BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL TRATAMIENTO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN LIBROS DE TEXTO Y PLANES DE ESTUDIO DE LAS PREPARATORIAS DE LA BUAP

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

GUILLERMINA FLORES COYOTECATL

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE., JUNIO 2021

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Dios por brindarme vida y salud, por las bendiciones que me ha dado, así mismo, por estar siempre presente en mi vida y guiar mi camino.

A mis padres, por el amor, confianza, orientación y apoyo incondicional que siempre me han brindado, por sus palabras de aliento, por enseñarme que hay que fijarnos metas y trabajar para alcanzarlas, que las cosas no siempre son como quisiéramos, pero no por eso debemos claudicar.

A mis suegros, por el apoyo, cariño, confianza y orientación que me han brindado, así como por motivarme a alcanzar mis metas y acompañarme en mi camino a ellas.

A mi esposo, por su compañía, amor y apoyo incondicional. Así como por todos los momentos que hemos pasado juntos.

A mis hijos, la más grande bendición que Dios me ha dado, por ser mi inspiración y mi motor para seguir adelante.

A mis amigos, por su grata compañía, por el apoyo que me han brindado y por todo lo que he aprendido de ellos y con ellos.

A mi asesora de tesis, Dra. Lidia Hernández Rebollar, por su apoyo, comprensión, paciencia y por el tiempo que me ha brindado para la realización de este trabajo. De igual forma, agradezco su acompañamiento y asesoría durante mi trayecto en la licenciatura.

A mis sinodales: la Mtra. Elizabeth Martínez Banfi, el M.C. Gregorio Rogelio Cruz Reyes y el Dr. Gabriel Kantún Montiel por el tiempo dedicado a la revisión del presente trabajo, así como por sus sugerencias y comentarios.

A los profesores que tuve en la licenciatura por compartir su conocimiento y experiencia, especialmente a los profesores: Iván Martínez Ruíz, Lidia Hernández Rebollar, Hortensia Josefina Reyes Cervantes, Gregorio Rogelio Cruz Reyes, Elizabeth Martínez Banfi, Aureliano Jorge Jiménez Martínez, Jaime Badillo Márquez y Julio Erasto Poisot Macías. A quienes recuerdo con gran cariño.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En el presente trabajo se muestra un análisis comparativo del tema *límite de una función* en los planes de estudio 06 por competencias y 07 de las preparatorias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). También, se presenta un análisis realizado a los libros de texto empleados con mayor frecuencia por los docentes de dichas preparatorias, con la finalidad de reportar la forma en que se presenta este tema. Para el análisis se utilizó el método de investigación propuesto por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), el cual considera tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico. Aunado a esto, se presenta la ubicación de nuestro tema de investigación en los libros seleccionados.

En lo que respecta a la estructura conceptual se abordan los siguientes aspectos: términos, notación, convenios, resultados, conceptos, métodos de resolución, destrezas, razonamiento y estrategias. Para los sistemas de representación del límite de una función, se muestran los sistemas propuestos por Medina (2001): analítico (numérico-tabular de función, gráfico-cartesiana, simbólico-específica de función, definición formal de límite de una función y verbal de función); algebraico (algebraico-indeterminado); aritmético (simbólico específico de una sucesión y cartesiana de sucesión). En cuanto al análisis fenomenológico, los autores de los libros analizados abordan ejemplos y ejercicios principalmente relacionados con fenómenos físicos, y en segundo lugar situaciones ocupacionales o laborales como compra y venta de productos de abarrotes o agrícolas.

Introducción

En toda institución educativa, tanto la labor docente como los libros de texto que se manejan son de suma importancia para el aprendizaje de los educandos. Por ello, este trabajo se centra en los libros de texto de matemáticas empleados con mayor frecuencia por los docentes de preparatorias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), con plan de estudio 06 por competencias y 07, analizando el tema *límite de una función*.

El tema *límite de una función* se aborda en el tercer año de las preparatorias BUAP en el plan 06 por competencias; este tema se imparte en la asignatura de *Cálculo*, la cual se oferta únicamente a los estudiantes de las áreas de Ciencias de la Salud e Ingenierías y Ciencias Exactas. Por otro lado, en el plan 07 el tema es abordado en el segundo año (cuarto semestre), durante el tercer bloque de la asignatura *Funciones.* Debido a que los primeros dos años pertenecen al tronco común, todos los estudiantes cursan esta materia.

El interés de trabajar con los libros de texto se debe a que son de apoyo para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otro lado, la elección de analizar el tema *límite de una función* se debe a que dicho tema es fundamental para estudiar la continuidad de las funciones, así como su derivación y, por ende, su integración. Más aún, el tema de límites se retoma fuertemente en el nivel superior para el área de Ingeniería y Ciencias Exactas.

Con este análisis se pretende que los docentes de las preparatorias de la BUAP que imparten el tema de *límite de una función,* cuenten con mayor información para su planeación didáctica. Por ejemplo, podrán observar la forma en que se presenta dicho tema en los libros que emplean con mayor frecuencia, destacando los temas previos a dicho tema, así como la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

Objetivo. Reportar la forma en que se presenta el tema de límite de una función en los libros de texto de matemáticas que utilizan con mayor frecuencia los docentes y en los planes de estudio 06 por competencias y 07 de las preparatorias de la BUAP.

El objetivo general se puede descomponer en los siguientes objetivos específicos:

- Analizar los conocimientos previos con la finalidad de tener en cuenta lo que el estudiante necesita para abordar el tema de *límite de una función*.
- Analizar cada uno de los componentes propuestos por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008): estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico.

Debido a que las preparatorias BUAP no cuentan con libros oficiales a seguir, los docentes se apoyan en libros que mejor se apeguen al temario según su opinión. Luego de haber registrado la respuesta de los docentes de 4 de sus 6 preparatorias a la interrogante: ¿qué libros de cálculo emplea para impartir el tema *límite de una función*? se obtuvo una lista total de 19 libros. De esos, se eligieron los seis más frecuentes.

La estructura de este trabajo es la siguiente:

- Capítulo 1. Marco teórico. Se revisan investigaciones relacionadas con los libros de texto, así como de su análisis. También se describen los componentes de análisis (estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico). Posteriormente, se aborda el tema de *límite de una función* y finalmente, se revisa dónde se ubica el *límite de una función* en el currículo de las preparatorias BUAP para los planes 06 por competencias y 07.
- Capítulo 2. Metodología. Se presenta el método de investigación que se siguió para este trabajo, dicho método es el de análisis de contenido, propuesto por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), el cual considera tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico. También se presentan los títulos de los libros empleados por los docentes de las preparatorias BUAP (“Alfonso Calderón

Moreno”, Urbana “Enrique Cabrera Barroso”, “Benito Juárez García” y “Emiliano Zapata”), laborando en el ciclo escolar 2018-2019, que en ese momento estaban impartiendo o habían impartido en ciclos anteriores la materia de Cálculo. De todos los que mencionaron los profesores se seleccionaron los seis que presentaron mayor preferencia por los docentes.

- Capítulo 3. Resultados. Se presenta el análisis realizado a los libros de texto, presentando primero la ubicación del tema límite de una función en los libros de texto, después la clasificación cognitiva del contenido de límite de una función, posteriormente, los sistemas de representación y finalmente el análisis fenomenológico.

Capítulo 1. Marco teórico

1.1 Libros de texto

Pese a los avances tecnológicos y la variedad de recursos educativos que existen, los libros de texto siguen siendo el apoyo mayoritario en la práctica de la enseñanza (Cabero, Duarte y Barroso, 1989; García y Caballero, 2005). Los libros de texto son ampliamente utilizados en el aula (Parcerisa Arán, 1996). No obstante "ningún libro de texto, por bueno que sea, será un instrumento de validez universal; siempre habrá que emprender actividades adicionales de índole muy diversa" (Cockcroft,1985, p.114). En cuanto a la influencia que el libro de texto tiene en el aula, Parcerisa Arán (citado en Fernández y Caballero, 2017) menciona:

> Se estima que los libros de texto llegan a condicionar de manera importante el tipo de enseñanza que se realiza, ya que muchos enseñantes lo utilizan de manera cerrada, sometiéndose al currículo específico que se refleja en él, tanto en lo que se refiere a los contenidos de aprendizaje como a la manera de enseñarlos (p. 203).

El libro de texto es empleado tanto por alumnos como por profesores, y es definido de la siguiente manera:

> Recurso didáctico, que puede ser de sustrato material o virtual, en el cual se materializa un discurso compuesto por palabras, palabras y símbolos o palabras, símbolos e ilustraciones, estructurado de manera secuencial y sistemática en atención a la maduración intelectual y emocional del lector, y creado con la intención expresa de ser utilizado como un recurso pedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema escolar formal, con el fin de brindar información sobre algún área del conocimiento en atención a la oferta curricular establecida en los programas de estudio, elaborados por las autoridades educativas nacionales, quienes a su vez autorizan, supervisan y reglamentan sus contenidos, extensión y tratamiento (Ramírez, 2002, p.111).

Cabero, Duarte y Romero (1995) señalan las siguientes características de los libros de texto, las cuales los diferencian respecto a otros materiales impresos utilizados en el sistema escolar:

- Es un instrumento destinado a la enseñanza e instrucciones con un fuerte sentido escolar.
- Incluye teóricamente la información que debe ser procesada por el estudiante en un periodo de tiempo reglado.
- Posee una configuración de acuerdo a pautas de diseño específicas, que persiguen presentar la información de una manera sistemática, de acuerdo a principios didácticos y psicológicos que faciliten la comprensión, dominio y recuerdo de la información por parte del estudiante.
- Tiende a compartimentalizar los contenidos, tanto diacrónicamente como sincrónicamente.

1.2 Análisis de los libros de texto

Debido a que los libros de texto son recursos educativos de primera instancia, es de suma importancia el análisis de los mismos. Para el análisis de libros de textos en general se han propuesto diferentes modelos más o menos exhaustivos, que comprenden el estudio de diversos elementos que permiten caracterizar el texto en cuestión.

Al respecto Muniesa (citado en Ruíz, Dávila, Etxeberria, y Sarasua, 2013) menciona:

> La importancia que el estudio de los libros de texto tiene para el conocimiento específico, interno y formal de la educación matemática impartida en cada momento, no sólo en cuanto a los contenidos y su ordenación, sino en cuanto a métodos de exposición, orientaciones pedagógicas, carácter teórico - práctico, lenguaje matemático utilizado, predominio de unos contenidos sobre otros, y tantos otros parámetros que nos descubre la observación de cualquier obra impresa (p.248).

Algunos de los modelos que se han propuesto para el análisis de libros de texto de matemáticas, son los siguientes:

González y Sierra (2004) hacen una propuesta de análisis de textos de matemáticas que se basa en los modos de representación, que son: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. También proponen estudiar el sistema matemático de signos a través de sus aspectos sintácticos (estructura del problema, descripciones teóricas, símbolos utilizados en las tablas, tipos de expresiones simbólicas), semántico (fenomenología, tipos de descripciones, tipos de tablas, tipos de gráficas y significado de las expresiones simbólicas), pragmático (función de los ejercicios, papel de las definiciones, actividades relacionadas con las tablas, actividades gráficas y papel de las expresiones simbólicas) y sociocultural (influencia social y adaptación al currículo, influencias didácticas, aplicación de las tablas, presentación de las gráficas (estática/dinámica) y complejidad de las expresiones simbólicas). Desdoblando las descripciones verbales, según sea el caso, en teoría y práctica y combinando las clases anteriores, obtienen una tabla con 20 celdas (tabla 1) que les permite clasificar los libros en tres categorías: expositivos, tecnológicos y comprensivos.

Tabla 1. Categorías, dimensiones y perfiles propuestos por Gonzáles y Sierra (2004)

Categorías		**Dimensiones**	**Expositivo**	**Tecnológico**	**Comprensivo**
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones

Semántica	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/ Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/ Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Socio-cultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

Para la valoración de textos de matemáticas, Ortega (1996) construye un instrumento con diez organizadores: entorno; teoría; ilustraciones; enfatización; ejercicios, cuestiones y problemas; motivación; metodología; actividades; nuevas tecnologías y otros.

Fernández (2011) sintetiza en tres dimensiones la información necesaria para el análisis de textos: organización del contenido, análisis fenomenológico y análisis conceptual, y lo ejemplifica con el estudio del tratamiento de la proporcionalidad en diversos textos de matemáticas.

Para Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) el análisis de contenido es "una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares" (p.9), para dicho análisis se centran en tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico.

1.2.1 Estructura conceptual

La estructura conceptual, como herramienta para el análisis de las matemáticas escolares es la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. Por lo tanto, la estructura conceptual no es solamente la enumeración de los conceptos que se encuentran involucrados en la estructura matemática. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones pero que se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados.

1.2.2 Sistemas de representación

La necesidad de facilitar la trasmisión, comprensión, expresión, racionalización y análisis de una idea, hizo que el ser humano utilizara diferentes tipos de representación. Una representación es una configuración de algún tipo, que en su totalidad o en parte, significa y simboliza un objeto, destacando distintas características o elementos diferenciadores del objeto.

Cuando hablamos de representación, nos podemos referir a representaciones internas o externas. Las representaciones internas se usan para describir la cognición de las personas (las posibles representaciones mentales de los individuos propias de cada uno). Con las representaciones externas nos referimos a los signos, que se rigen bajo reglas en un contexto específico, las representaciones externas o semióticas son los instrumentos con los que exteriorizamos nuestras representaciones internas para hacerlas accesibles a otras personas. Este tipo de representaciones bajo las reglas de un sistema específico de un determinado contexto son conocidas como representaciones semióticas o sistemas de representaciones. Se debe tener claro que una representación debe tener asociado un contexto, porque fuera de ahí, carece de sentido (Duval, 1993).

Para comprender la importancia de los sistemas de representación en la matemática debemos ser conscientes de que las matemáticas surgen de la razón del ser humano, que por medio de ella busca organizar e interpretar el contexto que se percibe y su dinámica, dando como producto a lo que se determina como objetos matemáticos (números, funciones, figuras geométricas, límites, …). Filosóficamente hablando, estos objetos son reales porque son percibidos por nuestra razón. Aunque los objetos matemáticos tienen existencia real no tienen existencia material, de aquí la importancia de la representación en las matemáticas. Por ser las matemáticas un producto propio de la razón, carece de forma física para su interpretación y trasmisión a otros individuos, por lo que, la representación ayuda a trasmitir, a desarrollar e interpretar las matemáticas.

En las matemáticas y aún más en la enseñanza de las matemáticas, todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos físicos" para exhibir en su lugar; por lo que, la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que permitan su expresión y su reconocimiento. Debemos tener claro que los objetos matemáticos admiten representaciones diversas según la naturaleza de los signos que configuran el contexto desde el que se elabora la representación. Cada representación debe remitir a la funcionalidad asociada al objeto matemático y debe mantener invariantes sus propiedades. Sin embargo, la forma en la que cada representación ofrece la información sobre el objeto es distinta, y se enfatizan ciertos aspectos en detrimento de otros, lo que hace que el tipo de actividad con el objeto predisponga el uso de una u otra representación.

Es preciso resaltar que las representaciones no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión; y que se tiene que distinguir el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, límites, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) porque de no ser así, no hay comprensión del objeto matemático.

Un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consiste en conseguir que los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra, pues el manejo de diferentes representaciones permite hablar de comprensión, entendimiento y razonamiento por parte del estudiante, pero se reconoce que este objetivo es difícil de lograr: “La conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas” (Duval, 2002, p. 3), debido a diferentes hechos, uno de ellos es que en muchas ocasiones la misma representación es símbolo de objetos matemáticos distintos, causando confusión en los alumnos.

En cuanto al tema de *límite de una función,* Medina (2001) propone los siguientes sistemas de representación (citados por Gómez, M. y Pantoja, Y. 2013): analítico de funciones (numérico-tabular de función, gráfico-cartesiana, simbólico-específica de función, definición formal de límite y verbal de función); algebraico (algebraico-indeterminado); y aritmético (numérico-tabular de sucesión; simbólico-específica de sucesión, definición formal de sucesión, verbal de sucesión, recta real y cartesiana de sucesión).

A continuación, se describen los sistemas de representación mencionados en el párrafo anterior, aclarando que, del sistema de representación aritmético, únicamente se describen las representaciones simbólico-específica de una sucesión y cartesiana de sucesión, debido a que son las únicas representaciones de este sistema que se trabaja en uno de los libros analizados.

Sistema de representación analítico de funciones

Considera las representaciones sobre las que se construye el concepto de límite, entre las que se encuentran las representaciones: numérico-tabular de función, gráfico-cartesiana, simbólico-específica de función, definición formal de función y verbal de función. Dichas representaciones son descritas a continuación.

Representación numérico-tabular: a través de una tabla de valores y de un proceso de tabulación se representa el comportamiento de una función considerando valores próximos a un punto determinado. La representación del límite se hace por medio de una tabla de valores en la que se expresan valores de la variable independiente y valores de la sucesión, con la intención de mostrar la tendencia al límite.

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

EJEMPLO 2 | Hallar un límite a partir de una tabla

Encuentre $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla del margen es una lista de valores de la función para varios valores de t cerca de 0. Cuando t se aproxima a 0, los valores de la función parecen aproximarse a 0.1666666…, de modo que calculamos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

Figura 1. Ejemplo de representación numérico-tabular

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012).

Mediante la tabla de este ejemplo podemos observar que se muestran los valores de la función para algunos valores de t cercanos a cero, tanto por la derecha como por la izquierda, pero no iguales a cero, evidenciando de manera intuitiva el valor al que tienden los valores de la función.

Representación gráfico-cartesiana: describe gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor cuando la variable independiente se acerca a otro; en ocasiones no se describen los acercamientos, solo se describe la curva de la función.

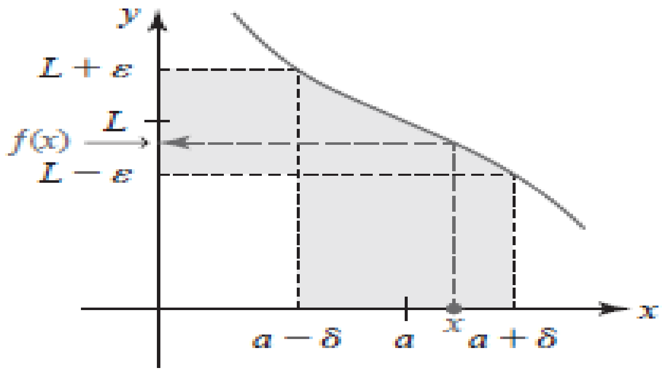

Figura 2. Representación gráfico-cartesiana de función

Fuente: Zill, Wright y Escutia (2015*).*

La representación gráfica es una herramienta muy útil para comprender la definición formal del límite, ya que de su análisis puede extraerse la idea intuitiva de que el límite de una función f, cuando x tiende a b, es L, si puede lograrse que $f(x)$ esté tan próximo a L como se desee, siempre que se tomen valores de x lo suficientemente próximos a b. Esto significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee y de aquí que, para cada número positivo ε, por pequeño que este sea, se tenga que: $|f(x)-L| < \varepsilon$ para valores de x muy cercanos a b.

Simbólico-específica de función: según Medina (2001), este tipo de representación suele aparecer en tareas donde se pide calcular el límite de una función a través de la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Para evaluar el límite en cuestión es necesario sustituir sobre la expresión de la función el valor al que ha de tender la variable independiente (sustitución directa).

EJEMPLO 3 | Hallar límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites.

(a) $\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$

SOLUCIÓN

(a) La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 8$ es polinomial, por lo que podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

Figura 3. Representación simbólico-específica de función

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012).

Verbal de función: se presenta una descripción de la definición formal del límite de una función sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como ε y δ y los cuantificadores ∃ y ∀) pero que están implícitos. Además, se pueden utilizan las propiedades de los límites y ejemplos para explicar la tendencia del límite de la función.

EJEMPLO 3 | Un límite que no existe (una función con un salto)

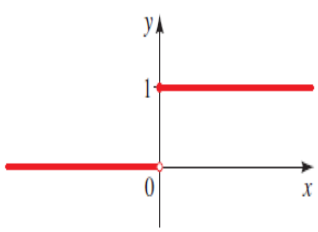

FIGURA 6

La función Heaviside H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

[Esta función, llamada así en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925), puede usarse para describir una corriente eléctrica que se conecta en un tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la Figura 6. Nótese el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay número al que $H(t)$ se aproxime cuando t se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

Figura 4. Representación verbal de función

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012).

Definición formal de límite de una función: en el desarrollo o comprensión de la problemática planteada se considera explícitamente que: sea f una función cuyo dominio es el intervalo I. Sea a un valor cualquiera que puede o no pertenecer a I. Decimos que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si y solo si: $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. De igual manera, esta dimensión se evidencia en ejemplos donde se comprueba la existencia del límite aplicando la definición (Medina, 2001).

Demuestre que $\lim_{x \to 3} (5x + 2) = 17$.

Solución Para cualquier $\varepsilon > 0$, arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un δ de modo que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacer lo anterior, considere

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así, para hacer $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$, sólo es necesario hacer $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$; es decir, se escoge $\delta = \varepsilon/5$.

Verificación Si $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$, entonces $5|x - 3| < \varepsilon$ implica

$$|5x - 15| < \varepsilon \qquad \text{o bien,} \qquad |(5x + 2) - 17| < \varepsilon \qquad \text{o bien,} \qquad |f(x) - 17| < \varepsilon. \quad ■$$

Figura 5. Representación definición formal de límite

Fuente: Zill, Wright y Escutia (2015).

Sistema de representación algebraico

Se hace uso de notaciones y simbolismo algebraico asociados a funciones, por otro lado, el cálculo de límites se reduce a la aplicación de teoremas de límites y uso de algoritmos algebraicos, factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones.

Algebraico-indeterminado: presente en los procesos de cálculo de límites donde la aplicación de factorizaciones, racionalizaciones, uso de conjugadas y simplificaciones se constituyen en el único camino que permite dejar de lado posibles indeterminaciones.

Obtén el $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8}$

Solución

Al sustituir x con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2+6(0)^4-7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{x^2(3+5x^2)}{x^2(2+6x^2-7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6} = \frac{3+5(0)^2}{2+6(0)^2-7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3}{2}$$

Figura 6. Representación algebraico-indeterminado

Fuente: Márquez, Villegas, Ruiz, Figueroa y Vásquez (2010).

Sistema de representación aritmético

En este ámbito se representan límites de sucesiones y están asociados a representaciones de números y sus operaciones. Las subcategorías que describen este sistema de representación son: representación numérico-tabular de una sucesión, simbólico-específica de una sucesión, definición formal de una sucesión, representación verbal de una función, representación de la recta real y representación cartesiana de sucesión. De las categorías mencionadas, solo se identifican dos de ellas en uno de los libros analizados en este trabajo: simbólico-específica de una sucesión y representación cartesiana de sucesión.

Representación simbólico-específica de una sucesión: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una sucesión de la forma $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, obteniendose así el límite L.

EJEMPLO 5 | Hallar el límite de una sucesión

Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que usamos en el Ejemplo 2: divida el numerador y el denominador entre la potencia superior de n, y luego use las Leyes de Límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } n$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \qquad \text{Límites de un Cociente y una Suma}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \text{Sea } n \to \infty$$

Por lo tanto, la sucesión $a_n = n/(n+1)$ es convergente.

Figura 7. Representación simbólico-específica de sucesión

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012).

En esta representación, a diferencia de la simbólico-especifica de una función, no se realiza el proceso de sustitución directa, por el contrario, es a través de transformaciones algebraicas que se llega a la expresión general $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Representación cartesiana de sucesión: los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función.

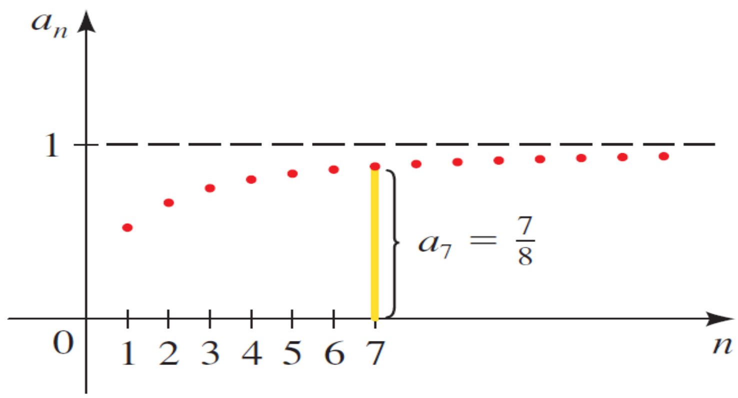

Figura 8. Representación cartesiana de sucesión

Stewart, Redlin y Watson (2012).

Esta representación es de carácter global y muestra un punto de vista funcional. Los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos; quedando representada la sucesión como función. Si no se considera el intervalo de radio ε sobre el eje a_n se puede observar la idea de aproximación finita a la recta $a_n = 1$. Por el contrario, si se considera dicho intervalo o vecindad, la idea de límite puede ser asociada a una aproximación infinita.

1.2.3 Análisis fenomenológico

En el análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos: natural, cultural, social y científico. Lo anterior con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras.

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que estos muestran su funcionalidad. Las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Algunos ejemplos de situaciones son los siguientes:

Situaciones personales: son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones se relacionan con prácticas cotidianas y suelen poner en juego los conceptos más básicos.

Situaciones educativas, ocupacionales o laborales: son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales.

Situaciones públicas: se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Los estudiantes como ciudadanos deben estar capacitados para interpretar, analizar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, que forme parte de las decisiones que afectan a la vida política y social de una comunidad.

Situaciones científicas: son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

1.3 Límite de una función

La importancia de la enseñanza del concepto de límite de una función radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento, así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería). Douady (1991) señala:

> Un concepto es un útil cuando el interés está centrado en su utilidad para resolver un problema. Un concepto es un objeto cuando es considerado en una dimensión cultural como una porción de conocimiento independiente de cualquier contexto y que tiene lugar en el cuerpo de conocimiento científico reconocido. (p.11)

1.3.1 Desarrollo Histórico-Epistemológico del límite de una función

De acuerdo con Espíritu y Navarro (2015) el desarrollo histórico-epistemológico del límite de una función se presenta en tres etapas, en las cuales se observa que el concepto límite es dependiente de otros conceptos, entre ellos: función, continuidad e infinito, los cuales fueron de gran utilidad para la comprensión de dicho concepto.

Primera etapa (primera mitad del siglo XVIII): En esta etapa emerge una idea intuitiva del proceso del concepto límite como aproximación, el concepto de límite apareció como proceso implícito en algunos métodos para resolver problemas de velocidad, tangentes a curvas y cálculo de áreas.

Durante esta etapa, Newton aclaró el concepto límite: "cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales". Por otra parte, Leibnitz (1646-1716) con su teoría sobre las Diferenciales, se dio cuenta que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas.

Segunda etapa (segunda mitad del siglo XVIII): D´Alembert (1717-1783) creó la teoría de los límites, en el tomo IX de la Encyclopédie, escribe la siguiente definición de límite: "Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante, la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable”.

Tercera etapa (finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX): Cauchy (1789-1857) retoma el concepto de límite de D´Alembert, proponiendo la siguiente definición: “..., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás”. Weierstrass (1815-1897) también da una definición del concepto límite, una definición satisfactoria, métrica, estática: “si, dado cualquier ε, existe un n_0 , tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$” (Ferrante, 2009). En esta etapa el concepto límite, formaba parte de la estructura matemática y sirvió de soporte para otros conceptos, tales como: continuidad, derivada e integral.

1.3.2 Métodos para hallar el límite de una función

Por método se entiende a todo aquel procedimiento que se sigue para tratar un problema o un conjunto de ellos. Existen tres métodos para calcular el límite de una función, los cuales son:

- Método numérico: se basa en construir una tabla de valores.
- Método gráfico: se basa en elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
- Método analítico: se utiliza el álgebra o cálculo.

1.3.3 El tema de límite de una función en el programa de matemáticas (SEP, 2017)

El programa de matemáticas de la SEP ubica el tema de límite de una función en el eje Pensamiento y lenguaje variacional.

Este eje temático se subdivide en los siguientes temas:

- Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición.
- Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.
- Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales. Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites.
- Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.
- Graficación de funciones por diversos métodos.
- Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.
- Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

El aprendizaje esperado del eje temático son los siguientes:

- Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.
- Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cubicas).
- Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.
- Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos *derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.*

1.3.4 El límite de una función en el currículo de las preparatorias BUAP

El tema *límite de una función* es abordado en la asignatura de Cálculo (para el plan 06 por competencias) y en la asignatura Funciones (para el plan 07).

Plan de estudios 06 por competencias

El plan de estudios 06 por competencias entró en vigencia a partir del ciclo escolar 2011-2014. Dicho Plan está estructurado de manera anual en dos niveles: Tronco Común y Propedéutico. El nivel propedéutico comprende cinco áreas de conocimiento: Humanidades, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ciencias Matemáticas y Ciencias Sociales.

La asignatura de Cálculo se imparte en tercer año de preparatoria, únicamente en las áreas de Salud e Ingenierías y Ciencias Exactas. Dicha asignatura está conformada por 4 bloques:

I. Pre cálculo
II. Limites
III. La derivada y sus aplicaciones
IV. La integral y sus aplicaciones.

El bloque II, correspondiente al tema de *Limites,* pretende desarrollar en el educando los saberes presentados en la tabla 2.

Tabla 2. Saberes declarativos y procedimentales del plan 06

Saberes	
Declarativos	**Procedimentales**
Interpreta el significado de la expresión **"$\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$"** y la notación $x \to a$ $x \to a^+$ $x \to a^-$ Relaciona el concepto $\lim_{x \to a} f(x)$ con el comportamiento de la tabla o gráfica de la función.	Utiliza la tabla o gráfica de una función para determinar si el límite existe. Deduce los límites de funciones constantes, lineales y a trozos.
Recuerda las propiedades de los límites	Aplica las propiedades de límites y límites de funciones constantes y lineales para calcular límites de funciones polinomiales.

	Aplica las propiedades de límites y límites de funciones polinomiales para calcular el límite de funciones racionales $$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$$ Con $$\lim_{x \to a} q(x) \neq 0$$
Identifica cuando hay una indeterminación y elige la estrategia adecuada para evitarla.	Utiliza métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.
Reconoce los limites trigonométricos importantes: $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$$ $$\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x}$$	Manipula propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos.
Reconoce que ∞ no representa un número real. Interpreta geométricamente, el significado de $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$	Aplica el $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ y las propiedades de los límites para calcular límites de funciones racionales cuando el denominador de la función tiende a cero y el numerador de la función tiende a un número distinto de cero. Aplica el $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ y las propiedades de los límites para calcular límites de

Interpreta el significado de $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ de manera gráfica.	funciones racionales cuando x tiende a ∞. Usa límites infinitos y al infinito para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de una función racional y esbozar su gráfica.
Reconoce las condiciones para que una función sea continua en un punto o en un intervalo a partir de su grafica o de su expresión algebraica. Distingue si la discontinuidad de una función puede ser removible o no.	Argumenta si una función o su gráfica es continua o no. Propone una extensión continua para remover la discontinuidad de una función, si es posible.
Reconoce que la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $p(x_0, f(x_0))$ es $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (siempre y cuando el límite exista) Relaciona el concepto de la pendiente de la recta tangente a una función con parámetros en distintos campos disciplinarios.	Comprueba que la pendiente de la recta $y = mx + b$ es en efecto m, utilizando la pendiente de la recta tangente a la función. Calcula la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado y esboza su gráfica. Mediante el cálculo de la tangente a una función, resuelve problemas de su entorno (Ej.: la dirección del movimiento

Reconoce que si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, se llama la derivada de f en x_0 y se denota $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Reconoce distintas notaciones de la derivada de una función $$\left(f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x)\right)$$ Interpreta $\boldsymbol{f'(x)}$ como la razón a la que cambia una función.	de un cuerpo a lo largo de todos los puntos de una trayectoria o el ángulo por el que un rayo de luz atraviesa una lente curva, etc.). Calcula la derivada de una función y posteriormente determina su valor en un punto específico. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto derivando la función. Resuelve problemas mediante la derivada de una función (Ej.: Velocidad y aceleración, estimar la velocidad de propagación).

Las competencias que se pretenden desarrollar en el educando se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Competencias del plan 06

COMPETENCIAS	
Genéricas/ Atributos	**Disciplinares**
Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Plan de estudios 07

El plan de estudios 07 entró en vigencia a partir del ciclo escolar 2018-2019. Dicho Plan está estructurado de manera semestral en dos niveles: Tronco Común y Propedéutico. El Propedéutico comprende cinco áreas de conocimiento: Humanidades, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ciencias Matemáticas y Ciencias Sociales.

La asignatura *Funciones* se cursa en el cuarto semestre y forma parte del tronco común. Dicha asignatura consta de 3 bloques:

I. Intervalos e Inecuaciones;
II. Elementos del dominio de una función y sus diferentes representaciones y del rango en forma gráfica; y,
III. Límites y sus propiedades.

El contenido central del bloque III es el proceso de hallar el límite como fundamento del cálculo. Los contenidos temáticos de este bloque se aprecian en la tabla 4.

Tabla 4. Contenidos temáticos del plan 07

Componentes	***Contenido central***	***Contenidos específicos***	***Aprendizajes esperados***	***Productos esperados***
Límites y sus propiedades	*El proceso de hallar el límite como*	✔ *Evaluación numérica e inexistencia de un límite.*	✔ *Estima un límite, analizando, explicando,*	*Inicio: Reporte de lectura “Velocidad de*

	fundamento del cálculo		*tabulando y graficando, para determinar la existencia o inexistencia de un límite y el comportamiento de una función.*	*nado hasta el límite" Larson, H.R. Cálculo Diferencial e integral. Novena Edición.* *Desarrollo: Tablas para estimar la existencia o no de un límite de los diferentes tipos de funciones. Resultado: Gráfica y usa las gráficas de diversas funciones para explicar la existencia o no de un límite.*
		✔ *Valor del límite en forma analítica.*	✔ *Valora un límite, seleccionando y aplicando la estrategia*	*Inicio: Ejercicios de límites usando sus propiedades.*

			analítica idónea de acuerdo al tipo de función, para determinar el comportamiento de la misma.	*Desarrollo: Ejercicios de límites, aplicando estrategias algebraicas en casos específicos. Resultado: Ejercicios de límites empleando estrategias gráficas, numéricas y analíticas acordes al tipo de función. Valida sus resultados en parejas.*
		✓ *Límites infinitos.*	✓ *Estima límites infinitos, a través de la tabulación (desde la izquierda y desde la*	*Inicio: Argumentación de límites infinitos generando tablas y*

			derecha), por inspección gráfica y la argumentación de su comportamiento para determinar en una función la continuidad o discontinuidad que puede eliminarse o que corresponde a una asíntota.	*observando gráficas.* *Desarrollo: Ejercicios de límites infinitos en los que analíticamente encuentra asíntotas verticales y las grafica junto con la función en un mismo sistema de coordenadas.* *Resultado: Argumentación de la existencia de una asíntota vertical o una discontinuidad que puede eliminarse en una función dada. En binas expone sus conclusiones.*

En la tabla 5 se presentan las competencias correspondientes al plan de estudios 07.

Tabla 5. Competencias del plan 07

Genéricas	**Disciplinares Básicas**	**Disciplinares Extendidas**
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Cuadro comparativo respecto al tema Límites de una función en el plan de estudios 06 por competencias y 07

Tabla 6. Comparación del tema *límite de una función* en los planes de estudios 06 por competencias y 07

	Plan 06 por competencias	Plan 07
Capitulo(s) antecesor(es) a Límite de una función.	Bloque I: Pre cálculo, este bloque tiene como objetos de aprendizaje: intervalos, inecuaciones y funciones.	Bloque I: Intervalos e Inecuaciones (su contenido central son las propiedades de la desigualdad y resolución de inecuaciones a través de sus diferentes representaciones). Bloque II: Elementos del dominio de una función y sus diferentes representaciones y del rango en forma gráfica. (su contenido central es el análisis de las funciones algebraicas y trascendentes).
Capítulo en el que se aborda el límite de una función.	Bloque II: Límites, tiene como objeto de aprendizaje: “límites”, “continuidad” y “del límite a la derivada”.	Bloque III: Límites y sus propiedades (su contenido central es el proceso de hallar el límite como fundamento del cálculo).
Desempeños del estudiante al concluir el bloque (plan 06) y	• Estima el valor del límite de una función en un punto analizando aproximaciones numéricas y/o su gráfica.	• Estima un límite, analizando, explicando, tabulando y graficando, para determinar la existencia o inexistencia de un límite y el

Aprendizajes esperados (plan 07)	• Determina límites de funciones algebraicas y trigonométricas dadas, aplicando propiedades de los límites. • Describe la discontinuidad de la función a través de límites analítica y gráficamente. • Aplica los límites y las razones de cambio para conceptualizar y calcular las derivadas de una función. • Resuelve problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias aplicando límites.	comportamiento de una función. • Valora un límite, seleccionando y aplicando la estrategia analítica idónea de acuerdo al tipo de función, para determinar el comportamiento de la misma. • Estima límites infinitos, a través de la tabulación (desde la izquierda y desde la derecha), por inspección gráfica y la argumentación de su comportamiento, para determinar en una función la continuidad o discontinuidad que puede eliminarse o que corresponde a una asíntota.

De la tabla anterior, podemos resaltar las siguientes observaciones:

- Aunque el tema correspondiente a límites de una función, se ubica en bloques diferentes, el contenido previo es el mismo en ambos planes de estudio: intervalos, inecuaciones y funciones.
- En el capítulo correspondiente a *límite de una función*, en lo que respecta al plan 06 tiene por objeto de aprendizaje: "límites", "continuidad" y "del límite a la derivada". Por

otro lado, el plan 07 tiene por contenido central el proceso de hallar el límite como fundamento del cálculo.

- En cuanto a lo que se espera al concluir el bloque correspondiente a *límite de una función*, ambos planes tienen la finalidad de que el educando:
  - Estime el valor del límite de una función mediante el análisis de aproximaciones numéricas y/o su gráfica. Es decir, ambos buscan que los alumnos estimen el límite a través del comportamiento de la función.
  - Calcule el límite de una función de manera analítica o algebraica.
  - Pueda determinar la continuidad de una función.

En lo que respecta a las diferencias que presentan ambos planes al concluir el bloque en cuestión, en el plan 06 por competencias se espera que el educando aplique los límites y las razones de cambio para conceptualizar y calcular las derivadas de una función. De igual manera, que resuelva problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias aplicando límites. Por otro lado, en el plan 07 no se pretende la aplicación del límite de una función en la construcción de la derivada ni en problemas de la vida cotidiana.

Capítulo 2. Metodología

La Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, cuenta con ocho preparatorias, seis de ellas ubicadas en la ciudad de Puebla: “Lázaro Cárdenas del Río”, “Emiliano Zapata”, “Benito Juárez García”, “Alfonso Calderón Moreno”, Urbana “Enrique Cabrera Barroso” y “2 de octubre de 1968”. Y las dos restantes, “Simón Bolívar”, ubicada en Atlixco y la Regional “Enrique Cabrera Barroso” de Tecamachalco.

Se encuestó a docentes de matemáticas de las preparatorias: “Alfonso Calderón Moreno”, Urbana “Enrique Cabrera Barroso”, “Benito Juárez García” y “Emiliano Zapata”, que laboraron en el ciclo escolar 2018-2019, y que han impartido el tema *límite de una función*. Siendo posible, de esta manera, recaudar datos de los libros de texto que emplean para impartir dicho tema, permitiendo esto, destacar 6 libros de texto.

A continuación, se muestra en la tabla 7 el porcentaje de docentes de cada preparatoria a los cuales se les aplicó la encuesta.

Tabla 7. Porcentaje de profesores por preparatoria a los que se les aplicó la entrevista

Preparatoria	**Profesores de matemáticas**	**Profesores a los que se les aplicó la encuesta**	**Porcentaje**
“Alfonso Calderón Moreno”	8	3	37.5
Urbana “Enrique Cabrera Barroso”	10	6	60%
“Benito Juárez García”	10	6	60%
“Emiliano Zapata”	7	3	42.8%
TOTAL	35	18	

En la tabla 8 se presentan los libros que los docentes nombraron con mayor frecuencia.

Tabla 8. Frecuencia de los libros de mayor preferencia por los docentes

Texto	Frecuencia
Precálculo Matemáticas para el cálculo	*6*
El cálculo con geometría analítica	*5*
Cálculo Diferencial	*4*
Cálculo diferencial e integral	*3*
Matemáticas 1 **Cálculo Diferencial**	*3*
Cálculo con geometría analítica	*3*

En la tabla 9 se presentan los datos de los libros analizados: nombre del texto, autor(es) y edición.

Tabla 9. Datos de los libros analizados

Libro	Autor(es)	Edición
Precálculo Matemáticas para el cálculo	• Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S.	Sexta
El cálculo con geometría analítica	• Louis Leithold	Sexta
Cálculo Diferencial	• Arturo Aguilar Márquez, Fabián Valapai Bravo Vázquez, Herman Aurelio Gallegos Ruiz, Miguel Cerón Villegas y Ricardo Reyes Figueroa	Primera
Cálculo diferencial e integral	• Larson, Ron	Séptima
Matemáticas 1 **Cálculo Diferencial**	• Dennis G. Zill • Warren S. Wright	Primera
Cálculo con geometría analítica	• Swokowski Earl W.	Segunda

El análisis realizado al tema de *límite de una función* en los libros presentados en la tabla 10, se basa en tres componentes propuestas por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). Aunado a ello, se agrega la ubicación del tema *límite de una función*. Presentando entonces, las siguientes categorías: ubicación del tema, estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico.

Tabla 10. Categorías y subcategorías utilizadas para el análisis de contenido de los textos.

Categorías de análisis	
Ubicación de límite de una función en los libros de texto	
Aspectos conceptuales	• Términos • Notaciones • Convenios • Resultados • Conceptos • Destrezas • Métodos de resolución • Razonamiento • Estrategias
Sistemas de representación	Sistema de representación analítico: numérico-tabular de función, gráfico-cartesiana, simbólico-específica de función, definición formal de límite de una función y verbal de función. Sistema de representación algebraico: algebraico-indeterminado. Sistema de representación aritmético: representación simbólico-específica de una sucesión y representación cartesiana de sucesión.
Análisis fenomenológico	Situaciones y contextos de los problemas

Capítulo 3. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados del análisis realizado a los libros de texto, presentando primero la ubicación del tema límite de una función, después la clasificación cognitiva del contenido, posteriormente, los sistemas de representación y, finalmente, el análisis fenomenológico.

3.1 Ubicación del tema límite de una función en los libros de texto

En la tabla 11 se presenta la secuencia del contenido temático en los libros analizados.

Tabla 11 Contenido temático de los libros analizados

Libro	Secuencia del Capítulo
Precálculo Matemáticas para el cálculo (Stewart, J., Redlin, L., Watson, S.)	Capítulo 13 Límites una mirada previa al cálculo Descripción del capítulo 13.1 Hallar límites numérica y gráficamente 13.2 Hallar límites algebraicamente 13.3 Rectas tangentes y derivadas 13.4 Límites en el infinito; Límite de sucesiones 13.5 Áreas Capítulo 13 Repaso Capítulo 13 Examen ENFOQUE SOBRE MODELADO Interpretación de área Examen acumulativo de repaso: Capítulos 12 y 13
El cálculo con geometría analítica (Louis Leithold)	Capítulo 2 Límites y continuidad 2.1 Límites de una función 2.2 Teoremas de los límites de funciones 2.3 Límites unilaterales 2.4 Limites infinitos

	2.5 Límites en el infinito 2.6 Continuidad de una función en un número 2.7 Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo 2.8 Continuidad de las funciones trigonométricas y teoremas de estricción 2.9 Demostraciones de algunos teoremas de límite (Suplementaria) 2.10 Teoremas adicionales sobre límites de funciones (Suplementaria) Ejercicios de repaso del capítulo 2
Cálculo Diferencial (CONAMAT)	Capítulo 2 Limites Definición intuitiva de limites Definición formal de limites Teoremas Limites cuando x tiende al infinito Asíntotas horizontales Asíntotas oblicuas Limites laterales Límites de funciones trigonométricas
Calculo diferencial e integral (Larson, Ron)	Capítulo 1 Límites y sus propiedades **Velocidad al nado hasta el límite** 1.1 Vista previa del cálculo 1.2 Forma de hallar límites gráfica y numéricamente 1.3 Evaluación de límites en forma analítica 1.4 Continuidad y límites laterales 1.5 Límites infinitos **Proyecto de la sección: Gráficas y límites de funciones trigonométricas**

	Ejercicios de repaso **Resolución de problemas**
Matemáticas 1 Calculo diferencial (Dennis G. Zill y Warren S. Wright)	Capítulo 3 Limite de una función 3.1 Limites, un enfoque informal 3.2 Teoremas sobre límites 3.3 Continuidad 3.4 Límites trigonométricos 3.5 Límites que involucran el infinito 3.6 Límites: un enfoque formal Competencia final de la unidad
Cálculo con geometría analítica (Swokowski Earl W.)	Capítulo 2 Limites de funciones 2.1 Introducción al Cálculo 2.2 Definición informal de límite 2.3 Definición formal de límite 2.4 Métodos para calcular límites 2.5 Funciones continuas 2.6 repaso Capítulo 8 Otras funciones trascendentales 8.1 Funciones trigonométricas 8.2 Límites de las funciones trigonométricas 8.3 Derivadas de las funciones trigonométricas

Resumen de la ubicación del límite de una función

- Mayoritariamente, el tema *límite de una función,* se ubica en el segundo capítulo (dentro de ellos se contempla el libro *Cálculo Diferencial e Integral* de Larson, debido a que cuenta con un capítulo 0).
- Mayoritariamente, el tema límite de una función es precedido por un capítulo correspondiente a funciones y sus gráficas.

- En los libros: El cálculo con geometría analítica, Cálculo diferencial e integral, Matemáticas 1, Cálculo diferencial y Cálculo con geometría analítica, se incluye el tema de continuidad en el capítulo de límite de una función y en los libros en que el tema de continuidad no está incluido en el capítulo correspondiente a *límite de una función,* se aborda en el capítulo posterior.

3.2 Aspectos conceptuales

En este apartado se presenta la clasificación cognitiva del contenido del límite de una función, abordando los siguientes aspectos conceptuales: términos, notación, convenios, resultados, conceptos, métodos de resolución, destrezas, razonamiento y estrategias.

Es preciso señalar que las destrezas y estrategias de los aspectos conceptuales que se presentan en la tabla 12 son producto de las observaciones realizadas a cada libro de texto analizado; se dedujeron a partir de los ejemplos y ejercicios que propone cada uno. Por otro lado, en lo que respecta a la estrategia de cálculo mental, con ella hacemos referencia al cálculo de límites por sustitución y hacer los cálculos aritméticos mentalmente.

Tabla 12 Clasificación cognitiva del contenido del límite de una función en los libros de texto

Libro	Aspectos conceptuales
Precálculo Matemáticas para el cálculo	**Términos** • Menor, menor o igual • Mayor, mayor o igual • Valor absoluto • Tiende • Número • Función • f de x

- Variable
- Infinito
- Sucesión
- Valores de t que son menores a 0
- Valores de t que son mayores a 0
- Límite de una función
- Asíntota horizontal
- Asíntota vertical

Notación

- $<, \leq$
- $>, \geq$
- $|\,|$
- $\rightarrow$
- a
- f
- $f(x)$
- x
- ∞
- a_n
- $t \rightarrow 0^-$
- $t \rightarrow 0^+$
- $\lim\limits_{x \rightarrow a} f(x)$

Convenios

Se consideran valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a.

Resultados

- El límite de la suma de límites es la suma de los límites.
- El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.
- El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.
- El límite de un producto es el producto de los límites.
- El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0).
- El límite de una potencia es la potencia del límite.
- El límite de una raíz es la raíz del límite.
- $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, donde n es un entero positivo
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, donde n es un entero positivo y $a > 0$
- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
- Límites por sustitución directa: Si f es polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Conceptos

- Límite de una función
- Limites unilaterales
- Límites en el infinito
- Límites de sucesiones
- Leyes de límites

	Destrezas • Lectura y escritura de la simbología del límite de una función. • Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos. • Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe. • Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales). • Uso de herramientas digitales para graficar una función. • Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ • Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos. • Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite • Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** • Método numérico • Método gráfico • Método analítico **Razonamiento** • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los límites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite)

	Estrategias • Cálculo mental • Reconocimiento de patrones numéricos • Tabla de valores • Resolución de problemas • Elaboración de gráficas
El cálculo con geometría analítica	**Términos** • Menor, menor o igual • Mayor, mayor o igual • Valor absoluto • Tiende • Número • Función • f de x • Variable • Épsilon • Delta • Infinito • Límite de una función • Asíntota (vertical y horizontal) **Notación** • $<, \leq$ • $>, \geq$ • $\vert \; \vert$ • $\rightarrow$ • a • f

- $f(x)$
- X
- ε
- δ
- ∞
- $\lim_{x \to a} f(x)$

Convenios

Se consideran valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a.

Resultados

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$
- Si m y b son dos constantes cualesquiera $\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$
- Sea c una constante, entonces para cualquier número a $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
- Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …, $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces $\lim_{x \to a}[f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] = L_1 L_2 \dots L_n$,
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo, entonces $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = L^n$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

- Si n es un entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con la restricción de que si n es par, $L > 0$
- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a} |f(x) - L| = 0$
- El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.
- Si r es cualquier entero positivo, entonces
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r}$ será igual a $-\infty$ si r es impar e igual a $+\infty$ si r es par.
- Si a es cualquier número real, y si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces
- Si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de f(x)

  $$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

- Si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de f(x)

  $$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

- Si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de f(x)

  $$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

- Si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de f(x)

  $$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

	Estos resultados también son válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$" • Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante cualquiera, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$ • Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante cualquiera, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$ • Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante cualquiera, excepto 0, entonces • Si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$= $+\infty$ • Si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$= $-\infty$ Estos resultados también son válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$" • Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante cualquiera, excepto 0, entonces • Si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$= $-\infty$ • Si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$= $+\infty$ Estos resultados también son válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$" • Si r es cualquier entero positivo, entonces • $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ • $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ • Supongamos que las funciones f, g y h se hallan definidas en algún intervalo abierto I, el cual contiene a a, excepto posiblemente en a misma, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en I para la cual $x \neq a$. Supongamos, además, que el $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} h(x)$

	existen y son iguales a L. Entonces el $\lim_{x \to a} g(x)$ existe y es igual a L • $\lim_{t \to 0} \frac{sen\, t}{t} = 1$ • $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ **Conceptos** • Límites de una función • Teoremas de los límites de funciones • Límites unilaterales • Límites trigonométricos • Limites infinitos • Límites en el infinito **Destrezas** • Lectura y escritura de la simbología del límite de una función. • Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos. • Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe. • Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales). • Uso de herramientas digitales para graficar una función. • Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ • Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos.

	• Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite • Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** • Método numérico • Método gráfico • Método analítico **Razonamiento** • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los limites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite) **Estrategias** • Cálculo mental • Tabla de valores • Resolución de problemas • Elaboración de gráficas
Cálculo Diferencial	**Términos** • Menor, menor o igual • Mayor, mayor o igual • Valor absoluto • Tiende • Tiende a a por la izquierda • Tiende a a por la derecha

- Número
- Función
- f de x
- Variable
- Épsilon
- Delta
- Infinito
- Límite de una función
- Asíntota horizontal
- Asíntota vertical
- Asíntota oblicua

Notaciones

- $<, \leq$
- $>, \geq$
- $| \, |$
- $\rightarrow$
- $\rightarrow a^{-}$
- $\rightarrow a^{+}$
- a
- f
- $f(x)$
- X
- ε
- δ
- ∞
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

	Convenios • Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número a, basta que esté definida para valores muy cercanos. **Resultados** • Si $f(x)$ y g(x) son funciones, c una constante y n número real, entonces • $\lim\limits_{x \to a} c = c$ • $\lim\limits_{x \to a} x = a$ • $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ con $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ • $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ • El límite cuando $x \to x_0$ de una función $f(x)$, existe y es igual a L, si y sólo si los límites laterales son iguales a L. • $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ • Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0$, con c constante. **Conceptos** • Límite de una función • Límites indeterminados

	- Límites cuando x tiende al ∞ - Límites laterales - Límites de funciones trigonométricas **Destrezas** - Lectura y escritura de la simbología del límite de una función. - Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos. - Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe. - Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales). - Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ - Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos. - Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite - Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** - Método numérico - Método gráfico - Método analítico

	Razonamiento • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los limites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite) **Estrategias** • Cálculo mental • Tabla de valores • Elaboración de graficas
Calculo diferencial e integral	**Términos** • Menor, menor o igual • Mayor, mayor o igual • Valor absoluto • Tiende • Tiende a a por la izquierda • Tiende a a por la derecha • Número • Función • f de x • Variable • Épsilon • Delta • Infinito • Límite de una función • Asíntota

Notaciones

- $<, \leq$
- $>, \geq$
- $| \, |$
- $\rightarrow$
- $\rightarrow a^{-}$
- $\rightarrow a^{+}$
- a
- f
- $f(x)$
- X
- ε
- δ
- ∞
- $\lim_{x \to a} f(x)$

Convenios

Se consideran valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a.

Resultados

- Sean b y c números reales y n un entero positivo

a) $\lim_{x \to c} b = b$

b) $\lim_{x \to c} x = c$

c) $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

- Sean b y c números reales y n un número entero positivo, f y g funciones con los límites siguientes $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = K$

a) Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} [bf(x)] = bL$

b) Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

c) Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$

d) Cociente: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ siempre que $K \neq 0$

e) Potencia $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

- Si p es una función polinomial y c es un número real, entonces $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.
- Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c en un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

- Sea n un entero positivo. El límite siguiente es válido para todo c si n es impar, y es válido para c > 0 si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

- Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y e $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$ entonces $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$
- Sea c cualquier número real en el dominio de la función trigonométrica dada.

a) $\lim_{x \to c} sen\, x = sen\, c$

b) $\lim_{x \to c} cos\, x = cos\, c$

c) $\lim_{x \to c} tan\, x = tan\, c$

d) $\lim_{x \to c} cot\, x = cot\, c$

e) $\lim_{x \to c} sec\, x = sec\, c$

f) $\lim_{x \to c} csc\, x = csc\, c$

- Sean c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c, Si el límite de $g(x)$ existe cuando x tiende a c, entonces el límite de $f(x)$ también existe y $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$
- Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en el propio c, y si $\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.
- Límites trigonométricos especiales

  $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$

  $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{x} = 0$
- Sean c y L númeror reales y f y g funciones tales que $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = L$

a) Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$

b) Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = \infty$, $L > 0$,

$\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = -\infty$, $L < 0$

c) Cociente: $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Se cumplen propiedades semejantes para los limites laterales y para las funciones para las que el límite de $f(x)$, cuando $x \to c$, es $-\infty$.

Conceptos

- Límite de una función
- Límite de una función compuesta
- Límites de funciones trigonométricas
- Límites infinitos

	Destrezas • Lectura y escritura de la simbología del límite de una función. • Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos. • Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe. • Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales). • Uso de herramientas digitales para graficar una función. • Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ • Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos. • Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite • Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** • Método numérico • Método gráfico • Método analítico **Razonamiento** • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los limites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite).

<table>
<tr><td></td><td>Estrategias
Cálculo mental
Tabla de valores
Resolución de problemas
Elaboración de graficas</td></tr>
<tr><td>Matemáticas 1 Calculo diferencial (Dennis G. Zill y Warren S. Wright)</td><td>Términos Menor, menor o igual Mayor, mayor o igual Valor absoluto Tiende x tiende al número a por la izquierda x tiende al número a por la derecha x tiende al número a por ambos lados Número Función f de x Variable Épsilon Delta Infinito Límite de una función Asíntota Notación $<, \leq$ $>, \geq$ $| \, |$</td></tr>
</table>

- $\rightarrow$
- $x \rightarrow a^{-}$
- $x \rightarrow a^{+}$
- $x \rightarrow a$
- a
- f
- $f(x)$
- x
- ε
- δ
- ∞
- $\lim_{x \to a} f(x)$

Convenios

Se consideran valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a.

Resultados

- El límite de una suma es la suma de los límites
- El límite de un producto es el producto de los límites y
- El límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.
- El límite de la raíz n-ésima de una función es la raíz n-ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz n-ésima real.
- $\lim_{x \to a} c = c$ donde c es una constante
- $\lim_{x \to a} x = a$
- Si c es una constante, entonces $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

- Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n un entero positivo. Entonces $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L^n$
- Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.
- Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces es único.
- Suponga que f, g y h son funciones para las cuales g$(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a un número a, excepto posiblemente al mismo a. Si $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $\lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Conceptos

- Límite de una función
- Límites laterales
- Límites trigonométricos
- Límites infinitos
- Límites en el infinito

Destrezas

- Lectura y escritura de la simbología del límite de una función.
- Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos.
- Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe.
- Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales).

	• Uso de herramientas digitales para graficar una función. • Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ • Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos. • Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite • Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** • Método numérico • Método gráfico • Método analítico **Razonamiento** • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los limites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite) **Estrategias** • Cálculo mental • Tabla de valores • Resolución de problemas • Elaboración de gráficas

Cálculo con geometría analítica (Swokowski Earl W.)	**Términos** • Menor, menor o igual • Mayor, mayor o igual • Valor absoluto • Pendiente • Punto • Tiende • Número • Función • f de x • Variable • Épsilon • Delta • Límite de una función • Asíntota **Notaciones** • $<, \leq$ • $>, \geq$ • $\|\ \|$ • m • $P(x, y)$ • $\rightarrow$ • a • f • $f(x)$ • X • ε

- δ
- $\lim_{x \to a} f(x)$

Convenios

Se consideran valores de x que son cercanos a a pero no iguales a a.

Resultados

- Sea a un punto contenido en un intervalo abierto y f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ sí y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $L > 0$, existe entonces un intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ que contiene a a, tal que $f(x) > 0$ para todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posiblemente en $x = a$.
- $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces
- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = L * M$
- $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$, si $M \neq 0$
- $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL$, para todo número real c
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
- Si m, b y a son números reales arbitrarios, entonces $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$
- Sea n un entero positivo, entonces

- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, siempre y cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.
- Si f es un polinomio y a es un número real, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Si q es una función racional y a esta en el dominio de q, entonces $\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$
- Si $a > 0$ y n es un entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un entero positivo impar, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
- Si una función f tiene un límite cuando x tiende a a, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ siempre y cuando n sea un número positivo impar o bien n sea un entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) > 0$
- Supóngase que para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente para $x = a$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, entonces $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Conceptos

- Límite de una función
- Límite por la izquierda
- Límite por la derecha
- Límites de polinomios y funciones racionales
- Teoremas sobre límites
- Límites de las funciones trigonométricas

	Destrezas • Lectura y escritura de la simbología del límite de una función. • Estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos. • Uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe. • Interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales). • Uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ • Manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos. • Reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite • Reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. **Métodos de resolución** • Método numérico • Método gráfico • Método analítico **Razonamiento** • Deductivo: Concepto de límite, propiedades de los limites • Transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite)

	Estrategias • Cálculo mental • Tabla de valores • Resolución de problemas • Elaboración de graficas

Resumen de los aspectos conceptuales

Los autores manejan la misma notación y términos, convenios, resultados, conceptos y estrategias para introducir el tema de límite de una función y que el lector pueda construir su concepto a través del razonamiento intuitivo y transductivo; considerando que el lector maneja los términos de función, plano cartesiano, número y variable, como conocimientos base.

En todos los libros se emplean los métodos de resolución: numérico, gráfico y analítico.

A través de la observación de los ejemplos y ejercicios que presenta cada libro se dedujo que todos los libros pretenden desarrollar las siguientes destrezas: lectura y escritura de la simbología del límite de una función; estimación de límites de funciones constantes, lineales y a trozos; uso de tablas o gráficas de una función para determinar si el límite existe; interpretación de tablas y gráficas de funciones para la estimación de límites (unilaterales y bilaterales); uso de métodos algebraicos para resolver una indeterminación de la forma 0/0; manipulación de propiedades de los límites, limites trigonométricos importantes e identidades trigonométricas para calcular limites trigonométricos; reconocimiento de sustitución directa como medio para hallar un límite y reconocimiento de las diferentes maneras en que un límite puede no existir. No obstante, en 4 de estos libros (Precálculo matemáticas para el cálculo, El cálculo con geometría analítica, Cálculo diferencial e integral y Matemáticas 1 Cálculo diferencial) aunadas a las estrategias antes mencionadas también promueven el uso de herramientas digitales para graficar una función.

En los libros analizados se emplean dos tipos de razonamiento, por un lado, se tiene el deductivo (concepto de límite y sus propiedades) y por otro, el transductivo (argumentos para justificar la estimación de límite).

Por medio de la observación de la secuencia de ejemplos y ejercicios que presenta cada libro se dedujo que todos promueven las siguientes estrategias para el cálculo de límites: cálculo mental, tabla de valores y elaboración de gráficas. Aunadas a las estrategias mencionadas, el libro Precálculo matemáticas para el cálculo emplea la estrategia reconocimiento de patrones numéricos, debido a que aborda el tema de sucesiones de límites. Por otro lado, en todos los libros, excepto en el libro Cálculo Diferencial (CONAMAT), se fomenta la estrategia de resolución de problemas.

3.3 Sistemas de representación

En la tabla 13 se muestran los sistemas de representación identificados en los libros analizados.

Tabla 13 Sistemas de representación empleados en los libros analizados

Libro	Sistema de representación
Precálculo	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado **Aritmético** • Representación simbólico-específica de sucesión • Representación cartesiana de sucesión

El cálculo con geometría analítica	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Definición formal de función • Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado
Cálculo Diferencial	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Definición formal de función • Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado
Calculo diferencial e integral	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Definición formal de función • Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado
Matemáticas 1 Calculo diferencial	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Definición formal de función

	• Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado
Cálculo con geometría analítica	**Analítico** • Numérico-tabular de función • Gráfico-cartesiana • Simbólico-específica de función • Definición formal de función • Verbal de función **Algebraico** • Algebraico-indeterminado

En la tabla 14 se muestran las representaciones empleadas con mayor frecuencia en cada libro analizado.

Tabla 14 Representaciones empleadas con mayor frecuencia en cada libro analizado

Libro	Sistema de representación
Precálculo Matemáticas para el cálculo	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son: • Gráfico-cartesiana • Verbal de función • Simbólico-específica de función La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y numérico-tabular de función. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, se maneja la representación algebraico-indeterminada con verbal de función.

El cálculo con geometría analítica	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son: • Simbólico-específica de función • Definición formal de límite • Numérico-tabular La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y definición formal de límite. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, predomina la representación algebraico-indeterminado con numérico-tabular y gráfico-cartesiana
Cálculo Diferencial	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son: • Simbólico-específica de función • Definición formal de limite • Gráfico-cartesiana La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y simbólico-específica de función. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, predomina la representación algebraico-indeterminada con numérico-tabular y gráfico-cartesiana.

Calculo diferencial e integral	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son: • Simbólico-específica de función • Gráfico-cartesiana • Numérico-tabular La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y numérico-tabular. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, predomina la representación algebraico-indeterminada con gráfico-cartesiana.
Matemáticas 1 Calculo diferencial	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son: • Simbólico específica de función • Gráfico-cartesiana • Definición formal de función La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y verbal de función. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, predomina la representación algebraico-indeterminada con gráfico-cartesiana.
Cálculo con geometría analítica	Del sistema de representación analítico, las representaciones más empleadas son:

	• Simbólico específica de función • Gráfico-cartesiana • Definición formal de función La combinación de representaciones más empleada en este sistema es: gráfico-cartesiana y definición formal de función. De la combinación de los sistemas de representación analítico y algebraico, predomina la representación algebraico-indeterminada con gráfico-cartesiana.

Resumen de los sistemas de representación identificados en los libros de texto

- Todos los libros emplean los sistemas de representación analítico y algebraico.
- Solo el libro de *Precálculo* emplea los tres sistemas de representación (analítico, algebraico y aritmético).
- El libro de *Precálculo* es el único libro que no emplea definición formal de límite, correspondiente al sistema de representación analítico.
- Las representaciones más empleadas correspondientes al sistema de representación analítico, son:
  - Simbólico-específica de función
  - Gráfico-cartesiana
  - Definición formal de límite de una función
- Las combinaciones de representaciones más empleadas correspondientes al sistema de representación analítico son:
  - Gráfico-cartesiana y Numérico tabular
  - Gráfico-cartesiana y Definición formal de límite de una función
  - Gráfico-cartesiana y Simbólico específico de función
  - Gráfico-cartesiana y Verbal de función
- Las combinaciones de representaciones más empleadas correspondientes al sistema de representación analítico y algebraico son:
  - Algebraico-indeterminado y Gráfico-cartesiana

Nuevamente se hace presente la predominación de la representación gráfico-cartesiana.

3.4 Análisis fenomenológico

En este apartado se presentan los aspectos fenomenológicos de los libros de texto analizados.

Tabla 15 Situaciones y contextos de los problemas de los libros analizados

Libro	Situaciones y contextos de los problemas
Precálculo Matemáticas para el cálculo	Los ejemplos y ejercicios que el libro maneja son situaciones científicas que requieren de la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente físico, como podemos observar en los ejemplos presentados a continuación. Además, estos ejemplos y ejercicios emplean diferentes magnitudes, ya sea: segundos, minutos, metros, etc. **(Ejercicio 38, sección 13.2) La contracción de Lorenz**. En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorenz $$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$ Expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo? **(Ejemplo 5, sección 13.3) Velocidad instantánea de un cuerpo en caída.** Si un cuerpo se deja caer desde una altura de

3000 pies, su distancia sobre el suelo (en pies) después de t segundos, está dada por $h(t) = 3000 - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea después de 4 segundos.

Solución

Después que hayan transcurrido 4 segundos, la altura es $h(4) = 2744$ pies.

La velocidad instantánea es

$$h'(t) = \lim_{t\to 4}\frac{h(t)-h(4)}{t-4}$$
$$= \lim_{t\to 4}\frac{3000-16t^2-2744}{t-4}$$
$$= \lim_{t\to 4}\frac{256-16t^2}{t-4}$$
$$= \lim_{t\to 4}\frac{16(4-t)(4+t)}{t-4}$$
$$= \lim_{t\to 4} -16(4+t)$$
$$= -16(4+4) = -128 ft/s$$

El signo negativo indica que la altura es decreciente a una rapidez de 128 pies/s.

(Ejercicio 28, sección 13.3) Velocidad en la Luna. Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.

a) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha después de un Segundo
b) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha cuando $t = a$.
c) ¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?
d) ¿Con que velocidad llegará la flecha a la Luna?

	(Ejercicio 29, sección 13.3) Velocidad de una partícula. El desplazamiento s (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula x en los tiempos: $t = a, t = 1, t = 2, t = 3$. **(Ejercicio 35, sección 13.4) Concentración de sal.** (a) Un tanque contiene 5000 L de agua pura. Salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua es bombeada en el tanque a razón de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es $$\boldsymbol{C(t) = \frac{30t}{200+t}}$$ (b) ¿Qué ocurre a la concentración cuando $t \to \infty$? **(Ejercicio 36, sección 13.4) Velocidad de una gota de lluvia.** La velocidad descendente de una gota de agua en caída en el tiempo t está modelada por la función $$v(t) = 1.2(1 - e^{-8.2t})$$ Encuentre la velocidad terminal de la gota de agua evaluando $$\lim_{t\to\infty} v(t)$$
El cálculo con geometría analítica	Los ejemplos y ejercicios que el libro maneja son situaciones: ocupacionales o laborales (están relacionadas a un entorno de trabajo). Se refieren al modo en que el lugar de trabajo propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y

adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forman parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales.

Un comerciante que vende al por mayor distribuye un producto que vende por kilogramo (o por fracción de kilogramo); si no se solicitan más de 10 kg. El comerciante cobra $1 (unidad monetaria) por kilogramo. Sin embargo, para atraer pedidos cuantiosos, el comerciante cobra sólo 90 centavos (₵) por kilogramo si se compran más de 10 kg del producto. Así pues, si se compran x kilogramos del producto y $C(x)$ unidades monetarias es el costo total del pedido, entonces

$$C(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0.9x & si\ 10 < x \end{cases}$$

Cuando se considera el límite de $C(x)$ cuando x tiende a 10 debe distinguirse entre el límite por la izquierda en 10, y el límite por la derecha también en 10. Para la función C se tiene

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} x = 10$$

$$\lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} 0.9x = 9$$

Ya que $\lim_{x \to 10^-} C(x) \neq \lim_{x \to 10^+} C(x)$. Se concluye del Teorema 2.3.3 que no existe $\lim_{x \to 10} C(x)$.

El autor pretende mostrar al lector que los límites laterales cuando x tiende a 10 difieren, sin embargo, en la situación planteada el cálculo del límite carece de sentido.

Cálculo Diferencial	En este libro no se presentan ejercicios de aplicación.
Calculo diferencial e integral	Los ejemplos y ejercicios que el libro maneja son situaciones de física. Dichas situaciones se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema; públicas, científicas. **(Ejercicio 46, sección 1.2)** Determine el límite de la función que describe la presión atmosférica sobre un avión que desciende desde 32 000 pies hasta la tierra en Honolulu, ubicada al nivel del mar, (la presión atmosférica al nivel del mar es de 14.7 lb/in^2. **(Ejercicios 101, 102, sección 1.3) Objeto en caída libre**. En los ejercicios 101 y 102 use la función de posición $s(t) = -16t^2 + 1000$, la cual da la altura (en pies) de un objeto que ha caído durante t segundos desde una altura de 1000 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos, se expresa por $\lim_{t \to a} \frac{s(a)-s(t)}{a-t}$ **101.** Si un trabajador de la construcción deja caer una llave de tuercas desde una altura de 1000 pies, ¿con qué rapidez estará cayendo la llave después de 5 segundos? **102.** Si un trabajador de la construcción deja caer una llave de tuercas desde una altura de 1000 pies, ¿cuándo chocará la llave

contra el suelo? ¿A qué velocidad se realizará el impacto de la llave contra el suelo?

(Ejercicio 61, sección 1.5) Drogas ilegales. El costo en millones de dólares que representa para una oficina gubernamental la incautación de x% de una droga ilegal es

$$C = \frac{528x}{100 - x}, \qquad 0 \leq x < 100$$

a) Halle el costo de incautación de 25% de la droga.
b) Halle el costo de incautación de 50% de la droga.
c) Halle el costo de incautación de 75% de la droga.

Encuentre el límite de C cuando $x \to 100^{-}$ e interprete su resultado.

El autor pretende que el lector interprete lo siguiente: el límite de C es infinito cuando $x \to 100^{-}$, por lo que, si se quiere incautar toda la droga del país, el país estaría en banca rota antes de lograr su propósito, por lo que es imposible que se incaute 100% de la droga.

(Ejercicio 62, sección 1.5) Relatividad. Según la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende su velocidad v; es decir

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Donde m_0 es la masa cuando la masa se encuentra en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre el límite de la masa cuando v tiende a c^{-}.

Matemáticas 1 Calculo diferencial	Los ejemplos y ejercicios que el libro maneja son situaciones científicas. **(Ejercicio 52, sección 3.5)** Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con velocidad v es $m = {m_0}/{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$ $d$onde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a m cuando v tiende a c^-?
Cálculo con geometría analítica	Los ejemplos y ejercicios que el libro maneja son situaciones científicas. **(Ejemplo 2, sección 2.1)** Desde un globo de aire caliente que se halla a una altura de 512 pies sobre el suelo, se deja caer un saco de arena del lastre. Si se desprecia la fricción del aire, la distancia $s(t)$ del suelo al saco a los t segundos está dada por $s(t) = -16t^2 + 512$. Calcular la velocidad del lastre en a) $t = a\ segundos$ b) $t = 2\ s$ c) El momento en que llega al suelo.

Resumen del análisis fenomenológico

Los autores de los libros analizados abordan ejemplos y ejercicios principalmente relacionados con fenómenos físicos, como movimiento de una partícula, desplazamiento de un cuerpo, caída libre de un objeto; y como segundo lugar situaciones ocupacionales o laborales como compra y venta de productos de abarrotes o agrícolas. Estos ejemplos y ejercicios son idealizados y modelados con una función que describe su comportamiento, con la finalidad de facilitar al lector la aplicación de límite de una función.

Los ejemplos y ejercicios de aplicación contemplan diferentes fenómenos con la finalidad de que el lector visualice la aplicación del límite de una función identificando con una perspectiva transversal las semejanzas de estos con su realidad y dar sentido a la aplicación. Cada libro se inclina principalmente a determinadas situaciones, estos libros tienden a encaminar al lector hacia una preparación ingenieril o científica. Por ejemplo, el libro Precálculo Matemáticas para el cálculo, maneja ejercicios como el movimiento de una partícula, contracción de Lorenz, velocidad instantánea de un cuerpo en caída, velocidad en la luna, concentración de sal y velocidad de una gota de lluvia.

En lo que respecta a las aplicaciones del límite de una función, los libros que presentan mayor número de aplicaciones (contemplando más de 11) son: Cálculo Diferencial e integral, Precálculo y Cálculo con geometría analítica. Por otro lado, El cálculo con geometría analítica y Matemáticas 1. Cálculo Diferencial presentan menos de 5 aplicaciones. El único libro que no contiene ejercicios de aplicación es el libro: Cálculo Diferencial (CONAMAT).

Conclusiones

En los planes de estudio 06 por competencias y 07, respecto al tema de *límite de una función,* podemos decir que ambos planes pretenden que el educando comprenda el concepto de límite a través de la manipulación de sus diferentes sistemas de representación.

En cuanto a lo que se espera del educando al concluir el bloque, podemos notar las siguientes similitudes en dichos planes: estimar el límite a través del comportamiento de la función; calcular el límite de una función de manera analítica o algebraica, y; determinar la continuidad de una función. Por otro lado, podemos notar que en el plan 06 por competencias se contempla que el educando aplique los límites y las razones de cambio para conceptualizar y calcular las derivadas de una función. Así como resolver problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias aplicando límites, los cuales son aspectos que no se consideran en el plan 07.

Con el análisis realizado a los libros de texto podemos resaltar lo siguiente, de acuerdo a las categorías analizadas: los autores buscan que el lector comprenda el concepto de límite de una función mediante el razonamiento deductivo y transductivo, utilizando mayoritariamente las siguientes estrategias: cálculo mental, tablas de valores, elaboración de gráficas y resolución de problemas. Los conceptos previos que utilizan para abordar el tema de límite de una función son principalmente: número, variable, función y asíntota.

Se determinó que casi todos los libros analizados pretenden desarrollar las mismas destrezas o similares, no obstante, en algunos de ellos no se considera el uso de herramientas digitales para graficar una función. Debido a que actualmente la tecnología digital ha sido relevante para el ámbito educativo, considero pertinente que todos los libros promuevan dicha destreza.

En cuanto a los sistemas de representación, solo el libro de Precálculo emplea los tres sistemas de representación (analítico, algebraico y aritmético). Debido a que en los planes de estudio 06 por competencias y 07 no se aborda el tema de límite de una sucesión (sistema de representación aritmético), no es relevante que los demás libros analizados no contemplen tal sistema de representación. Una de las representaciones más empleadas (de forma única) y al mismo tiempo la más empleada en la combinación de representaciones, entre el sistema de representación analítico y algebraico es la representación gráfico-cartesiana. Posiblemente esto se debe a que se considera que una representación más visual tiene mayor impacto en el lector para comprender el comportamiento del límite de la función.

Los diferentes ejemplos y ejercicios prácticos que abordan los diferentes autores son relacionados a fenómenos físicos, como es la velocidad de un objeto, temperatura, entre otros; encaminados a un enfoque científico. Por otra parte, problemas relacionados con la vida cotidiana aparecen con menos frecuencia. Dichos problemas muy frecuentemente están forzados por el autor para encontrar una aplicación de límite de una función, a tal grado que, en ocasiones, el cálculo del límite de la función que modela el fenómeno carece de sentido. Lo anterior podría provocar confusión en el lector al no encontrar razón en su utilización, lo cual dificulta un aprendizaje significativo.

De los párrafos anteriores podemos afirmar que los libros que más docentes seleccionaron para impartir el tema *límite de una función*, se apegan a lo que los planes de estudio 06 por competencias y 07 indican sobre este tema. También están de acuerdo con las recomendaciones que han hecho diferentes investigadores en el campo de la educación matemática para la comprensión de este concepto. Por ejemplo, Espíritu y Navarro (2014), Blazquez y Ortega (2001) y Morante, Hernández y Ruiz (2021), destacan el uso de las diferentes representaciones para una comprensión intuitiva del límite de una función.

Por lo anterior, concluimos que los libros analizados son un buen apoyo para el docente de matemáticas de las preparatorias BUAP, ya que ofrecen un tratamiento intuitivo y con diversos recursos de representación del concepto de límite de una función. Sin embargo, se recomienda tener cuidado con las aplicaciones que presentan ya que en algunas el cálculo del límite carece de sentido. También es importante mencionar que solo los libros Precálculo, El cálculo con geometría analítica, Cálculo diferencial e integral y Cálculo con geometría analítica recomiendan el uso de calculadoras graficadoras por lo que, los recursos digitales que podrían favorecer la comprensión de este concepto quedan como un tema pendiente que el docente tendrá que explorar por su cuenta.

Bibliografía

Blázquez, S., y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(3), 219-236.

Cabero, J., Duarte, A. y Barroso, J. (1989). La formación del profesorado en nuevas tecnologías: retos hacia el futuro. En J. Ferrés y P. Marqués (Eds.), Comunicación educativa y nuevas tecnologías. Barcelona: Praxis.

Cockcroft, W. (1985). Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Espíritu Montiel, V. I. y Navarro Sandoval, C. (2014). Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas. *Números*, 31-53.

Gómez, L. M. y Pantoja, Y. M. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad una metodología de análisis de textos escolares. *Sigma*, 11(1), 26-38.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. Revista Ema*, 7(3), 251-292.

Larson, R., Hostetler Robert, P. y Edwards Bruce, H. (2005). *Cálculo Diferencial e Integral*. 7ma. Edición.

Leithold, L. (2001). El cálculo con Geometría Analítica, 6ta. Edición. Ed. Harla. México.

Márquez, A. A., Villegas, M. C., Ruiz, H. G., Figueroa, R. R. y Vásquez, F. V. B. (2010). *Cálculo diferencial*. Pearson Educación.

Morante, J.D., Hernández, L.A. y Ruiz, H. (2021). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función en estudiantes de ingeniería. Aceptado para su publicación en *Educación Matemática*.

Palop, P. F. y García, P. A. C. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado,* 20(1), 201-217.

Ramírez, T. (2002). El texto escolar como objeto de reflexión e investigación. *Docencia universitaria*, 101-124

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales*. Suma, 58, 7-23.

Ruiz, J., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005, Revista latinoamericana de Investigación en matemática educativa, 245-276.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo matemáticas para el cálculo* (sexta edición ed.). México DF: Cengage Learning.

Swokowski, E. W., Abreu, J. L. y Oliveró, M. (1989). Cálculo con geometría analítica.

Zill, D. G., Wright, W. S. y Escutia, J. I. (2015*). Matemáticas 1: cálculo diferencial*. 1ra edición. McGraw Hill/Intermericana.