo modo que en los filtros promedio, observamos que la parte afín de una señal afín es la misma señal, pero esto ya lo esperábamos. Ahora analizamos qué es lo que ocurre con una señal en general.

Proposición 2.15. *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ una señal cualquiera, y sean también*

$$A = \sum_{k=1}^n x_k \quad y \quad B = \sum_{k=1}^n kx_k.$$

Entonces para $k = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$X_{af,k} = \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{2A(2n + 1) - 6B}{n^2 - n} \right). \quad (2.32)$$

Demostración. Sea $X \in \mathbb{R}^n$ una señal dada cualquiera. Calcularemos su parte lineal.

$$\begin{aligned}
\langle X, \ell_n \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k \ell_{n,k} \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \sum_{k=1}^n x_k (2k - n - 1) \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \left(2 \sum_{k=1}^n k x_k - n \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} (2B - A(n + 1)).
\end{aligned}$$

Con esto, para $1 \leq k \leq n$, las componentes de X_ℓ vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
X_{\ell,k} &= \langle X, \ell_n \rangle \ell_{n,k} \\
&= \frac{3}{n^3 - n} (2k - n - 1) (2B - A(n + 1)) \\
&= \frac{3}{n^3 - n} (4Bk - 2nB - 2B - 2A(n + 1)k + An(n + 1) + A(n + 1)) \\
&= \frac{3}{n^3 - n} [(4B - 2A(n + 1))k + (A(n + 1)^2 - 2B(n + 1))] \\
&= \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{3A(n + 1) - 6B}{n^2 - n} \right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, por la proposición 2.5, vimos que para una señal cualquiera las componentes de X_{pr} están dadas por \bar{X} , es decir:

$$X_{pr,k} = \langle X, \chi_n \rangle \chi_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{A}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33)$$

Finalmente tenemos que $X_{af,k}$ se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
X_{af,k} &= X_{pr,k} + X_{\ell,k} \\
&= \frac{A}{n} + \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{3A(n + 1) - 6B}{n^2 - n} \right) \\
&= \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{A(n - 1) + 3A(n + 1) - 6B}{n^2 - n} \right) \\
&= \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{A(4n + 2) - 6B}{n^2 - n} \right) \\
&= \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right) k + \left(\frac{2A(2n + 1) - 6B}{n^2 - n} \right).
\end{aligned}$$



Note que, al poner X_{af} como un polinomio en k (en función de A , B y n), vemos que éste tiene, efectivamente, la forma de un polinomio de grado uno, con pendiente

$$\lambda = \left(\frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n} \right). \quad (2.34)$$

Observación 2.16. Podemos verificar el resultado de la proposición 2.15 al calcular la pendiente general de la señal $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En efecto, por la definición 2.14 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \frac{12}{n^3 - n} \langle X, \tilde{\ell}_n \rangle = \frac{12}{n^3 - n} \left[\sum_{k=1}^n x_k \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{12}{n^3 - n} \left[\sum_{k=1}^n kx_k - \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^n x_k \right] = \frac{12}{n^3 - n} \left[B - \frac{n+1}{2} A \right] \\ &= \frac{12B}{n^3 - n} - \frac{6A}{n^2 - n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Sean $n = 100$ y $S \in \mathbb{R}^n$ una señal afín tal que $S(k) = \frac{2k+1}{100}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); entonces tenemos que $\mu(S) = \frac{2}{100} = 0.02$. Ahora, perturbamos S con cierto nivel de ruido y denotamos a esta nueva señal como S' . Al calcular la pendiente general de S' por medio de la definición 2.14 notamos que las pendientes difieren por poco debido a la influencia del ruido. De esto, apreciamos que podemos obtener una versión discreta del concepto de pendiente con la ayuda de esta definición, que parece no ser muy sensible a la influencia de ruido. Cabe recalcar que a mayor ruido, menor precisión de nuestra definición (ver figura 2.2).

2.3.2. Sobre la definición de los filtros pendiente

Los filtros pendiente se obtuvieron considerando una discretización de la función identidad $p(x) = x$, basándose en promedios integrales sobre una familia de intervalos consecutivos, y después haciéndolos ortogonales a las señales constantes (vía los filtros promedio). En la proposición 2.7 se muestra cómo esto se refleja en la antisimetría de los coeficientes del filtro. La elección de la discretización a priori puede parecer arbitraria, por lo que hacemos la siguiente pregunta:

¿Los resultados serían los mismos si se cambia el polinomio (por otro polinomio de grado 1), o la familia de intervalos (por otros consecutivos de la misma longitud)?

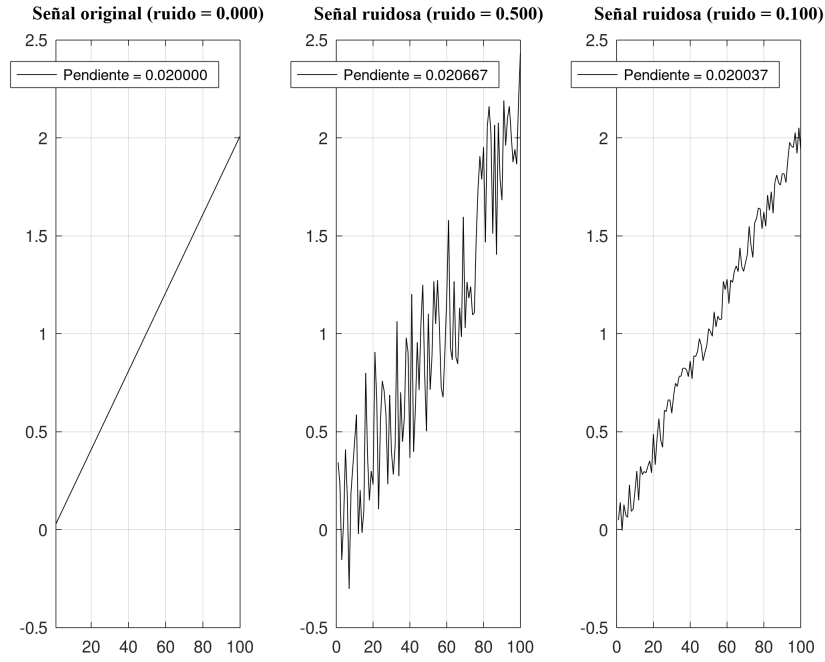


Figura 2.2: Ejemplo del cálculo de la pendiente general de una señal (con distintos niveles de ruido) por medio de la definición 2.14.

Para responder esto planteamos lo siguiente. Sean $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq 0$ (la condición sobre β es para que exista un polinomio de grado 1). Entonces buscamos discretizar el polinomio $p(x) = \beta x + \gamma$ sobre un intervalo cualquiera dividido en n partes iguales ($n \geq 2$). Por tanto consideramos subintervalos de la forma $[\delta + \varepsilon(k-1), \delta + \varepsilon k]$ donde $1 \leq k \leq n$, $\delta \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Así, el intervalo total es $[\delta, \delta + \varepsilon n]$, que queda subdividido en n subintervalos de longitud ε . La discretización se logra al integrar sobre cada uno de estos subintervalos. Denotamos a tal discretización como $p_n = (p_{n,k})_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, en donde:

$$p_{n,k} = \int_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} (\beta x + \gamma) dx \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.35)$$

Al desarrollar la integral, tenemos que

$$\begin{aligned}
 p_{n,k} &= \left[\beta \frac{x^2}{2} + \gamma x \right]_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} \\
 &= \frac{\beta}{2} [(\delta + \varepsilon k)^2 - (\delta + \varepsilon(k-1))^2] + \gamma [\delta + \varepsilon k - (\delta + \varepsilon(k-1))] \\
 &= \frac{\beta}{2} [2\delta\varepsilon + 2\varepsilon k - \varepsilon^2] + \gamma\varepsilon = \beta \left(\delta\varepsilon + \varepsilon k - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \gamma\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que para $k = 1, 2, \dots, n$:

$$p_{n,k} = \varepsilon \left[\beta \left(\delta + k - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \right]. \quad (2.36)$$

Para que el filtro resultante sea ortogonal a señales constantes, hay que restarle su media a los coeficientes. Calculamos la media de p_n y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \varepsilon \left[\beta \left(\delta + k - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \gamma \right] \right\} \\
 &= \frac{\varepsilon}{n} \left\{ \beta\delta n - \frac{\beta}{2}\varepsilon n + \gamma n + \beta \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= \varepsilon \left\{ \beta\delta - \frac{\beta\varepsilon}{2} + \gamma + \beta \frac{n+1}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Así, definimos:

$$\tilde{p}_{n,k} = p_{n,k} - \bar{p}_n = \beta\varepsilon \left(k - \frac{n+1}{2} \right).$$

Con esta expresión podemos definir a nuestro **filtro pendiente de parámetros** $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ como $\tilde{\ell}_n^{(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = (\tilde{\ell}_{n,k}^{(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)})_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, donde

$$\tilde{\ell}_{n,k}^{(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \tilde{p}_{n,k} = p_{n,k} - \bar{p} = \beta\varepsilon \left(k - \frac{n+1}{2} \right). \quad (2.37)$$

El caso canónico, visto en la sección anterior, corresponde a $\beta = 1, \gamma = 0, \delta = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. De los cálculos hechos anteriormente, podemos decir que hemos probado el siguiente teorema (ver 2.6).

Teorema 2.18. Sean $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces se tiene que:

$$\tilde{\ell}_{n,k}^{(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \beta\varepsilon \tilde{\ell}_{n,k}^{(1, 0, \frac{1}{2}, 1)}. \quad (2.38)$$

Es decir, los resultados son proporcionales a los del caso canónico.

A continuación, normalizamos el filtro. Un procedimiento que se ha hecho en el desarrollo de los filtros pendiente es el normalizarlos. Para esto vemos que (ver apéndice A.1):

$$\begin{aligned}\|\tilde{\ell}_n^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}\|^2 &= \|\beta\varepsilon\tilde{\ell}_n^{(1,0,\frac{1}{2},1)}\|^2 \\ &= \beta^2\varepsilon^2\|\tilde{\ell}_n^{(1,0,\frac{1}{2},1)}\|^2 \\ &= \beta^2\varepsilon^2\frac{(n-1)n(n+1)}{12}.\end{aligned}$$

Así, definimos $\ell_n^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} = \left(\ell_{n,k}^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}\right)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Para $k = 1, 2, \dots, n$ en virtud de la definición 2.8:

$$\begin{aligned}\ell_{n,k}^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} &= \frac{\tilde{p}_{n,k}}{\|\tilde{p}_n\|} = \frac{\beta\varepsilon\left(k - \frac{n+1}{2}\right)}{|\beta|\varepsilon\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}}} \\ &= \text{Sgn}(\beta)\frac{k - \frac{n+1}{2}}{\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}}} = \text{Sgn}(\beta)\tilde{\ell}_{n,k}^{(1,0,\frac{1}{2},1)}.\end{aligned}$$

Con lo anterior, queda probado el siguiente resultado:

Proposición 2.19. *El filtro pendiente normalizado no se ve afectado por el valor de los parámetros β, γ, δ y $\varepsilon \in$ (salvo por el signo de β). Es decir, para $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\ell_{n,k}^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} &= \ell_{n,k}^{(1,0,\frac{1}{2},1)} \quad (\text{Sgn}(\beta) > 0), \\ \ell_{n,k}^{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} &= -\ell_{n,k}^{(1,0,\frac{1}{2},1)} \quad (\text{Sgn}(\beta) < 0).\end{aligned}$$

Con estos resultados podemos concluir que no importa qué valores se le asignen a los coeficientes del polinomio $p(x) = \beta x + \gamma$, o qué longitud tenga el intervalo que se tome, pues el resultado será igual al caso canónico a excepción del signo que pueda tener β .

2.4. Los Filtros de Curvatura

En esta sección se presenta un concepto que resulta muy útil para capítulos posteriores, el cual es el **filtro de curvatura**.

2.4.1. Definición y propiedades

Recordemos que en la sección 2.3, para introducir los filtros pendiente partimos de la idea de ver qué recta se aproximaría mejor a la señal, y

para ello, usamos al polinomio de primer grado $p(x) = x$. Ahora, buscamos aproximar a nuestra señal por medio de un polinomio de segundo grado. Esto es debido a que buscamos ver cuándo la señal da una especie de “giro” o tiene “curvatura”.

Al igual que en la sección anterior, estamos tratando con señales discretas, por lo que este polinomio tiene que estar discretizado, para ello hacemos lo siguiente: Notemos que para cualesquiera dos puntos que tomemos, éstos están siempre alineados. Por esta razón fijaremos a un $n \geq 3$ entero, puesto que para poder tener un efecto de curvatura, necesitamos al menos 3 puntos, algo similar al caso de los filtros pendiente en los cuales consideramos $n \geq 2$. Además, consideramos el polinomio $p(x) = x^2$ sobre el intervalo $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$. La razón para elegir este intervalo es la simetría de la parábola que se obtiene al graficar dicho polinomio; el intervalo está centrado en el origen y tiene longitud n , de manera que se puede subdividir en n intervalos de longitud 1, éstos son:

$$\left[-\frac{n}{2} + k - 1, -\frac{n}{2} + k\right] \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.39)$$

La discretización se consigue al promediar p sobre los intervalos anteriores de longitud 1:

$$p_{n,k} = \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} x^2 dx \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.40)$$

Para $k = 1, 2, \dots, n$, se tiene

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(-\frac{n}{2} + k\right)^3 - \left(-\frac{n}{2} + k - 1\right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[3 \left(k - \frac{n}{2}\right)^2 - 3 \left(k - \frac{n}{2}\right) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[3 \frac{n^2}{4} + 3 \left(\frac{n}{2}\right) (-2k + 1) - (-3k^2 + 3k - 1) \right] \\ &= \frac{n^2}{4} - nk + \frac{n}{2} + k^2 - k + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Definimos a p_n como:

$$p_n = (p_{n,1}, p_{n,2}, \dots, p_{n,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.41)$$

donde

$$p_{n,k} = \frac{n^2}{4} - nk + \frac{n}{2} + k^2 - k + \frac{1}{3} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.42)$$

Una propiedad que buscamos en los filtros de curvatura es que éstos sean ortogonales a señales constantes y afines. La primera condición impone una restricción en la forma del filtro, mientras que la segunda se obtendrá automáticamente debido a la simetría de los filtros (esto se aclarará más adelante). Note que por la sección 2.2, podemos hacer esto al quitarle a p_n su proyección con el filtro promedio (la cual está dada por su media), es decir,

$$p_n - \langle p_n, \chi_n \rangle \chi_n.$$

Como también buscamos que los filtros sean ortogonales a señales afines, ahora le quitamos a p_n su proyección con los filtros pendiente. Con esto se tiene que, para $n \geq 3$

$$\hat{q}_n = p_n - \langle p_n, \chi_n \rangle \chi_n - \langle p_n, \ell_n \rangle \ell_n \quad (2.43)$$

$$= p_n - (p_n)_{pr} - (p_n)_\ell. \quad (2.44)$$

De esta manera, hacemos la siguiente definición.

Definición 2.20. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Se define a $\hat{q}_n \in \mathbb{R}^n$ dado por:

$$\hat{q}_n = (\hat{q}_{n,1}, \hat{q}_{n,2}, \dots, \hat{q}_{n,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.45)$$

donde

$$\hat{q}_n = p_n - \langle p_n, \chi_n \rangle \chi_n - \langle p_n, \ell_n \rangle \ell_n. \quad (2.46)$$

Desarrollemos más a fondo la definición 2.20. Por un lado, tenemos que $(p_n)_{pr,k}$ viene dado por:

$$\begin{aligned} (p_n)_{pr,k} &= \bar{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n^2}{4} - nk + \frac{n}{2} + k^2 - k + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \sum_{k=1}^n k + \frac{n}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{3} \\ &= \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n+1}{2} \\ &= n^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{n^2}{12}. \end{aligned}$$

Es decir

$$(p_n)_{pr,k} = \overline{p_n} = \frac{n^2}{12}. \quad (2.47)$$

Por otra parte, vemos que p_n es una señal simétrica, pues ésta es la discretización de la parábola x^2 . En efecto:

$$\begin{aligned} p_{n,n-k+1} &= \frac{n^2}{4} - n(n-k+1) + \frac{n}{2} + (n-k+1)^2 - (n-k+1) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{n^2}{4} - n^2 + nk - n + \frac{n}{2} + n^2 - 2nk + 2n + k^2 - 2k + 1 - n + k - 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{n^2}{4} - nk + \frac{n}{2} + k^2 - k + \frac{1}{3} \\ &= p_{n,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Por la proposición 2.7, tenemos que ℓ_n es antisimétrica. Con estas dos propiedades podemos ver fácilmente que son ortogonales haciendo uso del siguiente lema:

Lema 2.21. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ una señal simétrica y $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ una señal antisimétrica, es decir:

$$a_k = a_{n-k+1} \quad y \quad b_k = -b_{n-k+1} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Entonces A y B son ortogonales:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k = 0. \quad (2.48)$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y A, B señales dadas como en el enunciado anterior. Se consideran 2 casos:

Caso 1.- Si n es impar, entonces $\frac{n+1}{2}$ es entero, por lo que si $n = 2m - 1$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces $m = \frac{n+1}{2}$. Así tenemos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{2m-1} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k + a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{2m-1} a_k b_k.$$

Haciendo el cambio de variable $k = n - \nu + 1$ en el segundo sumatorio, tenemos que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k + a_m b_m + \sum_{\nu=1}^{m-1} a_{n-\nu+1} b_{n-\nu+1}.$$

Ahora, por la simetría de las señales A y B , tenemos que $a_{n-\nu+1}b_{n-\nu+1} = -a_\nu b_\nu$, por lo que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^{m-1} (a_k b_k - a_k b_k) + a_m b_m = a_m b_m.$$

Notemos que, por simetría, se debe cumplir también que $a_m b_m = 0$ ya que $b_m = 0$, y así $\langle A, B \rangle = 0$.

Caso 2.- Si n es par, entonces $\frac{n+1}{2}$ no es entero, por lo que si $n = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{2m} a_k b_k = \sum_{k=1}^m a_k b_k + \sum_{k=m+1}^{2m} a_k b_k.$$

De nuevo, haciendo el cambio de variable $k = n - \nu + 1$ en el segundo sumatorio, obtenemos

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^m a_k b_k + \sum_{\nu=1}^m a_{n-\nu+1} b_{n-\nu+1}.$$

Y una vez más, por la simetría de A y B , tenemos que $a_\nu b_\nu = -a_{n-\nu+1} b_{n-\nu+1}$. Así

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^m (a_k b_k - a_k b_k) = 0.$$

■

Por el lema anterior, podemos concluir que $\langle p_n, \ell_n \rangle = 0$. Con estos resultados, llegamos a lo siguiente:

$$\hat{q}_{n,k} = \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.49)$$

Unas propiedades a destacar acerca de los \hat{q}_n son las siguientes:

Proposición 2.22. Para todo $n \geq 3$, $k = 1, 2, \dots, n$, se tiene que:

$$\hat{q}_{n,k} = \left(\frac{n+1}{2} - k \right)^2 - \frac{n^2 - 1}{12}. \quad (2.50)$$

Demostración. Sólo es cuestión de completar cuadrados respecto a k para obtener:

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_{n,k} &= \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} + \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4} \\
&= \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(2n^2 + 6n + 4 - 3n^2 - 6n - 3) \\
&= \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(1 - n^2) = \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}(n^2 - 1).
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.23. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, y $k = 1, 2, \dots, n$, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^n \widehat{q}_{n,k} = 0.$$

Demostración. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \widehat{q}_{n,k} &= \sum_{k=1}^n (p_{n,k} - \bar{p}_n) = \sum_{k=1}^n p_{n,k} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n p_{n,\nu}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n p_{n,k} - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1\right) \left(\sum_{\nu=1}^n p_{n,\nu}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n p_{n,k} - \sum_{\nu=1}^n p_{n,\nu} = 0.
\end{aligned}$$

■

Entre las demás propiedades que poseen los filtros de curvatura es de importancia la de la simetría que éstos heredan de alguna manera de la función cuadrática $p(x) = x^2$, que es justo lo que buscábamos. La siguiente proposición establece esto.

Proposición 2.24. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Entonces para todo $k = 1, 2, \dots, n$ se cumple que

$$\widehat{q}_{n,k} = \widehat{q}_{n,n-k+1}.$$

Es decir, las componentes son simétricas.

Demostración. Por la proposición 2.22, tenemos que la simetría se da respecto a $\frac{n+1}{2}$, y dependiendo de la paridad de n , $\frac{n+1}{2}$ puede ser entero o no. Es por eso que consideramos dos casos:

Caso 1: Si n es impar, $\frac{n+1}{2}$ es entero. Concretamente, si $n = 2m - 1$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{n+1}{2} = m$. Con esto, si $1 \leq k < m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{2} - (n-k+1) \right)^2 &= (m - 2m + 1 + k - 1)^2 \\ &= (k - m)^2 = (m - k)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{2} - k \right)^2. \end{aligned}$$

De esto y de la proposición 2.22 se deduce el resultado. Si $k > m$, entonces $1 \leq n-k+1 < m$ (ver proposición 2.7). Puesto que $n - (n-k+1) + 1 = k$, este caso se reduce al anterior. Resta el caso central. Si $k = m$ se tiene que $n - k + 1 = m$ pues

$$n - k + 1 = n - m + 1 = 2m - 1 - m + 1 = m.$$

Caso 2: Si n es par, $\frac{n+1}{2}$ no es entero. Concretamente, si $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2}$. Con esto, si $1 \leq k \leq m$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{2} - (n-k+1) \right)^2 &= \left(m + \frac{1}{2} - (2m - k + 1) \right)^2 \\ &= \left(k - \frac{1}{2} - m \right)^2 = \left(m + \frac{1}{2} - k \right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{2} - k \right)^2. \end{aligned}$$

De esto y de la proposición 2.22, se deduce el resultado. Si $k > m$, entonces $1 \leq n - k + 1 \leq m$ (ver proposición 2.7). Puesto que $n - (n - k + 1) + 1 = k$, este caso se reduce al anterior. ■

Con el lema 2.21, y las proposiciones 2.23 y 2.24, podemos demostrar otra propiedad sumamente importante para los \hat{q}_n , **la ortogonalidad con respecto a las señales afines.**

Teorema 2.25. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^n (\lambda k + \mu) \hat{q}_{n,k} = 0. \quad (2.51)$$

Demostración. En primer lugar, notamos que:

$$\lambda k + \mu = -\lambda \left(\frac{n+1}{2} - k \right) + \mu + \lambda \frac{n+1}{2}.$$

De este modo, podemos aprovechar la simetría de los $\widehat{q}_{n,k}$ respecto a $\frac{n+1}{2}$ (ver proposición 2.24). Se tiene

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n (\lambda k + \mu) \widehat{q}_{n,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[-\lambda \left(\frac{n+1}{2} - k \right) + \mu + \lambda \frac{n+1}{2} \right] \widehat{q}_{n,k} \\ &= \sum_{k=1}^n -\lambda \left(\frac{n+1}{2} - k \right) \widehat{q}_{n,k} + \left(\mu + \lambda \frac{n+1}{2} \right) \sum_{k=1}^n \widehat{q}_{n,k}. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.23, el segundo sumatorio se puede cancelar, y así tenemos que

$$S = -\lambda \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{2} - k \right) \widehat{q}_{n,k}. \quad (2.52)$$

Ahora, por la proposición 2.24, sabemos que \widehat{q}_n es simétrico. Puesto que el vector $\left(\frac{n+1}{2} - k \right)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ es antisimétrico (de hecho, es $-\tilde{\ell}_n$), por el lema 2.21, se tiene que $S = 0$. ■

Los resultados vistos hasta ahora hacen pensar que los filtros de curvatura están listos para ser implementados en la práctica, lo cual se busca hacer por medio de un computador. Pero, debido a la limitada memoria de la computadora, solo podemos trabajar con valores aproximados de un número que en general puede encontrarse en \mathbb{R} , \mathbb{Q} , o incluso en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Esto ocurre con las entradas de nuestro filtro de curvatura \widehat{q}_n ; en efecto, para $k = 1, 2, \dots, n$, $\widehat{q}_{n,k} \in \mathbb{Q}$.

Debido a esto, podemos llegar a trabajar con valores truncados y limitados, lo que de cierta forma nos arrastra un error, el cual puede restar eficacia al funcionamiento del filtro \widehat{q}_n . Es por esto que buscamos hacer enteras las entradas del filtro de curvatura, debido a que es más cómodo trabajar con enteros y de esta forma se puede reducir al mínimo el error que se pueda llegar a generar.

Así que procedemos como sigue: para $k = 1, 2, \dots, n$, consideramos $\widehat{q}_{n,k}$ tal como en 2.50, es decir

$$\widehat{q}_{n,k} = \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{n^2 - 1}{12} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Note que los $\widehat{q}_{n,k}$ no son todos enteros, pero que sí existe $\rho_n \in \mathbb{R}$ tal que $\rho_n \widehat{q}_n \in \mathbb{Z}^n$. Es decir, existe un escalar tal que al multiplicarlo por \widehat{q}_n hace que éste tenga sus entradas enteras. En particular cualquier múltiplo de 12 sirve para esto. En efecto, para $c \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$12c\widehat{q}_{n,k} = 12c \left(k^2 - k(n+1) + \frac{(n+1)^2}{4} \right) - c(n^2 - 1) \in \mathbb{Z}.$$

Así, existe un único $\sigma_n > 0$ que cumple con lo siguiente:

$$\sigma_n^{-1} \widehat{q}_n \in \mathbb{Z}^n \quad \text{y} \quad \{ \sigma_n^{-1} \widehat{q}_{n,k} \}_{k=1}^n \quad \text{son enteros coprimos.} \quad (2.53)$$

Con esto, haremos la siguiente definición.

Definición 2.26. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y sea σ_n tal que cumple con la condición 2.53. Entonces definimos el **filtro de curvatura** $\tilde{q}_n \in \mathbb{Z}^n$ como

$$\tilde{q}_n = (\tilde{q}_{n,1}, \tilde{q}_{n,2}, \dots, \tilde{q}_{n,n}), \quad (2.54)$$

donde

$$\tilde{q}_{n,k} = \frac{\widehat{q}_{n,k}}{\sigma_n} \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.55)$$

Ahora, resta saber los valores de σ_n . Podemos observar que los filtros de curvatura obtenidos aquí son proporcionales a los que se obtuvieron en [15] (uno es 6 veces el otro). Por lo tanto, los factores deben conservar la misma proporcionalidad, de tal forma que podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 2.27. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, y \widehat{q}_n como se definió en 2.20. Además, sean $m, p \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 12m + p$ y $0 \leq p < 12$. Entonces el conjunto de factores de escala que cumplen con 2.53 está dado por

$$\sigma_{12m+p} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } p = 0, 3, 9 \\ \frac{2}{3} & \text{si } p = 6 \\ 1 & \text{si } p = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \\ 2 & \text{si } p = 2, 10 \end{cases} \quad (2.56)$$

Demostración. Por la observación anterior, tenemos que sí existe tal σ_n que hace que nuestro filtro de curvatura sea entero en cada entrada, es decir, $\tilde{q}_n \in \mathbb{Z}^n$. Así, sólo resta ver que $\{\tilde{q}_{n,k}\}_{k=1}^n$ sean coprimos.

La idea detrás de esto es notar que si algún entero es divisor común de las entradas del filtro, entonces debe dividir a la diferencia de cualesquiera dos. Esta técnica nos reduce por mucho el número de opciones, pues basta con elegir apropiadamente dos de los $\tilde{q}_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n$) y ver que su diferencia no tiene divisores distintos de 1 y -1. Con esto, denotamos a $d \in \mathbb{Z}$ como un divisor común de $\{\tilde{q}_{n,k}\}_{k=1}^n$.

Por el algoritmo de la división, para $n \in \mathbb{N}$ existen $m, p \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 12m + p$ con $0 \leq p < 12$. Entonces la prueba se reduce a ver los valores que toma σ_{12m+p} para cada p , y ver que éste, en efecto, hace las entradas del filtro coprimas entre sí. Aquí, usaremos la forma del filtro de curvatura dada por la definición 2.20, ecuación 2.49.

- **Caso $p = 0$:** En este caso $\sigma_{12m} = \frac{1}{3}$, de aquí $\sigma_{12m}^{-1} = 3$ y así

$$\tilde{q}_{12m,k} = 3(24m^2 + 6m - 12mk + k^2 - k) + 1.$$

Tomamos dos valores cercanos entre sí. La proposición 2.22 nos dice que la simetría de los filtros se da respecto a $\frac{n+1}{2}$, por lo que tomamos dos puntos cercanos aquí. Para $\frac{n+1}{2} = 6m + \frac{1}{2}$, las entradas de \hat{q}_n se encuentran mas cerca. En particular, tomamos las entradas céntricas $6m + 1, 6m + 2$.

Al calcular dichas entradas tenemos que $\tilde{q}_{12m,6m+2} - \tilde{q}_{12m,6m+1} = 6$, por lo que d toma los valores de 1,2,3,6. Sin embargo ni 2, ni 3 dividen a $\tilde{q}_{12m,k}$ (por ende, 6 tampoco lo divide). Por lo tanto, $d = 1$ es el único valor.

- **Caso $p = 1$:** Aquí $\sigma_{12m+1} = 1$ y así

$$\tilde{q}_{12m+1,k} = 2(12m^2 + 5m - 6mk) + k(k - 1) + 1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

De nuevo, se calculan las mismas entradas que en el caso $p = 0$. Vemos que $\tilde{q}_{12m+1,6m+2} - \tilde{q}_{12m+1,6m+1} = 2$, con esto, d puede tomar los valores de 1 y 2, pero para $k = 1, 2, \dots, n$ se ve que $2 \nmid \tilde{q}_{n,k}$. Así $d = 1$ es el único valor que puede tomar.

- **Caso $p = 2$:** Aquí $\sigma_{12m+2} = 2$ y $\sigma_{12m+2}^{-1} = \frac{1}{2}$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+2,k} = 12m^2 + 7m - 6mk + \frac{1}{2}(k(k - 1)) + 1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Note que $k(k - 1)$ es siempre par para $k = 1, 2, \dots, 12m + 2$ (en general esto es cierto para $k = 1, 2, \dots, n$), así tenemos que

$\tilde{q}_{12m+2,k} \in \mathbb{Z}$. De aquí

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+2,6m+1} &= -11m^2 + 4m + 1 \\ \tilde{q}_{12m+2,6m+2} &= -11m^2 + 4m + 2.\end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{q}_{12m+2,6m+1} - \tilde{q}_{12m+2,6m+2} = 1$. De este modo el único valor que puede tomar d es 1.

- **Caso $p = 3$:** En este caso $\sigma_{12m+3} = \frac{1}{3}$, es decir $\sigma_{12m+3}^{-1} = 3$, así

$$\tilde{q}_{12m+3} = 3(24m^2 + 18m - 12mk + k^2 - 4k) + 10. \quad (2.57)$$

Con esto, obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+3,6m+1} &= 3(-12m^2 - 6m) - 2 \\ \tilde{q}_{12m+3,6m+2} &= 3(-12m^2 - 6m) - 14.\end{aligned}$$

Así $\tilde{q}_{12m+3,6m+2} - \tilde{q}_{12m+3,6m+1} = 12$, por lo que d toma los valores de 1,2,3,4,6,12. Si d es par ($d = 2, 4, 6, 12$), entonces d no divide a $\tilde{q}_{12m+3,k}$, lo mismo ocurre si $d = 3$. Por lo que el único valor posible aquí es $d = 1$.

- **Caso $p = 4$:** Aquí $\sigma_{12m+4} = 1$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+4,k} = 2(12m^2 + 11m - 6mk) + k^2 - 5k + 5.$$

Así, vemos que

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+4,6m+1} &= -12m^2 - 8m + 1 \\ \tilde{q}_{12m+4,6m+2} &= -12m^2 - 8m + 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{q}_{12m+4,6m+2} - \tilde{q}_{12m+4,6m+1} = 0$. Aquí d puede tener cualquier valor, sin embargo no es así. Si $d \neq 1$ (ya sea par o impar) se tendría que $d \nmid \tilde{q}_{12m+4,k}$. Por lo tanto aquí también $d = 1$.

- **Caso $p = 5$:** Para $p = 5$ se tiene que $\sigma_{12m+5} = 1$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+5,k} = 2(12m^2 - 13m - 6mk) + k^2 - 6k + 7.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+5,6m+1} &= -12m^2 + 7 \\ \tilde{q}_{12m+5,6m+2} &= -12m^2 - 1.\end{aligned}$$

Así $\tilde{q}_{12m+5,6m+2} - \tilde{q}_{12m+5,6m+1} = -8$. De aquí d puede tomar los valores de 1,2,4,8; pero si d es par, entonces $d \nmid \tilde{q}_{12m+5,k}$. Por tanto $d = 1$ es el único valor que puede tomar.

- **Caso $p = 6$:** Aquí $\sigma_{12m+6} = \frac{2}{3}$, de modo que $\sigma_{12m+6}^{-1} = \frac{3}{2}$ y así

$$\tilde{q}_{12m+6,k} = 3(12m^2 + 15m - 6mk) + \frac{3}{2}(k(k-1)) - 9k + 14.$$

Con esto se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+6,6m+1} &= -18(m^2 + m) + 5 \\ \tilde{q}_{12m+6,6m+2} &= -18(m^2 + m) + 17.\end{aligned}$$

De esta forma $\tilde{q}_{12m+6,6m+2} - \tilde{q}_{12m+6,6m+1} = 12$. Se tiene el mismo caso que en $p = 3$, por lo que $d = 1$ es el único valor posible.

- **Caso $p = 7$:** Tenemos que $\sigma_{12m+7} = 1$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+7,k} = 24m^2 + 34m - 12mk + k^2 - 8k + 12.$$

Por tanto obtenemos los siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+7,6m+1} &= -2(6m^2 + 7m) + 4 \\ \tilde{q}_{12m+7,6m+2} &= -2(6m^2 + 7m) - 4.\end{aligned}$$

Así $\tilde{q}_{12m+7,6m+2} - \tilde{q}_{12m+7,6m+1} = -8$. Se tiene el mismo caso que en $p = 5$, por lo que aquí también se concluye que $d = 1$.

- **Caso $p = 8$:** Aquí $\sigma_{12m+8} = 1$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+8,k} = 24m^2 + 22m - 12mk + k^2 - 9k + 11.$$

Así

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+8,6m+1} &= -4(3m^2 + 8m) + 2 \\ \tilde{q}_{12m+8,6m+2} &= -4(3m^2 + 8m) - 7.\end{aligned}$$

por lo tanto $\tilde{q}_{12m+8,6m+2} - \tilde{q}_{12m+8,6m+1} = -9$. Los valores que d puede tomar son 1, 3 y 9, pero d no puede ser impar y distinto de 1, de ser así $d \nmid \tilde{q}_{12m+8,k}$. Por lo tanto $d = 1$ es el único valor posible.

- **Caso $p = 9$:** En este caso tenemos que $\sigma_{12m+9} = \frac{1}{3}$, con esto

$$\tilde{q}_{12m+9,k} = 72m^2 + 126m - 36mk + 3k^2 - 30k + 220.$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+9,6m+1} &= -36m^2 - 54m + 193 \\ \tilde{q}_{12m+9,6m+2} &= -36m^2 - 54m + 172.\end{aligned}$$

Con esto $\tilde{q}_{12m+9,6m+2} - \tilde{q}_{12m+9,6m+1} = -21$, por lo tanto los valores que puede tomar d son 1 y 21. Si $d = 21$, entonces $d \nmid \tilde{q}_{12m+9,k}$, así se concluye que $d = 1$ es el único valor posible.

- **Caso $p = 10$:** Aquí tenemos que $\sigma_{12m+10} = 2$, es decir, $\sigma_{12m+10}^{-1} = \frac{1}{2}$. Por tanto:

$$\tilde{q}_{12m+9,k} = 12m^2 + 23m - 6mk + \frac{1}{2}(k(k-1)) - 5k + 11.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+10,6m+1} &= -2(3m^2 - m) + 6 \\ \tilde{q}_{12m+10,6m+2} &= -2(3m^2 - m) + 1.\end{aligned}$$

De aquí $\tilde{q}_{12m+10,6m+2} - \tilde{q}_{12m+10,6m+1} = -5$, por lo que los únicos valores que puede tomar d son 1 y 5. Es obvio que si $d = 5$ entonces $d \nmid \tilde{q}_{12m+10,k}$, por lo que aquí también el único valor que puede tomar d es $d = 1$.

- **Caso $p = 11$:** En este caso, $\sigma_{12m+11} = 1$, así se tiene que

$$\tilde{q}_{12m+11,k} = 24m^2 + 50m - 12mk + k^2 - 12k + 26.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{12m+11,6m+1} &= -2(6m^2 - 11m) + 14 \\ \tilde{q}_{12m+11,6m+2} &= -2(6m^2 - 11m) + 2.\end{aligned}$$

Con esto, $\tilde{q}_{12m+11,6m+2} - \tilde{q}_{12m+11,6m+1} = -12$. Se da el mismo caso que en $p = 6$, así se concluye que d solo puede tomar el valor de $d = 1$.

Por lo tanto, para $0 \leq p < 12$, se tiene que $\{\sigma_{12m+p}^{-1} \hat{q}_{12m+p,k}\}_{k=1}^n$ es coprimo. ■

Algo que se ha estado haciendo en las secciones anteriores es la de normalizar a nuestros filtros, y se busca esto también para nuestros filtros de curvatura. Por la proposición B.3, tenemos que

$$\|\hat{q}_n\| = \sqrt{\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{180}}. \quad (2.58)$$

Con esto podemos normalizar las entradas del filtro de curvatura usando

esta expresión. Para $k = 1, 2, \dots, n$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{q}_{n,k}}{\|\widehat{q}_n\|} &= \frac{\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{180}}} \\
&= \frac{\sqrt{180} \left(\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right)}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{6\sqrt{5} \left(\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right)}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{5}(n^2 + 3n - 6nk + 6k^2 - 6k + 2)}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 2.28. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Entonces se define el **filtro de curvatura normalizado**

$$q_n = (q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.59)$$

donde para $k = 1, 2, \dots, n$ se define:

$$q_{n,k} = \frac{\widehat{q}_{n,k}}{\|\widehat{q}_n\|} = \frac{\sqrt{5}(n^2 + 3n - 6nk + 6k^2 - 6k + 2)}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.60)$$

Es decir, $q_n = \frac{\widehat{q}_n}{\|\widehat{q}_n\|} = \frac{\widehat{q}_n}{\|\widehat{q}_n\|}$.

Como se hizo en las secciones anteriores, se busca que estos filtros nos brinden cierta información acerca de una señal $X \in \mathbb{R}^n$ a la cual se les quiera aplicar. Daremos un par de definiciones antes de proceder a nuestro análisis.

Definición 2.29. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, y sea q_n el filtro de curvatura normalizado. Entonces para $X \in \mathbb{R}^n$ se define **la parte de curvatura** como

$$X_q = \langle X, q_n \rangle q_n \in \mathbb{R}^n. \quad (2.61)$$

Con la parte de curvatura, podemos hacer una definición análoga a la que se hizo con los filtros promedio y pendiente, la cual es la de obtener la parte cuadrática de una señal.

Definición 2.30. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, y sea $X \in \mathbb{R}^n$. Definimos la **parte cuadrática de X** (X_{cuad}) como

$$X_{cuad} = X_{af} + X_q = X_{pr} + X_\ell + X_q. \quad (2.62)$$

La parte cuadrática, así como la parte afín, pueden verse como aproximaciones de tipo Taylor, pero netamente discretas, de segundo y primer orden, respectivamente. Sin embargo, esta afirmación debe complementarse con el comentario siguiente: en los desarrollos de Taylor, no se asume ningún tipo de ortogonalidad, mientras que en este caso discreto sí se impone la condición de ortogonalidad entre las aproximaciones de distinto orden. Esta última condición es importante desde el punto de vista de las aplicaciones, ya que facilita los cálculos de coeficientes de aproximaciones.

Con la definición anterior podemos extraer información que nos es de interés de una señal (en particular, su parte cuadrática).

Teorema 2.31. Sean $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, y sea $C = (C_k)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ una señal cuadrática, es decir

$$C_k = \lambda k^2 + \mu k + \nu \quad (1 \leq k \leq n), \quad (2.63)$$

entonces se tiene que

$$C_{cuad} = C. \quad (2.64)$$

Es decir, la parte cuadrática de una señal cuadrática es, precisamente, la misma señal cuadrática.

Demostración. Por la definición 2.30, tenemos que la parte cuadrática de una señal está conformada por la suma de sus partes promedio, lineal y curvatura, por lo que calcularemos éstas por separado y al final las sumaremos.

- **Parte promedio.-** Sabemos por la definición 2.3 que

$$C_{pr,k} = \langle C, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.65)$$

Con esto, y por la proposición A.1 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_{pr,k} &= \langle C, \chi_n \rangle \chi_{n,k} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (\lambda k^2 + \mu k + \nu) \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \left[\lambda \sum_{k=1}^n k^2 + \mu \sum_{k=1}^n k + n\nu \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\lambda \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) + \mu \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) + n\nu \right]. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos la parte promedio para la señal C .

$$C_{pr,k} = \lambda \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \right) + \mu \left(\frac{n+1}{2} \right) + \nu \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.66)$$

- **Parte lineal.-** De la definición 2.10, tenemos que

$$C_{\ell,k} = \langle C, \ell_n \rangle \ell_{n,k} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Por la proposición B.4 tenemos que

$$\langle C, \ell_n \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^3 - n}{3}} (\lambda(n+1) + \mu).$$

Con esto, la parte lineal de nuestra señal cuadrática tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned} C_{\ell,k} &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^3 - n}{3}} (\lambda(n+1) + \mu) \right) \left(\sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} (2k - n - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda(n+1) + \mu) (2k - n - 1) \quad (1 \leq k \leq n). \end{aligned}$$

Por lo tanto para $k = 1, 2, \dots, n$ la parte lineal de una señal cuadrática está dada por

$$C_{\ell,k} = \lambda \left[(n+1)k - \frac{(n+1)^2}{2} \right] + \mu \left(k - \frac{n+1}{2} \right). \quad (2.67)$$

- **Parte de curvatura.-** De la definición 2.29, tenemos que la parte de curvatura de nuestra señal cuadrática se obtiene por la siguiente expresión.

$$C_{q,k} = \langle C, q_n \rangle q_{n,k} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.68)$$

Por la proposición B.5, tenemos que

$$\langle C, q_n \rangle = \frac{1}{30} \lambda \xi (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2), \quad (2.69)$$

donde

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{5}{[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)]}}. \quad (2.70)$$

Mejor aún, tenemos también que

$$\langle C, q_n \rangle = \|\widehat{q}_n\| \lambda. \quad (2.71)$$

Así, C_q viene dada por

$$C_{q,k} = \langle C, q_n \rangle q_{n,k} = \|\widehat{q}_n\| \lambda \frac{\widehat{q}_{n,k}}{\|\widehat{q}_n\|} = \widehat{q}_{n,k} \lambda \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.72)$$

Por lo tanto

$$C_{q,k} = \lambda \left(\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right) = \lambda \widehat{q}_{n,k}. \quad (2.73)$$

De esta forma, podemos calcular la parte cuadrática de C sumando las ecuaciones 2.66, 2.67 y 2.73.

$$\begin{aligned} C_{cuad,k} &= C_{pr,k} + C_{\ell,k} + C_{q,k} \\ &= \left[\lambda \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \right) + \mu \left(\frac{n+1}{2} \right) + \nu \right] \\ &\quad + \left[\lambda \left[(n+1)k - \frac{(n+1)^2}{2} \right] + \mu \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left[\lambda \left(\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

De aquí, podemos observar que tanto μk como ν se han recuperado, por lo que solo falta ver que también se recupera a λk^2 . Sumando los términos que tengan λ de la expresión anterior veremos el resultado.

$$\begin{aligned} &\lambda \left[\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \right) + (n+1)k - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right] \\ &= \lambda \left[\frac{2n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 + n^2 + 3n + 2}{6} + k^2 \right] \\ &= \lambda k^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, se concluye que

$$C_{cuad,k} = \lambda k^2 + \mu k + \nu = C_k. \quad (2.74)$$

■

De la ecuación B.5 y el resultado anterior se obtiene una conclusión interesante: Supongamos que tenemos una señal cuadrática dada $C \in \mathbb{R}^n$ de la cual se desconocen los parámetros (λ, μ, ν) que la definen, pero se conoce el producto punto con el filtro de curvatura q_n . Entonces por la ecuación B.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\langle C, q_n \rangle}{\|\hat{q}_n\|} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}} \langle C, q_n \rangle \\ &= 6\xi \langle C, q_n \rangle, \end{aligned}$$

donde ξ está dado por la ecuación 2.70. Este cálculo se puede hacer con una señal cualquiera $X \in \mathbb{R}^n$ y de este modo obtener una especie de medida de la curvatura de la señal. Por tanto, hacemos la siguiente definición.

Definición 2.32. *Sea $X \in \mathbb{R}^n$ una señal dada. Entonces se define su **curvatura generalizada** como:*

$$\lambda(X) = 6\xi \langle C, q_n \rangle. \quad (2.75)$$

Ejemplo 2.33. *En el ejemplo 2.17, vimos cómo es que podemos usar la ecuación de la definición 2.14 para obtener la pendiente de una señal cualquiera, por lo que ahora haremos un estudio análogo para una señal cuadrática. Sea $n = 100$ y $S \in \mathbb{R}^n$ una señal cuadrática tal que: $S(k) = \frac{3k^2+2k+1}{100}$, entonces por la definición 2.32 se tiene que $\lambda(S) = \frac{3}{100} = 0.03$. Perturbamos la señal con cierto nivel de ruido y llamamos a ésta nueva señal S' . Al calcular la curvatura de S y S' vemos que obtenemos resultados parecidos al ejemplo 2.17, es decir, podemos obtener una especie de medida para la curvatura de una señal, aun con influencia de ruido. Además, notemos que al calcular de la pendiente de la señal S tenemos que ésta también se ve afectada por el ruido, por lo que de nuevo hay que recalcar el hecho de que a mayor nivel de ruido, menor precisión en nuestra definición (ver figura 2.3).*

Dada una señal cualquiera $X \in \mathbb{R}^n$, podemos obtener una forma de calcular su parte cuadrática. Este resultado se resume en la siguiente proposición.

Proposición 2.34. *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ una señal cualquiera, y también sean*

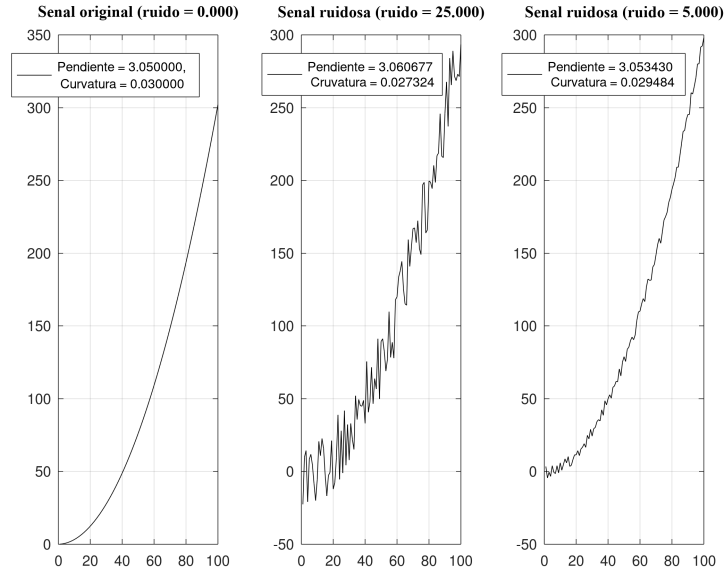


Figura 2.3: Cálculo de la pendiente y curvatura de la señal $S(k) = \frac{3k^2+2k+1}{100}$, con distintos niveles de ruido.

$$A = \sum_{k=1}^n x_k \quad , \quad B = \sum_{k=1}^n kx_k \quad y \quad C = \sum_{k=1}^n k^2x_k.$$

Entonces para $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} X_{cuad,k} &= \frac{30}{(n-2)(n-1)n} \left(\frac{6C}{(n+1)(n+2)} - \frac{6B}{n+2} + A \right) \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &+ \frac{6}{(n-1)n} \left(\frac{2B}{n+1} - A \right) \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2(n-2)n(n+2)} \right) (-30C + 30(n+1)B - 3(n+2)(n+3)A). \end{aligned}$$

Demostración. Calculamos primero las componentes de la parte curvatura de la señal X , la cual viene dada por

$$X_q = \langle X, q_n \rangle q_{n,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

De la proposición 2.22 ecuación 2.50, la ecuación 2.58, y la ecuación 2.70, tenemos que

$$q_{n,k} = \xi \left(6 \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{n^2-1}{2} \right). \quad (2.76)$$

De esta forma, con estas ecuaciones podemos calcular las componentes de la parte curvatura de X .

$$\begin{aligned}
 \langle X, q_n \rangle &= \sum_{k=1}^n (\xi(n^2 + 3n + 2 + 6(k^2 - nk - k))) \\
 &= \xi \sum_{k=1}^n [(n^2 + 3n + 2)x_k + 6x_k(k^2 - k(n + 1))] \\
 &= \xi [(n^2 + 3n + 2)A + 6(C - (n + 1)B)].
 \end{aligned}$$

Así, para $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos que:

$$X_{q,k} = \xi^2((n^2 + 3n + 2)A + 6(C - (n + 1)B)) \left(6 \left(k - \frac{n + 1}{2} \right)^2 - \frac{n^2 - 1}{2} \right).$$

Notemos que aparece el término $\left(k - \frac{n+1}{2}\right)$, por lo que buscamos hacer aparecer éste en la parte afín. Por la proposición 2.15 tenemos que

$$\begin{aligned}
 X_{af,k} &= \left(\frac{6(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n(n + 1)} \right) k + \frac{2A(2n + 1) - 6B}{(n - 1)n} \\
 &\quad - \left(\frac{6(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n(n + 1)} \right) \left(\frac{n + 1}{2} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{6(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n(n + 1)} \right) \left(\frac{n + 1}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{6(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n(n + 1)} \right) \left(k - \frac{n + 1}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{2A(2n + 1) - 6B}{(n - 1)n} + \frac{3(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n} \\
 &= \left(\frac{6(2B - (n + 1)A)}{(n - 1)n(n + 1)} \right) \left(k - \frac{n + 1}{2} \right) + \frac{A}{n} \\
 &= \frac{6}{(n - 1)n} \left(\frac{2B}{n + 1} - A \right) \left(k - \frac{n + 1}{2} \right) + \frac{A}{n}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes de la parte de curvatura están dadas por

$$X_{cuad,k} = X_{af,k} + X_{q,k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{30(6C - 6(n+1)B + (n+1)(n+2)A)}{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{6}{(n-1)n} \left(\frac{2B}{n+1} - A\right) \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n-2)n(n+2)} \left[(n-2)(n+2)A - \frac{5}{2}(6C - 6(n+1)B + (n+1)(n+2)A) \right] \\ &= \frac{30}{(n-2)(n-1)n} \left(\frac{6C}{(n+1)(n+2)} - \frac{6B}{n+2} + A\right) \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{6}{(n-1)n} \left(\frac{2B}{n+1} - A\right) \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2(n-2)n(n+2)}\right) (-30C + 30(n+1)B - 3(n+2)(n+3)A). \end{aligned}$$

■

2.4.2. Sobre la definición de los filtros de curvatura

En el proceso de definición de los vectores \hat{q}_n se hicieron algunas elecciones que pueden parecer arbitrarias, como el polinomio $p(x) = x^2$, los intervalos de longitud 1, etc. En consecuencia, una pregunta legítima es la siguiente:

¿Los resultados serán los mismos si se cambia el intervalo de integración, o la longitud de los intervalos, o incluso el polinomio cuadrático?

Para contestar esta pregunta, debemos hacer ciertas generalizaciones con respecto a nuestros cálculos anteriores. En primer lugar, pudimos tomar cualquier polinomio cuadrático, es decir, de la forma $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$. Así mismo, en vez de escoger el intervalo $[-n/2, n/2]$, podemos escoger un intervalo genérico con extremo izquierdo igual a $\delta \in \mathbb{R}$. Además, podemos dividir este intervalo en $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 3$) subintervalos de longitud $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Así, los intervalos quedan de la forma:

$$[\delta + \varepsilon(k-1), \delta + \varepsilon k] \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.77)$$

Ya con estos cambios, podemos dar una definición generalizada de p_n . Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces se define a $p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = (p_{n,1}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, p_{n,2}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \cdots, p_{n,n}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}) \in \mathbb{R}^n$ con respecto a los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ como

$$p_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \int_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.78)$$

Con esto, podemos generalizar a nuestros filtros de curvatura, pues basta considerar ahora a los parámetros que lo definen. Por lo tanto, haremos una generalización a la definición hecha en 2.20 la cual es la siguiente:

Definición 2.35. Sea $p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}$ con los parámetros indicados. Entonces se define a $\hat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \in \mathbb{R}^n$ con parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ como:

$$\hat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = (\hat{q}_{n,1}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \dots, \hat{q}_{n,n}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}) \in \mathbb{R}^n,$$

donde para $k = 1, 2, \dots, n$ se define

$$\hat{q}_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = p_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} - \langle p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k} - \langle p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k}.$$

Bajo estas definiciones, el trabajo visto anteriormente fue hecho considerando ciertos valores para $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Por tanto, haremos la siguiente definición.

Definición 2.36. Se dice que $\hat{q}_n \in \mathbb{R}^n$ está en su forma canónica si los parámetros que definen a $p_n \in \mathbb{R}^n$ son:

$$\alpha = 1, \beta = \gamma = 0, \delta = -\frac{n}{2}, \varepsilon = 1.$$

Es decir, la forma canónica está dada por

$$p_{n,k}^{(1,0,0,-\frac{n}{2},1)} = \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} x^2 dx \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.79)$$

Como se puede observar, el trabajo hecho sobre los filtros de curvatura fue considerando la forma canónica de estos. Es por eso que enunciaremos los siguientes resultados, los cuales ilustran que no importan los valores que se elijan, el resultado se reduce (salvo un signo) al caso canónico.

Teorema 2.37. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Entonces para $k = 1, 2, \dots, n$ se cumple que

$$\widehat{q}_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \widehat{q}_{n,k}^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}. \quad (2.80)$$

Es decir, podemos eliminar las partes lineal y constante del polinomio, y nuestros resultados serán los mismos.

Demostración. Primero, notemos que:

$$\begin{aligned} p_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} &= \int_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx \\ &= \int_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} \alpha x^2 dx + \int_{\delta + \varepsilon(k-1)}^{\delta + \varepsilon k} (\beta x + \gamma) dx \\ &= p_{n,k}^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)} + p_{n,k}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

² De aquí, tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} &= p_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} - \langle p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k} - \langle p_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k} \\ &= (p_{n,k}^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)} + p_{n,k}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}) - \\ &\quad (\langle p_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k} + \langle p_n^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k}) - \\ &\quad (\langle p_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k} + \langle p_n^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k}) \\ &= (p_{n,k}^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)} - \langle p_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k} - \langle p_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k}) + \\ &\quad (p_{n,k}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} - \langle p_n^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \chi_n \rangle \chi_{n,k} - \langle p_n^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}, \ell_n \rangle \ell_{n,k}) \\ &= \widehat{q}_{n,k}^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)} + \widehat{q}_{n,k}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \quad (1 \leq k \leq n). \end{aligned}$$

Por tanto, lo que resta por hacer es demostrar que $\widehat{q}_{n,k}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = 0$, es decir, que

$$p_n^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = p_{pr,n}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} + p_{\ell,n}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = p_{af,n}^{(0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}.$$

Para ello, veamos lo siguiente. Si $1 \leq k \leq n$ entonces:

²Aunque el caso $\alpha = 0$ no está incluido, usaremos la misma notación por conveniencia.

$$\begin{aligned}
p_{n,k}^{(0,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} &= \int_{\delta+\varepsilon(k-1)}^{\delta+\varepsilon k} (\beta x + \gamma) dx \\
&= \left[\frac{\beta x^2}{2} + \gamma x \right]_{\delta+\varepsilon(k-1)}^{\delta+\varepsilon k} \\
&= \frac{\beta(\delta + \varepsilon k)^2}{2} + \gamma(\delta + \varepsilon k) - \frac{\beta(\delta + \varepsilon(k-1))^2}{2} - \gamma(\delta + \varepsilon(k-1)) \\
&= \beta\varepsilon(\delta + \varepsilon k) - \frac{\beta\varepsilon^2}{2} + \gamma\varepsilon \\
&= (\beta\varepsilon^2)k + \left(\beta\varepsilon\delta + \gamma\varepsilon - \frac{\beta\varepsilon^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Es decir

$$p_{n,k}^{(0,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)} = (\beta\varepsilon^2)k + \left(\beta\varepsilon\delta + \gamma\varepsilon - \frac{\beta\varepsilon^2}{2} \right). \quad (2.81)$$

Esto demuestra que con estos parámetros, $p_n^{(0,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}$ es una señal afín. Por la proposición 2.12 se obtiene el resultado. ■

Con el teorema 2.37, podemos eliminar los parámetros β, γ y seguir conservando los mismos resultados. Así, por conveniencia de ahora en adelante usaremos la siguiente notación:

$$\widehat{q}_n^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \widehat{q}_n^{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}. \quad (2.82)$$

El siguiente teorema nos muestra que la independencia también se da con respecto a los demás parámetros.

Teorema 2.38. *Bajo las mismas condiciones que el teorema 2.37, se cumple que*

$$\widehat{q}_n^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \alpha \varepsilon^3 \widehat{q}_n^{(1, -\frac{n}{2}, 1)}. \quad (2.83)$$

Demostración. En primer lugar, es fácil ver que por linealidad se cumple que $\widehat{q}_{n,k}^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \alpha \widehat{q}_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)}$. De este modo α se puede sacar sin ningún problema. En efecto, para $1 \leq k \leq n$:

$$p_{n,k}^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \int_{\delta+\varepsilon(k-1)}^{\delta+\varepsilon k} \alpha x^2 dx = \alpha \int_{\delta+\varepsilon(k-1)}^{\delta+\varepsilon k} x^2 dx = \alpha p_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)}.$$

También se cumple que:

$$\bar{p}_n^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n,k}^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \alpha \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)} = \alpha \bar{p}_n^{(1,\delta,\varepsilon)}$$

Ahora veremos que no depende de los parámetros δ y ε . Hagamos el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{x - \delta}{\varepsilon} - \frac{n}{2} = \frac{x}{\varepsilon} - \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{n}{2} \right). \quad (2.84)$$

Con este cambio de variable obtenemos lo siguiente:

$$x = \varepsilon \left(t + \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{n}{2} \right) = \varepsilon t + \delta + \frac{n\varepsilon}{2},$$

$$dx = \varepsilon dt,$$

Los límites de integración bajo este cambio son, precisamente, $-\frac{n}{2} + k - 1$ y $-\frac{n}{2} + k$, por lo que $p_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)}$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} p_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)} &= \int_{\delta+\varepsilon(k-1)}^{\delta+\varepsilon k} x^2 dx = \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} \left(\varepsilon t + \delta + \frac{n\varepsilon}{2} \right)^2 \varepsilon dt \\ &= \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} \left(\varepsilon^2 t^2 + 2\varepsilon t \left(\delta + \frac{n\varepsilon}{2} \right) + \left(\delta + \frac{n\varepsilon}{2} \right)^2 \right) \varepsilon dt \\ &= \int_{-\frac{n}{2}+k-1}^{-\frac{n}{2}+k} \left[\varepsilon^3 t^2 + \varepsilon^2 t (2\delta + \varepsilon n) + \varepsilon \left(\delta + \frac{\varepsilon n}{2} \right)^2 \right] dt \\ &= p_{n,k}^{(\varepsilon^3, -\frac{n}{2}, 1)} + p_{n,k}^{(0, \phi, \psi, -\frac{n}{2}, 1)}, \end{aligned}$$

donde $\phi = \varepsilon^2(2\delta + \varepsilon n)$ y $\psi = \varepsilon \left(\delta + \frac{\varepsilon n}{2} \right)^2$.

Procediendo como en la demostración del teorema 2.37, obtenemos que $\hat{q}_n^{(1,\delta,\varepsilon)} = \hat{q}_n^{(\varepsilon, -\frac{n}{2}, 1)} + \hat{q}_n^{(0, \phi, \psi, -\frac{n}{2}, 1)}$. Usando la proposición 2.12 se puede comprobar que $\hat{q}_n^{(0, \phi, \psi, -\frac{n}{2}, 1)} = 0$, esto por ser $p_n^{(0, \phi, \psi, -\frac{n}{2}, 1)}$ una señal afín.

Con todo esto, se tiene que

$$\hat{q}_{n,k}^{(\alpha,\delta,\varepsilon)} = \alpha \hat{q}_{n,k}^{(1,\delta,\varepsilon)} = \alpha \hat{q}_{n,k}^{(\varepsilon^3, -\frac{n}{2}, 1)} = \alpha \varepsilon^3 \hat{q}_{n,k}^{(1, -\frac{n}{2}, 1)}. \quad (2.85)$$

■

Finalmente hemos probado que el filtro de curvatura no depende de los parámetros que se tomen para el polinomio y sus intervalos, solo queda normalizar los filtros para asociar estos resultados con el trabajo

realizado en el caso canónico. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, definimos

$$q_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \frac{\widehat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}}{\|\widehat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}\|} = \left(q_{n,k}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \right)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.86)$$

En los teoremas anteriores podemos ver que los filtros de curvatura $\widehat{q}_n^{(\alpha, \delta, \varepsilon)}$ se diferencian del caso canónico con respecto a los valores que toman α y ε . Sin embargo, en el desarrollo de los filtros se usó su forma normalizada, por lo tanto se busca normalizar a los filtros \widehat{q}_n respecto a los parámetros mencionados. Al normalizar, veremos que la dependencia respecto a estos parámetros desaparece, esto se da como un resultado inmediato al teorema 2.38.

Corolario 2.39. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Los filtros de curvatura normalizados $q_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} \in \mathbb{R}^n$, no dependen de los parámetros que se le asignen a excepción del signo de α . Es decir:

$$q_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \begin{cases} q_n & \text{si } \alpha > 0. \\ -q_n & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.87)$$

Demostración. Por el teorema 2.37 y el teorema 2.38 tenemos que

$$q_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)} = \frac{\widehat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}}{\|\widehat{q}_n^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)}\|} = \frac{\widehat{q}_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}}{\|\widehat{q}_n^{(\alpha, 0, 0, \delta, \varepsilon)}\|} = \frac{\alpha \varepsilon^3 \widehat{q}_n}{\|\alpha \varepsilon^3 \widehat{q}_n\|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} q_n. \quad (2.88)$$

■

Lo que nos dice el teorema anterior es que el filtro de curvatura normalizado solamente se diferencia del caso canónico por el signo que llegue a tomar α en los parámetros que se le asignen. Así queda probado que no importa los valores que se le asignen a dichos parámetros, pues se llega al mismo resultado.

Capítulo 3

Coeficientes promedio, pendiente y curvatura

3.1. Definición de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura.

En el capítulo anterior se introdujeron los filtros promedio, pendiente y de curvatura. Estos filtros son vectores en \mathbb{R}^n , donde su orden es $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, en principio nos sirven para analizar señales de longitud n . Sin embargo, dada la señal $S \in \mathbb{R}^L$ de tamaño $L \in \mathbb{N}$, estamos interesados en analizar con ayuda de los filtros promedio, pendiente y curvatura no sólo la señal completa, si no también partes de ella (es decir, ser capaces de hacer análisis locales en la señal). Para ello, introduciremos una terminología que nos permita referirnos con comodidad a distintas partes de la señal, que llamaremos “ventanas”.

Definición 3.1. Sean $L \in \mathbb{N}$, $S = (s_1, s_2, \dots, s_L) \in \mathbb{R}^L$, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq L$. Dado $k \in \mathbb{N}$ se define la *k-ésima ventana de S de longitud n* como sigue:

- Si n es impar y $\frac{n+1}{2} \leq k \leq L - \frac{n-1}{2}$:

$$S|_{n,k} = (S_{k+\mu})_{\mu=-\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

- Si n es par y $\frac{n}{2} \leq k \leq L - \frac{n}{2}$:

$$S|_{n,k} = (S_{k+\mu})_{\mu=-\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

De la definición anterior, podemos ver que una ventana es una porción de señal de longitud n centrada (teniendo en cuenta la paridad de n) en

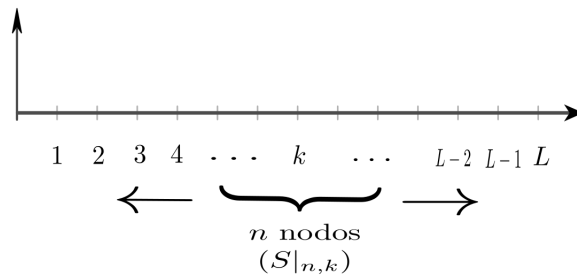


Figura 3.1: Ilustración de una ventana de longitud n centrada en el nodo k

el mismo nodo k – *ésimo* nodo, y contenida completamente en la señal. Es por esto que las ventanas no están definidas para todos los nodos de la señal, sino para algunos k en posiciones centrales, dependiendo de n . Podemos ver que a medida que k aumenta, la ventana recorre la señal.

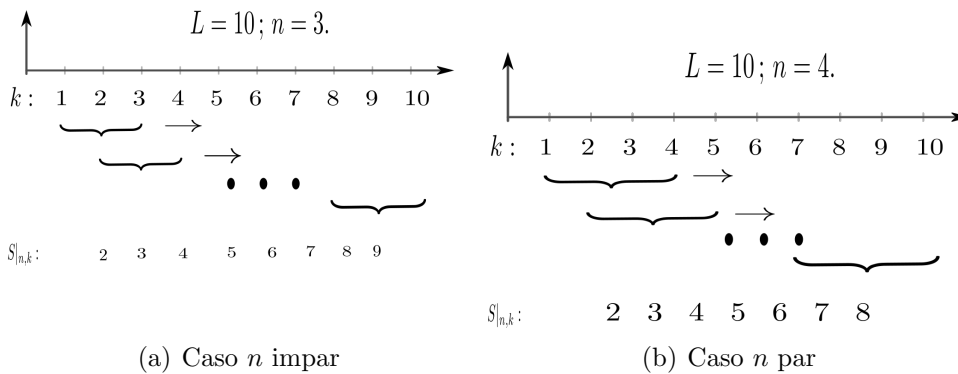


Figura 3.2: Ejemplos de ventanas para n par e impar. ($L = 10, n = 3, 4$)

Nota 3.2. Dependiendo de la paridad de n , el nodo k puede estar exactamente en el centro de la ventana (caso impar) o en uno de los nodos centrales (caso par). Por convenio, se elige al nodo izquierdo de los dos nodos centrales en el caso par. Lógicamente, como se puede observar en la figura 3.2, el número de ventanas posibles a formar menor al número de nodos de la señal.

Ahora, nos interesa ver qué ocurre con la señal de forma “local”, es decir, cómo se comporta alrededor de un nodo dado, en una ventana

concreta. Es aquí donde aplicamos los filtros desarrollados en el capítulo anterior. De esta forma, haremos las siguientes definiciones.

Definición 3.3. Sean $L \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}^L$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq L$. Considere $S|_{n,k}$, es decir, la k -ésima ventana de longitud n de la señal, para k en el rango indicado por n . Entonces se define **el k -ésimo coeficiente promedio de orden n** , $C_{n,k}^0$ de S como:

$$C_{n,k}^0(S) = \langle S|_{n,k}, \chi_n \rangle. \quad (3.3)$$

De la definición anterior, observamos que el coeficiente promedio está definido en términos de la ventana y el orden del filtro (o sea, n). Con su ayuda, podemos obtener el promedio “local” de la señal alrededor del nodo k .

Definición 3.4. Sean $L \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}^L$ y $n \in \mathbb{N}$ con $2 \leq n \leq L$. Considere $S|_{n,k}$, es decir, la k -ésima ventana de longitud n de la señal para k en el rango indicado por n , entonces se define **el k -ésimo coeficiente pendiente de orden n** , $C_{n,k}^1$ de S como:

$$C_{n,k}^1(S) = \langle S|_{n,k}, \ell_n \rangle. \quad (3.4)$$

El coeficiente pendiente nos da información sobre la tendencia general (ascendente ó descendente) de la ventana.

Definición 3.5. Sean $L \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}^L$ y $n \in \mathbb{N}$ con $3 \leq n \leq L$. Considere $S|_{n,k}$, es decir, la k -ésima ventana de longitud n de la señal para k en el rango indicado por n , entonces se define **el k -ésimo coeficiente de curvatura de orden n** , $C_{n,k}^2$ de S como:

$$C_{n,k}^2(S) = \langle S|_{n,k}, q_n \rangle. \quad (3.5)$$

Los coeficientes de curvatura nos dan información sobre cómo y cuánto (convexidad y concavidad) se curva la ventana.

Para comparar distintas partes de la señal, es conveniente normalizar por el tamaño de la ventana. Para ello, hacemos las siguientes definiciones.

Definición 3.6. Sean $L, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq L$ y una señal $S = (s_1, s_2, \dots, s_L) \in \mathbb{R}^L$.

- Para $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ en el rango correspondiente definido por n , se define el k –ésimo **coeficiente promedio normalizado de orden n** como:

$$\widehat{C}_{n,k}^0(S) = \begin{cases} \frac{C_{n,k}^0(S)}{\|S|_{n,k}\|} & \text{si } \|S|_{n,k}\| \neq 0. \\ 0 & \text{si } \|S|_{n,k}\| = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

- Para $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$ en el rango correspondiente definido por n , se define el k –ésimo **coeficiente pendiente normalizado de orden n** como:

$$\widehat{C}_{n,k}^1(S) = \begin{cases} \frac{C_{n,k}^1(S)}{\|S|_{n,k}\|} & \text{si } \|S|_{n,k}\| \neq 0. \\ 0 & \text{si } \|S|_{n,k}\| = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

- Para $k \in \mathbb{N}$ con $3 \leq k \leq n$ en el rango correspondiente definido por n , se define el k –ésimo **coeficiente de curvatura normalizado de orden n** como:

$$\widehat{C}_{n,k}^2(S) = \begin{cases} \frac{C_{n,k}^2(S)}{\|S|_{n,k}\|} & \text{si } \|S|_{n,k}\| \neq 0. \\ 0 & \text{si } \|S|_{n,k}\| = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2. Sobre el significado de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura.

La idea detrás de las definiciones anteriores es la de obtener criterios en el caso discreto (es decir, para vectores en \mathbb{R}^n) similares (de alguna forma) a los de la primer y segunda derivada en el caso continuo. Dada una función $f \in \mathbf{C}^2(I)$ en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, estos criterios dicen que es creciente en I si su derivada es positiva en I , y que es decreciente en I si su derivada es negativa en I . Análogamente, f es convexa en I si su segunda derivada es positiva en I , y f es cóncava si su segunda derivada es negativa en I .

Además, aparte del signo, el tamaño de la primer y segunda derivada (en valor absoluto) nos dan información acerca del crecimiento (pendiente) y curvatura (mayor o menor convexidad / concavidad) de la función.

El problema aquí es que no se trabaja con funciones, sino con señales discretas (vistas como vectores en \mathbb{R}^n), por lo que no se tiene el concepto de derivada. Es por esto que buscamos desarrollar herramientas semejantes, en el sentido de que cumplan un papel análogo en el caso

discreto. Para ello, hacemos uso de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura, junto con sus versiones normalizadas.

La idea es la siguiente: para tratar de describir el crecimiento / decrecimiento y convexidad/concavidad de la ventana (es decir, de la señal en un periodo determinado), buscamos averiguar qué tan parecida es la ventana a nuestros filtros.

Imaginemos que la ventana es un múltiplo de algún filtro: hacemos $v = \lambda \mathbb{F}_n^i$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, donde se define

$$\mathbb{F}_n^i = \begin{cases} \chi_n & \text{para } i = 0, \\ \ell_n & \text{para } i = 1, \\ q_n & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

Entonces:

$$\langle v, \mathbb{F}_n^i \rangle = \langle \lambda \mathbb{F}_n^i, \mathbb{F}_n^i \rangle = \lambda \langle \mathbb{F}_n^i, \mathbb{F}_n^i \rangle = \lambda.$$

De esta forma, si $\lambda > 0$ tenemos que $v \sim \mathbb{F}_n^i$ en el mismo sentido, mientras que si $\lambda < 0$, se tiene que $v \sim \mathbb{F}_n^i$ en sentido opuesto. Además, $|\lambda|$ nos dice la proporción que tiene el filtro \mathbb{F}_n^i en la señal.

Podemos ver si la señal es “parecida” a uno de los filtros, pero para ello es necesario ver el efecto o proporción que tienen los filtros restantes en ella. Esto se puede ver como sigue.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{u_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para cada j ($1 \leq j \leq n$) definimos $V_j = \text{span}(u_j)$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ su proyección ortogonal sobre V_j es

$$P_j x = \langle x, u_j \rangle u_j$$

con

$$\|P_j x\| = |\langle x, u_j \rangle|.$$

Por ser $\{u_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ base ortonormal, se tiene que

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j = \sum_{j=1}^n P_j x.$$

La identidad de Parseval (ver apéndice A.2) nos dice que

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, u_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^n \|P_j x\|^2.$$

Ahora, fijemos a un k con $1 \leq k \leq n$. Denotamos

$$W_k = V_k^\perp = \text{span}\{u_j : j \neq k\}.$$

Con esto, definimos $y = x - P_k x$, es decir, y será el vector x menos su proyección con u_k . Es fácil ver que $y = P_{W_k} x$, pues

$$y = x - P_k x = \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j - \langle x, u_k \rangle u_k = \sum_{j \neq k} \langle x, u_j \rangle u_j = P_{W_k} x.$$

Así, tenemos lo siguiente

$$\|y\|^2 = \sum_{j \neq k} |\langle x, u_j \rangle|^2.$$

De este modo

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|P_k x\|^2 = \|y\|^2 + |\langle x, u_k \rangle|^2.$$

Entonces

$$\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2 = \|y\|^2 = \sum_{j \neq k} |\langle x, u_j \rangle|^2.$$

Ahora, si $x \notin V_k$, $\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2 = \|y\|^2 = \|P_{W_k} x\|^2 > 0$, y se tiene

$$\frac{\sum_{j \neq k} |\langle x, u_j \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2} = 1.$$

Sea ℓ con $1 \leq \ell \leq n$, $\ell \neq k$. Entonces

$$\frac{|\langle x, u_\ell \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2} = 1 - \frac{\sum_{j \neq k, \ell} |\langle x, u_j \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2}. \quad (3.9)$$

Podemos obtener este resultado en términos de los espacios y sus proyecciones ortogonales. Tenemos que

$$P_{V_\ell} x = \langle x, u_\ell \rangle u_\ell,$$

además, note que por ser $\{u_j\}$ base ortonormal, se tiene que

$$W_k \cap W_\ell = \text{span}\{u_j : j \neq k, \ell\},$$

luego

$$P_{W_k \cap W_\ell} x = \sum_{j \neq k, \ell} \langle x, u_j \rangle u_j$$

y de aquí

$$\|P_{W_k \cap W_\ell} x\|^2 = \sum_{j \neq k, \ell} |\langle x, u_j \rangle|^2.$$

Entonces

$$\frac{|\langle x, u_\ell \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, u_k \rangle|^2} = 1 - \frac{\|P_{W_k \cap W_\ell} x\|^2}{\|P_{W_k} x\|^2}.$$

Lo que a su vez significa que:

$$\frac{\|P_{V_\ell} x\|^2}{\|x\|^2 - \|P_{V_k} x\|^2} = 1 - \frac{\|P_{W_k \cap W_\ell} x\|^2}{\|P_{W_k} x\|^2}. \quad (3.10)$$

De las ecuaciones 3.9 y 3.10, se puede analizar una proyección específica de la señal x por medio de las demás proyecciones que forman los vectores restantes en la base $\{u_j\}$. Esto es de utilidad en nuestro trabajo, pues los vectores que nos interesan son los formados por la base $\beta = \{\chi_n, \ell_n, q_n\}$, que se puede completar con vectores u_i ($i = 1, \dots, n-3$) hasta obtener una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Bajo este supuesto, la identidad de Parseval puede interpretarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= |\langle x, \chi_n \rangle|^2 + |\langle x, \ell_n \rangle|^2 + |\langle x, q_n \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n-3} |\langle x, u_k \rangle|^2 \\ &= |C_n^0(x)|^2 + |C_n^1(x)|^2 + |C_n^2(x)|^2 + \sum_{k=1}^{n-3} |\langle x, u_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Lo cual a su vez implica que:

$$1 = |\widehat{C}_n^0(x)|^2 + |\widehat{C}_n^1(x)|^2 + |\widehat{C}_n^2(x)|^2 + \sum_{k=1}^{n-3} \left(\frac{|\langle x, u_k \rangle|}{\|x\|} \right)^2. \quad (3.11)$$

Pondremos atención a estas ecuaciones más adelante.

Note que si $x \in V_\ell$, entonces $\|P_{V_k} x\|^2 = 0$. De esta forma, si $u_\ell = \chi_n, \ell_n$ o q_n , se obtienen los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura normalizados en la ecuación 3.9 según sea el caso.

Además, si $x \in V_\ell + V_k$ podemos quitar a x la proporción del vector u_k . Esto es muy útil si, por ejemplo, x es una señal afín (digamos $x_k = \beta k + \gamma$, $k = 1, 2, \dots, n$). Podemos quitarle la proporción que tiene x con respecto χ_n y así trabajar únicamente con la proyección de x con ℓ_n . Esto también se puede ver si x es una señal cuadrática $x_k = \alpha k^2 + \beta k + \gamma$. De lo anterior, podemos definir las siguientes expresiones:

$$D_1 = \frac{\|\langle x, \ell_n \rangle\|^2}{\|x\|^2 - \|\langle x, \chi_n \rangle\|^2} = \frac{\|C_n^1(x)\|^2}{\|x\|^2 - \|C_n^0(x)\|^2}. \quad (3.12)$$

En esta expresión, estamos extrayendo la proporción de x con respecto a χ_n y de cierta forma, estamos analizando si x es parecida a ℓ_n . Análogamente, definimos

$$D_2 = \frac{\| \langle x, q_n \rangle \|^2}{\|x\|^2 - \| \langle x, \chi_n \rangle \|^2} = \frac{\|C_n^2(x)\|^2}{\|x\|^2 - \|C_n^0(x)\|^2}. \quad (3.13)$$

En este caso, si suponemos que la señal se comporta de forma cuadrática, podemos quitarle la proporción que tiene esta con respecto a χ_n (o incluso ℓ_n). Así, podemos ver si la señal se comporta como una combinación lineal de ℓ_n o χ_n , con q_n (es decir, de la forma $\alpha k^2 + \gamma$ o $\alpha k^2 + \beta k$).

Podemos adaptar las expresiones obtenidas de D_1 y D_2 para usar los filtros normalizados. Esto se logra al dividir entre la norma de x (al cuadrado) el dividendo y divisor. Así

$$D_1 = \frac{\|\widehat{C}_n^1(x)\|^2}{1 - \|\widehat{C}_n^0(x)\|^2} \quad y \quad D_2 = \frac{\|\widehat{C}_n^2(x)\|^2}{1 - \|\widehat{C}_n^0(x)\|^2}. \quad (3.14)$$

De lo anterior, vemos que solo hemos quitado la proporción con respecto a uno de los filtros, pero puede ser interesante que se le quiten otras proporciones más. Esto sería de utilidad en el caso de una señal cuadrática, en la cual intervienen sus partes promedio y lineal. Notemos que se puede hacer el mismo procedimiento anterior, pero esta vez quitando dos vectores de la base.

Ahora fijamos μ, ν con $1 \leq \mu, \nu \leq n$ y $\mu \neq \nu$. Definimos $z = x - P_\mu x - P_\nu x$. Es fácil ver que $z = P_{W_\mu \cap W_\nu} x$. Se tiene

$$\|z\|^2 = \sum_{j \neq \mu, \nu} | \langle x, u_j \rangle |^2.$$

Así,

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|P_\mu x\|^2 + \|P_\nu x\|^2 = \|z\|^2 + | \langle x, u_\mu \rangle |^2 + | \langle x, u_\nu \rangle |^2.$$

Entonces

$$\|x\|^2 - | \langle x, u_\mu \rangle |^2 - | \langle x, u_\nu \rangle |^2 = \|z\|^2 = \sum_{j \neq \mu, \nu} | \langle x, u_j \rangle |^2.$$

Si $x \notin V_\mu + V_\nu$, $\|x\|^2 - | \langle x, u_\mu \rangle |^2 - | \langle x, u_\nu \rangle |^2 = \|z\|^2 = \|P_{W_\mu \cap W_\nu} x\|^2 > 0$ (usamos que $W_\mu \cap W_\nu = (V_\mu + V_\nu)^\perp$), y se tiene

$$\frac{\sum_{j \neq \mu, \nu} | \langle x, u_j \rangle |^2}{\|x\|^2 - | \langle x, u_\mu \rangle |^2 - | \langle x, u_\nu \rangle |^2} = 1.$$

Sea ℓ con $1 \leq \ell \leq n$, $\ell \neq \mu, \nu$. Entonces

$$\frac{| \langle x, u_\ell \rangle |^2}{\|x\|^2 - | \langle x, u_\mu \rangle |^2 - | \langle x, u_\nu \rangle |^2} = 1 - \frac{\sum_{j \neq \mu, \nu, \ell} | \langle x, u_j \rangle |^2}{\|x\|^2 - | \langle x, u_\mu \rangle |^2 - | \langle x, u_\nu \rangle |^2}. \quad (3.15)$$

También podemos expresar esta expresión en términos de los espacios y sus proyecciones ortogonales,

$$P_{V_\ell}x = \langle x, u_\ell \rangle u_\ell,$$

$$W_\mu \cap W_\nu \cap W_\ell = \text{span}\{u_j : j \neq \mu, \nu, \ell\},$$

luego

$$P_{W_\mu \cap W_\nu \cap W_\ell}x = \sum_{j \neq \mu, \nu, \ell} \langle x, u_j \rangle u_j$$

y

$$\|P_{W_\mu \cap W_\nu \cap W_\ell}x\|^2 = \sum_{j \neq \mu, \nu, \ell} |\langle x, u_j \rangle|^2.$$

Entonces

$$\frac{|\langle x, u_\ell \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, u_\mu \rangle|^2 - |\langle x, u_\nu \rangle|^2} = 1 - \frac{\|P_{W_\mu \cap W_\nu \cap W_\ell}x\|^2}{\|P_{W_\mu \cap W_\nu}x\|^2}.$$

Lo que a su vez significa que

$$\frac{\|P_{V_\ell}x\|^2}{\|x\|^2 - \|P_{V_\mu}x\|^2 - \|P_{V_\nu}x\|^2} = 1 - \frac{\|P_{W_\mu \cap W_\nu \cap W_\ell}x\|^2}{\|P_{W_\mu \cap W_\nu}x\|^2}. \quad (3.16)$$

Así, tenemos un resultado análogo al obtenido en 3.9 y 3.10, pero esta vez hemos extraído dos vectores, lo cual hace de cierta forma más exacto el ver cómo se comporta la proyección de un vector en específico de la base en nuestra señal.

Aquí nos interesa sustraer las proyecciones promedio y pendiente de dicha señal, y así ver solo la parte de curvatura en esta. Por tanto, definimos la siguiente expresión

$$D_3 = \frac{|\langle x, q_n \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle x, \chi_n \rangle|^2 - |\langle x, \ell_n \rangle|^2}. \quad (3.17)$$

Esta cantidad nos dice si una señal se asemeja a otra de forma cuadrática sin sus partes promedio y lineal. Del mismo modo que en D_1 y D_2 , podemos expresar a D_3 en términos de los coeficientes y sus versiones normalizadas (esto último al dividir por la norma al cuadrado de x). Así tenemos que

$$D_3 = \frac{|C_n^2|^2}{\|x\|^2 - |C_n^0|^2 - |C_n^1|^2} = \frac{|\widehat{C}_n^2|^2}{1 - |\widehat{C}_n^0|^2 - |\widehat{C}_n^1|^2}. \quad (3.18)$$

En las expresiones 3.9 y 3.15, los criterios que se establecen de ellas se cumplen si su lado derecho es cercano a uno, es decir, si D_1 , D_2 y

$D_3 \sim 1$. Esto implica a su vez que la proporción de los demás vectores en la base es mínima en la señal. Es decir, a partir de estas expresiones, también podemos analizar la influencia de los demás vectores en la señal.

Si tenemos que D_1, D_2, D_3 son muy pequeños, entonces los demás vectores u_j están teniendo mayor participación en el comportamiento de la señal. Sin embargo, se puede incrementar el orden n de los filtros (y por ende, el número de vectores en $\{u_j\}$) para tener un mayor panorama de la señal, y de esta forma, ver si la señal se comporta como uno de los filtros al aumentar más puntos en la ventana de la señal. Esto es útil cuando se tienen señales de longitud n , en donde se puede obtener ventanas de longitud $m \leq n$ en la señal.

Observación 3.7. Cuando $n = 3$, tenemos que $\beta = \{\chi_n, \ell_n, q_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , por lo que dado $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ podemos interpretar a v como combinación lineal de los filtros en β . Con esto y la identidad de Parseval tenemos que:

$$\|v\|^2 = |C_n^0(v)|^2 + |C_n^1(v)|^2 + |C_n^2(v)|^2.$$

Es decir, en este caso no hay necesidad de extender la base.

Así tenemos que $|C_n^2(v)|^2 = \|v\|^2 - |C_n^0(v)|^2 - |C_n^1(v)|^2$, por lo que:

$$\frac{|C_n^2(v)|^2}{\|v\|^2 - |C_n^0(v)|^2 - |C_n^1(v)|^2} = 1.$$

En conclusión, para el caso en que $n = 3$ se tiene que $D_3 = 1$ siempre que v no sea ortogonal a q_n .

Ejemplo 3.8. Consideremos una señal afín de longitud 100, a la cual calcularemos sus coeficientes y cantidades D_1, D_2 , y D_3 para distintos órdenes de n (fig. 3.3). La primer gráfica muestra la señal, después se muestran los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura, al final se muestra a D_1, D_2 y D_3 junto con los coeficientes normalizados elevados al cuadrado.

Notemos que los coeficientes pendiente son positivos, esto es porque la señal es una recta de pendiente positiva. Los coeficientes de curvatura son cero debido a la ortogonalidad de estos a señales afines. Y los coeficientes promedio solo reflejan si la señal es constante (de forma local), se verá su utilidad más adelante.

En cuanto a la tercer gráfica, tenemos que los D_1 son siempre uno, pues estos reflejan si la proyección de la señal con respecto a ℓ_n es parecida a una recta. Pero esto es de esperarse pues nuestra señal es, en efecto, una señal recta. Esto implica a su vez que tanto los coeficientes de curvatura, como D_2 y D_3 , son cero.

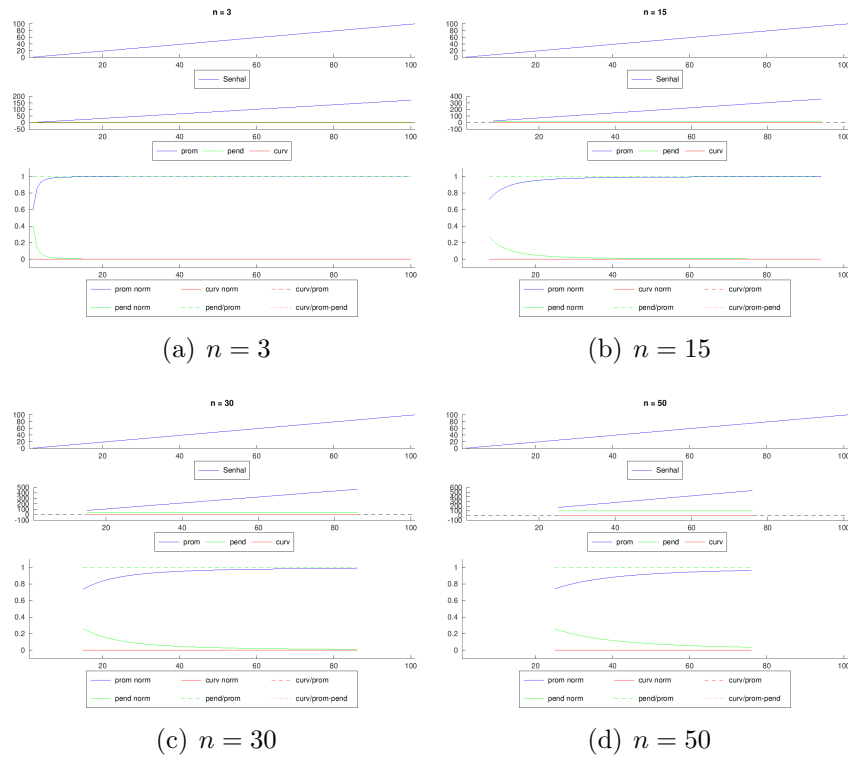


Figura 3.3: Coeficientes promedio, pendiente y curvatura, de una señal afín para diferentes órdenes.

Note que los coeficientes promedio normalizados tienden a 1. Esto significa que la proporción promedio es constante en cada ventana de la señal, esto puede implicar que no hay alteraciones en esta y se comporta de forma constante en cada ventana que esta posee. Los coeficientes pendiente normalizados tienden a cero, pero esto es por lo anterior dicho. Además, el resultado es claro si se despeja a $|\hat{C}_0^1|^2$ de la ecuación 3.11.

Ejemplo 3.9. Consideremos ahora una señal cuadrática de la misma longitud que en el ejemplo anterior. Veremos qué tal se comportan sus coeficientes junto con sus expresiones D_1 , D_2 y D_3 para distintos órdenes (fig. 3.4). Con los coeficientes (sin normalizar), tenemos que los de pendiente se portan de forma descendente, lo cual queda claro si trazamos la recta pendiente a esta parábola, la cual pasa de positiva a negativa. Así que en este caso, los C_n^1 sí reflejan el incremento de la señal. El comportamiento de los filtros de curvatura no logra verse con claridad debido a la escala gráfica, pero si se hace un acercamiento a estos, se puede apreciar que tienden a ser positivos alrededor del nodo en donde se da la convexidad. Por lo que los filtros de curvatura sí reflejan esta actividad

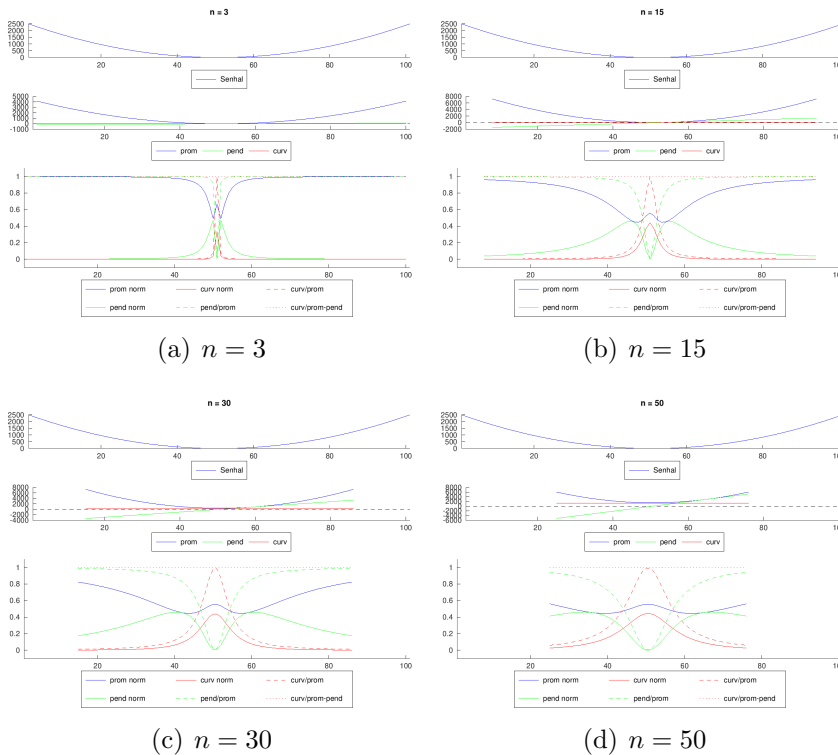


Figura 3.4: Coeficientes promedio, pendiente y curvatura, de una señal cuadrática para diferentes órdenes.

sin ningún problema.

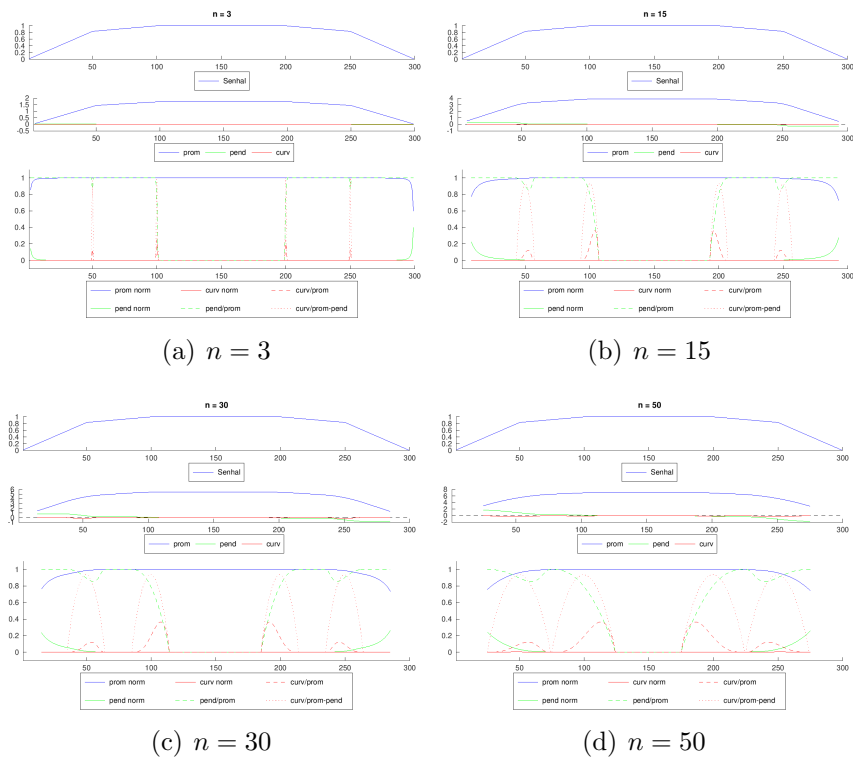
En cuanto a la tercer gráfica, vemos que los valores para D_3 en cada ventana son los que toman el valor de 1 esta vez, pues esto se debe a que la gráfica es una discretización de la parábola, la cual es una señal cuadrática, y por el resultado expuesto en 2.31, sus partes cuadráticas coinciden con la misma señal. Para los D_1 , tenemos que estos son casi uno a excepción de un entorno del nodo en donde se da la señal donde se da la inflexión, pues la pendiente permanece constante, es decir, no hay cambios bruscos en esta. Para los D_2 , estos son cero debido a que en los extremos de la señal esta parece más a una recta, sin embargo, su valor cambia cerca del nodo de inflexión, pues aquí es donde se “curva” la señal.

Los coeficientes normalizados, en este caso, hacen referencia al análisis hecho en el ejemplo anterior, pero en este caso, el punto de interés es, de nueva cuenta, el punto de inflexión. Para los coeficientes promedio, vemos que alrededor del punto estos dejan de ser 1, esto es debido a que los coeficientes de curvatura empiezan a adquirir valor e influyen en el resultado (ver ecuación 3.11). Lo mismo pasa con los coeficientes

de pendiente, pues en este caso pasan a incrementar sus valores después de ser cero, pues aquí la pendiente sufre cambios conforme se acerca / aleja del nodo de inflexión. Los coeficientes de curvatura también adquieren valor aquí, y es el que se refleja con los coeficientes de curvatura sin normalizar.

Notamos que, a medida que los órdenes aumentan, las ventanas también lo hacen, esto da más visión de la señal, pero el comportamiento parece ser el mismo que cuando se obtuvo de órdenes menores.

Ejemplo 3.10. Consideremos una señal formada por cinco partes. Las primeras dos son señales afines ascendentes con distintas pendientes, la tercera es una parte constante, y las últimas dos son simétricas a las primeras dos, solo que en sentido descendente (fig. 3.10). De los ejemplos



anteriores pudimos observar dos cosas: que en las partes en donde la señal es “recta”, podemos ver el ascenso/descenso de esta y cómo se comporta la pendiente de dicha señal. Y que los nodos en donde los coeficientes brindan mucha información son en aquellos donde se da una especie de inflexión.

Notemos que en órdenes pequeños, los valores para D_3 son casi cero a excepción de un entorno de los nodos de inflexión. Lo mismo ocurre

con los D_2 y D_1 , para estos últimos sus valores pasan de 1 a 0 (pues la señal es recta en todas partes a excepción de estos nodos). Note también que los D_3 incrementan su valor más rápido que los D_2 , esto es porque para los primeros se está viendo la proporción de curvatura que hay en estos nodos de la señal pero sin la intervención de las partes promedio y pendiente, es decir, estamos capturando solo la curvatura de estos nodos.

Por último, para los coeficientes normalizados, los coeficientes promedio de nueva cuenta son uno en toda esta, pues la señal parece comportarse de forma constante, mientras que los pendiente y de curvatura se hacen cero debido a esta actividad.

En la sección 2.1, se habló de la influencia del ruido en el análisis de señales, ya que este ocasiona pérdida de información en la señal y dificultad para detectar ciertas características de interés. En los siguientes ejemplos se analiza qué influencia trae el ruido a los coeficientes.

Ejemplo 3.11. Consideremos la señal del ejemplo 3.8, pero esta vez se le perturba con un ruido aleatorio de intensidad mínima. En la figura

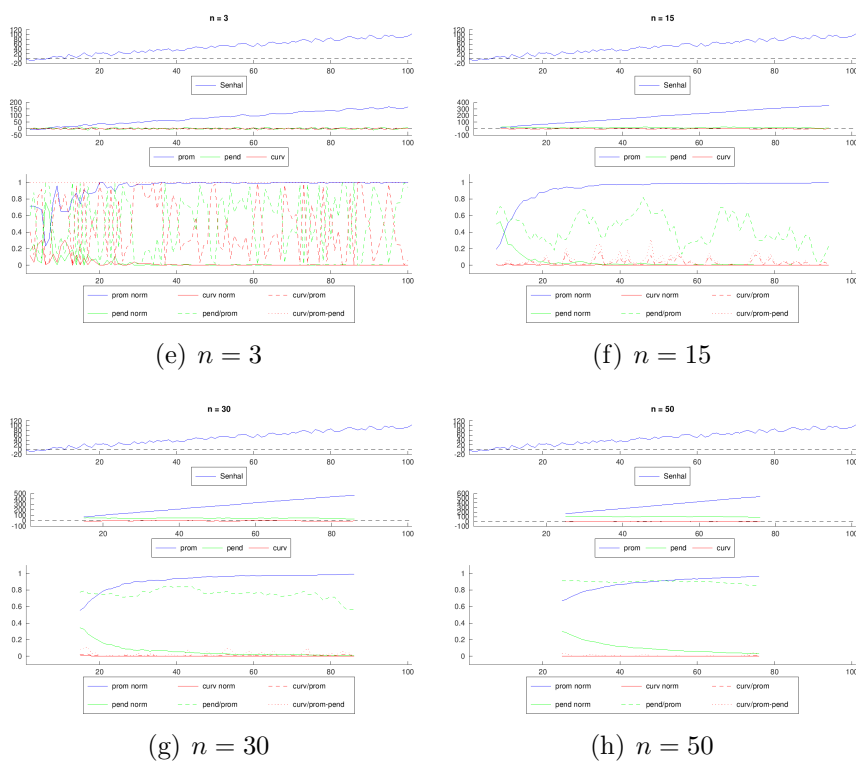


Figura 3.5: Coeficientes promedio, pendiente y de curvatura para una señal afín con poco ruido.

(3.5) podemos ver que para órdenes pequeños los resultados de D_1 , D_2 ,

D_3 , así como el de los coeficientes normalizados es un completo caos y es difícil hallar los resultados que obtuvimos en 3.8. Pero a medida que se incrementa el orden de los filtros se pueden recuperar dichos resultados.

Una observación de interés a hacer aquí es que en este caso los coeficientes promedio reflejan una señal con poco ruido, esto es debido a lo discutido en la sección 2.1, donde se habló que en ocasiones el ruido se compensa al realizar el promediado. Esto da una justificación y significado a esta acción en el análisis de señales. En el caso de los coeficientes normalizados, estos también se ven afectados por el ruido, pero no parece haber cambios bruscos en sus resultados comparados con los del ejemplo sin ruido, esto porque al parecer, después de recorrer cierta parte de la señal, el promedio se estabiliza.

Los coeficientes normalizados resultan afectados también, pues al haber muchos ascensos/descensos, los coeficientes pendiente tienen valores muy pequeños, es decir, no nos dicen que la señal se parezca de forma local a una recta, a pesar de que se está tomando como base a una señal afín. Y en los coeficientes de curvatura, al haber varios “puntos de inflexión”, estos también sufren mucha inestabilidad. Los resultados, de nueva cuenta, se recuperan al incrementar el orden de los filtros. Ahora, de la figura 3.6, podemos ver que los resultados se han agravado, esto es debido a que se ha incrementado el nivel de ruido. Lo que podemos notar aquí es que los resultados también llegan a recuperarse, pero con órdenes más altos que los del anterior caso.

Ejemplo 3.12. Ahora veamos qué es lo que ocurre con la señal vista en el ejemplo 3.9 al darle ciertos niveles de ruido. Aquí vemos un comportamiento similar al visto en el ejemplo anterior. Para órdenes pequeños los coeficientes y D_i ($i = 1, 2, 3$) se portan de forma muy inestable y es difícil obtener resultados de estas expresiones. Pero a medida que los órdenes aumentan, de nueva cuenta, los resultados se recuperan (ver fig 3.8). Los coeficientes promedio de nueva cuenta “limpian” la señal y liberan esta de cierto ruido.

De nuevo vemos que el nodo de interés es aquel donde se da cierta “inflexión”, y el ruido afecta de cierta forma los resultados obtenidos en la señal sin ruido, pero estos de nueva cuenta se logran recuperar conforme se incrementa el orden de los filtros. Si aumenta el nivel del ruido en la señal, esta se distorsiona más y afecta de peor forma a los resultados, por lo que de nuevo es necesario incrementar aún más el orden para recuperar los resultados (ver fig. 3.8).

Ejemplo 3.13. Por último, consideremos la señal vista en el ejemplo 3.10. Aquí se procede de la misma forma, por lo que la señal se ha contaminado con ciertos niveles de ruido. Podemos ver que los resultados

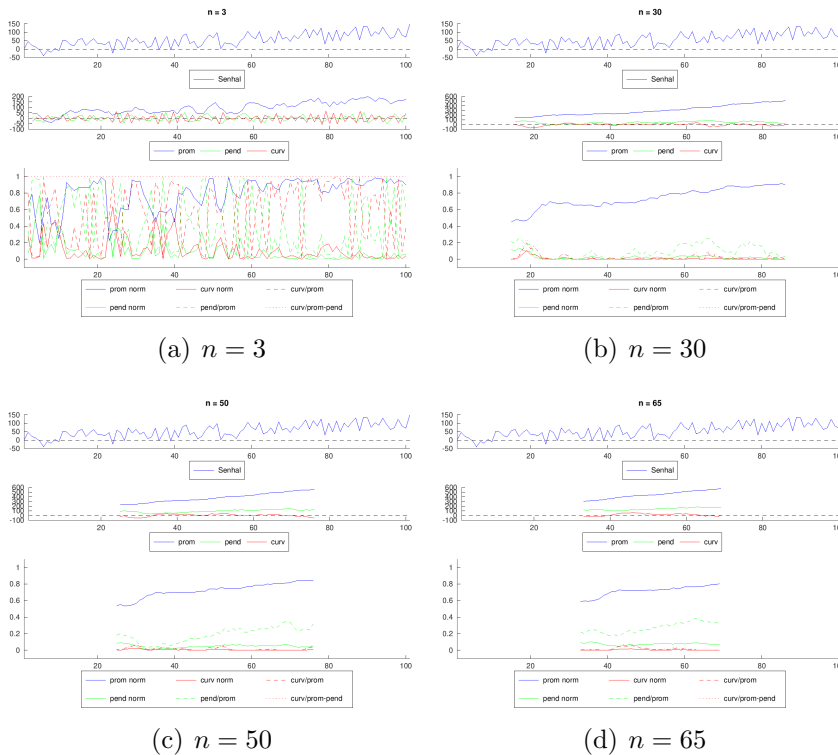


Figura 3.6: Coeficientes promedio, pendiente y de curvatura para una señal afín con ruido considerable.

son bastante análogos. Aquí se puede observar de nuevo que el ruido en órdenes pequeños es muy problemático, y resta eficacia a los filtros. Pero a medida que se incrementa el orden, recuperamos los resultados que obtuvimos en la señal limpia (ver fig. 3.9). El problema se da de igual forma si se incrementa el nivel de ruido, pues a mayor ruido, se necesita incrementar el orden de los filtros mucho más (fig. 3.10).

De los ejemplos anteriores, pudimos observar varias cosas. La primera es que, en efecto, los coeficientes nos dan la información que esperábamos de la señal. La segunda es que podemos ver cómo se comportan las proyecciones de los filtros en la señal y de estas obtener un análisis más acertado. Y la tercera es que podemos ver qué efectos tiene el ruido en los filtros. Es importante analizar estos efectos, pues pueden reducir eficacia a los filtros y su funcionamiento. Por lo que dedicaremos el siguiente capítulo a esto.

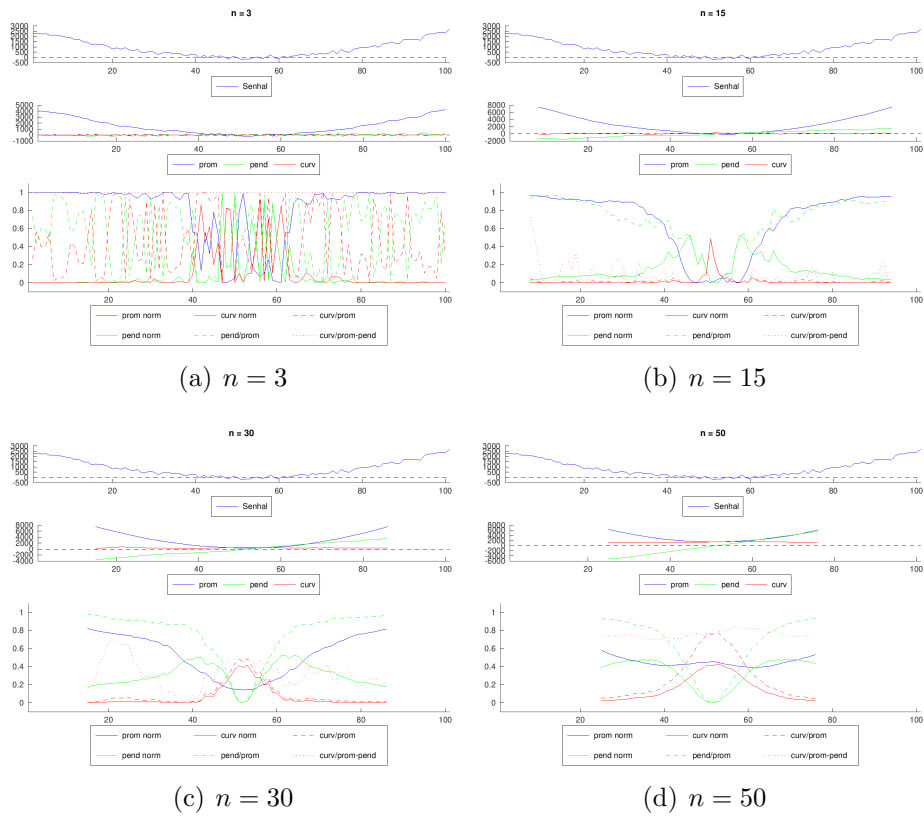


Figura 3.7: Coeficientes promedio, pendiente y de curvatura para una señal cuadrática con poco ruido.

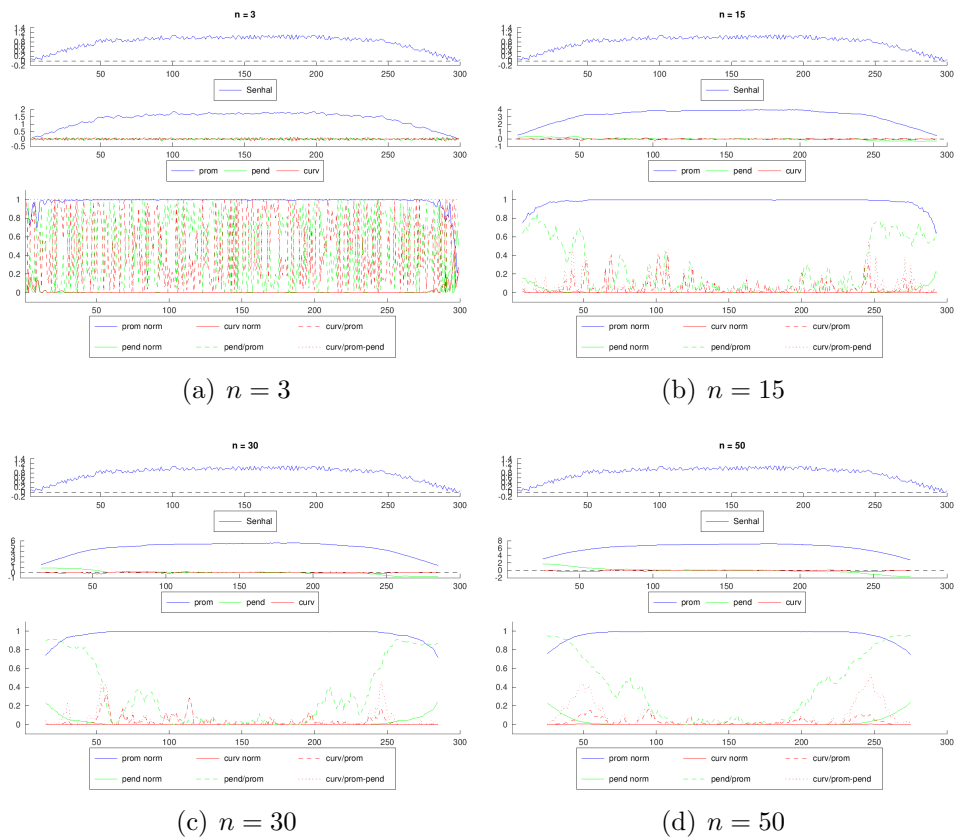


Figura 3.9: Coeficientes promedio, pendiente y de curvatura para una señal en forma de trapecio con poco ruido.

3.2 Sobre el significado de los coeficientes promedio, pendiente y de curvatura.

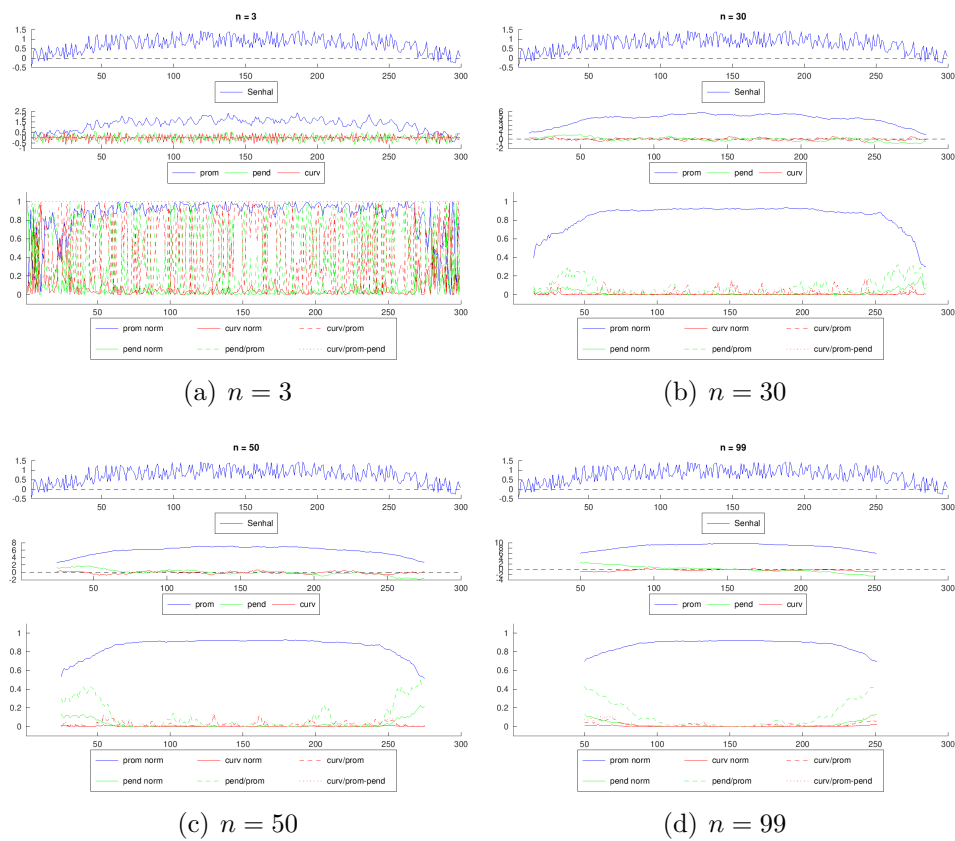


Figura 3.10: Coeficientes promedio, pendiente y de curvatura para una señal en forma de trapecio con ruido considerable.

Capítulo 4

Aplicación de filtros al análisis de ECG

En este capítulo, tomaremos un punto importante en la aplicación de los filtros que hemos desarrollado, el cual es la elección del orden óptimo.

Para empezar, del capítulo 3 tenemos que el orden a tomar en el filtro depende de la naturaleza de la señal y el ruido que tenga esta. Como queremos hallar los inicios y finales de las ondas en la señal ECG, podemos tomar sus longitudes como referencia. Además, estos puntos se caracterizan por una especie de “giro” en la señal, por lo que los filtros de curvatura jugarán un papel importante en esta sección.

Ahora, el orden del filtro está relacionado con el número de muestras a tomar de la señal, por lo que buscamos trabajar con las duraciones de las ondas en número de muestras (w_s). Como normalmente se conoce la frecuencia de muestreo (F_s)¹ y la duración aproximada de onda en milisegundos (w_t), se puede estimar w_s simplemente despejando esta variable de la ecuación siguiente:

$$F_s \approx \frac{1000w_s}{w_t}. \quad (4.1)$$

Es decir, que w_s vendrá dada por:

$$w_s \approx \frac{F_s \cdot w_t}{1000}. \quad (4.2)$$

Podemos entonces decir que w_s será una variable importante en el análisis de los órdenes para los filtros de curvatura. La estimación de w_s para ciertas ondas se hace al fijar F_s y w_t , por lo cual estos valores serán importantes también. Unos valores de referencia para las ondas y

¹En general, F_s está dado en números enteros, por lo que el resultado se redondea al entero más cercano.

los segmentos pueden encontrarse en la tabla introducida en el capítulo 1 1.1.

Recordando el capítulo anterior, los filtros están definidos para distintos órdenes menores o iguales que la longitud de la señal a la cual se les quiere aplicar. Sin embargo, no podemos usar órdenes muy pequeños debido a la influencia del ruido, ni tampoco demasiado grandes, porque podemos medir información que no nos puede interesar (interferencia de otras ondas). Es por esto que realizamos una simulación para poder tener una idea de cómo poder elegir dicho orden.

Nota 4.1. *Las simulaciones presentadas en este capítulo fueron hechas en equipos preparados para tareas que requieren un gran número de operaciones (que poseen una buen procesador y cantidad de memoria RAM), por lo que se pide que si alguien busca realizar simulaciones futuras, las realice con un equipo adecuado. De no hacerlo, puede presentar interrupciones del programa o de la máquina, o puede llevar demasiado tiempo en realizar éstas (puede llevar hasta semanas de no realizarse adecuadamente).*

Las simulaciones que se han hecho aquí están basadas en las hechas en [15]. De hecho, ahí se da una discusión y metodología acerca de cómo elegir el orden en los filtros de curvatura. Podemos resumir esto como sigue:

Primero, se simula una onda P con un ancho w_s fijo y altura $h = 0.15mV$, seguida de w_s ceros (los cuales representan al segmento isoelectrico que le sigue), por lo que la señal está compuesta de $2w_s$ muestras. Aquí los valores para w_s van variando entre 3 y 100.

Ahora, para cada ancho w_s , se crean N_t señales con la misma longitud, pero cada una perturbada con un ruido aleatorio h_n dado. Y para cada señal perturbada s_j ($j = 1, 2, \dots, N_t$), junto con cada orden n ($n = 3, 4, \dots, 2w_s - 1$), se calculan los coeficientes de curvatura en los nodos en donde éstos estén definidos (cap. 3). De esta forma, estimamos los finales de onda seleccionando el mayor de los coeficientes, es decir, los finales serán los nodos $k = o_{j,n}$ que tengan los mayores coeficientes de curvatura en cada señal s_j .²

Los valores usados en [15] son $w_s = 3, 4, \dots, 100$, $h = 0.15$, $h_n = 0.01$ y $N_t = 100$. Aquí, hacemos un ligero cambio y aumentamos en 50 el número de señales a tomar, es decir, $N_t = 150$. Con esto nuestras muestras son más grandes y tenemos más datos para comparar mejor los órdenes en los filtros. Con estos valores se obtienen las siguientes conclusiones:

²Como se está tratando con una onda P ascendente, se busca el mayor coeficiente de curvatura positivo, es decir, puntos donde se dé la mayor convexidad.

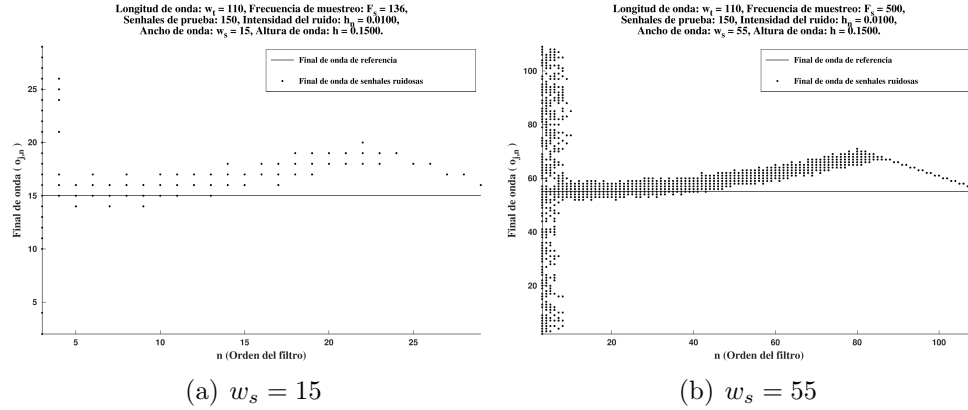


Figura 4.1: Finales de onda para distintos órdenes con anchos $w_s = 15$ y $w_s = 55$, Fuente: [15].

- Si el orden es menor, entonces el ruido afecta mucho a los coeficientes, y los filtros de curvatura no distinguen entre los giros y el ruido.
- Para un orden moderadamente grande, los filtros de curvatura parecen trabajar bien en la estimación de los finales de onda.
- Los resultados del método para órdenes muy grandes no son auténticos. Esto es debido al carácter finito de la señal.

Estos resultados se pueden corroborar en la figura 4.1.

Para saber qué orden elegir para los filtros, se toma un orden n en el rango, y se calculan los errores que tienen los finales de onda $o_{j,n}$ con el final de onda de referencia, que en este caso es w_s . Es decir, se calculan los errores siguientes:

$$\varepsilon_{j,n} = |o_{j,n} - w_s| \quad (j = 1, 2, \dots, N_t). \quad (4.3)$$

De los errores $\varepsilon_{j,n}$, se calcula su promedio y así, obtenemos el error promedio para cada orden n , es decir:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{N_t} \left(\sum_{j=1}^{N_t} \varepsilon_{j,n} \right). \quad (4.4)$$

Con esto, se elige al **orden óptimo en promedio** n_m como el menor ³ orden para el cual ε_n es mínimo, es decir, $(\varepsilon_{n_m} \leq \varepsilon_n, \forall n = 3, \dots, w_s)$.

³Al imponer que sea el menor orden, evitamos trabajar con órdenes mayores que tengan el mismo promedio de error, lo cual es una ventaja a nivel computacional.

Se calcula también la desviación estándar de los errores $\varepsilon_{j,n}$ para cada orden n , es decir

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{N_t} \left(\sum_{j=1}^{N_t} (\varepsilon_{j,n} - \varepsilon_n)^2 \right)}. \quad (4.5)$$

Con esto, se define al **orden óptimo en desviación estándar** n_{std} como el menor orden para el cual $\sigma_{n_{std}}$ es mínimo, y además, $\sigma_{n_{std}} \leq 2$.⁴ El orden en desviación estándar nos dirá cuán alejados están los errores de su promedio, por lo que a menor desviación estándar, menor dispersión.

Además, el orden óptimo n_{std} usualmente se usa con anchos de onda muy grandes, en los cuales el orden óptimo n_m es “innecesariamente grande”, lo cual no es conveniente a la hora de implementar el método. Esto se puede ver mejor en la figura 4.2.

Por tanto, de las figuras 4.2 y 4.3 se obtiene la recomendación de tomar un valor para el orden de entre el 15 % y el 30 % del valor del ancho de onda a la cual se le quieren aplicar.

Todo lo anterior fue hecho considerando un sólo nivel de ruido ($h_n = 0.01mV$), por lo que unas preguntas que surgen de manera natural son las siguientes:

¿Los resultados serán los mismos si se cambia la intensidad del ruido?

¿Cómo dependen del ruido?

Para responder estas preguntas, se repite el proceso anterior, pero esta vez variando la intensidad de ruido; desde una intensidad pequeña como para no afectar tanto la señal, hasta una intensidad que llegue a deformar mucho ésta.

Por eso, aplicamos a la señal un ruido aleatorio que va desde $0.001mV$ hasta $0.15mV$, es decir, un ruido que sea igual a la altura de la onda. Los valores de ruido a imponer esta vez son:

$$h_n = 0.001, 0.002, \dots, 0.008, 0.009, 0.01, 0.02, \dots, 0.14, 0.15.$$

Para empezar, analizamos los finales de onda que se obtienen para los anchos de onda $w_s = 15$ y $w_s = 55$ descritos en la figura 4.1, junto con un ancho de onda igual a cien muestras.

De las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 podemos ver que:

⁴El valor de 2 es puesto como referencia en [15], pues es aquí donde decrece notablemente la varianza, y se puede tomar a un orden moderadamente menor.

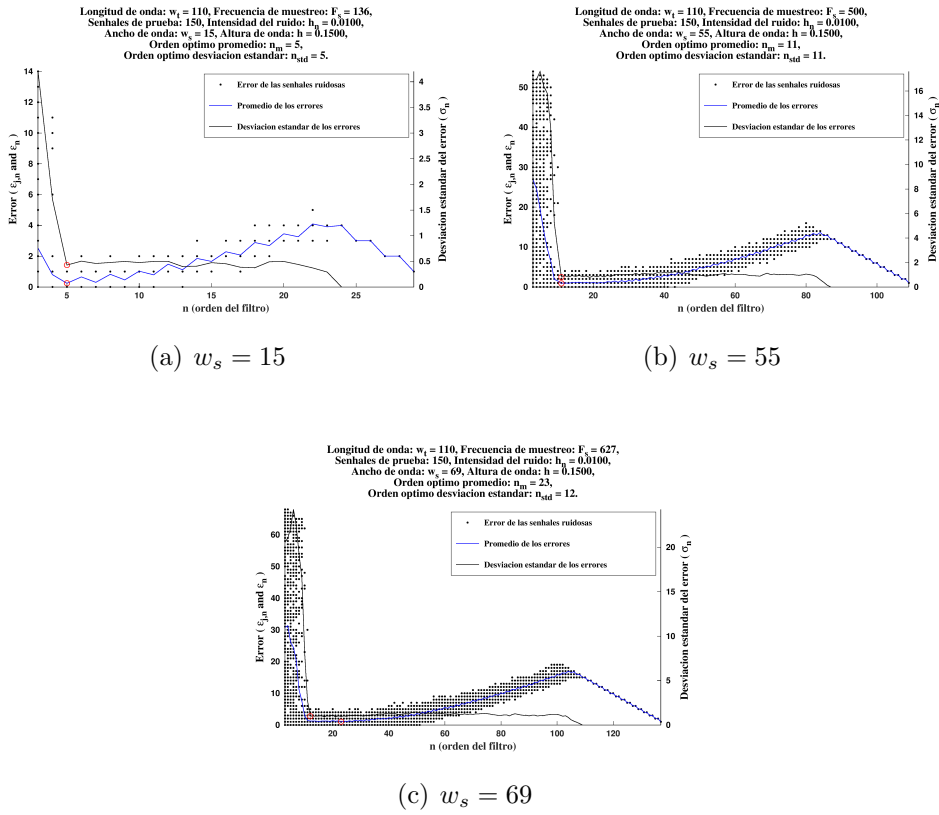


Figura 4.2: Promedio y desviación estándar de los errores para anchos $w_s = 15$, $w_s = 55$ y $w_s = 69$. Note que en este último el orden n_{std} puede ser mejor elección que n_m [15].

- Para anchos pequeños, los ruidos muy bajos no parecen afectar a los coeficientes de curvatura. De hecho, parece que no hay ninguna diferencia con los obtenidos en la señal original, pues el ruido es tan pequeño que no altera de forma significativa a la señal, por lo que los finales de onda en las señales s_j no están tan alejados del de la señal original (son casi el mismo).
- A medida que el ruido se va aumentando, los finales de onda se van esparciendo aún más del final de referencia, por lo que aún para valores de w_s pequeños, los finales van perdiendo exactitud, es decir, a mayor ruido, más probabilidad de error.
- Para anchos mayores, los ruidos muy bajos sí llegan a afectar a órdenes pequeños. Esto es debido al ancho de la ventana que se toma en ellos (a menor ventana, menor “visión” de la señal), y por

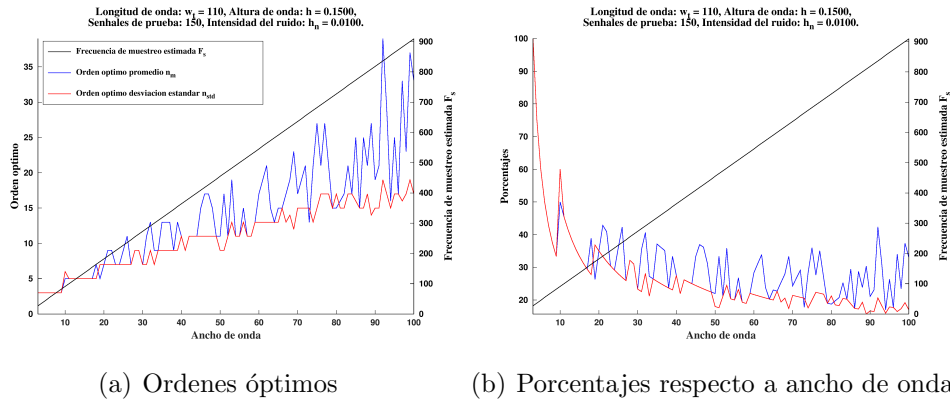


Figura 4.3: Los órdenes óptimos n_m y n_{std} para cada ancho, y su porcentaje respecto a dicho ancho w_s ($w_s = 3, 4, \dots, 100$) [15].

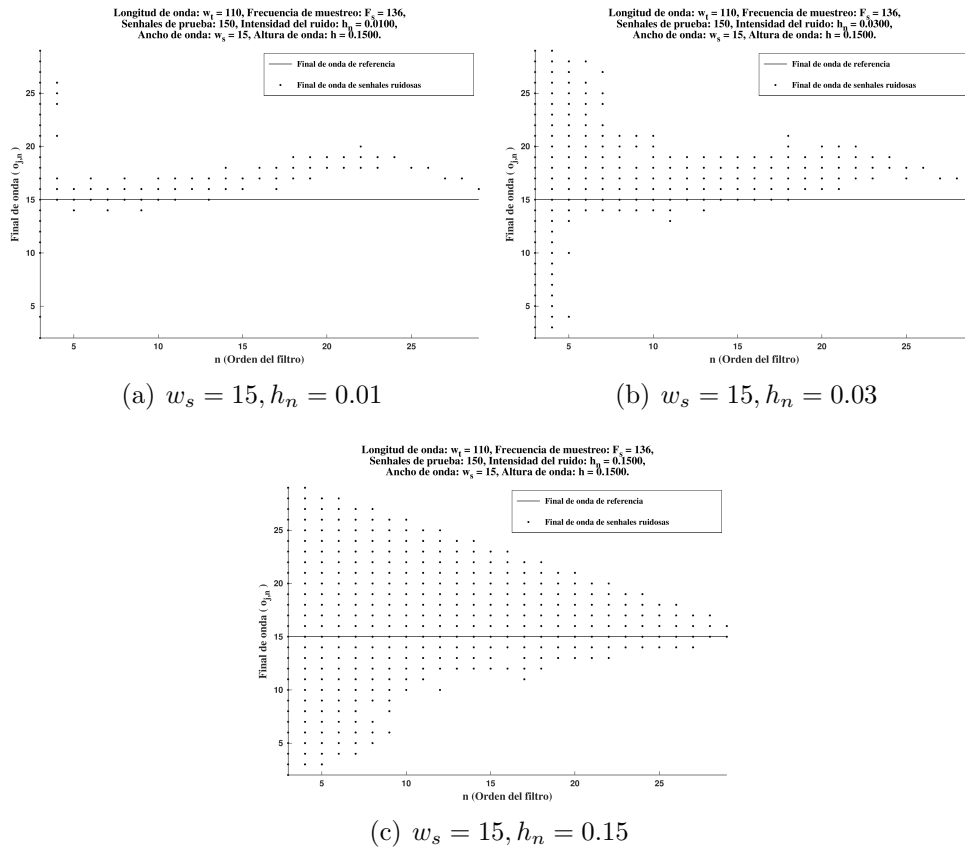


Figura 4.4: Finales de onda para un ancho de 15 muestras ($w_s = 15$), pero esta vez con ruidos variados.

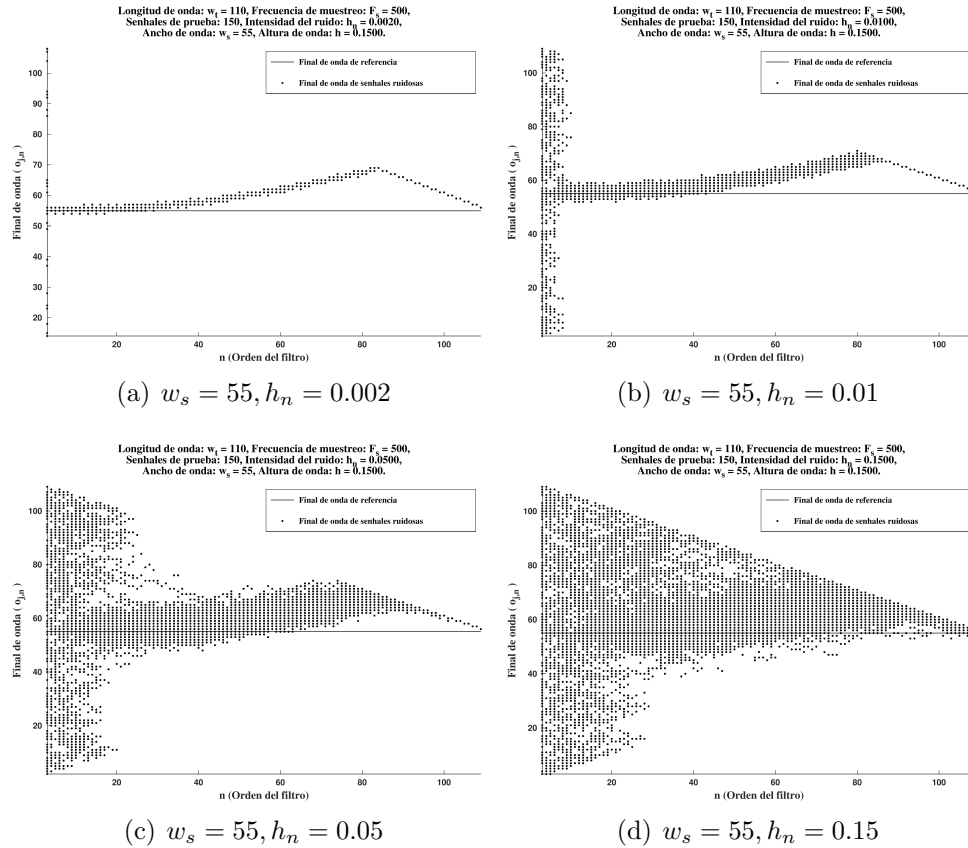


Figura 4.5: Finales de onda para un ancho de 55 muestras ($w_s = 55$), pero esta vez con ruidos variados.

tanto, los coeficientes para órdenes pequeños siguen sin distinguir entre el ruido y los giros de la señal (aún cuando el ruido sea muy pequeño) (fig. 4.6).

- Los finales de onda parecen concentrarse mejor en cierto rango de órdenes para los coeficientes, pero, a medida que se va aumentando el ruido, este rango aumenta. Más aún, los finales obtenidos se van alejando del final de referencia cuando se aumenta la intensidad del ruido, aún cuando éstos estén en el rango donde parecen concentrarse mejor.

De todo esto, podemos decir que **a mayor ruido, menor exactitud de los coeficientes**. Esto complementa el análisis hecho en [15], más en la elección de los órdenes óptimos n_m y n_{std} . Veamos qué cambios se dan al incrementar la intensidad del ruido.

En las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 podemos ver que hay cambios notorios

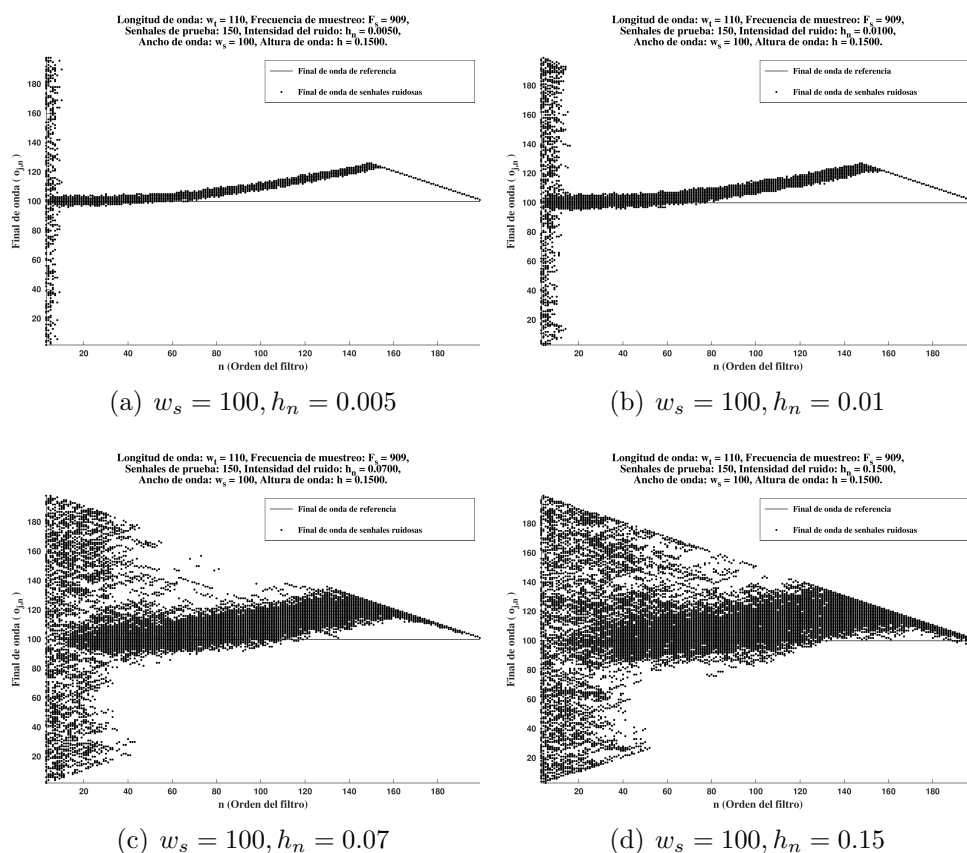


Figura 4.6: Finales de onda para un ancho de 100 muestras ($w_s = 100$), pero esta vez con ruidos variados.

a los mostrados anteriormente con un sólo nivel de ruido. Estos cambios son los siguientes:

- Los errores de las señales ruidosas se van aumentando conforme se incrementa el ruido de la señal, lo cual afecta de forma significativa a los órdenes pequeños ya que éstos tienden a equivocarse más con niveles de ruido altos. Es por esta razón que los puntos (errores) van llenando una especie de “triángulo”.
- Los promedios de los errores (línea azul) van aumentando su valor al aumentar el nivel del ruido. Para órdenes pequeños, el error que se genera crece conforme se aumenta el ruido. Mas aún, el rango de sensibilidad al nivel de ruido crece también. Esto es debido a que a mayor ruido se requiere una mejor “visión” de la señal (mayor orden).
- La desviación estándar de los errores (línea negra) va aumentando

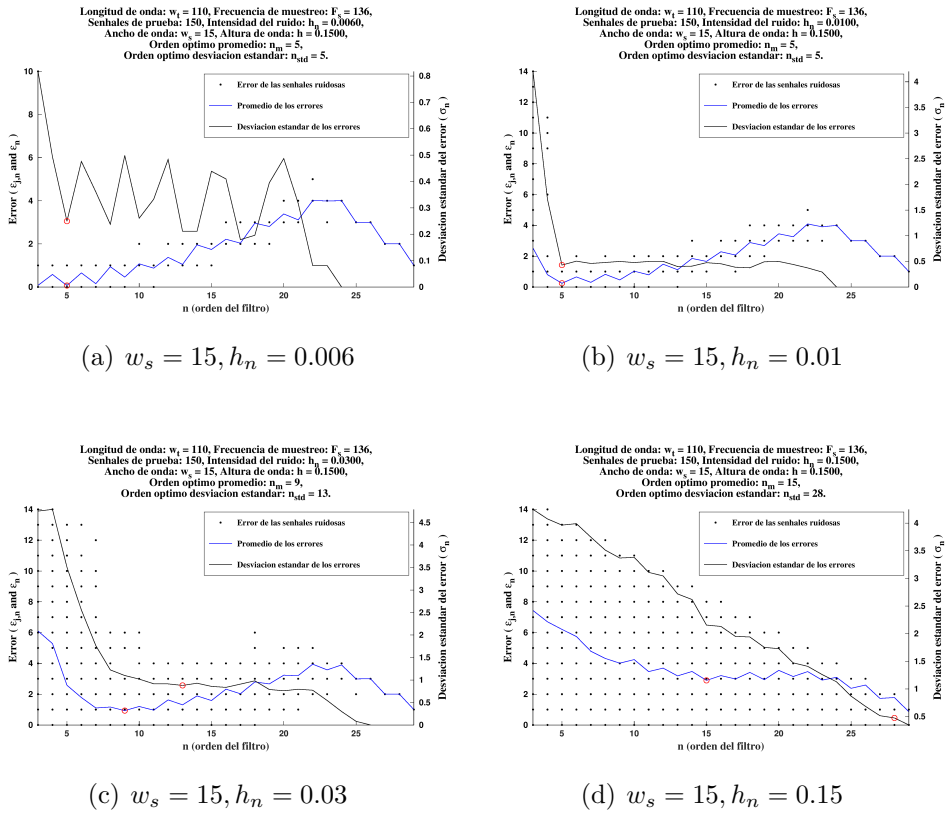


Figura 4.7: Errores de señales ruidosas, junto con su promedio y desviación estándar para distintos niveles de ruido ($w_s = 15$).

de igual forma sus valores por la misma razón que lo hace su promedio. Para órdenes pequeños la dispersión de los errores respecto a su promedio es mucho mayor conforme se aumenta el nivel del ruido, lo cual hace más difícil la elección del orden n_{std} . En efecto, el detalle más notable en este caso es que a mayor ruido, el orden n_{std} es mucho mayor que lo que se espera (más para anchos grandes) debido a que el valor de referencia impuesto para su definición no es el adecuado para niveles de ruido mayores al descrito en [15].

- El detalle más importante en las gráficas es la localización de los órdenes óptimos para los distintos niveles de ruido, pues al aumentar los valores de los promedios y las desviaciones estándar, también aumentan los valores de los órdenes n_m y n_{std} .

Con todo esto, podemos deducir que **a mayor nivel de ruido, menor eficiencia** en la estimación del punto final de la onda. Es decir, que

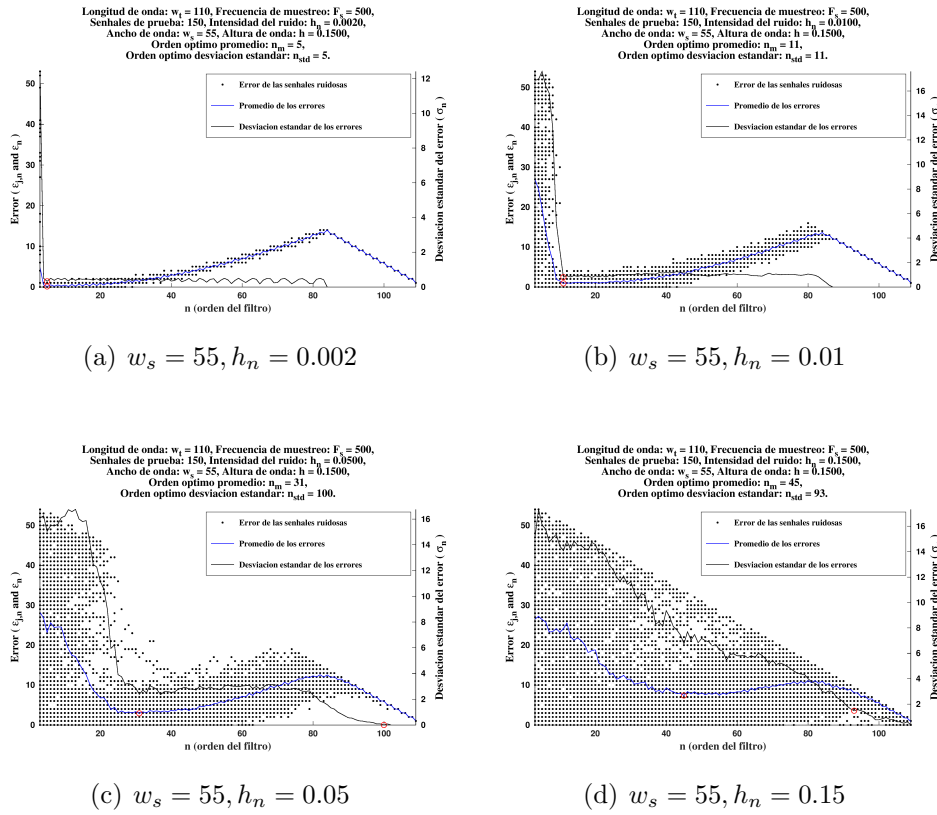


Figura 4.8: Errores de señales ruidosas, junto con su promedio y desviación estándar para distintos niveles de ruido ($w_s = 55$).

a mayor nivel de ruido, es necesario aumentar el orden para evitar su influencia en los coeficientes de curvatura.

Se puede apreciar en la figura 4.10 que para niveles de ruido muy pequeños, es recomendable utilizar un orden de entre el 10% y 15%, lo cual es una notable reducción al rango establecido en [15], mientras que para niveles de ruido muy grandes, este rango aumenta entre 70% y 100%.⁵ Este ya es un gran incremento y no es tan recomendable a la hora de implementar el método, pues el nivel elevado del ruido obliga a los coeficientes a elevar su orden para evitar los efectos de dicho ruido. Por otro lado, hay que tener en cuenta que es razonable la obtención de un desempeño tan bajo con niveles tan altos de ruido. Cuando la amplitud o nivel de ruido es similar a la amplitud o intensidad de la señal, es lógico

⁵Se toman en cuenta los rangos de n_m , pues los rangos de n_{std} son poco confiables debido a que el valor de referencia de dos en su elección afectó su valor en ruidos mayores.

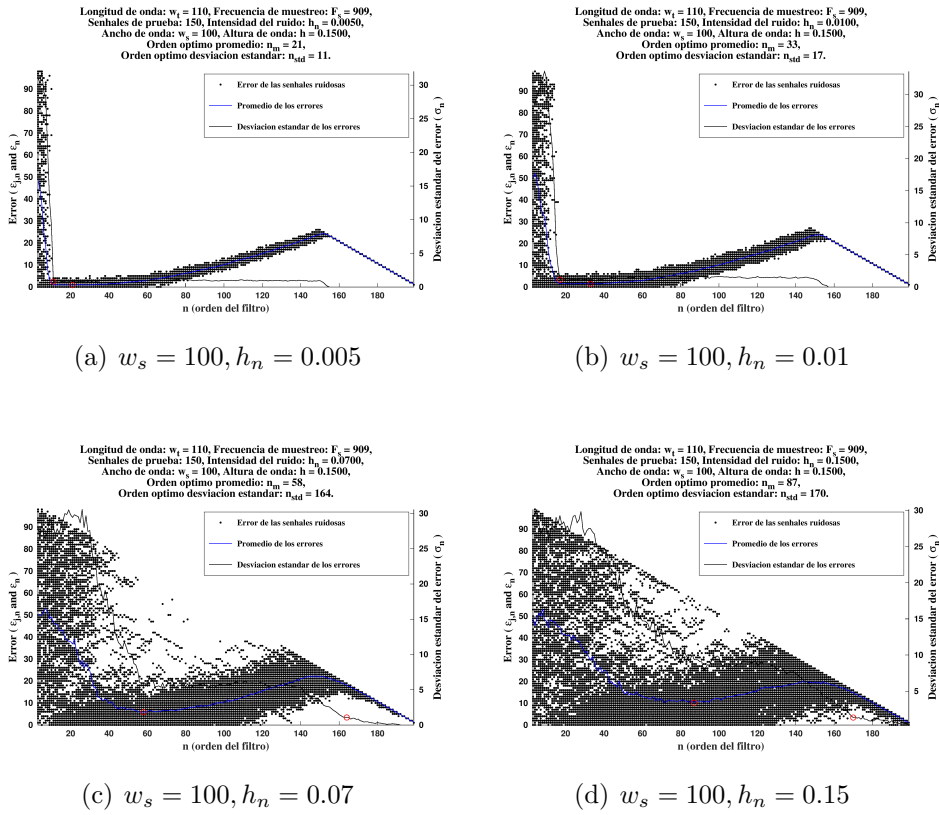


Figura 4.9: Errores de señales ruidosas, junto con su promedio y desviación estándar para distintos niveles de ruido ($w_s = 100$).

que sea muy difícil distinguir entre lo que es ruido y lo que es el perfil propio de la señal.

De todo esto inferimos que los filtros de curvatura aún parecen ser una buena herramienta en la detección de los puntos fiduciaros, pero su eficiencia se ve afectada al momento de tratar con niveles altos de ruido, por lo que se debe tener en cuenta esto al momento de usarlos, estimar el nivel de ruido con el que se está tratando y ajustar los órdenes para poder trabajar con los filtros de curvatura.

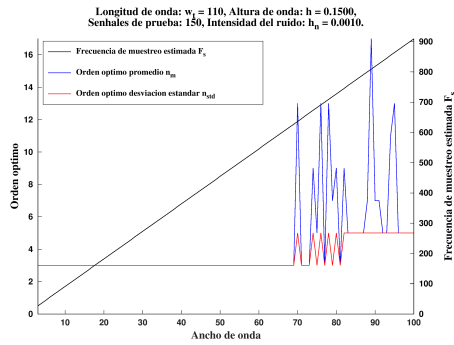
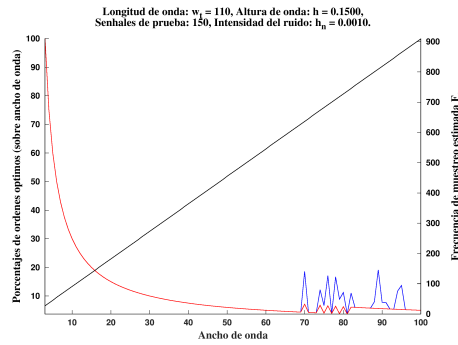
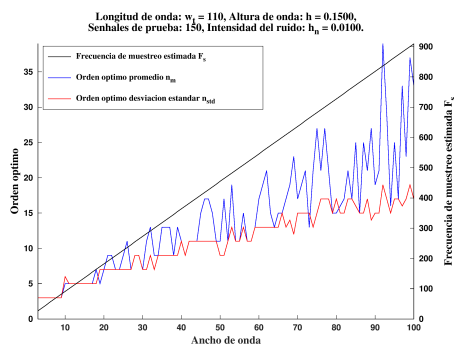
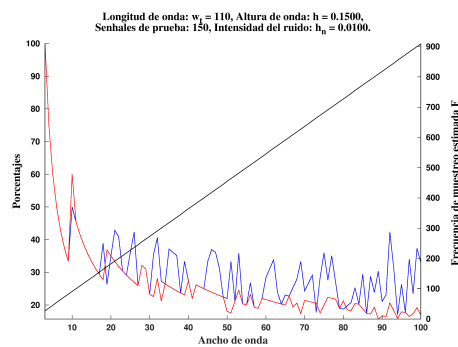
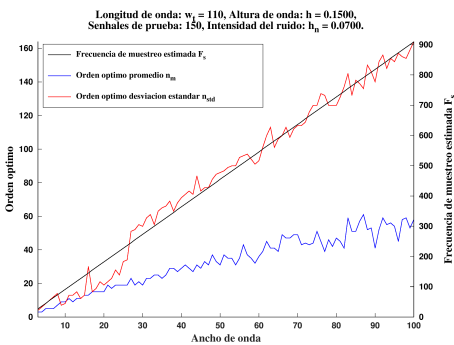
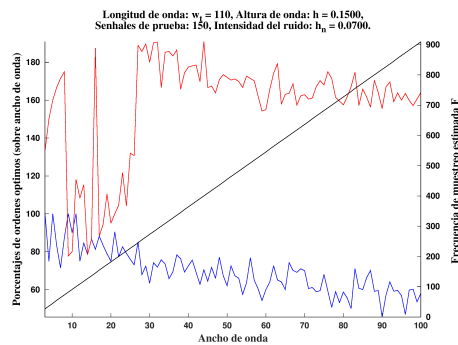
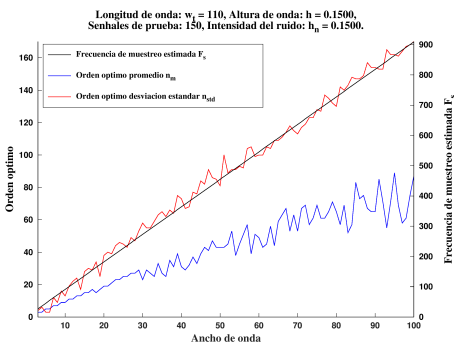
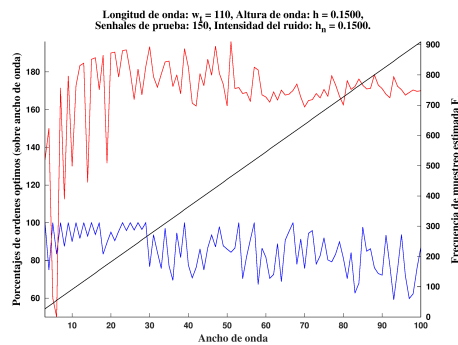
(a) Ordenes óptimos ($h_n = 0.001$)(b) Porcentajes ($h_n = 0.001$)(c) Ordenes óptimos ($h_n = 0.01$)(d) Porcentajes ($h_n = 0.01$)(e) Ordenes óptimos ($h_n = 0.07$)(f) Porcentajes ($h_n = 0.07$)(g) Ordenes óptimos ($h_n = 0.15$)(h) Porcentajes ($h_n = 0.15$)

Figura 4.10: Ordenes óptimos y sus porcentajes (respecto a ancho de onda) para distintos niveles de ruido.

Capítulo 5

Algoritmo pendiente-curvatura

En esta sección, hablaremos acerca del procedimiento que se lleva a cabo en la detección de los puntos fiduciaros en un ECG por medio de los filtros de curvatura y el método del mayor coeficiente de curvatura.

En la literatura se han encontrado muchos algoritmos y herramientas que ayudan a la detección de los puntos fiduciaros, tales como la aplicación de filtros digitales, filtros pasa-banda, modelos ocultos de Markov, filtros lineales, entre otros muchos más (ver [7], [14]), y como se mencionó en [15], se busca que los filtros de curvatura sean una alternativa más a la hora de realizar un análisis del ECG, y de ser posible usarlas en conjunto con éstas u otras herramientas. Es decir, reforzar su uso.

Para ello, enunciaremos el algoritmo que hace uso de los filtros de curvatura desarrollados aquí, el cual fue introducido en [15]. El desarrollo es el siguiente:

5.1. Pre-procesamiento

Como se mencionó antes, en la sección 2.1, una señal ECG siempre se asume contaminada por varias fuentes de ruido que se generan a la hora de medirla, por lo que para poder reducir de cierta forma los efectos de este ruido, es necesario realizar un pre-procesamiento en la señal.

Por lo tanto, al hacer este pre-procesamiento la señal original sufre ciertos cambios que afectan de cierta forma a nuestros resultados. Esto pasa principalmente en los inicios y finales de las ondas, las cuales sufren un ligero desplazamiento. Es por esto que hablamos en términos de “estimación” y no de “medición”.

Supongamos que tenemos en principio una señal ECG. A esta señal original la denotaremos por $ecg_0 \in \mathbb{R}^L$, la cual tiene longitud L y fre-

cuencia de muestreo F_s , la cual está medida en Hertz (Hz). Es decir, $0 \neq ecg_0 = (ecg_{0,1}, ecg_{0,2}, \dots, ecg_{0,L}) \in \mathbb{R}^L$ es un vector de L componentes.

- Lo primero que haremos será normalizar la amplitud de la señal. Para ello se calcula el máximo de los valores absolutos de sus componentes, y se divide a toda la señal por dicho valor, es decir:

$$ecg_1 = \frac{1}{\text{Max}(|ecg_0|)} ecg_0. \quad (5.1)$$

De esta forma, hemos obtenido la señal ecg_1 , cuya amplitud máxima es 1.

- El siguiente paso es el de extraer el nivel de directa o nivel basal de la señal, el cual viene dado por la media de ecg_1 . Por la sección 2.2, esto se expresa por la proyección de ecg_1 con el filtro promedio χ_L . Así, obtenemos una nueva señal, la cual viene dada por:

$$ecg_2 = ecg_1 - ecg_{1,pr} \quad (5.2)$$

$$= ecg_1 - \langle ecg_1, \chi_L \rangle \chi_L \quad (5.3)$$

$$= ecg_1 - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n ecg_{1,k}. \quad (5.4)$$

Con esto, obtenemos que $\overline{ecg_2} = 0$.

- Después de esto, aplicamos a la señal ecg_2 un filtro pasa-alto de tipo Butterworth de orden 2 (ver [15]), al cual le damos una frecuencia de corte de $0.5 Hz$ para obtener la señal procesada $ecg_3 = (ecg_{3,1}, ecg_{3,2}, \dots, ecg_{3,L}) \in \mathbb{R}^L$. Este paso siempre está presente en los análisis de ECG's y se usa para remover frecuencias muy bajas, las cuales son ruido muy débil que buscamos eliminar.

Una cosa a aclarar en el último paso es que dependiendo de las técnicas que se usen para medir una señal ECG, el pre-procesamiento que se use en esta podrá llevar más pasos o no. Por ejemplo, en [15] se menciona que una de las señales que usaron en este artículo fue obtenida de la base de datos del MIT [4], para las cuales el uso del filtro Butterworth es necesario. Sin embargo, para señales generadas por simuladores o máquinas, no es necesario un filtrado adicional. Para este trabajo, al igual que en el artículo mencionado, no se considerará esto último.

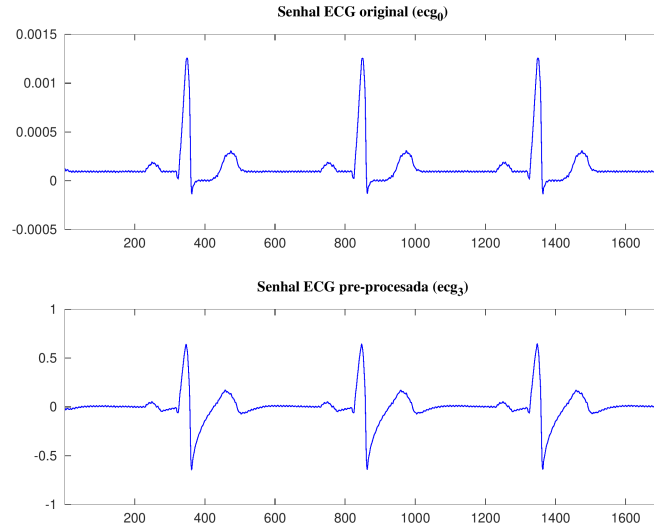


Figura 5.1: Porción de la señal original, y su aspecto después del pre-procesamiento (señal: “ecg4000_cs03.txt”) [3].

5.2. Localización de picos R_m

La localización del complejo QRS puede considerarse uno de los pasos fundamentales en el análisis de señales ECG. Esto es debido a que con ellos se obtienen resultados de cierta importancia: en primer lugar, con la ubicación de los picos R se puede estimar el ritmo cardiaco. En segundo lugar, es el punto de partida para la estimación de la localización del resto de puntos fiduciaros. Esto se debe fundamentalmente a que la detección de los picos R es más fácil, ya que presentan una morfología característica más notable. Es decir, para poder estimar mejor los inicios y finales de las ondas, así como sus amplitudes, es recomendable encontrar primero los picos R_m .

Cabe recalcar que en los últimos años se han desarrollado muchas técnicas para la localización del complejo QRS , pero aquí se explicará el método usado en [15], el cual consiste en lo siguiente.

Primero, a la señal ecg_3 se le aplica un filtro de pasa-banda en las bandas de $10-25Hz$ o $15-20Hz$. Esto es debido a que entre estas frecuencias se encuentran los picos R , también porque de esta forma se elimina la influencia del ruido generado por artefactos e interferencias, así como la influencia de las ondas P y T , las cuales no nos interesan por ahora. Con este paso obtenemos la señal $ecg_4 = (ecg_{4,1}, ecg_{4,1}, \dots, ecg_{4,L}) \in \mathbb{R}^L$.

Ahora, consideramos la señal energía ¹ dada por

$$E_4 = (|ecg_{4,1}|^2, |ecg_{4,1}|^2, \dots, |ecg_{4,L}|^2) \in \mathbb{R}^L. \quad (5.5)$$

A la señal E_4 , se le asigna un umbral de energía, el cual tiene como labor obtener las componentes de energía máximas de la señal, es decir, aquellas componentes de E_4 que cumplan $E_4 > E_{umb}$, donde E_{umb} viene dado por:

$$E_{umb} = 2 \overline{E_4} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^L |ecg_{4,k}|^2. \quad (5.6)$$

Los picos resultantes de este proceso; es decir, los máximos locales de E_4 que cumplen la condición de umbral anterior, tienden a ser “separados”, esto es porque en un complejo QRS pueden aparecer dos “picos”, los cuales están de cierta forma muy cercanos y pueden corresponder a la misma onda R (esto es debido a la presencia del ruido en la señal y a los procesos de pre-procesamiento). En este caso, se remueve uno de estos picos, ya que no nos dan información fisiológica relevante respecto a la frecuencia cardíaca.

De esta forma, cada pico de energía encontrado en la señal E_4 corresponde a un pico R_m de esta señal. Pero los picos para la señal original deben ser encontrados y estos han sido cambiados de posición, esto es debido a que el filtro pasa-banda genera un sesgo entre ambas señales, y por tanto genera un cambio en la localización de estos (cambio en tiempo).

Para evitar este tipo de problemas, calculamos la correlación cruzada entre la señal de energía correspondiente y la señal original pre-procesada ecg_3 ,

$$E_3 = (|ecg_{3,1}|^2, |ecg_{3,2}|^2, \dots, |ecg_{3,L}|^2) \in \mathbb{R}^L \quad (5.7)$$

y la señal E_4 .

Con este paso, obtenemos la diferencia que hay entre ambas señales, la cual es la diferencia entre la longitud de la señal L y la brecha correspondiente al coeficiente de correlación (denotado por K_{cr}), es decir, el máximo coeficiente de correlación. De este modo, hemos localizado los picos R_m de la señal ecg_3 , y por tanto, de la señal original, pues recuerde que en los picos R_m la influencia del ruido tiene menos efecto en su localización.

¹La energía de una señal está definida por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

en los casos continuo y discreto. Por lo que la señal de energía es la compuesta por $(|x(k)|^2)_{k=1}^n$, con una señal x de longitud n (para caso finito).

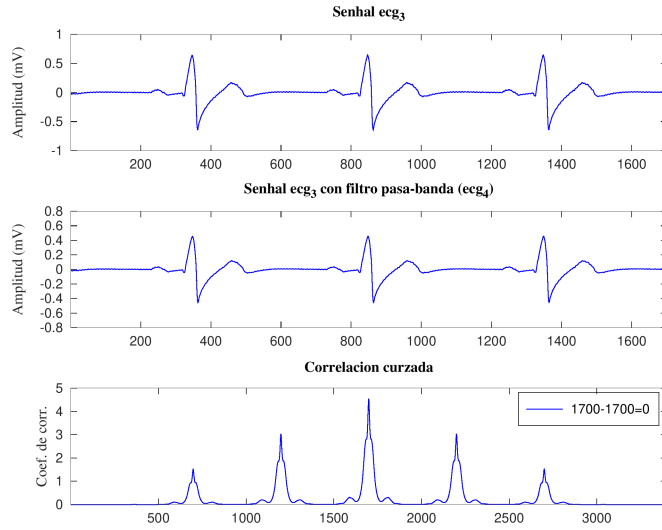


Figura 5.2: Señal pre-procesada, su aplicación del filtro pasa-banda ($15 - 20H_z$) y la correlación cruzada de sus energías.

En el caso de la fig. 5.2, las señales no sufren ningún cambio después del pre-procesado y del filtrado, por lo que no hay diferencia entre estas (es decir, la diferencia entre sus energías es 0).

De esta forma, al encontrar los picos R_m de la señal, podemos encontrar la frecuencia cardíaca, la cual se mide al calcular la longitud de los intervalos RR (la distancia entre dos picos R consecutivos). Si L_{RR} es dicha distancia (en número de muestras), entonces la frecuencia cardíaca HR (medida en lat/min) está dada por la ecuación:

$$HR = \frac{60 F_s}{L_{RR}} \quad (5.8)$$

Note que en esta ecuación están relacionados la frecuencia de muestreo (en numero de muestras por segundo) y el intervalo L_{RR} .

5.3. Estimación del complejo QRS

Ahora, para el caso de la localización del complejo QRS , debemos hallar los puntos fiduciaros correspondientes a este en cada ciclo, es decir, Q_i , Q_m , S_m y J . Para dar un mejor entendimiento al proceso, consideraremos a R_m como las amplitudes (máximos) de las ondas R , a Q_m/S_m como los mínimos de las ondas Q/S respectivamente, y Q_i como el inicio de la onda Q (también el final del segmento PQ) junto con J como el final de la onda S (también el inicio del segmento ST).

Para lograr encontrar estos puntos, haremos el método de análisis de pendiente con algunas restricciones ([15]).

- La idea básica es descender/ascender de un máximo/mínimo respectivamente hacia la izquierda o derecha, hasta que un cambio en la pendiente de la señal es encontrado. Es decir, recordando lo que se dijo en la sección 2.1, podemos recurrir a la señal pendiente πecg_3 , la cual está definida como:

$$\pi_k ecg_3 = ecg_{3,k+1} - ecg_{3,k} \quad (k = 1, 2, \dots, L - 1). \quad (5.9)$$

Este método tiene su justificación en el hecho de que en los ascensos y descensos pronunciados de la señal, desde el pico R_m , la influencia del ruido es mucho menor que la que se presenta en los segmentos isoelectrónicos, especialmente en las señales preprocesadas, y para frecuencias de muestreo bajas.

Para este análisis, evitamos tomar el primer y último de los ciclos, esto es debido a que estos pueden estar incompletos o distorsionados (deformados) debido al proceso de captura que se haya implementado. De esta forma fijamos un pico R_m (excluyendo el primero y el último).

- Lo siguiente es retroceder desde el pico R_m calculando su pendiente πecg_3 , y haremos esto hasta encontrar el primer mínimo local. Es decir, retrocedemos hasta encontrar un punto k tal que las pendientes antes de este punto sean no positivas (las que están ubicadas a la izquierda de este), esto es, tal que $\pi_{k-1} ecg_3 \leq 0$. Este punto será el punto Q_m de este ciclo.
- Desde este punto (Q_m) seguimos retrocediendo hasta encontrar el primer máximo local. Es decir, un punto s tal que las pendientes antes de este punto sean no negativas ($\pi_s ecg_3 \geq 0$). Este punto será el punto Q_i del ciclo.

Un procedimiento análogo se hace para la detección de los puntos S_m y J , pero avanzando en la señal desde el pico R_m .

- Avanzamos en la señal desde el pico R_m hasta encontrar el primer mínimo local, pero esta vez buscamos que las pendientes que siguen después de este punto (ubicadas a la derecha) sean mayores que cero, es decir, hasta encontrar un punto k en el cual $\pi_k ecg_3 \geq 0$. Este punto será asignado como el punto S_m del ciclo.

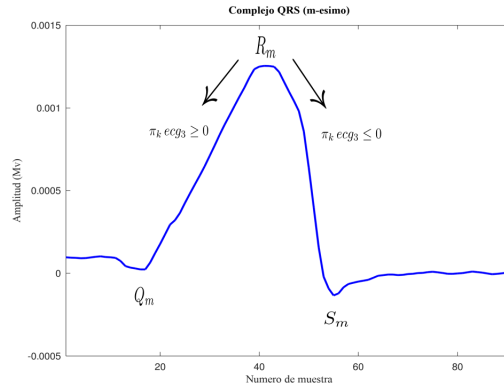


Figura 5.3: Desde el pico R_m , avanzamos y retrocedemos hasta encontrar los puntos Q_m y S_m por el análisis de pendiente.

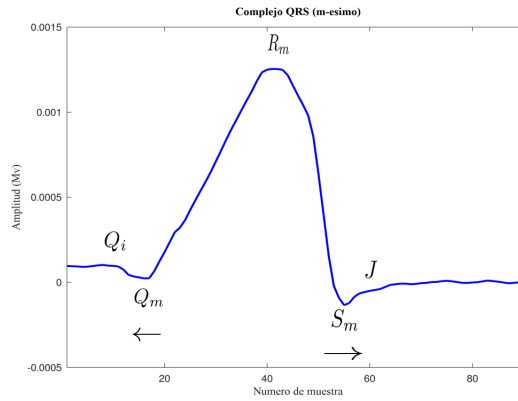


Figura 5.4: Desde los puntos Q_m/S_m , avanzamos/retrocedemos hasta encontrar el punto Q_i/J , respectivamente

- De forma análoga, seguimos avanzando hasta encontrar el primer máximo local, y por tanto, buscar un punto s tal que posea una pendiente no positiva, es decir, tal que $(\pi_s ecg_3 \leq 0)$. Este punto será el punto J .

Un inconveniente al momento de poner en práctica este método es que puede verse afectado por la ausencia o deformidad de las ondas Q y S en el ECG, pues el análisis de pendiente puro puede arrojar como resultado puntos fiduciaros muy lejanos al pico R_m , lo cual no es natural. Además, estos resultados pueden afectar a la detección de los puntos fiduciaros en las demás ondas (P y T).

Es por esto que, tal como se mencionó antes, se hace una modificación al método de análisis de pendiente, el cual es imponer un criterio acerca

de cuán larga debe ser la búsqueda, y esto se hace considerando las longitudes estimadas para las ondas Q y S (ver tabla 1.1).

Podríamos combinar el método de análisis de pendiente con el método del mayor/menor coeficiente de curvatura, esto principalmente para el caso de los puntos Q_i y J , pero el corto ancho de estas ondas nos obliga a usar un orden muy pequeño, lo cual puede hacer imprecisas nuestras estimaciones, especialmente en señales con una frecuencia de muestreo baja (a baja frecuencia, menor número de muestras, y puede que no existan las ondas a considerar, lo que puede afectar a otras ondas vecinas).

5.4. Estimación de los puntos fiduciaros restantes

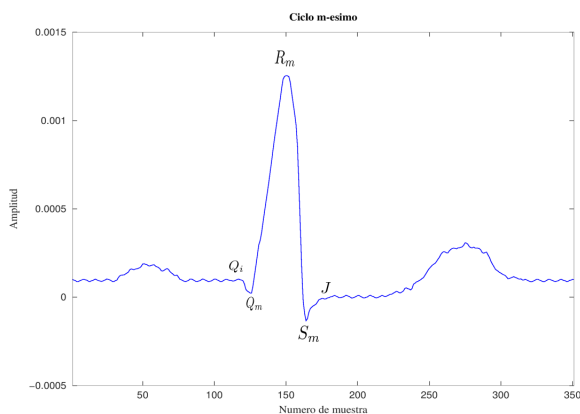


Figura 5.5: Ciclo completo de la señal.

Lo que queda por hacer a partir de aquí es estimar los puntos fiduciaros restantes, es decir, los correspondientes a los de las ondas P y T . Como se mencionó anteriormente, se usará el método de análisis de pendiente [7] pero modificado y, además, combinado con el uso de los coeficientes de curvatura.

El primer paso para la detección de los puntos fiduciaros de las ondas P y T es encontrar sus respectivos picos, es decir, los puntos P_m y T_m .

Aquí, se asume que las ondas son ascendentes, pero podemos decir (sin pérdida de generalidad) que el caso en que las ondas sean descendentes es análogo, y se puede implementar un algoritmo para diferenciar entre ondas ascendentes y descendentes calculando máximos y mínimos. En este caso, los puntos Q_i y J pueden ser considerados como parte de un nivel isoelectrico para las comparaciones respectivas (punto Q_i para la onda P y J para la onda T).

- El proceso que se llevará a cabo es similar al expuesto en la sección anterior. Partiendo del pico R_m , avanzamos dentro de un rango preestablecido ² (en número de muestras) buscando un máximo global. Este máximo (el máximo derecho) será designado como el punto T_m .

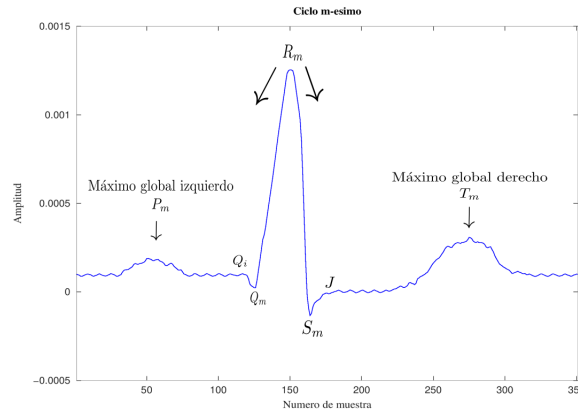


Figura 5.6: Partiendo del pico R_m , buscamos los puntos P_m y T_m .

- Del mismo modo, desde el pico R_m , retrocedemos dentro de un rango preestablecido (en número de muestras) hasta encontrar un máximo global. Este rango al igual que en el punto anterior, estará dado por los valores de referencia para el segmento PQ y los demás datos anteriores. Este máximo (el máximo izquierdo) será designado como el punto P_m . Se puede apreciar esto en la figura 5.6.

A partir de los puntos P_m y T_m , podemos estimar los inicios y finales de sus correspondientes ondas al descender por ellos, algo parecido a lo que se hizo en la sección anterior con el complejo QRS . El problema aquí es que no hay ascensos y descensos notorios, por lo que a diferencia del complejo QRS el ruido suele afectar decisivamente estas ondas.

Por tanto, se recorren los alrededores de estos puntos en la señal, buscando candidatos aceptables por medio del algoritmo de análisis de pendiente [7], y escogiendo al mejor de ellos usando el método del mayor coeficiente de curvatura ³ Esto es debido a que en el punto donde se

²Este rango puede ser establecido por el valor de referencia del segmento QT (tabla 1.1), la frecuencia de muestreo, y los puntos fiduciaros previamente estimados.

³Para detectar los inicios y finales de las ondas P y T, es mayor (coeficiente positivo, que indica convexidad) en el caso de una onda hacia arriba (cóncava), como es el caso que se está explicando. Si fuera hacia abajo (onda convexa), se usaría el menor (coeficiente negativo, convexidad).

dé la mayor curvatura (según su coeficiente), es donde se da la mayor convexidad de la señal (cap. 3). Con esto en mente, el procedimiento es el siguiente: partimos de un punto P_m (para el caso de la onda T , el proceso es análogo).

- Por un lado, retrocedemos hasta un rango establecido en busca de mínimos locales, es decir, puntos k en donde las pendientes calculadas antes de estos (a la izquierda) sean no positivas ($\pi_k \text{ecg}_3 \leq 0$), y cada uno de estos puntos es almacenado como un candidato. El conjunto de los candidatos a puntos P_i se denotara por I_P (I_T en el caso de la onda T).
- Cuando el rango ya se haya recorrido, seleccionamos de estos candidatos al mejor usando el método del mayor coeficiente de curvatura. Es decir, calculamos los coeficientes de curvatura de cada uno de ellos, y el candidato con el mayor coeficiente (la mayor curvatura) será elegido como el punto P_i del ciclo. Así.

$$P_i = \text{Argmax}\{C_{n,k}^2\}_{k \in I_P}. \quad (5.10)$$

- De forma similar, desde el punto P_m avanzamos hasta un rango establecido (nunca un rango mayor que contenga al punto Q_i), y buscamos mínimos locales por medio del algoritmo de análisis de pendiente, es decir, puntos s tales que las pendientes calculadas después de estos sean no negativas ($\pi_s \text{ecg}_3 \geq 0$). Estos puntos serán los candidatos y se almacenan en el conjunto F_P (F_T en el caso de la onda T) y de ellos se escoge el mejor usando nuevamente el método del mayor coeficiente de curvatura. Este será el punto P_f del ciclo. Es decir.

$$P_f = \text{Argmax}\{C_{n,k}^2\}_{k \in F_P}. \quad (5.11)$$

Como todo algoritmo, este también tiene criterios de paro. Uno de ellos consiste en la elección de los rangos de búsqueda para la detección de los inicios y finales de las ondas. Estos rangos están estimados por los valores de referencia que se tienen para los segmentos PQ y ST (tabla 1.1). Otro criterio está en la frecuencia de muestreo, pues en caso de que esta sea baja, pueden tenerse problemas con la morfología de las ondas.

Además, también intervienen los puntos estimados previamente, pues como se mencionó antes, el rango de búsqueda no debe exceder a uno que contenga a un punto fiduciario anteriormente hallado (en el caso de P_f , un rango no mayor a Q_i , y en el caso de T_i , un rango no mayor a J).

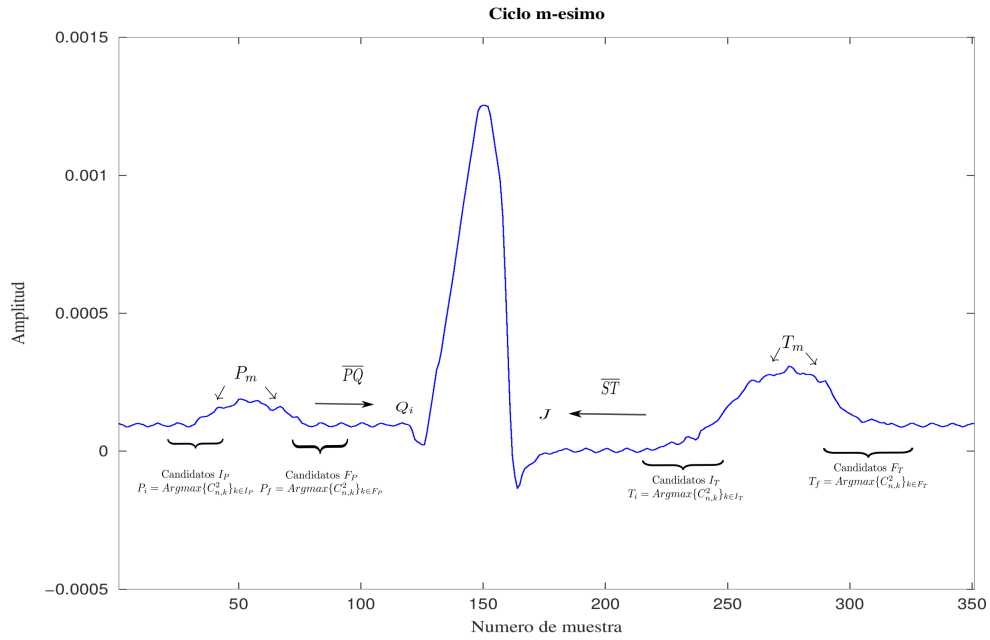


Figura 5.7: Detección de los inicios y finales de las ondas P y T .

Una cosa que puede ocurrir es que los candidatos a puntos P_m/T_m estén suficientemente cercanos entre sí, pero de igual forma que se hacía con los picos R_m , hay que remover uno (o varios) de ellos. Estos casos pueden darse por la morfología de las ondas (morfología no estándar).

Por ejemplo, si una onda T tiene una morfología bifásica, con dos cimmas con un valle en medio, uno de los picos se seleccionaría como T_m , y el valle intermedio podría confundirse con el punto T_i o T_f , dependiendo de si estuviera a la izquierda o a la derecha. Para evitar esto, los puntos T_i y T_f no deben seleccionarse demasiado cerca de T_m . Esto teniendo en cuenta los rangos fisiológicos de duración de la onda T y la frecuencia de muestreo de la señal. Análogos comentarios para la onda P .

Note que otro punto importante en este algoritmo es el de la elección de un orden aceptable para el filtro de curvatura a usar en las ondas P y T , esto es para poder desarrollar el algoritmo de forma eficiente. Puede verse el capítulo 4 para más información al respecto.

5.5. Resumen del algoritmo

Con lo visto anteriormente, podemos ver una forma de implementar el algoritmo de pendiente-curvatura en un computador para su uso. Es necesario aclarar que antes de usar este algoritmo, debemos de establecer

los órdenes que se deben usar para los filtros de curvatura y para cada onda del ciclo (ver capítulo 4).

Resumiendo las secciones anteriores, los pasos a seguir son los siguientes:

1. **Se hace un pre-procesamiento de la señal:** Esto es para reducir de cierta forma el ruido en ella. (Normalización, quitar nivel de directa y aplicar filtros Butterworth).
2. **Se estiman los picos R_m :** Esto se hace por medio de la señal de energía y la correlación cruzada.
3. **Se estiman los picos Q_m y S_m :** A partir de los picos R_m retrocedemos/avanzamos por la señal calculando su pendiente hasta encontrar mínimos locales (izquierdo y derecho) en ella, estos serán los puntos que buscamos en este paso.

A partir de este paso, se procede con los siguientes para cada pico R_m ; es decir, para cada ciclo cardiaco.

4. **Se estiman los puntos Q_i y J :** A partir de los puntos Q_m y J , retrocedemos/avanzamos por la señal calculando su pendiente, hasta encontrar los primeros máximos locales en la señal. Estos puntos serán los puntos Q_i y J .
5. **Se estiman los puntos P_m y T_m :** De nuevo, a partir de los picos R_m , retrocedemos/avanzamos por la señal en un rango (en número de muestra) dado por los intervalos de \overline{PQ} y \overline{ST} , y la frecuencia de muestreo Fs , y encontrar los máximos globales (izquierdo y derecho). Estos puntos serán los puntos P_m y T_m .
6. **Se estiman los puntos Q_i , Q_f , T_i y T_f :** Partiendo de los puntos Q_m y T_m , se retrocede/avanza en un rango predefinido, encontrando los posibles candidatos para los inicios y finales de estas ondas por medio del algoritmo de análisis de pendiente. Es decir, se forman los conjuntos I_P , I_T , F_P y F_T . Consecuentemente, se calculan los coeficientes de curvatura en cada uno de los puntos en estos conjuntos, y aquél con el máximo coeficiente de curvatura en cada uno de ellos será designado como P_i , P_f , T_i y T_f respectivamente.

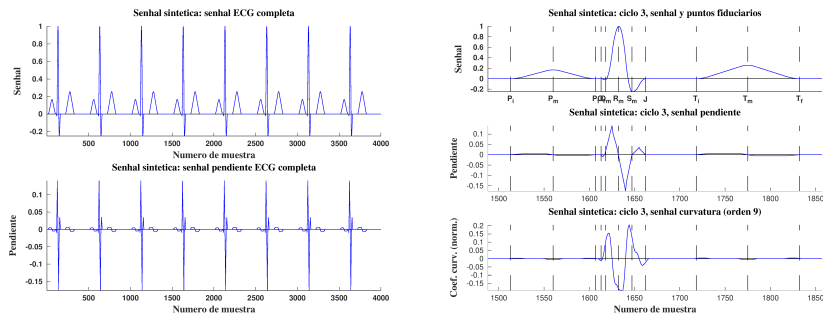
5.6. Resultados

El algoritmo de pendiente-curvatura parece ser una buena herramienta para localizar los puntos fiduciaros en el ECG, sin embargo, no esta-

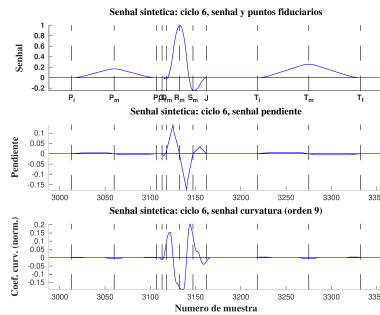
remos seguros de esto hasta ponerlos a prueba con ECG's reales. Esto es lo que haremos en esta sección.

Algunas pruebas del algoritmo se pueden hallar en [15], y aquí solo se realizan también tres pruebas ECG: una señal sintética creada por los autores de la fuente, y otras dos señales tomadas de la misma fuente que se tomaron en [15] (pero no necesariamente, son las mismas). Esto se hace a modo de visualizar los resultados del algoritmo.

La metodología usada fue la descrita en capítulo 5, es decir, se usó el análisis de pendiente modificado para la detección del complejo QRS , y se combinó este con el método de los filtros de curvatura para las ondas restantes (ver [15]). El orden usado aquí fue de $n = 3$ para el complejo QRS y $n = 5$ para ondas P y T , esto en el caso de que $Fs = 128Hz$. Por otra parte, se usaron órdenes de $n = 9, 11, 13$ para los complejos QRS, P y T respectivamente para el caso en que $Fs = 500Hz$. Por comodidad, se usan órdenes impares, pues en ellos los puntos fiduciales se encuentran en el centro y se tiene una mejor perspectiva de ellos.



(a) ciclo 3



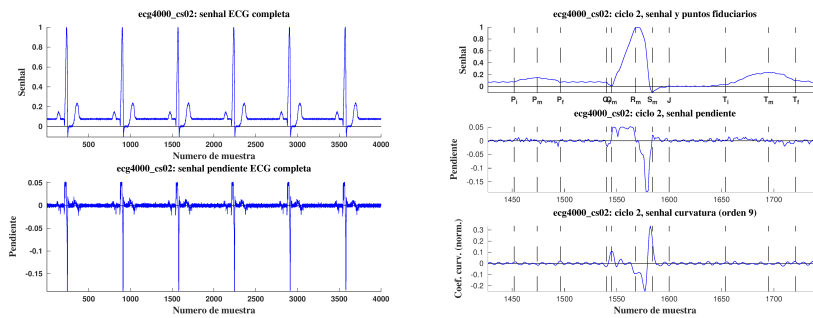
(b) ciclo 6

Figura 5.8: Señal sintética, con su 3^{er} y 6^{to} ciclo. También se muestran sus puntos fiduciales.

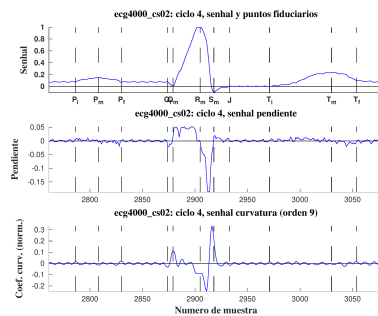
SEÑAL SINTÉTICA: Aquí se usa una señal sintética creada por

los autores, la cual tiene una frecuencia de muestreo $F_s = 500 \text{ Hz}$ [15]. Según los resultados, se ve que el algoritmo no presenta problemas al tratar con señales sin ningún tipo de ruido.

De la figura 5.8, podemos ver claramente el cambio de signo en la señal pendiente donde se localizan los picos R_m , P_m y T_m . Para los inicios y finales de las ondas P y T , se usó el análisis de pendiente para seleccionarlos como candidatos, y se escogió a estos con el método del mayor coeficiente de curvatura.



(a) ciclo 2



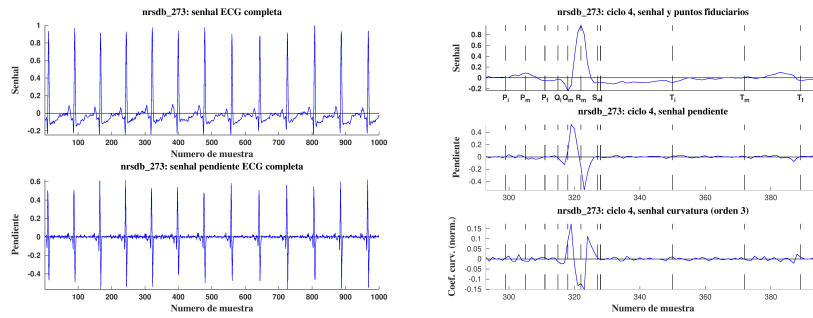
(b) ciclo 4

Figura 5.9: Señal de Cardiosim, junto con su 2^{do} y 4^{to} ciclos. También se muestran sus puntos fiduciaros.

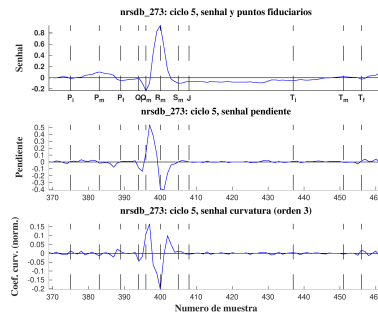
SEÑAL ecg4000_cs02: Esta señal fue tomada por un dispositivo *Cardiosim II* ([15], [3]). Aquí, la frecuencia de muestreo es igual que en la señal sintética, es decir, $F_s = 500 \text{ Hz}$, pero esta vez se puede apreciar que esta señal tiene cierto nivel de ruido.

De la figura 5.9 podemos ver que las pendientes van cambiando mucho en los puntos donde se encuentran las ondas P y T , es aquí donde se usa el método del coeficiente de curvatura a los candidatos hallados por el análisis de pendiente.

SEÑAL nrsdb273: Esta señal fue tomada de un banco de datos



(a) ciclo 4



(b) ciclo 5

Figura 5.10: Señal nrsdb_273, junto con su 4^{to} y 5^{to} ciclos. También se muestran sus puntos fiduciales.

del MIT (Physiobank) ([15], base de datos MIT [4]). Aquí la frecuencia de muestreo es baja ($F_s = 128 \text{ Hz}$), por lo que los resultados que se presentan parecieran no ser los indicados.

La razón para pensar esto es que, al ser una frecuencia de muestreo baja, puede ocurrir que los finales de una onda estén cerca de los inicios de otra, lo que llega a dificultar la elección correcta de los candidatos a inicios/finales de estas ondas. Pero por los resultados vistos en el capítulo 4, podemos escoger un orden bajo en nuestros filtros de curvatura para poder estimar de mejor forma los nodos en donde se dan estos inicios/finales. De esta forma, podemos tener resultados con una buena aproximación, considerando la frecuencia de muestreo con la que se está tratando en esta señal.

5.7. Conclusión.

Con lo visto en todo este trabajo, se puede concluir que los filtros de curvatura son una herramienta que puede ser explotada en el análisis de un ECG, y que la metodología expuesta en el capítulo 5 es efectiva en la tarea de la detección de los puntos fiduciaros. Además, se ha estudiado de mejor forma una herramienta para el procesamiento, los filtros de curvatura.

También se han introducido los filtros promedio y pendiente, que de igual forma, pueden ser usados en el procesamiento de señales. En efecto, el nivel de directa descrito en el pre-procesamiento de la señal viene dado por su proyección con el filtro promedio. Si queremos extraer de la señal más información, podemos quitar también las proyecciones con los demás filtros expuestos para tener una información en específico.

Observamos también que el método de los coeficientes ha generalizado el análisis de pendiente, pues podemos llegar a tomar más de dos puntos para definir esta por medio de ℓ_n . Y también ha ayudado a mejorar este análisis con ayuda de los coeficientes de curvatura para detectar de mejor forma los “giros” que puede haber en la señal (esto para los inicios y finales de las ondas).

El análisis más importante que se hizo aquí fue el ver la influencia del ruido en el desempeño de los filtros. Concluimos que el ruido afecta a su eficiencia, y entre más ruido se tenga en la señal, mayor será el trabajo que se le exija a los filtros. Lo que se ha hecho es cuantificar esta dependencia, lo cual es de suma importancia a la hora de implementar el algoritmo explicado en el capítulo 5, pues como se busca ver los órdenes adecuados para los filtros a implementar, el ruido es factor importante en esta decisión, y a mayor ruido que se tenga, será mayor la complejidad computacional por parte de los filtros.

Apéndice A

Resultados auxiliares

En este apéndice, se expondrán algunos resultados auxiliares que se han utilizado en la elaboración de este trabajo; esta parte debe ser vista como un apoyo o una aclaración acerca de algunos cálculos que se han hecho y/o deducido en varias cuentas de este trabajo.

A.1. Fórmulas de Faulhaber.

Las **Fórmulas de Faulhaber** fueron llamadas así en honor al matemático alemán Johann Faulhaber, y éstas expresan la suma de las potencias de los primeros n números naturales como un polinomio en n de grado $(p + 1)$ y coeficientes racionales, donde p es la potencia. Es decir:

$$\sum_{k=1}^n k^p = P_{p+1}(n). \quad (\text{A.1})$$

Los primeros casos para las fórmulas de Faulhaber (las utilizadas aquí) son los siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} & \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \end{aligned}$$

A.2. Identidad de Parseval.

La **identidad de Parseval** es un resultado del álgebra, el cual establece que en una base ortonormal $B = \{b_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, y un vector $X \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle b_k, X \rangle|^2. \quad (\text{A.2})$$

Note que esta identidad puede ser vista como la generalización del teorema de Pitágoras. De manera formal, se puede establecer como sigue:

Proposición A.1. *Sea \mathbb{V} un espacio euclídeo de dimensión finita n , y sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} . Entonces para cada $X \in \mathbb{V}$ se tiene que*

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle b_k, X \rangle|^2. \quad (\text{A.3})$$

Demostración. Por hipótesis $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es una base de \mathbb{V} , entonces para cada $X \in \mathbb{V}$ se tiene:

$$X = \sum_{k=1}^n c_k b_k \quad (\text{A.4})$$

donde c_k ($1 \leq k \leq n$) son escalares. Sea $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces para $b_\ell \in B$ calculamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle X, b_\ell \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n c_k b_k, b_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \langle b_k, b_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Al ser B una base ortogonal, se tiene que $\langle b_k, b_\ell \rangle = 0$ para $k \neq \ell$, con ello, podemos seguir como sigue:

$$\begin{aligned} \langle X, b_\ell \rangle &= c_\ell \langle b_\ell, b_\ell \rangle \\ &= c_\ell \|b_\ell\|^2. \end{aligned}$$

De esta forma, los coeficientes c_k de la representación A.4 se pueden expresar en términos del producto interior de esta forma

$$c_k = \frac{\langle X, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} = \langle X, b_k \rangle \quad 1 \leq k \leq n. \quad (\text{A.5})$$

La última expresión se obtuvo debido a que $\|b_k\|^2 = 1$ por ser B base ortonormal. Lo único que resta es calcular la norma de X . Para esto, usaremos el producto interior.

$$\begin{aligned}\|X\|^2 &= \langle X, X \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n c_k b_k, X \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle X, b_k \rangle b_k, X \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle X, b_k \rangle \langle b_k, X \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle X, b_k \rangle \overline{\langle X, b_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^n |\langle X, b_k \rangle|^2.\end{aligned}$$

■

Apéndice B

Demostraciones

En este apéndice, se darán las demostraciones que se omitieron del texto principal. Una razón del porqué se hizo esto es debido a que en su mayoría, se trata solo de realizar unas simples cuentas, y por tanto, complicarían la lectura de este trabajo de tesis.

B.1. Filtros pendiente

Aquí se efectúan las demostraciones que se omitieron en la sección 2.2.

Proposición B.1. *Sea $\tilde{\ell}_n$ el filtro pendiente como en la definición 2.6. Entonces, la norma del filtro pendiente usada en la definición 2.8 viene dada por:*

$$\|\tilde{\ell}_n\| = \sqrt{\frac{n(n^2 - 1)}{12}} = \sqrt{\frac{(n - 1)n(n + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}}.$$

Demostración. Sea $\tilde{\ell}_n$ el filtro pendiente. Entonces, para evitar radicales por el momento, se calcula su norma al cuadrado para tener lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\ell}_n\|^2 &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \left(k^2 - k(n+1) + \frac{(n+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 6n(n+1)^2 + 3n(n+1)^2}{12} \\
&= \frac{n}{12} [4n^2 + 6n + 2 - 6(n^2 + 2n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1)] \\
&= \frac{n}{12} [n^2 - 1] \\
&= \frac{n(n^2 - 1)}{12} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{12}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\|\tilde{\ell}_n\| = \sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}} = \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}}.$$

■

Proposición B.2. Para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una señal afín, es decir:

$$x_k = \lambda k + \mu. \quad (1 \leq k \leq n) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Entonces para el filtro pendiente normalizado ℓ_n se tiene que

$$\langle X, \ell_n \rangle = \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}} \lambda = \|\ell_n\| \lambda. \quad (\text{B.1})$$

Demostración. Sea ℓ_n el filtro pendiente normalizado, y sea X una señal afín dada como en el enunciado. Al calcular $\langle X, \ell_n \rangle$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle X, \ell_n \rangle &= \sum_{k=1}^n (\lambda k + \mu) \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} (2k - n - 1) \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \sum_{k=1}^n (\lambda k + \mu) (2k - n - 1) \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \left[2\lambda \sum_{k=1}^n k^2 - \lambda(n+1) \sum_{k=1}^n k + 2\mu \sum_{k=1}^n k - \mu(n+1)n \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \left[2\lambda \sum_{k=1}^n k^2 + (2\mu - \lambda(n+1)) \sum_{k=1}^n k - \mu(n+1)n \right].
\end{aligned}$$

Aquí utilizamos las **Fórmulas de Faulhaber** (ver A.1). Con ellas tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle X, \ell_n \rangle &= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \left[2\lambda \sum_{k=1}^n k^2 + (2\mu - \lambda(n+1)) \sum_{k=1}^n k - \mu(n+1)n \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \left[2\lambda \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + (2\mu - \lambda(n+1)) \frac{n(n+1)}{2} - \mu(n+1)n \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} n \left[\lambda \frac{2n^2 + 3n + 1}{3} - \frac{\lambda(n+1)^2}{2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} n \lambda \left[\frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{6} \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} n \lambda \frac{n^2 - 1}{6} \\
&= \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} \frac{n^3 - n}{6} \lambda \\
&= \frac{\sqrt{n^3 - n}}{2\sqrt{3}} \lambda \\
&= \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}} \lambda.
\end{aligned}$$

De esta forma, con ayuda de la proposición B.1 llegamos al resultado que buscábamos. ■

B.2. Filtros de curvatura

Aquí se efectúan las demostraciones que se omitieron en la sección 2.4.

Proposición B.3. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, y sea el filtro de curvatura \widehat{q}_n tal como se definió en 2.20. Entonces se tiene que:

$$\|\widehat{q}_n\| = \sqrt{\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{180}}. \quad (\text{B.2})$$

Demostración. Calculemos la norma de \widehat{q}_n . Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{q}_n\|^2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} - nk + k^2 - k + \frac{1}{3} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{n^2-1}{12} \right]^2 \quad (\text{Por proposición 2.22}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(k - \frac{n+1}{2} \right)^4 - \frac{n^2-1}{6} \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{n^2-1}{12} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^4 - \frac{n^2-1}{6} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 + n \left(\frac{n^2-1}{12} \right)^2. \end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 &= \sum_{k=1}^n \left[\left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 - \frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2-1}{12} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\widehat{q}_{n,k} + \frac{n^2-1}{12} \right] \\ &= 0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{n^2-1}{12} \right) \quad (\text{Por proposición 2.23}) \\ &= \frac{n(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular el primer sumatorio, procedemos a considerar 2 casos:

- Si n es impar, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m - 1$, con esto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^4 &= \sum_{k=1}^{2m-1} (k-m)^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^{m-1} k^4 \\
&= 2 \left[\frac{6(m-1)^5 + 15(m-1)^4 + 10(m-1)^3 - (m-1)}{30} \right] \quad (\text{Por A.1}) \\
&= \frac{2}{5}(m^5 - 5m^4 + 10m^3 - 10m^2 + 5m - 1) + \\
&\quad m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1 + \frac{2}{3}(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) - \frac{1}{15}(m-1) \\
&= \frac{2}{5}m^5 - m^4 + \frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{15}m \\
&= \frac{6m^5 - 15m^4 + 10m^3 - m}{15}.
\end{aligned}$$

Puesto que $n = 2m - 1$, entonces $m = \frac{n+1}{2}$, así

$$\begin{aligned}
&\frac{6m^5 - 15m^4 + 10m^3}{15} \\
&= \frac{6\left(\frac{1}{2^5}\right)(n+1)^5 - 15\left(\frac{1}{2^4}\right)(n+1)^4 + 10\left(\frac{1}{2^3}\right)(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)}{15} \\
&= \frac{1}{80}(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) \\
&\quad - \frac{1}{16}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) \\
&\quad + \frac{1}{12}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \frac{1}{30}(n+1) \\
&= \frac{1}{80}n^5 - \frac{1}{24}n^3 + \frac{7}{240}n \\
&= \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{240}.
\end{aligned}$$

- Si n es par, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m$, así

$$\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^4 = \sum_{k=1}^{2m} \left(k - m - \frac{1}{2}\right)^4.$$

Haciendo el cambio de variable $\nu = k - m$ en el sumatorio, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m} \left(k - m - \frac{1}{2}\right)^4 &= 2 \sum_{\nu=0}^m \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^4 \\
&= 2 \sum_{\nu=0}^m \left[\nu^4 - 2\nu^3 + \frac{3}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{16}\right] \\
&= 2 \left[\sum_{\nu=0}^m \nu^4 - 2 \sum_{\nu=0}^m \nu^3 + \frac{3}{2} \sum_{\nu=0}^m \nu^2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^m \nu + \frac{1}{16}m \right] \\
&= \left(\frac{6m^5 + 15m^4 + 10m^3 - m}{15}\right) - 2 \left(\frac{m^4 + 2m^3 + m^2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{3}{2} \left(\frac{2m^3 + 3m^2 + m}{3}\right) - \frac{1}{2}(m^2 + m) + \frac{1}{8}m \\
&= \frac{2}{5}m^5 - \frac{1}{3}m^3 + \frac{7}{120}m.
\end{aligned}$$

Como $n = 2m$, se tiene que $m = \frac{n}{2}$, así

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}m^5 - \frac{1}{3}m^3 + \frac{7}{120}m &= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2^5}\right) n^5 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3}\right) n^3 + \frac{7}{120} \left(\frac{1}{2}\right) n \\
&= \frac{1}{80}n^5 - \frac{1}{24}n^3 + \frac{7}{240}n \\
&= \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{240}.
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^4 = \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{240}. \quad (\text{B.3})$$

De esta forma, podemos proseguir como sigue en nuestro cálculo.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{q}_n\|^2 &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^4 - \frac{n^2-1}{6} \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n \left(\frac{n^2-1}{12}\right)^2 \\
&= \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{240} - \frac{n^2-1}{6} \left(\frac{n(n^2-1)}{12}\right) + n \left(\frac{n^2-1}{12}\right)^2 \\
&= \frac{n^2-1}{12} \left(\frac{3n^3 - 7n}{20} - \frac{(n^2-1)n}{6} + \frac{n(n^2-1)}{12}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{12} \left(\frac{9n^3 - 21n - 10n(n^2-1) + 5n(n^2-1)}{60}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{12} \left(\frac{4n^3 - 16n}{60}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{12} \left(\frac{n^3 - 4n}{15}\right) \\
&= \frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{180}.
\end{aligned}$$

■

Proposición B.4. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y sea $C = (C_k)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ una señal cuadrática, es decir

$$C_k = \lambda k^2 + \mu k + \nu \quad (1 \leq k \leq n).$$

Entonces para el filtro pendiente normalizado ℓ_n se cumple que

$$\langle C, \ell_n \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^3 - n}{3}} (\lambda(n+1) + \mu). \quad (\text{B.4})$$

Demostración. Calculando $\langle C, \ell_n \rangle$ tenemos que

$$\langle C, \ell_n \rangle = \sum_{k=1}^n (\lambda k^2 + \mu k + \nu) \sqrt{\frac{3}{n^3 - n}} (2k - n - 1).$$

Hacemos $a = \sqrt{\frac{3}{n^3-n}}$, con esto

$$\begin{aligned}
\langle C, \ell_n \rangle &= a \sum_{k=1}^n [2\lambda k^3 + (2\mu - \lambda(n+1))k^2 + (2\nu - \mu(n+1))k - \nu(n+1)] \\
&= 2a \left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \right) + (2\mu - \lambda(n+1))a \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) \\
&\quad + (2\nu - \mu(n+1))a \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) - \nu a n(n+1) \\
&= a n(n+1) \left[\lambda \left(\frac{n^2-1}{6} \right) + \mu \left(\frac{n-1}{6} \right) \right] \\
&= a \frac{(n-1)n(n+1)}{6} (\lambda(n+1) + \mu).
\end{aligned}$$

Como $a = \sqrt{\frac{3}{n^3-n}} = \sqrt{\frac{3}{(n-1)n(n+1)}}$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle C, \ell_n \rangle &= \sqrt{\frac{3}{(n-1)n(n+1)}} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} (\lambda(n+1) + \mu) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^3-n}{3}} (\lambda(n+1) + \mu).
\end{aligned}$$

■

Proposición B.5. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y sea $C = (C_k)_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ una señal cuadrática, es decir

$$C_k = \lambda k^2 + \mu k + \nu \quad (1 \leq k \leq n).$$

Entonces para el filtro curvatura normalizado q_n se cumple que

$$\langle C, q_n \rangle = \frac{1}{30} \xi \lambda (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2), \quad (\text{B.5})$$

donde $\xi = \sqrt{\frac{5}{n^5-5n^3+4n}}$. Una forma más compacta de este resultado es la siguiente:

$$\langle C, q_n \rangle = \|\widehat{q}_n\| \lambda. \quad (\text{B.6})$$

Demostración. Calculando $\langle C, q_n \rangle$, tenemos que

$$\langle C, q_n \rangle = \sum_{k=1}^n (\lambda k^2 + \mu k + \nu) \left(\frac{\sqrt{5}(n^2 + 3n - 6nk + 6k^2 - 6k + 2)}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Sea $\xi = \frac{\sqrt{5}}{(n^5 - 5n^3 + 4n)^{\frac{1}{2}}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle C, q_n \rangle &= \xi \sum_{k=1}^n (\lambda k^2 + \mu k + \nu)(n^2 + 3n - 6nk + 6k^2 - 6k + 2) \\
&= \xi \sum_{k=1}^n [6\lambda k^4 + (6\mu - 6\lambda(n+1))k^3 + (6\nu - 6\mu(n+1) + \lambda(n^2 + 3n + 2))k^2 \\
&\quad + (\mu(n^2 + 3n + 2) - 6\nu(n+1))k + \nu(n^2 + 3n + 2)] \\
&= 6\xi\lambda \left(\frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \right) + 6\xi(\mu - \lambda(n+1)) \left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \right) \\
&\quad + (6(\nu - \mu(n+1)) + \lambda(n^2 + 3n + 2))\xi \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
&\quad + (\mu(n^2 + 3n + 2) - 6\nu(n+1))\xi \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) + \nu\xi(n^2 + 3n + 2)n \\
&= \xi n(n+1) \frac{1}{5} \lambda (6n^3 + 9n^2 + n - 1) + \xi n(n+1) \frac{3}{2} (\mu - \lambda(n+1))n(n+1) \\
&\quad + \xi n(n+1)(\nu - \mu(n+1)) + \xi n(n+1) \frac{1}{6} \lambda (n+2)(n+1)(2n+1) \\
&\quad + \xi n(n+1) \frac{1}{2} \mu (n+2)(n+1) - \xi n(n+1) 3\nu(n+1) + \xi n(n+1) \nu(n+2) \\
&= \frac{1}{30} \lambda \xi n(n+1)(n^3 - n^2 - 4n + 4) = \frac{1}{30} \lambda \xi (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

De esta última expresión, podemos ver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{30} \lambda \xi (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) &= \frac{1}{30} \sqrt{\frac{5[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)]^2}{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}} \lambda \\
&= \frac{1}{30} \sqrt{5[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)]} \lambda = \sqrt{\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{180}} \lambda = \|\widehat{q}_n\| \lambda.
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

- [1] Organización mundial de la salud (world health organization) (2019). <https://www.who.int>.
- [2] Texas heart institute. (2019). <https://www.texasheart.org/>.
- [3] ECG arrhythmia simulator Operating Instruction. Cardiosim ii.
- [4] Leon Glass Jeffrey M. Hausdorff Plamen Ch. Ivanov Roger G. Mark Joseph E. Mietus George B. Moody Chung-Kang Peng Ary L. Goldberger, Luis A. N. Amaral, H. Eugene Stanley *et al* PhysioBank, Physio Tool kit, and Physio Net. Components of a new research resource for complex physiologic signals. <https://dx.doi.org/10.1161/01.CIR.101.23.e215>, 13 jun 2000.
- [5] Idoia Beraza and Iñaki Romero. Comparative study of algorithms for ecg segmentation. *Biomedical Signal Processing and Control*, 34:166–173, 2017.
- [6] Nallely Biridiana Cervantes Acquart and Nallely Geraldine Gómez Acevedo. *Detección de Arritmias Cardiacas mediante un Sistema de Amplificación y Digitalización de Señales Electrocardiográficas*. 2017. Tesis de licenciatura. Instituto Politécnico Nacional.
- [7] G. Clifford, F. Azuaje, and P McSharry. *Advanced methods and tools for ECG data analysis*. 2006.
- [8] Dale Dubin. *Electrocardiografía Práctica, 3ra Edición*. Nueva editorial Interamericana.
- [9] J. Hall and A. Guyton. *Textbook of Medical Physiology*. Philadelphia: Elsevier., 19 edition, 2016.
- [10] Armando Malanda Idoia Beraza Azurmendi. *Estudio Comparativo de algoritmos para la segmentación del electrocardiograma*. Abril 2013. Tesis de licenciatura. Escuela Técnica Superior de ingenieros industriales y de telecomunicaciones.

-
- [11] James P Keener and James Sneyd. *Mathematical physiology*, volume 1. Springer, 1998.
- [12] Cai X. Lines, J. and B. (n.d.). Nielsen. *Computing the Electrical Activity in the heart*. 2006.
- [13] S. Saksena, A. Camm, and P. Boyden. *Electrophysiological disorders of the heart.*, volume 1. Springer, 1998.
- [14] Leif Sörnmo and Pablo Laguna. *Bioelectrical signal processing in cardiac and neurological applications*. Academic Press, 2005.
- [15] René Yáñez de la Rivera, Moisés Soto-Bajo, and Andrés Fraguela-Collar. Electrocardiogram fiducial points detection and estimation methodology for automatic diagnose. *The Open Bioinformatics Journal*, 11(1), 2018.