Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

DOS TIPOS DE OPERADORES CERRADURA EN LA CATEGORÍA R-MOD

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JESÚS JONATHAN TORRES DE JORGE

DIRECTOR DE TESIS
DR. IVAN FERNANDO VILCHIS MONTALVO

PUEBLA, PUE. OCTUBRE 2019

A mis padres Armando y Gabriela
y a mi hermano Christian.
Por todo el cariño que me han dado
y por todo su apoyo, gracias.

Agradecimientos

Le agradezco a mis padres Armando y Gabriela por todo su amor y cariño, por depositar su confianza en mí, por tenerme tanta paciencia, por cuidar tan bien de mí, por ser unos padres ejemplares y amorosos. Les agradezco infinitamente por su apoyo, porque juntos hemos hecho de este un sueño una realidad.

Le agradezco a mi hermano Christian por todo su apoyo, por su compañia, por su solidaridad conmigo y por tantas risas juntos. Gracias por ser el mejor hermano que alguien puede tener.

Le agradezco a mi novia Ana por todo su apoyo, por su gran cariño y aprecio, por alentarme a continuar en los momentos difíciles, por siempre darme ánimos, por preocuparse tanto por mi. Gracias Ana por escucharme, por ser tan buena conmigo y por tantos bellos momentos. Gracias por ser parte de mi vida.

Le agradezco al doctor Ivan Fernando Vilchis Montalvo por tomarme bajo su tutela, por todo el conocimiento que me ha compartido, por atenderme y resolver hasta mis más pequeñas dudas, por todo el tiempo que ha dedicado para trabajar conmigo y por ser un profesor que de verdad se interesa en sus alumnos.

Introducción

El propósito de este trabajo es la investigación sistemática de operadores de cerradura en la categoría de módulos: propiedades, tipos principales, su caracterización por varios métodos, operaciones, etc. Además de exponer dos tipos de operadores cerradura: uno bajo un enfoque reticular y otro bajo un enfoque propio de las categorías de R-módulos. El estudio realizado en el Capítulo 2 nos llevó a estudiar más acerca de la teoría de retículas y la relación que guarda con los operadores cerradura en la categorías de R-módulos. Dando así el surgimiento del Capítulo 1 en el cual se exponen las propiedas más relevantes de las retículas completas, modulares, compactamente generadas, continuas y pseudo-complementadas. En el Capítulo 2, tres tipos importantes de operadores de cerradura en la categoría R-Mod son analizados: operadores débilmente hereditarios, idempotentes y débilmente hereditarios e idempotentes. Tales operadores cerraduras C son descritos por las funciones abstractas asociadas $\mathcal{F}_1^C$ y $\mathcal{F}_2^C$, las cuales a su vez son definidas por los submódulos C-densos y C-cerrados. Por último, nos hemos dado a la tarea de anexar un apéndice de Ideales y Filtros en Álgebras Boolenas ya que el uso de estos conceptos fueron importantes en el Capítulo 1 y debido a su extensas propiedades dedicamos un apartado para exponer algunas de ellas, que desembocan en el Teorema de la Representación de Stone.

Índice general

Dos Tipos de Operadores Cerradura en la Categoría R-Mod

Jesús Jonathan Torres de Jorge

fecha

Capítulo 1

Retículas Modulares

1.1. Retículas

Definición 1.1. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado (COPO) y S un subconjunto de P:*

1. *Una cota superior para S en P es un elemento $x \in P$ tal que $s \leq x$, para todo $s \in S$.*

2. *Un elemento $s_0 \in S$ es el mayor elemento en S, si para todo $s \in S$, $s \leq s_0$.*

3. *Una cota inferior para S en P es un elemento $x \in P$ tal que $x \leq s$, para todo $s \in S$.*

4. *Un elemento $s_0 \in S$ es el menor elemento en S, si para todo $s \in S$, $s_0 \leq s$.*

5. *Definimos el supremo de S como el menor de las cotas superiores de S. Es decir, $x_0 \in P$ es el supremo de S, si x_0 es cota superior de S y si $x \in P$ es cota superior de S, entonces $x_0 \leq x$.*

6. *Definimos el ínfimo de S como el mayor de las cotas inferiores de S. Es decir, $x_0 \in P$ es el ínfimo de S, si x_0 es cota inferior de S y si $x \in P$ es cota inferior de S, entonces $x \leq x_0$.*

Definición 1.2. *Una retícula es un COPO, tal que para cada par de elementos a, b tienen supremo e ínfimo denotados por $a \vee b$ y $a \wedge b$, respectivamente.*

El supremo también es llamado unión o yunta, por otro lado el ínfimo también es llamado intersección o cuña.

Supongamos que $(L, \leq)$ es una retícula, donde el supremo y el ínfimo esán denotados por $\vee$ y $\wedge$, respectivamente. Definimos la retícula L^{op} como sigue: $L^{op} = L$ y el orden parcial en L^{op}, denotado por $\leq^{op}$, está dado por:

$$a \leq^{op} b \text{ si y sólo si } b \leq a \text{ en L.}$$

Verifiquemos que L^{op} es una retícula.

1. Para todo $a \in L$ se cumple que $a \leq a$. De ahí que en L^{op}, $a \leq^{op} a$.
2. Si $a \leq^{op} b$ y $b \leq^{op} a$ en L^{op}, entonces $b \leq a$ y $a \leq b$ en L. Así que $a = b$.
3. Si $a \leq^{op} b$ y $b \leq^{op} c$ en L^{op}, entonces $b \leq a$ y $c \leq b$ en L. De donde $c \leq a$ en L, así pues $a \leq^{op} c$ en L^{op}.

Por lo tanto L^{op} es un COPO. Denotemos al ínfimo y al supremo de L^{op} por $\wedge^{op}$ y $\vee^{op}$, respectivamente, entonces $\vee^{op} = \wedge$ y $\wedge^{op} = \vee$. En efecto, sean $a, b \in L^{op}$, entonces $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ en L. De ahí que $a \leq^{op} a \wedge b$ y $b \leq^{op} a \wedge b$ en L^{op}. Esto nos dice $a \wedge b$ es cota superior de $\{a, b\}$ en L^{op}. Sea x cota superior de $\{a, b\}$ en L^{op}, entonces $a \leq^{op} x$ y $b \leq^{op} x$ en L^{op}. De donde $x \leq a$ y $x \leq b$ en L, lo cual implica $x \leq a \wedge b$ en L. De manera que $a \wedge b \leq^{op} x$ en L^{op}, por lo tanto $\vee^{op} = \wedge$. De manera dual obtenemos $\wedge^{op} = \vee$. Por lo tanto L^{op} es una retícula, la cual es llamada la retícula opuesta o dual de L.

Definición 1.3. *Si L y L' son retículas, un morfismo de retículas es una función $\alpha : L \to L'$ tal que para todo $x, y \in L$ satiface:*

1. $\alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$;
2. $\alpha(x \vee y) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.

Decimos que α es un isomorfismo de retículas, si α es un morfismo de retículas biyectivo.

Definición 1.4. *Una función $f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ entre dos conjuntos parcialmente ordenados es un morfismo de orden, si para todo $a, a' \in A$ tales que $a \leq_A a'$ implica $f(a) \leq_B f(a')$.*

Definición 1.5. *Un isomorfismo de orden, es un morfismo de orden biyectivo tal que su inversa también es un morfismo de orden.*

Lema 1.6. *Si $f : L \to L'$ es un isomorfismo de retículas, entonces $f^{-1} : L' \to L$ es morfismo de retículas.*

Demostración. Sean $x', y' \in L'$, como f es función sobreyectiva, existen $x, y \in L$ tales que $f(x) = x'$ y $f(y) = y'$, de donde $f^{-1}(x') = x$ y $f^{-1}(y') = y$. Ahora bien $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = x' \wedge y'$. De ahí que $x \wedge y = f^{-1}(x' \wedge y')$. Finalmente $f^{-1}(x') \wedge f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \wedge y')$. Dualmente $f^{-1}(x' \vee y') = f^{-1}(x') \vee f^{-1}(y')$. □

Proposición 1.7. *Si L y L' son retículas y $f : L \to L'$ es función, entonces f es isomorfismo de orden si y sólo si f es isomorfismo de retículas.*

Demostración. Sean $x, y \in L$. Supongamos que $f : L \to L'$ es un isomorfismo de orden, entonces $f(x \wedge y) \leq f(x), f(y)$. Esto nos dice que $f(x \wedge y)$ es cota inferior de $\{f(x), f(y)\}$. Sea a' cota inferior de $\{f(x), f(y)\}$ en L', entonces $a' \leq f(x), f(y)$, de donde $f^{-1}(a') \leq x, y$. Así que $f^{-1}(a') \leq x \wedge y$, luego $a' \leq f(x \wedge y)$. Por lo tanto $f(x \wedge y)$ es el ínfimo de $\{f(x), f(y)\}$, es decir, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. Dualmente $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Recíprocamente, sea f un isomorfismo de retículas. Si $x, y \in L$ son tales que $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x \leq y = x \vee y$. Además como $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \leq f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$, se sigue que $f(x) \leq f(y)$. Por lo que f es un morfismo de orden. Por el Lema 1.6, f^{-1} también es morfismo de retículas. Sean $x', y' \in L'$ tales que $x' \leq y'$, análogamente, obtenemos $f^{-1}(x') \leq f^{-1}(y')$. Por lo que f^{-1} también es un morfismo de orden.

□

Definición 1.8. *Un morfismo de retículas $\alpha : L^{op} \to L'$, es llamado un anti-morfismo de L a L'.*

Un ejemplo sencillo de anti-morfismo es el siguiente: Sean X un conjunto no vacío y $(L, \leq) = (\mathbf{P}(X), \subseteq)$. Definimos $\alpha : (L^{op}, \leq_{op}) \to (L, \leq)$ por $\alpha(A) = X - A$, para todo $A \in L^{op}$. Es fácil ver que α es un morfismo de retículas. Así pues α es un anti-morfismo de $\mathbf{P}(X)$ a $\mathbf{P}(X)$.

Definición 1.9. *Sean L una retícula y $L' \subseteq L$. Decimos que L' es una subretícula de L, si $x, y \in L'$ entonces $x \wedge y,\ x \vee y \in L'$.*

Notar que L' por sí misma es una retícula.

Definición 1.10. *Una retícula L es completa si para cada $S \subseteq L$, existe el supremo e ínfimo de S en L.*

Observación 1.11. *En una retícula completa L, existen el elemento mayor y el elemento menor, los cuales son denotados por 1 y 0, respectivamente. Además $1 = inf\emptyset$ y $0 = sup\emptyset$.*

Demostración. Notar que la proposición $\forall x \ (x \in \emptyset \Rightarrow 1 \leq x)$ es verdadera. Así que 1 es cota inferior de $\emptyset$. Sea $y \in L$ cota inferior de $\emptyset$, dado que $1 = supL$ entonces $y \leq 1$. Por lo tanto $1 = inf\emptyset$. Dualmente se demuestra que $0 = sup\emptyset$.

□

Proposición 1.12. *Sea L un COPO no vacío.*

1. *Si cada subconjunto de L tiene supremo en L, entonces L es una retícula completa;*

2. *Si cada subconjunto de L tiene ínfimo en L, entonces L es una retícula completa.*

Demostración. Demostraremos 1. Para cada $S \subseteq L$, consideremos:

$$B = \{b \in L \mid b \text{ es cota inferior de } S\}.$$

Notar que B es no vacío, pues $\emptyset \subseteq L$ y por hipótesis existe $sup\emptyset$ el cual coincide con $0 \in L$. De manera que $0 = sup\emptyset$ es cota inferior de S. Sea $x = supB$, el cual existe por hipótesis. Si $s \in S$, entonces $b \leq s$, para todo $b \in B$. De manera que $x \leq s$, para todo $s \in S$. Esto nos dice que x es cota inferior de S. Sea $y \in L$ cota inferior de S, entonces $y \in B$. De ahí que $y \leq x$. Por lo tanto $x = infS$. Dualmente se demuestra 2.

□

Definición 1.13. *Sea L una retícula completa. Una subretícula completa de L es una subretícula L' tal que para todo $S \subseteq L'$, $supS$ e $infS$ (tomados en L) pertenecen a L'.*

Notar que L' es por sí misma una retícula completa.

Ejemplo 1.14. ***Intervalos***. *Sean L una retícula con $a, b \in L$ tales que $a \leq b$, entonces $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ es una subretícula de L llamada el intervalo entre a y b. En efecto, sean $x, y \in [a, b]$, entonces $a \leq x, y \leq b$, en consecuencia existen $x \wedge y, x \vee y \in L$. Dado que $a \leq x$ y $a \leq y$, se tiene que a es cota inferior de $\{x, y\}$, de ahí que $a \leq x \wedge y$. Además como $x \wedge y \leq x \vee y$, entonces $a \leq x \vee y$. Por otro lado $x \leq b$ y $y \leq b$ implican $x \vee y \leq b$. Además $x \wedge y \leq b$. Por lo tanto $x \wedge y, x \vee y \in [a, b]$.*

Ejemplo 1.15. ***Ideales y filtros***. *Si L es una retícula, un subconjunto I de L es llamado un ideal si satisface:*

1. *$a \in I$ y $x \leq a$ implican $x \in I$;*
2. *$a, b \in I$ implica $a \vee b \in I$;*
3. *Si L tiene 0 entonces $0 \in I$.*

En particular, para cualquier $a \in L$ obtenemos el ideal principal:

$$\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}.$$

Dualmente, definimos la noción de flitro. Un subconjunto F de L es un filtro si satiface:

1. *$a \in F$ y $a \leq x$ implican $x \in F$;*
2. *$a, b \in F$ implica $a \wedge b \in F$;*
3. *Si L tiene 1, entonces $1 \in L$.*

Además para todo $a \in L$ obtenemos el filtro principal:

$$\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}.$$

Ejemplo 1.16. ***La retícula de submódulos***. *Si M es un R-módulo, entonces los submódulos de M forman una retícula completa. En efecto, si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de M, entonces $sup\{M_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in I} M_i$ e $inf\{M_i\}_{i \in I} = \cap_{i \in I} M_i$. A dicha retícula la denotaremos por $\mathbb{L}(M)$. Además, cuando $K \leq L \leq M$, el intervalo $[K, L]$ es isomorfo a la retícula de submódulos de L/K. En efecto, sea $\varphi : [K, L] \to [\overline{0}, L/K]$ dada por $\varphi(N) = N/K$.*

1. *Para todo* $N \in [K, L], \varphi(N) \in [\overline{0}, L/K]$. *Sea* $N \in [K, L]$, *entonces* $K \leq N \leq L$, *de donde* N/K *es un R-módulo. Ahora bien, si* $\overline{x} \in N/K$ *entonces* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in N \leq L$. *Así que* $x \in L$ *y* $\overline{x} \in L/K$. *Por lo tanto* $N/K \leq L/K$.

2. *Para todo* $N, N' \in [K, L]$, $\varphi(N \cap N') = \varphi(N) \cap \varphi(N')$ *y* $\varphi(N + N') = \varphi(N) + \varphi(N')$. *Sean* $N, N' \in [K, L]$, *entonces* $\varphi(N \wedge N') = \varphi(N \cap N') = (N \cap N')/K$ *y* $\varphi(N) \wedge \varphi(N') = N/K \cap N'/K$.*Tenemos que* $\overline{x} \in (N \cap N')/K$ *si y sólo si* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in N \cap N'$ *si y sólo si* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in M$ *tal que* $x \in N$ *y* $x \in N'$ *si y sólo si* $\overline{x} = x + K \in N/K$ *y* $\overline{x} = x + K \in N'/K$ *si y sólo si* $\overline{x} \in N/K \cap N'/K$. *Por lo tanto* $\varphi(N \cap N') = \varphi(N) \cap \varphi(N')$. *Por otro lado* $\varphi(N \vee N') = \varphi(N + N') = (N + N')/K$ *y* $\varphi(N) \vee \varphi(N') = N/K + N'/K$. *Tenemos entonces que* $\overline{x} \in (N + N')/K$ *si y sólo si* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in N + N'$ *si y sólo si* $\overline{x} = x + K$, *con* $x = n + n'$, *donde* $n \in N$ *y* $n' \in N'$ *si y sólo si* $\overline{x} = (n + n') + K$, *con* $n \in N$ *y* $n' \in N'$ *si y sólo si* $\overline{x} = (n + K) + (n' + K)$, *con* $n \in N$ *y* $n' \in N'$ *si y sólo si* $\overline{x} \in N/K + N'/K$. *Por lo tanto* $\varphi(N + N') = \varphi(N) + \varphi(N')$. *Así que* φ *es morfismo de retículas.*

3. φ *es inyectiva. Sean* $N, N' \in [K, L]$ *tales que* $\varphi(N) = \varphi(N')$, *entonces* $N/K = N'/K$. *Sea* $x \in N$, *entonces* $x + K \in N/K = N'/K$, *de ahí que* $x + K \in N'/K$, *por lo que* $x \in N'$. *Análogamente si* $x \in N'$, *entonces* $x \in N$. *Por lo tanto* $N = N'$.

4. φ *es suprayectiva. Sean* $J \in [\overline{0}, L/K]$ *y* $\overline{x} \in J$ *entonces* $\overline{x} \in L/K$, *de ahí que* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in L$. *Entonces* $x + K \in J$. *Sea* $N = \{x \in L \mid x + K \in J\}$. *Claramente* $N \in [K, L]$, *luego sea* $\overline{x} \in N/K$, *entonces* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in N$. *De donde* $x + K \in J$, *esto nos dice que* $N/K \leq J$. *Sea* $\overline{x} \in J$ *entonces* $\overline{x} = x + K$, *para algún* $x \in L$, *así que* $x \in N$ *y por ende* $x + K \in N/K$, *esto nos dice que* $J \leq N/K$. *Por lo tanto* $J = N/K$.

Ejemplo 1.17. ***Completaciones***. *Sea* L *es una retícula completa. Si* C *es un subconjunto de* L, *el cual es cerrado bajo ínfimos, esto es, si* $S \subseteq C$ *implica* $infS \in C$. *Se sigue de la Proposición 1.12 que* C *es una retícula completa. Al conjunto* C *se le llama sistema cerrado en* L. *Notar que el ínfimo de* S *en* C *es el mismo que en* L, *pero el supremo en* C *está dado por:*

$$sup_C S = inf\{\text{ cotas superiores de } S \text{ en } C\ \}.$$

1.2. Modularidad

Sea L una retícula, es claro que las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son conmutativas y asociativas. Además para todo $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ y para todo $x \in L$ se cumple:

$$(x \wedge b) \vee a \leq (x \vee a) \wedge b. \tag{1.1}$$

En efecto, tenemos que $x \wedge b \leq x$ y $x \wedge b \leq b$, lo que implica $(x \wedge b) \vee a \leq x \vee a$ y $(x \wedge b) \vee a \leq b \vee a = b$. De manera que $(x \wedge b) \vee a$ es cota inferior del conjunto $\{(x \vee a), b\}$. De ahí que $(x \wedge b) \vee a \leq (x \vee a) \wedge b$.

Definición 1.18. *Una retícula L es modular si la desigualdad inversa de (1.1) también se cumple, es decir, para todo $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ y para todo $x \in L$ se cumple:*

$$(x \wedge b) \vee a = (x \vee a) \wedge b.$$

Notar que toda subretícula de una retícula modular también es modular.

Proposición 1.19. *Sean a, b elementos de una retícula modular L. Entonces existe un isomorfismo de retículas $[a \wedge b, a] \to [b, a \vee b]$.*

Demostración. Veamos primero que para todo $x \in [a \wedge b, a]$, $x \vee b \in [b, a \vee b]$ y que para todo $y \in [b, a \vee b]$, $y \wedge a \in [a \wedge b, a]$. Sea $x \in [a \wedge b, a]$, entonces $a \wedge b \leq x \leq a$, de donde $(a \wedge b) \vee b \leq x \vee b \leq a \vee b$. Como $b \leq (a \wedge b) \vee b$, entonces $b \leq x \vee b \leq a \vee b$. Por lo tanto $x \vee b \in [b, a \vee b]$. Sea $y \in [b, a \vee b]$, entonces $b \leq y \leq a \vee b$, de donde $b \wedge a \leq y \wedge a \leq (a \vee b) \wedge a \leq a$. Por lo tanto $y \wedge a \in [a \wedge b, a]$. Ahora bien, sean α y β como sigue:

$$\alpha : [a \wedge b, a] \to [b, a \vee b] \text{ dada por } \alpha(x) = x \vee b,$$
$$\beta : [b, a \vee b] \to [a \wedge b, a] \text{ dada por } \beta(y) = y \wedge a.$$

Para todo $x \in [a \wedge b, a]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(x) &= \beta(\alpha(x)) \\ &= \beta(x \vee b) \\ &= (x \vee b) \wedge a \\ &= (b \vee x) \wedge a.\end{aligned}$$

Como $x \leq a$, por la modularidad de L tenemos que $(b \vee x) \wedge a = (b \wedge a) \vee x = x$. Además para todo $y \in [b, a \vee b]$, se tiene:

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \beta)(y) &= \alpha(\beta(y)) \\ &= \alpha(y \wedge a) \\ &= (y \wedge a) \vee b \\ &= (a \wedge y) \vee b \\ &= (a \vee b) \wedge y \\ &= y.\end{aligned}$$

Por lo tanto α es la función inversa de β y viceversa. Sean $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$, entonces $\alpha(x_1) \vee \alpha(x_2) = (x_1 \vee b) \vee (x_2 \vee b) = (x_1 \vee x_2) \vee b = \alpha(x_1 \vee x_2)$. Sean $y_1, y_2 \in [b, a \vee b]$, entonces $\beta(y_1) \wedge \beta(y_2) = (y_1 \wedge a) \wedge (y_2 \wedge a) = (y_1 \wedge y_2) \wedge a = \beta(y_1 \wedge y_2)$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1 \wedge x_2) &= (x_1 \wedge x_2) \vee b \\ &= [\beta\alpha(x_1) \wedge \beta\alpha(x_2)] \vee b \\ &= \beta[\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)] \vee b \\ &= ([\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)] \wedge a) \vee b \\ &= (a \wedge [\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)]) \vee b.\end{aligned}$$

Como $b \leq \alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)$, entonces por la modularidad de L tenemos que $(a \wedge [\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)]) \vee b = (a \vee b) \wedge [\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)] = \alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)$. De manera que α es morfismo de retículas. Así que por Lema 1. 6, β también lo es.

□

Definición 1.20. *Sea L una retícula con 0 y 1.*

1. *Dado $a \in L$, un complemento de a en L es un elemento $c \in L$ tal que $a \wedge c = 0$ y $a \vee c = 1$. La retícula L es complementada, si cada elemento en L tiene complemento en L.*

2. *Un intervalo $I = [a, b]$ de L es llamado complementado, si para todo $x \in I$, existe $z \in I$ tal que $x \wedge z = a$ y $x \vee z = b$. En este caso, diremos que z es un complemento relativo de x con respecto de I.*

Proposición 1.21. *Si L es una retícula modular complementada, entonces cada intervalo de L es complementado.*

Demostración. Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ y $d \in [a, b]$. Como L es complementada, existe $c \in L$ tal que $d \wedge c = 0$ y $d \vee c = 1$. Afirmamos que $(c \wedge b) \vee a = (c \vee a) \wedge b$ es el complemento de d en $[a, b]$. Notar que $a \leq (c \wedge b) \vee a$ y $(c \vee a) \wedge b \leq b$, de manera que $(c \wedge b) \vee a = (c \vee a) \wedge b \in [a, b]$. Ahora bien:

$$\begin{aligned} [(c \wedge b) \vee a] \wedge d &= [(c \wedge b) \wedge d] \vee a \\ &= [(c \wedge d) \wedge b] \vee a \\ &= (0 \wedge b) \vee a \\ &= 0 \vee a \\ &= a. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} [(c \vee a) \wedge b] \vee d &= [(c \vee a) \vee d] \wedge b \\ &= [(c \vee d) \vee a] \wedge b \\ &= (1 \vee a) \wedge b \\ &= 1 \wedge b \\ &= b. \end{aligned}$$

□

La modularidad de L depende únicamente de la propiedad de unicidad de complementos relativos, esto es:

Proposición 1.22. *La retícula L es modular si y sólo si cada intervalo I de L tiene la siguiente propiedad: si $c \in I$ tiene dos complementos $a, b \in I$ tales que $a \leq b$, entonces $a = b$.*

Demostración. Si L es modular, entonces todo intervalo de L también lo es. Así que podemos asumir que $I = L$. Supongamos que $c \in L$ tiene dos complementos a, b tales que $a \leq b$. Entonces:

$$\begin{aligned} b &= 1 \wedge b \\ &= (c \vee a) \wedge b \\ &= (c \wedge b) \vee a \\ &= 0 \vee a \\ &= a. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $a, b \in L$ son tales que $a \leq b$, siempre se cumple:

$$x := (b \wedge c) \vee a \leq (a \vee c) \wedge b =: y.$$

Afirmamos que x, y son complementos de c en el intervalo $[b \wedge c, a \vee c]$. En efecto, notar que:

$$\begin{aligned} &a \wedge c \leq a \leq (b \wedge c) \vee a; \\ &b \wedge c \leq (b \wedge c) \vee a. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &(a \vee c) \wedge b \leq b \leq b \vee c; \\ &(a \vee c) \wedge b \leq a \vee c. \end{aligned} \tag{1.3}$$

1. De las desigualdades (1.2) obtenemos que $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (b \wedge c) \vee a$ y dado que $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c$. Se sigue que $b \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq [(c \wedge b) \vee a] \wedge c = x \wedge c$, donde la primera igualdad se da pues $a \leq b$. Por otro lado dado que $x \leq y \leq b$, entonces $x \wedge c \leq b \wedge c$. Por lo tanto $x \wedge c = b \wedge c$. Ahora bien, $x \vee c = [(b \wedge c) \vee a] \vee c = (b \wedge c) \vee (a \vee c)$. Dado que $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$, se sigue que $x \vee c = a \vee c$.

2. Tenemos que $y \wedge c = [(a \vee c) \wedge b] \wedge c = (a \vee c) \wedge (b \wedge c) = b \wedge c$, por lo que $y \wedge c = b \wedge c$. Por otro lado de las desigualdades (1.3) obtenemos que $y \vee c = [(a \vee c) \wedge b] \vee c \leq (a \vee c) \wedge (b \vee c) = a \vee c$ que junto con el hecho de que $a \leq y$ implican $y \vee c = a \vee c$.

De la hipótesis se sigue que $x = y$, lo cual demuestra la modularidad de L.

□

Ejemplo 1.23. ***La retícula de submódulos de un módulo***. *Si M es un módulo, entonces la retícula $\mathbb{L}(M)$ es modular. En efecto, sean K, N_1, N_2 submódulos de M tales que $N_1 \leq N_2$, tenemos lo siguiente: si $x \in (K+N_1) \cap N_2$, entonces $x \in K + N_1, x \in N_2$. De donde $x = k + n_1$, para algún $k \in K$ y para algún $n_1 \in N_1$. Luego $k = x - n_1 \in N_2$, de manera que $k \in K \cap N_2$. Entonces $k+n_1 \in (K \cap N_2)+N_1$, de donde $x \in (K \cap N_2)+N_1$. Recíprocamente, $x \in (K \cap N_2) + N_1$ implica $x = y + n_1$, para algún $y \in K \cap N_2$ y para algún $n_1 \in N_1$. Como $y \in K$, $y \in N_2$, entonces $y + n_1 \in N_2, y + n_1 \in K + N_1$. Finalmente $x \in (K + N_1) \cap N_2$.*

1.3. Retículas Distributivas

Proposición 1.24. *Las siguienes condiciones en una retícula L son equivalentes. Para todo $a, b, c \in L$*

1. $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$;
2. $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$;
3. $(a \vee c) \wedge b \leq (a \wedge b) \vee c$.

Demostración. Supongamos que se cumple 1. Tenemos que $b \leq b \vee c$, de ahí que $(a \vee c) \wedge b \leq (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. Por lo tanto $(a \vee c) \wedge b \leq (a \wedge b) \vee c$. Recíprocamente, si se satisface 3. Tenemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, de ahí que $(a \wedge b) \vee c \leq a \vee c$ y $(a \wedge b) \vee c \leq b \vee c$. Entonces $(a \wedge b) \vee c \leq (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Por otro lado, si $x = b \vee c$, entonces $(a \vee c) \wedge x \leq (a \wedge x) \vee c$. De donde:

$$\begin{aligned}
(a \vee c) \wedge (b \vee c) &\leq [a \wedge (b \vee c)] \vee c \\
&= [(b \vee c) \wedge a] \vee c \\
&\leq [(b \wedge a) \vee c] \vee c \\
&= (a \wedge b) \vee c
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(a \wedge b) \vee c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Finalmente, 1. si y sólo si 2. se sigue del principio de dualidad.

□

Definición 1.25. *Una retícula es distributiva, si satisface alguna de las condiciones de la Proposición 1.24.*

Corolario 1.26. *Cada retícula distributiva es modular.*

Demostración. Sea L una retícula distributiva. Dados $x, y, z \in L$ tales que $y \leq z$, siempre se cumple $(x \wedge z) \vee y \leq (x \vee y) \wedge z$. Por la Proposición 1.24 tenemos que $(x \vee y) \wedge z \leq (x \wedge z) \vee y$.

□

Proposición 1.27. *Un elemento en una retícula distributiva tiene a lo más un complemento.*

Demostración. Sean L una retícula distributiva con 0 y 1 y $a \in L$. Supongamos que b y c son complementos de a en L, entonces:

$$\begin{aligned}
c &= c \wedge 1 \\
&= c \wedge (a \vee b) \\
&= (c \wedge a) \vee (c \wedge b) \\
&= 0 \vee (c \wedge b) \\
&= c \wedge b.
\end{aligned}$$

Análogamente $b = b \wedge c$. Por lo tanto $c = b$.

□

Definición 1.28. *Una retícula complementada distributiva con* 0 *y* 1 *es llamada álgebra booleana.*

Notación 1.29. *Sea* L *un álgebra booleana. Para cada* $a \in L$ *denotamos* a^* *al único complemento de* a*.*

Proposición 1.30. *Sea* L *una retícula con* 0 *y* 1*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *L es una álgebra booleana;*
2. *Cada $a \in L$ tiene un único complemento a^*, y $a \wedge b = 0$ se cumple si y sólo si $b \leq a^*$.*

Demostración. Supongamos que L es un álgebra booleana, entonces todo elemento de L tiene un único complemento. Ahora bien, si $a \wedge b = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge (a \vee a^*) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) \\ &= 0 \vee (b \wedge a^*) \\ &= b \wedge a^*. \end{aligned}$$

De manera que $b = b \wedge a^*$, luego $b \leq a^*$. Recíprocamente, si $b \leq a^*$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge a^* = 0$. Por lo tanto $a \wedge b = 0$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple 2. Notemos que $a = (a^*)^*$, pues ambos son complementos de a^* y por hipótesis el complemento es único. Sean $x, y \in L$, entonces $l \in L$ satisface $(x \wedge l) \leq y$ si y sólo si $y^* \wedge (x \wedge l) = 0$. Ahora bien, notemos que existe el elemento mayor $l \in L$ que satisface $x \wedge l \leq y$, el cual es $l = (x \wedge y^*)^*$. En efecto $y^* \wedge [x \wedge (x \wedge y^*)^*] = (y^* \wedge x) \wedge (y^* \wedge x)^* = 0$. De ahí que $x \wedge (x \wedge y^*)^* \leq y$. Ahora bien, sea $l' \in L$ tal que $x \wedge l' \leq y$, entonces $l' \wedge x \leq y$. Luego $l' \wedge (x \wedge y^*) \leq y \wedge y^* = 0$, es decir, $(x \wedge y^*) \wedge l' = 0$. De ahí que $l' \leq (x \wedge y^*)^*$. Denotaremos $(x \wedge y^*)^*$ por $(y : x)$. Sean $x, y, z \in L$ arbitrarios y consideremos $w = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Dado que $(x \wedge z), (y \wedge z) \leq w$, se tiene que $x \leq (w : z)$ y $y \leq (w : z)$. En efecto, $x \leq (w : z) = (z \wedge w^*)^*$ si y sólo si $x \wedge (z \wedge w^*) = 0$ si y sólo si $w^* \wedge (x \wedge z) = 0$ si y sólo si

$(x \wedge z) \leq w$. Análogamene $y \leq (w : z)$. De ahí que $x \vee y \leq (w : z)$, lo cual implica $(x \vee y) \wedge z \leq (w : z) \wedge z \leq w = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Esto demuestra la distributividad, pues la desigualdad contraria siempre se cumple.

□

En una álgebra boolena completa los supremos e ínfimos arbitrarios son distributivos.

Proposición 1.31. *Si L es un álgebra booleana completa, entonces para cualquier familia arbitraria $\{a_i\}_{i\in I}$ y c en L se cumple:*

$$(\textstyle\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c = \textstyle\bigvee_{i\in I}(a_i \wedge c);$$

$$(\textstyle\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c = \textstyle\bigwedge_{i\in I}(a_i \vee c).$$

Demostración. Para toda $i \in I$ se cumple que $a_i \leq \bigvee_{i\in I} a_i$ de donde $a_i \wedge c \leq (\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c$. Entonces $\bigvee_{i\in I}(a_i \wedge c) \leq (\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c$. Para obtener la desigualdad inversa demostraremos que $(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c \leq u$ para cada u cota superior del conjunto $\{a_i \wedge c\}_{i\in I}$. Sea u cota superior del conjunto $\{a_i \wedge c\}_{i\in I}$, entonces para toda $i \in I$ se cumple que:

$$\begin{aligned} a_i &= 1 \wedge a_i \\ &= (c \vee c^*) \wedge a_i \\ &= (c \wedge a_i) \vee (c^* \wedge a_i) \\ &\leq u \vee (c^* \wedge a) \\ &\leq u \vee c^*. \end{aligned}$$

Esto es, $a_i \leq u \vee c^*$, de donde $\bigvee_{i\in I} a_i \leq u \vee c^*$. Luego:

$$\begin{aligned} (\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c &\leq (u \vee c^*) \wedge c \\ &= (u \wedge c) \vee (c^* \wedge c) \\ &= u \wedge c \\ &\leq u. \end{aligned}$$

Es decir, $(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c \leq u$. En particular para $u = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge c)$ se tiene que $(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c \leq \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge c)$. Dualmente se tiene que $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c = \bigwedge_{i\in I}(a_i \vee c)$.

□

Definición 1.32. *Una subálgebra de un álgebra booleana L es una subretícula L' de L tal que $0 \in L'$ y tal que $a \in L'$ implica $a^* \in L'$.*

Definición 1.33. *Un homomorfismo entre dos álgebras booleanas A y B es un morfismo de retículas $\alpha : A \to B$ tal que $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$, para todo $a \in A$.*

Ejemplo 1.34. ***Álgebras booleanas de subconjuntos***. *Si S es un conjunto, entonces el conjunto $\mathbf{P}(S)$ es un álgebra booleana completa. En efecto, tomamos $0 = \emptyset$, $1 = S$, $\wedge = \cap$ y $\vee = \cup$ entonces $\bigwedge_I S_i = \bigcap_I S_i$ y $\bigvee_I S_i = \bigcup_I S_i$, para cualquier familia de subconjuntos $(S_i)_{i\in I}$ de S. Para todo $S' \subseteq S$ existe un único S'^* subconjunto de S tal que $S' \cap S'^* = \emptyset$ y $S' \cup S'^* = S$, a saber $S'^* = S - S'$. Además para todo $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{P}(S)$ se cumple que $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$ y $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$.*

Ejemplo 1.35. ***Idempotentes centrales***. *Recordemos que un idempotente central de un anilllo A es un elemento $e \in Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax$, para todo $a \in A\}$, tal que $e^2 = e$. Afirmamos que el conjunto de los idempotentes centrales de un anillo A forman un álgebra booleana, la cual denotaremos por $\mathbf{B}(A)$. En efecto, notar primero que $\mathbf{B}(A) \neq \emptyset$ ya que 1_A cumple con la definición de elemento idempotente. Definimos el orden parcial en $\mathbf{B}(A)$ por:*

$$e \leq f \text{ si y sólo si } ef = e.$$

Veamos que $\leq$ es un orden parcial en $\mathbf{B}(A)$.

1. *$ee = e^2 = e$, entonces $e \leq e$*

2. *Si $e \leq f$ y $f \leq e$, entonces $ef = e$ y $fe = f$. Por lo que $e = f$.*

3. *Si $e \leq f$ y $f \leq g$, entonces $ef = e$ y $fg = f$.Luego, $eg = (ef)g = e(fg) = ef = e$. Esto es, $eg = e$, por lo tanto $e \leq g$.*

$\mathbf{B}(A)$ se convierte en una retícula complementada con:

$$e \wedge f = ef,\ e \vee f = e + f - ef,\ e^* = 1 - e.$$

En efecto, sean $e, f \in \mathbf{B}(A)$.

1. *Tenemos que* $(ef)e = e(ef) = (ee)f = e^2 f = ef$*.De ahí que* $ef \leq e$*. Análogamente,* $ef \leq f$*. De manera que* ef *es cota inferior de* $\{e, f\}$*. Sea* $x \in \mathbf{B}(A)$ *cota inferior de* $\{e, f\}$*. Veamos que* $x \leq ef$*, lo cual ocurre siempre que* $x(ef) = x$*. Como* $x \leq e$ *y* $x \leq f$*, entonces* $xe = x$ *y* $xf = x$*, lo cual implica* $(xe)f = xf$*. De donde* $x(ef) = x$*, por lo tanto* $ef = e \wedge f$*.*

2. *Dado que* $e(e + f - ef) = ee + ef - ef = e^2 + 0 = e$*, se cumple que* $e \leq (e + f - ef)$*.Análogamente* $f \leq (e + f - ef)$*. Por lo que* $e + f - ef$ *es cota superior de* $\{e, f\}$*. Sea* $x \in \mathbf{B}(A)$ *cota superior de* $\{e, f\}$*, entonces* $e \leq x$ *y* $f \leq x$*, esto implica que* $ex = e$ *y* $fx = f$*. Luego,* $(e + f - ef)x = ex + fx - (ef)x = e + f - e(fx) = e + f - ef$*, de manera que* $e + f - ef \leq x$*. Por tanto* $e + f - ef = e \vee f$*.*

3. *Es claro que* $0, 1 \in \mathbf{B}(A)$ *y para todo* $e \in \mathbf{B}(A)$*, se cumple que* $0 \leq e$ *y* $e \leq 1$*.*

4. *Sea* $e \in \mathbf{B}(A)$*, veamos que* $1 - e \in \mathbf{B}(A)$*. Sea* $a \in A$*, entonces* $(1 - e)a = 1a - ea = a - ea = a1 - ae = a(1 - e)$*. De modo que* $1 - e \in Z(A)$*. Además*

$$\begin{aligned} (1-e)^2 &= (1-e)(1-e) \\ &= 1(1-e) - e(1-e) \\ &= 1 - e - e + e^2 \\ &= 1 - e - e + e \\ &= 1 - e. \end{aligned}$$

Por lo tanto $1 - e \in \mathbf{B}(A)$*. Ahora bien, dado que* $e \wedge (1 - e) = e(1 - e) = e1 - e^2 = e - e = 0$ *y* $e \vee (1 - e) = e + (1 - e) - e(1 - e) = e + 1 - e - 0 = 1$*. Se sigue que* $1 - e$ *es complemento de* e*. Sea* $x \in \mathbf{B}(A)$ *complemento de* e*, entonces* $e \wedge x = 0$ *y* $e \vee x = 1$*, esto es,* $ex = 0$ *y* $e + x - ex = 1$*, de ahí que* $e + x = 1$*. Por tanto* $x = 1 - e$*. De manera que* $e^* = 1 - e$*.*

5. *Por último, supongamos que* $e \wedge f = 0$*, entonces* $ef = 0$ *Así que* $f(1 - e) = f1 - ef = f - 0 = f$*. Por tanto* $f \leq e^*$*. Recíprocamente, si* $f \leq e^*$*, entonces* $f = f(1 - e) = f - fe$*. De donde* $fe = ef = 0$*. Por la Proposición 1.30,* $\mathbf{B}(A)$ *es un álgebra booleana.*

1.4. Retículas Continuas

A lo largo de esta sección consideraremos a cada retícula, una retícula completa.

Definición 1.36. *Un COPO I es llamado dirigido, si para cada par $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.*

Definición 1.37. *Una retícula L es superiormente continua, si para cada subconjunto dirigido D de L y para cada $a \in L$, se cumple:*

$$(\bigvee_{d\in D} d) \wedge a = \bigvee_{d\in D}(d \wedge a).$$

Si la retícula opuesta L^{op} es superiormente continua, entonces decimos que L es inferiormente continua. Finalmente, decimos que L es continua si es superiormente e inferiormente continua.

Proposición 1.38. *Sea L una retícula modular y complementada, entonces L es superiormente continua si y sólo si satisface la siguiente condición: Si D es un subconjunto dirigido de L para el cual existe $c \in L - \{0\}$ tal que $c \wedge d = 0$, para todo $d \in D$, entonces $\bigvee_{d\in D} d < 1$.*

Demostración. Supongamos que L es superiormente continua y que D es un subconjunto dirigido de L para el cual existe $c \in L - \{0\}$, tal que $c \wedge d = 0$, para todo $d \in D$, entonces $(\bigvee_{d\in D} d) \wedge c = \bigvee_{d\in D}(d \wedge c) = 0$. Supongamos que $\bigvee_{d\in D} d = 1$, entonces $0 = \bigvee_{d\in D}(d \wedge c) = 1 \wedge c = c$. De donde $c = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigvee_{d\in D} d < 1$.

Recíprocamente, sea D un subconjunto dirigido de L y sea $a \in L$. Siempre se cumple que $\bigvee_{d\in D}(d \wedge a) \leq (\bigvee_{d\in D} d) \wedge a$. Para demostrar la desigualdad contraria consideremos el intervalo $I = [0, (\bigvee_{d\in D} d) \wedge a]$, tenemos entonces que $\bigvee_{d\in D}(d \wedge a) \in I$. Por la Proposición 1.21, I es una retícula complementada, así que existe $c \in I$ tal que

$$[\bigvee_{d\in D}(d \wedge a)] \wedge c = 0;$$

$$[\bigvee_{d\in D}(d \wedge a)] \vee c = (\bigvee_{d\in D} d) \wedge a.$$

Además $c \leq (\bigvee_{d\in D} d) \wedge a \leq \bigvee_{d\in D} d$, de donde $c = c \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. Análogamente $c = c \wedge a$. Por otro lado como L es complementada, existe $b \in L$ complemento de $\bigvee_{d\in D} d$. Entonces para todo $d \in D$, se cumple que $[b \wedge (\bigvee_{d\in D} d)] \vee d =$

$0 \vee d = d$, por ser L modular se sigue que $(b \vee d) \wedge (\bigvee_{d\in D} d) = d$. De lo anterior obtenemos que para todo $d \in D$ se satisface:

$$\begin{aligned}
(b \vee d) \wedge c &= (b \vee d) \wedge [(\bigvee_{d\in D} d) \wedge c] \\
&= [(b \vee d) \wedge (\bigvee_{d\in D} d)] \wedge c \\
&= d \wedge c \\
&= d \wedge (a \wedge c) \\
&= (d \wedge a) \wedge c \\
&\leq [\bigvee_{d\in D} (d \wedge a)] \wedge c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $(b \vee d) \wedge c = 0$, para todo $d \in D$. Supongamos que $c \neq 0$, entonces por hipótesis se sigue que $1 = (\bigvee_{d\in D} d) \vee b = \bigvee_{d\in D}(d \vee b) < 1$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $c = 0$. Finalmente:

$$\begin{aligned}
(\bigvee_{d\in D} d) \wedge a &= [\bigvee_{d\in D} (d \wedge a)] \vee c \\
&= [\bigvee_{d\in D} (d \wedge a)] \vee 0 \\
&= \bigvee_{d\in D} (d \wedge a).
\end{aligned}$$

□

Definición 1.39. *Un elemento $c \in L$ es compacto si se satiface lo siguiente: Si $c \leq \bigvee_{d\in D} d$ para algún subconjunto dirigido D de L, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$.*

Observación 1.40. *Si L es superiormente continua, entonces c es compacto si y sólo si tiene la siguiente propiedad: si $c = \bigvee_{d\in D} d$ para algún subconjunto dirigido D de L, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $c = d_0$.*

Demostración. Supongamos que c es compacto y que $c = \bigvee_{d\in D} d$, para algún subconjunto dirigido D de L, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$. Dado que $d_0 \leq \bigvee_{d\in D} d$, concluimos que $d_0 = c$.

Recíprocamente, sea D subconjunto dirigido de L tal que $c = \bigvee_{d\in D} d$, entonces $c = c \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. Puesto que L es superiormente contiuna, $c = \bigvee_{de\in D}(c \wedge d)$. Notar que $D' = \{c \wedge d\}_{d\in D}$ es un subconjunto dirigido de L, por hipótesis, existe $d_0 \in D$ tal que $c = c \wedge d_0$. Luego $c \leq d_0$, por lo tanto c es compacto.

$\square$

Definición 1.41. *La retícula L es compacta, si* 1 *es un elemento compacto. L es compactamente generada, si cada elemento de L es el supremo de elementos compactos.*

Lema 1.42. *Si a y b son compactos, entonces $a \vee b$ es compacto.*

Demostración. Sean a, b elementos compactos en L. Supongamos que $a \vee b \leq \bigvee_{d\in D} d$, para un subconjunto dirigido D de L, entonces $a \leq \bigvee_{d\in D} d$ y $b \leq \bigvee_{d\in D} d$, de ahí que existen $d_0, d_1 \in D$ tales que $a \leq d_0$ y $b \leq d_1$. Como D es dirigido, existe $d_2 \in D$ tal que $d_0, d_1 \leq d_2$. Así que $a \vee b \leq d_0 \vee d_1 \leq d_2$. $\square$

Observación 1.43. *Sea L una retícula compactamente generada, entonces para cada $a \in L$ existe D subconjunto dirigido de L tal que $a = \bigvee D$ y todo elemento de D es compacto.*

Demostración. Sea $a \in L$, entonces existe $X \subseteq L$ tal que $a = \bigvee X$ y para todo $x \in X$, x es compacto. Sea $D = \{\bigvee F \mid F \subseteq X \text{ y } F \text{ es finito}\}$. Claramente $\bigvee D = \bigvee X$. Ahora bien, por el Lema 1.42, para todo $\bigvee F \in D$, $\bigvee F$ es compacto. Por último, dados $\bigvee F, \bigvee F' \in D$, $F, F' \subseteq X$ son finitos, de donde $F \cup F' \subseteq X$ es finito y es tal que $\bigvee F, \bigvee F' \leq \bigvee(F \cup F')$.

$\square$

Proposición 1.44. *Toda retícula L compactamente generada es superiormente continua.*

Demostración. Sean L una retícula compactamente generada, D un subconjunto dirigido de L y $a \in L$. Siempre se cumple que $\bigvee_{d\in D}(a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. Para la desigualdad contraria, es suficiente demostrar que $c \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$, para cada c compacto tal que $c \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. Como $c \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) \leq \bigvee_{d\in D} d$, entonces $c \leq \bigvee_{d\in D} d$. Dado que c es compacto, existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$, además como $c \leq a$, entonces $c \leq a \wedge d_0 \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. Así que $c \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. Ahora bien, de la hipótesis, existe $X \subseteq L$ que consta de elementos compactos tal que $a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) = \bigvee_{x\in X} x$.

Así que para todo $x \in X$, x es compacto y $x \leq a \wedge (\bigvee_{d \in D} d)$, entonces $x \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. De donde $a \wedge (\bigvee_{d \in D} d) = \bigvee_{x \in X} x \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$.

□

Teorema 1.45. ***(Teorema de Zermelo)***. *Sea X un conjunto, entonces existe una función inyectiva tal que su dominio es un número ordinal y su imágen es X.*

Demostración. Ver Ápendice de [5].

□

Lema 1.46. *Una retícula L es superiormente continua si y sólo si para cada elemento $a \in L$, $X \subseteq L$ y $\chi = \mathbf{P}_0(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X se cumple que $a \wedge (\bigvee X) = \bigvee_{F \in \chi}[a \wedge (\bigvee F)]$.*

Demostración. Sea $F \in \chi$, entonces $\bigvee F \leq \bigvee X$, de ahí que $a \wedge (\bigvee F) \leq a \wedge (\bigvee X)$. De donde $\bigvee_{F \in \chi}[a \wedge (\bigvee F)] \leq a \wedge (\bigvee X)$. Si X es un subconjunto finito de L, entonces $X \in \chi$. Con lo cual se da la igualdad. Supongamos que X es infinito y que L es superiormente continua, verificaremos la igualdad por inducción transfinita. En efecto, supongamos que la igualdad se cumple para cada subconjunto de L de cardinalidad menor que $|X|$. Por el Teorema 1.45, existe una función inyectiva cuyo dominio es un número ordinal y cuya imágen es X. Sea α el menor número ordinal tal que $|\alpha| = |X|$, entonces podemos ordenar los elementos de X en una sucesión (posiblemente transfinita) $x_0, x_1, ..., x_\rho, ...$ $(\rho < \alpha)$. Si $X_\xi = \{x_\rho \mid \rho < \xi\}$, entonces para cada $\xi < \alpha$ uno obtiene $|X_\xi| < |X|$ y los elementos $\bigvee X_\xi$ forman una sucesión creciente y de ahí que forman un subconjunto dirigido en L. Como lo fue previamente, denotamos por χ_ξ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X_ξ, entonces:

1. $\bigvee X = \bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee X_\xi)$. En efecto, sea $\xi < \alpha$, entonces $\bigvee X_\xi \leq \bigvee X$. De donde $\bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee X_\xi) \leq \bigvee X$. Por otro lado, sea $x \in X$, entonces existe $\xi' < \alpha$ tal que $x \in X_{\xi'}$. De donde $x \leq \bigvee X_{\xi'}$ y como $\bigvee X_{\xi'} \leq \bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee X_\xi)$, se sigue que $x \leq \bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee X_\xi)$. Por lo tanto $\bigvee X \leq \bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee X_\xi)$. De manera que se da la igualdad.

2. $\bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee_{F \in \chi_\xi}[a \wedge (\bigvee F)]) = \bigvee_{F \in \chi}[a \wedge (\bigvee F)]$. En efecto, sea $\xi < \alpha$, entonces $\{a \wedge (\bigvee F)\}_{F \in \chi_\xi} \subseteq \{a \wedge (\bigvee F)\}_{F \in \chi}$. De donde $\bigvee_{F \in \chi_\xi}[a \wedge (\bigvee F)] \leq \bigvee_{F \in \chi}[a \wedge (\bigvee F)]$, luego $\bigvee_{\xi < \alpha}(\bigvee_{F \in \chi_\xi}[a \wedge (\bigvee F)]) \leq \bigvee_{F \in \chi}[a \wedge (\bigvee F)]$. Por

otro lado, sea $F \in \chi$, entonces existe $\xi' < \alpha$ tal que $F \in \chi_{\xi'}$, de ahí que $a \wedge (\bigvee F) \leq \bigvee_{F \in \chi_{\xi'}} [a \wedge (\bigvee F)]$. Lo cual implica $\bigvee_{F \in \chi} [a \wedge (\bigvee F)] \leq \bigvee_{\xi < \alpha} (\bigvee_{F \in \chi_\xi} [a \wedge (\bigvee F)])$. De manera que se cumple la igualdad.

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a \wedge (\bigvee X) &= a \wedge [\bigvee_{\xi < \alpha} (\bigvee X_\xi)] \\ &= \bigvee_{\xi < \alpha} [a \wedge (\bigvee X_\xi)] \\ &= \bigvee_{\xi < \alpha} (\bigvee_{F \in X_\xi} [a \wedge (\bigvee F)]) \\ &= \bigvee_{F \in \chi} [a \wedge (\bigvee F)]. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $D \neq \emptyset$ un subconjunto dirigido de L. Para cada subconjunto finito F de D, existe un elemento $d_F \in D$ tal que $\bigvee F \leq d_F$. En efecto, si $|F| = 0$, y como $D \neq \emptyset$, existe $d \in D$. Luego $\bigvee F = \bigvee \emptyset = 0 \leq d$. Supongamos que $|F| = n$ y que existe $d_F \in D$ tal que $\bigvee F \leq d_F$. Sea $d_0 \in D - F$ y $F' = F \cup \{d_0\}$, entonces $\bigvee F' = (\bigvee F) \vee d_0 \leq d_F \vee d_0$. Como D es dirigido, existe $d' \in D$ tal que $d_F, d_0 \leq d'$, de ahí que $\bigvee F' \leq d'$. Ahora bien:

$$\begin{aligned} a \wedge (\bigvee D) &= \bigvee_{F \in \chi_F} [a \wedge (\bigvee F)] \\ &\leq \bigvee_{F \in \chi_F} (a \wedge d_F) \\ &\leq \bigvee_{d \in D} (a \wedge d). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cualquier subconjunto D de L se tiene para todo $d \in D$, $d \leq \bigvee D$, de donde $a \wedge d \leq a \wedge (\bigvee D)$. Así pues $\bigvee_{d \in D} (a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee D)$. $\square$

Definición 1.47. *Un subconjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos no cero de una retícula L es llamado independiente, si para todo $i \in I$ se cumple:*

$$a_i \wedge (\bigvee_{j \in I - \{i\}} a_j) = 0.$$

Lema 1.48. *En una retícula superiormente continua, un subconjunto* $\{a_i\}_{i\in I}$ *es independiente si y sólo si cada uno de los subconjuntos finitos de* $\{a_i\}_{i\in I}$ *es independiente.*

Demostración. Supongamos que $\{a_i\}_{i\in I}$ es independiente. Sea $F \subseteq I$ finito, entonces para todo $i \in F$ se cumple:

$$a_i \wedge (\bigvee_{j\in F-\{i\}} a_j) \leq a_i \wedge (\bigvee_{j\in I-\{i\}} a_j) = 0.$$

Recíprocamente, sean i_0 un elemento arbitrario fijo en I y $\chi = \{F \subseteq I \mid i_0 \notin F$ y F es finito$\}$. Entonces $\bigvee_{j\in I-\{i_o\}} a_j = \bigvee_{F\in\chi}(\bigvee_{j\in F} a_j)$. En efecto, sea $F \in \chi$, entonces $\bigvee_{j\in F} a_j \leq \bigvee_{j\in I-\{i_0\}} a_j$. De donde $\bigvee_{F\in\chi}(\bigvee_{j\in F} a_j) \leq \bigvee_{j\in I-\{i_0\}} a_j$. Por otro lado, para todo $j \in I - \{i_0\}$, $\{a_j\} = F_j \in \chi$. De donde $a_j = \bigvee F_j \leq \bigvee_{F\in\chi}(\bigvee_{j\in F} a_j)$. Entonces $\bigvee_{j\in I-\{i_0\}} a_j \leq \bigvee_{F\in\chi}(\bigvee_{j\in F} a_j)$. Ahora bien, usando el Lema 1.46, obtenemos que

$$a_{i_0} \wedge (\bigvee_{j\in I-\{i_0\}} a_j) = \bigvee_{F\in\chi}[a_{i_0} \wedge (\bigvee_{j\in F} a_j)] = 0.$$

□

Definición 1.49. *Un elemento* $a \in L - \{0\}$ *es un átomo, si* $b < a$ *implica* $b = 0$. L *es localmente atómica, si cada elemento de* L *es el supremo de átomos.*

Lema 1.50. *Sea* L *una retícula superiormente continua, entonces la unión de toda cadena* $\{\{s_i\}_{i\in J_k}\}_{k\in K}$ *de subconjuntos independientes de* L *también es independiente.*

Demostración. Sean $\{\{s_i\}_{i\in J_k}\}_{k\in K}$ una cadena de subconjuntos independientes de L y $A \subseteq \bigcup_{k\in K}\{s_i\}_{i\in J_k}$ finito, entonces existe $k' \in K$ tal que para todo $a \in A$, $a \in \{s_i\}_{i\in J_{k'}}$, esto nos dice que $A \subseteq \{s_i\}_{i\in J_{k'}}$. Dado que $\{s_i\}_{i\in J_{k'}}$ es independiente, se sigue que A también es independiente. Por el Lema 1.48 $\bigcup_{k\in K}\{s_i\}_{i\in J_k}$ es un subconjunto independiente de L. □

Proposición 1.51. *Toda retícula* L *localmente atómica, superiormente continua y modular es complementada.*

Demostración. Sea $a \in L$. Si $a = 0$ o $a = 1$, a tiene complemento en L. Supongamos que $a \neq 0$ y $a \neq 1$, entonces existe $s \in L$ átomo tal que $a \wedge s = 0$. Pues si para todo átomo $s \in L$, $a \wedge s \neq 0$, se sigue que $a \wedge s = s$. Entonces $s \leq a$, y como 1 es supremo de átomos, tenemos que $1 \leq a$, de donde $1 = a$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe $s \in L$ átomo tal que $a \wedge s = 0$. Ahora bien, si $\{s_i\}_{i \in I}$ denota el conjunto de todos los átomos de L, consideremos:

$$\Gamma = \{J \subseteq I \mid \{s_i\}_{i \in J} \text{ es independiente y } a \wedge (\bigvee_{i \in J} a_i) = 0\}.$$

Notemos que $(\Gamma, \subseteq)$ es un COPO. Además $\Gamma \neq \emptyset$ ya que si denotamos a s por s_{i_0}, tenemos que:

$$s_{i_0} \wedge \bigvee_{i \in \{i_0\} - \{i_0\}} s_i = s \wedge (\bigvee \emptyset) = s \wedge 0 = 0.$$

Esto nos dice que $\{s_i\}_{i \in \{i_0\}} = \{s\}$ es un subconjunto independiente. Además $a \wedge (\bigvee_{i \in \{i_0\}} s_i) = a \wedge s = 0$. Por lo tanto $\{s\} = \{s_i\}_{i \in \{i_0\}} \in \Gamma$. Así que podemos aplicar el Lema de Zorn. Por el Lema 1.50 la unión de una cadena $\{\{s_i\}_{i \in J_k}\}_{k \in K}$ de subconjuntos independientes, también es independiente. Además, si para cada $k \in K$, $b_k = \bigvee_{i \in J_k} s_i$. Entonces $\{b_k\}_{k \in K}$ es una cadena en L y $a \wedge b_k = 0$, de ahí que $a \wedge (\bigvee_{k \in K} b_k) = \bigvee_{k \in K}(a \wedge b_k) = 0$. Así que existe una familia máxima independiente $\{s_i\}_{i \in J'}$ de átomos tal que $a \wedge (\bigvee_{i \in J'} s_i) = 0$. Escribiremos $c = \bigvee_{i \in J'} s_i$. Para demostrar que c es complemento de a, es suficiente demostrar que $a \vee c$ contiene todos los átomos de L, es decir, para todo $s \in L$ átomo de L, se cumple que $s \leq a \vee c$, de donde $1 \leq a \vee c$. Supongamos que existe $s' \in L$ átomo tal que $s' \nleq a \vee c$, entonces $s' \wedge (a \vee c) = 0$. Dado que $c \leq a \vee c$, usando la modularidad de L tenemos:

$$\begin{aligned} a \wedge (c \vee s') &\leq (a \vee c) \wedge (c \vee s') \\ &= (c \vee s') \wedge (a \vee c) \\ &= c \vee [s' \wedge (a \vee c)] \\ &= c \vee 0 \\ &= c. \end{aligned}$$

De donde $a \wedge [a \wedge (c \vee s')] \leq a \wedge c = 0$, es decir, $a \wedge (c \vee s') = 0$. Lo cual contradice la maximalidad de la familia $\{s_i\}_{i \in J'}$.

□

Teorema 1.52. *Las siguientes propiedades en una retícula modular L son equivalentes:*

1) L es compactamente generada y localmente atómica;

2) L es compactamente generada y complementada;

3) L es superiormente continua y localmente atómica.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es consecuencia directa de la Proposición 1.44 y la Proposición 1.51.

2) $\Rightarrow$ 3) Usando nuevamente la Proposición 1.44, tenemos que L es superiormente continua. Ahora bien, sea $z \in L - \{0\}$ un elemento compacto y consideremos $\Gamma = \{y \in L \mid y < z\}$. Dado que $0 < z$, $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $\Phi \subseteq \Gamma$ una cadena, entonces Φ es un subconjunto dirigido de L y $\bigvee \Phi \leq z$. Supongamos que $\bigvee \Phi = z$. Dado que z es compacto, por la Observación 1.40, existe $y_0 \in \Gamma$ tal que $y_0 = z$, lo cual es una contradicción. Por lo que $\bigvee \Phi < z$, de donde $\bigvee \Phi \in \Gamma$. Por el Lema de Zorn, existe $m \in \Gamma$ elemento máximo. Como L es complementada, existe $k \in L$ tal que $m \vee k = 1$ y $m \wedge k = 0$. Luego $z = 1 \wedge z = (m \vee k) \wedge z = m \vee (k \wedge z)$. Por la Proposición 1.19, $[m, z] = [m, (k \wedge z) \vee m] \cong [m \wedge (k \wedge z), k \wedge z] = [0, k \wedge z]$. Así pues, si $l \in L$ es tal que $l < k \wedge z$, entonces $l = 0$. Por lo tanto $k \wedge z$ es átomo tal que $k \wedge z \leq z$. Esto último nos dice que para todo elemento compacto z no cero, existe un átomo a tal que $a \leq z$. Ahora bien, sea $x \in L - \{0\}$. Por hipótesis, x es supremo de compactos, así que existe $z \in L$ no cero tal que $z \leq x$. Por lo demostrado anteriormente, existe un atómo $a \in L$ tal que $a \leq z$, luego $a \leq x$, entonces $B = \{b \in L \mid b \text{ es átomo y } b \leq x\} \neq \emptyset$. Consideremos el intervalo $I = [0, x]$ el cual, por la Proposición 1.21, es complementado. Entonces existe $l \in I$ tal que $l \wedge \bigvee B = 0$ y $l \vee \bigvee B = x$. Supongamos que $l \neq 0$, por hipótesis, existe D subconjunto dirigido de L tal que $l = \bigvee D$ y para todo $d \in D$, d es compacto. Así que existe $d_0 \in D$ tal que $d_0 \neq 0$, luego existe b_0 átomo tal que $b_0 \leq d_0 \leq \bigvee D = l$. De donde $b_0 = \bigvee B \wedge b_0 \leq \bigvee B \wedge l = 0$, lo que implica $b_0 = 0$, lo que es una contradicción. Por lo que $l = 0$, así $x = \bigvee B$, lo cual demuestra que L es localmente atómica.

3) $\Rightarrow$ 1) Veamos primero que L superiormente continua implica que cada átomo es compacto. Sea $a \in L$ átomo y D subconjunto dirigido de L tal que $a \leq \bigvee_{d \in D} d$. Si $a \nleq d$, para todo $d \in D$. Entonces $a \wedge d = 0$, de ahí que $a = a \wedge \bigvee_{d \in D} d = \bigvee_{d \in D}(a \wedge d) = 0$, lo cual contradice que el hecho de que a es átomo. Por lo que existe $d_0 \in D$ tal que $a \leq d_0$. Ahora bien, sea $x \in L$, como L es localmente atómica, x es el supremo de algunos átomos. Es decir, existe $B \subseteq L$ tal que $x = \bigvee_{b \in B} b$ y para todo $b \in B$, b es átomo. Entonces para todo $b \in B$, b es compacto. De manera que x es supremo de compactos.

$\square$

1.5. Retículas Pseudo-complementadas

A lo largo de esta sección, L será una retícula modular con 0 y 1.

Definición 1.53. *Un pseudo-complemento de un elemento $a \in L$ es un elemento c tal que $a \wedge c = 0$ y c es máximo con esta propiedad, es decir, si c' es tal que $a \wedge c' = 0$ y $c \leq c'$, entonces $c = c'$.*

Definición 1.54. *Una retícula L es pseudo-complementada, si para cada intervalo $I \subseteq L$ y cada $a \in I$, existe el pseudo-complemento de a en I.*

Lema 1.55. *Cada complemento es un pseudo-complemento.*

Demostración. Sea c complemento de a y supongamos que $a \wedge c' = 0$, para algún c' tal que $c \leq c'$, entonces:

$$\begin{aligned} c &= 0 \vee c \\ &= (a \wedge c') \vee c \\ &= (a \vee c) \wedge c' \\ &= 1 \wedge c' \\ &= c'. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.56. *Sea L una retícula modular complementada, entonces L es pseudo-complementada.*

Proposición 1.57. *Si L es una retícula modular superiormente continua, entonces L es pseudo-complementada.*

Demostración. Sean $[a, b] \subseteq L$ y $d \in [a, b]$. Consideremos $C = \{c \in [a, b] \mid c \wedge d = a\}$. Dado que $a \wedge d = a$, entonces $a \in C$. De manera que $(C, \leq_L)$ es un COPO no vacío. Sea $\Phi \subseteq C$ una cadena. Es claro que Φ es un subconjunto dirigido de L. Entonces $\bigvee_{x \in \Phi} x$ es una cota superior para Φ, además para todo $x \in \Phi$, $x \in C$. De ahí que $a \leq x \leq b$, lo cual implica $a \leq \bigvee_{x \in \Phi} x \leq b$, es decir, $\bigvee_{x \in \Phi} x \in [a, b]$. Además como $x \wedge d = a$ y por ser L superiormente continua, tenemos que $(\bigvee_{x \in \Phi} x) \wedge d = \bigvee_{x \in \Phi} (x \wedge d) = a$, así pues $\bigvee_{x \in \Phi} x \in C$. Por el Lema de Zorn, C tiene elemento máximo, es decir, d tiene pseudo-complemento en $[a, b]$.

□

Si c es pseudo-complemento de a en L, entonces $a \vee c$ resulta ser un elemento "bastante grande" en L, en el siguiente sentido:

Definición 1.58. *Un elemento a es esencial en L, si $a \wedge c \neq 0$, para cada $c \neq 0$ en L. De manera más general, si $a \leq b$ entonces b es una extensión de a, si a es esencial en $[0, b]$. Finalmente, a es esencialmente cerrado en L, si a no tiene extensiones distintas de a en L, esto es, si existe $c \in L$ tal que $a \leq c$ y a es esencial en $[0, c]$, entonces $a = c$.*

Observación 1.59. *Los elementos esenciales forman un filtro en L.*

Demostración.

1. Sea a esencial en L y $c \in L$ tal que $a \leq c$, entonces para todo $x \in L - \{0\}$ se cumple $0 \neq a \wedge x \leq c \wedge x$. De donde $c \wedge x \neq 0$.
2. Supongamos que a y b son esenciales en L. Sea $c \in L - \{0\}$, entonces $b \wedge c \neq 0$, de donde $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \neq 0$. Por tanto $a \wedge b$ es esencial L.
3. Sea $c \in L - \{0\}$, entonces $1 \wedge c = c \neq 0$. Por lo que 1 es esencial en L.

□

Proposición 1.60. *Si c es un pseudo-complemento de a en L, entonces $a \vee c$ es esencial en L.*

Demostración. Sea $d \in L$ tal que $(a \vee c) \wedge d = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} a \wedge (c \vee d) &\leq (a \vee c) \wedge (c \vee d) \\ &= (c \vee d) \wedge (a \vee c) \\ &= c \vee [d \wedge (a \vee c)] \\ &= c \vee [(a \vee c) \wedge d] \\ &= c \vee 0 \\ &= c. \end{aligned}$$

Así que $a \wedge (c \vee d) \leq c$, de donde $a \wedge (c \vee d) = a \wedge [a \wedge (c \vee d)] \leq a \wedge c = 0$, por lo que $a \wedge (c \vee d) = 0$. Como $c \leq c \vee d$ y c es pseudo-complemento de a en L, $c = c \vee d$. Esto nos dice que $d \leq c$ lo cual implica $d \leq a \vee c$. Por lo tanto $d = (a \vee c) \wedge d = 0$.

□

Observación 1.61. *En toda cadena que tiene 0, todo elemento es esencial.*

Proposición 1.62. *Sea L una retícula pseudo-complementada. Si b es un pseudo-complemento de a en L, entonces existe un pseudo-complemento c de b tal que $a \leq c$. Más aún, c es entonces una extensión esencial máxima de a en L.*

Demostración. Sea c un pseudo-complemento de $a \vee b$ en $[a, 1]$, el cual existe pues L es pseudo-complementada. Entonces $a \leq c$, de donde $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = a$. Afirmamos que c es pseudo-complemento de b en L. Tenemos que $a \vee (b \wedge c) = a$, esto nos dice que $b \wedge c \leq a$, entonces $b \wedge c = (b \wedge c) \wedge a \leq b \wedge a = 0$. De donde $b \wedge c = 0$. Ahora bien, sea $x \in L$ tal que $b \wedge x = 0$ y $c \leq x$, entonces $a \leq x$, de donde $x \in [a, 1]$. Luego $(a \vee b) \wedge x = a \vee (b \wedge x) = a \vee 0 = a$. Por ser c pseudo-complemento de $a \vee b$ en $[a, 1]$, $x = c$. Para demostrar que a es esencial en $[0, c]$, supongamos que $d \leq c$ y $a \wedge d = 0$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
a \wedge (b \vee d) &= (a \wedge c) \wedge (b \vee d) \\
&= a \wedge [c \wedge (b \vee d)] \\
&= a \wedge [(d \vee b) \wedge c] \\
&= a \wedge [d \vee (b \wedge c)] \\
&= a \wedge [d \vee 0] \\
&= a \wedge d \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dado que $b \leq b \vee d$ y b es pseudo-complemento de a en L, $b = d \vee b$. De donde $d \leq b$ y como $d \leq c$, entonces $d \leq b \wedge c = 0$. Así que $d = 0$. Finalmente, si c' es un elemento en L tal que $c < c'$, entonces $c' \wedge b \neq 0$, esto pues c es pseudo-complemento de b. Notemos que $c' \wedge (b \wedge a) \leq b \wedge a = 0$, de manera que $c' \wedge b \in [0, c']$ es tal que $c' \wedge b \neq 0$ y $(c' \wedge b) \wedge a = 0$. Así pues a no es esencial. Por lo tanto c es extensión esencial máxima de a en L. $\square$

Proposición 1.63. *Sea L una retícula pseudo-complementada. Un elemento $a \in L$ es un pseudo-complemento de algún elemento en L si y sólo si a es esencialmente cerrado en L.*

Demostración. Supongamos que a es un pseudo-complemento de algún $b \in L$. Sea b' un pseudo-complemento de a tal que $b \leq b'$, el cual existe por la Proposición 1.62. Afirmamos que a es un pseudo-complemento de b'. En efecto, como b' es pseudo-complemento de a, $b' \wedge a = 0$. Sea $x \in L$ tal que $b' \wedge x = 0$ y $a \leq x$. Tenemos que $b \leq b'$, de ahí que $b \wedge x \leq b' \wedge x = 0$. Entonces $b \wedge x = 0$, por ser a máximo, se sigue que $x = a$. Nuevamente, por la Proposición 1.62, a es una extensión máxima de sí mismo en L. Por lo tanto a es esencialmente cerrado en L.

Recíprocamente, consideremos el intervalo $I = [a, 1]$. Como L es pseudo-complementada, existe $b \in I$ tal que b es pseudo-complemento de a. En el contexto de la Proposición 1.62, se debe cumplir que $a = c$. De ahí que a es un pseudo-complemento de b. □

Proposición 1.64. *Sea L una retícula pseudo-complementada, modular y compactamente generada, entonces el supremo de todos los átomos de L es igual al ínfimo de todos los elementos esenciales de L.*

Demostración. Sea a un átomo y b esencial en L, entonces $a \neq 0$ y por la definición de esencial, tenemos que $a \wedge b \neq 0$. Como $a \wedge b \leq a$ y a es átomo, entonces $a \wedge b = a$, por lo que $a \leq b$. Denotemos a s como el supremo de todos los átomos de L y a e como el ínfimo de todos los esenciales en L. Tenemos entonces que dado b esencial, para todo átomo a se cumple que $a \leq b$, de ahí que $s \leq b$. Es decir, para todo b esencial en L se tiene que $s \leq b$, lo que implica $s \leq e$. Por otro lado, como L es compactamente generada, entonces el intervalo $[0, e]$ también lo es. Ahora bien, procederemos a demostrar que $[0, e]$ es complementado, entonces por el Teorema 1.52 obtenemos que $[0, e]$ es localmente atómico, por lo que e es supremo de átomos y de ahí que $s = e$. Supongamos que $x \leq e$. Sea c un pseudo-complemento de $x \in L$, por la Proposición 1.60, $x \vee c$ es esencial en L, de ahí que $e \leq x \vee c$. Afirmamos que $c \wedge e$ es un complemento de x en $[0, e]$. En efecto,

$$\begin{aligned}(c \wedge e) \wedge x &= x \wedge (c \wedge e)\\ &= (x \wedge c) \wedge e\\ &= 0 \wedge e\\ &= 0\end{aligned}$$

Además $(c \wedge e) \vee x = x \vee (c \wedge e) = (x \vee c) \wedge e = e$. □

Ejemplo 1.65. ***La retícula de submódulos***. *Si M es un módulo, entonces la retícula $\mathbb{L}(M)$ de submódulos de M es superiormente continua, por la Proposición 1.57, $\mathbb{L}(M)$ es pseudo-complementada.*

Un submódulo N de M es esencial en M si este es un elemento esencial de $\mathbb{L}(M)$, y este es el caso si y sólo si para cada $x \in M - \{0\}$, existe $a \in A$ tal que $0 \neq xa \in N$.

Ejemplo 1.66. ***Retículas distributivas***. *Si L es una retícula distributiva, entonces un elemento $a \in L$ tiene a los más un pseudo-complemento en L. En efecto, sean $b, c \in L$ pseudo-complementos de a, entonces $a \wedge b = 0$ y $a \wedge c = 0$. De ahí que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$. Dado que $b \leq b \vee c$ y $c \leq b \vee c$, por ser b máximo, $b = b \vee c$. Análogamene $c = b \vee c$. Por lo tanto $b = c$.*

Definición 1.67. *Una retícula L pseudo-complementada y distributiva es llamada retícula Brouwer.*

1.6. Operadores Cerradura

Definición 1.68. *Sea L una retícula completa. Un operador cerradura en L es una función $\Phi : L \to L$, denotado por $\Phi(a) = a^c$, tal que:*

Cl1) $a \leq b$ *implica* $a^c \leq b^c$;

Cl2) $a \leq a^c$;

Cl3) $(a^c)^c = a^c$

Definición 1.69. *Un elemento $a \in L$ es cerrado bajo Φ, si $a = a^c$.*

Proposición 1.70. *Los elementos cerrados forman una retícula completa L^c.*

Demostración. Si $\{a_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos cerrados, entonces para todo $i \in I$, $\bigwedge_{i \in I} a_i \leq a_i$, lo cual implica $(\bigwedge_{i \in I} a_i)^c \leq (a_i)^c = a_i$. De ahí que $(\bigwedge_{i \in I} a_i)^c \leq \bigwedge_{i \in I} a_i$. Por otro lado, de la definición de operador cerradura, $\bigwedge_{i \in I} a_i \leq (\bigwedge_{i \in I} a_i)^c$. Por tanto $\bigwedge_{i \in I} a_i = (\bigwedge_{i \in I} a_i)^c$. Esto nos dice que $\bigwedge$ es el ínfimo en L^c. Por la Proposición 1.12, concluimos que L^c es una retícula completa.

$\square$

Observación 1.71. *En general L^c no es una subretícula de L. El ínfimo en L^c es la mismo que en L, pero el supremo $\overline{\bigvee}_{i \in I} a_i$ en L^c esta dado por:*

$$\overline{\bigvee}_{i \in I} a_i = (\bigvee_{i \in I} a_i)^c.$$

Para una familia arbitraria $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos cerrados.

Demostración. Dado que para toda $i \in I$ se cumple que $a_i \leq \bigvee_{i\in I} a_i$, se sigue que $a_i = (a_i)^c \leq (\bigvee_{i\in I} a_i)^c$. Por lo que $(\bigvee_{i\in I} a_i)^c$ es cota superior de $\{a_i\}_{i\in I}$. Por definición de operador cerradura, tenemos que $[(\bigvee_{i\in I} a_i)^c]^c = (\bigvee_{i\in I} a_i)^c$. Sea $x \in L^c$ cota superior de $\{a_i\}_{i\in I}$, entonces $x \in L$. De ahí que $\bigvee_{i\in I} a_i \leq x$. Luego $(\bigvee_{i\in I} a_i)^c \leq x^c = x$. □

Lo anterior nos dice que los elementos cerrados forman un sistema cerrado en L, en el sentido del Ejemplo 1.17. Recíprocamente:

Observación 1.72. *Si S es un sistema cerrado en L, entonces uno obtiene un operador cerradura, definiendo:*

$$a^c = inf\{s \in S \mid a \leq s\}.$$

En efecto, sea $a \in L$. Notar que $a^c \in S$, ya que S es cerrado bajo ínfimos.

1. *Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$, entonces para todo $s \in S$ tal que $b \leq s$, tenemos que $a \leq s$. Esto implica que $inf\{t \in S \mid a \leq t\} \leq inf\{s \in S \mid b \leq s\}$, es decir $a^c \leq b^c$.*

2. *Si $a \in S$, entonces $inf\{s \in S \mid a \leq s\} = a$, es decir, $a^c = a$.*

   Si $a \notin S$, entonces $a < inf\{s \in S \mid a \leq s\}$, es decir, $a < a^c$.

   Por lo tanto $a \leq a^c$.

3. *Dado que $a^c \in S$, entonces $(a^c)^c = a^c$.*

De esta manera uno obtiene una correspondencia biyectiva entre operadores cerradura y sistemas cerrados.

Un operador cerradura puede satisfacer uno de los siguientes axiomas adicionales:

Cl4) $(a \vee b)^c = a^c \vee b^c$

Cl5) $(a \wedge b)^c = a^c \wedge b^c$

Observación 1.73. *Cuando se satisface Cl4), L^c es una subretícula de L.*

Proposición 1.74. *Si L es una retícula modular completa, con un operador cerradura que satisface Cl5), entonces L^c es modular.*

Demostración. Sean $a.b, c$ elementos cerrados en L, con $a \leq b$. Entonces:

$$\begin{aligned}(a \overline{\vee} c) \wedge b &= (a \vee c)^c \wedge b \\ &= (a \vee c)^c \wedge b^c \\ &= [(a \vee c) \wedge b]^c \\ &= [a \vee (c \wedge b)]^c \\ &= a \overline{\vee} (c \wedge b).\end{aligned}$$

□

Un resultado similar se cumple para la distributividad.

Proposición 1.75. *Si L es una retícula distributiva completa con un operador cerradura que satisface Cl5), entonces L^c es distributiva.*

Demostración. Sean a, b, c elementos cerrados en L con $a \leq b$. Entonces:

$$\begin{aligned}a \wedge (b \overline{\vee} c) &= a \wedge (b \vee c)^c \\ &= a^c \wedge (b \vee c)^c \\ &= [a \wedge (b \vee c)]^c \\ &= [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]^c \\ &= (a \wedge b) \overline{\vee} (a \wedge c).\end{aligned}$$

□

Definición 1.76. *Un operador cerradura es llamado finitario, si para cada subconjunto dirigido D de L se cumple:*

$$\bigvee_{d \in D} d^c = (\bigvee_{d \in D} d)^c.$$

Es decir, si cada supremo dirigido de elementos cerrados es un elemento cerrado. Dado que esto implica que los supremos dirigidos en L^c son los mismos que en L, se sigue que:

Proposición 1.77. *Si L es una retícula superiormente continua con un operador cerradura finitario, entonces L^c es superiormente continua.*

Demostración. Sean D un subconjunto dirigido de L^c y $a \in L^c$, entonces:

$$\begin{aligned}
a \wedge (\overline{\bigvee}_{d\in D} d) &= a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)^c \\
&= a \wedge (\bigvee_{d\in D} d^c) \\
&= a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) \\
&= \bigvee_{d\in D} (a \wedge d) \\
&= \bigvee_{d\in D} [(a \wedge d)^c] \\
&= [\bigvee_{d\in D} (a \wedge d)]^c \\
&= \overline{\bigvee}_{d\in D} (a \wedge d).
\end{aligned}$$

□

Observación 1.78. *Si L es una retícula completa con un operador cerradura que satisface Cl4), L^c no necesariamente es una subretícula completa de L.*

Demostración. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_e)$, donde τ_e es la topología euclideana en $\mathbb{R}$. Sea $\Phi : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ definido por $\Phi(A) = Cl_{\mathbb{R}}(A)$. Entonces Φ es un operador cerradura que satisface $Cl4$). En efecto:

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $A \subset Cl_{\mathbb{R}}(A)$.

2. Si $A \subseteq B \subset \mathbb{R}$, entonces $Cl_{\mathbb{R}}(A) \subset Cl_{\mathbb{R}}(B)$.

3. Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, $Cl_{\mathbb{R}}(Cl_{\mathbb{R}}(A)) = Cl_{\mathbb{R}}(A)$.

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $Cl_{\mathbb{R}}(A \cup B) = Cl_{\mathbb{R}}(A) \cup Cl_{\mathbb{R}}(B)$.

Ahora bien, consideremos $\Gamma = \{[1/n, \infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces Γ es una familia de elementos cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_e)$ y es tal que $\bigcup \Gamma = (0, \infty)$ el cual no es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_e)$.

□

Proposición 1.79. *Sea Φ un operador cerradura finitario en una retícula compactamente generada L. Un elemento a es compacto en L^c si y sólo si $a = b^c$, para algún elemento b compacto en L.*

Demostración. Supongamos que a es compacto en L^c. Dado que $L^c \subseteq L$ y como L es compactamente generada, entonces $a = \bigvee_{d \in D} d$, para algún subconjunto dirigido D de L, donde cada d es compacto. Como Φ es finitario, $a = a^c = (\bigvee_{d \in D} d)^c = \bigvee_{d \in D} d^c$. Así que $a = \bigvee_{d \in D} d^c$, donde $\{d^c \mid d \in D\}$ es un subconjunto dirigido de L^c. Dado que L compactamente generada, por la Proposición 1.44, L es superiormente continua y por la Proposición 1.77, L^c es superiormente continua. Dado que a es compacto en L^c, existe ${d_0}^c \in \{d^c \mid d \in D\}$ tal que $a = {d_0}^c$, con d_0 compacto en L.

Recíprocamente, si $a = b^c$, para algún b compacto en L y $b^c \leq \bigvee_{d \in D} d$ para algún subconjunto dirigido D de L^c. Como $L^c \subseteq L$ y b es compacto en L, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $b \leq d_0$. De ahí que $b^c \leq {d_0}^c = d_0$, esto es, $a \leq d_0$. Por tanto a es compacto en L^c.

$\square$

Corolario 1.80. *Si Φ es un operador cerradura finitario en una retícula L compactamente generada, entonces L^c es compactamente generada.*

1.7. Conexiones de Galois

Definición 1.81. *Sean L y L' retículas completas. Una conexión de Galois entre L y L' es un par de funciones $\sigma : L \to L'$ y $\tau : L' \to L$ que satisfacen:*

1. *Si $x_1, x_2 \in L$ son tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $\sigma(x_2) \leq \sigma(x_1)$;*
2. *Si $y_1, y_2 \in L'$ son tales que $y_1 \leq y_2$, entonces $\tau(y_2) \leq \tau(y_1)$;*
3. *Para todo $x \in L$, $x \leq \tau\sigma(x)$ y para todo $y \in L'$, $y \leq \sigma\tau(y)$.*

Sea $x \in L$, aplicando la condición 3. a $y = \sigma(x)$ obtenemos que $\sigma(x) \leq \sigma\tau\sigma(x)$. Además, nuevamente por la condición 3, $x \leq \tau\sigma(x)$. Luego, aplicando 1. obtenemos que $\sigma\tau\sigma(x) \leq \sigma(x)$. De manera que para todo $x \in L$, $\sigma(x) = \sigma\tau\sigma(x)$. Dualmente, para todo $y \in L'$, $\tau(y) = \tau\sigma\tau(y)$.

Observación 1.82. *Las funciones $\tau\sigma : L \to L$ y $\sigma\tau : L' \to L'$ son operadores cerradura en L y L', respectivamente.*

Demostración.

1. Sea $x \in L$, por la condición 3., $x \leq \tau\sigma(x)$.
2. Sean $x_1, x_2 \in L$ tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $\sigma(x_2) \leq \sigma(x_1)$. Luego, $\tau\sigma(x_1) \leq \tau\sigma(x_2)$.

3. Si $x \in L$, entonces $\sigma\tau\sigma(x) = \sigma(x)$. De donde $\tau\sigma(\tau\sigma(x)) = (\tau\sigma)(x)$.

Por lo tanto $\tau\sigma$ es un operador cerradura en L. Dualmente, $\sigma\tau$ es un operador cerradura en L'.

□

Observación 1.83. *Los elementos cerrados en L bajo $\tau\sigma$ son de la forma $\tau(y)$, con $y \in L'$ y los elementos cerrados en L' bajo $\sigma\tau$ son de la forma $\sigma(x)$, con $x \in L$.*

Existen varios operadores cerradura importantes que surgen por las conexiones de Galois. Será de especial interés para nosotros un caso en particular llamado el anulador de ideales o simplemente anulador, el cual lo abordaremos con más detalle.

Proposición 1.84. *Sea R un anillo asociativo con uno, entonces existe una conexión de Galois entres los ideales derechos e izquierdos de R dada por $l : \mathbb{L}(R.) \to \mathbb{L}(.R)$ y $r : \mathbb{L}(.R) \to \mathbb{L}(R.)$, donde l y r son como sigue:*

$$l(\alpha) = \{a \in R \mid a\alpha = 0\};$$
$$r(\beta) = \{a \in R \mid \beta a = 0\}.$$

Demostración. Veamos que l y r son funciones. Sea α un ideal derecho de R. Dado que $0 \in R$ es tal que $0\alpha = 0$, se sigue que $l(\alpha) \neq \emptyset$. Sean $a, a' \in l(\alpha)$, entonces para todo $x \in \alpha$ tenemos que $(a - a')x = ax - a'x = 0 - 0 = 0$, esto es, $(a - a')\alpha = 0$. De manera que $l(\alpha)$ es un subgrupo de $(R, +)$. Sea $a \in l(\alpha)$ y $b \in R$, entonces para todo $x \in \alpha$ tenemos que $(ba)x = b(ax) = b0 = 0$. Así que $(ba) \in l(\alpha)$. Por lo tanto $l(\alpha)$ es un ideal izquierdo de R. Dualmente, dado β ideal izquierdo de R, $r(\beta)$ es un ideal derecho de R. Ahora bien, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{L}(R.)$ tales que $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{L}(.R)$, tales que $\beta_1 \subseteq \beta_2$, es claro que $l(\alpha_2) \subseteq l(\alpha_1)$ y $r(\beta_2) \subseteq r(\beta_1)$. Sea $\alpha \in \mathbb{L}(R.)$, demostraremos que $\alpha \subseteq rl(\alpha)$. Tenemos que $r(l(\alpha)) = \{a \in R \mid l(\alpha)a = 0\}$. Sean $x \in \alpha$ y $y \in l(\alpha)$, entonces $yx = 0$. Es decir, dado $x \in \alpha$, para todo $y \in l(\alpha)$ se cumple $yx = 0$. De manera que $x \in rl(\alpha)$, así pues $\alpha \subseteq rl(\alpha)$. Dualmente, si $\beta \in \mathbb{L}(.R)$, entonces $\beta \subseteq lr(\beta)$. □

Corolario 1.85. *Los anuladores derechos $r(\beta)$ forman una retícula completa $Ann(R.)$ la cual es anti-isomorfa a la retícula $Ann(.R)$ de anuladores izquierdos $l(\alpha)$.*

Demostración. Por la Proposición 1.84, $rl : \mathbb{L}(R.) \to \mathbb{L}(R.)$ es un operador cerradura. Luego, por la Observación 1.83, los elementos cerrrados en $\mathbb{L}(R.)$ bajo rl son de la forma $r(\beta)$, donde $\beta \in \mathbb{L}(.R)$. Por la Proposición 1.70, $Ann(R.) = \{r(\beta) \mid \beta \in \mathbb{L}(.R)\}$ es una retícula completa. Análogamene $Ann(.R) = \{l(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{L}(R.)\}$ es una retícula completa.

□

Observación 1.86. *Notar que l y r pueden ser definidas como funciones: $l : \mathbf{P}(R) - \{\emptyset\} \to \mathbb{L}(.R)$ y $r : \mathbf{P}(R) - \{\emptyset\} \to \mathbb{L}(R.)$ con la misma regla de asociación dada en la Proposición 1.84.*

Observación 1.87. *Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq Ann(R.)$. Entonces podemos definir un supremo en $Ann(R.)$ por:*

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = r[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)].$$

Demostración. Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq Ann(R.)$, entonces para todo $\lambda \in \Lambda$, existe β_λ tal que $I_\lambda = r(\beta_\lambda)$. Para todo $\lambda \in \Lambda$ se cumple $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda) \subseteq l(I_\lambda)$, de donde $rl(I_\lambda) \subseteq r[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)]$ y como $I_\lambda \subseteq rl(I_\lambda)$, se sigue que $I_\lambda \subseteq r[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)]$. Ahora bien, sea $K \in Ann(R.)$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $I_\lambda \subseteq K$. Como $K \in Ann(R.)$, existe $\beta \subseteq R$ tal que $K = r(\beta)$. Tenemos entonces que para todo $\lambda \in \Lambda$, $l(K) \subseteq l(I_\lambda)$. De donde $l(K) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)$. Luego $r[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)) \subseteq rl(K) \subseteq rl(r(\beta)] = r(\beta) = K$. De manera que $r[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} l(I_\lambda)] \subseteq K$.

□

Observación 1.88. *Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq Ann(.R)$, entonces podemos definir un supremo en $Ann(.R)$ por:*

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = l[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} r(I_\lambda)].$$

Proposición 1.89. *Si α es un ideal derecho generado por un idempotente $e \in R$, entonces α es un anulador derecho. De hecho $\alpha = r(R(1-e))$.*

Demostración. Por hipótesis, $\alpha = \{ex \mid x \in R\}$. Mientras que $r(R(1-e)) = \{y \in R \mid \text{para todo } x \in R, (x - xe)y = 0\}$. Sea $a \in \alpha$, entonces existe $x_0 \in R$ tal que $a = ex_0$. Sea $x \in R$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(x - xe)a &= (x - xe)(ex_0) \\
&= x(ex_0) - (xe)(ex_0) \\
&= x(ex_0) - x(e^2x_0) \\
&= x(ex_0) - x(ex_0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así que $a \in r(R(1-e))$, esto nos dice que $\alpha \subseteq r(R(1-e))$. Por otro lado, sea $y \in r(R(1-e))$, entonces para todo $x \in R$ se cumple que $(x - xe)y = 0$. En particular para $x = 1$ tenemos que $(1-e)y = 0$. De donde $y = ey$, así que $y \in \alpha$. Con lo cual $r(R(1-e)) \subseteq \alpha$.

□

De manera simétrica se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.90. *Si β es un ideal izquierdo generado por un idempotente $e \in R$, entonces β es un anulador izquierdo. De hecho $\beta = l((1-e)R)$.*

Lema 1.91. *Las siguientes condiciones en un anillo R son equivalentes.*

1. *Todo anulador derecho es generado por un idempotente.*

2. *Todo anulador izquierdo es generado por un idempotente.*

Demostración. Si se satiface 1., entonces para todo $S \subseteq R$, existe $e \in R$ idempotente tal que $rl(S) = eR$. Así pues:

$$
\begin{aligned}
l(S) &= lrl(S) \\
&= l(eR) \\
&= l([1-(1-e)]R) \\
&= R(1-e).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $l(S)$ es generado por un idempotente. Finalmente 2. implica 1. se sigue análogamente.

□

Definición 1.92. *Un anillo de Baer es un anillo en el cual cada anulador derecho (e izquierdo) es generado por un idempotente.*

Proposición 1.93. *Si R es un anillo de Baer, entonces el conjunto de los ideales principales derechos generados por un idempotente forma una retícula completa, la cual es anti-isomorfa a la retícula de ideales principales izquierdos generados por un idempotente.*

Demostración. Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales principales derechos generados por un idempotente, entonces por la Proposición 1.89, para todo $\lambda \in \Lambda$, I_λ es un anulador derecho. Por el Corolario 1.85, existen el supremo y el ínfimo de la familia $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en la retícula $Ann(R.)$. Dado que R es de Baer, el supremo y el ínfimo de la familia $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, son generados por un idempotente. De modo que el conjunto de ideales principales derechos generados por un idempotente forman una retícula completa. Análogamente para el conjunto de los ideales principales izquierdos generados por un idempotente.

$\square$

Definición 1.94. *Un anillo R es regular (en el sentido de von Neumann), si para todo $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$.*

Proposición 1.95. *Un anillo R es regular si y sólo si cada ideal principal derecho de R es generado por un idempotente.*

Demostración. Supongamos que R es regular. Sea I un ideal principal derecho de R, entonces existe $a \in R$ tal que $I = aR$. Por hipótesis, existe $x \in R$ tal que $a = axa$, entonces ax es idempotente y $aR = (ax)R$. En efecto $(ax)(ax) = (axa)x = ax$. Ahora bien, si $y \in aR$, entonces existe $b \in R$ tal que $y = ab = (axa)b = (ax)(ab) \in (ax)R$. De ahí que $aR \subseteq (ax)R$. Por otro lado, si $y \in (ax)R$, entonces existe $b \in R$ tal que $y = (ax)b = a(xb) \in aR$, así que $(ax)R \subseteq a(R)$. De manera que $aR = (ax)R$, es decir, $I = (ax)R$.

Recíprocamente, supongamos que todo ideal principal derecho de R es generado por un idempotente. Entonces para todo $a \in R$ existe $e \in R$ idempotente tal que $aR = eR$. Dado que $e \in eR$, entonces existe $x \in R$ tal que $e = ax$, de donde $ea = axa$. Afirmamos que $a = ea$. En efecto, primero notemos que si $y \in eR \cap (1-e)R$, entonces existen $t, s \in R$ tales que

$et = y = (1-e)s$. De manera que

$$\begin{aligned} y &= et \\ &= e(et) \\ &= e[(1-e)s] \\ &= (e-e^2)s \\ &= (e-e)s \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así que $(1-e)R \cap eR = \{0\}$. Ahora bien, dado que $ea, a \in eR$, se sigue que $(1-e)a = a - ea \in eR$. De manera que $(1-e)a \in (1-e)R \cap eR = \{0\}$, de donde $a - ea = 0$ y así $a = ea$. Por lo tanto $a = axa$.

□

De manera simétrica se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.96. *R es regular si y sólo si cada ideal principal izquierdo de R es generado por un idempotente.*

Corolario 1.97. *Sea R un anillo regular, entonces existe una conexión de Galois entre las retículas $Princ(R.)$ y $Princ(.R)$ de ideales principales derechos e ideales principales izquierdos, respectivamente, de R.*

Demostración. Como R es regular entonces todo ideal principal derecho y todo ideal principal izquierdo es generado por un idempotente. De manera que la conexión de Galois requerida está dada por

$$\begin{aligned} l_{Princ} &: Princ(R.) \to Princ(.R); \\ r_{Princ} &: Princ(.R) \to Princ(R.). \end{aligned}$$

Donde $l_{Princ}(eR) = l(eR) = R(1-e)$ y $r_{Princ}(Re) = r(Re) = (1-e)R$.

□

Definición 1.98. *Un anillo regular R es completo cuando cualquiera (y de ahí que ambas) de las retículas $Princ(R.)$ y $Princ(R.)$ son completas.*

Proposición 1.99. *Un anillo regular es completo si y sólo si es un anillo de Baer.*

Demostración. Por la Proposición 1.93, todo anillo regular de Baer es completo. Recíprocamente, supongamos que R es un anillo regular completo. Sea α un anulador derecho, entonces existe $S \subseteq R$ tal que $\alpha = r(S)$. Sea $e_0R = inf\{(1-e)R \mid e \in l(\alpha) \text{ es idempotente }\}$, es decir, $e_0R = \bigcap\{(1-e)R \mid e \in l(\alpha) \text{ es idempotente }\}$, entonces $\alpha = e_0R$. En efecto, sea $b \in l(\alpha)$, entonces $b\alpha = 0$. Además, dado que R es regular, existe idempotente $f \in R$ tal que $Rb = Rf$. Como $f \in Rb$, existe $x \in R$ tal que $f = xb$, de ahí que $f\alpha = (xb)\alpha = x(b\alpha) = x0 = 0$. De manera que $f \in l(\alpha)$, de donde $e_0R \subseteq (1-f)R$. Ahora bien, sea $y \in (be_0)R$, entonces existe $s \in R$ tal que $y = (be_0)s = b(e_0s)$. Dado que $b \in Rf$ y $e_0s \in (1-f)R$, entonces existen s' y $s'' \in R$ tales que $b = s'f$ y $e_0s = (1-f)s''$, de ahí que $y = (s'f)(1-f)s'' = 0$. Esto nos dice que $be_0R = 0$, de donde $e_0R \subseteq r(\{b\})$. Como $b \in l(\alpha)$ fue arbitrario, tenemos que para todo $b \in l(\alpha)$, $e_0R \subseteq r(\{b\})$. Se sigue que $e_0R \subseteq r(l(\alpha)) = rlr(S) = r(S) = \alpha$. Por otro lado, si $a \in \alpha$, entonces para cada idempotente $e \in l(\alpha)$ se cumple que $ea = 0$, de donde $a = a - ea = (1-e)a \in (1-e)R$. Así que $a \in e_0R$, por lo que $\alpha \subseteq e_0R$.

$\square$

Ejemplo 1.100. ***La completación Dedekind-MacNeille***. *Sea L una retícula, para cada subconjunto S de L definimos:*

$$Ub(S) = \{x \in L \mid x \text{ es cota superior de } S\};$$
$$Lb(S) = \{x \in L \mid x \text{ es cota inferior de } S\}.$$

Entonces Ub y Lb definen una conexión de Galois de $\mathbf{P}(L)$ consigo mismo. En efecto, sean $S, S' \subseteq L$ tales que $S \subseteq S'$. Dado que toda cota superior de S es cota superior de S' y toda cota inferior de S es cota inferior de S', se sigue que $Ub(S') \subseteq Ub(S)$ y $Lb(S') \subseteq Lb(S)$. Veamos ahora que $S \subseteq Ub(Lb(S))$. Por definición $Ub(Lb(S)) = \{a \in L \mid a \text{ es cota superior de } Lb(S)\}$. Sea $x \in S$, entonces para todo $y \in Lb(S)$, $y \leq x$. Esto nos dice que x cota superior de $Lb(S)$. Por lo tanto $S \subseteq Ub(Lb(S))$. Dualmente $S \subseteq Lb(Ub(S))$. Notar que para todo $S \in \mathbf{P}(L)$, $Ub(S)$ es un filtro en L, mientras que $Lb(S)$ es un ideal en L. En efecto, dado $S \in \mathbf{P}(L)$:

1. *Sean $a \in Ub(S)$ y $x \in L$ tal que $a \leq x$, entonces para todo $s \in S$, $s \leq a \leq x$. Así que x es cota superior de S, de donde $x \in Ub(S)$.*

2. *Sean $a, b \in Ub(S)$, entonces para todo $s \in S$, $s \leq a$ y $s \leq b$. Esto nos dice que para todo $s \in S$, s es cota inferior de $\{a, b\}$. Así que para todo $s \in S$, $s \leq a \wedge b$. Por lo tanto $a \wedge b \in Ub(S)$.*

3. Si L tiene 1, entonces para todo $s \in S$, $s \leq 1$. De donde $1 \in Ub(S)$.

Por lo tanto $Ub(S)$ es un filtro en L, dualmente $Lb(S)$ es un ideal en L. Para cada subconjunto S de L denotamos $\overline{S} = Lb(Ub(S))$, de manera que $\overline{S}$ es un ideal en L. Los ideales S que son cerrados en el sentido $S = \overline{S}$, por la Proposición 1.70, forman una retícula completa $\tilde{L}$, donde $\tilde{L} = \mathbf{P}(L)^c$. Además el ínfimo y el supremo de una familia de ideales cerrados $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $\tilde{L}$ estan dadas por:

$$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda, \ \bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda}.$$

La retícula L es isomorfa a la subretícula L' de $\tilde{L}$ que consiste de ideales principales. En efecto. Primero veamos que para todo $a \in L$:

$$\downarrow a = Lb(Ub(\downarrow a)).$$

Dado que $LbUb$ es un operador cerradura, $\downarrow a \subseteq Lb(Ub(\downarrow a))$. Por otro lado sea $y \in Lb(Ub(\downarrow a))$, entonces para todo $x \in Ub(\downarrow a)$, $y \leq x$. En particular para $x = a$, $y \leq a$. Así que $y \in \downarrow a$, por lo tanto $Lb(Ub(\downarrow a)) \subseteq \downarrow a$. Ahora bien, sea $\Phi : L \to L'$ dada por $\Phi(a) = \downarrow a$. Afirmamos que Φ es isomorfismo de retículas. Claramente Φ es sobreyectiva. Sean $a, b \in L$ tales que $\Phi(a) = \Phi(b)$, entonces $\downarrow a = \downarrow b$. De donde $a \leq b$ y $b \leq a$, así que $a = b$. De manera que Φ es una función biyectiva. Claramente $\Phi^{-1} : L' \to L$ es de la forma $\Phi^{-1}(\downarrow a) = a$. Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$, entonces $\downarrow a \subseteq \downarrow b$, es decir, $\Phi(a) \subseteq \Phi(b)$. Por otro lado, sean $\downarrow a, \downarrow b \in L'$, tales que $\downarrow a \subseteq \downarrow b$, entonces $a \leq b$. Por lo que Φ y Φ^{-1} son morfismos de orden, por la Proposición 1.7, Φ es isomorfismo de retículas. Que $\tilde{L}$ sea una completación de L, se sigue del hecho de que para todo ideal cerrado S, se cumple:

$$S = \bigcap_{x \in Ub(S)} \downarrow x = \bigvee_{x \in S} \downarrow x.$$

En efecto, como S es cerrado, $S = Lb(Ub(S))$. Luego $s \in S$ si y sólo si $s \in Lb(Ub(S))$ si y sólo si s es cota inferior de $Ub(S)$ si y sólo si para todo $x \in Ub(S)$, $s \leq x$ si y sólo si para todo $x \in Ub(S)$, $s \in \downarrow x$ si y sólo si $s \in \bigcap_{x \in Ub(S)} \downarrow x$. Así que $S = \bigcap_{x \in Ub(S)} \downarrow x$. Por otro lado, tenemos que $\bigvee_{x \in S} \downarrow x = Lb(Ub(\bigcup_{x \in S} \downarrow x))$. Sea y cota superior de S y $a \in \bigcup_{x \in S} \downarrow x$, entonces existe $x' \in S$ tal que $a \in \downarrow x'$. De donde $a \leq x' \leq y$, esto nos dice que y es cota superior de $\bigcup_{x \in S} \downarrow x$. Por lo que $Ub(S) \subseteq Ub(\bigcup_{x \in S} \downarrow x)$. Dado que $S \subseteq \bigcup_{x \in S} \downarrow X$, se sigue $Ub(\bigcup_{x \in S} \downarrow x) \subseteq Ub(S)$. Por lo que se *da la igualdad y como Lb es función, obtenemos* $S = \bigvee_{x\in S} \downarrow x$*. Finalmente,* $\Phi : L \to \tilde{L}$ *preserva todos los supremos e ínfimos que existan en* L*. En efecto, sea* $K \subseteq L$ *y supongamos que existe* $\bigvee K \in L$*. Demostraremos que* $\Phi(\bigvee K) = \bigvee \Phi(K)$*. Sea* $x \in \Phi(\bigvee K) = \downarrow(\bigvee K)$*, entonces* $x \leq \bigvee K$*. Tenemos que para* $y \in Ub(\bigcup_{k\in K} \downarrow k)$ *y para todo* $a \in \bigcup_{k\in K} \downarrow k$*,* $a \leq y$*. En particular para todo* $k \in K$*,* $k \leq y$*. De ahí que* $\bigvee K \leq y$*, luego* $x \leq y$*. Esto nos dice que* x *es cota inferior de* $Ub(\bigcup_{k\in K} \downarrow k)$*, así que* $\downarrow(\bigvee K) \subseteq \bigvee_{k\in K} \downarrow k$*. Por otro lado, dado* $a \in \bigcup_{k\in K} \downarrow k$*, existe* $k' \in K$ *tal que* $a \in \downarrow k'$*. De donde* $a \leq k' \leq \bigvee K$*. Por lo tanto* $\bigvee K \in Ub(\bigcup_{k\in K} \downarrow k)$*. Ahora bien sea* $y \in \bigvee \Phi(K) = \bigvee_{k\in K} \downarrow k$*, entonces para todo* $x \in Ub(\bigcup_{k\in K} \downarrow k)$*,* $y \leq x$*. En particular para* $x = \bigvee K$*,* $y \leq \bigvee K$*, esto nos dice que* $y \in \downarrow \bigvee K$*.Entonces* $\bigvee_{k\in K} \downarrow k \subseteq \downarrow \bigvee K$*. Por lo tanto* $\Phi(\bigvee K) = \bigvee \Phi(K)$*. Dualmente, si existe* $\bigwedge K \in L$*, entonces* $\Phi(\bigwedge K) = \bigwedge \Phi(K)$*.*

Ejemplo 1.101. ***Completación de un álgebra booleana.*** *Sea* L *un álgebra booleana con complementación* $*$*. Para cada subconjunto* S *de* L*, definimos:*

$$S^* = \{a \in L \mid a \wedge s = 0, \text{ para todo } s \in S\}.$$

Entonces $\sigma : \mathbf{P}(L) \to \mathbf{P}(L)$ *dada por* $\sigma(S) = S^*$ *define una conexión de Galois de* $\mathbf{P}(L)$ *consigo misma. Por la Proposición 1.30,* $a \wedge s$ *es equivalente con* $a \leq s^*$*, de ahí que:*

$$S^{**} = \{a \in L \mid a \leq b^*, \text{ para todo } b \in S^*\} = Lb(\{b^* \in L \mid b \in S^*\}).$$

Dado $b \in S^*$ *es equivalente a* $s \leq b^*$*, para todo* $s \in S$*, se sigue que* $b^* \in Ub(S)$*. Por otro lado, si* $x \in Ub(S)$*, entonces para todo* $s \in S$ *se cumple* $s \leq x = (x^*)^*$*. Lo cual es equivalente a que para todo* $s \in S$*,* $x^* \wedge s = 0$*. Así que* $x \in S^*$*, de donde* $x = (x^*)^* \in \{b^* \mid b \in S^*\}$*. Así pues* $S^{**} = Lb(Ub(S))$*, se sigue entonces que los ideales cerrados bajo el operador* σ^2 *son los mismos que los ideales que fueron definidos en la Completación de Dedekind-MacNeille.*

Proposición 1.102. *La Completación Dedekind-MacNeille de un álgebra booleana* L*, es también un álgebra boolena.*

Demostración. Para cualesquiera ideales I, J de L se cumple:

$$(I \cup J)^* = \{a \in L \mid a \wedge b = 0, \text{ para todo } b \in I \cup J\} = I^* \cap J^*.$$

Así pues, $(I \cup I^*)^{**} = (I^* \cap I^{**})^*$. Ahora bien notar que si $x \in I^* \cap I^{**}$, entonces para todo $y \in I^*$, $y \wedge x = 0$. Dado que $x \in I^*$, $x = x \wedge x = 0$. De donde $(I \cup I^*)^{**} = 0^* = L$. De ahí que para I un ideal cerrado, I^* es su complemento en la retícula $\tilde{\mathrm{L}}$. Ahora bien, si J es un ideal cerrado tal que $I \cap J = 0$, entonces para todo $a \in I$, $b \in J$ tenemos que $a \wedge b \in I \cap J$. Es decir, dado $b \in J$ se cumple que $a \wedge b = 0$, para todo $a \in I$. Por lo que $J \subseteq I^*$. Recíprocamente, si J es un ideal cerrado tal que $J \subseteq I^*$, entonces $I = I^{**} \subseteq J^*$, de donde $I \cap J \subseteq J^* \cap J = 0$. Por la Proposición 1.30, $\tilde{\mathrm{L}}$ es un álgebra booleana.

$\square$

Capítulo 2

Operadores Cerradura en la Categoría de Módulos

2.1. Introducción y Hechos preliminares

Definición 2.1. *Una categoría $\mathcal{C}$ consta de tres cosas.*

- *Una clase de objetos* $\mathbf{Obj}(\mathcal{C})$*;*
- *Para cada par de objetos (A, B), existe un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, cuyos elementos son llamados morfismos de A a B;*
- *Una operación $\circ$ llamada composición tal que para cada terna de objetos (A, A', A'') en $\mathcal{C}$, $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A', A'') \times Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{C}}(A, A'')$.*

Antes de establecer los axiomas para categorías, introducimos la siguiente notación: para indicar que $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A')$, escribimos $f : A \to A'$. La composición de $f : C \to C'$ con $g : C' \to C''$ es denotada por gf.

Los axiomas que tiene que cumplir una categoría son los siguientes:

1. Si $(A, B) \neq (C, D)$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$.
2. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos, entonces $h(gf) = (hg)f$.
3. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, existe $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $1_A f = f$ y $g 1_A = g$, para todo $f : A' \to A$ y $g : A \to A''$.

Sea R un anillo asociativo con uno. Denotamos por R-Mod la categoría de R-módulos izquierdos unitarios y entenderemos por R-morfismo, un morfismo de R-módulos izquierdos. Para cada módulo $M \in R$-Mod, la retícula de submódulos de M es denotada por $\mathbb{L}({}_RM)$. A partir de ahora utilizaremos libremente conceptos de la teoría de módulos que el lector podrá encontrar en [1].

Definición 2.2. *Un operador cerradura en R-Mod es una asignación C la cual asocia a cada par $N \subseteq M$, donde $N \in \mathbb{L}({}_RM)$, un submódulo de M denotado por $C_M(N)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(c1) $N \subseteq C_M(N)$;

(c2) *Si* $N, P \in \mathbb{L}({}_RM)$ *son tales que* $N \subseteq P$, *entonces* $C_M(N) \subseteq C_M(P)$;

(c3) *Si* $f : M \to M'$ *es un R-morfismo y* $N \subseteq M$, *entonces* $f(C_M(N)) \subseteq C_{M'}(f(N))$.

El submódulo $C_M(N)$ de M será llamado la C-cerradura de N en M. Para $C_M(N)$ el módulo M es el término superior y N es el término inferior.

Observación 2.3. *La condición (c2) es la monotonía en el término inferior, mientras que en la monotonía en el término superior se sigue de (c3):*

(c′2) Si $N, P \in \mathbb{L}({}_RM)$ *son tales que* $N \subseteq P$, *entonces* $C_P(N) \subseteq C_M(N)$.

Demostración. Si $i : P \to M$ es el morfismo inclusión, entonces de (c3) tenemos que $i(C_P(N)) \subseteq C_M(i(N))$. Es decir, $C_P(N) \subseteq C_M(N)$. □

Notación 2.4. *Denotaremos por $\mathbb{CO}$ la clase de todos los operadores cerradura de R-Mod.*

Definición 2.5. *Definimos un orden en $\mathbb{CO}$ denotado por $\leq$, como sigue:*

$$C \leq D \text{ si y sólo si } C_M(N) \subseteq D_M(N), \text{ para cada } N \in \mathbb{L}({}_RM).$$

Proposición 2.6. *El orden $\leq$ de la Definición 2.5 es un orden parcial en $\mathbb{CO}$.*

Demostración. 1. Es claro que para todo $C \in \mathbb{CO}$, $C \leq C$.

2. Sean $C, D \in \mathbb{CO}$ tales que $C \leq D$ y $D \leq C$, entonces para todo $N \in \mathbb{L}(_RM)$, $C_M(N) \subseteq D_M(N)$ y $D_M(N) \subseteq C_M(N)$, de donde $C_M(N) = D_M(N)$. Por lo que $C = D$.

3. Sean $C, D, E \in \mathbb{CO}$ tales que $C \leq D$ y $D \leq E$, entonces para todo $N \in \mathbb{L}(_RM)$, $C_M(N) \subseteq D_M(N)$ y $D_M(N) \subseteq E_M(N)$, lo que implica $C_M(N) \subseteq E_M(N)$. De manera que $C \leq E$.

$\square$

Observación 2.7. *A partir de ahora usaremos la notación $N \leq N$ para indicar que $N \in \mathbb{L}(_RM)$. De hecho, el símbolo $\leq$ también lo emplearemos para denotar un orden entre funciones abstarctas de R-Mod, las cuales definiremos en la Sección 2.2. Por lo que el lector deberá tener cuidado con lo que indicará el símbolo $\leq$. Dado que para operadores cerradura usaremos C, D y E, para R-módulos izquierdos usaremos N, P y M, finalmente para funciones abstractas de R-Mod utilizaremos $\mathcal{F}$ o simplemte por el contexto de cada proposición, el lector no debería tener problemas para identificar el significado de $\leq$ en lo que resta del capítulo.*

De acuerdo con B. Stenström en [1], el término gran retícula es usado cuando la retícula no es un conjunto, es decir, cuando la retícula es una clase.

Proposición 2.8. *La clase $\mathbb{CO}$ puede ser considerada una gran retícula completa mediante las reglas:*

$$(\bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha)_M(N) = \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N);$$

$$(\bigvee_{\alpha\in I} C_\alpha)_M(N) = \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N).$$

Para cada familia $\{C_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq \mathbb{CO}$ y para cada par $N \leq M$.

Demostración. Veamos que $\bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un operador cerradura.

1. Tenemos que para todo $\alpha \in I$, $N \leq (C_\alpha)_M(N)$. De ahí que:

$$N \leq \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N).$$

2. Sean $N, P \in \mathbb{L}(_RM)$ tales que $N \leq P$, entonces para todo $\alpha \in I$, $(C_\alpha)_M(N) \leq (C_\alpha)_M(P)$. Lo que implica:

$$\bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N) \leq \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(P).$$

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$, entonces para todo $\alpha \in I$, $f((C_\alpha)_M(N)) \leq (C_\alpha)_{M'}(f(N))$. De donde:

$$f(\bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N)) \leq \bigcap_{\alpha\in I} f((C_\alpha)_M(N)) \leq \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_{M'}(f(N)).$$

   Así pues:

$$f(\bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N)) \leq \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_{M'}(f(N)).$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ a $\{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Sean $C_\alpha \in \mathcal{A}$ y $N \leq M$, entonces $\bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N) \leq (C_\alpha)_M(N)$. Es decir, $\bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha \leq C_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Entonces $\bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha$ es cota inferior de $\mathcal{A}$. Ahora bien, sea $D \in \mathbb{CO}$ cota inferior de $\mathcal{A}$, entonces para todo $N \leq M$ y para todo $\alpha \in I$, $D_M(N) \leq (C_\alpha)_M(N)$, de manera que $D_M(N) \leq \bigcap(C_\alpha)_M(N)$, de donde $D \leq \bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha$. Por lo tanto $\bigwedge_{\alpha\in I} C_\alpha$ es el ínfimo de $\mathcal{A}$.

Veamos que $\bigvee_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un operador cerradura.

1. Tenemos que para todo $\alpha \in I$, $N \leq (C_\alpha)_M(N)$. De ahí que:

$$N \leq \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N).$$

2. Sean $N, P \in \mathbb{L}(_RM)$ tales que $N \leq P$, entonces para todo $\alpha \in I$, $(C_\alpha)_M(N) \leq (C_\alpha)_M(P)$. Lo que implica:

$$\sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N) \leq \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(P).$$

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$, entonces para todo $\alpha \in I$, $f((C_\alpha)_M(N)) \leq (C_\alpha)_{M'}(f(N))$. De ahí que $\sum_{\alpha\in I} f((C_\alpha)_M(N)) \leq \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_{M'}(f(N))$. Como $f(\sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N)) = \sum_{\alpha\in I} f((C_\alpha)_M(N))$, se sigue que:

$$f(\sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N)) \leq \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_{M'}(f(N)).$$

Sean $C_\alpha \in \mathcal{A}$ y $N \leq M$, entonces $(C_\alpha)_M(N) \leq \sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N)$. Es decir, $C_\alpha \leq \sum_{\alpha\in I} C_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Entonces $\bigvee_{\alpha\in I} C_\alpha$ es cota superior $\mathcal{A}$. Ahora bien, sea $D \in \mathbb{CO}$ cota superior de $\mathcal{A}$, entonces para todo $N \leq M$ y para todo $\alpha \in I$, $(C_\alpha)_M(N) \leq D_M(N)$, de manera que $\sum_{\alpha\in I}(C_\alpha)_M(N) \leq D_M(N)$, de donde $\bigvee_{\alpha\in I} C_\alpha \leq D$. Por lo tanto $\bigvee_{\alpha\in U} C_\alpha$ es el supremo de $\mathcal{A}$.

$\square$

En la clase $\mathbb{CO}$ de operadores cerradura de R-Mod, dos operaciones son introducidas:

Definición 2.9. *Para todo $C, D \in \mathbb{CO}$, definimos:*

1. *El producto $C \cdot D$, dado por:*

$$(C \cdot D)_M(N) = (C_M(D_M(N))), \text{ para cada } N \leq M.$$

2. *El coproducto $C\#D$ dado por:*

$$(C\#D)_M(N) = C_{D_M(N)}(N), \text{ para cada } N \leq M.$$

Veamos que la Definición 2.9 es buena para el producto $C \cdot D$.

1. Dado que $N \leq D_M(N)$ y $D_M(N) \leq C_M(D_M(N))$, se sigue que:

$$N \leq C_M(D_M(N)).$$

2. Sean $N, P \in \mathbb{L}(_RM)$ tales que $N \leq P$, entonces $D_M(N) \leq D_M(P)$. De donde:

$$C_M(D_M(N)) \leq C_M(D_M(P)).$$

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$, demostraremos que $f(C_M(D_M(N))) \leq C_{M'}(D_{M'}(f(N)))$. Tenemos que $f(C_M(D_M(N))) \leq C_{M'}(f(D_M(N)))$. Además $f(D_M(N)) \leq D_{M'}(f(N))$, de ahí que $C_{M'}(f(D_M(N))) \leq C_{M'}((D_{M'})(f(N)))$. Así pues:

$$f(C_M(D_M(N))) \leq C_{M'}(D_{M'}(f(N))).$$

Veamos que la Definición 2.9 es buena para el coproducto $C\#D$.

1. Dado que $N \leq D_M(N)$, se sigue que:

$$N \leq C_{D_M(N)}(N).$$

2. Sean $N, P \in \mathbb{L}({}_RM)$ tales que $N \leq P$, demostraremos que $C_{D_M(N)}(N) \leq C_{D_M(P)}(P)$. Tenemos que $N \leq P \leq D_M(P)$ de donde $C_{D_M(P)}(N) \leq C_{D_M(P)}(P)$. Por otro lado $N \leq D_M(N) \leq D_M(P)$, en virtud de (c$'$2) $C_{D_M(N)}(N) \leq C_{D_M(P)}(N)$. Lo que implica:

$$C_{D_M(N)}(N) \leq C_{D_M(P)}(P).$$

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$, demostaremos que $f(C_{D_M(N)}(N)) \leq C_{D_{M'}f(N)}(f(N))$.

   Tenemos que $f(D_M(N)) \leq D_{M'}(f(N))$. Ahora bien, sea $f_1 : D_M(N) \to D_{M'}(f(N))$ dada por $f_1(x) = f(x)$, para todo $x \in D_M(N)$, entonces f_1 es un R-morfismo. Luego, para todo $K \leq C_M(N)$ se cumple que $f_1(C_{D_M(N)}(K) \leq C_{D_{M'}(f(N))}(f_1(K))$, en particular para N. Notemos que $f_1(C_{D_M(N)}(N)) = f(C_{D_M(N)}(N))$ y $f_1(N) = f(N)$. Así pues:

$$f(C_{D_M(N)}(N)) \leq C_{D_{M'}f(N)}(f(N)).$$

Proposición 2.10. *Para todo $C, D \in \mathbb{CO}$, se cumple que:*

$$C\#D \leq C \wedge D \leq C \vee D \leq C \cdot D.$$

Demostración. Sea $N \in \mathbb{L}({}_RM)$. Por definición, $N \leq D_M(N) \leq M$, en virtud de c$'$2), $C_{D_M(N)}(N) \leq C_M(N)$. Nuevamente, por definición $C_{D_M(N)}(N) \leq D_M(N)$. Así pues, $C_{D_M(N)}(N) \leq C_M(N) \cap D_M(N)$. Por lo que $C\#D \leq C \wedge D$. Es claro que $C \wedge D \leq C \vee D$. Por último, de c1) $D_M(N) \leq C_M(D_M(N))$. Por otro lado, de c2) tenemos que $C_M(N) \leq C_M(D_M(N))$. De manera que $C_M(N) + D_M(N) \leq C_M(D_M(N))$, por lo tanto $C \vee D \leq C \cdot D$. $\square$

Los tipos más importantes de operadores cerradura son los siguientes:

Definición 2.11. *Un operador cerradura C de R-Mod es llamado:*

1. *Débilmente hereditario si $C_M(N) = C_{C_M(N)}(N)$, para cada $N \leq M$;*

2. *Idempotente si $C_M(N) = C_M(C_M(N))$, para cada $N \leq M$.*

Observación 2.12. *Si C es un operador cerradura idempotente de R-Mod entonces para todo $M \in R$-Mod, la función C_M es un operador cerradura de la retícula $\mathbb{L}({}_RM)$.*

La Observación 2.12 hace la conexión entre el Capítulo 1 y el Capítulo 2. De manera que dado un operador cerradura idempotente de R-Mod, este induce para cada $M \in R$-Mod un operador cerradura que satiface la Definición 1.68 de la Sección 6 del Capítulo 1. Así pues hemos logrado establecer la conexión entre operadores cerradura en la teoría de retículas y los operadores cerradura de la categoría R-Mod.

Definición 2.13. *Sea $C \in \mathbb{CO}$. Un submódulo $N \in \mathbb{L}(_RM)$ es llamado:*

1. *C-denso en M si $C_M(N) = M$;*
2. *C-cerrado en M si $C_M(N) = N$.*

Para cada $C \in \mathbb{CO}$ y $M \in R$-Mod denotamos:

$$\mathcal{F}_1^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = M\};$$

$$\mathcal{F}_2^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = N\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}_1^C(M) \cap \mathcal{F}_2^C(M) = \{M\}$. De esta manera cualquier operador cerradura $C \in \mathbb{CO}$ define dos funciones $\mathcal{F}_1^C$ y $\mathcal{F}_2^C$ las cuales asocian a cada módulo M el conjunto de submódulos $\mathcal{F}_1^C(M)$ y $\mathcal{F}_2^C(M)$, respectivamente.

2.2. Operadores Cerradura Débilmente Hereditarios

Sea $C \in \mathbb{CO}$. Para cada $M \in R$-Mod, consideremos el conjunto de submódulos C-densos:

$$\mathcal{F}_1^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = M\},$$

y la función $\mathcal{F}_1^C : R\text{-Mod} \to \mathbf{P}(R\text{-Mod})$ la cual asocia a cada módulo M el conjunto de submódulos $\mathcal{F}_1^C(M)$.

Observación 2.14. *Sea $C \in \mathbb{CO}$, la asignación $C \to \mathcal{F}_1^C$ es monótona, es decir, si $C \leq D$ entonces para todo $M \in R$-Mod, $\mathcal{F}_1^C(M) \subseteq \mathcal{F}_1^D(M)$.*

Demostración. Supongamos que $C \leq D$, entonces para todo $N \leq M$ se cumple que $C_M(N) \leq D_M(N)$. En particular si $N \in \mathcal{F}_1^C(M)$, $M = C_M(N) \leq D_M(N)$, de ahí que $M = D_M(N)$. Por lo que $N \in \mathcal{F}_1^D(M)$.

□

Ahora, consideramos una función abstracta $\mathcal{F}$ la cual determina para cada $M \in R$-Mod a un conjunto no vacío de submódulos $\mathcal{F}(M)$ de M tal que $M \in \mathcal{F}(M)$ y este es compatible con isomorfismos, esto es, si $M' \in R$-Mod es tal que $M \cong M'$, entonces $M' \in \mathcal{F}(M)$.

Definición 2.15. *Diremos que la función $\mathcal{F} : R$-Mod$\rightarrow \mathbf{P}(R$-Mod$)$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$, si satisface las siguientes propiedades:*

1) *Si $N \in \mathcal{F}(M_\alpha)$, donde $M_\alpha \leq M$ y $\alpha \in I$, entonces $N \in \mathcal{F}(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$;*

2) *Si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(P)$, entonces para cada $K \leq M$ se satisface $N + K \in \mathcal{F}(P + K)$;*

3) *Si $f : M \rightarrow M'$ es un R-morfismo y $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces $f(N) \in \mathcal{F}(f(M))$;*

4) *Si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces $P \in \mathcal{F}(M)$.*

Observación 2.16. *La implicación 2) $\Rightarrow$ 4) es obvia dado que: si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces por 2), $N + P \in \mathcal{F}(M + P)$, es decir, $P \in \mathcal{F}(M)$.*

Definición 2.17. *Sean $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ dos funciones abstractas de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$. Diremos que $\mathcal{F}'$ es menor o igual que $\mathcal{F}''$ y lo denotaremos por $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$, si para todo $M \in R$-Mod, $\mathcal{F}'(M) \subseteq \mathcal{F}''(M)$.*

Proposición 2.18. *Sea C un operador cerradura arbitrario de R-Mod. Entonces la función asociada $\mathcal{F}_1^C$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$.*

Demostración.

1. Sea $N \in \mathcal{F}_1^C(M_\alpha)$, donde $M_\alpha \leq M$, y $\alpha \in I$. Entonces $N \leq M_\alpha$ y $C_{M_\alpha}(N) = M_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. De modo que $N \leq \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$. Por otro lado, por la monotonía (c$'$2), tenemos que $C_{M_\alpha}(N) \leq C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N)$. De ahí que $M_\alpha \leq C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N)$, para cada $\alpha \in I$, esto implica $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N)$. Dado que la desigualdad contraria siempre se da, $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha = C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N)$. Por lo tanto $N \in \mathcal{F}_1^C(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$.

2. Sea $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}_1^C(P)$. Luego $C_P(N) = P$. Así que para cada $K \leq M$, $C_P(N) + K = P + K$. Demostraremos que $C_{P+K}(N + K) = P+K$. Como $N \leq P \leq P+K$, se sigue que $C_P(N) \leq C_{P+K}(N)$ y dado

que $C_{P+K}(N) \leq C_{P+K}(N+K)$, tenemos que $P \leq C_{P+K}(N+K)$. Dado que $K \leq N+K \leq P+K$, se sigue que $K \leq C_{P+K}(K) \leq C_{P+K}(N+K)$. Así pues $P+K \leq C_{P+K}(N+K)$ y dado que la desigualdad contraria siempre se da, $C_{P+K}(N+K) = P+K$.

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \in \mathcal{F}_1^C(M)$, entonces $C_M(N) = M$. De (c3) se sigue que $f(C_M(N)) \leq C_{f(M)}(f(N))$, esto es, $f(M) \leq C_{f(M)}(f(N))$. Consideremos $f^{|} : M \to f(M)$, el morfismo correstricción a la imágen, dada por $f^{|}(x) = f(x)$, para todo $x \in M$. Tenemos entonces que $f^{|}(M) \subseteq C_{f(M)}(f^{|}(N))$, por lo que $f(M) \leq C_{f(M)}(f(N))$. Por lo tanto $C_{f(M)}(f(N)) = f(M)$.

$\square$

Ahora veremos la transición inversa: de la función abstracta $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$, a un operador cerradura de $\mathbb{CO}$. Para lo cual introducimos la siguente notación: si $\mathcal{F}$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$, sea $C^{\mathcal{F}}$ el operador definido por la regla:

$$(C^{\mathcal{F}})_M(N) = \sum\{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}(M_\alpha)\} \tag{2.1}$$

para cada $N \leq M$. Dado que $N \in \mathcal{F}(N)$, el operador está bien definido.

Observación 2.19. *La asignación $\mathcal{F} \longmapsto C^{\mathcal{F}}$ es monótona. Es decir, si $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$, entonces $C^{\mathcal{F}'} \leq C^{\mathcal{F}''}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$. Para todo $N \leq M$ tenemos que:

$$(C^{\mathcal{F}'})_M(N) = \sum\{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}'(M_\alpha)\}.$$

Mientras que:

$$(C^{\mathcal{F}''})_M(N) = \sum\{L_\beta \leq M \mid N \leq L_\beta, N \in \mathcal{F}''(L_\beta)\}.$$

Dado que para todo $\alpha \in I$, $M_\alpha \leq M$ y $N \in \mathcal{F}'(M_\alpha)$, por la condición 1) tenemos que $N \in \mathcal{F}'(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha) \subseteq \mathcal{F}''(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$. De manera que $N \leq (C^{\mathcal{F}'})_M(N) \leq M$ y $N \in \mathcal{F}''(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$, esto nos dice que $(C^{\mathcal{F}'})_M(N)$ es alguno de los L_β. Así pues $(C^{\mathcal{F}'})_M(N) \leq (C^{\mathcal{F}''})_M(N)$. Por lo tanto $C^{\mathcal{F}'} \leq C^{\mathcal{F}''}$. $\square$

Proposición 2.20. *Sea $\mathcal{F}$ una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$. Entonces el operador $C^{\mathcal{F}}$ definido por la regla (2.1) es un operador cerradura de R-Mod.*

Demostración. 1. Dado que para todo $\alpha \in I$ se satisface $N \leq M_\alpha$ y $M_\alpha \leq (C^{\mathcal{F}})_M(N)$, se sigue que $N \leq (C^{\mathcal{F}})_M(N)$.

2. Sean $N \leq P \leq M$. De la definición tenemos que:

$$(C^{\mathcal{F}})_M(P) = \sum\{L_\beta \leq M \mid P \leq L_\beta, P \in \mathcal{F}(L_\beta)\}.$$

Por otro lado, de la definición de $(C^{\mathcal{F}})_M(N)$ tenemos que para todo $\alpha \in I$, $N \in \mathcal{F}(M_\alpha)$. Por la condición 2), $N + P \in \mathcal{F}(M_\alpha + P)$, pero $N + P = P$, así que $P \in \mathcal{F}(M_\alpha + P)$. Además como $P \leq M_\alpha + P$, para todo $\alpha \in I$. Tenemos que $M_\alpha + P$ son algunos de los L_β. De manera que $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq \sum_{\alpha\in I}(M_\alpha + P) \leq \sum_{\beta\in J} L_\beta$. Por lo tanto $(C^{\mathcal{F}})_M(N) \leq (C^{\mathcal{F}})_M(P)$.

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$, entonces:

$$f((C^{\mathcal{F}})_M(N)) = f(\textstyle\sum_{\alpha\in I} M_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} f(M_\alpha).$$

Ahora bien, por definición:

$$(C^{\mathcal{F}})_{M'}(f(N)) = \sum\{L_\beta \leq M' \mid f(N) \leq L_\beta, f(N) \in \mathcal{F}(L_\beta)\}.$$

De la definición de $(C^{\mathcal{F}})_M(N)$ y de la condición 3), tenemos que para todo $\alpha \in I$, $f(N) \in \mathcal{F}(f(M_\alpha))$. Notemos que para todo $\alpha \in I$, $f(N) \leq f(M_\alpha)$. De manera que los $f(M_\alpha)$ son algunos de los L_β. Por lo tanto$\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq \sum_{\beta\in J} L_\beta$, es decir, $f((C^{\mathcal{F}})_M(N)) \leq (C^{\mathcal{F}})_{M'}(f(N))$. □

Proposición 2.21. *Sea $\mathcal{F}$ una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$. Entonces el operador cerradura $C^{\mathcal{F}}$ asociado es débilmente hereditario y su correspondiente función $\mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}$ definida por:*

$$\mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}(M) = \{N \leq M \mid (C^F)_M(N) = M\}$$

coincide con $\mathcal{F}$.

Demostración. Por definición:

$$(C^{\mathcal{F}})_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N) = \sum\{L_\beta \leq \textstyle\sum_{\alpha\in U} M_\alpha \mid N \leq L_\beta, N \in \mathcal{F}(L_\beta)\}.$$

Por otro lado, de la definición de $(C^{\mathcal{F}})_M(N)$, tenemos que para todo $\alpha \in I$, $N \leq M_\alpha$ y $N \in \mathcal{F}(M_\alpha)$. Usando la condición 1), $N \in \mathcal{F}(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$. Además $N \leq \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$, de modo que $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha$ es algún L_β. De ahí que $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq \sum_{\beta\in J} L_\beta$, es decir, $(C^{\mathcal{F}})_M(N) \subseteq (C^{\mathcal{F}})_{(C^{\mathcal{F}})_M(N)}(N)$. Dado que la desigualdad contraria siempre se da, obtenemos la igualdad deseada, lo cual demuestra que $C^{\mathcal{F}}$ es débilmente hereditario. Sea $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces $M \in \{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}(M_\alpha)\}$. Por lo que $(C^{\mathcal{F}})_M(N) = M$, de donde $N \in \mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}(M)$. Con lo cual $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}$. Por otro lado, si $N \in \mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}(M)$, entonces $(C^{\mathcal{F}})_M(N) = M$. Esto es:

$$\sum\{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}(M_\alpha)\} = M.$$

Así que para $N \in \mathcal{F}(M_\alpha)$, por la condición 1, tenemos que $N \in \mathcal{F}(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$ $= \mathcal{F}(M)$. Por lo tanto $\mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}} \subseteq \mathcal{F}$.

□

A continuación las asignaciones consecutivas $C \longmapsto \mathcal{F}_1^C$, $\mathcal{F} \longmapsto C^{\mathcal{F}}$ serán consideradas. Si $C \in \mathbb{CO}$, entonces por la Proposición 2.18, $\mathcal{F}_1^C$ es una función con las propiedades 1), 2) y 3). Más aún por la Proposición 2.20 la función $\mathcal{F}_1^C$ determina el operador cerradura $C^{\mathcal{F}_1^C}$. Denotaremos $C_* = C^{\mathcal{F}_1^C}$.

Proposición 2.22. *Para cada operador cerradura $C \in \mathbb{CO}$ tenemos:*

1. *$C_* \leq C$;*
2. *C_* es débilmente hereditario;*
3. *C_* es el operador cerradura débilmente hereditario más grande que está contenido en C.*

Demostración. 1. Por definición:

$$C_* = \sum\{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}_1^C(M_\alpha)\}.$$

Dado que $\mathcal{F}_1^C$ satisface la condición 1), $N \in \mathcal{F}_1^C(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$. Por lo que $N \leq \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N) = \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$. Notar que $N \leq \sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq M$ implica $C_{\sum_{\alpha\in I} M_\alpha}(N) \leq C_M(N)$, es decir, $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \leq C_M(N)$. Por lo tanto $C_* \leq C$.

2. Dado que $\mathcal{F}_1^C$ satisface las condiciones 1), 2) y 3, por la Proposición 2.21 el operador cerradura $C_* = C^{\mathcal{F}_1^C}$ es débilmente hereditario.

3. Sea D un operador cerradura débilmente hereditario en R-Mod tal que $D \leq C$. Demostraremos que $D_M(N) \leq (C_*)_M(N)$. Tenemos que $D_M(N) = D_{D_M(N)}(N) \leq C_{D_M(N)}(N) \leq D_M(N)$. Así que $C_{D_M(N)}(N) = D_M$, por lo que $N \in \mathcal{F}_1^C(D_N(M))$. De manera que $D_M(N)$ es alguno de los M_α de la definición de $(C_*)_M(N)$. Por lo tanto $D_M(N) \leq (C_*)_M(N)$. $\square$

Corolario 2.23. *El operador cerradura $C \in \mathbb{CO}$ es débilmente hereditario si y sólo si $C = C_*$, donde $C_* = C^{\mathcal{F}_1^C}$.*

Teorema 2.24. *Las asignaciones $C \longmapsto \mathcal{F}_1^C$ y $\mathcal{F} \longmapsto C^{\mathcal{F}}$ definen una biyección monótona entre los operadores cerradura débilmente hereditarios de la categoría R-Mod y las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo 1.*

Demostración. Si C es un operador cerradura débilmente hereditario de R-Mod, entonces por el Corolario 2.33 $C = C^{\mathcal{F}_1^C}$. Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es una función abstracta de R-Mod del tipo 1, entonces por la Proposición 2.21 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^{C^{\mathcal{F}}}$. $\square$

2.3. Operadores Cerradura Idempotentes

Los resultados de esta sección en cierto sentido son duales a las afirmaciones de la Sección 2.2. Demostraremos la caracterización de operadores cerradura mediante la función $\mathcal{F}_2^C$ asociada a C, la cual a cada módulo $M \in R$-Mod le asocia el conjunto de submódulos C-cerrados:

$$\mathcal{F}_2^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = N\}.$$

Observación 2.25. *Sea $C \in \mathbb{CO}$, la asignación $C \longmapsto \mathcal{F}_2^C$ es antimonótona. Es decir, si $C \leq D$, entonces para todo $M \in R$-Mod, $\mathcal{F}_2^D(M) \subseteq \mathcal{F}_2^C(M)$.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{F}_2^D(M)$, entonces $N \leq M$ y es tal que $D_M(N) = N$. Como $C \leq D$, $C_M(N) \leq D_M(N)$, de manera que $C_M(N) \leq N$, lo cual implica $C_M(N) = N$. Por lo tanto $N \in \mathcal{F}_2^C(M)$. $\square$

Como en el caso previo, por conveniencia primero formularemos algunas condiciones (propiedades) de una función abstracta $\mathcal{F}$ de R-Mod (estas son duales a las condiciones 1) - 4) de la Sección 2.2):

Definición 2.26. *Diremos que una función $\mathcal{F} : R$-Mod$\to \mathbf{P}(R$-Mod$)$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$, si satisface las siguientes condiciones:*

1*) *Si $N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$, donde $N_\alpha \leq M$ y $\alpha \in I$, entonces $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$;*

2*) *Si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(P)$, entonces para todo $K \leq M$ se satisface $N \cap K \in \mathcal{F}(P \cap K)$;*

3*) *Si $g : M \to M'$ es un homomorfismo de módulos y $N' \in \mathcal{F}(g(M))$, entonces $g^{-1}(N') \in \mathcal{F}(M)$;*

4*) *Si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces $N \in \mathcal{F}(P)$.*

Observación 2.27. *Notar que 2*) implica 4*). Si $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}(M)$, entonces por 2*) $N = N \cap P \in \mathcal{F}(M \cap P) = \mathcal{F}(P)$.*

Definición 2.28. *Sean $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ dos funciones abstractas de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$. Diremos que $\mathcal{F}'$ es menor o igual que $\mathcal{F}''$ y lo denotaremos por $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$, si para todo $M \in R$-Mod, $\mathcal{F}'(M) \subseteq \mathcal{F}''(M)$.*

Proposición 2.29. *Sea C un operador cerradura arbitrario de R-Mod. Entonces la función asociada $\mathcal{F}_2^C$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$.*

Demostración.

1. Sea $N_\alpha \in \mathcal{F}_2^C(M)$, donde $N_\alpha \leq M$ y $\alpha \in I$, entonces $C_M(N_\alpha) = N_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Ahora bien, para todo $\alpha \in I$, $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \leq N_\alpha$ lo cual implica $C_M(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) \leq C_M(N_\alpha) = N_\alpha$, de manera que $C_M(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) \leq \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$, así que $C_M(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \in \mathcal{F}_2^C(M)$.

2. Supongamos que $N \leq P \leq M$ y $N \in \mathcal{F}_2^C(P)$, entonces $C_P(N) = N$. Si $K \leq M$, entonces $N \cap K \leq P \cap K \leq K$, de ahí que $C_{P\cap K}(N \cap K) \leq C_K(N \cap K) \leq K$, lo cual implica $C_{P\cap K}(N \cap K) \leq K$. Por otro lado $N\cap K \leq P\cap K \leq P$ implica $C_{P\cap K}(N\cap K) \leq C_P(N\cap K) \leq C_P(N) = N$, así que $C_{P\cap K}(N \cap K) \leq N$. Tenemos entonces $C_{P\cap K}(N \cap K) \leq N \cap K$. Por lo tanto $C_{P\cap K}(N \cap K) = N \cap K$.

3. Sean $g : M \to M'$ un R-morfismo y $N' \in \mathcal{F}_2^C(g(M))$, entonces $C_{g(M)}(N') = N'$. Demostraremos que $C_M(g^{-1}(N')) = g^{-1}(N')$. De la condición $c3)$ obtenemos que $g(C_M(g^{-1}(N'))) \leq C_{M'}(g(g^{-1}(N')))$ y considerando la relación $N' = g(g^{-1}(N'))$ obtenemos:

$$g(C_M(g^{-1}(N'))) \leq C_{g(M)}(g(g^{-1}(N'))) = C_{g(M)}(N') = N'.$$

De donde $g^{-1}(g(C_M(g^{-1}(N')))) \leq g^{-1}(N')$. Luego $C_M(g^{-1}(N')) \leq g^{-1}(N')$. Por tanto lo $C_M(g^{-1}(N')) = g^{-1}(N')$, es decir, $g^{-1}(N') \in \mathcal{F}_2^C(M)$.

□

Siguiendo con el esquema de la Sección 2.2, ahora demostraremos la transición inversa, de una función abstracta $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$ a un operador cerradura de R-Mod. Para el cual definimos el operador $C_{\mathcal{F}}$ por la regla:

$$(C_{\mathcal{F}})_M(N) = \bigcap\{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha \in \mathcal{F}(M)\}, \tag{2.2}$$

para cada $N \leq M$. Dado que $M \in \mathcal{F}(M)$, la definición es correcta.

Observación 2.30. *Notar que la asignación $\mathcal{F} \longmapsto C_{\mathcal{F}}$ es antimonótona. Es decir, si $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$, entonces $C_{\mathcal{F}''} \leq C_{\mathcal{F}'}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$. Para todo $N \leq M$ tenemos que:

$$(C_{\mathcal{F}'})_M(N) = \bigcap\{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha \in \mathcal{F}'(M)\}.$$

Mientras que:

$$(C_{\mathcal{F}''})_M(N) = \bigcap\{K_\beta \leq M \mid N \leq K_\beta, K_\beta \in \mathcal{F}''(M)\}.$$

Dado que para todo $\alpha \in I$, $N_\alpha \leq M$ y $N_\alpha \in \mathcal{F}'(M)$, por la condición 1*) tenemos que $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha \in \mathcal{F}'(M) \subseteq \mathcal{F}''(M)$. De manera que $N \leq (C_{\mathcal{F}'})_M(N) \leq M$ y $(C_{\mathcal{F}'}) \in \mathcal{F}''(M)$, esto no dice que $(C_{\mathcal{F}'})_M(N)$ es alguno de los K_β. Así pues $(C_{\mathcal{F}''})_M(N) \leq (C_{\mathcal{F}'})_M(N)$. Por lo tanto $C_{\mathcal{F}''} \leq C_{\mathcal{F}'}$.

□

Proposición 2.31. *Sea $\mathcal{F}$ una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$. Entonces el operador asociado $C_{\mathcal{F}}$ definido por la regla (2.2) es un operador cerradura de R-Mod.*

Demostración.

1. Dado que para todo $\alpha \in I$, $N \leq N_\alpha$. Se sigue que $N \leq \bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha$.

2. Sean $N \leq P \leq M$. Por definición:

$$(C_{\mathcal{F}})_M(P) = \bigcap\{P_\beta \leq M \mid P \leq P_\beta, P_\beta \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Tenemos entonces que $N \leq P \leq P_\beta$ y $P_\beta \in \mathcal{F}(M)$, así que los P_β son algunos de los N_α de la definición de $(C_\mathcal{F})_M(N)$. De ahí que para todo $\beta \in J$, $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \leq P_\beta$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \leq \bigcap_{\beta\in J} P_\beta$, es decir,$(C_\mathcal{F})_M(N) \leq (C_\mathcal{F})_M(P)$.

3. Sean $f : M \to M'$ un R-morfismo y $N \leq M$. Por definición:

$$(C_\mathcal{F})_{M'}(f(N)) = \cap\{K_\beta \leq M' \mid f(N) \leq K_\beta, K_\beta \in \mathcal{F}(M')\}.$$

De la propiedad 3*) se sigue que para todo $\beta \in J$, $f^{-1}(K_\beta) \in \mathcal{F}(M)$, donde $f(N) \leq K_\beta$. De ahí que $N \leq f^{-1}(f(N)) \leq f^{-1}(K_\beta)$. De modo que $f^{-1}(K_\beta)$ es algún N_α de la definición de $(C_\mathcal{F})_M(N)$, así que para todo $\beta \in J$, $(C_\mathcal{F})_M(N) \leq f^{-1}(K_\beta)$. Entonces:

$$(C_\mathcal{F})_M(N) \leq \cap\{f^{-1}(K_\beta) \mid f(N) \leq K_\beta, f^{-1}(K_\beta) \in \mathcal{F}(M')\}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} f((C_\mathcal{F})_M(N)) &= f(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) \\ &\leq f(\bigcap_{\beta\in J} f^{-1}(K_\beta)) \\ &\leq \bigcap_{\beta\in J} f(f^{-1}(K_\beta)) \\ &= \bigcap_{\beta\in J}(K_\beta \cap Imf) \\ &\leq \bigcap_{\beta\in J} K_\beta \\ &= (C_\mathcal{F})_M(f(N)). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.32. *Sea $\mathcal{F}$ una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$. Entonces el operador asociado $C_\mathcal{F}$ es idempotente y la función correspondiente $\mathcal{F}_2^{C_\mathcal{F}}$, definida por:*

$$\mathcal{F}_2^{C_\mathcal{F}}(M) = \{N \leq M \mid (C_\mathcal{F})_M(N) = N\}$$

coincide con $\mathcal{F}$.

Demostración. Por definición:

$$(C_{\mathcal{F}})_M((C_{\mathcal{F}})_M(N)) = \bigcap\{L_\beta \leq M \mid (C_{\mathcal{F}})_M(N) \leq L_\alpha, L_\alpha \in \mathcal{F}(M)\}.$$

De la propiedad 1*) y de dado que para todo $\alpha \in I$, $N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$. Así que $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$ es uno de los L_β. De ahí que $\bigcap_{\beta\in V} L_\beta \leq \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$, es decir:

$$(C_{\mathcal{F}})_M((C_{\mathcal{F}})_M(N)) \leq (C_{\mathcal{F}})_M(N).$$

Dado que la desigualdad contraria siempre se da, obtenemos la igualdad deseada. Por lo tanto $C_{\mathcal{F}}$ es idempotente. Veamos ahora que $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_2^{C_{\mathcal{F}}}$. Sea $N \in \mathcal{F}(M)$, de la definición de $(C_{\mathcal{F}})_M(N)$ se sigue N es uno de los N_α. Así pues $(C_{\mathcal{F}})_M(N) = N$. De ahí que $N \in \mathcal{F}_2^{C_{\mathcal{F}}}(M)$. Por otro lado, si $N \in \mathcal{F}_2^{C_{\mathcal{F}}}(M)$, entonces $(C_{\mathcal{F}})_M(N) = N$. Es decir, $\bigcap\{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha\} = N$. Por la propiedad 1*) $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$. Por lo tanto $N \in \mathcal{F}(M)$, lo cual demuestra $\mathcal{F}_2^{C_{\mathcal{F}}} \leq \mathcal{F}$.

□

Ahora consideraremos la combinación de asignaciones $C \longmapsto \mathcal{F}_2^C$ y $\mathcal{F} \longmapsto C_{\mathcal{F}}$, los cuales fueron definidos por las reglas: $\mathcal{F}_2^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = N\}$ y $(C_{\mathcal{F}})_M(N) = \{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha \in \mathcal{F}(M)\}$. Si C es un operador cerradura de R-Mod arbitrario, entonces por la Proposición 2.29 la función $\mathcal{F}_2^C$ cumple las propiedades 1*), 2*) y 3*). Mientras que la función $\mathcal{F}_2^C$, por la Proposición 2.31 define el operador cerradura $C_{\mathcal{F}_2^C}$. Denotaremos $C^* = C_{\mathcal{F}_2^C}$.

Proposición 2.33. *Para cada operador cerradura de R-Mod se cumple que:*

1. $C \leq C^*$;
2. C^* *es un operador cerradura idempotente;*
3. C^* *es el operador cerradura idempotente más pequeño que contiene a* C.

Demostración. 1. Por definición:

$$(C^*)_M(N) = (C_{\mathcal{F}_2^C})_M(N) = \cap\{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha \in \mathcal{F}_2^C(M)\}.$$

Por la propiedad 1*), $\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha \in \mathcal{F}_2^C(M)$, de donde $C_M(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$. Dado que $N \leq \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$, se sigue $C_M(N) \leq C_M(\bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in U} N_\alpha = (C^*)_M(N)$. Por lo tanto $C \leq C^*$.

2. Ya demostramos que la función $\mathcal{F}_2^C$ cumple con las propiedades 1*), 2*) y 3*). Más aún, por la Proposición 2.32, $C^* = C_{\mathcal{F}_2^C}$ es idempotente.

3. Sea D un operador cerradura idempotente tal que $C \leq D$. Por demostrar $(C^*)_M(N) \leq D_M(N)$. Dado que D es idempotente y $C \leq D$, se sigue que:

$$D_M(N) \leq C_M(D_M(N)) \leq D_M(D_M(N)) = D_M(N).$$

De donde $C_M(D_M(N)) = D_M(N)$, entonces $D_M(N) \in \mathcal{F}_2^C(M)$. Así que $D_M(N)$ es alguno de los N_α de la definición de $C^*(M)$. De manera que $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha \leq D_M(N)$, esto es, $(C^*)_M(N) \leq D_M(N)$.

□

Corolario 2.34. *El operador cerradura C de R-Mod es idempotente si y sólo si $C = C^*$.*

Englobando todos los resultados de esta sección obtenemos

Teorema 2.35. *Las asignaciones $C \longmapsto \mathcal{F}_2^C$ y $\mathcal{F} \longmapsto C_{\mathcal{F}}$ definen una biyección antimonótona entre los operadores cerraduras de R-Mod y las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$.*

2.4. Operadores Cerradura Débilmente Hereditarios e Idempotentes

Usando los resultados previos, ahora describiremos los operadores cerradura de R-Mod los cuales simultáneamente son débilmente hereditarios e idempotentes.

Sea C un operador cerradura de R-Mod débilmente hereditario e idempotente, entonces C puede ser restablecido por dos funciones, la función $\mathcal{F}_1^C$ y la función $\mathcal{F}_2^C$. Demostraremos que propiedad debe satisfacer la función abstracta de R-Mod para que los operadores cerradura asociados $C^{\mathcal{F}}$ y $C_{\mathcal{F}}$ puedan ser débilmente hereditario e idempotente. Para lo cual consideraremos la siguiente propiedad de una función abstracta $\mathcal{F}$ de R-Mod:

5) = 5*) Si $N \leq P \leq M$, $N \in \mathcal{F}(P)$ y $P \in \mathcal{F}(M)$, entonces $N \in \mathcal{F}(M)$.

Esta condición será llamada la propiedad de transitividad de $\mathcal{F}$ (ésta es autodual).

Proposición 2.36. *Si C es un operador cerradura de R-Mod idempotente, entonces la función asociada $\mathcal{F}_1^C$, donde $\mathcal{F}_1^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = M\}$, satisface la propiedad de transitividad.*

Demostración. Supongamos que $N \leq P \leq M$, $N \in \mathcal{F}_1^C(P)$ y $P \in \mathcal{F}_1^C(M)$, entonces $C_P(N) = P$ y $C_M(P) = M$. Por monotonía $C_P(N) \leq C_M(N)$, es decir, $P \leq C_M(N)$. Ahora como C es idempotente, $C_M(P) \leq C_M(C_M(N)) = C_M(N)$, entonces $M \leq C_M(N)$. Por lo que $C_M(N) = M$ y así $N \in \mathcal{F}_1^C(M)$. □

Proposición 2.37. *Sea $\mathcal{F}$ una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$, la cual satiface la propiedad de transitividad. Entonces el operador cerradura asociado $C^{\mathcal{F}}$ definido por la regla:*

$$(C^{\mathcal{F}})_M(N) = \sum\{M_\alpha \leq M \mid N \leq M_\alpha, N \in \mathcal{F}(M_\alpha)\}$$

es idempotente.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es una función abstracta de R-Mod del tipo ,$\mathcal{F}_1$ entonces $C^{\mathcal{F}}$ es un operador cerradura. Por definición:

$$(C^{\mathcal{F}})_M[(C^{\mathcal{F}})_M(N)] = \sum\{L_\beta \leq M \mid (C^{\mathcal{F}})_M(N) \leq L_\beta, (C^{\mathcal{F}})_M \in \mathcal{F}(L_\beta)\}.$$

De la definición de $(C^{\mathcal{F}})_M(N)$ tenemos que $N \in \mathcal{F}(M_\alpha)$, para todo $\alpha \in I$ y de la propiedad 1) se sigue que $N \in \mathcal{F}(\sum_{\alpha\in I} M_\alpha)$. Nuevamente, por definición:

$$\textstyle\sum_{\alpha\in I} M_\alpha = (C^{\mathcal{F}})_M(N) \in \mathcal{F}(L_\beta), \text{ para todo } \beta \in J.$$

Por la transitividad de $\mathcal{F}$ obtenemos que $N \in \mathcal{F}(L_\beta)$, para todo $\beta \in J$. Usando nuevamente la propiedad 1), $N \in \mathcal{F}(\sum_{\beta\in J} L_\beta)$. De modo que $\sum_{\beta\in J} L_\beta$ es alguno de los M_α de la definición de $(C^{\mathcal{F}})_M(N)$, así que $\sum_{\beta\in J} L_\beta \leq \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$, esto es, $(C^{\mathcal{F}})_M[(C^{\mathcal{F}})_M(N)] \leq (C^{\mathcal{F}})_M(N)$. Dado que la desigualdad contraria siempre se da, concluimoss que $C^{\mathcal{F}}$ es idempotente.

□

Corolario 2.38. *Las asignaciones $C \longmapsto \mathcal{F}_1^C$ y $F \longmapsto C^{\mathcal{F}}$ definen un biyección monótona entre operadores cerradura débilmente hereditarios e idempotentes de R-Mod y las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_1$ que satisfacen la propiedad 5) de transitividad.*

Demostración. Por el Teorema 2.24, los mapeos indicados definen una biyección monótona entre operadores cerradura débilmente hereditarios C de R-Mod y funciones abstractas de R- Mod del tipo $\mathcal{F}_1$. En esta biyección, si C es idempotente, entonces por la Proposición 2.36 la función $\mathcal{F}_1^C$ es transitiva. Por otro lado, si la función $\mathcal{F}$ es del tipo $\mathcal{F}_1$ es transitiva, entonces por la Proposición 2.37 el operador cerradura débilmente hereditario $C^{\mathcal{F}}$ es idempotente.

□

De manera que los operadores cerradura débilmente hereditarios e idempotente C de R-Mod son descritos completamente por las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod que satifacen 1), 2), 3) y 5).

De manera dual, la caracterización de operadores cerradura débilmente hereditarios e idempotentes C de R-Mod puede ser obtenida por las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$.

Proposición 2.39. *Si C es un operador cerradura débilmente hereditario de R-Mod, entonces la función asociada $\mathcal{F}_2^C$, donde $\mathcal{F}_2^C(M) = \{N \leq M \mid C_M(N) = N\}$, satiface la condición de transitividad.*

Demostración. Supongamos que $N \leq P \leq M$, $N \in \mathcal{F}_2^C(P)$ y $P \in F_2^C(M)$, entonces $C_P(N) = N$ y $C_M(P) = P$. Por monotonía, $C_M(N) \leq C_M(P)$, esto es, $C_M(N) \leq P$. Usando nuevamente la monotonía, $C_{C_M(N)}(N) \leq C_P(N)$ y como C es débilmente hereditario, $C_M(N) = C_{C_M(N)}(N)$. Por lo que $C_M(N) \leq N$, de manera que $C_M(N) = N$ y así $N \in \mathcal{F}_2^C(M)$.

□

Proposición 2.40. *Si $\mathcal{F}$ es una función abstracta de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$, la cual satisface la propiedad de transitividad. Entonces el correspondiente operador cerradura $C_{\mathcal{F}}$, definido por la regla:*

$$(C_{\mathcal{F}})_M(N) = \bigcap\{N_\alpha \leq M \mid N \leq N_\alpha, N_\alpha \in \mathcal{F}(M)\},$$

es débilmente hereditario.

Demostración. Por definición:

$$(C_{\mathcal{F}})_{(C_{\mathcal{F}})_M(N)}(N) = \bigcap\{L_\beta \leq (C_{\mathcal{F}})_M(N) \mid N \leq L_\beta, L_\beta \in \mathcal{F}((C_{\mathcal{F}})_M(N))\}.$$

De la definición de $(C_{\mathcal{F}})_M$ tenemos que $N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$, para todo $\alpha \in I$ y por la propiedad 1*), $(C_{\mathcal{F}})_M(N) = \bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha \in \mathcal{F}(M)$. Por otro lado, dado que $L_\beta \in \mathcal{F}((C_{\mathcal{F}})_M(N))$, para todo $\beta \in J$ y por la propiedad 1*), $\bigcap_{\beta \in J} L_\beta \in \mathcal{F}((C_{\mathcal{F}})_M(N))$. Usando la transitividad de $\mathcal{F}$, $\bigcap_{\beta \in J} L_\beta \in \mathcal{F}(M)$. De modo que $\bigcap_{\beta \in J} L_\beta$ es alguno de los N_α de la definición de $(C_{\mathcal{F}})_M$. De donde $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha \leq \bigcap_{\beta \in J} L_\beta$, es decir, $(C_{\mathcal{F}})_M(N) \leq (C_{\mathcal{F}})_{(C_{\mathcal{F}})_M(N)}(N)$. Dado que la desigualdad inversa siempre se da, concluimos que $C_{\mathcal{F}}$ es débilmente hereditario.

□

De la Proposiciones 2.39 y 2.40, usando el Teorema 2.35, obtenemos:

Corolario 2.41. *Las asignaciones $C \longmapsto \mathcal{F}_2^C$ y $\mathcal{F} \longmapsto C_{\mathcal{F}}$ define una biyección antimonótona entre operadores cerradura débilmente hereditarios C de R-Mod y las funciones abstractas $\mathcal{F}$ de R-Mod del tipo $\mathcal{F}_2$ que satifacen la propiedad 5*) de transitividad.*

Apéndice A

Ideales y Filtros en Álgebras Booleanas

Definición A.1. *Sea S un conjunto no vacío y $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{P}(S)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un campo de conjuntos o un álgebra de conjuntos si satiface:*

1. $S \in \mathcal{F}$;
2. *Si* $X, Y \in \mathcal{F}$, *entonces* $X \cup Y, X \cap Y$ *y* $X - Y \in \mathcal{F}$.

Definición A.2. *Un álgebra booleana es un conjunto B con al menos dos elementos 0 y 1 (cero y unidad), dotado con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ además de una operación unaria $-$. Las operaciones booleanas satifacen los siguientes axiomas.*

Para todo $u, v, x, y \in B$:

$$
\begin{array}{ll}
u + v = v + u & u \cdot v = v \cdot u \\
u + (v + w) = (u + v) + w & u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w \\
u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w & u + (v \cdot w) = (u + v) \cdot (u + w) \\
u + u = u & u \cdot u = u \\
u \cdot (u + v) = u & u + (u \cdot v) = u \\
x + 0 = x & x \cdot 0 = 0 \\
x + 1 = 1 & x \cdot 1 = x \\
x + (-x) = 1 & x \cdot (-x) = 0 \\
-(-x) = x & -(x + y) = (-x) \cdot (-y) \\
 & -(x \cdot y) = (-x) + (-y).
\end{array}
$$

A lo largo de esta sección, B denotará un álgebra boolena.

Definición A.3. *Dos elementos $u, v \in B$ son disjuntos, si $u \cdot v = 0$.*

Notación A.4. *Para $u, v \in B$ denotaremos por $u \cdot (-v)$ a $u - v$ y en ocasiones denotaremos por uv a $u \cdot v$.*

Definición A.5. *Sean $u, v \in B$. Definimos un orden en B, denotado por $\leq$ como sigue:*

$$u \leq v \text{ si y sólo si } u - v = 0.$$

Proposición A.6. *El orden $\leq$ de la Definición A.5 es un orden parcial en B.*

Demostración. Sean $u, v, w \in B$. Dado que $u - u = u \cdot (-u) = 0$, se sigue que $u \leq u$. Supongamos que $u \leq v$ y $v \leq u$, entonces $u - v = 0 = v - u$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
v &= v + (u - v) \\
&= (v + u) \cdot (v + (-v)) \\
&= (v + u) \cdot 1 \\
&= v + u \\
&= u + v \\
&= (v + u) \cdot 1 \\
&= (u + v) \cdot (u + (-u)) \\
&= u + (v - u) \\
&= u.
\end{aligned}$$

Así que $u = v$. Ahora bien, supongamos que $u \leq v$ y $v \leq w$, entonces $u - v = 0 = v - w$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
u - w &= (u \cdot 1) \cdot (-w) \\
&= (u \cdot [(-v) + v]) \cdot (-w) \\
&= [(u - v) + (u \cdot v)] \cdot (-w) \\
&= (u \cdot v) \cdot (-w) \\
&= u \cdot (v - w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u \leq w$.

$\square$

Proposición A.7. *Sean $u, v \in B$, son equivalentes:*

1. $u \leq v$;
2. $u + v = v$;
3. $u \cdot v = u$.

Demostración. Supongamos que se cumple *1.*, entonces $u - v = 0$. Ahora bien, $v = v + 0 = v + (u - v) = (v + u) \cdot (v + (-v)) = (u + v) \cdot 1 = u + v$. Supongamos que se cumple *2.*, entonces $u \cdot v = u \cdot (u + v) = u$. Por último, si se cumple *3.*, entonces $u - v = (u \cdot v) - v = u \cdot (v - v) = u \cdot 0 = 0$. De manera que $u \leq v$.

□

Proposición A.8. *Para B se tienen las siguientes condiciones:*

1. 0 *es elemento menor de B y 1 es el elemento mayor de B.*
2. *Para todo $u, v \in B$, $u \cdot v = inf\{u, v\}$ y $u + v = sup\{u, v\}$.*

Demostración.

1. Dado que para todo $u \in B$, $0 \cdot u = 0$ y $u + 1 = 1$. Se sigue que $0 \leq u$ y $u \leq 1$.
2. Sean $u, v \in B$, entonces $u-(u+v) = u\cdot[(-u)\cdot(-v)] = [u\cdot(-u)]\cdot(-v) = 0 \cdot (-v) = 0$. De donde $u \leq u + v$, análogamente $v \leq u + v$. De manera que $u + v$ es cota superior de $\{u, v\}$. Ahora bien, sea $x \in B$ cota superior de $\{u, v\}$, entonces $u - x = 0 = v - x$. Luego, $(u + v) - x = (u-x)+(v-x) = 0$. Así que $u+v \leq x$. Por lo tanto $u+v$ es el supremo de $\{u, v\}$. Dualmente se demuestra que $u \cdot v$ es el ínfimo de $\{u, v\}$.

□

Proposición A.9. *Para todo $u \in B$, $-u$ es el único elemento en B tal que $u + (-u) = 1$ y $u \cdot (-u) = 0$.*

Demostración. Sea $v \in B$ tal que $u+v = 1$ y $u \cdot v = 0$. Tenemos que $v = -u$ si y sólo si $v \leq -u$ y $-u \leq v$ si y sólo si $v - (-u) = 0$ y $(-u) - v = 0$ si y sólo si $v \cdot u = 0$ y $-(u + v) = 0$ si y sólo si $u \cdot v = 0$ y $-1 = 0$. De manera que basta demostrar que $-1 = 0$. Sabemos que $0 \leq -1$. Por otro lado, $(-1) - 0 = 1 \cdot ((-1) - 0) = (1 \cdot (-1)) - 0 = 0 - 0 = 0$. Así que $-1 \leq 0$.

□

Definición A.10. *Sea $A \subseteq B$. Decimos que A es subálgebra de B, si satisface las siguientes condiciones:*

1. 0 *y* $1 \in A$*;*

2. *Si* $u, v \in A$*, entonces* $u + v$*,* $u \cdot v$*,* $-u \in A$*.*

Observación A.11. *Para cualquier campo de conjuntos $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ con las operaciones $X + Y := X \cup Y$, $X \cdot Y := X \cap Y$ y $-X; = S - X$, es una álgebra boolena. El orden en $\mathcal{F}$ es $\subseteq$.*

Definición A.12. *Para $u, v \in B$ definimos:*

$$u \oplus v = (u - v) + (v - u).$$

Proposición A.13. *B con las operaciones $\oplus$ y $\cdot$ es un anillo conmutativo.*

Demostración. Sólo debemos verificar que B con $\oplus$ es un grupo y que $\cdot$ distribuye sobre $\oplus$. Es claro que $u \oplus v \in B$ y $u \oplus v = v \oplus u$. Veamos que 0 es el neutro aditivo y para $u \in B$, u es el inverso aditivo, ambos con respecto a $\oplus$. Tenemos que $u \oplus 0 = (u - 0) + (0 - u) = (u \cdot 1) + 0 = u$. Además $u \oplus u = (u - u) + (u - u) = 0 + 0 = 0$. Ahora veamos la asociatividad de $\oplus$. Tenemos que $(u \oplus v) \oplus w = [(u \oplus v) - w] + [w - (u \oplus v)]$, mientras que $u \oplus (v \oplus w) = [u - (v \oplus w)] + [(v \oplus w) - u]$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}
(u \oplus v) - w &= [(u - v) + (v - u)] - w \\
&= [(u - v) - w] + [(v - u) - w] \\
&= (u \cdot [(-v)(-w)]) + (v \cdot [(-u)(-w)]) \\
&= (u \cdot [-(v + w)]) + (v \cdot [-(u + w)]) \\
&= [u - (v + w)] + [v - (u + w)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w - (u \oplus v) &= w \cdot [-(u \oplus v)] \\
&= w \cdot (-[(u - v) + (v - u)]) \\
&= w \cdot ([-(u - v)] \cdot [-(v - u)]) \\
&= w \cdot ([(-u) + v] \cdot [(-v) + u]) \\
&= w \cdot [(-u)(-v) + (-u)u + v(-v) + vu] \\
&= w \cdot ([-(u + v)] + vu) \\
&= [w - (u + v)] + [w(vu)].
\end{aligned}$$

Por otro lado $u - (v \oplus w) = [u - (v + w)] + [u(wv)]$ y $(v \oplus w) - u = [v - (w + u)] + [w - (v + u)]$. Por lo tanto $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$. Por último,

$$\begin{aligned} u \cdot (v \oplus w) &= u \cdot [(v - w) + (w - v)] \\ &= [(u \cdot v) - w] + [(u \cdot w) - v] \\ &= [uv \cdot ([-u] + [-w])] + [uw \cdot ([-u] + [-v])] \\ &= (uv - uw) + (uw - uv) \\ &= (u \cdot v) \oplus (u \cdot w). \end{aligned}$$

□

Definición A.14. *Si C es un álgebra booleana. Una función $h : B \to C$ es un morfismo de álgebras boolenas, si satiface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in B$, $h(u + v) = h(u) + h(v)$;*
2. *Para todo $u, v \in B$, $h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$;*
3. *$h(0) = 0$ y $h(1) = 1$*

Observación A.15.

1. *Para todo $u \in B$, $h(-u) = -h(u)$.*
2. *La imágen de un morfismo de álgebras booleanas es subálgebra de C.*
3. *Si $u \leq v$, entonces $h(u) \leq h(v)$.*
4. *Si $X \subseteq B$, entonces existe la menor subálgebra de B que contiene a X, la cual es $\bigcap\{A \subseteq B \mid X \subseteq A$ y A es subálgebra de $B\}$ y es llamada la subálgebra generada por X.*

Demostración. Demostremos 1., sea $u \in B$, entonces:

$$h(u) \cdot h(-u) = h(u \cdot (-u)) = h(0) = 0.$$

Además:

$$h(u) + h(-u) = h(u + (-u)) = h(1) = 1.$$

Por lo tanto $h(-u) = -h(u)$. Ahora demostremos 3., sean $u, v \in B$ tales que $u \leq v$, entonces $u - v = 0$. Ahora bien:

$$h(u) - h(v) = h(u) \cdot h(-v) = h(u - v) = h(0) = 0.$$

Así que $h(u) \leq h(v)$. 2. y 4. son claros.

$\square$

Definición A.16. *Un morfismo $f : B \to C$ de álgebras booleanas es llamado isomorfismo, si existe un morfismo de álgebras boolenas $g : C \to B$ tal que $gf = Id_B$ y $fg = Id_C$.*

Es fácil ver que f es un isomorfismo de álgebras booleanas si y sólo si f es un morfismo de álgebras booleanas biyectivo.

Proposición A.17. *Si $h : B \to C$ es un isomorfismo de orden de B en C, es decir, una función biyectiva tal que $u \leq v$ si y sólo si $h(u) \leq h(v)$. Entonces h es un isomorfismo de álgebras boolenas.*

Demostración. Sean $h : B \to C$ es un isomorfismo de orden de B en C, entonces para todo $x \in C$, existe $u \in B$ tal que $h(u) = x$. Como $0 \leq u$, se sigue que $h(0) \leq x$. En particular para $x = 0$, $h(0) \leq 0$. Dado que siempre se tiene $0 \leq h(0)$, concluimos que $h(0) = 0$. Dualmente $h(1) = 1$. Ahora bien, dado que $u \cdot v \leq u, v$ entonces $h(u \cdot v) \leq h(u), h(v)$. De manera que $h(u \cdot v)$ es cota inferior de $\{h(u), h(v)\}$. Sea $z \in C$ cota inferior de $\{h(u), h(v)\}$, entonces existe $w \in B$ tal que $h(w) = z$ y $z \leq h(u), h(v)$. De ahí que $w \leq u, v$, luego $w \leq u \cdot v$, de donde $z \leq h(u \cdot v)$. Por lo tanto $h(u \cdot v) = inf\{h(u), h(v)\} = h(u) \cdot h(v)$. Dualmente se demuestra que $h(u + v) = h(u) + h(v)$.

$\square$

En la sección 1.4 del Capítulo 1 trabajamos con retículas átomicas, a continuación daremos un par de definiciones que nos ayudarán a ponernos en contexto. Además, es fácil ver que la primera definición es equivalente a la establecida anteriormente.

Definición A.18.
1. *Un elemento $a \in B - \{0\}$ es llamado átomo, si no existe $x \in B$ tal que $0 < x < a$.*
2. *Un álgebra boolena es átomica, si para cada elemento $u \in B - \{0\}$, existe un átomo $a \in B$ tal que $a \leq u$.*

Proposición A.19. *Si B es finita, entonces es átomica.*

A partir de ahora trabajaremos con ideales y filtros en álgebras booleanas, dichos conceptos fueron definidos en la Sección 1.1 del Capítulo 1 para una retícula arbitraria. Además conosideraremos ideales y filtros propios, es decir, si I es un ideal en B, entonces $1 \notin I$ y si F es un filtro en B, entonces $0 \notin F$.

Observación A.20. *Siempre se tiene que* $\{0\}$ *es un ideal en* B*, mientras que* $\{1\}$ *es un filtro.*

Proposición A.21. *Si* $h : B \to C$ *es un morfismo de álgebras booleanas, entonces* $I = \{u \in B \mid h(u) = 0\}$ *es un ideal en* B *y es llamado el kernel del morfismo* h*.*

Demostración. Es claro que $1 \notin I$ y dado que $h(0) = 0$, entonces $0 \in I$. Sean $u, v \in I$, entonces $h(u + v) = h(u) + h(v) = 0 + 0 = 0$. Así que $u + v \in I$. Sea $u \in I$ y $v \in B$ tal que $v \leq u$, entonces $h(v) \leq h(u) = 0$. Lo que implica $h(v) = 0$, de donde $v \in I$. Por lo tanto I es un ideal en B.

$\square$

Proposición A.22. *Sea* I *un ideal en* B *y definimos una relación* R *en* B *como sigue:*

$$\text{Para } u, v \in B,\ uRv \text{ si y sólo si } u \oplus v \in I.$$

Entonces R *es una relación de equivalencia en* B*.*

Demostración. Si $u \in B$, entonces $u \oplus u = 0$ y como $0 \in I$, se sigue que uRu, para todo $u \in B$. Supongamos que uRv, entonces $u \oplus v \in I$. Dado que $u \oplus v = v \oplus u$, tenemos que vRu. Por último, supongamos que uRv y vRw, entonces $u \oplus v, v \oplus w \in I$. De ahí que $(u \oplus v) + (v \oplus w) \in I$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}
u \oplus w &= (u - w) + (w - u) \\
&= [(u \cdot 1) - w] + [(w \cdot 1) - u] \\
&= [(u \cdot [(-v) + v]) - w] + [w \cdot [(-v) + v] - u] \\
&= ([(u - v) + (u \cdot v)] - w) + ([(w - v) + (w \cdot v)] - u) \\
&= [(u - v) - w] + [(u \cdot v) - w] + [(w - v) - u] + [(w \cdot v) - u] \\
&= [(u - v) - w] + [w \cdot (v - u)] + [u \cdot (v - w)] + [(w - v) - u] \\
&\leq (u - v) + (v - u) + (v - w) + (w - v) \\
&= (u \oplus v) + (v \oplus w).
\end{aligned}$$

De ahí que $u \oplus w \in I$, es decir, uRw.

$\square$

Definición A.23. *Sea* R *como en la Proposición A.22 y* B/R *el espacio cociente determinado por* R*. Definimos las operaciones* $+$*,* $\cdot$ *y* $-$ *en* B/R *como sigue, para todo* $u, v \in B$*:*

$$[u] + [v] := [u + v];$$
$$[u] \cdot [v] := [u \cdot v];$$
$$-[u] := [-u].$$

Además $0 := [0]$ *y* $1 := [1]$.

Proposición A.24. *Las operaciones dadas en la Definición A.24 hacen de* B/R *un álgebra booleana.*

Demostración. Que B/R sea una álgebra booleana se sigue del hecho de que B lo es. Así que sólo resta ver que las operaciones boolenas $+$ y $\cdot$ en C están bien definidas. Sean $u, u', v, v' \in B$ tales que $[u] = [u']$ y $[v] = [v']$, entonces $u \oplus u', v \oplus v' \in I$, de donde $(u \oplus u') + (v \oplus v') \in I$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}
&(u + v) \oplus (u' + v') \\
&= [(u + v) - (u' + v')] + [(u' + v') - (u + v)] \\
&= [u - (u' + v')] + [v - (u' + v')] + [u' - (u + v)] + [v' - (u + v)] \\
&= (u \cdot [(-u') \cdot (-v')]) + (v \cdot [(-u') \cdot (-v')]) + (u' \cdot [(-u) \cdot (-v)] \\
&+ (v' \cdot [(-u) \cdot (-v)]) \\
&= ([u - u'] - v') + ([u' - u] - v) + ([v - v'] - u') + ([v' - v] - u) \\
&\leq (u \oplus u') + (v \oplus v').
\end{aligned}$$

De ahí que $(u + v) \oplus (u' + v') \in I$, luego $(u + v)R(u' + v')$. Así que $[u + v] = [u' + v']$. Por otro lado, dado que $(u \cdot v) \oplus (u' \cdot v') = (u - u') \cdot v + u \cdot (v - v') + (u' - u) \cdot v' + u' \cdot (v' - v) \leq (u \oplus u') + (v \oplus v')$. Se sigue que $[u \cdot v] = [u' \cdot v']$. $\square$

Definición A.25. *Un subconjunto* G *de* $B - \{0\}$ *tiene la propiedad de intersección finita (PIF), si para cada subconjunto finito* $\{u_1, ..., u_n\} \subseteq G$ *se cumple que* $u_1 \cdot \cdots \cdot u_n \neq 0$.

Lema A.26.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *es una familia no vacía de filtros en* B*, entonces* $\bigcap \mathcal{F}$ *es un filtro en* B.
2. *Si* $\mathcal{C}$ *es una* $\subseteq -$*cadena de filtros en* B*, entonces* $\bigcup \mathcal{C}$ *es un filtro en* B.
3. *Si* $G \subseteq B - \{0\}$ *tiene la PIF, entonces existe un filtro* F *en* B *tal que* $G \subseteq F$.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de filtros en B, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$, $1 \in F$ y $0 \notin F$. De manera que $1 \in \bigcap \mathcal{F}$ y $0 \notin \bigcap \mathcal{F}$. Sean $u, v \in \bigcap \mathcal{F}$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$, $u, v \in F$. Así que para todo $F \in \mathcal{F}$, $u \cdot v \in F$. Luego $u \cdot v \in \bigcap \mathcal{F}$. Sea $u \in \bigcap \mathcal{F}$ y $v \in B$ tal que $u \leq v$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$, $v \in \mathcal{F}$. De donde $v \in \bigcap \mathcal{F}$. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro en B.

2. Sea $\mathcal{C}$ una $\subseteq$- cadena de filtros sobre B, entonces existe $F \in \mathcal{C}$ filtro en B. De donde $1 \in F$, luego $1 \in \bigcup \mathcal{C}$. Supongamos que $0 \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe flitro $F \in \mathcal{C}$ tal que $0 \in F$, lo cual contradice la defінción de filtro. Por lo tanto $0 \notin \bigcup \mathcal{C}$. Sean $u, v \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existen $F, F' \in \mathcal{C}$ tales que $u \in F$ y $v \in F'$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, podemos suponer que $F \subseteq F'$. Así que $u, v \in F$', luego $u \cdot v \in F'$. De donde $u \cdot v \in \bigcup \mathcal{C}$. Sea $u \in \mathcal{C}$ y $v \in B$ tal que $u \leq v$, entonces existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $u \in F$. Luego $v \in F$, así que $v \in \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro en B.

3. Sea $G \subseteq B - \{0\}$ que tiene la PIF. Definimos

$$F = \{x \in B \mid \text{Existe } \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq G \text{ tal que } x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq x\}.$$

Afirmamos que F es un filtro en B y $G \subseteq F$. En efecto, sea $x_1 \in G$, entonces $\{x_1\} \subseteq G$ y $x_1 \leq 1$. Así que $1 \in F$. Supongamos que $0 \in F$, entonces existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq G$ tal que $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq 0$. De donde $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n = 0$, lo cual contradice el hecho de que G tiene la PIF. Por lo tanto $0 \notin F$. Sean $x, z \in F$, entonces existen $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{z_1, \ldots, z_m\} \subseteq G$ tales que $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq x$ y $z_1 \cdot \cdots \cdot z_m \leq z$. De donde $\{x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m\} \subseteq G$ es tal que $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot z_1 \cdot \cdots \cdot z_m \leq x \cdot z$. Por lo que $x \cdot z \in F$. Sean $x \in F$ y $z \in B$ tales que $x \leq z$, entonces existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq G$ tal que $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq x$. De donde $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq z$, así que $z \in F$. Tenemos entonces que F es un filtro en B tal que $G \subseteq F$.

□

Definición A.27. *1. Un ideal I en B es un ideal primo, si para todo $u \in B$, se satiface una y sólo una de las siguientes condiciones: $u \in I$ o $-u \in I$.*

2. Un filtro F en B es un ultrafiltro, si para todo $u \in B$, se satiface una y sólo una de las siguientes condiciones: $u \in F$ o $-u \in F$.

Lema A.28. *Un filtro en B es un ultrafiltro si y sólo si es máximo.*

Demostración. Sea F un ultrafiltro en B y supongamos que existe F' filtro en B tal que $F \subseteq F'$ y $F \neq F'$, entonces existe $u \in F' - F$. De donde $-u \in F$, lo que implica $-u \in F'$. De manera que $0 = u \cdot (-u) \in F'$, lo cual es una contadicción. Por lo tanto $F = F'$.

Sea F un filtro en B que no es un ultrafiltro, entonces existe $z \in B$ tal que $z \notin F$ y $-z \notin F$. Definimos $G = F \cup \{z\}$, entonces G tiene la PIF. En efecto, para cualquier $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq G - \{z\}$ se cumple que $0 \neq x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$. Así que sólo resta demostrar que para todo $x \in F$, $x \cdot z \neq 0$. Supongamos que existe $x \in F$ tal que $x \cdot z = 0$, entonces $x \leq -z$. De donde $-z \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G tiene la PIF, por el Lema A.26, existe un filtro F' en B tal que $F \subsetneq G \subseteq F'$. Por lo que F no es máximo.

□

Proposición A.29. ***(Teorema del ultrafiltro de Tarski).*** *Todo filtro en B puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea F_0 un filtro en B. Definimos

$$L = \{F \mid F \text{ es un filtro sobre } B \text{ tal que } F_0 \subseteq F\}.$$

Entonces $(L, \subseteq)$ es un COPO no vacío. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en L, por el Lema A.26, $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro en B y es cota superior de $\mathcal{C}$ en L. Por el Lema de Zorn, existe F' elemento máximo de L. Por el Lema A.28, F' es un ultrafiltro, además es tal que $F_0 \subseteq F'$.

□

Proposición A.30. ***(Teorema de la representación de Stone).*** *Cualquier algebra boolenea es isomorfa a un campo de conjuntos.*

Demostración. Sea B un álgebra booleana y definimos $S = \{p \mid p$ es un ultrafiltro en $B\}$, para cada $u \in B$, $X_u = \{p \in S \mid u \in p\}$ y $\mathcal{F} = \{X_u \mid u \in B\}$. Consideremos la función $\pi : B \to \mathcal{F}$ dada por $\pi(u) = X_u$, entonces

1. $\pi(0) = X_0 = \{p \in S \mid 0 \in p\} = \emptyset$.
2. $\pi(1) = X_1 = \{p \in S \mid 1 \in p\} = S$.
3. Sean $u, v \in B$. Entonces $p \in X_{u \cdot v}$ si y sólo si $p \in S$ y $u \cdot v \in p$ si y sólo si $p \in S$ y $u, v \in P$ si y sólo si $p \in X_u$ y $p \in X_v$ si y sólo si $p \in X_u \cap X_v$. Por lo tanto $X_{u \cdot v} = X_u \cap X_v$, es decir, $\pi(u \cdot v) = \pi(u) \cap \pi(v)$.

4. Sean $u, v \in B$. Entonces $p \in X_{u+v}$ si y sólo si $p \in S$ y $u + v \in p$ si y sólo si $p \in S$ y $(-u) \cdot (-v) = -(u + v) \notin p$. De ahí que $p \in S$ y se satiface alguna de las siguientes proposiciones: $-u \notin p$ o $-v \notin p$. Si $-u \notin p$, entonces $u \in p$. De ahí que $p \in X_u$. Análogamente, si $-v \notin p$, entonces $p \in X_v$. De manera que $X_{u+v} \subseteq X_u \cup X_v$. Por otro lado, $p \in X_u \cup X_v$ si y sólo si $p \in S$ y se cumple alguna de las siguientes proposiciones: $u \in p$ o $v \in p$. De donde $p \in S$ y $u + v \in p$, así que $p \in X_{u+v}$. De ahí que $X_{u+v} \subseteq X_u \cup X_v$, por lo tanto la igualdad. Es decir $\pi(u + v) = \pi(u) \cup \pi(v)$.

5. Sea $u \in B$, $\pi(-u) = X_{-u} = \{p \in S \mid -u \in p\} = S - \{p \in S \mid u \in p\} = S - \pi(u)$.

   Claramente π es sobre. Sean $u, v \in B$ tales que $u \neq v$, usando el Teorema de Ultrafiltro de Tarski, podemos encontrar un filtro P en B tal que tiene a u o a v, pero no a ambos así que π es inyectiva. Por lo tanto π es isomorfismo de álgebras boolenas.

$\square$

Conclusión

En este trabajo damos a conocer algunas de las propiedades más fuertes en retículas, es decir, nos dimos a la tarea de estudiar ciertas propiedaes de retículas que conllevan a resultados importantes y útiles. La pimera propiedad importante fue la de distributividad, la cual implica modularidad y la posibilidad de a lo más un complemento, esto nos llevó a las álgebras boolenas. En nuestra opinión la sección de Retículas Continuas fue una de las más difíciles de estudiar, sin embargo, también fue una de las más fructíferas ya que aquí se introdujo uno de los conceptos que jugo un papel vital en el trabajo posterior, dicho concepto fue el de subconjunto dirigido. Así pues, además de trabajar con las retículas continuas también lo hicimos con retículas compactamentes generadas y localmente átomicas, no sin antes definir los conceptos de elemento compacto y átomo, al final obteniendo un teorema de caracterizacíon entre dichas retículas. Pasando por último por las retículas pseudo-complementadas, llegamos a la parte fundamental de este trabajo: los operadores cerradura. Obviamente este concepto sería abordado a nivel reticular. Aquí el estudio de elementos cerrados y de operadores finitarios fue lo principal. Más alla de detenernos seguimos con un concepto que era consecuencia de los operadores cerradura, las conexiones de Galois. Nuevamente los ideales y filtros harían su aparición, además nos encontraríamos con los anillos de Baer. Para el Capítulo 2, hicimos un trabajo con una orientación diferente, era hora de explorar a la categoría R-Mod. Le dimos estructura de retícula a los operadores cerradura, los cuales no eran los mismos que en el Capítulo 1, pero notamos que si el operador era idempotente entonces era un operador de la retícula $\mathbb{L}({}_RM)$. Como lo mencionamos al principio de esta obra, el estudio de funciones abstractas nos llevo a poder caracterizar los operadores a través de dichas funciones y viceversa. Abordando por último la posibilidad de que un operador fuera débilmente hereditario e idempotente.

Finalmente, este trabajo no sólo cumplió con el objetivo de exponer a los operadores cerradura bajo dos enfoques distintos sino que tambíen da muestra de como la matemática se conecta entre sus distintas disciplinas, dando como un ejemplo este trabajo que resulta de la teoría de retículas, teoría de modulos, un poco de categorías, de teoría de conjuntos y topología.

Bibliografía

[1] B. Stenström, *Rings of Quotients An Introduction to Methods of Ring Theory*, First Edition, New York, Springer, 1975.

[2] A. I. Kashu, *Closure operators in the categories of modules. Part I (Weakly hereditary and idempotent operators)*, Algebra Discrete Math., **15**:2 (2013), pp. 213−228.

[3] G. Calugareanu, *Lattice Concepts of Module Theory*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] T. Jech, *Set Theory*, Second Corrected Edition, New York, Springer, 1997.

[5] J.L. Kelley, *General Topology*, First Edition, New York, Springer, 1975.