



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Introducción al Axioma de Martin y sus aplicaciones

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

por

José Luis Rodríguez Antonio

Asesorado por

Dr. Iván Martínez Ruiz

Dr. Alejandro Ramírez Páramo

Puebla Pue.  
3 de mayo de 2024





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Introducción al Axioma de Martin y sus aplicaciones

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

por

José Luis Rodríguez Antonio

Asesorado por

Dr. Iván Martínez Ruiz

Dr. Alejandro Ramírez Páramo

Puebla Pue.

3 de mayo de 2024



**Título:** Introducción al Axioma de Martin y sus aplicaciones  
**Estudiante:** JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ ANTONIO

COMITÉ

---

Dr. Oleg Okunev  
Presidente

---

Dr. Fernando Sánchez Taxis  
Secretario

---

Dr. Sonia Navarro Flores  
Vocal

---

Vocal

---

Dr. Iván Martínez Ruiz  
Dr. Alejandro Ramírez Páramo  
Asesor



# Agradecimientos

Agradezco enormemente a mis padres Maribel y Teódulo, a mis hermanos Amelia, Miriam y Miguel; así como a mi tía, Rebeca. Porque me han apoyado durante toda mi vida. Gracias por escucharme; así como estar en los buenos y malos momentos, y por no perder la fe en mí.

Agradezco también a mis amigos de la universidad quienes estuvieron ayudándome en diversas situaciones y que me tenían paciencia para explicarme cosas que no podía entender. Gracias por los buenos momentos que vivimos en la facultad y que hasta la fecha me siguen inspirando a ser una gran persona. Y a cada una de las personas que me han apoyado a lo largo de mi recorrido académico y personal.

Asimismo, (y en común acuerdo con mis asesores), quiero no solo agradecer, sino brindar en este trabajo de tesis *un breve y muy merecido homenaje al profesor Manuel Ibarra Contreras*, por su labor docente y porque a mi y a muchos otros estudiantes nos transmitió la belleza de las matemáticas, y nos alentó a trabajar en equipo. Aún más, deseo agradecerle la revisión a este trabajo al que gracias a sus puntuales observaciones ha mejorado notablemente.

También agradezco a mis directores de tesis Dr. Iván Martínez Ruiz y el Dr. Alejandro Ramírez Páramo por aceptar trabajar conmigo y enseñarme el mundo de la teoría de conjuntos y topología, además de tenerme la paciencia suficiente en momentos de quiebre.

Finalmente y no por ello menos importante, a mis sinodales Dr. Sonia Navarro Flores, Dr. Oleg Okunev y Dr. Fernando Sánchez Taxis, por dedicar su tiempo para leer y mejorar el presente trabajo con sus sugerencias y correcciones.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Notaciones y definiciones . . . . .	1
<b>2. Axioma de Martin</b>	<b>9</b>
2.1. Axioma de Martin . . . . .	9
2.2. Equivalencias al AM . . . . .	17
2.3. Aplicaciones 1 . . . . .	24
2.4. Aplicaciones II . . . . .	27
2.5. Aplicaciones III . . . . .	33
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Introducción

A principios del siglo XX el matemático Bertrand Russell encuentra una inconsistencia (Paradoja de Russell) en la Teoría de Conjuntos (TC), introducida por Georg Cantor. Así, a inicios del siglo XX, Ernest Zermelo y Adolf Fraenkel formulan los axiomas de teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF) y añaden el famoso Axioma de Elección (Axiom of Choice), generando así lo que hoy en día conocemos como ZFC. Esta colección de axiomas generan la TC actual, utilizando la lógica formal en lugar de los lenguajes naturales, evadiendo así las paradojas. Además, estos enunciados pueden considerarse ciertos sin pruebas. Aunque hay algunas controversias con el axioma de elección. A partir de dichos axiomas se pueden derivar la mayoría de los resultados matemáticos actuales.

En 1891 Georg Cantor se dio cuenta de que existen distintos “tipos” de infinitos al demostrar que la cantidad de elementos que tienen los números naturales ( $\mathbb{N}$ ), es menor a la cantidad de elementos que tienen los números reales ( $\mathbb{R}$ ); con esto en mente Cantor se preguntó lo siguiente: ¿Existirá algún conjunto que tenga más elementos que los números naturales pero menos elementos que los números reales? Así llamaremos la hipótesis del continuo (HC) al siguiente enunciado: “No existen conjuntos infinitos cuyo tamaño esté estrictamente comprendido entre el del conjunto de los números naturales y el del conjunto de los reales”; permaneció sin resolverse durante muchos años; incluso ocupó el primer lugar en la lista de los problemas de Hilbert en 1900. Fue hasta en el año de 1963, que Paul Cohen demostró (quien recibió la Medalla Fields por ello) con la ayuda de Kurt Gödel que la hipótesis es independiente de ZFC.

Si la hipótesis del continuo falla, nacen un gran número de preguntas sobre los distintos cardinales infinitos. Unas cuantas de estas preguntas son de naturaleza combinatoria, tales como:

1. ¿Es cierto que para un cardinal  $\kappa < 2^\omega$ ,  $2^\kappa = 2^\omega$ ?

¿Ocurre que toda familia casi ajena,  $\mathcal{A}$ , de cardinalidad  $\kappa < 2^\omega$  es maximal?

Estas preguntas tienen una respuesta afirmativa para  $\kappa = \omega$ ; el caso interesante es cuando  $\omega < \kappa < 2^\omega$ . Para tales  $\kappa$ , se conoce por el método de *forcing* que ninguna de las preguntas se puede resolver conforme a los axiomas ZFC+¬HC.

Diversos autores, como Solovay y Tennenbaum, empleando las técnicas forcing o forcing iterado obtuvieron una respuesta parcial y afirmativa a los problemas anteriores. A grosso modo, las respuestas se obtuvieron agregando en cada caso alguna hipótesis extra, además de ZFC+¬HC. Martin se dio cuenta de que todas las condiciones adicionales (para dar respuesta a las cuestiones anteriores), podían amalgamarse en una sola. Ésta se conoce actualmente como “Axioma de Martin”.

El trabajo de Tesis se desarrolla de la manera siguiente. Como es usual, el primer Capítulo contiene definiciones, notaciones y algunos resultados de la Teoría de Conjuntos y un poco de Topología General. En dicho capítulo no hacemos una exposición a detalle de las temáticas mencionadas; pero en las referencias el lector podrá encontrar obras en las que se puede obtener mucha más información sobre dichos tópicos.

En el Capítulo 2, exponemos a todo detalle lo referente al Axioma de Martin. Este capítulo está dividido en cinco secciones. La primera de ellas está dedicada al Axioma de Martin, en la segunda

presentamos algunas equivalencias para dicho axioma. La mayor parte de estas dos secciones está basada en el texto [8]. En las tres secciones siguientes, presentamos aplicaciones del Axioma de Martin, principalmente en el área de Topología General. Con la idea de puntualizar cada una de ellas, en la sección 2.3 damos algunas aplicaciones relacionadas a la propiedad de Baire. En la Sección 2.4, abordamos el problema siguiente: ¿Bajo qué condiciones un espacio topológico que satisface la CCC resulta separable? Este problema nace del hecho de que todo espacio separable es CCC. Otro hecho conocido es que todo espacio compacto es numerablemente compacto. Buena parte del material presentado en esta sección proviene del trabajo de [6], [8], [10] y [13].

También es sabido que todo espacio compacto es cercanamente compacto. Luego, la inquietud natural es establecer condiciones bajo las cuales un espacio numerablemente compacto o cercanamente compacto resulta ser compacto. Respuestas a estas interrogantes se obtienen en la última sección del Trabajo. El material que exponemos en esta sección se encuentra en las referencias [11] y [13].

Es importante comentar que entre las aportaciones del presente Trabajo de Tesis, se tiene las siguientes:

1. Estamos presentando un texto que puede servir a los lectores interesados en trabajar con el Axioma de Martin. Toda vez que hemos luchado para completar muchos de los “huecos” que se presentan en otras referencias.
2. En la sección 2.4 se introduce la noción de espacio cocompacto, en la cual se emplea la noción de pseudobase, a diferencia de la noción dada por Juhász en [6].
3. Los resultados establecidos para espacios cocompactos, están inspirados en los dados por Juhász, sin embargo, no hemos logrado establecer si la definición dada en este trabajo es equivalente a la empleada por Juhász.
4. El Teorema 19 b), también es una aportación del presente trabajo de Tesis; pues Porter establece en [13] un resultado similar, pero emplea espacios  $T_3$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Notaciones y definiciones

En la presente sección mencionaremos las notaciones y definiciones que utilizaremos a lo largo del trabajo de tesis. Actualmente existen excelentes obras que ofrecen exposiciones sobre teoría de conjuntos y topología, temas que son la parte central de esta sección. Como es usual los símbolos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , denotan a los conjuntos de los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números reales, respectivamente. Asimismo si  $A$  es un conjunto, entonces denotamos  $\mathcal{P}(A)$  al conjunto potencia de  $A$ ; es decir, al conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

En diversas ocasiones emplearemos a las funciones como conjuntos de pares (o parejas) ordenadas; por ello, introducimos el siguiente concepto.

**Definición 1.** *El par ordenado de elementos  $a$  y  $b$ , denotado por  $(a, b)$  es el conjunto:*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

en donde  $a$  es llamado primer elemento de  $(a, b)$  y  $b$  es llamado el segundo elemento de  $(a, b)$ .

No es difícil verificar que dos pares ordenados  $(a, b)$ ,  $(a', b')$ , son iguales,  $(a, b) = (a', b')$  si y solo si  $a = a'$  y  $b = b'$ .

**Definición 2.** *Un conjunto  $R$  es una relación (binaria) si todos los miembros de  $R$  son pares ordenados, es decir, para cualquier  $z \in R$  existen  $x$  e  $y$  tales que  $z = (x, y)$ . Denotaremos  $xRy$  siempre que  $(x, y) \in R$  y diremos que  $x$  está  $R$ -relacionado con  $y$ .*

Recordemos algunos ejemplos típicos de relaciones.

1.  $\emptyset$  es una relación.
2. Si  $A$  y  $B$  son conjuntos, la relación producto cartesiano de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ ; es el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

3. Si  $R$  y  $S$  son conjuntos, definimos a  $R \setminus S = \{x \in R \text{ y } y \notin S\}$ , entonces  $R \setminus S$  es una relación.
4. Sea  $X$  un conjunto. Las relaciones inclusión en  $\mathcal{P}(X)$  y pertenencia en  $X$  se definen respectivamente por:

$$a) \subseteq_{\mathcal{P}(X)} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}.$$

$$b) \in_X = \{(a, b) \in X \times X : a \in b\}.$$

**Definición 3.** Sea  $R$  una relación binaria.

1. Al conjunto de todos los  $x$  que están  $R$  relacionados con algún  $y$ , se le llama dominio de  $R$  y es denotado por  $\text{dom } R$ . Así  $\text{dom } R = \{x : \text{existe una } y \text{ tal que } xRy\}$ .
2. Al conjunto de todos los  $y$  tales que, para algún  $x$ ,  $x$  está  $R$  relacionado con  $y$ , se le nombra rango de  $R$  y es denotado por  $\text{ran } R$ . Así  $\text{ran } R = \{y : \text{existe un } x \text{ tal que } xRy\}$ .
3. Al conjunto  $\text{dom } R \cup \text{ran } R$  se le llama campo de  $R$  y es denotado como  $\text{cam } R$  o  $\text{Cam } R$ .
4. Si  $\text{cam } R \subseteq X$ , decimos que  $R$  es una relación en  $X$  o  $R$  es una relación entre elementos de  $X$ .

El dominio de  $R$ ,  $\text{dom } R$  o  $\text{Dom } R$ , es el conjunto formado por el primer elemento de cada par ordenado de la relación. El rango de  $R$ ,  $\text{ran } R$  o  $\text{Ran } R$  es el conjunto formado por el segundo elemento de cada par ordenado de la relación  $R$ .

Supongamos que  $R$  es una relación. Si  $R \subseteq A \times A$  diremos simplemente que es una relación en  $A$ . Si  $R \subseteq A \times B$  diremos que  $R$  es una relación de  $A$  en  $B$ .

**Definición 4.** Sea  $R$  una relación binaria en  $X$ . Diremos que  $R$  es:

1. Reflexiva si para todo  $x \in X$ ,  $xRx$ .
2. Simétrica si para cualesquiera  $x, y \in X$ , si  $xRy$  se cumple  $yRx$ .
3. Transitiva si para cualesquiera  $x, y, z \in X$  tales que  $xRy$  y  $yRz$ , ocurre que  $xRz$ .
4. Antisimétrica si para cualesquiera  $x, y \in X$ , si  $xRy$  y  $yRx$ , implica  $x = y$ .

A continuación daremos la noción (conjuntista) de función. Observemos que ésta es un caso particular del concepto de relación. No obstante, es importante mencionar que la manera en que presentaremos a las funciones tomará relevancia más adelante.

**Definición 5.** Una relación  $f$ , es una función si la siguiente condición se verifica: Si  $(x, y), (x, y') \in f$ , entonces  $y = y'$ .

Dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales,  $f = g$  si y solo si  $\text{dom } f = \text{dom } g$  y para todo  $x \in \text{dom } f$ ,  $f(x) = g(x)$ .

De la definición anterior se sigue que una relación  $f$  es una función si para cada  $x \in \text{dom } f$ , existe un único  $y \in \text{ran } f$ , de tal manera que  $(x, y) \in f$ . Como es usual, el único  $y$  tal que  $(x, y) \in f$ , lo llamaremos valor o imagen de  $f$  en  $x$  y lo denotaremos  $f(x)$ . Además, si  $f$  es una función tal que  $\text{dom } f = X$  y  $\text{ran } f \subseteq Y$ , lo denotaremos, como es usual,  $f : X \rightarrow Y$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $f = \{(x, \frac{1}{x^2}) \mid x \neq 0, x \text{ es un número real}\}$ .  $f$  es una función pues si  $(a, b_1) \in f$  y  $(a, b_2) \in f$ , entonces  $b_1 = \frac{1}{a^2}$  y  $b_2 = \frac{1}{a^2}$ , y así  $b_1 = b_2$ .

**Definición 6.** Sean  $f$  y  $g$  funciones y  $A$  un conjunto.

1. La función restricción de  $f$  en  $A$ , denotada por  $f \upharpoonright_A$ ; es el conjunto:

$$f \upharpoonright_A = \{(x, y) \in f : x \in A\}.$$

2. Diremos que  $f$  extiende a  $g$ , si existe un conjunto  $A$  tal que  $g = f \upharpoonright_A$ .

**Ejemplo 2.** Consideremos a las funciones:

$f = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 3), (7, 5), (9, 7)\}$  y  $g = \{(0, 0), (2, 1), (7, 5), (9, 7)\}$ . Entonces  $f$  extiende a  $g$ . En efecto, tomando a  $A = \{0, 2, 7, 9\}$ , tenemos que  $f \upharpoonright_A = g$ .

Uno de los conceptos que emplearemos en diversas ocasiones, por ejemplo en la prueba del Lema 1, es el de funciones compatibles.

**Definición 7.** Sean  $f$  y  $g$  funciones y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones. Diremos que:

1.  $f$  y  $g$  son compatibles si y solo si  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ .
2.  $\mathcal{F}$  es un sistema de funciones compatibles si para cualesquiera  $f, g \in \mathcal{F}$ ,  $f$  y  $g$  son compatibles.

El resultado siguiente será empleado en la prueba del Teorema 4.

**Lema 1.** Si  $f$  y  $g$  son funciones, son equivalentes:

1.  $f$  y  $g$  son funciones compatibles.
2.  $f \cup g$  es una función.
3.  $f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} = g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$ .

*Demostración.* [1.  $\Rightarrow$  2.] Veamos que  $f \cup g$  es un conjunto de parejas ordenadas. Notemos que si  $z \in f \cup g$ , entonces  $z \in f$  o  $z \in g$ ; luego, dado que  $f$  y  $g$  son funciones, tenemos que  $z$  es una pareja ordenada.

Ahora sean  $(x, y), (x, z) \in f \cup g$ . Entonces tenemos los casos siguientes:

1. Si  $(x, y), (x, z) \in f$ , entonces  $y = z$  pues  $f$  es función.
2. Si  $(x, y), (x, z) \in g$ , entonces  $y = z$  pues  $g$  es función.
3. Si  $(x, y) \in f$  y  $(x, z) \in g$ , entonces  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$  y dado que  $f$  y  $g$  son compatibles entonces  $f(x) = g(x)$ , es decir  $y = z$ .
4. Si  $(x, y) \in g$  y  $(x, z) \in f$ , entonces  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$  y dado que  $f$  y  $g$  son compatibles entonces  $f(x) = g(x)$ , es decir  $y = z$ .

Por lo cual si  $f$  y  $g$  son compatibles, entonces  $f \cup g$  es función.

[2.  $\Rightarrow$  3.] Supongamos que  $f \cup g$  es función y que  $f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} \neq g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$ , como  $f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} \neq g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$ , entonces para algún  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ ,  $f(x) \neq g(x)$ , entonces  $(x, f(x)), (x, g(x)) \in f \cup g$  y  $f(x) \neq g(x)$ , lo cual es absurdo pues  $f \cup g$  es función. Por tanto  $f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} = g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$ .

[3.  $\Rightarrow$  1.] Supongamos que  $f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} = g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$  y que  $f$  y  $g$  no son compatibles, entonces existe un  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ , tal que  $f(x) \neq g(x)$ . Entonces  $(x, f(x)) \in f \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g} = (x, g(x)) \in g \upharpoonright_{\text{dom } f \cap \text{dom } g}$ ; luego,  $(x, f(x)) \in g$ ,  $(x, g(x)) \in g$  y  $f(x) \neq g(x)$ ; lo cual es absurdo pues  $g$  es función. Así,  $f$  y  $g$  son compatibles.  $\square$

**Teorema 1.** Si  $\mathcal{F}$  es un sistema de funciones compatibles, entonces  $\bigcup \mathcal{F}$  es una función con  $\text{dom } \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{\text{dom } f \mid f \in \mathcal{F}\}$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar que  $\bigcup \mathcal{F}$  es un conjunto de parejas ordenadas y que si  $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$ , entonces  $y = z$ .

Observemos que si  $z \in \bigcup \mathcal{F}$ , entonces existe  $f \in \bigcup \mathcal{F}$  tal que  $z \in f$ ; luego, como  $f$  es una función, tenemos que  $z$  es una pareja ordenada. De aquí que  $\bigcup \mathcal{F}$  es un conjunto de parejas ordenadas.

Ahora veamos que si  $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$ , entonces  $y = z$ . Sean  $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$ , entonces existen  $f, g \in \mathcal{F}$  tales que  $(x, y) \in f$  y  $(x, z) \in g$ . Dado que  $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ , tenemos que  $y = z$ , pues  $f$  y  $g$  son compatibles. Por lo tanto,  $\bigcup \mathcal{F}$  es función.

Resta ver que  $\text{dom } \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{\text{dom } f : f \in \mathcal{F}\}$ . Veamos:  $x \in \text{dom } \bigcup \mathcal{F}$ , si y solo si existe  $y$  tal que  $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$ , si y solo si existe  $f$  tal que  $(x, y) \in f$  si solo si  $x \in \text{dom } f$ . De aquí que  $\text{dom } \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{\text{dom } f : f \in \mathcal{F}\}$ .  $\square$

**Definición 8.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que:

1.  $f$  es *inyectiva* siempre que  $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ , se cumple que  $x_1 = x_2$ .
2.  $f$  es *sobreyectiva* (*suprayectiva*), si para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $(x, y) \in f$ .
3.  $f$  es *biyectiva* si  $f$  es *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Diremos que dos conjuntos  $X$  y  $Y$  son equipotentes, lo que denotamos  $|X| = |Y|$ , si existe una función biyectiva entre ellos. El símbolo  $|X|$  se lee “cardinalidad de  $X$ ”. Ahora, diremos que el conjunto  $Y$  tiene mayor o igual cantidad de elementos que el conjunto  $X$ , lo que denotamos  $|X| \leq |Y|$ ; si existe una función inyectiva con dominio  $X$  y rango en  $Y$ . De igual forma si  $|X| \leq |Y|$ , empero  $X$  y  $Y$  no son equipotentes, escribiremos  $|X| < |Y|$ .

Las nociones (equipotencia y mayor o igual cantidad de elementos) cumplen ciertas propiedades que son de nuestro interés, en particular si  $X$  es un conjunto, entonces  $\mathcal{P}(X)$ , tiene mayor cantidad de elementos que  $X$ ; es decir,  $X$  y  $\mathcal{P}(X)$  no son equipotentes, pues, si  $X \neq \emptyset$  y dada la función  $f$  definida por  $f(x) = \{x\}$ , es una función inyectiva de  $X$  hacia  $\mathcal{P}(X)$ . En seguida veamos que no existe una función,  $g$ , de  $X$  en  $\mathcal{P}(X)$  de tal forma que  $\text{ran}(g) = \mathcal{P}(X)$ . Para ello, sea  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  y sea  $A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$ . Aseguramos que  $A \notin \text{ran}(g)$ . Supóngase que para cierto  $x_0 \in X, g(x_0) = A$ . Así tendremos dos casos:

1.  $x_0 \in A$ . Para este primer caso, tenemos que  $x_0 \notin g(x_0)$ , por lo cual  $x_0 \notin A$ .
2.  $x_0 \notin A$ . Para este caso,  $x_0 \notin g(x_0)$ , lo que nos dice que  $x_0 \in A$ .

Ambos casos nos conducen a un absurdo. Así, no existe un  $x_0 \in X$  de tal forma que  $g(x_0) = A$ . Por tanto, no existe una función,  $g$ , tal que  $\text{ran}(g) = \mathcal{P}(X)$ . De esto concluimos que si  $(X \neq \emptyset)$ ,  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$  y que  $X$  y  $\mathcal{P}(X)$  no son equipotentes, esto es  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ .

**Definición 9.** Se dice que un conjunto  $X$  es:

1. *Finito* si existe un número natural  $n \in \mathbb{N}$ , de tal manera que  $X$  es equipotente al conjunto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .
2. *Numerable* si  $X$  es equipotente a  $\mathbb{N}$ .
3. *Infinito no numerable* si  $|\mathbb{N}| \leq |X|$  y  $X$  no es equipotente con  $\mathbb{N}$  (es decir  $|\mathbb{N}| < |X|$ ).

Así, por ejemplo, los conjuntos  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 5, 7, 9, 10\}$  son finitos. Asimismo, es posible demostrar que el conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$  y el conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$  son numerables. Mientras que el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$  y el de los números irracionales,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , son infinitos no numerables. Más aún, es posible demostrar que  $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$ . Es usual escribir  $|X| = \aleph_0$ , para decir que  $X$  es un conjunto infinito numerable y  $|X| \leq \aleph_0$  para decir que  $X$  es un conjunto numerable (es decir  $X$  finito o  $X$  infinito numerable). El símbolo  $\aleph_0$  que se lee “aleph cero” representa al primer (número) cardinal infinito (al infinito numerable). El símbolo  $\aleph_1$  (aleph uno) denota al primer cardinal infinito no numerable. Para más detalles sobre la teoría de los número cardinales, recomendamos al lector el texto [5].

Recordemos que un conjunto  $X$  se dice que es bien ordenado por la relación  $R$ , si  $R$  satisface las condiciones siguientes:

1. Cualesquiera  $x, y \in X$ , son  $R$ -comparables; *i.e.*, o bien  $(x, y) \in R$  o  $(y, x) \in R$ .
2.  $R$  es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
3. Para cualquier conjunto no vacío  $A \subseteq X$ , existe  $a_0 \in A$  tal que para todo  $a \in A$  se cumple que  $(a_0, a) \in R$ .

**Definición 10.** *Un conjunto  $\alpha$  es un número ordinal (o simplemente un ordinal) si:*

- (i)  $\alpha$  es transitivo (*i.e.*, todo elemento de  $\alpha$  es subconjunto de  $\alpha$ ),
- (ii)  $\alpha$  es bien ordenado por la relación de pertenencia restringida a  $\alpha$ , que se define por:

$$\in_\alpha = \{(a, b) : a \in \alpha, b \in \alpha \text{ y } a \in b\}.$$

Si  $\alpha$  es un ordinal, el conjunto  $\alpha \cup \{\alpha\}$ , se llama sucesor de  $\alpha$  y es denotado  $\alpha + 1$  (el sucesor de cualquier ordinal es un ordinal). Esto permite una clasificación de ordinales: Un número ordinal  $\alpha$ , es llamado ordinal sucesor si  $\alpha = \beta + 1$  para algún ordinal  $\beta$ . En otro caso  $\alpha$  es llamado ordinal límite.

Para cada par de ordinales  $\alpha, \beta$  definimos:  $\alpha < \beta$  si y solo si  $\alpha \in \beta$ . Este hecho también se escribirá como  $\beta > \alpha$ .

Se dice que dos conjuntos bien ordenados  $(X, \leq)$  y  $(Y, \preceq)$  son isomorfos, si existe una función  $f$  inyectiva con dominio  $X$  y rango  $Y$ , tal que para todo  $x, y \in X$ :

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

Observación: (i) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son números ordinales, entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfos si y solo si  $\alpha = \beta$ .

(ii) Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal. De aquí, si  $X$  es un conjunto bien ordenado, el tipo de orden de  $X$  es el único número ordinal al cual  $X$  es isomorfo.

**Definición 11.** *Un ordinal  $\alpha$ , se llama ordinal inicial si  $\alpha$  no es equipotente a cualquier  $\beta \in \alpha$  (*i.e.*, no existe una función inyectiva con dominio  $\alpha$  y rango  $\beta$ ).*

Recordemos que el *Axioma de Elección* (AE) nos dice que para toda familia no vacía  $\{X_s\}_{s \in S}$  de conjuntos no vacíos, existe una función  $f$  con dominio  $S$  y contradominio  $\bigcup_{s \in S} X_s$  tal que  $f(x) \in X_s$  para cada  $s \in S$ .

El *Axioma de Elección* (AE) implica que todo conjunto es equipotente a un ordinal inicial.

**Definición 12.** *Sea  $X$  un conjunto. El cardinal de  $X$  se define como el único ordinal inicial equipotente a  $X$ .*

Así, un número cardinal es un ordinal inicial.

Si  $\kappa$  es un cardinal, denotamos  $\kappa^+$ , al menor cardinal mayor que  $\kappa$ . Un cardinal de la forma  $\kappa^+$ , se llama cardinal sucesor. Un cardinal límite es aquel cardinal que no es sucesor. De aquí que,  $\kappa$  es un cardinal límite si para todo cardinal  $\lambda < \kappa$ ,  $\lambda^+ < \kappa$ .

En el presente trabajo (aun cuando algunas veces usamos  $\aleph_0$  y  $\aleph_1$  para el primer cardinal numerable y el primer cardinal no numerable), con  $\omega$  y  $\omega_1$  denotamos a ambos, el primer ordinal y cardinal numerable, y el primer ordinal y cardinal no numerable.

**Definición 13.** *Sea  $\lambda$  un ordinal límite. Un conjunto  $A \subseteq \lambda$  se dice acotado en  $\lambda$ , si existe  $\gamma \in \lambda$  tal que  $A \subseteq \gamma$ . En otro caso se dice que  $A$ , es no acotado en  $\lambda$ . Así,  $A$  es no acotado en  $\lambda$ , si para todo  $\beta \in \lambda$ , existe  $\alpha \in A$  tal que  $\alpha > \beta$ .*

Sea  $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$  una sucesión transfinita de ordinales de longitud  $\theta$ . Decimos que la sucesión es creciente si  $\gamma_\rho < \gamma_\beta$ , siempre que  $\rho < \beta < \theta$ .

**Definición 14.** Sea  $\theta$  un ordinal límite, y sea  $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$  una sucesión creciente de ordinales en  $\lambda$ . Decimos que la sucesión  $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ , es cofinal en  $\lambda$ , si el conjunto  $\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\}$  es no acotado en  $\lambda$ .

La cofinalidad de  $\lambda$ , denotada  $cf(\lambda)$ , es el menor ordinal límite,  $\theta$ , tal que existe una  $\theta$ -sucesión creciente la cual es cofinal en  $\lambda$ .

Es importante comentar que  $cf(\lambda)$  es un número cardinal.

**Definición 15.** Un cardinal infinito  $\kappa$  es regular si  $cf(\kappa) = \kappa$ ; en otro caso, se dice que  $\kappa$  es un cardinal singular. Así  $\kappa$  es singular si  $cf(\kappa) < \kappa$ .

Otra forma: Un cardinal infinito  $\kappa$  es llamado singular si existe una sucesión creciente  $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$  de ordinales  $\gamma_\rho < \kappa$  cuya longitud  $\theta < \kappa$  y  $\sup\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\} = \kappa$ .

**Teorema 2.** Todo cardinal sucesor e infinito es regular.

El lector interesado en profundizar sobre el tema de cardinales y ordinales puede consultar las referencias [4] o [5]; donde, además, podrá encontrar las pruebas de resultados planteados aquí sin demostración.

A continuación vamos a presentar algunos conceptos y resultados sobre topología. Para esta parte, la referencia es [2].

**Definición 16.** Un espacio topológico es un par  $(X, \tau)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una colección de subconjuntos de  $X$  que satisface:

1.  $X, \emptyset \in \tau$ .
2. Si  $\mathcal{U} \subset \tau$ , entonces  $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$ .
3. Si  $\mathcal{U} \in [\tau]^{<\omega}$ , entonces  $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$ .

Si  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  satisface las condiciones de la definición anterior, nos referiremos a ésta como topología para  $X$  y llamaremos abiertos a los elementos de  $\tau$ . También, se dice que  $A$  es un conjunto cerrado si  $X \setminus A \in \tau$ , es decir  $A$  es cerrado si y solo si  $X \setminus A$  es abierto.

Es usual decir (cuando no hay lugar a confusión), sea  $X$  un espacio topológico; en lugar de, sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Del siguiente ejemplo podemos concluir que cualquier conjunto no vacío, tiene al menos dos topologías.

**Ejemplo 3.** Sea  $X$  un conjunto, no vacío. Son topologías para  $X$ :

1.  $\tau = \{X, \emptyset\}$ , esta topología se conoce con el nombre de topología indiscreta.
2.  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , llamada topología discreta.

**Ejemplo 4.** Sea  $\tau$  la colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tales que  $U \in \tau$  si y solo si para todo  $x \in U$ , existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \in (a, b) \subseteq U$ , además del conjunto vacío. Entonces  $\tau$  es una topología en  $\mathbb{R}$ . Nos referimos a  $\tau$  como topología usual de  $\mathbb{R}$  y al par  $(\mathbb{R}, \tau)$ , espacio real.

**Ejemplo 5.** Si  $X$  es un conjunto no vacío, la colección  $\tau_c = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología para  $X$ . La colección  $\tau_c$  es llamada topología co-finita.

**Definición 17.**

Sean  $(X, \tau)$  y  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ ,  $\mathcal{B}$  es una base para  $\tau$  si para cada  $A \in \tau$  existe  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $A = \bigcup \mathcal{B}'$ .

**Definición 18.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $D \subseteq X$  y  $x \in X$ .

1. Llamamos vecindad de  $x$  a cualquier abierto  $U$  tal que  $x \in U$ .

2. La cerradura de  $D$  (en  $X$ ), denotada  $\overline{D}$  o  $cl_X(D)$  o simplemente  $cl(D)$ , es el conjunto formado por los  $x \in X$  tal que para cualquier vecindad,  $U$ , de  $x$ , se cumple que  $U \cap D \neq \emptyset$ . No es difícil verificar que para cualquier  $D \subseteq X$ ,  $X \setminus \overline{D}$  es abierto, es decir;  $\overline{D}$  es un conjunto cerrado.
3. El interior de  $D$ , denotado  $int(A)$ , es el conjunto de los  $x \in X$  tales que existe  $U \in \tau$  tal que  $x \in U \subseteq A$ .
4. Si  $\overline{D} = X$ , se dice que  $D$  es denso en  $X$ . No es difícil verificar que  $D$  es denso si y solo si para cualquier abierto no vacío  $U$ ,  $U \cap D \neq \emptyset$ .
5. Diremos que  $D$  es nada denso si  $X \setminus \overline{D}$  es denso.

**Definición 19.** Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es:

1.  $T_2$  o Hausdorff si para cualesquiera  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , existen vecindades  $U_x$  y  $U_y$  de  $x$  y  $y$ , respectivamente tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .
2. Regular, si para cada  $U$  abierto no vacío y cada  $x \in U$ , existe  $V$  vecindad de  $x$  tal que  $\overline{V} \subseteq U$ .
3. Normal, si dados dos cerrados  $C, D \subseteq X$  ajenos, existen  $U, V \in \tau$  abiertos ajenos tales que  $C \subseteq U$  y  $D \subseteq V$ .

Sean  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  familias de subconjuntos de  $X$ . Diremos que:

1.  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta para  $X$  y para cada  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $u$  es abierto, si  $\bigcup \mathcal{U} = X$ .
2.  $\mathcal{V}$  es subcubierta, si  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  y  $\bigcup \mathcal{V} = X$ .

Ahora recordamos algunas nociones que se definen vía cubiertas abiertas.

**Definición 20.** Un espacio topológico,  $X$ , es:

1. Compacto si toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta finita.
2. Separable si existe un subconjunto denso numerable de  $X$ .
3. Hereditariamente separable si cada subconjunto  $Y$  de  $X$  es separable.
4. Lindelöf, si toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta numerable.
5. Es hereditariamente Lindelöf si todo subespacio de  $X$  es de Lindelöf.

Una familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de un conjunto dado  $X$  tiene la propiedad de intersección finita si, dado  $J \subseteq I$  finito,  $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ .

La noción anterior permite hacer una clasificación de la noción de compacidad.

**Teorema 3.** Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, son equivalentes:

1.  $(X, \tau)$  es compacto.
2. Si  $\{F_i\}_I$  es una familia de cerrados de  $(X, \tau)$  con la propiedad de intersección finita entonces  $\bigcap_I F_i \neq \emptyset$ .

Además, todo espacio Hausdorff y compacto es regular.

**Definición 21.** Una colección  $\mathcal{U}$ , de subconjuntos abiertos, no vacíos, del espacio topológico  $X$  se dice celular, si para cualesquiera  $U, V \in \mathcal{U}$  con  $U \neq V$ , ocurre que  $U \cap V = \emptyset$ . Por  $c(X) = \aleph_0$ , entendemos que toda familia celular en  $X$  es numerable.



## Capítulo 2

# Axioma de Martin

### 2.1. Axioma de Martin

Para iniciar nuestra exposición sobre el axioma de Martin, vamos a establecer algunos preliminares.

**Definición 22.** Diremos que una pareja  $\langle \mathbb{P}, R \rangle$  es:

- (a) Un conjunto preordenado si  $\mathbb{P}$  es un conjunto no vacío y  $R$  es una relación en  $\mathbb{P}$  que es reflexiva y transitiva. Usualmente a la relación  $R$  se le llama preorden (de  $\mathbb{P}$ ).
- (b) Un conjunto parcialmente ordenado (en el sentido estricto o usual) si la relación  $R$  es un preorden y satisface ser antisimétrica. Es usual referirse a  $R$  como orden parcial (de  $\mathbb{P}$ ).

Generalmente, cuando no existe lugar a confusiones, diremos simplemente sea  $\mathbb{P}$  un preorden o un orden parcial, en lugar de sea  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$  un preorden o (respectivamente) un orden parcial. Dicho sea de paso, diremos simplemente orden, en lugar de orden parcial.

Es inmediato de la definición anterior que todo orden es un preorden.

El ejemplo siguiente es un preorden que no es orden.

**Ejemplo 6.** Sean  $\mathbb{P} = \{0, 1\}$  y consideremos la relación  $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Claramente, para todo  $x \in \mathbb{P}$ , tenemos que  $(x, x) \in R$ ; luego la relación es reflexiva. Para verificar que  $R$  es transitiva, tenemos tres casos:

1.  $(0, 0) \in R$  y  $(0, 1) \in R$ . Claramente  $(0, 1) \in R$ .
2.  $(0, 1) \in R$  y  $(1, 0) \in R$ . También se cumple que  $(0, 0) \in R$ .
3.  $(0, 1) \in R$  y  $(1, 1) \in R$ . Evidentemente  $(0, 1) \in R$ .

Con todo, tenemos que  $R$  es un preorden. Ahora, notemos que  $(0, 1) \in R$  y  $(1, 0) \in R$ , pero  $0 \neq 1$ . Por tanto  $R$  no es antisimétrica y por ende,  $\langle \mathbb{P}, R \rangle$  es un preorden que no es orden.

Es natural emplear el símbolo “ $\leq$ ” para denotar preórdenes u órdenes. También, entendemos que si “ $\leq$ ” es un preorden (orden) en  $\mathbb{P}$  y  $p, q \in \mathbb{P}$ , entonces la expresión  $p \leq q$  significa que  $(p, q) \in \leq$ . En lo sucesivo:

1. Si  $<$  es una relación que es transitiva y no reflexiva en  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ , entonces la relación en  $\mathbb{P}$  definida como:  $p \leq q$  si  $p < q$  o  $p = q$ , es un orden en  $\mathbb{P}$ .

2. Si  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$  es un preorden en  $\mathbb{P}$ , y  $p \leq q$ , diremos que “ $p$  extiende a  $q$ ”. Además, a los elementos de  $\mathbb{P}$  les llamaremos condiciones.

Al hablar de órdenes o conjuntos parcialmente ordenados, naturalmente uno trae a la mente la relación de orden “ $\leq$ ” del conjunto,  $\mathbb{R}$ , de los números reales. Claramente esta relación es un preorden y se hereda en otros subconjuntos de éste, como por ejemplo al conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ ; al de los enteros,  $\mathbb{Z}$ ; al de los racionales,  $\mathbb{Q}$  y otros que se nos puedan ocurrir.

Veamos otros ejemplos.

**Ejemplo 7.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Considere  $\mathbb{P} = X$ . Trivialmente la relación “ $\leq$ ” =  $X \times X$  es un orden parcial (en el sentido estricto).

**Ejemplo 8.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Considere  $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X)$ . Para  $p, q \in \mathbb{P}$ , definimos  $p \leq q$  si y solo si  $p \subseteq q$ . Entonces  $\mathbb{P}$  es un orden parcial (en el sentido estricto).

El siguiente ejemplo es típico y muy empleado en la teoría de “forcing”, vea [8].

**Ejemplo 9.** Sean  $I$  y  $J$  conjuntos arbitrarios. Denotamos  $F_n(I, J)$ , al conjunto de todas las funciones  $p$  tales que:

- $\text{dom}(p) \in [I]^{<\omega}$ ; es decir,  $\text{dom}(p) \subseteq I$  y además,  $\text{dom}(p)$  es un conjunto finito.
- $\text{rang}(p) \subseteq J$ .

Definimos, para cualesquiera  $p, q \in F_n(I, J)$ ,  $p \leq q$  si  $q \subseteq p$ .

Observemos que “ $\leq$ ” es un orden parcial en  $F_n(I, J)$ . En efecto, si  $p \in F_n(I, J)$ , trivialmente tenemos que  $p \subseteq p$ ; así que  $p \leq p$ .

Ahora, si  $p, q$  y  $r$  son elementos de  $F_n(I, J)$  tales que  $p \leq q$  y  $q \leq r$ , entonces  $r \subseteq q$  y  $q \subseteq p$ ; luego  $r \subseteq p$ ; de donde  $p \leq r$ . Finalmente, si  $p, q \in \mathbb{P}$  son tales que  $p \leq q$  y  $q \leq p$ , entonces  $q \subseteq p$  y  $p \subseteq q$ ; luego,  $p = q$ . Por tanto “ $\leq$ ” es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica en  $F_n(I, J)$ .

Es importante comentar que la mayoría de los órdenes parciales que usaremos en este trabajo serán órdenes parciales en el sentido estricto. Sin embargo, eventualmente será útil haber desarrollado la teoría empleando preórdenes en lugar de órdenes parciales, y que la generalidad adicional no nos causará ningún trabajo adicional aquí.

**Definición 23.** Sea  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$  un preorden.

1. Una cadena en  $\mathbb{P}$  es un conjunto  $C \subseteq \mathbb{P}$  con la propiedad de que cualesquiera dos de sus elementos son comparables, respecto a la relación “ $\leq$ ”; i.e., para cualesquiera  $p, q \in C$  se cumple que  $p \leq q$  o bien  $q \leq p$ .
2. Diremos que  $p, q \in \mathbb{P}$ , son:
  - a) Compatibles si existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .
  - b) Incompatibles, lo que denotamos  $p \perp q$ , si no son compatibles; es decir, si no existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .
3. Una anticadena en  $\mathbb{P}$  es un subconjunto  $A \subseteq \mathbb{P}$  tal que para cualesquiera  $p, q \in A$  tales que  $p \neq q$  se cumple que  $p \perp q$ .
4.  $\mathbb{P}$  tiene la propiedad de la cadena contable CCC si toda anticadena en  $\mathbb{P}$  es numerable.

Los ejemplos siguientes se presentan con la finalidad de familiarizarnos con los conceptos previos. Recordemos que un orden parcial “ $\leq$ ”, en  $\mathbb{P}$  es un orden total, si para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$  se cumple que  $p \leq q$  o bien  $q \leq p$ .

**Ejemplo 10.** Consideremos al orden parcial  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ ; donde  $\mathbb{P}$  es el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ , y " $\leq$ " el orden usual de  $\mathbb{R}$ .

- Puesto que, " $\leq$ ", es un orden total en  $\mathbb{R}$ , tenemos que cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}$  es una cadena. En particular, el conjunto,  $\mathbb{N}$ , de los números naturales es una cadena en  $\mathbb{R}$ .
- Veamos que en  $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$  cualesquiera dos elementos son compatibles. Sea  $p, q \in \mathbb{R}$ , pongamos  $r = \min\{p, q\}$ . Claramente  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \leq p$ ,  $r \leq q$ ; es decir,  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , por lo cual  $p$  y  $q$  son compatibles en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 11.** Sean  $A$  un conjunto con más de dos elementos,  $\mathbb{P}_1 = \mathcal{P}(A)$  y  $\mathbb{P}_2 = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ . Ahora, para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}_i$ ,  $i = 1, 2$ , definimos  $p \leq q$  si  $p \subseteq q$ .

- Notemos que para cualesquiera  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{P}_1$ , se cumple que  $p$  y  $q$  son compatibles en  $\mathbb{P}_1$ , pues  $\emptyset \leq p$ ,  $\emptyset \leq q$  y  $\emptyset \in \mathbb{P}_1$ .
- Ahora sean  $p, q \in \mathbb{P}_2$ . Supongamos, además, que  $p$  y  $q$  son compatibles, entonces existe  $r \in \mathbb{P}_2$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , entonces (por definición)  $r \subseteq p \cap q$ . De donde,  $p \cap q \neq \emptyset$ . De aquí que si  $p, q$  son compatibles en  $\langle \mathbb{P}_2, \leq \rangle$ , entonces  $p \cap q \neq \emptyset$ . Recíprocamente, si  $p, q \in \mathbb{P}_2$  son tales que  $p \cap q \neq \emptyset$ , entonces  $p$  y  $q$  son compatibles, pues  $r = p \cap q$  satisface que  $r \in \mathbb{P}_2$ ,  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . En resumen,  $p, q \in \mathbb{P}_2$  son compatibles en  $\langle \mathbb{P}_2, \leq \rangle$  si y solo si  $p \cap q \neq \emptyset$ .
- Como  $A$  tiene más de dos elementos, tomemos  $x, y \in A$ , tales que  $x \neq y$ . Claramente el conjunto  $C = \{\{x\}, \{y\}\}$  no es una anticadena en  $\mathbb{P}_1$ , pero sí es anticadena en  $\mathbb{P}_2$ .

Observemos que si  $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$  es un orden total y  $A \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $|A| \geq 2$ ; se tiene que si  $p, q \in A$ , entonces son compatibles, ya que son comparables. Por lo tanto cualquier anticadena en  $\mathbb{P}$  tiene a lo más un elemento, es decir,  $\mathbb{P}$  tiene la CCC.

Ahora veremos un ejemplo más complejo.

**Ejemplo 12.** Sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ . Consideremos el conjunto  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}} = \{(s, F) : s \in [\omega]^{<\omega} \text{ y } F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$  y definamos la relación siguiente:

$(t, E) \leq (s, F)$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a)  $s \subseteq t$ .
- (b)  $F \subseteq E$ .
- (c) Para cualquier  $x \in F$  tenemos que  $x \cap t \subseteq s$ .

A continuación mostraremos que relación anterior es un preorden.

1. Sabemos que un conjunto siempre está contenido en si mismo, entonces tenemos que  $s \subseteq s$ ,  $F \subseteq F$  y usando la definición del ejemplo, entonces tenemos que  $s = s$  y  $F = F$ , por lo cual se cumple que  $(s, F) \leq (s, F)$ . Es decir, la relación es reflexiva.
2. Ahora sean  $(t, E) \leq (s, F)$  y  $(s, F) \leq (u, H)$ , veamos que  $(t, E) \leq (u, H)$ . Por hipótesis se cumple que  $s \subseteq t$ ,  $F \subseteq E$  y para cualquier  $x \in F : x \cap t \subseteq s$ ; también  $u \subseteq s$ ,  $H \subseteq F$  y para cualquier  $x \in H : x \cap t \subseteq u$ , es claro que  $u \subseteq t$  y  $H \subseteq E$ , resta ver que se satisface (c), es decir, que para cualquier  $x$  en  $H : x \cap t \subseteq u$ . Se sabe que para cualquier  $x \in F : x \cap t \subseteq s$  y para cualquier  $x \in H : x \cap s \subseteq u$ . Sea  $x_0 \in H$ , entonces  $x_0 \in E$  tal que  $x_0 \cap t \subseteq s$ , por lo cual  $x_0 \cap t \subseteq s \cap x_0$  y como  $s \cap x_0 \subseteq u$ , entonces tenemos que  $x_0 \cap t \subseteq u$ , y dado que el  $x_0$  fue arbitrario, se sigue lo deseado.
3. Como el orden de la contención ( $\subseteq$ ) es un orden parcial, entonces de la definición anterior se sigue que  $(t, E) \leq (s, F)$  y  $(s, F) \leq (t, E)$ , se sigue que  $t = s$  y  $E = F$ , entonces  $(t, E) = (s, F)$ . Es decir la relación que definimos es un orden parcial (en el sentido estricto).

El siguiente resultado caracteriza la compatibilidad en el orden  $\mathbb{P}_A$ .

**Lema 2.** *En  $\mathbb{P}_A$ ,  $(s_1, F_1)$ ,  $(s_2, F_2)$  son compatibles si y solo si para cualquier  $x$  en  $F_1 : x \cap s_2 \subseteq s_1$  y para cualquier  $x$  en  $F_2 : x \cap s_1 \subseteq s_2$ .*

*Demostración.*  $[\Rightarrow]$  Supongamos que  $(s_1, F_1)$ ,  $(s_2, F_2)$  son compatibles, entonces existe  $(r, F) \in \mathbb{P}_A$  tal que  $(r, F) \leq (s_1, F_1)$ ,  $(r, F) \leq (s_2, F_2)$ , entonces  $s_1 \subseteq r$ ,  $F_1 \subseteq F$  y para cualquier  $x$  en  $F_1 : x \cap r \subseteq s_1$ ; también  $s_2 \subseteq r$ ,  $F_2 \subseteq F$  y para cualquier  $x$  en  $F_2 : x \cap r \subseteq s_2$ . Observe que  $s_1 \cup s_2 \subseteq r$  y  $F_1 \cup F_2 \subseteq F$ , así  $s_1 \cup s_2 \subseteq r$ , entonces  $x \cap (s_1 \cup s_2) \subseteq x \cap r$ , así  $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq x \cap r$ , por lo cual:

1. Como  $x \cap s_2 \subseteq (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2)$  y  $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq x \cap r$ , en consecuencia para cualquier  $x \in F_1 : x \cap s_2 \subseteq s_1$ .
2. Como  $x \cap s_1 \subseteq (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2)$  y  $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq x \cap r$ , por consiguiente para cualquier  $x \in F_2 : x \cap s_1 \subseteq s_2$ .

Por tanto del caso 1 y 2, se cumple lo deseado.

$[\Leftarrow]$  Supongamos que para cualquier  $x$  en  $F_1$ ,  $x \cap s_2 \subseteq s_1$  y para todo  $x$  en  $F_2$ ,  $x \cap s_1 \subseteq s_2$ . Sea  $(r, F) := (s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2)$ .

Afirmación. Se cumple que  $(r, F) \leq (s_1, F_1)$  y  $(r, F) \leq (s_2, F_2)$ .

Notemos que  $s_1 \subseteq s_1 \cup s_2 = r$  y  $s_2 \subseteq s_1 \cup s_2 = r$ ,  $F_1 \subseteq F_1 \cup F_2 = F$  y  $F_2 \subseteq F_1 \cup F_2 = F$ , y  $x \cap (s_1 \cup s_2) = (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2)$ .

1. Debido a que, para toda  $x$  en  $F_1$  tenemos que  $x \cap s_2 \subseteq s_1$  y dado  $(s_1, F_1) \leq (s_1, F_1)$  (es decir; para cualquier  $x$  en  $F_1 : x \cap s_1 \subseteq s_1$ ), entonces para cualquier  $x$  en  $F_1$  tenemos que  $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq s_1$ , de manera que para cualquier  $x$  en  $F_1 : x \cap r \subseteq s_1$ .
2. En vista de que si para cualquier  $x$  en  $F_2$  tenemos que  $x \cap s_1 \subseteq s_2$  y como  $(s_2, F_2) \leq (s_2, F_2)$  (es decir; para cualquier  $x$  en  $F_2 : x \cap s_2 \subseteq s_2$ ), entonces para cualquier  $x$  en  $F_2$  obtenemos que  $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq s_2$ , en consecuencia para todo  $x$  en  $F_2 : x \cap r \subseteq s_2$ .

Del caso 1 y 2, concluimos la implicación deseada. Quedando así demostrado el Lema.  $\square$

Una consecuencia inmediata del Lema 2, es el siguiente enunciado.

**Corolario 1.** *En  $\mathbb{P}_A$ ,  $(s_1, F_1)$ ,  $(s_2, F_2)$  son incompatibles si y solo si existe un  $x$  en  $F_1 : x \cap s_2 \not\subseteq s_1$  o existe un  $x$  en  $F_2 : x \cap s_1 \not\subseteq s_2$ .*

Otra de las nociones empleadas en la definición del Axioma de Martin es la de filtro, la cual presentamos en la siguiente definición.

**Definición 24.** *Si  $\mathbb{P}$  es un conjunto preordenado. Diremos que  $G \subseteq \mathbb{P}$  es un filtro (en  $\mathbb{P}$ ) si cumple las condiciones siguientes:*

1.  $G \neq \emptyset$
2. Para todo  $p \in G$  y cualquier  $q \in \mathbb{P}$ , si  $p \leq q$ , entonces  $q \in G$ .
3. Para cualesquiera  $p, q \in G$  : Existe  $r \in G$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$  (es decir,  $p$  y  $q$  son compatibles).

Como veremos a continuación la noción de filtro en un conjunto es un caso particular de la noción que acabamos de ver. Recordemos que:

Un filtro en un conjunto no vacío  $X$ , es una colección  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  tales que

- (i)  $X \in \mathcal{F}$  y  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ,
- (ii) Si  $A \in \mathcal{F}$  y  $B \in \mathcal{F}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ,
- (iii) Si  $A, B \subseteq X$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , y  $A \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathcal{F}$ .

Si  $\mathcal{F}$  es un filtro en  $X$ , diremos que  $\mathcal{F}$  es un  $c$ -filtro. Un par de  $c$ -filtros típicos son los siguientes:

Sea  $X$  un conjunto infinito.

- Sea  $X_0$  un subconjunto no vacío de  $X$ , arbitrario. Entonces  $F = \{A \subseteq X : X_0 \subseteq A\}$  es un  $c$ -filtro. Este es conocido como filtro principal.
- (El filtro de Fréchet). El conjunto  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ finito}\}$  es llamado el filtro de Fréchet en  $X$ . Claramente el filtro de Fréchet no es principal.

**Ejemplo 13.** Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Definamos  $p \leq q$  si  $p \subseteq q$ , para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$ . Notemos que  $\mathcal{F}$  es un filtro en  $X$  si y solo si  $\mathcal{F}$  es un filtro en  $(\mathbb{P}, \leq)$ .

En efecto, supongamos que  $\mathcal{F}$  es un filtro en el conjunto  $X$ . Dado que para todo  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F \neq \emptyset$  (vea (i)), tenemos que  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ . Ahora, si  $p \in \mathcal{F}$  y  $q \in \mathbb{P}$  y  $p \leq q$ , entonces (por la definición de  $\leq$ )  $p \subseteq q$ ; luego, por (iii), tenemos que  $q \in \mathcal{F}$ . Finalmente, si  $p, q \in \mathcal{F}$ , entonces por (ii), tenemos que  $p \cap q \in \mathcal{F}$ ; luego, si tomamos a  $r = p \cap q$ , tenemos que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .

Con todo, concluimos que  $\mathcal{F}$  es un filtro en  $\mathbb{P}$ .

Ahora supongamos que  $\mathcal{F}$  es filtro en  $\mathbb{P}$  y veamos que  $\mathcal{F}$  es  $c$ -filtro. Dado que por definición  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ , tenemos que para cualquier  $p \in \mathcal{F}$ ,  $p \neq \emptyset$ . Puesto que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  por 1. de la Definición 24, entonces  $\mathcal{F}$  tiene al menos un elemento, digamos  $p \in \mathcal{F}$ . Luego,  $p \subseteq X \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} = \mathbb{P}$ , lo cual implica que  $X \leq p$ , entonces  $X \in \mathcal{F}$ .

Notemos que si  $p, q \in \mathcal{F}$ , por 3. de la Definición 24, tenemos que existe  $r \in \mathcal{F}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ ; lo cual implica que  $r \leq p'$ ; donde  $p' = p \cap q$ . Claramente  $p' \in \mathbb{P}$ ; así que por 2. de la Definición 24, tenemos que  $p' \in \mathcal{F}$ .

Finalmente, supongamos que  $p \in \mathcal{F}$  y que  $q \subseteq X$ , es tal que  $q \neq \emptyset$  y  $p \subseteq q$ . Entonces  $p \leq q$ ; de modo que por 2 de la Definición 24, tenemos que  $q \in \mathcal{F}$ .

Por tanto,  $\mathcal{F}$  es un  $c$ -filtro.

La última noción que necesitamos para poder establecer el Axioma de Martin, se presenta en la definición siguiente.

**Definición 25.** Sean  $\mathbb{P}$  un conjunto preordenado y  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}$ . Diremos que  $\mathcal{D}$  es denso en  $\mathbb{P}$ , si para todo  $p \in \mathbb{P}$ , existe  $d \in \mathcal{D}$  tal que  $d \leq p$ .

En adelante si no hay lugar a confusión, diremos simplemente  $\mathcal{D}$  es denso, en lugar de  $\mathcal{D}$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Es evidente de la definición anterior que si  $\mathbb{P}$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces  $\mathcal{D}$  es un conjunto denso en  $\mathbb{P}$ .

**Ejemplo 14.** De la definición anterior tenemos que  $\mathbb{Q}$ , el conjunto de los números racionales es denso en  $\mathbb{R}$ . Sea  $p \in \mathbb{R}$ , y sabemos que para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $-|x| \leq x \leq |x|$ , entonces tenemos que  $-|p| \leq p$  y por la densidad de los números racionales en los reales, existe un  $d$  en los racionales tal que  $-|p| \leq d \leq p$ , entonces tenemos que  $d \leq p$ . Por lo cual los números racionales son densos en los números reales.

Ahora estamos en posibilidad de enunciar el Axioma de Martin.

**Definición 26.** Si  $\kappa$  es un cardinal infinito.

1.  $AM(\kappa)$  es el enunciado: Para cualquier conjunto preordenado  $\mathbb{P}$ , no vacío que cumple la condición de cadena numerable se verifica que si  $\mathcal{D}$  es una familia de conjuntos densos en  $\mathbb{P}$  tal que  $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ , entonces existe un filtro  $G$  en  $\mathbb{P}$  tal que  $G \cap D \neq \emptyset$ , para todo  $D \in \mathcal{D}$ .
2.  $AM$  es el enunciado: Para cualquier cardinal  $\kappa < 2^\omega$ , se verifica  $AM(\kappa)$ .

Una inquietud a raíz de la definición anterior es: ¿Qué relación guardan  $AM(\kappa)$  y  $AM(\lambda)$ , para  $\kappa$  y  $\lambda$  dos cardinales infinitos? La respuesta se presenta en la siguiente.

**Proposición 1.** Si  $\kappa \leq \mu$  son cardinales infinitos, entonces  $AM(\mu)$  implica  $AM(\kappa)$ .

*Demostración.* Sean  $\mathbb{P}$  un conjunto parcialmente ordenado que cumple la CCC y sea  $\mathcal{D}$  una familia de conjuntos densos en  $\mathbb{P}$  tal que  $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ . Claramente  $|\mathcal{D}| \leq \mu$ ; luego, existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico,  $G$ , en  $\mathbb{P}$ . Por tanto  $AM(\kappa)$  se cumple.  $\square$

Otra interrogante natural es: ¿Por qué en la Definición 26, se pide que los cardinales sean menores que  $2^\omega$ ? La razón es la siguiente:

**Teorema 4.**  $AM(2^\omega)$  es falso.

*Demostración.* Supongamos que se cumple que  $AM(2^\omega)$ . Considere

$$\mathbb{P} = \{p : p \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\}, p \text{ es finito y } p \text{ es función}\}.$$

Definamos, para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p \leq q$  si y solo si  $q \subseteq p$ .

Afirmación 1. Para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p$  y  $q$  son compatibles si y solo si  $p|_{dom\ p \cap dom\ q} = q|_{dom\ p \cap dom\ q}$ . En efecto, supongamos que  $p$  y  $q$  son compatibles y que  $p|_{dom\ p \cap dom\ q} \neq q|_{dom\ p \cap dom\ q}$ . Entonces existen  $x \in dom(p) \cap dom(q)$  y  $y_1, y_2$ , con  $y_1 \neq y_2$  tales que  $(x, y_1) \in p$  y  $(x, y_2) \in q$ . Ahora bien, por hipótesis  $p$  y  $q$  son compatibles; luego, existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . Entonces,  $(x, y_1) \in r$  y  $(x, y_2) \in r$  (pues  $p \subseteq r$  y  $q \subseteq r$ ), en contradicción con el hecho de que  $r$  es función. Por lo tanto  $p|_{dom\ p \cap dom\ q} = q|_{dom\ p \cap dom\ q}$ .

Supongamos, ahora, que  $p, q \in \mathbb{P}$ , son tales que  $p|_{dom\ p \cap dom\ q} = q|_{dom\ p \cap dom\ q}$ . Por el Lema 1, tenemos que  $r = p \cup q$  es una función. Es claro que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ ; luego,  $p$  y  $q$  son compatibles. Lo que concluye la prueba de la Afirmación 1.

Dado que  $\mathbb{P}$  es numerable, tenemos que  $\mathbb{P}$  tiene la CCC (pues las anticadenas son subconjuntos de  $\mathbb{P}$ ).

Ahora para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hacemos  $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$ . Observemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n \subseteq \mathbb{P}$ .

Afirmación 2. Para cualquier  $n \in \mathbb{N} : D_n \neq \emptyset$ . En efecto, fijemos  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $p = \{(1, 0), \dots, (n_0, 0)\}$ . Claramente  $p \in D_{n_0}$ . La Afirmación 2 queda demostrada.

Afirmación 3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  es denso. En efecto, fijemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  y tomemos  $q \in \mathbb{P}$ .

1. Si  $n_0 \in dom(q)$ , entonces  $q \in D_{n_0}$ . Así que tomando  $p = q$ , obtenemos que  $p \in D_{n_0}$  y  $p \leq q$ .
2. Si  $n_0 \notin dom(q)$ , hacemos  $p = q \cup \{(n_0, 0)\}$ , Veamos que  $p = q \cup \{(n_0, 0)\}$  es función. Sean  $(x, y), (x, z) \in q \cup \{(n_0, 0)\}$ . Tenemos los siguientes casos:
  - a)  $(x, y), (x, z) \in q$ . Como  $q$  es función entonces  $y = z$ .
  - b)  $(x, y), (x, z) \in \{(n_0, 0)\}$  entonces  $x = n_0, y = 0, z = 0$ , así  $y = z$ .
  - c)  $(x, y) \in q$  y  $(x, z) = (n_0, 0)$  o bien  $(x, y) \in q$  y  $(x, z) = (n_0, 0)$  Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(x, y) \in q$  y  $(x, z) \in \{(n_0, 0)\}$ , entonces tenemos que  $x \in dom(q)$ ,  $x = n_0$  y  $z = 0$ , entonces  $n_0 \in dom(q)$ , pero sabemos que  $n_0 \notin dom(q)$ ; lo cual es una contradicción. El otro caso es similar.

Por tanto, de los tres casos se concluye que  $p$  es función. Además, dado que  $n_0 \in \text{dom}(p)$ , tenemos que  $p \in D_{n_0}$  y, por definición,  $p \leq q$ .

Por lo cual, tenemos que  $D_{n_0}$  es denso.

Ahora, para cada función  $h$  con dominio  $\mathbb{N}$  y rango contenido en  $\{0, 1\}$  (i.e.,  $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ). Un ejemplo de este tipo de funciones es la función constante 1; es decir, la función  $h(n) = 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $D_h = \{p \in \mathbb{P} : \text{existe } n \in \text{dom}(p) \text{ tal que } p(n) \neq h(n)\}$ .

Afirmación 4. Para cada función,  $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $D_h$  es distinto del vacío. En efecto, sea  $q$  la función  $q = \{(1, 1 - h(1))\}$ . Claramente  $h(1) \neq q(1)$ ; luego,  $q \in D_h$ . Por tanto  $D_h \neq \emptyset$ .

Afirmación 5. Para cada función  $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $D_h$  es denso. En efecto, fijemos una función  $h_0 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ . y sea  $q \in \mathbb{P}$ . Tenemos dos casos:

1.  $q \in D_h$ . En este caso,  $p = q$  satisface lo deseado.
2.  $q \notin D_h$ . Sea  $m = \max(\text{dom}(q))$  y definamos  $p = q \cup \{(m+1, 1 - h(m+1))\}$ . Entonces,  $p \in \mathbb{P}$ ,  $q \subseteq p$  y dado que  $p(m+1) \neq h(m+1)$ , tenemos que  $p \in D_{h_0}$  y  $p \leq q$ .

Con todo, la Afirmación 5, queda demostrada.

Finalmente consideremos  $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{D_h : h \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}\}$ , donde  ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ , denota al conjunto de funciones cuyo dominio es  $\mathbb{N}$  y cuyo rango está contenido en el conjunto  $\{0, 1\}$ . Dado que  $|{}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}| = 2^\omega$ , tenemos que  $\mathcal{D}$  es una familia de a lo más  $2^\omega$  conjuntos densos en  $\mathbb{P}$ . Luego, como se cumple  $\text{AM}(2^\omega)$ , existe un filtro  $\mathcal{G}$ -genérico,  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ , es decir para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{G} \cap D \neq \emptyset$ .

Como  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}$ , entonces los elementos de  $\mathcal{G}$  son compatibles dos a dos; luego:

1.  $f_{\mathcal{G}} = \bigcup \mathcal{G}$ , es una función por el Lema 1.
2.  $\text{dom}(f_{\mathcal{G}}) = \mathbb{N}$ . Observemos que  $\text{dom}(f_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathbb{N}$  y se sigue de que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $p \in \mathcal{G} \cap D_n$ , entonces  $p \in D_n$ , lo cual implica que  $n \in \text{dom}(p)$  y dado que  $\text{dom}(p) \subseteq \text{dom}(f_{\mathcal{G}})$ , entonces tenemos que  $n \in \text{dom}(f_{\mathcal{G}})$  y por tanto  $\text{dom}(f_{\mathcal{G}}) = \mathbb{N}$ .
3. Claramente  $\text{ran}(f_{\mathcal{G}}) \subseteq \{0, 1\}$ .

En otras palabras,  $f_{\mathcal{G}} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .

Notemos que si  $h_0 \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ , entonces  $\mathcal{G} \cap D_{h_0} \neq \emptyset$ . Sea  $p \in \mathcal{G} \cap D_{h_0}$ , como  $p \in D_{h_0}$ , existe  $m \in \text{dom}(p)$  tal que  $p(m) \neq h_0(m)$ ; luego  $f_{\mathcal{G}}(m) \neq h_0(m)$ . Es decir,  $f_{\mathcal{G}} \neq h_0$ , pero  $h_0$  fue arbitraria, así que para toda  $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $f_{\mathcal{G}} \neq h$ . Lo cual es absurdo.

Por lo tanto, no ocurre  $\text{AM}(2^\omega)$ . □

Del Teorema anterior se puede inferir que para cardinales mayores a  $2^\omega$  el Axioma de Martin es falso.

De los resultados anteriores tenemos el corolario siguiente.

**Corolario 2.** *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1.  $\text{AM}(2^\omega)$  es falso.
2.  $\text{AM}(\kappa)$ , implica que  $\kappa < 2^\omega$ .

*Demostración.* [ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $\text{AM}(2^\omega)$  es falso. Supongamos, además, que existe un cardinal  $\kappa_0$  tal que  $\text{AM}(\kappa)$  y  $\kappa_0 \geq 2^\omega$ . Claramente  $\kappa_0 \neq 2^\omega$ ; de modo que  $2^\omega < \kappa_0$ ; luego, por la Proposición 1., tenemos que  $\text{AM}(2^\omega)$ , lo cual es una contradicción.

[ $\Leftarrow$ ] Si  $\text{AM}(2^\omega)$ , entonces por 2., tenemos que  $2^\omega < 2^\omega$ , lo cual es absurdo. □

Ya hemos visto que si  $\kappa$  y  $\mu$  son cardinales infinitos tales que  $\kappa < \mu$ , si  $\text{AM}(\mu)$ , implica  $\text{AM}(\kappa)$ . También hemos visto que los cardinales empleados para  $\text{AM}$ , deben ser menores que  $2^\omega$ . La pregunta ahora es ¿qué ocurre con  $\text{AM}(\omega)$ ? Una consecuencia del siguiente resultado es que  $\text{AM}(\omega)$  siempre se cumple.

**Proposición 2.** Sean  $\mathbb{P}$  un conjunto parcialmente ordenado y  $p \in \mathbb{P}$  arbitrario. Si  $\mathcal{D}$  es un conjunto numerable de subconjuntos densos de  $\mathbb{P}$ , entonces existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $\mathbb{P}$  tal que  $p \in \mathcal{G}$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{D}$  es numerable, podemos escribir  $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  una familia de conjuntos densos en  $\mathbb{P}$ . Como  $D_0$  es denso, existe  $p_0 \in D_0$  tal que  $p_0 \leq p$ . Dado que  $D_1$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $p_1 \in D_1$  tal que  $p_1 \leq p_0$ , también como  $D_2$  es denso en  $\mathbb{P}$  entonces existe un  $p_2 \in D_2$  de tal manera que  $p_2 \leq p_1$ , y así sucesivamente,  $\dots \leq p_n \leq \dots \leq p_2 \leq p_1 \leq p_0$ , observemos que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p_i \in D_i$ . Ahora bien, definamos  $D = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$  y  $\mathcal{G} = \{q \in \mathbb{P} : r \leq q, \text{ para algún } r \in D\}$ . Claramente  $\mathcal{G}$  es no vacío; además, notemos que 2., de la Definición 24, se cumple por construcción.

Sean  $q_1, q_2 \in \mathcal{G}$ . Entonces existen  $i_1, i_2$  tal que  $p_{i_1} \leq q_1$  y  $p_{i_2} \leq q_2$ , tomando a  $m = \max\{i_1, i_2\}$ , tenemos que  $p_m \leq q_1$  y  $p_m \leq q_2$ .

Con todo, tenemos que  $\mathcal{G}$  es un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $\mathbb{P}$  y  $p \in \mathcal{G}$ . □

**Corolario 3.**  $\text{AM}(\omega)$  es verdadero.

Es importante notar que en la demostración del teorema anterior la condición de la cadena contable no fue empleada; es decir, el resultado se verifica sin solicitar la CCC a  $\mathbb{P}$ . Entonces la interrogante natural es:

¿Si  $\mathbb{P}$  es un orden parcial y  $\mathcal{D}$  es un conjunto numerable de subconjuntos densos de  $\mathbb{P}$ , entonces existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $\mathbb{P}$ ? Además, ¿para todo  $p \in \mathbb{P}$  existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathbb{P}$  que contiene a  $p$ ?

De los comentarios anteriores es natural preguntarse si la CCC se puede remover del axioma de Martin. La respuesta a esta interrogante es negativa como veremos en el ejemplo que presentamos a continuación.

**Ejemplo 15.** Existe un preorden,  $\mathbb{P}$ , que no satisface CCC el cual contiene una familia de  $\omega_1$  subconjuntos densos,  $\mathcal{D}$ , tal que ningún filtro en  $\mathbb{P}$  es  $\mathcal{D}$ -genérico.

En efecto, sea  $\mathbb{P} = \{p : p \in F_n(\omega, \omega_1)\}$ . Si  $p, q \in \mathbb{P}$  diremos que  $p \leq q$  si y sólo si  $q \subseteq p$ . Ya sabemos que  $p, q$  son compatibles si y sólo si para toda  $x \in \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q) : p(x) = q(x)$ , y además que si  $p, q$  son compatibles si y sólo  $p \cup q$  es función, más aún  $p \cup q \leq p$  y  $p \cup q \leq q$ . Observe que  $D = \{(0, \alpha) : \alpha \in \omega_1\}$  es una familia no numerable de elementos incompatibles de  $\mathbb{P}$ , entonces  $\mathbb{P}$  no tiene la CCC. Ahora para cada  $\alpha \in \omega_1$ , definimos  $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \text{ran}(p)\}$ , veamos que para cada  $\alpha \in \omega$ ,  $D_\alpha$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Sea  $\alpha_0 \in \omega$  y  $p \in \mathbb{P}$ .

- Si  $p \in D_{\alpha_0}$ , haciendo  $p = q$  tenemos que  $q \leq p$ .
- Si  $p \notin D_{\alpha_0}$ , sea  $n_0 \in \omega$  tal que  $n_0 \notin \text{dom}(p)$  (observe que la  $n_0$  existe pues el  $\text{dom}(p)$  es finita). Tomando a  $q = p \cup \{(n_0, \alpha_0)\}$ , entonces  $q \in D_{\alpha_0}$  y  $p \subseteq q$ , así  $q \leq p$ .

Por lo tanto para cada  $\alpha \in \omega$ ,  $D_\alpha$  es denso en  $\mathbb{P}$ . También definamos para  $n \in \omega$ , el conjunto  $E_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \text{dom}(p)\}$ , nótese que por construcción  $D_n \subseteq \mathbb{P}$  y  $E_n$  es denso en  $\mathbb{P}$ , sea  $n_0 \in \omega$  y  $p \in \mathbb{P}$ .

- Si  $p \in E_{n_0}$ , haciendo  $p = q$ , tenemos que  $q \leq p$ .
- Si  $p \notin E_{n_0}$ , tomando a  $q = p \cup \{(n_0, 0)\}$ , entonces  $q \in E_{n_0}$  y  $q \leq p$ .

Ahora sea  $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$ , así  $|\mathcal{D}| = \omega_1$ ; supongamos que  $G \subseteq F_n(\omega, \omega_1)$  es un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $F_n(\omega, \omega_1)$ , pues para cada  $n \in \omega$ ,  $G \cap E_n \neq \emptyset$ , así  $f_G = \bigcup G$  es una función de  $\omega$  a  $\omega_1$ . Y para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ , la función  $f_G : \omega \rightarrow \omega_1$  es suprayectiva, lo cual contradice la definición de  $\omega_1$ .

En otras palabras hemos demostrado que la CCC no puede ser omitida en AM.

## 2.2. Equivalencias al AM

En la presente sección presentamos algunas “equivalencias” al Axioma de Martin. La razón de las comillas se deben al hecho de que son equivalencias con alguna restricción. Una de ellas, por ejemplo, restringida a algebras booleanas.

Antes de ver la primera equivalencia introducimos algunas nociones y damos un resultado de carácter auxiliar.

**Definición 27.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos tales que  $B \subseteq A$ . Diremos que:

1. Una función  $f$  es  $n$ -aria sobre  $A$ , si  $f : A^n \rightarrow A$  si  $n > 0$ , o un elemento de  $A$  si  $n = 0$ .
2. La función  $f$  es finitaria sobre  $A$ , si existe  $n \in \omega$  tal que  $f$  es una función  $n$ -aria sobre  $f$ .
3.  $B$  es cerrado bajo la función  $n$ -aria si  $f(B^n) \subseteq B$  (o bien  $f \in B$  cuando  $n = 0$ ).
4. Si  $\mathcal{F}$  es una colección de funciones  $n$ -arias sobre  $A$ , la  $\mathcal{F}$ -clausura de  $B$  es el menor conjunto  $C \subseteq A$  tal que  $B \subseteq C$  y  $C$  es cerrado bajo cada  $f \in \mathcal{F}$ .

Para la prueba del resultado siguiente, puntualizamos algunos detalles: Sean  $f$  una función finitaria sobre  $A$  y  $B \subseteq A$ :

1. Denotamos  $n_f$  al elemento de  $n \in \omega$  tal que  $f : A^n \rightarrow A$ .
2.  $f(B^{n_f}) = \{f((b_1, \dots, b_{n_f})) : (b_1, \dots, b_{n_f}) \in B^{n_f}\}$ .
3.  $|f(B^{n_f})| \leq |B^{n_f}|$ .

**Teorema 5.** Sea  $\kappa$  una cardinal infinito. Suponga que  $B \subseteq A$ ,  $|B| \leq \kappa$ , y que  $\mathcal{F}$  es un conjunto de  $\leq \kappa$  funciones finitarias sobre  $A$ . Entonces la  $\mathcal{F}$ -clausura de  $B$  tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ .

*Demostración.* Vamos a definir, recursivamente, para cada  $n \in \omega$ , un conjunto  $C_n$  como sigue:

1.  $C_0 = B$ , y
2.  $C_{n+1} = C_0 \cup \{f(C_n^{n_f}) : f \in \mathcal{F}\}$ .

Claramente, para cada  $n \in \omega$ ,  $|C_n| \leq \kappa$ ; luego,  $C = \bigcup \{C_n : n \in \omega\}$  es un conjunto tal que  $B \subseteq C$  y  $|C| \leq \kappa$ .

Sea  $f \in \mathcal{F}$ .

Por construcción tenemos que para cada  $f \in \mathcal{F}$ ,  $C$  es  $f$ -cerrado. Más aún, no es difícil verificar que si  $C'$  es un conjunto tal que  $B \subseteq C'$  y  $C'$  es  $f$ -cerrado para cada  $f \in \mathcal{F}$ , entonces  $C \subseteq C'$ . Es decir,  $C$  es la  $\mathcal{F}$ -clausura de  $B$  y  $|C| \leq \kappa$ .  $\square$

El resultado principal de la presente sección es el Teorema 6, en el cual se establecen algunas equivalencias al Axioma de Martin.

Ahora estamos en posibilidad de enunciar el Axioma de Martin.

**Definición 28.** AM. Sea  $\kappa$  un cardinal infinito.  $\text{AM}(\kappa)$ , restringido a preordenes de cardinalidad  $\leq \kappa$  es el enunciado: Para cualquier conjunto preordenado,  $\mathbb{P}$ , no vacío, con  $|\mathbb{P}| \leq \kappa$  y que cumple la CCC se verifica que si  $\mathcal{D}$  es una familia de conjuntos densos en  $\mathbb{P}$  tal que  $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ , entonces existe un filtro  $G$  en  $\mathbb{P}$  tal que  $G \cap D \neq \emptyset$ , para todo  $D \in \mathcal{D}$ .

**Lema 3.**  $\text{AM}(\kappa)$  es equivalente a  $\text{AM}(\kappa)$  restringido a preordenes de cardinalidad  $\leq \kappa$ .

*Demostración.* Es claro que  $\text{AM}(\kappa)$  implica a  $\text{AM}(\kappa)$  restringido a preordenes de cardinalidad  $\leq \kappa$ . Sean  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  un preorden que satisface la CCC y  $\mathcal{D}$  una familia de  $\leq \kappa$  subconjuntos densos de  $\mathbb{Q}$ . Es claro que si  $\mathbb{Q}$  tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ , entonces existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $\mathbb{Q}$ . Supongamos entonces que  $|\mathbb{Q}| > \kappa$ .

A continuación vamos a demostrar que existe un preorden  $\mathbb{P}$  tal que  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$  y

1.  $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ .
2. Para cada  $D \in \mathcal{D}$ ,  $D \cap \mathbb{P}$  es denso en  $\mathbb{P}$ .
3. Si  $p, q \in \mathbb{P}$ , entonces  $p$  y  $q$  son compatibles en  $\mathbb{P}$  si y solo si son compatibles en  $\mathbb{Q}$ .

Para cada  $D \in \mathcal{D}$ , definimos una función  $f_D : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  como sigue: Dado  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $(f_D(p))$  es un elemento en  $D$ , de tal manera que  $f_D(p) \leq p$ . Esto es posible debido a que cada  $D \in \mathcal{D}$  es denso en  $\mathbb{Q}$ . Lo cual concluye la definición de las funciones mencionadas.

Ahora definamos una función  $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  de la manera siguiente:

Notemos que  $\mathcal{F} = \{f_D : D \in \mathcal{D} \cup \{g\}\}$  es una familia de funciones finitarias. Ahora sea  $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{Q}$  tal que  $|\mathbb{P}'| \leq \kappa$  y denotemos  $\mathbb{P}$  a la  $\mathcal{F}$ -clausura de  $\mathbb{P}'$  bajo  $\mathcal{F}$ . Finalmente, consideremos la relación  $\leq_{\mathbb{P}} = \leq|_{\mathbb{P}}$  ( la restricción de  $\leq$  a  $\mathbb{P}$ ). De aquí que  $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$  es un preorden.

Además, por el Teorema 5,  $\mathbb{P}$  satisface 1.

Veamos que  $\mathbb{P}$  satisface 2, fijemos  $D \in \mathcal{D}$  y sea  $p \in \mathbb{P}$ . Dado que  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ , tenemos que  $p \in \mathbb{Q}$ ; luego, hemos tomado  $f_D(p) \in D$  de tal manera que  $f_D(p) \leq p$ . Ahora, dado que  $\mathbb{P}$  es cerrado bajo  $\mathcal{F}$ , tenemos que  $f_D(p) \in \mathbb{P}$ ; de aquí que  $f_D(p) \in D \cap \mathbb{P}$  y  $f_D(p) \leq p$ . Así que  $D \cap \mathbb{P}$  es denso en  $\mathbb{P}$ .

Resta probar que  $\mathbb{P}$  satisface 3. Claramente, si  $p, q \in \mathbb{P}$  son compatibles en  $\mathbb{P}$ , debido a que  $\leq_{\mathbb{P}}$  es la resticción de la relación  $\leq$  restringida a  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ , tenemos que  $p$  y  $q$  son compatibles en  $\mathbb{Q}$ . Ahora bien, si  $p, q \in \mathbb{P}$  son compatibles en  $\mathbb{Q}$ , entonces  $g(p, q) \in \mathbb{P}$  y (por construcción)  $g(p, q) \leq p$  y  $g(p, q) \leq q$ . Así que  $g(p, q) \leq_{\mathbb{P}} p$  y  $g(p, q) \leq_{\mathbb{P}} q$ .

Notemos que de la equivalencia en 3, y el hecho de que  $\mathbb{Q}$  cumple la CCC, tenemos que  $\mathbb{P}$  satisface la CCC.

Ahora bien, puesto que  $\mathbb{P}$  es preorden de cardinalidad  $\leq \kappa$  y  $\mathcal{D}' = \{D \cap \mathbb{P} : D \in \mathcal{D}\}$  es una familia de  $\leq \kappa$  densos en  $\mathbb{P}$ , por hipótesis, existe un filtro  $\mathcal{D}'$ -genérico en  $\mathbb{P}$ , digamos  $G'$ .

Consideremos  $G = \{q \in \mathbb{Q} : \text{Existe } p \in G' \text{ tal que } p \leq q\}$ . Por definición  $G$  satisface las condiciones 1 y 2, de la Definición 23. Veamos que  $G$  también cumple 3. Si  $p_1, q_1 \in G$ , entonces existen  $p, q \in G'$  tales que  $p \leq p_1$  y  $q \leq q_1$ . Claro que para  $p, q \in G'$ , existe  $r \in G' \subseteq G$  tal que  $r \leq_{\mathbb{P}} p$  y  $r \leq_{\mathbb{P}} q$ . Evidentemente  $r \leq p_1$  y  $r \leq q_1$ ; *i.e.*,  $p_1$  y  $q_1$  son compatibles (en  $\mathbb{Q}$ ); esto es,  $G$  es un filtro en  $\mathbb{Q}$ . Aún más, como para todo  $D \in \mathcal{D}$ , se cumple que  $(D \cap \mathbb{P}) \cap G' \neq \emptyset$ , tenemos que para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,  $D \cap G \neq \emptyset$ . Es decir  $G$  es un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico en  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

Para presentar la equivalencia del Axioma de Martin, relacionada con álgebras booleanas, daremos algunos preliminares.

Recordemos que un álgebra booleana es un séptuplo  $\mathcal{A} = \{A, \leq, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$  en el que  $A$  es un conjunto, la relación, " $\leq$ ", es un orden parcial,  $\vee$  y  $\wedge$  operaciones binarias en  $A$ ,  $\neg$  una operación unaria sobre  $A$  y  $0, 1 \in A$  tales que:

1. Para cualquier  $x \in A$ ,  $x \vee x = x$  y  $x \wedge x = x$ .
2. Para cualesquiera  $x, y \in A$ ,  $x \vee y = y \vee x$  y  $x \wedge y = y \wedge x$ .
3. Para cualesquiera  $x, y, z \in A$ ,  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  y  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ .
4. Para cualesquiera  $x, y \in A$ ,  $x \vee (x \wedge y) = x$  y  $x \wedge (x \vee y) = x$ .
5. Para cualesquiera  $x, y, z \in A$ ,  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  y  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ .
6. Para cualquier  $x \in A$ ,  $x \wedge \neg x = 0$  y  $x \vee \neg x = 1$ .
7. Para cualquier  $x \in A$ ,  $x \wedge 0 = 0$  y  $x \vee 1 = 1$ .

Nota. Es importante comentar que algunos autores no involucran la noción de orden parcial en la definición de algebra booleana; sin embargo, siempre es posible introducir un orden parcial, como veremos a continuación:

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \vee y = y$$

o equivalentemente

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \wedge y = x.$$

**Ejemplo 16.** Sea  $X$  un conjunto no vacío y consideremos  $A = \mathcal{P}(X)$  (el conjunto potencia de  $X$ ),  $0 = \emptyset$  y  $1 = X$ . Además, definimos, para cualesquiera  $x, y \in A$ :

1.  $x \leq y$  si  $x \subseteq y$ .
2.  $x \vee y = x \cup y$ .
3.  $x \wedge y = x \cap y$ .
4.  $\neg x = X \setminus x$ .

Claramente de la definición anterior 1., 2., 3. y 5. se siguen de las propiedades que satisfacen los conjuntos, por lo cual resta ver que se cumple 4., 6. y 7.

Comencemos viendo que 4. se satisface. Sea  $x, y \in \mathcal{P}(X)$  y observe  $x \vee (x \wedge y) = x \cup (x \cap y) = (x \cup x) \cap (x \cup y) = x \cap (x \cup y)$ , así sea  $x_0 \in x \vee (x \wedge y)$  si y solo si  $x_0 \in X$  y  $x_0 \in x \cup y$ , siempre y cuando  $x_0 \in x$ . Por lo tanto  $x \vee (x \wedge y) = x$ . Ahora bien  $x \wedge (x \vee y) = x \cap (x \cup y) = (x \cap x) \cup (x \cap y) = x \cup (x \cap y)$ , sea  $x_0 \in x \wedge (x \vee y)$ , siempre que  $x_0 \in x \cup (x \cap y)$ , es decir,  $x_0 \in x$ . Por lo tanto  $x \wedge (x \vee y) = x$ .

Veamos que se cumple 6. de la definición anterior. Sea  $x \in \mathcal{P}(X)$ .  $x \wedge \neg x = x \cap (X \setminus x) = x \cap (X \cap x^C) = (x \cap x^C) \cap X = \emptyset \cap X = \emptyset = 0$ . Ahora  $x \wedge \neg x = x \cup (X \setminus x) = x \cup (X \cap x^C) = (x \cup X) \cap (x \cup x^C) = X \cap X = X = 1$ . Quedando verificado así 6.

Por último veamos que se cumple 7. Sea  $x \in \mathcal{P}(x)$ ,  $x \wedge 0 = x \cap \emptyset = \emptyset = 0$  y  $x \vee 1 = x \cup X = X = 1$ . Por lo cual se concluye 7.

Por lo tanto  $\{\mathcal{P}(X), \leq, \cup, \cap, \neg, \emptyset, X\}$  es un álgebra booleana.

**Definición 29.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $U \subseteq X$ . Diremos que  $U$  es cerrabierto si  $U$  es abierto y cerrado en  $X$ ; es decir, si  $\text{int}_X(U) = U = \text{cl}_X(U)$ .

Dado un espacio topológico  $X$ , denotaremos  $\text{clop}(X)$  a la colección de todos los subconjuntos cerrabiertos de  $X$ . Definimos, para cualesquiera  $x, y \in \text{clop}(X)$ :

1.  $x \leq y$  si  $x \subseteq y$ .

2.  $x \vee y = x \cup y$ .
3.  $x \wedge y = x \cap y$ .
4.  $\neg x = X \setminus x$ .

**Proposición 3.** *Si  $X$  es un espacio topológico, entonces  $\{clop(X), \leq, \cup, \cap, \neg, \emptyset, X\}$  es un álgebra booleana.*

*Demostración.* Veamos que en efecto el conjunto de clopens es un álgebra booleana. Sean  $A, B, C \in clop(X)$ .

1. Comencemos verificando que se cumple el primer axioma;  $A \vee A = A \cup A = A$  y  $A \wedge A = A \cap A = A$ , por lo cual si se cumple el primer axioma.
2. Continuemos con el segundo axioma;  $A \vee B = A \cup B = B \cup A = B \vee A$  y  $A \wedge B = A \cap B = B \cap A = B \wedge A$ , con lo cual se cumple el segundo axioma.
3. Ahora verifiquemos que se cumple el tercer axioma,  $A \vee (B \vee C) = A \cup (B \vee C) = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup B) \vee C = (A \vee B) \vee C$  y  $A \wedge (B \wedge C) = A \cap (B \wedge C) = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \wedge B) \cap C = (A \wedge B) \wedge C$ , por lo que se infiere que se cumple el tercer axioma.
4. Continuemos probando el cuarto axioma; notemos que  $A \vee (A \wedge B) = A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B)$ , así sea  $a \in A \vee (A \wedge B)$  siempre y cuando  $a \in A$  y  $a \in A \cup B$ , solo si  $a \in A$ . Por lo tanto  $A \vee (A \wedge B) = A$ . De igual manera  $A \wedge (A \vee B) = A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B)$ , sea  $a \in A \wedge (A \vee B)$ , si y solo si  $a \in A \cup (A \cap B)$ , en otras palabras,  $a \in A$ . Por lo tanto  $A \wedge (A \vee B) = A$ .
5. Sigamos con el siguiente axioma;  $A \vee (B \wedge C) = A \cup (B \wedge C) = A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \wedge (A \cup C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  y  $A \wedge (B \vee C) = A \cap (B \vee C) = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \vee (A \cap C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ; así se cumple el quinto axioma.
6. Veamos que se cumple el sexto axioma;  $A \wedge \neg A = A \cap (X \setminus A) = (A \cap A^c) \cap X = \emptyset = 0$  y  $A \vee \neg A = A \cup \neg A = A \cup (X \setminus A) = X$ .
7. Finalmente probemos el séptimo axioma;  $A \wedge 0 = A \cap 0 = A \cap \emptyset = \emptyset = 0$  y  $A \vee 1 = A \cup 1 = A \cup X = X = 1$ .

Por tanto  $clop(X)$  es una álgebra booleana bajo las operaciones definidas con anterioridad. □

**Definición 30.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Llamaremos álgebra de cerrabiertos, al álgebra  $\{clop(X), \leq, \cup, \cap, \neg, \emptyset, X\}$ .*

CONVENCIÓN: Como hemos señalado, un álgebra booleana está dotada de un orden parcial; de modo que toda álgebra booleana induce un conjunto preordenado de manera natural, así que si  $\mathcal{B}$  es un álgebra booleana, denotamos  $\mathbb{B}$  al preorden inducido por el conjunto base de  $\mathcal{B}$ , sin 0 y el orden de  $\mathcal{B}$ . Por ejemplo, si  $\mathcal{B}$  es el álgebra de cerrabiertos, entonces  $\mathbb{B} = clop(X) \setminus \{\emptyset\}$  y para  $p, q \in \mathbb{B}$ ,  $p \leq q$  si  $p \subseteq q$ . Además diremos que  $clop(X)$  siempre es una álgebra booleana completa, siempre que  $\mathcal{E} \subseteq clop(X)$ , entonces  $\bigvee \mathcal{E}$  existe (y sea igual  $int(cl_X \bigcup \mathcal{E})$ ). También, si  $\mathbb{B}$  es una álgebra booleana, entonces  $\mathbb{B}$  es completa si y solo si  $clop(\mathbb{B})$  es extremadamente disconexo.

De la observación contenida en la convención previa, las nociones de compatibilidad o densidad pueden aplicarse o emplearse al trabajar con álgebras booleanas.

**Lema 4.** *Si  $\mathbb{P}$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces existe un álgebra booleana completa  $\mathcal{B}$  y un mapeo  $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$  tales que*

1.  $i(\mathbb{P})$  es denso en  $\mathcal{B} \setminus \{0\}$
2. Para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$ , si  $p \leq q$ , entonces  $i(p) \leq i(q)$ .
3. Para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p \perp q$  si y solo si  $i(p) \wedge i(q) = 0$ .
4. Si  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ , entonces  $i(D)$  es denso en  $\mathbb{B}$ .

*Demostración.* Para cada  $p \in \mathbb{P}$ , definimos  $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$ . La familia  $\mathcal{E} = \{N_p : p \in \mathbb{P}\}$  es base para una topología  $\tau$  sobre  $\mathbb{P}$ .

Consideremos ahora  $\mathcal{B} = \text{clop}(\mathbb{P})$  con la relación  $p \leq q$  si  $p \subseteq q$  (para  $p, q \in \mathcal{B}$ ). Claramente, dos elementos  $p, q \in \mathcal{B}$  son incompatibles si y solo si  $p \cap q = \emptyset$  si y solo si  $p \wedge q = 0$ .

Definamos, para cada  $p \in \mathbb{P}$   $i(p) = \text{int}(cl(N_p))$ . Sabemos que  $\mathcal{B}$  es un álgebra booleana; así que resta probar que  $i$  satisface las condiciones 1., 2. y 3.

Para 1. Sea  $U \in \mathbb{B}$ , tal que  $U \neq \emptyset$ . Como  $U \neq \emptyset$ , podemos tomar  $r \in U$ . Ahora, dado que  $U$  es abierto y  $\mathcal{E}$  es base para la topología de  $\mathbb{P}$ , tenemos que existe  $p \in \mathbb{P}$  tal que  $r \in N_p \subseteq U$ . Como  $N_p \subseteq U$ , tenemos que  $cl(N_p) \subseteq cl(U)$ ; luego,  $\text{int}(cl(N_p)) \subseteq \text{int}(cl(U)) = U$ . Así que  $i(p) = \text{int}(cl(N_p)) \subseteq U$ . De aquí que  $i(p) \leq U$ , por lo que concluimos que  $i(\mathbb{P})$  es denso en  $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ .

Para 2. Sean  $p, q \in \mathbb{P}$  y supongamos que  $p \leq q$ . Por demostrar que  $i(p) \leq i(q)$ . Como  $p \leq q$ , entonces  $p \in N_q$ ; aún más, si  $r \leq p$ , entonces  $r \leq q$ ; de donde,  $r \in N_q$ . Así que  $p \leq q$ , implica que  $N_p \subseteq N_q$ . Por tanto  $i(p) \leq i(q)$ .

Para 3. ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que no, es decir, supongamos que existen  $p, q \in \mathbb{P}$  tales que  $p \perp q$  y  $i(p) \wedge i(q) \neq 0$ . Entonces  $i(p) \cap i(q) \neq \emptyset$ ; es decir,  $N_p \cap N_q \neq \emptyset$ . Sea  $r \in N_p \cap N_q$ , entonces  $r \leq p$  y  $r \leq q$ ; en contradicción con el hecho de que  $p \perp q$ .

( $\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que  $i(p) \wedge i(q) = 0$  y que  $p$  y  $q$  son compatibles. Entonces existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , entonces  $r \in N_p \cap N_q$ , lo cual es absurdo, pues  $i(p) \wedge i(q) = 0$ .

Para 4. Sea  $b \in \mathbb{B}$ , con  $b \neq 0$ . Dado que  $i(\mathbb{P})$  es denso (vea 1.), existe  $p \in \mathbb{P}$  tal que  $i(p) \leq b$ . Luego, como  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $d \in D$  tal que  $d \leq p$ . Por 2., tenemos que  $i(d) \leq i(p)$ . De aquí tenemos que  $i(d) \leq b$ . □

**Teorema 6.** Para cualquier cardinal  $\kappa \geq \omega$ ,  $\text{AM}(\kappa)$  es equivalente a  $\text{AM}(\kappa)$ , restringido a álgebras booleanas completas.

*Demostración.* [ $\Rightarrow$ ] Es evidente.

[ $\Leftarrow$ ] Vamos a verificar que  $\text{AM}(\kappa)$ , restringido a álgebras booleanas completas, implica  $\text{AM}(\kappa)$  restringido a preórdenes parciales de cardinalidad  $\leq \kappa$ .

Sean  $\mathbb{P}$  un preorden con  $|\mathbb{P}| \leq \kappa$  y que cumple CCC y sea  $\mathcal{D}$  una familia de  $\leq \kappa$  subconjuntos densos de  $\mathbb{P}$ . Sean  $\mathcal{B}$  el álgebra booleana obtenida por el Lema 3. y  $\mathbb{B}$  el conjunto preordenado inducido por  $\mathcal{B}$  (vea CONVENCIÓN) álgebra booleana dada en el Lema 3.

Afirmación 1.  $\mathbb{B}$  tiene la CCC. En efecto, supongamos que  $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  es una anticadena en  $\mathbb{B}$ , por 1. del Lema 3, podemos tomar, para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $p_\alpha$  tal que  $i(p_\alpha) \leq b_\alpha$ , entonces por 2. del Lema 3,  $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  es una anticadena en  $\mathbb{P}$ . Lo cual contradice el hecho de que  $\mathbb{P}$  tiene la CCC.

Ahora, para cada  $p, q \in \mathbb{P}$ , definimos  $D_{p,q} = \{r \in \mathbb{P} : (r \leq p \wedge r \leq q) \vee r \perp p \vee r \perp q\}$ .

Afirmación 2. Para cada  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $D_{p,q}$  es denso en  $\mathbb{P}$ . En efecto, fijemos  $p, q \in \mathbb{P}$  y sea  $r_0 \in \mathbb{P}$  arbitrario. Es claro que si  $r_0 \in D_{p,q}$ , hay nada por hacer. Así que supongamos que  $r_0 \notin D_{p,q}$ . Entonces  $r_0$  no es una extensión común para  $p$  y  $q$  y  $r_0$  es compatible con  $p$  y  $q$ . Entonces, existe  $r_1 \in \mathbb{P}$  tal que  $r_1 \leq r_0$  y  $r_1 \leq p$ . Ahora tenemos dos casos:

1.  $r_1 \perp q$ . En este caso tenemos que  $r_1 \in D_{p,q}$  y  $r_1 \leq r_0$  Terminamos.

2. Si  $r_1$  y  $q$  son compatibles, entonces existe  $r_2 \in \mathbb{P}$  tal que  $r_2 \leq r_1$  y  $r_2 \leq q$ . Luego,  $r_2 \leq r_1$  y  $r_1 \leq p$ , implican que  $r_2 \leq p$ ; de donde,  $r_2 \leq p$  y  $r_2 \leq q$ , lo cual implica que  $r_2 \in D_{p,q}$  y  $r_2 \leq r_1$ .

Con todo, tenemos que  $D_{p,q}$  es denso en  $\mathbb{P}$ .

Ahora sea  $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{D_{p,q} : p, q \in \mathbb{P}\}$ . Notemos que  $\mathcal{D}'$  es una familia de  $\leq \kappa$  densos en  $\mathbb{B}$ .

Así que por hipótesis, existe  $G'$  filtro  $\mathcal{D}'$ -genérico.

Sea  $G = \{i^{-1}(g) : g \in G'\}$ .

Afirmación 3.  $G$  es filtro  $\mathcal{D}'$ -genérico (y por lo tanto  $\mathcal{D}$ -genérico). En efecto, claramente  $G \neq \emptyset$ .

Ahora sean  $p \in G$  y  $q \in \mathbb{P}$  tales que  $p \leq q$ . Por demostrar que  $q \in G$ . Por demostrar que  $q \in G$ . Como  $p \leq q$ , entonces  $i(p) \leq i(q)$  (vea 2., Lema 3). Luego, dado que  $i(p) \in G'$  y  $G'$  es filtro, tenemos que  $i(q) \in G'$ ; de donde,  $q \in G$ .

Finalmente, sean  $p, q \in G$ . Por demostrar que  $p$  y  $q$  son compatibles. Como  $G'$  es filtro  $\mathcal{D}'$ , existe  $r' \in i(D_{p,q}) \cap G'$ . Dado que  $r' \in i(D_{p,q})$ , existe  $r \in D_{p,q}$  tal que  $i(r) = r'$ . Notemos que si  $r \perp p$ , entonces  $r' \wedge i(p) = 0$ ; lo cual no puede ocurrir, pues  $i(p)$  y  $r'$  son compatibles. Similarmente, si  $r \perp q$ , entonces  $r' \wedge i(q) = 0$ ; lo cual no puede ocurrir, pues  $i(q)$  y  $r'$  son compatibles. Así que debido a que  $r \in D_{p,q}$ , debe ocurrir que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . Lo cual implica que  $p$  y  $q$  son compatibles.

Con todo,  $G$  es filtro en  $\mathbb{P}$ .

Para concluir, dado que para todo  $D \in \mathcal{D}'$ ,  $G' \cap i(D) \neq \emptyset$ , tenemos que para todo  $D \in \mathcal{D}'$ ,  $G \cap D \neq \emptyset$ . Esto es,  $G$  es un filtro  $\mathcal{D}'$ -genérico y por lo tanto  $\mathcal{D}$ -genérico.  $\square$

**Teorema 7.**  $\text{AM}(\kappa)$  implica que si  $X$  es un espacio Hausdorff, compacto y CCC y si  $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ , es una colección de subconjuntos densos y abiertos en  $X$ , entonces  $\bigcap \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Definamos a  $\mathbb{P} = \{p \in X : p \text{ es abierto y } p \neq \emptyset\}$ . Consideremos la relación siguiente en  $\mathbb{P}$ :

$$\text{Para } p, q \in \mathbb{P} : p \leq q \text{ si y solo si } p \subseteq q.$$

Afirmación 1.  $p$  y  $q$  son incompatibles si y solo si  $p \cap q = \emptyset$ . En efecto, supongamos primero que  $p$  y  $q$  son incompatibles, y también que  $p \cap q \neq \emptyset$ . Sea  $r = p \cap q$ . Observemos que  $p \in \mathbb{P}$  y  $q \in \mathbb{P}$ , así  $p \cap q \in \mathbb{P}$ , entonces  $r \in \mathbb{P}$ , pero ya sabemos que  $p \cap q \subseteq p$  y  $p \cap q \subseteq q$ , entonces  $r \subseteq p$  y  $r \subseteq q$ , es decir;  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , lo cual es una contradicción, pues  $p$  y  $q$  son incompatibles.

Ahora supongamos que  $p \cap q = \emptyset$  y que  $p$  y  $q$  son compatibles, entonces existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , entonces  $r \subseteq p$  y  $r \subseteq q$ , entonces  $r \subseteq p \cap q$ , pero como  $r \in \mathbb{P}$ , tenemos que  $r \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $p \cap q$  es distinto del vacío, lo cual es absurdo, pues  $p \cap q$  es vacío. Con todo la Afirmación 1. queda demostrada.

Afirmación 2.  $\mathbb{P}$  satisface la CCC. En efecto, sea  $A$  una anticadena en  $\mathbb{P}$ . Dado que los elementos de  $A$  son incompatibles dos a dos, tenemos que  $A$  es una familia de conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares; luego, como  $X$  satisface la CCC, tenemos que  $|A| \leq \omega$ . Con lo que se concluye la prueba de la Afirmación 2.

Consideremos, para cada  $\alpha \in \kappa$ ,  $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \bar{p} \subseteq U_\alpha\}$

Afirmación 3. Para cada  $\alpha \in \kappa$ ,  $D_\alpha$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Sea  $\alpha_0$  fijo y tomemos  $q \in \mathbb{P}$ , arbitrario. Si  $q \in D_{\alpha_0}$ , haciendo  $q = p$  tenemos que  $p \leq q$ .

Supongamos que  $q \notin D_{\alpha_0}$ . Como  $q$  es abierto y no vacío, tenemos que  $q \cap U_{\alpha_0} \neq \emptyset$ . Luego, como  $X$  es Hausdorff y compacto tenemos que  $X$  es regular; así que existe un abierto no vacío, digamos  $p$  tal que  $\bar{p} \subseteq q \cap U_{\alpha_0}$ . De aquí que  $p \in D_{\alpha_0}$  y  $p \leq q$ . Por tanto  $D_{\alpha_0}$  es denso en  $\mathbb{P}$ .

Dado que estamos suponiendo AM, para  $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$  existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico,  $G$ . Puesto que  $G$  es un filtro, entonces  $G$  satisface la PIF; y como  $X$  es compacto, entonces tenemos que  $\bigcap\{\bar{p} : p \in G\} \neq \emptyset$ . Finalmente, dado que  $\bigcap\{\bar{p} : p \in G\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ , concluimos que  $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$ .  $\square$

Antes de establecer el resultado final de la presente sección requerimos de una definición y un teorema.

**Definición 31.** Si  $\mathbb{B}$  es un álgebra booleana, entonces  $st(\mathbb{B})$  denota al espacio de Stone de  $\mathbb{B}$ . Los elementos  $x \in st(\mathbb{B})$  son los ultrafiltros sobre  $\mathbb{B}$ , y los conjuntos cerrados de  $st(\mathbb{B})$  son de la forma  $N_b = \{x : b \in x\}$ .

El lector interesado en una demostración del resultado siguiente puede consultar en [8].

**Teorema 8** (Teorema de representación de Stone). Para toda álgebra booleana  $\mathbb{B}$  :  $st(\mathbb{B})$  es un espacio Hausdorff, compacto, cero dimensional y  $\mathbb{B}$  es isomorfo a  $clop(st(\mathbb{B}))$  via el mapeo  $b \mapsto N_b$ . Además, todo Hausdorff compacto, cero dimensional  $X$  es homeomorfo a  $st(clop(X))$  a través del mapeo  $x \mapsto \{p \in clop(X) : x \in p\}$ .

El teorema siguiente resume las equivalencias vistas en esta sección.

**Teorema 9.** Para cualquier  $\kappa \geq \omega$ , los enunciados siguientes son equivalentes:

- (a) AM( $\kappa$ ).
- (b) AM( $\kappa$ ) restringido a preordenes de cardinalidad  $\leq \kappa$ .
- (c) AM( $\kappa$ ) restringido a álgebras booleanas completas.
- (d) Si  $X$  es un espacio Hausdorff, compacto y CCC, y  $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$  son conjuntos densos y abiertos, entonces  $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\} \neq \emptyset$ .

*Demostración.* (a), (b) y (c) son equivalentes por el Lema 3 y el Teorema 6.

En el Teorema anterior vimos la implicación (a)  $\Rightarrow$  (d). A continuación daremos la prueba de la implicación (d)  $\Rightarrow$  (c).

Sean  $\mathbb{B}$  un álgebra booleana que satisface la CCC y sea  $\mathcal{D}$  una familia de  $\leq \kappa$  subconjuntos densos  $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ .

Sea  $X$  el espacio de Stone de  $\mathbb{B}$ .

Para cada  $D \in \mathcal{D}$ , sea

$$W_D = \bigcup\{N_b : b \in D\}.$$

Notemos que, para cada  $d \in \mathcal{D}$ ,  $W_D$  es abierto en  $X$ .

Afirmación. Para todo,  $D \in \mathcal{D}$ ,  $W_D$  es denso (topológicamente hablando). En efecto, fijemos  $D \in \mathcal{D}$ , supongamos que  $N_c \cap W_D = \emptyset$ . Entonces  $c \wedge b = 0$ , para todo  $b \in D$  lo cual es imposible, pues  $D$  es denso (en el sentido del orden). Así que  $N_c \cap W_D \neq \emptyset$ .

Como  $X$  es Hausdorff compacto y CCC, aplicamos (d) aplicado a  $\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$ , para obtener  $G \in \bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$ . Entonces  $G$  es un filtro (de hecho un ultrafiltro), y para cada  $D \in \mathcal{D}$ ,  $G \in W_D$ , así que existe  $b \in D(G \in N_b)$ , o existe  $b \in D(b \in G)$ , o bien  $G \cap D \neq \emptyset$ .  $\square$

## 2.3. Aplicaciones 1

En la presente sección daremos respuesta a dos de las interrogantes planeadas en la introducción del presente trabajo de tesis. Para ello, primero mostraremos el Teorema 2. Debemos comentar que la prueba de dicho resultado se obtiene empleando el conjunto preordenado  $\mathbb{P}_A$  dado en la sección 2.1 (Ejemplo 12). Sabemos que los preórdenes con los que debemos trabajar para aplicar AM, deben cumplir la CCC. A continuación veremos que  $\mathbb{P}_A$  satisface la CCC.

**Lema 5.**  $\mathbb{P}_A$  tiene la propiedad de la cadena contable.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbb{P}_A$  no tiene la propiedad de la cadena contable. Sea  $\{(s_\xi, F_\xi) : \xi < \omega_1\}$  una anticadena testigo de que  $\mathbb{P}_A$  no satisface la CCC. Entonces para  $\eta, \mu \in \omega$  tal que si  $\eta \neq \mu$  y existe  $x \in F_\eta : x \cap s_\mu \not\subseteq s_\eta$  o existe  $x \in F_\mu : x \cap s_\eta \not\subseteq s_\mu$ . Entonces:

1. Si  $x \cap s_\mu \not\subseteq s_\eta$ , entonces existe  $x_0 \in (x \cap s_\mu)$  y  $x_0 \notin s_\eta$ , así  $x_0 \in s_\mu$  y  $x_0 \notin s_\mu$ , por lo cual  $s_\mu \neq s_\eta$ .
2. Si  $x \cap s_\eta \not\subseteq s_\mu$ , entonces existe  $x_0 \in (x \cap s_\eta)$  y  $x_0 \notin s_\mu$ , así  $x_0 \in s_\eta$  y  $x_0 \notin s_\mu$ , por lo cual  $s_\mu \neq s_\eta$ .

De ambos casos se obtiene que  $s_\eta \neq s_\mu$ . De aquí que  $\{(s_\xi, F_\xi) : \xi \in \omega_1\} = \omega_1$ , pero  $\{(s_\xi, F_\xi) : \xi < \omega_1\} \subseteq [\omega]^{<\omega}$ , lo cual es absurdo. Así  $\mathbb{P}_A$  tiene la propiedad de la cadena contable.  $\square$

Si  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}_A$ , denotamos  $d_{\mathcal{G}} = \bigcup \{s : \text{existe } F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} (s, F) \in \mathcal{G}\}$ .

**Teorema 10.** Sean  $\mathcal{G}$  un filtro en  $\mathbb{P}_A$  y  $(s', F') \in \mathcal{G}$ , entonces para todo  $x \in F'$ , se tiene que  $x \cap d_{\mathcal{G}} \subseteq s'$ .

*Demostración.* Deseamos ver que  $x \cap \bigcup \{s : \text{existe } F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} [(s, F) \in \mathcal{G}]\} \subseteq s'$  y observemos que  $x \cap \bigcup \{s : \text{existe } F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} [(s, F) \in \mathcal{G}]\} = \bigcup \{x \cap s : \text{existe } F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} [(s, F) \in \mathcal{G}]\}$ , así veamos que cada  $x \cap s \subseteq s'$ , donde  $s$  es tal que existe un  $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$  tal que  $(s, F) \in \mathcal{G}$ .

Sea  $s_0$  tal que existe un  $F_0 \in [\mathcal{A}]^{<\omega} : (s_0, F_0) \in \mathcal{G}$ . Dado que  $(s', F'), (s_0, F_0) \in \mathcal{G}$ , como  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}_A$  y por el Lema 2, se cumple que para cualquier  $x \in F'$  tenemos que  $x \cap s_0 \subseteq F'$  y para cualquier  $x \in F_0$  se cumple que  $x \cap s' \subseteq s_0$ , entonces para cualquier  $x \in F'$ ,  $x \cap s_0 \subseteq F'$ . Como  $s_0$  fue arbitrario, entonces se concluye que  $x \cap d_{\mathcal{G}}$ , así queda probado el Teorema enunciado.  $\square$

Para cada  $x \in \mathcal{A}$  denotamos,  $\mathcal{D}_x = \{(s, F) \in \mathbb{P}_A : x \in F\}$

**Corolario 4.** Sea  $x \in \mathcal{A}$ . Entonces:

1. Si  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}_A$  y  $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x \neq \emptyset$ , entonces  $|x \cap d_{\mathcal{G}}| < \omega$ .
2.  $\mathcal{D}_x$  es denso en  $\mathbb{P}_A$

*Demostración.* 1. Iniciemos demostrando el inciso 1. Dado que  $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x \neq \emptyset$ , entonces existe  $(s, F) \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x$ , y debido a que  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}_A$ , por el Teorema anterior, se tiene que para cualquier  $x \in F$  tenemos que  $x \cap d_{\mathcal{G}} \subseteq s$  y  $|s| < \omega$ ; entonces  $|x \cap d_{\mathcal{G}}| \leq |s|$  y  $|s| < \omega$ , por tanto se concluye  $|x \cap d_{\mathcal{G}}| < \omega$ .

2. Sea  $(s_0, F_0) \in \mathbb{P}_A$ , deseamos probar que existe  $(s, F) \in \mathcal{D}_{x_0}$  de tal manera que  $(s, F) \leq (s_0, F_0)$ , definamos  $(s, F) = (s_0, F_0 \cup \{x_0\})$ .

Observemos que  $s_0 \subseteq s$  y  $F_0 \subseteq F_0 \cup \{x_0\}$ , resta ver que para cualquier  $x \in F_0 \cup \{x_0\}$  se cumplirá que  $x \cap s_0 \subseteq s_0$ . Sea  $x \in F_0 \cup \{x_0\}$ , entonces  $x \in F_0$  ó  $x = x_0$ .

- a) Si  $x \in F_0$  y sabemos  $(s_0, F_0) \leq (s_0, F_0)$ , entonces para cualquier  $x \in F_0$  tenemos que  $x \cap s_0 \subseteq s_0$

b) Si  $x = x_0$ , entonces  $(s_0, F_0) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , entonces tenemos  $(s_0, F_0) \leq (s_0, F_0)$  satisface lo deseado.

Por lo cual  $\mathcal{D}_{x_0}$  es denso en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  □

Sea  $\mathcal{G}$  es un filtro en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , denotamos  $d_{\mathcal{G}} = \bigcup \{s : \text{Existe } F \in [A]^{<\omega} ((s, F) \in \mathcal{G})\}$ .

**Teorema 11.** AM. Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ , tales que  $|\mathcal{A}| \leq \kappa$ ,  $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ . Si para todo  $y \in \mathcal{C}$  y cada  $F \in [A]^{<\omega}$  se cumple que  $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ , entonces existe  $d \subseteq \omega$  tal que:

1. Para toda  $x \in \mathcal{A}$ :  $|d \cap x| < \omega$  y,
2. Para toda  $y \in \mathcal{C}$ :  $|d \cap y| = \omega$ .

*Demostración.* Primero denotemos, para cada  $y \in \mathcal{C}$  y  $n \in \omega$ ,  $E_n^y = \{(s, F) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : s \cap y \not\subseteq n\}$ .

Afirmación. Para todo  $y \in \mathcal{C}$  y  $n \in \omega$ ,  $E_n^y$  es denso en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ .

En efecto sean  $(s, F) \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ ,  $y \in \mathcal{C}$  y  $n \in \omega$ . Como  $|y \setminus \bigcup F| = \omega$  elegimos  $m \in y \setminus \bigcup F$  tal que  $m > n$ . Pongamos  $s' = s \cup \{m\}$  y  $F' = F$ . Es claro que  $(s', F') \in E_n^y$ . Ahora veamos que  $(s', F') \leq (s, F)$ . Obviamente  $s \subset s'$ ,  $F \subset F'$ . Por último si  $x \in F$ , entonces  $x \cap s' = x \cap (s \cup \{m\}) = (x \cap s) \cup (x \cap \{m\})$ ; pero  $x \cap \{m\} = \emptyset$ , pues  $x \in F$  y  $m \notin \bigcup F$ . Así  $x \cap s' = x \cap s \subset s$ . Por lo tanto  $(s', F') \leq (s, F)$  y con ello  $E_n^y$  es denso.

Ahora, consideremos el conjunto  $\mathcal{D} = \{E_n^y : y \in \mathcal{C} \wedge n \in \omega\} \cup \{\mathcal{D}_x : x \in \mathcal{A}\}$ . Por la afirmación anterior y el Corolario 4 inciso 2., tenemos que  $\mathcal{D}$  es una familia de subconjuntos densos en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$  con  $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ . Luego, por AM, existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico,  $\mathcal{G}$ , en  $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ . Sea  $d = d_{\mathcal{G}} = \bigcup \{s : \text{Existe } F \in [A]^{<\omega} : (s, F) \in \mathcal{G}\}$ . Del Corolario 4 inciso 1 tenemos que  $x \in \mathcal{A}$ ,  $|d \cap x| < \omega$ . Resta probar que si  $y \in \mathcal{C}$  entonces  $|d \cap y| = \omega$ . En efecto, supongamos que no es así, es decir, que para algún  $y_0 \in \mathcal{C}$ , ocurre que  $|d \cap y_0| < \omega$ . Sea  $n_0 \in \omega$  tal que  $d \cap y_0 \subseteq n_0$ . Puesto que  $\mathcal{G}$  es  $\mathcal{D}$ -genérico, tenemos que existe  $(s, F) \in \mathcal{G} \cap E_{n_0}^{y_0}$ . Lo cual implica que  $s \cap y_0 \not\subseteq n_0$ , lo cual es una contradicción. Ya que  $s \cap y_0 \subseteq d \cap y_0 \subseteq n_0$ . Así, para todo  $y \in \mathcal{C}$ ,  $|d \cap y| = \omega$ . □

A continuación presentamos algunas consecuencias bastante interesantes del teorema anterior.

**Corolario 5.** AM. Si  $\mathcal{B}$  es una familia de subconjuntos de  $\omega$  tal que:

1.  $|\mathcal{B}| < 2^\omega$ , y
2. Para cualquier  $\mathcal{V} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ ,  $\bigcap \mathcal{V}$  es infinito.

Entonces existe  $L \in [\omega]^\omega$  tal que para todo  $B \in \mathcal{B}$ ,  $L \setminus B$  es finito.

*Demostración.* Denotemos  $\kappa$  a la cardinalidad de  $\mathcal{B}$  y pongamos  $\mathcal{A} = \{(\omega \setminus B) : B \in \mathcal{B}\}$  y  $\mathcal{C} = \{\omega\}$ . Es claro que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son subconjuntos de  $\mathcal{P}(\omega)$ ,  $|\mathcal{A}| \leq \kappa$  y  $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ .

Ahora sea  $\{A_1, \dots, A_k\} \in [A]^{<\omega}$ . Por construcción, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $B_i \in \mathcal{B}$  de tal manera que  $A_i = \omega \setminus B_i$ . Ahora bien dado que  $\omega \setminus \bigcup \{A_i : i \in \{1, \dots, k\}\} = \bigcap \{\omega \setminus A_i : i \in \{1, \dots, k\}\} = \bigcap \{\omega \setminus (\omega \setminus B_i) : i \in \{1, \dots, k\}\} = \bigcap \{B_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ . Por hipótesis tenemos que  $\bigcap \{B_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$  es un conjunto infinito; así que  $\omega \setminus \bigcup \{A_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$  es infinito.

Con todo concluimos que las colecciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  satisfacen las hipótesis del teorema anterior, lo cual nos arroja un  $L \subseteq \omega$  tal que las condiciones 1. y 2. de dicho teorema se satisfacen. Por 2., tenemos que  $L$  es infinito.

Resta probar que para todo  $B \in \mathcal{B}$ ,  $L \setminus B$  es infinito. Pero si  $B \in \mathcal{B}$ , entonces  $\omega \setminus B \in \mathcal{A}$ . Así que como  $L$  cumple 1. del Teorema 11, tenemos que  $L \cap (\omega \setminus B)$  es finito; así que  $L \setminus B$  es infinito. La prueba está completa. □

**Corolario 6.** AM. Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son familia de subconjuntos de  $\omega$  tales que:

1.  $|\mathcal{A}| < 2^\omega$  y  $|\mathcal{B}| < 2^\omega$ ,  $y$
2.  $B \setminus \bigcup \mathcal{C}$  es un conjunto infinito, para todo  $B \in \mathcal{B}$  y todo  $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ .

Entonces si  $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = \lambda$ , existe un subconjunto infinito  $L$  de  $\omega$  tal que  $A \cap L$  es un conjunto finito para todo  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \setminus L$  es un conjunto infinito para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

*Demostración.* Por el Teorema 11 existe un conjunto  $M \subseteq \omega$  tal que  $A \setminus M$  es un conjunto finito, para todo  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \setminus M$  es un conjunto infinito, para cada  $B \in \mathcal{B}$ . Definamos  $L = \omega \setminus M$ . Entonces, para cada  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B \setminus M = B \setminus (\omega \setminus L) = L \setminus (\omega \setminus B) = L \cap B$  es un conjunto infinito.

Similarmente  $L \cap A$  es un conjunto finito, para todo  $A \in \mathcal{A}$ . □

Para continuar con el siguiente teorema, recordemos que si  $E \subseteq X$ , se dice que  $E$  es  $G_\delta$ -relativo si y solo si  $E = \bigcap_{n \in \omega} G_n$  con  $G_n$  en  $\tau$  y diremos que  $X$  satisface el segundo numerable si  $\tau$  posee una base numerable.

**Teorema 12.** AM. Si  $X$  es un conjunto de números reales tal que  $|X| < 2^\omega$ , entonces todo subconjunto de  $X$  es un conjunto  $G_\delta$ -relativo.

*Demostración.* Supongamos que  $Y \subseteq X$ . Puesto que  $\mathbb{R}$  con su topología usual es segundo numerable, podemos tomar  $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in \omega}$  una base numerable de  $\mathbb{R}$ . Aún más, podemos pedir que  $\mathcal{B}$  tiene la propiedad de que ningún  $x, y \in \mathbb{R}$ , con  $x \neq y$ , se cumple que  $|\{B \in \mathcal{B} : \{x, y\} \subseteq B\}| < \omega$ .

Indexamos a  $Y = \{y_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$  y consideramos  $X \setminus Y = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ . Para cada  $\alpha \in \lambda$ , denotamos  $B_\alpha = \{n \in \omega : y_\alpha \in U_n\}$  y sea  $A_\alpha = \{n \in \omega : x_\alpha \in U_n\}$ . Consideremos, ahora,  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$  y  $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ . Por el Corolario 6 existe  $L \subseteq \omega$  tal que  $L \cap B_\alpha$  es un conjunto infinito y  $L \cap A_\alpha$  es un conjunto finito, para todo  $\alpha \in \lambda$ . Para  $n \in \omega$  definamos  $L_n = \bigcup_{m \in M} U_m$ . Dado que cada  $B_\alpha \cap L$  es un conjunto infinito,  $y_\alpha \in \bigcap_{n \in \omega} L_n$ . Pero cada  $A_\alpha \cap L$  es un conjunto finito, así que  $x_\alpha \notin \bigcap_{n \in \omega} L_n$ . Así  $Y$  es un conjunto  $G_\delta$ -relativo. □

Si  $X$  es infinito, la cardinalidad del conjunto de todos conjuntos  $G_\delta$  en  $X$  es  $2^\omega$ , y la cardinalidad de todos los subconjuntos de  $X$  es  $2^\lambda$ .

Asimismo recordemos que si  $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$  decimos que  $\mathcal{A}$  es una familia casi ajena si se cumple que para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{A}$  con  $A \neq B$  se satisface que  $A \cap B < \aleph_0$  y diremos que  $\mathcal{A}$  es una familia maximal casi ajena y es maximal con esta propiedad.

**Corolario 7.** AM. Sea  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  una familia casi ajena de cardinalidad  $\kappa$ , donde  $\omega \leq \kappa < 2^\omega$ . Entonces  $\mathcal{A}$  no es maximal.

*Demostración.* Supongamos que no; es decir, que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  es una familia casi ajena maximal. Sea  $\mathcal{C} = \{\omega\}$ .

*Afirmación.* Para todo  $y \in \mathcal{C}$ , y cada  $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ ,  $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ . En efecto, supongamos que para algún  $F = \{x_i : i \in \overline{1, n}\}$ , ocurre que  $|\omega \setminus (\bigcup_{i=1}^n x_i)| < \omega$ . Entonces  $|\bigcap_{i=1}^n x_i^c| < \omega$ . Pongamos  $x = (\bigcap_{i=1}^n x_i^c)^c$  y notemos que  $x \notin \mathcal{A}$ ; pues de lo contrario,  $|x_1 \cap x| < \omega$ , lo cual implica que  $x_1 \subseteq^* \bigcap_{i=1}^n x_i^c$ , una contradicción. Un argumento similar justifica el hecho de que  $\mathcal{A} \cup \{x\}$  es una familia casi ajena y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{x\}$ , en contradicción con la maximalidad de  $\mathcal{A}$ . Lo que demuestra la afirmación.

Ahora ya podemos aplicar el Teorema 11 a  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{A}$ , lo cual nos garantiza la existencia de  $d \subseteq \omega$  tal que 1. y 2., de dicho teorema se verifican. De estos hechos se obtiene que  $\mathcal{A} \cup \{d\}$  es una familia casi ajena tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{d\}$ . Luego, por la maximalidad de  $\mathcal{A}$ ,  $d \in \mathcal{A}$ . Lo cual es absurdo, pues por 1. del Teorema 11,  $|d \cap d| = \omega$ ; pero  $|d \cap d| = |d| = \omega$ . □

**Corolario 8.** AM. Sea  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  una familia casi ajena de tamaño  $\kappa$ , donde  $\omega \leq \kappa < 2^\omega$ . Si  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ , entonces existe  $d \subseteq \omega$  tal que para cualquier  $x \in \mathcal{A}$  ( $|d \cap x| < \omega$ ) y para toda  $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ , ( $d \cap x = \omega$ ).

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ .

*Afirmación.* Para todo  $y \in \mathcal{C}$ , y cada  $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ ,  $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ . En efecto, sean  $y \in \mathcal{C}$ , y  $F = \{x_i : i \in \overline{1, n}\} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ . Entonces  $y \setminus F = \bigcap_{i=1}^n (y \setminus x_i)$ , y dado que  $\mathcal{B}$  es familia casi ajena, tenemos que cada  $y \cap x_i$  ( $i \in \overline{1, n}$ ) es finito; luego  $|y \setminus \bigcup_{i=1}^n (y \cap x_i)| = \omega$ . Además,  $y \setminus \bigcup_{i=1}^n (y \cap x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (y \setminus x_i)$ , pues si  $a \in y \setminus \bigcup_{i=1}^n (y \cap x_i)$ , entonces  $a \notin \bigcup_{i=1}^n (y \cap x_i)$ , lo cual implica que para cada  $i \in \overline{1, n}$ ,  $a \in y \setminus x_i$ . Así,  $y \setminus \bigcup_{i=1}^n (y \cap x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (y \setminus x_i)$  y por lo tanto  $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ .

Ahora, aplicando el Teorema 11 a  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{A}$ , obtenemos  $d \subseteq \omega$  de tal forma que 1. y 2., de dicho teorema, se verifican. De estos hechos se obtiene, trivialmente la conclusión del resultado.  $\square$

**Teorema 13.** AM. Si  $\omega \leq \kappa < 2^\omega$ , entonces  $2^\kappa = 2^\omega$ .

*Demostración.* Puesto que la conclusión es inmediata si  $\kappa = \omega$ , supondremos que  $\omega < \kappa$ . Sea  $\mathcal{B}$  una familia casi ajena tal que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ , con  $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ . Consideremos la función  $\Phi : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$ , definida por  $\Phi(d) = \{x \in \mathcal{B} : |x \cap d| < \omega\}$ . Por el corolario anterior,  $\Phi$  es sobreyectiva; luego,  $2^\kappa \leq 2^\omega$ . Por otro lado, por aritmética cardinal (vea [8]),  $\omega \leq \kappa$ , implica que  $2^\omega \leq 2^\kappa$ . Por lo tanto  $2^\omega = 2^\kappa$ .  $\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema 13 es que  $2^\omega$  es un cardinal regular.

**Lema 6.** (König) Si  $\kappa$  es un cardinal infinito y  $cf(\kappa) \leq \lambda$ , entonces  $\kappa < \kappa^\lambda$ .

**Corolario 9.** AM.  $2^\omega$  es regular.

*Demostración.* Pongamos  $\lambda = cf(2^\omega)$ . Por definición de cofinalidad,  $\lambda \leq 2^\omega$ . Veamos que no puede ocurrir que  $\lambda < 2^\omega$ . Si  $\lambda < 2^\omega$ , entonces por el Lema 6, aplicado a  $\lambda$  y  $\kappa = 2^\omega$ , tenemos que  $\kappa = 2^\omega < \kappa^\lambda = 2^{cf(2^\omega)}$ ; pero del Teorema 13 sabemos que  $2^{cf(2^\omega)} = 2^\lambda = 2^\omega$ . Una contradicción. Por tanto  $2^\omega$  es regular.  $\square$

## 2.4. Aplicaciones II

Con la finalidad de motivar la presente sección y resaltar una de las tantas contribuciones de AM, supongamos que  $X$  un espacio topológico separable (Un espacio topológico es *separable* si existe un denso numerable de  $X$ ). Entonces existe  $D \subseteq X$  denso tal que  $|D| \leq \omega$ . Ahora, si  $\mathcal{U}$  es una familia (no vacía) de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares, entonces, por cada  $U \in \mathcal{U}$ , podemos tomar un punto  $d_U \in U \cap D$ . Claramente  $|\mathcal{U}| = |\{d_U : U \in \mathcal{U}\}| \leq |D| \leq \omega$ ; luego  $|\mathcal{U}| \leq |D| \leq \omega$ . De aquí que si  $X$  es separable, entonces  $X$  satisface la CCC. Una pregunta natural es:

¿Qué se puede decir del regreso de la implicación anterior? Esto es, ¿ocurre que todo espacio topológico CCC es separable?

El ejemplo siguiente da una respuesta negativa a esta interrogante

**Ejemplo 17.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio  $T_1$  y  $\mathcal{F}[X] = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in [X]^{<\omega} \text{ y } A \neq \emptyset\}$ . Para cada  $F \in \mathcal{F}[X]$  y cada subconjunto abierto,  $U$ , de  $X$  tal que  $F \subseteq U$ , definimos:

$$[F, U] = \{B \in \mathcal{F}[X] : F \subseteq B \subseteq U\}$$

La colección  $\{[F, U] : F \in \mathcal{F}[X] \text{ y } u \in \tau\}$  es base para una topología sobre  $\mathcal{F}[X]$ .

Esta topología es conocida como Pixley-Roy y el conjunto  $\mathcal{F}[X]$  con esta topología es llamado hiperespacio Pixley-Roy. El lector interesado en estos espacios puede consultar [12]. Entre otras cosas, tenemos los hechos siguientes:

1. Si  $X$  es un espacio no numerable, entonces  $\mathcal{F}[X]$  no es separable. En efecto, supongamos que  $X$  es no numerable y sean  $D = \{F_n : n \in \omega\}$  un subconjunto numerable de  $\mathcal{F}[X]$ . Dado que  $X$  no es numerable, existe  $x_0 \in X \setminus \bigcup \{F_n : n \in \omega\}$ . Claramente  $U_x = [\{x_0\}, X]$  es una vecindad de  $\{x_0\}$  en  $\mathcal{F}[X]$  tal que para cualquier  $n \in \omega$ ,  $[\{x_0\}, X] \cap D = \emptyset$  (observemos que  $F \in U_x$  si y solo si  $x \in F \subseteq X$ ). De aquí que ningún subconjunto numerable de  $\mathcal{F}[X]$  puede ser denso.
2. Si  $\mathcal{F}[X]$  es CCC, entonces  $X$  es CCC. En efecto, sea  $\mathcal{U}$  una familia no vacía de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares. Por cada  $U \in \mathcal{U}$ , tomamos  $x_U \in U$ . Claramente la colección  $\{[\{x_U\}, U] : U \in \mathcal{U}\}$  es una familia de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos dos a dos en  $\mathcal{F}[X]$ , el cual satisface la CCC, tenemos que  $|\{[\{x_U\}, U] : U \in \mathcal{U}\}| \leq \omega$ ; luego, dado que  $|\mathcal{U}| = |\{[\{x_U\}, U] : U \in \mathcal{U}\}|$ , obtenemos que  $|\mathcal{U}| \leq \omega$ . Así,  $X$  es CCC.

Para hacer más explícito el ejemplo, de lo visto previamente tenemos que el hiperespacio Pixley-Roy,  $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ , de la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología usual es CCC y no es separable.

Debido a la respuesta negativa a la pregunta anterior, la siguiente interrogante es ¿bajo qué condiciones sobre un espacio  $X$ , la CCC y la separabilidad son equivalentes? El objetivo de esta sección es presentar un resultado que, bajo AM, proporciona una respuesta a esta última pregunta (vea Teorema 14).

**Lema 7.** AM. Sea  $X$  un espacio topológico el cual satisface la CCC. Si  $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  una familia no vacía de subconjuntos abiertos de  $X$ , entonces existe  $A \subseteq \omega_1$ , no numerable tal que  $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$  tiene la propiedad de la intersección finita.

*Demostración.* Consideremos, para cada  $\alpha < \omega_1$ ,  $V_\alpha = \bigcup \{U_\gamma : \gamma > \alpha\}$ . Claramente tenemos que si  $\alpha < \beta < \omega_1$ , entonces  $V_\beta \subseteq V_\alpha$ ; lo cual implica que  $\overline{V}_\beta \subseteq \overline{V}_\alpha$ .

Afirmación 1. Existe  $\alpha_0 \in \omega_1$  tal que para todo  $\beta \in \omega_1$ , si  $\alpha_0 \leq \beta$ , entonces  $\overline{V}_\beta = \overline{V}_{\alpha_0}$ .

Supongamos que no, es decir; para todo  $\alpha < \omega_1$ , existe  $\beta > \alpha$  tal que  $\overline{V}_\alpha \setminus \overline{V}_\beta \neq \emptyset$ .

Sea  $\alpha_0 \in \omega_1$  arbitrario, por nuestra hipótesis, existe  $\alpha_1 \in \omega_1$ , con  $\alpha_0 < \alpha_1$  y tal que  $\overline{V}_{\alpha_0} \setminus \overline{V}_{\alpha_1} \neq \emptyset$ . Sea  $\xi < \omega_1$  y suponga que hemos construido, para cada  $\lambda < \xi$  un ordinal  $\alpha_\lambda$  de tal manera que, para  $\lambda < \beta < \xi$ :

1.  $\alpha_\lambda < \alpha_\beta$ , y
2.  $\overline{V}_{\alpha_\lambda} \setminus \overline{V}_{\alpha_\beta} \neq \emptyset$ .

Por construir  $\alpha_\xi$  tal que 1. y 2.

Notemos que  $\rho = \sup\{\alpha_\lambda : \lambda \in \xi\} < \omega_1$  (pues  $cf(\omega_1) = \omega_1$  y  $\xi$  es numerable) Tomemos  $\alpha' = \max\{\rho + 1, \xi + 1\}$ . Por nuestro supuesto, existe  $\alpha_\xi \in \omega_1$  tal que  $\alpha' < \alpha_\xi$  y  $\overline{V}_{\alpha'} \setminus \overline{V}_{\alpha_\xi} \neq \emptyset$ .

Observemos que  $\alpha_\xi$  satisface 1. y 2.. Por construcción, para todo  $\lambda < \xi$ , tenemos que  $\alpha_\lambda < \alpha_\xi$ . Supongamos que para algún  $\lambda \in \xi$ ,  $\overline{V}_{\alpha_\lambda} = \overline{V}_{\alpha_\xi}$ . Por construcción tenemos que  $\alpha_\lambda < \alpha'$ ; luego,  $\overline{V}_{\alpha'} \subseteq \overline{V}_{\alpha_\lambda} = \overline{V}_{\alpha_\xi}$ ; lo cual es absurdo. Así que para todo  $\lambda \in \xi$ ,  $\overline{V}_{\alpha_\lambda} \setminus \overline{V}_{\alpha_\xi}$ .

Ahora definimos  $\mathcal{U} = \{V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} : \xi < \omega_1\}$ .

Claramente  $\mathcal{U}$  es una familia de conjuntos abiertos no vacíos en  $X$ . Aún más, los elementos de  $\mathcal{U}$  son ajenos dos a dos. En efecto, sean  $V_{\alpha_\beta} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\beta+1}}$  y  $V_{\alpha_\lambda} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}}$ , dos elementos de  $\mathcal{U}$ , tales que  $\beta \neq \lambda$ . Si  $x \in (V_{\alpha_\beta} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\beta+1}}) \cap (V_{\alpha_\lambda} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}})$ , entonces  $x \in V_{\alpha_\beta} \cap V_{\alpha_\lambda}$  y  $x \notin (\overline{V}_{\alpha_{\beta+1}} \cup \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}})$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $\lambda < \beta$ . Entonces tenemos dos casos:

1. Si  $\lambda + 1 = \beta$ , entonces  $\alpha_{\lambda+1} = \alpha_\beta$ , entonces  $V_{\alpha_{\lambda+1}} = V_{\alpha_\beta}$ , así  $\overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}} = \overline{V}_{\alpha_\beta}$  y  $V_{\alpha_\beta} \subseteq \overline{V}_{\alpha_\beta}$ , implican que  $x \in \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}}$ ; lo cual es una contradicción.

2.  $\lambda + 1 < \beta$ . En este caso,  $\alpha_{\lambda+1} < \alpha_\beta$ ; luego  $V_{\alpha_\beta} \subseteq V_{\alpha_{\lambda+1}}$ , entonces  $\overline{V}_{\alpha_\beta} \subseteq \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}}$  y por ende  $V_{\alpha_\beta} \subseteq \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}}$ , entonces  $x \in \overline{V}_{\alpha_{\lambda+1}}$ , lo cual es absurdo.

Así que los elementos de  $\mathcal{U}$  son ajenos dos a dos. Pero esto contradice el hecho de que  $X$  satisface la CCC. La contradicción viene de haber supuesto que la afirmación era falsa. Luego, ésta debe ser verdadera. Con lo que concluimos la prueba de la Afirmación 1.

Sean  $\alpha_0 < \omega_1$  un testigo de la Afirmación 1 y sea

$$\mathbb{P} = \{p \subseteq \overline{V}_{\alpha_0} : p \text{ es abierto en } X \text{ y } p \neq \emptyset\}$$

con el preorden siguiente:  $p \leq q$  si y solo si  $p \subseteq q$ . De aquí tenemos que  $p$  y  $q$  (elementos de  $\mathbb{P}$ ), son incompatibles si y solo si  $p \cap q = \emptyset$ . Más aún toda anticadena en  $\mathbb{P}$  es una familia de abiertos no vacíos en  $X$  ajenos dos a dos y dado que  $X$  satisface la CCC, obtenemos que para cualquier anticadena  $A$  en  $\mathbb{P}$ ,  $|A| \leq \omega$ , es decir;  $\mathbb{P}$  satisface la condición de la cadena contable.

Consideremos, ahora, para cada  $\alpha_0 \leq \beta < \omega_1$  la colección:

$$D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \text{existe } \gamma > \beta \text{ tal que } p \subseteq U_\gamma\}.$$

Afirmación 2. Para cada  $\alpha_0 \leq \beta < \omega_1$ , se cumple que  $D_\beta$  es denso en  $\mathbb{P}$ .

En efecto, sea  $q \in \mathbb{P}$

1. Si  $q \in D_\beta$ , hemos terminado, pues haciendo  $p = q$ , se satisface que  $p \leq q$  y  $p \in D_\beta$ .
2. Si  $q \notin D_\beta$ . Primero notemos que como  $q \in \mathbb{P}$ , entonces  $q \subseteq \overline{V}_{\alpha_0} = \overline{V}_\beta$  y  $q$  es abierto no vacío, entonces  $q \cap V_\beta \neq \emptyset$ , entonces  $q \cap (\bigcup\{U_\gamma : \gamma > \beta\}) \neq \emptyset$ ; luego, existe  $\gamma_q \in \omega_1$ , con  $\gamma_q > \beta$  tal que  $q \cap U_{\gamma_q} \neq \emptyset$ . Así  $p = q \cap U_{\gamma_q}$  es tal que  $p \leq q$  y claramente  $p \in D_\beta$ .

Por lo tanto  $D_\beta$  es denso en  $\mathbb{P}$ , para cada  $\alpha_0 \leq \beta < \omega_1$ .

Ahora sea  $\mathcal{D} = \{D_\beta : \alpha_0 < \beta < \omega_1\}$ . Por el AM, existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico, digamos  $\mathcal{G}$ .

Tomemos:

$$A = \{\gamma < \omega_1 : \text{existe } p \in \mathcal{G} \text{ tal que } p \subseteq U_\gamma\}$$

Observe que  $|A| = \omega_1$ , pues para toda  $\beta > \alpha_0$ , existe  $\gamma > \beta$  tal que  $\gamma \in A$ , esto se sigue de que  $D_\beta$  es denso y  $\mathcal{G}$  satisface la PIF, entonces  $\mathcal{U}' = \{U_\gamma : \gamma \in A\}$  satisface la PIF.  $\square$

**Definición 32.** Una pseudobase en un espacio topológico  $X$  es una familia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  que cumple:

1. Para todo  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\text{int}(B) \neq \emptyset$ , y
2. Para todo  $U$  conjunto abierto no vacío en  $X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq U$ .

Claramente toda base y toda  $\pi$ -base de un espacio topológico  $X$  es una pseudobase

Recordemos que un espacio  $X$  es casi-regular, si para todo conjunto abierto  $U$ , existe  $V$  abierto no vacío tal que  $\text{cl}_X(V) \subseteq U$ .

**Definición 33.** Un espacio  $X$  es cocompacto si satisface:

1.  $X$  es casi-regular.
2. Existe una pseudobase  $\mathcal{B}$  de  $X$  tal que si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad de la intersección finita, entonces  $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$

Observemos que si  $X$  es un espacio cocompacto y  $\mathcal{B}$  es una pseudobase de  $X$  testigo de la cocompacidad de  $X$ , entonces podemos asegurar que para todo  $U$  abierto no vacío de  $X$ , entonces existe  $B \in \mathcal{B}$ , tal que  $cl_X(B) \subseteq U$ . En efecto, si  $U$  es un abierto no vacío, entonces (por la casi-regularidad de  $X$ ), existe un abierto no vacío, digamos  $V$ , tal que  $cl_X(V) \subseteq U$ . Ahora bien como  $\mathcal{B}$  es pseudobase, existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq V$ . Claramente tenemos que  $cl_X(B) \subseteq U$ .

**Proposición 4.** *Todo espacio Hausdorff y compacto,  $X$  es cocompacto.*

*Demostración.* Puesto que todo espacio Hausdorff y compacto es normal, tenemos que  $X$  es casi-regular.

Sea  $\mathcal{B}$  una base para la topología de  $X$ .

Puesto que  $\mathcal{B}$  es pseudobase de  $X$ , resta probar que para todo,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$  con la PIF,  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ . Tomemos  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{B}$  con la PIF. Claramente la colección  $\mathcal{F}'_0 = \{\bar{U} : U \in \mathcal{F}_0\}$  satisface la PIF, y como  $X$  es compacto, tenemos que  $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F}'_0 = \bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{F}_0\}$ . Teniendo así la prueba completa.  $\square$

**Proposición 5.** *Sea  $X$  un espacio Hausdorff y cocompacto. Si  $Y$  es un subespacio denso y abierto de  $X$ , entonces  $Y$  es cocompacto.*

*Demostración.* Definamos  $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : \text{int}_X(U) \neq \emptyset \text{ y } cl_X(U) \subseteq Y\}$ .

Afirmación 1.  $\mathcal{B}$  es una pseudobase en  $Y$ .

En efecto, si  $U \in \mathcal{B}$ , entonces  $\text{int}_X(U) \neq \emptyset$  y  $cl_X(U) \subseteq Y$ . Pero  $\emptyset \neq \text{int}_X(U) \cap Y \subseteq \text{int}_Y(U)$ .

Así, para todo  $U \in \mathcal{B}$ ,  $\text{int}_Y(U) \neq \emptyset$ .

Ahora sea  $V$  abierto no vacío en  $Y$ . Por demostrar que existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $U \subseteq V$ . Como  $V$  es abierto en  $Y$ , existe  $W$  abierto no vacío en  $X$  tal que  $V = W \cap Y$ .

Dado que  $X$  es casi-regular, existe  $U$  abierto no vacío tal que  $cl_X(U) \subseteq W \cap Y$ . Claramente  $U \in \mathcal{B}$ . Además, como  $U \subseteq W \cap Y$ , entonces  $U \subseteq V$ . Con todo  $\mathcal{B}$  es una pseudobase en  $Y$ . Concluimos que la afirmación es cierta.

Ahora supongamos que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$  la cual satisface la PIF. Por demostrar que  $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Notemos que el hecho de que  $\mathcal{F}$  satisface la PIF, tenemos que la colección  $\{cl_X(U) : U \in \mathcal{F}\}$  también satisface la PIF y dado que  $X$  es compacto, tenemos que  $\bigcap \{cl_X(U) : U \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ . Es claro que si  $x \in \bigcap \{cl_X(U) : U \in \mathcal{F}\}$ , entonces  $x \in Y$ . Así que  $x \in \bigcap \{cl_Y(U) : U \in \mathcal{F}\}$ .

Por lo tanto,  $Y$  es cocompacto.  $\square$

**Definición 34.** *Se dice que un número cardinal  $\kappa$  es calibre para  $X$  si para toda,  $\mathcal{U}$  familia de abiertos no vacíos de  $X$  con  $|\mathcal{U}| = \kappa$  existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $|\mathcal{U}'| = \alpha$  y  $\bigcap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ .*

**Proposición 6.** AM. *Si  $X$  es un espacio cocompacto y CCC, entonces  $\omega_1$  es calibre para  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$  una familia de abiertos no vacíos en  $X$  tal que  $|\mathcal{U}| = \omega_1$ . Por demostrar que existe  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $|\mathcal{U}'| = \omega_1$  y  $\bigcap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ .

Como  $X$  es cocompacto, existe una pseudobase,  $\mathcal{B}$ , tal que 1. y 2. de la Definición 33 se cumplen. Luego, dado que  $X$  es casi regular, para cada  $\alpha \in \omega_1$ , existe  $B_\alpha \in \mathcal{B}$  tal que  $cl_X(B_\alpha) \subseteq U_\alpha$ . Por el Lema 7 aplicado a la colección  $\{\text{int}_X(B_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ , existe  $A \subseteq \omega_1$  tal que la colección  $\{\text{int}(B_\alpha) : \alpha \in A\}$  satisface la PIF, entonces  $\{B_\alpha : \alpha \in A\}$  satisface la PIF; luego, por 2. de la Definición 33, tenemos que  $\bigcap \{cl_X(B_\alpha) : \alpha \in A\} \neq \emptyset$ . Finalmente, dado que para cada  $\alpha \in A$ ,  $cl_X(B_\alpha) \subseteq U_\alpha$ , tenemos que  $\bigcap \{U_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$ . Por tanto  $\omega_1$  es calibre de  $X$ .  $\square$

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico, diremos que es primero numerable si para cada  $x \in X$  existe una base local numerable en  $x$ .

**Corolario 10.** AM. Sea  $X$  un espacio cocompacto y CCC. Si  $\mathcal{W} = \{U_\xi : \xi < \omega_1\}$  es una colección decreciente de subconjuntos abiertos en  $X$ , entonces  $\bigcap \{U_\xi : \xi < \omega_1\} \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{W} = \{U_\xi : \xi < \omega_1\}$  es una colección decreciente de subconjuntos abiertos en  $X$ . Por la Proposición anterior, tenemos que existe  $\mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{\omega_1}$  tal que  $\bigcap \mathcal{W}' \neq \emptyset$ .  $\square$

Recordemos que la densidad de un espacio topológico  $X$ , denotada  $d(X)$ , es definida como  $d(X) = \min\{D \subseteq X : \overline{D} = X\}$ . Una vez añadido esto, enunciamos el siguiente Lema.

**Lema 8.** AM. Si  $X$  un espacio cocompacto, primero numerable y CCC, entonces  $X$  es  $d(X) \neq \omega_1$ .

*Demostración.* Primero mostraremos que no puede ocurrir que  $d(X) = \omega_1$ . En efecto, supongamos que  $d(X) = \omega_1$ , y sea  $D = \{d_\xi : \xi < \omega_1\}$  un subconjunto denso en  $X$ . Pongamos, para cada  $\xi \in \omega_1$ ,

$$F_\xi = \overline{\{d_\eta : \eta < \xi\}} \text{ y } G_\xi = X \setminus F_\xi.$$

Notemos que si  $\alpha, \beta \in \omega_1$  y  $\alpha < \beta$ , entonces  $\{d_\eta : \eta < \alpha\} \subseteq \{d_\eta : \eta < \beta\}$ ; luego,  $cl_X(\{d_\eta : \eta < \alpha\}) \subseteq cl_X(\{d_\eta : \eta < \beta\})$ . De donde  $X \setminus cl_X(\{d_\eta : \eta < \beta\}) \subseteq X \setminus cl_X(\{d_\eta : \eta < \alpha\})$ .

Así, si  $\alpha, \beta \in \omega_1$  y  $\alpha < \beta$ , entonces  $G_\beta \subseteq G_\alpha$ . Esto es, la colección  $\{G_\xi : \xi < \omega_1\}$  es una familia decreciente de conjuntos abiertos no vacíos en  $X$ . Así que por el Corolario 10,  $U = \bigcap \{G_\xi : \xi \in \omega_1\} \neq \emptyset$ .

Afirmación 1.  $U \cap D = \emptyset$ . En efecto, supongamos que existe  $\alpha < \omega_1$  tal que  $d_\alpha \in U \cap D$ . Como  $d_\alpha \in U$ , tenemos que para todo  $\xi \in \omega_1$ ,  $d_\alpha \in G_\xi$ . En particular,  $d_\alpha \in G_{\alpha+1} = X \setminus F_{\alpha+1}$ . Pero también  $d_\alpha \in F_{\alpha+1} = cl_X(\{d_\xi : \xi \in \alpha + 1\})$ . Lo cual es absurdo. Así que  $D \cap U = \emptyset$ .

De la afirmación anterior tenemos que  $int(U) = \emptyset$ .

Ahora, debido a que  $X$  no es separable, tenemos que para todo  $\xi \in \omega_1$ ,  $X \setminus F_\xi \neq \emptyset$ .

Sean  $p \in U$  arbitrario y  $\{B_n : n < \omega\}$  una base de vecindades de  $p$  en  $X$ . Como, para todo  $\xi \in \omega_1$ ,  $p \in G_\xi$ , existe  $n(\xi) < \omega$  tal que para cada  $\xi \in \omega_1$ :  $V_{n(\xi)} \subset G_\xi$ . Luego, existen  $n_0 < \omega$  y  $A \subset \omega_1$ ,  $|A| = \omega_1$  tales que

$$n(\xi) = n_0 \text{ para todo } \xi \in A.$$

Entonces  $V_{n_0} \subset \bigcap \{G_\xi : \xi \in A\}$ .

Afirmación 2.  $\bigcap \{G_\xi : \xi \in A\} = \bigcap \{G_\xi : \xi < \omega_1\}$ . Puesto que  $\{G_\xi : \xi \in A\} \subseteq \{G_\xi : \xi < \omega_1\}$ , tenemos que  $\bigcap \{G_\xi : \xi < \omega_1\} \subseteq \bigcap \{G_\xi : \xi \in A\}$ . Ahora sea  $x \in \bigcap \{G_\xi : \xi \in A\}$ . Por demostrar que  $x \in \bigcap \{G_\xi : \xi < \omega_1\}$ . Sea  $\xi \in \omega_1$  arbitrario, como  $|A| = \omega_1$ , existe  $\alpha \in \omega_1$  tal que  $\alpha > \xi$ , lo cual implica que  $G_\alpha \subseteq G_\xi$ . Por tanto  $x \in G_\xi$ . Lo que concluye la prueba de la afirmación.

De la Afirmación 2, concluimos que  $int(U) \neq \emptyset$ . Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $d(X) \neq \omega_1$ .  $\square$

Antes de establecer el siguiente resultado, recordemos que el carácter de un espacio topológico  $X$ , denotado  $\chi(X)$ , es definido como el menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que para todo  $x \in X$ , existe  $\mathcal{B}_x$  base local de  $x$  en  $X$  con  $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ .

**Proposición 7.** Sea  $X$  un espacio topológico tal que  $\chi(X) = \alpha$  y  $d(X) > \alpha$ . Entonces existe un subespacio  $Y \subseteq X$  tal que  $|Y| = d(Y) = \alpha^+$  y  $c(Y) \leq c(X)$ .

*Demostración.* Fijemos, para cada  $p \in X$  una base de vecindades  $\{V_\xi(p) : \xi < \alpha\}$ . Entonces definimos:

$$f(p, q; \xi, \eta) = \begin{cases} \text{Un elemento de } V_p(\xi) \cap V_q(\eta), \text{ si} \\ \quad V_p(\xi) \cap V_q(\eta) \neq \emptyset; \\ \text{No definido en otro caso.} \end{cases}$$

Para  $H \subseteq X$  arbitrario, denotamos

$$H' = \{f(p, q; \xi, \eta) : \{p, q\} \in [H]^2 \wedge (\xi, \eta) \in \alpha \times \alpha\}.$$

A continuación, definimos:

1.  $H_0 = H$ ,
2.  $H_n = (H_{n-1})'$ , y
3.  $CL(H) = \bigcup \{H_n : n < \omega\}$ .

Nota: En el punto 3 anterior se está definiendo al operador  $CL : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  de modo que  $CL(H)$  no es la clausura topológica de  $H$  en el espacio  $X$ .

Evidentemente,  $|H| \leq \alpha$  implica que  $|CL(H)| \leq \alpha$ . Ahora probaremos que existe una colección  $\{A_\nu : \nu \in \alpha^+\}$ , tal que para cada  $\nu < \alpha^+$ :

1.  $|A_\nu| \leq \alpha$ , para todo  $\nu < \alpha^+$ ;
2. Para todo  $0 < \nu < \alpha^+$ ,  $CL(\bigcup \{A_\xi : \xi < \nu\}) \subseteq A_\nu$ , y
3. Para todo  $\nu < \alpha^+$ , existe  $p_\nu \in A_\nu \setminus cl_X(CL(\bigcup \{A_\xi : \xi < \nu\}))$ .

Sea  $A_0$  un subconjunto de  $X$ , no vacío tal que  $|A_0| \leq \alpha$ .

Ahora sea  $\nu < \alpha^+$  y supongamos que para cada  $\xi < \nu$ , hemos construido un conjunto  $A_\xi$  de tal forma que 1, 2 y 3 se satisfacen. Ahora vamos a construir  $A_\nu$ .

Por hipótesis, para cada  $\xi < \nu$ , tenemos que  $|A_\xi| \leq \alpha$ ; además,  $\nu < \alpha^+$ , implica que  $|\nu| \leq \alpha$ . Luego,  $|\bigcup \{A_\xi : \xi \in \nu\}| \leq \alpha$ , de donde  $|CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \nu\})| \leq \alpha$ . De aquí que  $CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \nu\})$  no es denso en  $X$ , por tanto, podemos tomar un punto  $p_\nu \in X \setminus cl_X(CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \nu\}))$ . Ahora definimos  $A_\nu = \{p_\nu\} \cup CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \nu\})$ . Evidentemente  $A_\nu$  es el conjunto deseado, con lo cual concluye la prueba.

Sea  $Y = \bigcup \{A_\xi : \xi < \alpha^+\}$ . Notemos que  $|Y| = \alpha^+$ , pues, por un lado tenemos que  $|Y| \leq |\bigcup \{A_\xi : \xi < \alpha^+\}| \leq \sum \{|A_\xi : \xi \in \alpha^+\}| \leq \alpha \cdot \alpha^+ = \alpha^+$ . Por otro lado para cada  $\nu \in \alpha^+$  hemos tomado un punto  $p_\nu$  y, por construcción,  $p_\nu \notin p_\xi$ , si  $\xi \neq \nu$ ; con todo,  $|Y| = \alpha^+$ .

Afirmación.  $d(Y) = \alpha^+$ . En efecto, primero notemos que, por definición,  $d(Y) \leq |Y| = \alpha^+$ . Para concluir la prueba veremos que si  $A \subseteq Y$  con  $|A| \leq \alpha$ , entonces  $A$  no es denso en  $Y$ . Sea, pues,  $A \subseteq Y$  con  $|A| = \alpha$ . Entonces para cada  $a \in A$ , existe  $\xi_a < \alpha^+$  tal que  $a \in A_{\xi_a}$ . Puesto que  $|\{\xi_a : a \in A\}| < \alpha^+$  y  $\alpha^+$  es regular, tenemos que  $\xi_A = \sup\{\xi_a : a \in A\} < \alpha^+$ . Claro que  $p_{\xi_A} \notin cl_X(CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \xi_A\}))$  y dado que  $cl_X(A) \subseteq cl_X(CL(\bigcup \{A_\xi : \xi \in \xi_A\}))$ , tenemos que  $p_{\xi_A} \in Y$  y  $p_{\xi_A} \notin cl_X(A)$ , lo cual implica que  $A$  no es denso en  $Y$ . De donde  $d(Y) \geq \alpha^+$ . Concluimos que,  $d(Y) = \alpha^+$ .

A continuación veremos que  $c(Y) \leq c(X)$ . Sea  $\mathcal{U}$  una familia celular en  $Y$ . Para cada  $U \in \mathcal{U}$ , fijamos  $p_U \in U$ . Claro que para cada  $u \in \mathcal{U}$ , existe  $\xi_U \in \alpha$ , tal que  $V_{\xi_U}(p_U) \cap Y \subseteq U$ . Notemos que por la condición 2., tenemos que  $\{V_{\xi_U}(p_U) : U \in \mathcal{U}\}$  es una familia celular en  $X$ ; luego,  $|\{V_{\xi_U}(p_U) : U \in \mathcal{U}\}| \leq c(X)$ . De aquí que  $c(X)$  es cota superior para las cardinalidades de las familias celulares en  $Y$ ; así,  $c(Y) \leq c(X)$ . Concluimos lo deseado.  $\square$

Ahora introduzcamos las siguientes definiciones, para  $x \in \overline{Z} \setminus Z$ ,  $t(x, Z) = \min\{\lambda : \text{existe un subconjunto } A \text{ de } Z \text{ tal que } |A| = \lambda \text{ y } x \in \overline{A}\}$ . Definimos la estanquidad de  $X$  es  $t(X) = \sup\{t(x, Z) : Z \subseteq X \text{ y } x \in \overline{Z} \setminus Z\}$ .

**Proposición 8.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $Y \subseteq X$ . Entonces  $d(Y) \leq d(\overline{Y}) \cdot t(\overline{Y})$ .

*Demostración.* Sea  $Z$  un subconjunto denso de  $\bar{Y}$  tal que  $|Z| = d(\bar{Y})$ . Ahora, si  $p \in Z$ , entonces podemos elegir un subconjunto  $H_p \subseteq Y$  con  $|H_p| \leq t(\bar{Y})$  tal que  $p \in \bar{H}_p$ .

Afirmación.

$$D = \bigcup \{H_p : p \in Z\}$$

es un subconjunto denso de  $Y$ . En efecto, sea  $x \in Y$  y  $V$  una vecindad de  $x$  en  $X$ . Entonces  $V \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ ; luego,  $V \cap \bar{Y}$  es un abierto no vacío en  $Y$  y dado que  $Z$  es denso en  $Y$  podemos tomar  $p \in Z \cap (V \cap \bar{Y})$ . Como  $V \cap \bar{Y}$  es vecindad de  $p$  y  $p \in \bar{H}_p$ , tenemos que  $(V \cap \bar{Y}) \cap H_p \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $(V \cap Y) \cap D \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $D$  es denso en  $Y$ .

Ahora, notemos que  $|D| \leq \sum \{|H_p| : p \in Z\} \leq |Z| \cdot t(\bar{S}) = d(\bar{S}) \cdot t(\bar{S})$ . □

**Corolario 11.** *Si todo subconjunto cerrado de un espacio primero numerable  $X$  es separable, entonces  $X$  es hereditariamente separable.*

**Teorema 14.** AM. *Sea  $X$  un espacio cocompacto, primero numerable y CCC. Si todo subespacio cerrado de  $X$  es cocompacto, entonces  $X$  es separable.*

*Demostración.* Por el Lema 8,  $d(X) \neq \omega_1$ , entonces o bien  $d(X) < \omega_1$  o  $d(X) > \omega_1$ .

Supongamos que  $d(X) > \omega_1$ . Por el lema anterior, existe  $S \subseteq X$  con  $|S| = d(S) = \omega_1$  y  $c(S) \leq c(X) = \omega$ . Por hipótesis  $\bar{S}$  es cocompacto, primero numerable (porque  $X$  tiene esta propiedad) y además es CCC, porque  $S$  satisface la CCC.

Aún más, dado que  $S$  es denso en  $cl_X(S)$ , podemos asegurar que todo subconjunto denso en  $S$  será denso en  $cl_X(S)$ ; de donde  $d(\bar{S}) \leq d(S) = \omega_1$ .

Afirmación.  $d(cl_X(S))$ . Tenemos que  $d(cl_X(S)) \leq \omega_1$ . Supongamos que  $d(cl_X(S)) \leq \omega$ , entonces por la Proposición 8,  $d(S) \leq d(cl_X(S))t(X) = \omega$ ; lo cual contradice el hecho de que  $d(S) = \omega_1$ .

Con todo, tenemos que  $cl_X(S)$  es un espacio cocompacto, primero numerable y CCC, el cual satisface que  $d(\bar{S}) = \omega_1$ . Lo cual no puede ocurrir por el Lema 6. Así, dado que no puede ocurrir que  $d(X) > \omega_1$ , concluimos que  $d(X) = \omega$ . □

Recordemos que un espacio topológico es *perfecto* si y solo si todo subconjunto cerrado es un conjunto  $G_\delta$ . Un espacio topológico es llamado *perfectamente normal* si el espacio satisface ser perfecto y normal.

**Corolario 12.** AM. *Si  $X$  es un espacio perfectamente normal y compacto, entonces  $X$  es hereditariamente separable.*

*Demostración.* Por el Corolario 11, es suficiente demostrar que todo subespacio cerrado de  $X$  es separable. Sin embargo, es bien sabido que  $X$  es hereditariamente Lindelöf y, por lo tanto hereditariamente CCC; así que por el Teorema 14, podemos aplicar a todo subespacio cerrado de  $X$ . □

## 2.5. Aplicaciones III

Recordemos que un espacio topológico  $X$  es numerablemente compacto si para toda  $\mathcal{U}$  cubierta abierta de  $X$ , con  $|\mathcal{U}| \leq \omega$ , existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$  tal que  $\bigcup \mathcal{V} = X$ . Evidentemente todo espacio compacto es numerablemente compacto. A continuación veremos que el recíproco no es válido.

**Ejemplo 18.** *Sea  $X = \omega_1$ , con la topología usual del orden.*

1.  $X$  no es compacto. En efecto, considere la colección  $\mathcal{U} = \{[0, \alpha + 1) : \alpha \in \omega_1\}$ . Notemos que  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ ; pues si  $\beta \in \omega_1$ , entonces  $\beta + 1 < \omega_1$  (pues  $\omega_1$  es ordinal límite). Es claro que  $\beta \in [0, \beta + 1) \in \mathcal{U}$ .

2.  $X$  es numerablemente compacto. Supongamos que no es así; es decir, existe  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$  una cubierta abierta de  $X$  la cual no admite subcubiertas finitas. Definamos, recursivamente, para cada  $n \in \omega$  un punto  $\alpha_n \in X$  como sigue:

- a)  $\alpha_0 \in X \setminus U_0$ , y
- b)  $\alpha_{n+1} \in X \setminus \bigcup \{U_i : i \in \{0, \dots, n\}\}$ .

Como  $\omega_1$  es regular, entonces  $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\} < \omega_1$ . Ahora, dado que  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $m \in \omega$  tal que  $\alpha \in U_m$ . Como  $U_m$  es abierto, existe  $k \in \omega$  de tal forma que  $k > m$  y  $\alpha_k \in U_m$ , en contradicción con la elección de  $\alpha_k$ . Por tanto,  $X$  es numerablemente compacto.

En vista del ejemplo anterior, una interrogante natural es:

¿Qué condiciones adicionales sobre un espacio numerablemente compacto lo hacen compacto?

El problema anterior ha sido estudiado por diversos autores; el lector interesado en este tema puede consultar la referencia [13].

A continuación presentaremos algunos resultados en los que espacios numerablemente compactos con algunas condiciones adicionales y bajo AM, resultan ser compactos. Particularmente, mostraremos que: *Todo espacio numerablemente compacto y perfectamente normal es compacto*; usando como hipótesis AM (vea Teorema 16). Asimismo se dice que un espacio  $X$  es separable si éste contiene un subespacio denso numerable.

**Proposición 9.** AM. Sea  $X$  un espacio numerablemente compacto y separable. Si  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $X$  con  $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$ , entonces existe una colección finita  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}'\}$  cubre a  $X$ .

*Demostración.* Como  $X$  es separable, existe  $D = \{d_n : n \in \omega\}$  denso en  $X$ . Vamos a suponer que para todo  $n, m \in \omega$ ,  $d_n \neq d_m$ . Supondremos, además que si  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ , entonces existe  $n \in \omega$  tal que  $d_n \in D \setminus \bigcup \mathcal{V}$ . Ahora bien, para cada  $U \in \mathcal{U}$ , denotamos  $F_U = \{n \in \omega : d_n \in D \setminus U\}$  y sea  $\mathcal{F} = \{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ . Entonces, para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $F_U \subseteq \omega$ .

Afirmación 1. Si  $\mathcal{F}' \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ , entonces  $\bigcap \mathcal{F}'$  es un conjunto infinito. En efecto, supongamos que existe  $\mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$  de tal forma que el conjunto  $\mathcal{F}' = \{F_U : U \in \mathcal{U}'\}$  es tal que  $\bigcap \mathcal{F}'$  es un conjunto finito. Pero  $\bigcap \mathcal{F}' = \bigcap \{n \in \omega : d_n \in D \setminus U\} : U \in \mathcal{U}'\} = \{n \in \omega : d_n \in D \setminus (\bigcup \{U : U \in \mathcal{U}'\})\}$ ; luego,  $\bigcup \mathcal{U}'$  contiene a todos los puntos de  $D$ , salvo un número finito de ellos, lo cual es absurdo. Lo que concluye la prueba de la Afirmación 1.

Por el Corolario 5, existe  $Y \subseteq \omega$  infinito, tal que

(\*) Para todo  $F \in \mathcal{F}$ , tenemos que  $Y \setminus F$  es un conjunto finito.

Sea  $A = \{d_n : n \in Y\}$ .

Afirmación 2. Para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \cap A$  es un conjunto finito. En efecto, supongamos que existe  $U \in \mathcal{U}$ , tal que  $U \cap A$  es un conjunto infinito. Entonces al conjunto  $\{n \in Y : d_n \in A \cap U\}$  es infinito, pero  $\{n \in Y : d_n \in A \cap U\} \subseteq Y \setminus F_U$ ; lo cual implica que  $Y \setminus F_U$  es un conjunto infinito, que es una contradicción con (\*).

De la Afirmación 2, se desprende que  $A$  es un conjunto cerrado y discreto. Pero esto no puede ocurrir, pues  $A$  es infinito y  $X$  es numerablemente compacto. □

En el siguiente corolario  $L(X)$  denota el grado de Lindelöf del espacio  $X$ , el cual es definido como el menor cardinal infinito  $\kappa$  tal que para cualquier cubierta abierta  $\mathcal{U}$  de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  con  $|\mathcal{V}| \leq \kappa$  tal que  $X = \bigcup \mathcal{V}$ .

**Corolario 13.** AM. Si  $X$  es numerablemente compacto, separable y regular con  $L(X) < 2^{\aleph_0}$ , entonces  $X$  es compacto.

En [3], se demostró que un espacio numerablemente compacto, separable y regular no siempre es compacto. El lema siguiente proporciona algunos ejemplos.

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico y  $x \in X$ ,  $x$  es un punto de acumulación de  $X$  si para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe  $y \in U$  tal que  $x \neq y$ . Asimismo un espacio topológico Hausdorff es extremadamente disconexo si las clausuras de sus abiertos son abiertas.

**Lema 9.** Si  $X$  es numerablemente compacto, extremadamente disconexo y regular, entonces todo subconjunto infinito de  $X$  tiene al menos dos puntos límite.

*Demostración.* Supongamos que  $A = \{a_n : n < \omega\}$  es un subconjunto infinito de  $X$  un único punto límite, al que denotamos  $y$ . Supondremos, además, que para todo  $m \neq n$ , y  $y \neq a_n \neq a_m$ .

Ahora, para cada  $m < \omega$ :

$$A_m = \{a_n : m < n < \omega\} \cup \{y\}$$

es un subconjunto cerrado (y no vacío) en  $X$ .

A continuación vamos demostrar que existe una familia  $\{U_n : n \in \omega\}$  de subconjuntos abiertos en  $X$  tal que:

- (1) Para cada  $n \in \omega$ ,  $a_n \in U_n$ ;
- (2)  $cl_X(U_n) \cap A_n = \emptyset$ ; para cada  $n \in \omega$ , y
- (3) Para  $n, m \in \omega$  si  $n \neq m$ , entonces  $U_n \cap U_m = \emptyset$ .

Como  $a_0$  no es punto de acumulación de  $A_0$ , existe  $U_0$  vecindad de  $a_0$  tal que  $cl_X(U_0) \cap A_0 = \emptyset$ . Sea  $n \in \omega$  y supongamos que hemos construido abiertos  $U_0, \dots, U_n$  de manera que (1) – (3) se verifican. Por construir  $U_{n+1}$ . Notemos que para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $a_{n+1} \in A_i$ ; entonces para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $a_{n+1} \notin cl_X(U_i)$ . Entonces existen vecindades  $V_i$ ,  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ , de tal manera que  $V_i \cap U_i = \emptyset$ , para para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  y  $cl_X(V_{n+1}) \cap A_{n+1}$  (aquí usamos la regularidad de  $X$ ). Tomando a  $U_{n+1} = \bigcap \{V_i : i \in \{0, \dots, n+1\}\}$ , tenemos que  $U_{n+1}$  satisface (1) – (3), lo que concluye la construcción.

Consideremos ahora

$$U = \bigcup \{U_{2^\kappa} : \kappa < \omega\}.$$

Observemos que  $U$  es un conjunto abierto en  $X$ ; además dado que  $X$  es extremadamente disconexo,  $\bar{U}$  también es abierto. Así  $y \in \bar{U}$  y por ende,  $\bar{U}$  es una vecindad de  $y$  y no interseca al conjunto  $\{a_{2^\kappa+1} : \kappa < \omega\}$ , en contradicción con el hecho de que  $X$  es numerablemente compacto.  $\square$

Ahora, sea  $X$  un espacio topológico, llamaremos compactación de  $X$  a una pareja  $(Y, c)$ , donde  $Y$  es un espacio compacto y  $c : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo encagable de  $X$  en  $Y$  tal que  $c(X) = Y$ . Así, para cualquier espacio  $X$  Tychonoff, se puede considerar la familia  $\mathcal{C}(X)$  de todas las compactaciones de  $x$ . Recordemos que el elemento maximal en la familia  $\mathcal{C}(X)$  de todas las compactaciones de un espacio Tychonoff  $X$  se llama compactación de Čech-Stone de  $X$  y se denota por  $\beta X$ . Por lo cual  $\beta\mathbb{N}$  denota todas compactaciones de los números naturales.

**Teorema 15.** Un espacio topológico  $X$  tiene una compactación si y solo si  $X$  es un espacio Tychonoff.

El lector interesado en los detalles del ejemplo siguiente puede consultar [14].

**Ejemplo 19.** Sea  $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  tal que la menor cardinalidad de una base para  $p$  es  $2^{\omega_0}$ . La existencia de tales puntos fue demostrada en [9]. Consideremos  $X = \beta\mathbb{N} \setminus \{p\}$ , como subespacio de  $\beta(\mathbb{N})$ . Entonces

1.  $X$  es numerablemente compacto, separable, completamente regular con grado de Lindelöf  $2^{\omega_0}$ .
2.  $X$  no es compacto.

En [10] Ostaszewski construyó un espacio topológico que satisface ser regular, numerablemente compacto y perfectamente normal, pero no es compacto. Adelante (vea Corolario 17) demostraremos que, suponiendo AM, todo espacio numerablemente compacto y perfectamente normal es compacto.

**Proposición 10.** Si  $X$  es un espacio numerablemente compacto y perfecto, entonces  $s(X) = \aleph_0$ . Aún más, si  $X$  es regular, entonces  $t(X) = \aleph_0$ .

*Demostración.* Sean  $Y$  un conjunto discreto en  $X$  y sea  $A$  el conjunto de puntos de acumulación de  $Y$ . Entonces  $A$  es cerrado en  $X$ . Además,  $Y \cap A = \emptyset$ .

Ahora,  $Y$  es cerrado en  $X \setminus A$ ; luego, dado que  $X \setminus A$  es abierto en  $X$ , tenemos que  $X \setminus A$  es  $F_\sigma$  en  $X$ . De donde obtenemos que  $Y$  es  $F_\sigma$  en  $X$ ; luego,  $Y = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$ , donde para cada  $n \in \omega$ ,  $Y_n$  es cerrado en  $X$ . Así, dado que todo subconjunto cerrado y discreto de  $X$  es finito pues  $X$  es numerablemente compacto,  $Y$  es numerable.  $\square$

**Proposición 11.** Sea  $X$  un espacio topológico.

1.  $X$  no es hereditariamente Lindelöf si y solo si existe un subespacio  $A \subseteq X$  y un buen orden para  $A = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ , tal que para todo  $\beta < \omega_1$ , el conjunto  $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$  es abierto en  $A$ .
2.  $X$  no es hereditariamente separable si y solo si existe un subespacio  $B \subseteq X$  y un buen orden para  $B = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ , de tal forma que para todo  $\beta < \omega_1$ , el conjunto  $\{b_\alpha : \alpha < \beta\}$  es cerrado en  $B$ .

La siguiente proposición es muy útil. Además diremos que un espacio es derecho (izquierdo) separado si se puede bien ordenarse de tal forma que sus segmentos iniciales son abiertos (cerrados).

**Proposición 12.** Si  $A$  es derecho-separado y  $s(A) = \omega$ , entonces  $A$  es hereditariamente separable.

**Teorema 16.** Si existe un espacio numerablemente compacto, perfectamente normal que no sea compacto, entonces existe uno con las mismas condiciones, pero que no es separable.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio numerablemente compacto y perfectamente normal, el cual no es compacto. Entonces  $X$  no es Lindelöf; luego existe un subespacio  $A \subseteq X$ , el cual es derecho-separado. Entonces por la proposición 12,  $A$  es separable. Luego  $\bar{A}$  es numerablemente compacto, perfectamente normal y separable. Finalmente,  $\bar{A}$  no puede ser Lindelöf; así que  $\bar{A}$  no es compacto.  $\square$

En la referencia [12], se presenta un espacio topológico el cual es numerablemente compacto, perfectamente normal y no compacto, el cual no es separable. A continuación veremos que si uno asume AM, entonces todo espacio que cumpla las condiciones antes mencionadas, será, no solo separable sino hasta hereditariamente separable.

**Teorema 17.** AM y  $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ . Si  $X$  es un espacio regular y numerablemente compacto con  $s(X) = \aleph_0$ , entonces  $X$  es hereditariamente separable.

*Demostración.* Como  $X$  es numerablemente compacto y regular con  $s(X) = \aleph_0$ , entonces  $t(X) = \aleph_0$ .

Supongamos que  $X$  no es hereditariamente separable, entonces existe un subconjunto  $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  de  $X$ , el cual es izquierdo-separado. Consideremos, para cada  $\alpha \in \omega$

$$Y_\alpha = cl_X\{y_\gamma : \gamma < \alpha\}.$$

Pongamos  $Y = \bigcup\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ;

Afirmación.  $Y$  es cerrado. En efecto, sea  $y \in cl_X(Y)$ . Dado que  $t(X) = \omega$ , tenemos que existe  $C \in [Y]^{\leq \omega}$  tal que  $x \in cl_X(C)$ . Para cada  $c \in C$  existen  $\alpha_c \in \omega_1$  y  $Y_c \in [\{y_\gamma : \gamma < \alpha_c\}]^{\leq \omega}$  de tal manera que  $c \in cl_X(Y_c)$ . Notemos que el hecho de que  $C$  es numerable, implica que el conjunto  $\{\alpha_c : c \in C\}$ , también es numerable; luego,  $\alpha_C = \sup\{\alpha_c : c \in C\} < \omega_1$ . Claramente, para cada  $c \in C$ ,  $Y_c \subseteq \{y_\beta : \beta < \alpha_0\}$ . Luego,  $c \in cl_X(Y_c) \subseteq cl_X(\{y_\beta : \beta < \alpha_0\}) = Y_{\alpha_C}$ , para cada  $c \in C$ . De donde  $C \subseteq Y_{\alpha_0}$ ; así que  $y \in cl_X(C) \subseteq cl_X(Y_{\alpha_C}) = Y_{\alpha_C} \subseteq Y$ . Lo que concluye la prueba de la afirmación.

Consideremos, ahora, para cada  $\alpha < \omega_1$ , una vecindad de  $y_\alpha$ , digamos  $U_\alpha$ , de tal manera que  $cl_X(U_\alpha) \cap Y_\alpha = \emptyset$ . Como  $s(X) = \omega$ ,  $c(Y) = \omega$ , entonces por el Lema 6 (cocompactos), existe un subconjunto no numerable  $S$  de  $\omega_1$  de tal manera que  $\{U_\alpha : \alpha \in S\}$  tiene la propiedad de la intersección finita. Dado que  $Y$  es numerablemente compacto, para cada  $\beta \in S$  podemos definir  $F_\beta$  como sigue:

$$F_\beta = \bigcap\{cl_X(U_\alpha) : \alpha \leq \beta \text{ y } \alpha \in S\}.$$

Notemos que para todo  $\beta \in S$ ,  $F_\beta \neq \emptyset$ . En efecto, es claro que para cada  $\beta \in S$ , el conjunto  $\{cl_X(U_\alpha) : \alpha \leq \beta \text{ y } \alpha \in S\}$  es una familia numerable de subconjuntos cerrados en  $X$  con la propiedad de la intersección finita; luego, como  $X$  es numerablemente compacto, tenemos que  $F_\beta$  no es vacío.

Aún más, no es difícil verificar que para todo  $\beta \in S$ ,  $F_\beta \cap Y \neq \emptyset$ .

Construyamos una sucesión creciente  $\{\beta_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ , de elementos de  $\omega_1$  y un conjunto  $\{x_\gamma : \gamma < \omega_1\}$  de puntos en  $Y$  de tal manera que para cada,  $\mu < \omega_1$ ,  $\{x_\gamma : \gamma < \mu\} \subseteq Y_{\beta_\mu}$  y  $x_\mu \in F_{\beta_\mu} \cap Y$ .

Sean  $\beta_0 \in S$  arbitrario y  $x_0 \in F_{\beta_0} \cap Y$ . Tomemos  $\beta_0 \in \omega_1$  el primer elemento tal que  $x_0 \in Y_{\beta_0}$ . Sea  $\mu < \omega_1$  y supongamos que para cada  $\gamma < \mu$  hemos construido ordinales  $\beta_\gamma < \omega_1$ , de tal forma que  $\xi < \gamma < \mu$ , implica que  $\beta_\xi < \beta_\gamma$  y puntos  $x_\gamma$ .

Dado que  $\{\beta_\gamma : \gamma < \mu\}$  es numerable, tomamos  $\beta_\mu = \sup\{\beta_\gamma : \gamma < \mu\} + 1$  y tomemos  $x_\mu \in F_{\beta_\mu} \cap Y$  arbitrario. Con lo que se termina la construcción.

Entonces  $Z = \{x_\mu : \mu < \omega_1\}$  es derecho-separado por  $\{Y_{\beta_\mu} : \mu < \omega_1\}$  y izquierdo-separado por  $\{F_{\beta_\mu} : \mu < \omega_1\}$ ; luego  $Z$  es un conjunto discreto en  $X$ , lo que contradice que  $s(X) = \omega$ .  $\square$

**Teorema 18.** AM. *Todo espacio numerablemente compacto, perfecto y regular es compacto.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio numerablemente compacto, perfecto y regular.

Claramente, si  $X$  es Lindelöf, entonces  $X$  es compacto. Supongamos, entonces, que  $X$  no es Lindelöf. Entonces  $X$  contiene un subespacio derecho-separado,  $Y$ , de cardinalidad  $\omega_1$ . Pongamos  $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ . Para cada  $\beta < \omega_1$ , existe un conjunto abierto,  $U_\beta$ , en  $X$  tal que  $\{y_\alpha : \alpha \leq \beta\} \subseteq U_\beta$  y  $U_\beta \cap \{y_\alpha : \alpha > \beta\} = \emptyset$ .

Dado que  $X$  es regular, para cada  $\beta < \omega_1$  podemos obtener una vecindad  $V_\beta$  de  $y_\beta$  de tal forma que  $cl_X(V_\beta) \subseteq U_\beta$ . Denotemos  $\mathcal{V} = \{cl_X(V_\beta) : \beta < \omega_1\}$ .

Observemos que si  $Y'$  es un subconjunto no numerable de  $Y$ , entonces no existe  $\mathcal{V}' \in [\mathcal{V}]^{\leq \omega}$  tal que  $Y' \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$ .

Como  $X$  es perfecto y  $\bigcup\{V_\beta : \beta < \omega_1\}$  es abierto, existe una colección numerable de subconjuntos cerrados de  $X$ , digamos  $\{F_n : n < \omega\}$  de tal forma que  $\bigcup\{V_\beta : \beta < \omega_1\} = \bigcup\{F_n : n < \omega\}$ . Luego, existe  $m < \omega$  de tal manera que  $Y \cap F_m$  es no numerable.

Sea  $E = cl_X(Y \cap F_m)$ . Como  $E$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , tenemos que  $E$  es numerablemente compacto y regular. Así que por las proposiciones 10 y 12,  $Y$  es hereditariamente separable, así que  $E$  es separable. Lo cual es una contradicción con la Proposición 9.  $\square$

**Corolario 14.** AM. *Todo numerablemente compacto, perfectamente normal es compacto.*

Ahora usaremos del siguiente resultado vea [7] (Theorem 4).

**Proposición 13.** *El producto cartesiano de un número contable de espacios regulares contables son perfectamente normales.*

**Teorema 19.** (AM y  $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ ). *Si  $X$  es un espacio numerablemente compacto tal que  $X^2$  es hereditariamente normal, entonces  $X$  es compacto.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es infinito; luego, existe  $A \subseteq X$  infinito numerable. Dado que  $X$  es numerablemente compacto,  $A$  no es discreto. Como  $A$  contiene un subconjunto numerable el cual no es cerrado. Por la proposición anterior,  $X$  es perfectamente normal. Así, por el Teorema 18,  $X$  es compacto.  $\square$

**Proposición 14.** *Para cualquier espacio Hausdorff  $X$  los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El espacio  $X$  es numerablemente compacto.*
2. *Toda familia localmente finita de subconjuntos no vacíos de  $X$  es finita.*
3. *Para cualquier familia localmente finita de subconjuntos de un punto de  $X$  es finito.*
4. *Cualquier subconjunto infinito de  $X$  tiene un punto de acumulación.*
5. *Cualquier subconjunto infinito numerable de  $X$  tiene un punto de acumulación.*

Para más detalles sobre la Proposición 14 vea Engelking, Theorem 3.10.3 (v) de la referencia [2].

**Teorema 20.** AM. *Sean  $X$  un espacio topológico  $p \in X$  y  $S \subseteq X$  es tal que  $p \in \overline{S} \setminus S$  y  $|S| = \omega$ . Entonces existe una sucesión de puntos en  $S$  la cual converge a  $p$ , si alguna de las condiciones siguientes se satisface.*

- a)  $\chi(p, \overline{S}) < 2^\omega$ ;
- b)  $X$  es, numerablemente compacto y  $\psi_c(p, \overline{S}) < 2^\omega$ .

*Demostración.* Como  $|S| = \omega$ , existe una función biyectiva  $f : \omega \rightarrow S$ . Denotaremos, para cada  $n \in \omega$ ,  $s_n$  a la imagen de  $n$  bajo  $f$ . Entonces  $S = \{s_n : n \in \omega\}$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad,  $X = \overline{S}$ . Sea  $\mathcal{U}$  una familia de vecindades de  $p$ , con  $|\mathcal{U}| < 2^\omega$ .

Cuando a) se cumple. Entonces, consideraremos a  $\mathcal{U}$  como base local de  $p$ .

Sean  $\mathcal{A}' = \{U \cap S : U \in \mathcal{U}\}$ . Para cada  $n \in \omega$ , sea  $A_U = \{m \in \omega : s_m \in U \cap S\}$  y consideremos  $\mathcal{A} = \{A_U : n \in \omega \text{ y } U \in \mathcal{U}\}$ . Notemos que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ ; además, dado que  $X$  es  $T_2$ , tenemos que, para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \cap S$  es un conjunto infinito. Todavía más, el hecho de que  $\mathcal{U}$  es una base local de  $p$ , tenemos que  $\mathcal{U}$  es cerrada bajo intersecciones finitas; así que si  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ , entonces  $\bigcap\{U_i \cap S : i \in \{1, \dots, k\}\} = (\bigcap\{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\}) \cap S$ ; luego dado que  $\bigcap\{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \in \mathcal{U}$ , tenemos que  $(\bigcap\{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\}) \cap S$  es un conjunto infinito. De aquí que si  $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ , entonces

$\bigcap \mathcal{B}$  es un conjunto infinito. Así que por el Corolario 5, existe  $L \in [\omega]^\omega$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $L \setminus A$  es finito. Sea  $S' = \{s_k : k \in L\}$ .

Afirmación 1. La sucesión  $S'$  converge a  $p$ . En efecto, sea  $V \in \mathcal{U}$  arbitraria. Entonces  $A_V \in \mathcal{A}$ ; luego,  $L \setminus A_V$  es un conjunto finito; de donde,  $\{m \in L : m \notin A_V\}$  es un conjunto finito; así que existe  $m_0 \in \omega$ , tal que para todo  $k \geq m_0$ ,  $k \in A_V$ , lo cual implica que para todo  $k \geq m_0$ ,  $k \in A_V$  y por lo tanto, para todo  $k \geq m_0$ ,  $s_k \in V$ . Con lo que se concluye la prueba de la afirmación 1.

Cuando se cumple b). En este caso suponemos que  $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\} = \{p\}$  y que  $\mathcal{U}$  es cerrada bajo intersecciones finitas.

Sean  $\mathcal{A}' = \{\bar{U} \cap S : U \in \mathcal{U}\}$ . Para cada  $n \in \omega$ , sea  $A_U = \{m \in \omega : s_m \in \bar{U} \cap S\}$  y consideremos  $\mathcal{A} = \{A_U : n \in \omega \text{ y } n \in \omega\}$ . Notemos que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ ; además, dado que  $X$  es  $T_2$ , tenemos que, para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \cap S$  es un conjunto infinito. Todavía más, si  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ , entonces  $\bigcap \{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \in \mathcal{U}$  y entonces  $(\bigcap \{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \in \mathcal{U}) \cap S$  es un conjunto infinito y dado que  $\bigcap \{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \in \mathcal{U}$  y entonces  $(\bigcap \{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \in \mathcal{U}) \cap S \subseteq \bigcap \{\bar{U}_i \cap S : i \in \{1, \dots, k\}\}$ , tenemos que  $\bigcap \{\bar{U}_i \cap S : i \in \{1, \dots, k\}\}$  es un conjunto infinito. De aquí que si  $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ , entonces  $\bigcap \mathcal{B}$  es un conjunto infinito. Así que por el Corolario 5, existe  $L \in [\omega]^\omega$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $L \setminus A$  es finito.

Sea  $S' = \{s_k : k \in L\}$ . Como  $S'$  es un conjunto infinito numerable y  $X$  es numerablemente compacto, tenemos que  $S'$  tiene un punto de acumulación en  $X$  por la proposición anterior, pero como  $X$  es Hausdorff, tenemos que el punto de acumulación es  $p$ . Así,  $S'$  converge a  $p$ . □

**Teorema 21.** (*Čech-Pospišil*). Si  $x$  es un espacio Hausdorff compacto y ningún punto de  $X$  es un  $G_\delta$ , entonces  $|X| \geq 2^{\omega_1}$ .

Para más detalles sobre la prueba vea theorem (4,3 of the Chapter B,3) de [1].

**Corolario 15.** (AM). Todo espacio compacto de cardinalidad menor que  $2^{2^\omega}$  es secuencialmente compacto.

*Demostración.* Sea  $S \subseteq X$  un subconjunto infinito numerable. Si  $\bar{S} = S$ , podemos seleccionar una sucesión en  $S$ , la cual es convergente. Supongamos que  $\bar{S} \setminus S \neq \emptyset$ . Por el teorema Čech-Pospišil, existe  $p \in \bar{S} \setminus S$  con  $(p, \bar{S}) < 2^\omega$ , puesto que en otro caso, tendríamos que  $|S| \geq 2^{2^\omega} > |X|$ , Lo cual es una contradicción. Así, por a) del teorema anterior, existe una sucesión de puntos en  $S$ , la cual converge. □

Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $X$ , se dice que  $\mathcal{U}$  es *localmente finita* si para todo  $x \in X$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$ , tal que  $|\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}| < \omega$ .

**Definición 35.** Un espacio topológico es *cercanamente compacto*, si toda familia de subconjuntos abiertos no vacíos de  $X$  con la propiedad de ser localmente finita, resulta ser finita.

El lector interesado en la temática de los espacios cercanos compactos y revisar las pruebas de la proposición siguiente, puede consultar la referencia [13].

**Proposición 15.** Sea  $X$  un espacio topológico, son equivalentes los siguientes enunciados:

- (i)  $X$  es cercano compacto.
- (ii) Toda familia infinita de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares tiene un punto límite.
- (iii) Si  $\mathcal{C}$  es una colección numerable de conjuntos abiertos que satisface la PIF, entonces  $\bigcap \{cl_X(C) : C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ .
- (iv) Si  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta numerable de  $X$ , entonces existe una subfamilia finita,  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  tal que  $X = \bigcup \{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}\}$ .

Una interrogante natural es: ¿Existen espacios cercanamente compactos que no son compactos?

La respuesta a esta interrogante es afirmativa, como veremos en el ejemplo siguiente, pero antes recordemos que un espacio  $X$  es  $H$ -cerrado si para toda  $\mathcal{U}$ , cubierta abierta de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$  da tal forma que  $X = \bigcup \{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}\}$ . Evidentemente todo espacio  $H$ -cerrado es cercanamente compacto.

**Ejemplo 20.** Sea  $X = \{0\} \cup [1, \infty)$  dotado de la siguiente topología de la siguiente manera. Las vecindades de los puntos de  $[1, \infty)$  son las usuales de este conjunto visto como subespacio de  $\mathbb{R}$  y las vecindades de 0 tiene la forma siguiente:  $\{0\} \cup \bigcup \{(k, k+1) : k \geq m \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$ . Notemos que:

1. Dado que  $[1, \infty)$  tiene la topología de subespacio de  $\mathbb{R}$ , tenemos que,  $\mathbb{N}$ , el conjunto de los números naturales es cerrado y discreto en  $X$ ; luego,  $X$  no es compacto.
2.  $X$  es  $H$ -cerrado. En efecto, sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Tomemos  $U_0 \in \mathcal{U}$  de tal forma que  $0 \in U_0$ . Entonces existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{0\} \cup \bigcup \{(k, k+1) : k \geq m_0\} \subseteq U_0$ . Ahora, dado que el conjunto  $[1, m_0]$  es compacto en  $X$  y  $[1, m_0] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ , existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$  tal que  $[1, m_0] \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ . No es difícil verificar que  $cl_X(U_0 \cup \bigcup \mathcal{V}) = X$ .

Con todo, tenemos que  $X$  es cercanamente compacto y no es compacto.

Luego del ejemplo anterior, la pregunta obligada es: ¿Qué condiciones sobre un espacio cercanamente compacto,  $X$ , lo hacen compacto? Una consecuencia del Teorema 23, es que todo espacio cercanamente compacto, RC-perfecto,  $X$ . En el que  $L(X)$ , es denso, resulta ser  $X$  es compacto. Antes de establecer y demostrar el Teorema 21, requerimos de algunos resultados previos.

De ahora en adelante y mientras no se diga lo contrario, entendemos por espacio topológico a un espacio  $T_3$ .

Recordemos que un espacio  $X$  es perfecto si cada conjunto abierto en  $X$  es la unión numerable de conjuntos cerrados en  $X$  (equivalentemente, si cada conjunto cerrado en  $X$  es intersección numerable de conjuntos abiertos en  $X$ ).

**Teorema 22.** Todo espacio cercanamente compacto y perfecto es CCC.

*Demostración.* Sea  $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  una familia de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares en  $X$  de tamaño  $\omega_1$  y sea  $H = cl_X(\bigcup \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}) \setminus \bigcup \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ . Notemos que (por (ii) de la Proposición 15),  $H \neq \emptyset$ . Ahora, como  $X$  es perfecto, existe una sucesión decreciente y numerable  $\{W_n : n \in \omega\}$  de subconjuntos abiertos de  $X$  de tal forma que  $H = \bigcap \{W_n : n \in \omega\}$ . Para cada  $n \in \omega$ , sea  $S_n = \{\alpha < \omega_1 : U_\alpha \setminus cl_X W_n \neq \emptyset\}$ .

Afirmación 1. Para cada  $n \in \omega$ , la colección  $\{U_\alpha \setminus cl_X W_n : \alpha \in S_n\}$  es una familia localmente finita. En efecto, fijemos  $m \in \omega$  y denotemos  $\mathcal{W}_m = \{U_\alpha \setminus cl_X W_m : \alpha \in S_m\}$  y sea  $x \in X$  arbitrario. Tenemos tres casos:

1.  $x \in U_\beta \setminus cl_X W_m$ , para algún  $\beta \in S_m$ . Entonces  $|\{W \in \mathcal{W}_m : V \cap W \neq \emptyset\}| = 1$ ; donde  $V = U_\beta$ .
2.  $x \in H = \bigcap \{W_n : n \in \omega\}$ . Entonces, en particular,  $x \in W_m \subseteq cl_X(W_m)$ ; luego, tomando  $V = W_m$ , tenemos que  $|\{W \in \mathcal{W}_m : W \cap V \neq \emptyset\}| = 0 < \omega$ .
3.  $x \in X \setminus H$ . Tomando  $V = X \setminus H$ , tenemos que  $|\{W \in \mathcal{W}_m : W \cap V \neq \emptyset\}| = 0 < \omega$ .

Con lo que queda demostrada la Afirmación 1.

Afirmación 2. Para todo  $n \in \omega$ ,  $S_n$  es finito. En efecto, supongamos que, para algún  $m \in \omega$   $S_m$  no es finito, entonces (por la Afirmación 1), la familia  $\mathcal{W} = \{U_\alpha \setminus cl_X W_m : \alpha \in S_m\}$  es una familia localmente finita de abiertos no vacíos en  $X$  y es no finita, lo cual es absurdo, pues  $X$  es cercanamente compacto.

Por la Afirmación 2 y el hecho de que  $\omega_1$  es regular, tenemos que  $\delta = \sup(\bigcup\{S_n : n \in \omega\})$ . Notemos que  $U_\delta \subseteq \bigcap\{cl_X W_n : n \in \omega\} < \omega_1$ .

Ahora bien, como  $X$  es regular, existe  $V_1$  abierto en  $X$  de tal manera que  $cl_X V_1 \subseteq U_\delta$ . Evidentemente  $V_1 \cap W_1 \neq \emptyset$  y  $V_1 \cap W_1 \cap W_2$  es denso en  $V_1 \cap W_1$ , usando nuevamente la regularidad de  $X$ , podemos elegir otro abierto no vacío  $V_2$  de tal forma que  $\emptyset \neq cl_X(V_2 \cap W_2) \subseteq V_1 \cap W_1$ . Procediendo inductivamente de manera similar, podemos construir una sucesión decreciente  $\{V_k : k \in \omega\}$  de conjuntos abiertos y no vacíos en  $X$ , de tal manera que  $\emptyset \neq cl(V_{k+1} \cap W_{k+1}) \subseteq V_k \cap W_k$  para cada  $k \in \omega$ . Ahora bien, por la Proposición 15,  $\bigcap\{cl_X(V_n \cap W_n) : n \in \omega\} \neq \emptyset$ . Pero  $\bigcap\{cl_X(V_n \cap W_n) : n \in \omega\} \subseteq H \cap U_\delta = \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Así la prueba está completa.  $\square$

**Corolario 16.** *Todo espacio cercanamente compacto y perfecto es CCC y primero numerable.*

Recordemos que un espacio  $X$  tiene la propiedad de  $\pi$ -peso contable si existe una colección numerable  $\mathcal{C}$  de subconjuntos abiertos no vacíos de  $X$  tales que si  $V$  es un subconjunto abierto no vacío de  $X$ , entonces existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $C \subseteq V$ . Además si  $X$  es un espacio topológico, una red es una función  $\lambda : D \rightarrow X$  donde  $(D, \geq)$  es un conjunto dirigido. Para más detalles sobre esto vea [15].

**Lema 10.** AM. *Sea  $X$  un espacio cercanamente compacto con  $\pi$ -peso numerable. Si  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $X$  tal que  $|\mathcal{U}| < 2^\omega$ , entonces existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$  tal que  $X = \bigcup\{c_X(U) : U \in \mathcal{V}\}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \omega\}$  una red para  $X$ , testigo de que  $X$  tiene  $\pi$ -peso numerable. Dado que  $|\mathcal{U}| < 2^\omega$ , supondremos que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ ; donde  $\kappa$  es un cardinal menor que  $2^\omega$ .

Consideremos, para cada  $\alpha \in \kappa$ ,  $A_\alpha = \{n \in \omega : V_n \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ .

Afirmación 1. Para cada  $m \in \omega$ , existe  $\alpha_m \in \kappa$  de tal manera que  $m \in A_{\alpha_m}$ . En efecto, si  $m \in G$ , entonces tomamos  $x \in V_m$ ; luego, dado que  $\mathcal{U}$  es cubierta de  $X$ , existe  $\alpha_m \in \kappa$  de tal manera que  $x \in U_{\alpha_m}$ . Claramente  $V_m \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$  y, por lo tanto,  $m \in A_{\alpha_m}$ .

Tenemos dos casos:

(i) Existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in F\} = \omega$ . En este caso tenemos la siguiente:

Afirmación 2.  $X = cl_X(\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in F\})$ . En efecto, sean  $x \in X$  y  $U$  una vecindad de  $x$ . Como  $\mathcal{B}$  es red para  $X$ , existe  $m \in \omega$  tal que  $V_m \subseteq U$ . Por la Afirmación 1, existe  $\alpha_m \in \kappa$  tal que  $m \in A_{\alpha_m}$ ; luego,  $V_m \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$ . Por tanto  $\emptyset \neq U \cap U_{\alpha_m} \subseteq U \cap (\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in F\})$ . Lo cual implica que  $x \in cl_X(\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in F\})$ .

Entonces, en el caso bajo análisis,  $\mathcal{V} = \{U_\alpha : \alpha \in F\}$  satisface lo deseado.

(ii) Existe  $F \in [\kappa]^{<\omega}$  tal que  $G = \bigcap\{\omega \setminus A_\alpha : \alpha \in F\}$ , es un conjunto finito.

De la Afirmación 1, para cada  $m \in G$ , fijamos  $\alpha_m \in \kappa$  de tal manera que  $m \in A_{\alpha_m}$  y hacemos  $F_G = \{\alpha_m : m \in G\}$ . Ahora, consideramos  $\mathcal{V} = \{U_\alpha : \alpha \in F \cup F_G\}$

Afirmación 3.  $X = cl_X(\bigcup\mathcal{V})$ . En efecto, sean  $x \in X$  y  $U$  una vecindad de  $x$ . Como  $\mathcal{B}$  es red para  $X$ , existe  $m \in \omega$  tal que  $V_m \subseteq U$ . Tenemos dos casos:

- (a)  $m \in G$ . En este caso, para tal  $m$  hemos fijado  $\alpha_m$ , de tal manera que  $V_m \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $\emptyset \neq U \cap U_{\alpha_m} \subseteq U \cap (\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in F \cup F_G\})$  (pues  $\alpha_m \in F_G$ ).
- (b)  $m \in \omega \setminus G$ . Como  $m \notin G$ , existe  $\alpha_m \in F$  tal que  $m \in A_{\alpha_m}$ ; luego,  $\emptyset \neq U \cap U_{\alpha_m} \subseteq U \cap (\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in F \cup F_G\})$  (pues  $\alpha_m \in F$ ).

De (a) y (b) concluimos que la Afirmación 3 es cierta.

(iii) Para cualquier  $F \in [\kappa]^{<\omega}$ , se cumple que  $\bigcap\{\omega \setminus A_\alpha : \alpha \in F\}$  es un conjunto infinito. Sea  $\mathcal{B} = \{\omega \setminus A_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ . Por nuestras hipótesis, tenemos que  $\mathcal{B}$  satisface las hipótesis del Corolario 5 (de la sección 2,3); así que podemos asegurar que existe  $L \in [\omega]^\omega$ , de tal manera que para todo  $\alpha \in \kappa$ ,  $L \setminus (\omega \setminus A_\alpha) = L \cap A_\alpha$  es finito. Dado que  $X$  es cercanamente compacto,  $\{V_n : n \in S\}$  tiene un punto clausura, digamos  $p$ . Puesto que  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $\alpha_p \in \kappa$  tal que  $p \in U_{\alpha_p}$ . Luego,  $\{n \in S : n \in A_{\alpha_p}\}$  es infinito, lo cual es una contradicción.

La prueba está completa. □

**Lema 11.** *Todo espacio  $H$ -cerrado y  $T_3$  es compacto.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio  $T_3$  el cual es, además,  $H$ -cerrado. Sea  $\mathcal{U}$  una cubiereta abierta de  $X$ . Por cada  $x \in X$ , fijemos  $V_x$  vecindad de  $x$  y  $U_x \in \mathcal{U}$  de tal manera que  $cl_X(V) \subseteq U_x$  (aquí estamos usando la regularidad del espacio). Es claro que la colección  $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$  es una cubierta abierta de  $X$ ; luego, dado que  $X$  es  $H$ -cerrado, existe  $F \in [X]^{<\omega}$ , de tal manera que  $\bigcup\{cl_X(V_x) : x \in F\} = X$ . Ahora bien, por la construcción tenemos que  $\bigcup\{cl_X(V_x) : x \in F\} \subseteq \bigcup\{cl_X(U_x) : x \in F\}$ . Así que  $\bigcup\{U_x : x \in F\} = X$ . Por tanto  $X$  es compacto. □

Un espacio topológico  $X$  es *RC-perfecto* si cada subconjunto abierto en  $X$  se puede ver como la unión numerable de conjuntos cerrados regulares (recordemos que un subconjunto de  $X$  es cerrado regular si es la clausura de un conjunto abierto en  $X$ ; equivalentemente si todo conjunto cerrado es la intersección numerable de abiertos regulares en  $X$ ). Es inmediato de la definición que todo espacio RC-perfecto es un espacio perfecto.

**Teorema 23.** *AM. Si  $X$  es un espacio separable, RC-perfecto y cercanamente compacto, entonces  $X$  es Lindelöf.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  no es Lindelöf. Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ , la cual satisface que para cualquier  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ ,  $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$ .

A continuación mostraremos que existen una sucesión  $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  de puntos  $X$ , una sucesión  $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  y una sucesión  $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ , las cuales cumplen las condiciones siguientes, para cada  $\alpha < \omega_1$ :

- (i)  $x_\delta \in G_\delta \subseteq cl_X G_\delta \subseteq U_\delta$ , para cada  $\delta < \alpha$ .
- (ii)  $x_\delta \in U_\delta \setminus \bigcup\{U_\gamma : \gamma < \delta\}$  para cada  $\delta < \alpha$ .

Sea  $x_0$  un punto arbitrario de  $X$ . Como  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U_0 \in \mathcal{U}$  de tal forma que  $x_0 \in U_0$ . Dado que  $X$  es regular, existe  $G_0$  vecindad de  $x_0$  de tal manera que  $cl_X(G_0) \subseteq U_0$ , esto es posible por la regularidad de  $X$ .

Sea  $0 < \alpha < \omega_1$  y supongamos que para todo  $\delta < \alpha$  hemos construido un punto  $x_\delta$ , un abierto  $G_\delta$  y un elemento  $U_\delta \in \mathcal{U}$  de manera tal que (i) y (ii) se satisfacen. Vamos a construir  $x_\alpha$ ,  $G_\alpha$  y un elemento  $U_\alpha \in \mathcal{U}$ .

Por nuestro supuesto tenemos que  $X \setminus \bigcup\{U_\delta : \delta < \alpha\} \neq \emptyset$ ; así que podemos tomar un punto  $x_\alpha \in X \setminus \bigcup\{U_\delta : \delta < \alpha\}$ . Dado que  $\mathcal{U}$  cubre a  $X$ , existe  $U_\alpha \in \mathcal{U}$  de tal manera que  $x_\alpha \in U_\alpha$ . Fijemos una vecindad  $G_\alpha$  de  $x_\alpha$  de tal manera que  $cl_X(G_\alpha) \subseteq U_\alpha$ . Lo que termina la construcción.

Claramente los conjuntos  $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ,  $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  y  $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  satisfacen lo deseado.

Sea  $G = \bigcup\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ . Dado que  $X$  es RC-perfecto, existe una colección  $\{A_n : n \in \omega\}$  de subconjuntos cerrados regulares de  $X$  de tal forma que  $G = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$ . Por Proposición 15 (iii), tenemos que cada  $A_n$  es cercanamente compacto. Ahora bien, como  $X$  es separable, entonces (para cada  $n \in \omega$ ), se tiene que  $int_X A_n$  es separable y, por lo tanto cada  $A_n$  es separable.

Aún tenemos más, por Corolario 16 se cumple que  $X$  es primero numerable y por lo tanto cada  $A_n$  lo es. Puesto que todo espacio separable y primero numerable tiene  $\pi$ -peso numerable, tenemos que para todo  $n \in \omega$ ,  $A_n$  tiene  $\pi$ -peso numerable. Así que para cada  $n \in \omega$ , por (9), existe un subconjunto finito  $F_n$  de  $\omega_1$  tal que  $A_n \subseteq \bigcup \{cl_X(G_\alpha \cap A_n) : \alpha \in F_n\}$ . Sea  $F = \bigcup \{F_n : n \in \omega\}$ .

Afirmación.  $G \subseteq \bigcup \{cl_X(G_\alpha \cap A_n) : \alpha \in F \text{ y } n \in \omega\}$ . En efecto, si  $x \in G$ , entonces existe  $n_x \in \omega$  de tal forma que  $x \in A_{n_x}$ , pero  $A_{n_x} \subseteq \bigcup \{cl_X(G_\alpha \cap A_{n_x}) : \alpha \in F_{n_x}\}$ ; lo cual implica que  $x \in cl_X(G_\alpha \cap A_{n_x})$ , para algún  $\alpha \in F_{n_x}$ . Así,  $x \in \bigcup \{cl_X(G_\alpha \cap A_n) : \alpha \in F \text{ y } n \in \omega\}$ .

Finalmente, como  $F \subseteq \omega_1$  es numerable, entonces  $\beta = \sup(F) < \omega_1$ . Sea  $\alpha = \beta + 1 < \omega_1$ . Por construcción  $x_\alpha \in G \setminus \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in F\}$ , pues  $\subseteq \bigcup \{cl_X(G_\alpha \cap A_n) : \alpha \in F_n \text{ y } n \in \omega\} \subseteq \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in F\}$ . Lo cual es una contradicción. Así,  $X$  es Lindelöf.  $\square$

**Corolario 17.** AM. Si  $X$  es un espacio separable, RC-perfecto y cercanamente compacto, entonces  $X$  es compacto.

*Demostración.* Primero notemos que  $X$  es  $H$ -cerrado. En efecto, sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ , por el Teorema anterior, existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ , tal que  $X = \bigcup \mathcal{V}$ . Pero  $X$  es cercanamente compacto, así que para tal  $\mathcal{V}$ , existe  $\mathcal{W} \in [\mathcal{U}]^{< \omega}$  tal que  $X = cl_X(\bigcup \mathcal{W})$ . Así que  $X$  es  $H$ -cerrado. Luego, por el Lema 10(a),  $X$  es compacto. (b) es Lindelöf  $\square$

*Pregunta (AM)* ¿Un espacio cercanamente compacto y RC-perfecto es separable?

Ahora recordemos si  $B \subseteq A$ ,  $A$  está ordenado por  $\leq$ .  $B$  es una cadena en  $A$  si para cualesquiera dos elementos de  $B$  son comparables, para más detalles, vea [5]. El resultado siguiente proporciona una respuesta parcial y afirmativa para la pregunta anterior.

**Teorema 24.** (AM). Sea  $X$  un espacio cercanamente compacto y RC-perfecto. Si,  $L(X)$  es denso en  $X$ , entonces  $X$  es separable.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R}$  la colección de todas las familias  $\mathcal{C}$  tales que:

1. Para cualesquiera  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ,
2. Todo elemento  $C$  en  $\mathcal{C}$  es compacto y cerrado regular.

Veamos que en  $(\mathcal{R}, \subseteq)$  toda  $\subseteq$ -cadena tiene una cota superior en  $\mathcal{R}$ . Tomemos  $\mathcal{R}'$  una  $\subseteq$ -cadena en  $\mathcal{R}$ .

Afirmación.  $\bigcup \mathcal{R}' \in \mathcal{R}$ . En efecto, es evidente que para todo  $C \in \bigcup \mathcal{R}'$ ,  $C$  es compacto y cerrado regular. Además, si  $C_1, C_2 \in \bigcup \mathcal{R}'$ , con  $C_1 \neq C_2$ , existen  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{R}'$  tal que  $C_i \in \mathcal{C}_i$ , para  $i = 1, 2$ . Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$  (pues  $\mathcal{R}'$  es  $\subseteq$ -cadena); luego,  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2$ , por lo que  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .

Por la afirmación anterior tenemos que toda  $\subseteq$ -cadena en  $\mathcal{R}$  tiene cota superior en  $\mathcal{R}$  y por el Lema de Zorn, podemos tomar un elemento  $\subseteq$ -maximal, digamos  $\mathcal{M}$ , en  $\mathcal{R}$ .

Por el Corolario 2.4, tenemos que  $X$  es CCC y primero numerable y, por tanto, todo elemento de  $\mathcal{M}$  también tienen estas propiedades.

Ahora bien, como todo espacio compacto es cocompacto; más aún, todo subconjunto cerrado de un compacto es cocompacto. En suma, para cada  $C \in \mathcal{M}$  tenemos que

1.  $C$  es cocompacto; más aún, la compacidad de  $C$  implica que todo subconjunto cerrado de  $C$  también es cocompacto.
2.  $C$  es CCC
3.  $C$  es primero numerable.

Así que por el Teorema 14, para todo  $C \in \mathcal{C}$ , tenemos que  $C$  es separable.

Puesto que la colección  $\{int_X(M) : M \in \mathcal{M}\}$  es una familia de abiertos ajenos por pares y  $X$  es CCC, tenemos que  $|\mathcal{M}| \leq \omega$ ; luego,  $\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}$  es separable.

*Afirmación.*  $X \subseteq cl_X(\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\})$ . Supongamos que no, entonces  $X \setminus cl_X(\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}) \neq \emptyset$ . Dado que  $L(X)$  es denso y  $X \subseteq cl_X(\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\})$  es abierto no vacío, existe  $d \in L(X) \cap (X \setminus cl_X(\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}))$ . Para tal  $d$  existe  $V_1 \in \mathcal{V}_x$  tal que  $cl_X(V_1) \cap (\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}) = \emptyset$  (pues  $X$  es regular). Además, como  $d \in L(X)$ , existe  $V_2 \in \mathcal{V}$  tal que  $V_2$  es compacto. Sea  $V = V_1 \cap V_2$ , entonces  $V \cap (\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}) = \emptyset$  y  $cl_X(V) \subseteq cl_X(V_2)$ ; luego, la compacidad de  $cl_X(V_2)$ , implica que  $cl_X(V)$  es compacto. Denotemos  $B = cl_X(int_X(cl_X(V)))$ , entonces  $B$  es un subconjunto cerrado regular (y no vacío). Como  $V \subseteq cl_X(V)$ , entonces  $V \subseteq int_X(cl_X(V))$ ; luego,  $V \subseteq int_X(cl_X(V)) \subseteq cl_X(int_X(cl_X(V)))$ ; es decir,  $d \in cl_X(int_X(cl_X(V))) = B$ . De aquí que  $B \notin \mathcal{M}$ ; aún más, dado que  $B \subseteq cl_1(V_1)$  tenemos que para todo  $C \in \mathcal{M}$ ,  $C \cap B = \emptyset$ . Entonces, la colección  $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{B\} \in \mathcal{R}$  y  $\mathcal{M}' \setminus \mathcal{M} \neq \emptyset$ , lo que contradice la maximalidad de  $\mathcal{M}$ . Con lo que se concluye que la afirmación previa es verdadera.

De la afirmación anterior concluimos que el subespacio separable  $\bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}$  es denso en  $X$  y, por lo tanto,  $X$  es separable. □

**Corolario 18.** AM. *Sea  $X$  un espacio cercanamente compacto y RC-perfecto. Si,  $L(X)$  es denso en  $X$  entonces  $X$  es compacto.*

*Demostración.* Por las hipótesis tenemos, del teorema anterior, que  $X$  es separable; luego, por el Corolario 17,  $X$  es compacto. □

# Bibliografía

- [1] Barwise, J., Keisler, H. J. (1977). Handbook of Mathematical Logic. North-Holland.
- [2] ENGELKING R. (1977). *General topology*, Polish Sci. Public; Warsaw, 1977.
- [3] FRANKLIN S.P., RAJAGOPALAN M., *Some examples in topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 305-314.
- [4] HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, F. (2003) *Teoría de conjuntos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas.
- [5] HRBACEK K., JECH T. (1999). *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, Inc; Second Edition.
- [6] JUHÁSZ I. (1971) *Cardinal Functions in topology*, Mathematicak centre tracts, Mathematisch centrum amsterdam.
- [7] KATETOV M., *Complete normality of Cartesian products*, Fund. Math. 35 (1948), 271-274.
- [8] KUNEN K. (1980). *Set theory, an introduction to independence proofs*, Studies in Logig and the Foundamentations of Mathamatics, vol. 102.
- [9] MARTIN D. A, SOLOVAY R. M., *Internal Cohen extensions*, Ann Math. Logic 2 (1970), 143 – 178.
- [10] OSTOSZEWSKI, A. J., *On countably compact perfectly normal spaces* J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), 505-516.
- [11] PÉREZ MEJÍA A. (2016). *Aplicacions del axioma de Martin y separabilidad*. Tesis de maestría: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [12] PIXLEY, C., ROY, P. *Uncompletable Moore spaces*, Proc. Auburn, Univ. Conf. Auburn, AL, 1969.
- [13] PORTER, J.R., WOODS, G.R. (1984). *Topology Proceedings*. <https://www.researchgate.net/publication/253810622>.
- [14] POSPISIL B., *On bicomact spaces*, Pluc. Fac. Sci. Univ. Masaryk 270 (1939), 3-16.
- [15] SALICRUP, G., ROSENBLUETH, J., & PRIETO, C., (1993). *Introducción a la topología*.