



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"DESCARGA SIMULTÁNEA DE LÍQUIDO Y
GRANOS DESDE UN SILO CON MÚLTIPLES
ORIFICIOS"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA
LIC. DANIEL RODRÍGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. FELIPE PACHECO VÁZQUEZ

No. de CVU: 1147071

JUNIO 2023

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”

Descarga simultánea de líquido y granos desde un silo con múltiples orificios

Tesis presentada por

Lic. Daniel Rodríguez López

para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

Dirigida por

Dr. Felipe Pacheco Vázquez

Puebla, México

Junio 2023

©2023 - Lic. Daniel Rodríguez López

Derechos Reservados

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mis padres Araceli López Martínez y Abel Rodríguez Flores que siempre me han brindado su apoyo para poder cumplir todos mis objetivos personales y académicos. Ellos han sido siempre mi motivación que me impulsa a seguir mis sueños en la vida, quienes han estado siempre apoyándome en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudiante. También, me han brindado el soporte material y económico para poder enfocarme en los estudios y nunca abandonarlos. A mis hermanos Alfredo, Armando y Cecilia, por su apoyo incondicional y palabras de aliento.

Agradezco muy profundamente a mi asesor el Dr. Felipe Pacheco Vázquez, ya que sin su dedicación, paciencia, constancia y pasión por la física este trabajo no se hubiera logrado llegar a esta instancia tan anhelada. Gracias por transmitirme ese amor por la ciencia y la emoción por pasar horas en el laboratorio descubriendo cosas nuevas. Al Dr. Luis Fernando Elizondo, por sus grandes consejos cuando me era imposible ordenar las ideas para escribir lo que hoy he logrado. Ustedes forman parte importante de esta historia con sus aportes profesionales y múltiples palabras de aliento.

Son muchos los docentes que han sido parte de mi formación en este Instituto de Física, y a todos ellos les quiero agradecer por transmitirme el conocimiento necesario para hoy poder estar aquí.

En particular a mi amiga y compañera Citlalli, que a lo largo de tantos años hemos pasado momentos de desvelo y estrés resolviendo problemas o estudiando para los numerosos exámenes a los cuales nos enfrentamos a lo largo de nuestra formación. Gracias por esas palabras de aliento y motivación en los momentos más difíciles. Gracias por todos los buenos y malos momentos que pasamos, como también, las innumerables aventuras y anécdotas que acumulamos conociendo lugares nuevos.

Por último, agradezco al Instituto de Física que me ha exigido tanto, pero al mismo tiempo me ha permitido obtener mi tan ansiado título. Agradezco a CONAHCYT por su gestión que me permitió desarrollar este trabajo de investigación.

Dedicado a mis padres, Araceli y Abel...

Descarga simultánea de líquido y granos desde un silo con múltiples orificios

Resumen

En esta tesis se presenta un estudio experimental de la descarga de una mezcla de materia granular y agua desde un silo cilíndrico con N orificios idénticos. Primero estudiamos la razón de flujo de granos secos y de agua pura a través de uno y N orificios, los cuales definimos como Q_1 y Q_N respectivamente. Encontramos que para los casos de grano seco y agua pura $Q_N = NQ_1$, es decir, el flujo total es la superposición lineal de los flujos individuales, lo cual es esperado de acuerdo con la teoría y con la experiencia. Sin embargo, para el caso de la mezcla de grano y agua, nuestros experimentos muestran que $Q_N < NQ_1$. Para explicar este comportamiento contraintuitivo, utilizamos un modelo de medio continuo que considera la competencia entre la contribución hidrostática del fluido y la resistencia hidrodinámica del medio poroso al paso de fluido durante la descarga. Dicho modelo, que es capaz de describir cuantitativa y eficientemente los resultados experimentales, sugiere que la viscosidad de la mezcla de granos y agua aumenta con el número de agujeros N , es decir, que el comportamiento de la mezcla durante la descarga se asemeja al de un fluido dilatante.

Simultaneous discharge of liquid and grains from a silo with multiple orifices

Abstract

In this thesis, we present an experimental study focused on the discharge of a mixture of a granular material (glass spheres) and water from a cylindrical silo through N identical orifices. First, we measured the flow rate of dry grain and of pure water through one and N holes, which we define as Q_1 and Q_N respectively. We found that, for the case of dry grains and water, $Q_N = NQ_1$, that is, the total mass flux is the linear superposition of each individual flux. However, for the case of the mixture of grains and water, our experiments show that $Q_N < NQ_1$. To understand this counterintuitive behavior, we employ an empirical model that considers the competition between the hydrostatic pressure and the hydrodynamic resistance of the porous medium. Such model, which is able to describe qualitatively well the experimental data, suggests that the effective viscosity of a mixture increases with the number of orifices N , that is, the behavior of the mixture under discharge resembles a shear-thickening fluid.

Contenido

1	Introducción	1
2	Antecedentes	5
2.1	Descarga de fluidos a través de un orificio en un silo.	5
2.1.1	Ecuación de continuidad	5
2.1.2	Principio de Bernoulli	6
2.1.3	Principio de Torricelli	8
2.2	Descarga de material granular seco a través de un orificio.	13
2.2.1	Materia granular: conceptos básicos	13
2.2.2	Efecto Janssen	15
2.2.3	Descarga a través de un orificio: Ley de Beverloo	16
2.3	Descarga de la mezcla de grano y agua a través de un orificio.	20
2.3.1	Descarga de silos sumergidos	20
2.3.2	Descarga simultánea de líquido y grano	22
2.4	Descarga de un silo a través de múltiples orificios.	28
3	Objetivos	31
4	Desarrollo experimental: Descarga simultanea de líquido y granos a través de varios orificios	33
4.1	Diseño experimental	33
4.2	Resultados	35
4.3	Enfoque bidimensional	45
5	Análisis y discusión de resultados	49
5.1	Modelo de descarga de la mezcla líquido-granos a través de varios orificios . . .	49
5.2	<i>Shear-thickening</i> durante la descarga de una mezcla a escala no coloidal. . . .	56
6	Conclusiones	59
A	Código	61
B	Artículo publicado en Physics of Fluids	64

Bibliografía

71

Capítulo 1

Introducción

Una de las principales preocupaciones que ha tenido la humanidad desde los inicios de las civilizaciones es garantizar la alimentación de personas y animales. Por esta razón, a lo largo de los años se han inventado y perfeccionado diversas herramientas necesarias para almacenar, conservar, manipular y transportar diversos alimentos y bebidas. Una de tales herramientas son los silos.

Un silo es una estructura diseñada para el almacenamiento de materiales. Aunque existe evidencia de que la humanidad ha utilizado los silos desde tiempos remotos [1], no fue sino hasta el surgimiento de la revolución industrial que la curiosidad intelectual de varios ingenieros y científicos, tales como H.A. Hagen [2] y G.H.L. Janssen [3], motivó su estudio sistemático. Los descubrimientos de estos científicos alemanes fueron utilizados principalmente en el sector agrícola para el almacenamiento de granos, sin embargo, actualmente son también empleados en diversos sectores industriales tales como la minería, la construcción, el sector cervecero, industrias tequileras, de lácteos, farmacéuticas, entre muchas otras [4,5].

Tanto el proceso de globalización, como el crecimiento acelerado de ciudades cada día más industrializadas, dieron lugar a que el interés por almacenar diversos materiales y productos en silos se convirtiera en una necesidad fundamental. De esta forma, el entendimiento de materiales (en su mayoría granulares) contenidos en este tipo de estructuras se convirtió en un nuevo campo de estudio para la ingeniería y la física por sí mismo [6–8]. Aunque este problema aparenta ser sencillo, en realidad plantea un reto de gran complejidad, debido a que se requiere comprender el flujo de un sistema granular, intrínsecamente fuera del equilibrio, y bajo el confinamiento impuesto por las paredes del silo.

Como resultado de los trabajos de Hagen y Janssen, por ejemplo, sabemos que el

comportamiento de un material granular almacenado está mayoritariamente determinado por la distribución de las fuerzas de interacción entre los granos, lo que a su vez determina la presión en el material. Janssen, en particular, logró establecer una relación para dicha presión en el fondo de la columna, y mostró que ésta incrementa hasta llegar a un punto de saturación. A esta observación experimental – que tiene importantes implicaciones en determinar el flujo de masa a través de un orificio en un silo – se le denomina como "efecto Janssen".

Años más tarde, W.A. Beverloo [9] encontraría empíricamente que, como consecuencia del efecto Janssen, existe una relación de tipo ley de potencias entre el flujo de masa a través de una apertura y parámetros simples que describen a un sistema granular contenido en un silo, tales como el tamaño característico de las partículas constituyentes, la dimensión de la apertura y algunas características macroscópicas del sistema (por ejemplo, la densidad).

Si bien el trabajo de Beverloo continúa siendo materia de discusión y debate hasta nuestros días, dando lugar a una gran variedad de trabajos sobre la descarga de materiales granulares a través de silos, es importante mencionar que la mayoría de las investigaciones se han centrado en el estudio de silos con materiales granulares secos, es decir, sistemas granulares en donde el medio intersticial entre las partículas es aire [10–12].

Una situación particularmente interesante, de mayor grado de complejidad y comúnmente encontrada en diversos contextos científicos, tecnológicos e industriales, es la de una descarga de material granular sumergido, es decir, de sistemas granulares en donde el medio intersticial y/o el exterior del silo es un líquido. Grupos de investigación como el de Durian *et. al.*, por ejemplo, han realizado estudios tanto experimentales como numéricos para elucidar la dinámica de la descarga de un silo bajo estas condiciones [13]. Ellos proponen un modelo para describir la descarga de grano en agua realizando una modificación a la ecuación de Beverloo, en la que el factor de la gravedad es reemplazado por un factor obtenido a partir de la velocidad terminal de un grano cayendo en agua. Otro ejemplo es el de A.M. Álvarez *et. al.* quienes han considerado la descarga de una mezcla de grano y agua. En este caso, a diferencia del anterior, el sistema se descarga hacia la atmósfera. Los autores recién mencionados estudiaron el rol del tamaño de grano y tamaño del orificio al momento de la descarga, y propusieron un modelo fenomenológico basado en la ecuación de continuidad de un fluido, con un término adicional de resistencia hidrodinámica que postula que el medio granular actúa como un medio poroso dinámico durante el proceso de descarga [14].

Es importante resaltar que todos los trabajos arriba mencionados se enfocan en el estudio de la descarga de silos a través de un solo orificio, planteando así una pregunta fundamental, a saber, ¿qué sucede cuando la descarga de un silo ocurre a través de más de un orificio? En estas condiciones, uno también podría preguntarse si la descarga de una mezcla de granos y líquido es simplemente proporcional al número de orificios, como lo dictan la intuición y la experiencia práctica, al considerar descargas de granos secos, o de líquidos convencionales.

El propósito principal de esta tesis es responder estos cuestionamientos. Para lograrlo, estudiamos experimentalmente la descarga simultánea de una mezcla de grano y agua contenidas en un silo de forma cilíndrica, observando el efecto que producen el número de orificios y el tamaño de grano empleado en dicha descarga. En el caso de sistemas monofásicos (i.e. agua pura o granos secos), encontramos una relación lineal entre el flujo de descarga y el número de orificios utilizados. En contraste, al descargar la mezcla de ambos materiales encontramos una reducción inesperada del flujo de descarga al aumentar el número de orificios. Esto exhibe una no linealidad entre estas dos cantidades. Para dar una explicación física de este comportamiento, adecuamos el modelo fenomenológico mencionado arriba, en el que se considera al medio granular como un medio poroso dinámico, y al número de orificios utilizados en la descarga como un solo orificio efectivo con la misma sección transversal que los N orificios juntos. Dicho modelo, es capaz de describir cuantitativamente los resultados experimentales con muy buena precisión. Para ellos, sin embargo, es necesario ajustar el valor asociado a la viscosidad efectiva de la mezcla conforme aumenta el valor de N . Como explicamos a continuación, nuestra interpretación física es que, al aumentar el número de orificios de descarga, la mezcla de agua y granos presenta un comportamiento análogo al de un fluido no-newtoniano de tipo dilatante (Shear-Thickening) [15].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 revisamos algunos conceptos fundamentales de la descarga de un fluido simple, con la finalidad de introducir algunos conceptos básicos que serán importantes más adelante. Además, abordaremos nociones elementales de la materia granular, en particular, aquellos relacionados con la descarga de un medio granular seco, en donde el efecto Janssen conduce a una descarga descrita por la ley de Beverloo, que nos indica que el flujo de masa de un material granular a través de un orificio en el fondo de un silo es constante. Adicionalmente, revisamos brevemente los trabajos realizados por Durian. et. al. [14] y A.M. Cervantes-Alvarez. et. al. [16, 17] sobre silos sumergidos, y descarga de mezcla de grano y agua a través de un

orificio, respectivamente. Adicionalmente, examinaremos la descarga de materia granular seca a través de múltiples orificios. En el Capítulo 3 se planean los objetivos que se pretenden alcanzar en esta tesis, como también la hipótesis sobre la cual enfocamos nuestra investigación. En el Capítulo 4 mostramos el arreglo experimental utilizado y los resultados obtenidos más importantes. En el Capítulo 5 presentamos un modelo para describir la descarga de una mezcla grano-agua a través de varios orificios, como también una posible interpretación de los resultados experimentales reportados en este trabajo. Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones más importantes de esta tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Descarga de fluidos a través de un orificio en un silo.

Idealmente, el comportamiento de un fluido debería poder entenderse como la suma de los movimientos individuales de cada una de las partículas constituyentes. En la práctica, sin embargo, esto representaría una tarea descomunal, imposible de realizar aún para las computadoras más eficientes jamás creadas. Para sortear esta dificultad, podemos apelar la llamada mecánica de fluidos, en la que un líquido es tratado como un medio continuo [18].

Para analizar el paso de un fluido a través de un orificio, es requerido primero realizar una revisión de algunas de las ecuaciones básicas de los fluidos, i.e., la ecuación de la continuidad y la ecuación de Bernouilli.

2.1.1 Ecuación de continuidad

Es sabido que la masa de un fluido en movimiento se conserva [18], lo que nos lleva a una relación importante denominada ecuación de continuidad. Consideremos la trayectoria de un elemento infinitesimal de volumen de un fluido en movimiento, ésta se puede describir mediante un trazo denominado línea de flujo. Si ahora consideramos un conjunto de líneas de flujo pasando a través de un elemento imaginario de área A_1 , como el que se muestra en la figura 2.1, se obtiene entonces un tubo que se encuentra delimitado por las mismas líneas de flujo.

Consideremos una parte de este tubo de flujo con secciones transversales estacionarias con áreas A_1 y A_2 , y con velocidades v_1 y v_2 , respectivamente. Después de un

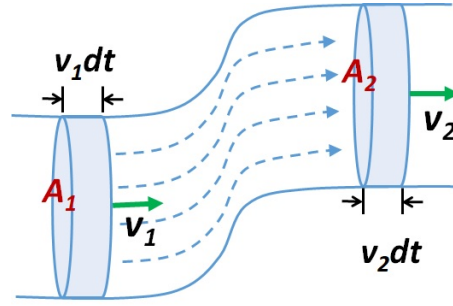


Figura 2.1: Tubo formado y delimitado por líneas de flujo. El flujo que pasa a través del área transversal A_1 debe ser el mismo que pasa por el área A_2 .

intervalo de tiempo dt , el fluido se desplazará una distancia $v_1 dt$ a través de A_1 generando un volumen $dV_1 = A_1 v_1 dt$. En este mismo intervalo de tiempo, un elemento de volumen $dV_2 = A_2 v_2 dt$ sale del tubo por A_2 . Ahora, considerando el caso de un fluido incompresible, la densidad en cualquier punto del tubo tiene un valor constante de $\rho = dm/dV$. Tomando en cuenta que la cantidad de masa que entra a través de A_1 es la misma que sale a través de A_2 podemos decir que $dm_1 = dm_2$ y con esto llegamos a que

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt, \quad (2.1)$$

o bien,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (2.2)$$

la cual es conocida como la *ecuación de continuidad* para un fluido incompresible.

2.1.2 Principio de Bernoulli

Consideremos ahora a la porción de un fluido que se encuentra en el interior del tubo definido por las líneas de flujo y las dos secciones de área transversal, A_1 y A_2 , en donde el fluido tiene velocidades v_1 y v_2 , respectivamente, tal y como se muestra en la figura 2.2 [18]. En un intervalo de tiempo dt , este elemento de fluido se desplaza una distancia Δl_i ($i = 1, 2$) generando un elemento de volumen $dV_i = A_i \Delta l_i$. Si consideramos que el fluido es incompresible tendremos una densidad constante en cualquier punto, así que, por la ecuación de continuidad (2.2), el volumen del fluido dV es el mismo en cualquier sección transversal en el intervalo de tiempo dt , esto es $dV = A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$.

Ahora, calculamos el trabajo efectuado sobre el elemento de fluido en el intervalo de tiempo dt . Asumiendo que se trata de un fluido no viscoso, las únicas fuerzas que

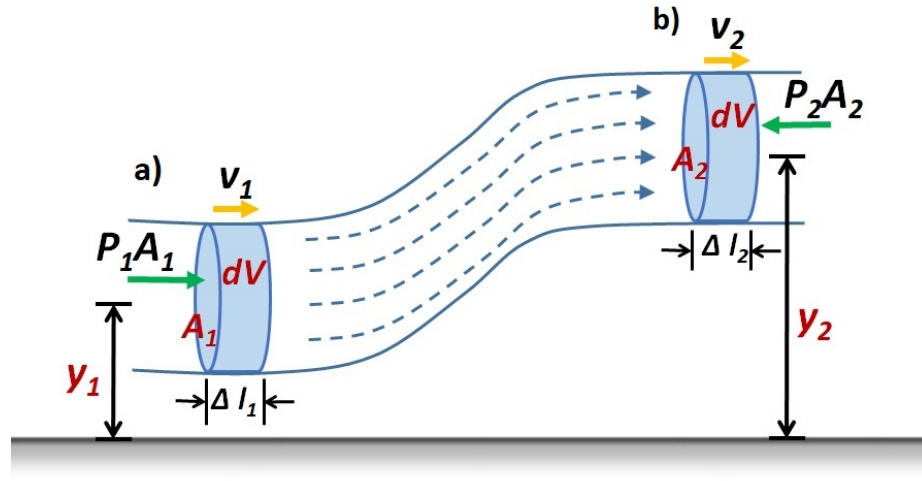


Figura 2.2: Tubo de flujo delimitado por líneas de flujo. En el punto a) , se define un elemento infinitesimal de volumen $dV_1 = A_1\Delta l_1$ el cual se encuentra posicionado a una altura y_1 . De igual manera, en el punto b), definimos $dV_2 = A_2\Delta l_2$ que se encuentra situado a una altura y_2 . Considerando un fluido incompresible, la ecuación de continuidad nos indica que el volumen debe ser el mismo en cualquier sección, por lo tanto $dV_1 = dV_2$.

producen trabajo sobre el sistema son las fuerzas de presión correspondientes al resto del fluido circundante. La fuerza ejercida en un punto de la superficie A_1 es entonces P_1A_1 y, similarmente, para un punto en la superficie A_2 es P_2A_2 , donde P_1 y P_2 corresponden a la presión en cada punto, respectivamente. El trabajo efectuado sobre el sistema, entonces, estará dado por la suma de los trabajos realizados en a) y b), es decir, $P_1A_1\Delta l_1$ y $P_2A_2\Delta l_2$, sin embargo, en el segundo caso se considera un signo negativo debido a que la fuerza en este punto es opuesta al desplazamiento del fluido. Finalmente, incluimos el trabajo efectuado sobre el sistema debido a la gravedad, el cual está asociado a la diferencia de las alturas entre los dos puntos, esto es $-mg(y_2 - y_1)$. Por lo tanto, el trabajo total está dado por:

$$W = P_1A_1\Delta l_1 - P_2A_2\Delta l_2 - mg(y_2 - y_1). \quad (2.3)$$

Como $A_1\Delta l_1$ y $A_2\Delta l_2$ son elementos de volumen, podemos reemplazarlos por m/ρ donde ρ corresponde a la densidad (constante) del fluido. Por tanto, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$W = (P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} - mg(y_2 - y_1). \quad (2.4)$$

Por otro lado, del teorema de variación de la energía sabemos que [18]: "el trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio de la energía cinética del sistema", es decir:

$$W = \delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (2.5)$$

Comparando las dos últimas expresiones, obtenemos que

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (2.6)$$

Dado que los subíndices 1 y 2 son arbitrarios, y se refieren a cualquiera de las dos regiones par definir el tubo de flujo, podemos escribir la última expresión como:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}, \quad (2.7)$$

que es conocida como la ecuación de Bernoulli, dado que es una consecuencia del principio que lleva el mismo nombre, formulado originalmente por D. Bernoulli alrededor de 1738 y que enuncia [19] que :

"En un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido"

2.1.3 Principio de Torricelli

Evangelista Torricelli realizó grandes aportaciones a la física, y en particular, al estudio de la hidrodinámica. Una de esas aportaciones es el conocido *Teorema de Torricelli*, que explica la relación entre el flujo de un líquido a través de un orificio en el fondo de un contenedor, y la altura del líquido contenido en el recipiente. Esto es consecuencia directa del principio de Bernoulli y la ecuación de continuidad [20].

Consideremos un recipiente cilíndrico de radio R_1 , con un orificio circular en el fondo de radio R_2 , el cual se encuentra destapado de la parte superior tal y como se ilustra en la figura (2.3). Inicialmente, dicho contenedor se encuentra lleno de un fluido incompresible y no viscoso, el cual fluye a través de la apertura existente en el fondo por la acción de la gravedad. Para describir este fenómeno, nos enfocaremos en determinar la velocidad a la cual el líquido sale por la apertura del recipiente.

Partiendo de la ecuación de Bernoulli (2.6) se tiene que

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2, \quad (2.8)$$

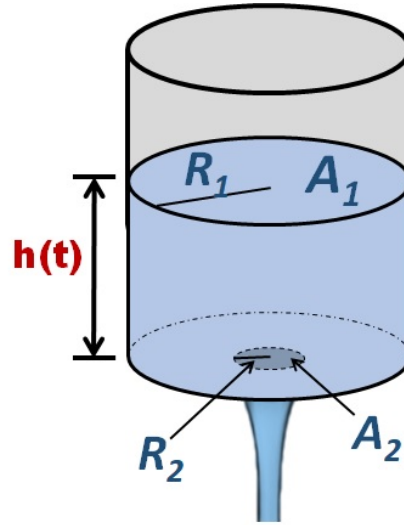


Figura 2.3: Descarga de un fluido a través de un silo cilíndrico de radio R_1 a través de un orificio circular de radio R_2 en el fondo. El $h(t)$ va a ser un factor importante durante la descarga, ya que la velocidad de vaciado depende de este valor tal y como lo indica Torricelli.

donde, P_1 y P_2 tienen el mismo valor de presión al suponer que el cilindro se encuentra destapado. Si además colocamos nuestro sistema de referencia en la apertura y asumimos que el recipiente se vacía por completo, el último término de la igualdad desaparece. Entonces:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (2.9)$$

Además, recordemos que estamos trabajando con un fluido incompresible, por lo que su densidad es la misma en cualquier punto. Ahora bien, puesto que la ecuación de continuidad (2.2) nos dice que el flujo a través de A_1 debe de ser el mismo que en A_2 , podemos establecer la relación $v_1 = \frac{A_2}{A_1}v_2$. Tomando esto en consideración, obtenemos

$$gh = \frac{1}{2}v_2^2(1 - A_2^2/A_1^2). \quad (2.10)$$

Por lo tanto, la velocidad a la cual se descarga un líquido de un recipiente a través de una apertura en el fondo es

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}}. \quad (2.11)$$

Finalmente, en el caso en el que el área del cilindro (A_1) es mucho mayor que el área del orificio de descarga (A_2), el segundo término del denominador del lado derecho de la ecuación

es despreciable, y obtenemos así que

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (2.12)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Torricelli.

Si queremos saber cómo es el comportamiento de $h(t)$, podemos partir de la ec. 1.9 combinada con la ec. de continuidad considerando que $v_1 = \frac{dh}{dt}$, separando las variables en la ecuación y finalmente integrando a ambos lados, podemos determinar el cambio en la altura de la columna de agua como función del tiempo durante descarga. Esto es

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2} A_2 \sqrt{\frac{2g}{A_1^2 - A_2^2}} t \right)^2. \quad (2.13)$$

donde h_0 corresponde a la altura inicial de la columna, g a la gravedad y A_1 y A_2 al área transversal del contenedor y el área del orificio de descarga respectivamente. En la figura (2.4) se ilustra el cambio de la masa en función del tiempo de descarga, donde podemos apreciar la dependencia con la altura de la columna de agua de la forma $M = \rho A_1 h(t)$. Inicialmente el fluido se descarga rápidamente, sin embargo, conforme disminuye la altura de la columna de agua el la descarga se va haciendo más lenta.

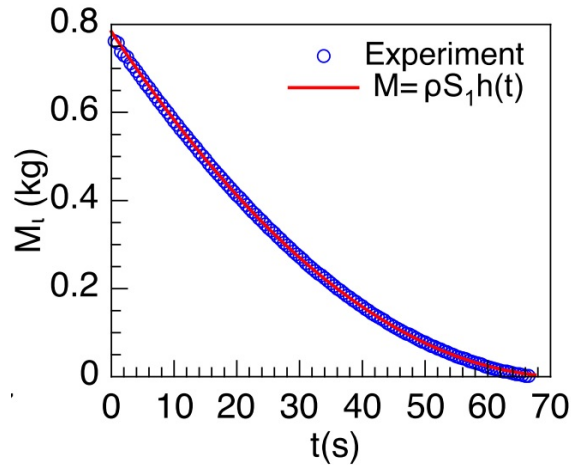


Figura 2.4: Cambio de la masa de agua en función del tiempo. En esta podemos apreciar una clara dependencia de la altura durante la descarga: para alturas grandes, el fluido se descarga rápido, pero conforme disminuye tal valor la descarga se hace más lenta. Imagen tomada de la referencia [14].

En resumen, la discusión anterior considera los elementos esenciales para describir la descarga de un fluido ideal a través de un orificio pequeño en el fondo de un silo, en

donde la viscosidad es despreciada, y donde se considera a un fluido incompresible. Este esquema teórico nos permite describir con argumentos simples la descarga de un silo cuando éste contiene agua, y otros problemas asociados a la hidrodinámica. Sin embargo, cuando el fluido en consideración es más complejo, la dinámica de la descarga a través del silo se vuelve considerablemente más complicada de describir.

En este sentido, es posible clasificar a los fluidos en tres tipos: newtonianos, no newtonianos o visco-elásticos. Revisemos brevemente las características que definen a esta clasificación.

- **Fluidos newtonianos**

Como su nombre lo indica, los fluidos newtonianos son todos aquellos que son descritos por la ley de viscosidad de Newton para un fluido laminar [21]: $\tau = \frac{F}{A} = \mu\dot{\gamma}$, donde τ es el esfuerzo cortante (la fuerza por unidad de área), μ es una constante de proporcionalidad llamada viscosidad y $\dot{\gamma}$ la velocidad de deformación. En este caso, el desplazamiento relativo de los elementos de volumen de un fluido, desplazándose uno sobre el otro, es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido [21].

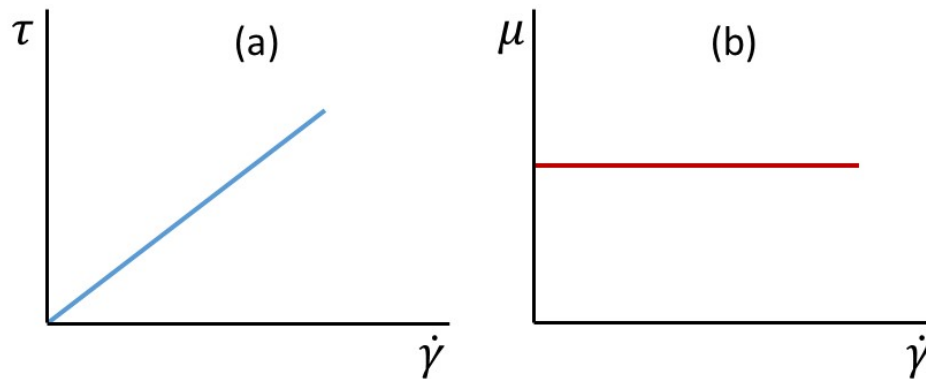


Figura 2.5: Curva característica para un fluido newtoniano. a) Curva de fluidez. b) Curva de viscosidad. En a) se manifiesta un comportamiento lineal característico de este tipo de fluidos, por lo tanto, la pendiente de esta recta es la viscosidad y es constante tal y como se ilustra en b).

Gráficamente, podemos representar el esfuerzo cortante como función de la velocidad de deformación, tal y como se observa en la figura 2.5a. En este caso, en particular, observamos un comportamiento lineal o, equivalentemente, la viscosidad, μ es una constante

independientemente de la velocidad de deformación (ver figura 2.5b).

- **Fluidos no newtonianos**

Los fluidos no newtonianos son aquellos que no cumplen la ley de viscosidad de Newton, pues la relación entre el esfuerzo cortante τ y la razón de deformación $\dot{\gamma}$ es no lineal (ver figura 2.6). En este caso, la viscosidad μ muestra una dependencia con la velocidad de corte. Algunos ejemplos de fluidos que presentan este tipo de comportamiento son la miel, el jarabe, la crema y los aderezos, entre otros. Este tipo de fluidos pueden clasificarse, a su vez, en pseudoplásticos y dilatantes.

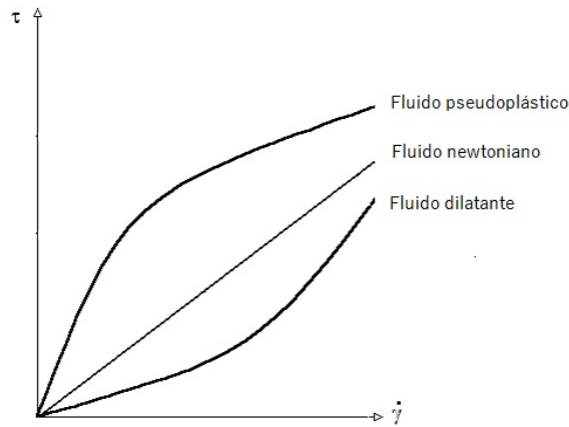


Figura 2.6: Curvas características de los distintos tipos de fluidos. Los fluidos newtonianos (línea del centro), presentan un comportamiento lineal entre el esfuerzo cortante y la razón de deformación, mientras que, los fluidos no newtonianos manifiestan un cambio en la pendiente.

1. *Fluidos pseudoplásticos (shear-thinning)*

Los fluidos de este tipo se caracterizan por una disminución en la viscosidad cuando excedemos un umbral de velocidad de deformación, como ocurre con algunos fluidos de uso común como Ketchup, geles, algunas clases de pinturas, etc.

2. *Fluidos dilatantes (shear-thickening)*

Los fluidos dilatantes, en contraste, son aquellos en los que la viscosidad (i.e., la resistencia a la deformación) crece conforme aumenta la velocidad de deformación. Esto quiere decir que se presenta un aumento en el esfuerzo cortante con el incremento de dicha tasa de deformación. Estos fluidos actúan de manera contraria a la intuición,

cuesta mucho trabajo deformarlos cuando lo haces de manera abrupta, pero cuando la deformación es lenta el esfuerzo requerido es mucho menor [15]. El ejemplo más conocido de éste tipo de fluidos es la mezcla de agua con harina de maíz.

- **Fluidos visco-elásticos**

Esta clase de fluidos está caracterizada por la presencia de propiedades tanto elásticas como viscosas. La ecuación que describe este tipo de comportamientos está dada por el modelo de Maxwell:

$$\tau + \lambda \cdot \dot{\tau} = \mu \cdot \gamma, \quad (2.14)$$

donde τ corresponde al esfuerzo cortante, λ es un tiempo de relajación, $\dot{\tau}$ es el gradiente de esfuerzo cortante, μ la viscosidad y γ la velocidad de deformación. Un ejemplo de materiales que presentan este tipo de comportamiento son la nata, la gelatina, los helados, etc.

La elucidación del comportamiento de este tipo de fluidos ha dado lugar a múltiples trabajos de investigación relacionados con fluidos no newtonianos, generando importantes avances en matemáticas y física, y dando lugar a aplicaciones prácticas como materiales para lubricación, suspensiones, fluidos viscoplásticos, cemento, biofluidos, medios porosos y relevantes avances numéricos [22–25].

Es crucial enfatizar aquí que, hasta donde sabemos, existen muy pocos estudios en los cuales se considere la descarga de fluidos no newtonianos a través de un silo. Sin embargo, se han realizado trabajos numéricos en los cuales, se simula la descarga de silos bidimensionales usando modelos de reología donde toma importancia el término de la viscosidad [26, 27].

2.2 Descarga de material granular seco a través de un orificio.

2.2.1 Materia granular: conceptos básicos

El material más abundante en el planeta, y con el que tenemos una íntima interacción constante, es el agua. El segundo tipo más utilizado es la materia granular, que podemos encontrar en distintos contextos de nuestra vida cotidiana, por ejemplo, en el azúcar y el café que tomamos por las mañanas, en la preparación de distintos alimentos, en la arena que disfrutamos cuando damos un paseo por la playa, en los grandes desiertos del Sahara, por mencionar apenas algunos casos concretos.



Figura 2.7: Silos de distintas capacidades utilizados para el almacenamiento de granos [28]. Estas estructuras se han utilizado a lo largo de los años, inicialmente se realizaron con rocas y tierra, pero en la actualidad, son grandes estructuras de metal. Imágenes tomadas de la referencia [28].

En una definición libre de formalismos, podemos decir que la materia granular es una gran colección de partículas de tamaños diversos, mayores a una micra ($\mu m = 10^{-6}m$) y que, por tanto, no son susceptibles a agitaciones térmicas (no presentan movimiento Browniano) [6]. Para este tipo de materiales podemos observar distintos comportamientos característicos que dependen, por ejemplo, de la energía inyectada sobre el sistema. En reposo, la materia granular se comporta como un sólido (ej. la arena en las playas, sobre la cual podemos caminar sin ningún problema). En ciertas circunstancias, sin embargo, también presenta un comportamiento análogo al de un fluido, como podemos observar cuando vertimos una bolsa de azúcar en algún recipiente. En estas condiciones, los granos fluyen como las partículas de un fluido (incluso, visto desde grandes distancias, se pierde el carácter granular y solamente percibimos el comportamiento colectivo). Finalmente, la materia granular también puede comportarse como un gas, una clara manifestación de esto son las tormentas de arena presentes en los desiertos o las cenizas expulsadas de fumarolas volcánicas.

Como ya se mencionó en la introducción, una situación física de particular interés científico, tecnológico e industrial, es considerar el comportamiento de materiales granulares confinados en un silo (ver figura 2.7) y, aún más importante, entender la dinámica de descarga de éstos mismos. Cuando el medio intersticial entre los granos es aire, la descarga de un silo puede ser descrita por la ley de Beverloo [9]. El flujo para este caso sólo depende del tamaño de grano que se está utilizando y el diámetro de la apertura a través de la cual está fluyendo la materia granular. Un fenómeno importante presente en materia granular confinada es el efecto Janssen [3], el cual es el responsable de que el flujo de descarga en el fondo de un silo

sea constante. Revisemos pues algunas nociones importantes en este sentido.

2.2.2 Efecto Janssen

El almacenamiento y manejo de distintas semillas como el maíz, frijol, trigo, entre otras, ha sido de gran importancia para casi todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Como son estos una vital fuente de alimentación, entonces se vuelve de suma importancia poder disponer de ellos en cualquier época del año. El problema siempre ha sido que su cultivo y producción se limita a pequeñas temporadas, que dependen de la época del año y la región de cultivo. La solución para esto es producir grandes cantidades en las temporadas ideales y almacenarlo para así disponer de éste en cualquier época del año. Se recurre entonces al uso de grandes contenedores llamados comúnmente silos. Un problema derivado de esto es la posibilidad latente de que éstas estructuras sufran daños (por ejemplo, fisuras) debido a la presión ejercida por el material granular sobre las paredes. Como respuesta a esto, se presenta la necesidad de colocar una especie de cinchos a lo ancho de los contenedores que contrarresten la fuerza ejercida por el medio granular. En 1895, H. A. Janssen realizó una serie de experimentos simples con maíz para dar una posible explicación para este tipo de fenomenología, a través de inferir la saturación de la presión con la altura del grano almacenado en el silo [3].

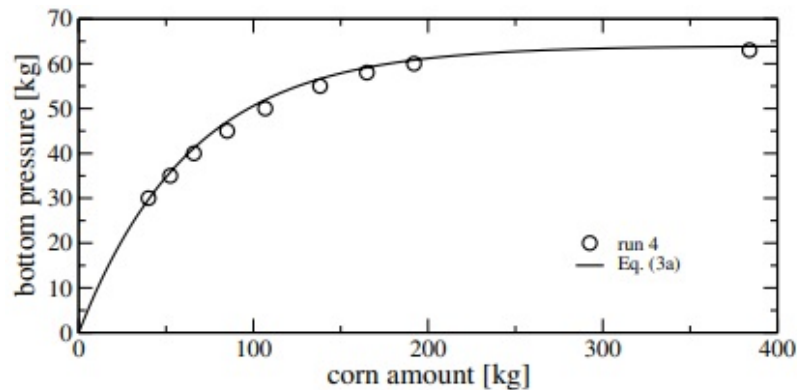


Figura 2.8: Presión obtenida en el fondo de un contenedor como función de la cantidad de granos de maíz almacenada (i.e. la altura de la columna de material). Note que, al incrementar el valor de la altura de la columna de material, la presión en el fondo del silo tiende a un valor de saturación. Imagen tomada de la referencia [3].

Para determinar la presión dentro del silo Janssen se vio en la necesidad de es-

tablecer una nueva expresión distinta a la de un líquido, puesto que la interacción disipativa entre los granos influye de manera importante en la transmisión de la presión. Con esto en cuenta se postula la ecuación

$$P = \frac{s^3\gamma}{4K} \left(1 - e^{4K\frac{x}{s}},\right) \quad (2.15)$$

donde s corresponde a la parte lateral del contenedor que confina al material granular y γ es el peso específico del mismo, mientras que $K = \frac{p_s f}{p}$, con p = presión vertical de los granos, p_s = presión horizontal de los granos y f = coeficiente de fricción entre los granos y las paredes del contenedor. Note que ésta relación presenta una dependencia particular con la altura de la columna del grano contenido x . La eq. (2.15) nos dice que, conforme aumenta la altura de la columna granular la presión en el fondo incrementa hasta llegar a un punto de saturación. Tal comportamiento lo podemos apreciar en la figura 2.8 donde los puntos corresponden a los experimentos realizados por Janssen y la línea continua al comportamiento predicho de la ecuación anterior.

En la descarga de silos se observa justamente una manifestación del efecto Janssen. El material granular contenido en el silo ejerce una fuerza hacia las paredes del contenedor, mientras que las paredes responden en consecuencia de esta acción creando una red de esfuerzos que sostienen de manera parcial el peso de la columna granular, provocando que, cuando descargamos el material, el flujo de descarga sea constante debido a que gran cantidad de la fuerza ejercida por la columna granular es distribuida hacia las paredes.

2.2.3 Descarga a través de un orificio: Ley de Beverloo

El estudio de la descarga de silos ha sido un tema de interés desde hace ya mucho tiempo. De entre los primeros trabajos en este ámbito, podemos resaltar los de R. Fowler y Glastonbury [29], quienes presentaron resultados experimentales sobre la descarga de silos y una revisión detallada sobre el tema, además de proponer una expresión para el caudal de descarga de silos. Se encontró que algunos de los posibles factores que podrían influir en el flujo de sólidos granulares secos, eran, el diámetro del orificio, el diámetro del contenedor, el diámetro de las partículas, la densidad efectiva del medio granular y la forma del orificio.

No fue sino hasta 1960, sin embargo, que W.A. Beverloo, H.A. Leniger y J. Van De Velde [9], efectuarían una nueva serie de experimentos sistemáticos, y los compararían con los trabajos de Fowler y Glastonbury, buscando proponer una nueva expresión generalizada para el flujo de descarga de un material granular en un silo cilíndrico.

En sus experimentos, observaron que el diámetro del cilindro no tiene ninguna influencia en el flujo de descarga, siempre y cuando las dimensiones del silo son lo suficientemente grande en comparación con el tamaño del orificio de descarga. Además, debido a que utilizaron orificios con distinta geometría, se dieron cuenta que éste parámetro tampoco era un factor que influyera crucialmente en la descarga del material. Una larga serie de mediciones y análisis de datos los llevó a proponer y verificar una nueva expresión para el caudal de descarga $Q = \Delta M(t)/\Delta t$ (masa por unidad de tiempo), que sólo depende del tamaño del orificio de descarga y el tamaño promedio del grano, a saber

$$Q_g = c\rho\sqrt{g}(D - kd)^{5/2}, \quad (2.16)$$

donde D es el tamaño del orificio, d el tamaño promedio de las partículas granulares utilizadas, c y k constantes de proporcionalidad, ρ la densidad de bulto y g el valor de la gravedad. Esta expresión es conocida como la Ley (o correlación) de Beverloo [9].

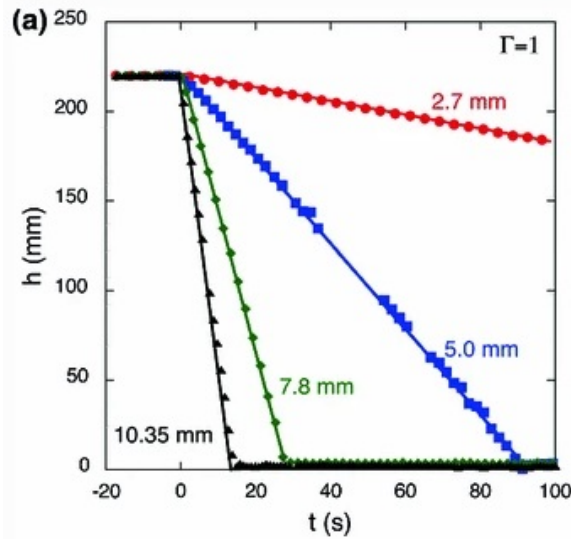


Figura 2.9: Cambio de la altura $h(t)$ de perlas de vidrio como función del tiempo, durante un proceso de descarga a través de un agujero en el fondo con tamaño variable ($2.7\text{mm} - 10.35\text{mm}$). Note que, independientemente del tamaño de la apertura, el perfil lineal de descarga es el mismo, sin embargo, al incrementar el valor del diámetro del orificio, el tiempo de descarga disminuye, ilustrando así la validez de la correlación de Beverloo. Imagen tomada de la referencia [30].

En esta relación empírica, no existe una dependencia con la altura de la columna

de material almacenado, y sólo presenta una dependencia en el tamaño del grano d y el tamaño del orificio de descarga D . En otras palabras, a diferencia de un líquido, el flujo de un material granular es constante e independiente de la altura de la columna del material restante en el contenedor. Si graficamos el cambio de la altura en el tiempo tendremos un comportamiento lineal tal y como se ilustra en la figura 2.9. Vemos cómo al incrementar el tamaño del orificio utilizado, el tiempo total de descarga se reduce, sin embargo, se registra un perfil de descarga lineal para todos los valores de D .

En la literatura existen gran cantidad de trabajos numéricos y experimentales donde logran describir en buena manera la razón de flujo de descarga mediante la ecuación (2.16). En las condiciones donde las dimensiones del silo son lo suficientemente grandes para no afectar la descarga, se ha comprobado que la relación de Beverloo funciona en buena manera, sin embargo cuando el tamaño del orificio de descarga es muy pequeño, se han encontrado en la necesidad de introducir un parámetro de ajuste para lograr que la relación de Beverloo logre reproducir los resultados experimentales. A raíz de este problema, C. Mankoc *et.al.* [11] proponen una nueva expresión determinada de manera empírica para la razón de flujo de descarga

$$W = C\sqrt{g\rho}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-b(D-d)}\right](D-d)^{n+1/2}, \quad (2.17)$$

donde, C y b son constantes de ajuste, g es la gravedad, D y d corresponden al tamaño del orificio y de grano respectivamente, ρ es la densidad de bulto y n está asociado con la dimensión del sistema. Con este nuevo modelo logran disminuir la disparidad entre la parte numérica y los resultados experimentales para tamaños de orificio pequeño. Una importante diferencia con el expresión de Beverloo (2.16) es que, la razón de flujo se anula justo cuando el tamaño del orificio de descarga iguala al tamaño de la partícula. Sin embargo, se sigue manteniendo la dependencia con el tamaño de grano d utilizado durante el proceso de descarga y el tamaño de la apertura D .

Por otra parte, cuando el tamaño de la apertura es muy grande comparado con el tamaño del las partículas, el flujo de descarga es interrumpido debido a que justo en la parte superior de la apertura se crean estructuras lo suficientemente estables que interrumpen el paso de las partículas provocando un atascamiento en el silo. Estas estructuras son conocidas como arcos. Los arcos son configuraciones que se presentan en los medios granulares, los cuales son responsables de que el estrés entre las partículas se propague de manera no uniforme [31]. Este tipo de estructuras son consideradas altamente estables, sin embargo,

cuando una de las partículas que constituye el arco es removida, éste colapsa debido al efecto de la gravedad y el flujo de descarga se reanuda. Sin embargo, estudios estadísticos indican que, cuando la razón entre el tamaño de la apertura y el tamaño de las partículas aumenta, es decir D/d es grande, la probabilidad de formación de arcos que obstruyan el flujo disminuye [10].

El efecto de atascamiento ha sido un gran problema para la descarga de silos, por esta razón se ha optado por buscar alternativas que proporcionen un arreglo a este conflicto. Una de estas soluciones es someter el sistema a vibraciones [32], facilitando con esto el movimiento de las partículas durante la descarga. Sin embargo, a pesar de esta alteración, el problema de formación de arcos persiste, pero de manera menos recurrente. Otra alternativa que se ha planteado para la solución de éste problema es, el introducir un obstáculo justo en la parte superior de la apertura, ya que estudios experimentales han registrado un incremento en el flujo de descarga [33], sin embargo, la posición del obstáculo es crucial, ya que si no es colocado en el punto correcto se obstruye el paso del material a través de la apertura, y con esto alentando en gran medida el proceso de descarga. Al hacer esto, se tiene una menor probabilidad de atascamiento debido a una reducción de la presión en la región donde se forman los arcos. Aunque aún no se ha logrado resolver por completo el problema de atascamiento, se ha reducido en buena manera la probabilidad de que ocurra.

Como se discutió en la *sección* 2.1.3, para un fluido newtoniano contenido en un recipiente, la velocidad de descarga a través de un orificio en el fondo presenta una dependencia con la altura de la columna del líquido h , tal y como lo predice la ecuación de Torricelli. Por otra parte, el efecto Janssen se considera el responsable de que el flujo de descarga de grano seco a través de un orificio en el fondo no presente una dependencia con altura de la columna del material como el caso hidrostático, sino que sea constante tal y como lo indica la ecuación de Beverloo.

A pesar de las diferencias entre el flujo de líquidos y granos, existe un enfoque para modelar la descarga de un silo como un fluido plástico continuo [34]. Haciendo esto, se demostró que para valores bajos del coeficiente de fricción se obtiene un comportamiento similar al de un fluido, donde toma importancia la altura de la columna del fluido durante el proceso de descarga. En contraste con esto, para valores grandes del coeficiente de fricción, se obtiene un comportamiento similar al de la descarga de grano, donde la razón de flujo es constante durante la descarga.

Para demostrar lo anterior, L. Staron et. al. realizaron simulaciones de dos fluidos con características y propiedades diferentes, los cuales, se encontraban confinados en un silo bidimensional. Un primer fluido de alta densidad y caracterizado por un coeficiente de fricción interna, fue asociado al medio granular, mientras que un segundo fluido con densidad y viscosidad baja representaba el espacio intersticial. Con estas simulaciones, dedujeron que, la principal diferencia entre la descarga de un fluido y la descarga de un material granular se encuentra en el valor del coeficiente de fricción [34].

2.3 Descarga de la mezcla de grano y agua a través de un orificio.

Hasta ahora, hemos discutido cómo describir el proceso de descarga de materia granular seca de un silo a través de un orificio en el fondo. Vimos que el flujo de descarga no depende de la altura de la columna granular, y éste puede ser descrito usando la ecuación de Beverloo (2.16). Por otro lado, para el caso de un fluido no compresible y no viscoso, la velocidad de descarga presenta una dependencia con la altura de la columna del fluido contenido en el silo, tal como lo describe la ecuación de Torricelli (2.11). Cabe entonces preguntarse ¿qué pasa si descargamos éstos dos materiales (granos y líquido) de manera simultánea?

2.3.1 Descarga de silos sumergidos

Una propuesta para estudiar la descarga de un silo con grano donde el medio intersticial está cubierto por agua es la planteada por T. Wilson et. al. En 2014, estudiaron la descarga de perlas de vidrio de un silo completamente sumergido en agua [13]. Utilizaron silos cilíndricos transparentes tapados de la parte superior y con un fondo reemplazable, de tal manera que les permitía variar el tamaño del orificio de descarga. La parte superior del silo contaba con una apertura de tal manera que el agua pudiera reemplazar el volumen de granos perdidos durante la descarga. Todas sus mediciones fueron realizadas con el sistema completamente sumergido en agua en un acuario de gran tamaño. Encontraron una inesperada dependencia del flujo de descarga con la altura de la columna del material, en contraste con la descarga de grano seco que sólo depende del tamaño del grano y del tamaño de la apertura del orificio.

Para tratar de describir este hecho, los autores propusieron un modelo basado en una modificación a la ecuación de Beverloo, de tal manera que lograra tomar en cuenta el medio intersticial en el cual se realiza la descarga [13]. Dicha modificación consiste en reemplazar el término de la gravedad g en la ecuación 2.16 por la velocidad terminal de caída de un solo grano en agua, v_t , dando como resultado

$$W_0 = c\rho v_t(D - kd)^2. \quad (2.18)$$

Con esta modificación a la ecuación de Beverloo, lograron describir satisfactoriamente la descarga de una mezcla de granos y agua en un silo sumergido, para distintos tamaños de granos y dos medidas diferentes de orificios de descarga. Esto se ilustra en la figura 2.10.

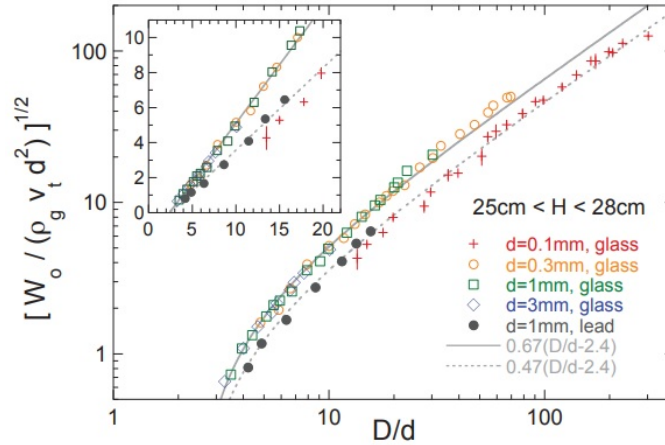


Figura 2.10: Razón de descarga de masa *vs* función del tamaño del orificio D en un silo sumergido. Los diferentes símbolos se asocian con el tamaño de grano utilizado en cada descarga, mientras que las líneas punteadas y continuas pertenecen al modelo sugerido. Imagen tomada de la referencia [13].

Para tratar de explicar qué es lo que pasa en este tipo de sistemas, se han realizado estudios tanto experimentales como numéricos para la descarga de silos completamente sumergidos en agua [16]. Cuando se descargan granos en el aire, no es necesario tomar en cuenta el espacio intersticial debido a que la densidad y viscosidad del aire se consideran despreciables. Sin embargo, cuando esta misma descarga es realizada en un sistema completamente inmerso en agua, se ve la necesidad de tomar en cuenta la interacción entre el líquido y los granos. Para esto, se propone un modelo en el cual se considera la parte líquida como un continuo, utilizando el método de Dinámica de Fluido Computacional [35]. Por

otra parte, para describir el medio granular, se aplica el Método de Elemento Discreto [36] donde, éste se considera como un conjunto de partículas discretas. Empleando este modelo lograron aproximar las simulaciones de una manera precisa a sus experimentos, mediante, el ajuste del factor de fricción de contacto partícula-partícula, tanto para el caso seco como el sumergido. En el sistema sumergido se requirió un menor valor de este factor que en la descarga en aire, lo cual nos indica que, cuando los granos se encuentran sumergidos en agua, la fuerza de fricción entre las partículas disminuye en comparación con el caso seco, favoreciendo la movilidad de las partículas durante la descarga [16].

Además, al analizar el comportamiento del flujo de descarga, observaron algo imprevisto para el caso sumergido. Como era de esperarse, para la descarga de grano seco el flujo de descarga es constante en todo momento, como lo apreciamos en la figura 2.11. Sin embargo, al analizar el caso sumergido, obtuvieron un comportamiento similar al antes mencionado, pero en la parte final de la descarga observaron un incremento inesperado del flujo (ver figura 2.11), no obstante, se percataron que este incremento podía ser eliminado controlando el flujo del líquido que pasa a través del medio granular.

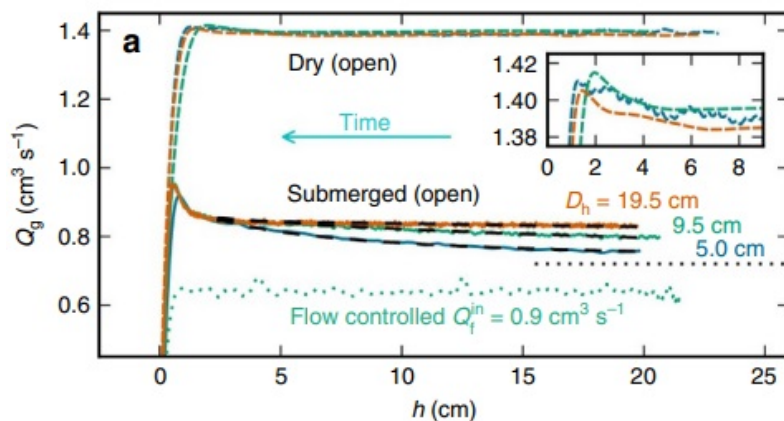


Figura 2.11: Flujo de descarga *vs* altura restante de granos en el silo para distintas condiciones. Apreciamos cómo el flujo de descarga es constante, sin embargo, al final de la misma se registra un incremento en tal magnitud. Imagen tomada de la referencia [17].

2.3.2 Descarga simultánea de líquido y grano

De entre los diferentes estudios de descargas de material granular mojado, nos permitimos referirnos al de A. M. Cervantes-Álvarez et. al. quienes consideraron la descarga

de silo de una mezcla de granos y agua a través de un orificio en el fondo [14]. Empleando un sensor de fuerza, lograron registrar el cambio de la masa en el intervalo de tiempo de la descarga (ver figura 2.12). Así mismo, efectuaron grabaciones del cambio de la altura de las columnas de grano y agua con ayuda de una cámara de alta velocidad, con la finalidad de estudiar su comportamiento. En ese trabajo proponen un modelo empírico para describir la descarga de grano y agua.

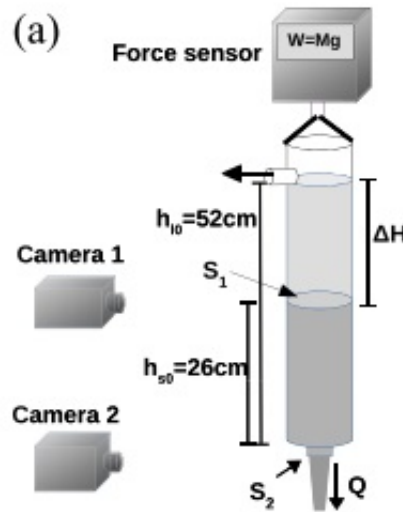


Figura 2.12: Silo cilíndrico de área transversal S_1 con abertura circular en el fondo de área S_2 lleno con granos y agua. Imagen tomada de la referencia [14].

En el trabajo de A. M. Cervantes-Álvarez et. al. replicaron los perfiles de descarga de agua, grano seco y una mezcla de ambos a través de un orificio (ver figura 2.13). Además, demostraron que la descarga de grano seco es lineal en todo momento, como también, probaron la no linealidad de la descarga de agua debido a la dependencia con la altura de la columna. Sin embargo, para la descarga de la mezcla, se registraron dos regiones: una lineal, correspondiente a la descarga de la mezcla, y otra no lineal asociada a la descarga de agua. Además, observaron que el tiempo de descarga de la mezcla es menor al tiempo del grano seco pero mayor al tiempo de descarga de agua.

Analizando la parte de las grabaciones, lograron determinar la relación entre la columna del medio granular h_s y la columna de agua h_l durante el proceso de descarga. Esto lo muestran en la figura 2.14a, donde presentan $\Delta H = h_l - h_s$ en función de h_s . Se ilustra un comportamiento lineal para todos los valores de D y d , sin embargo la pendiente

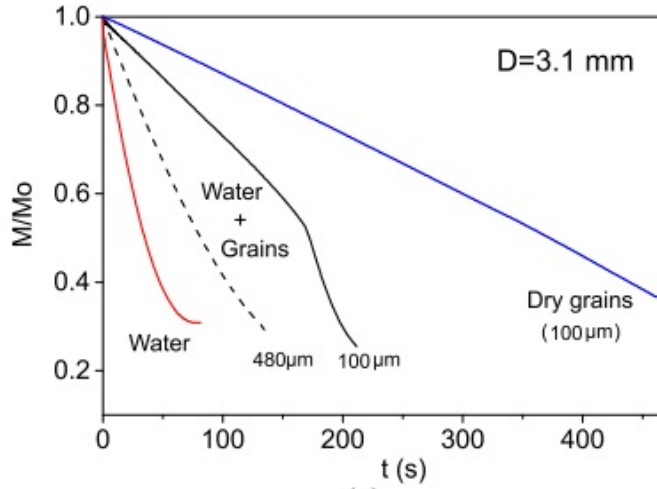


Figura 2.13: Perfiles de descarga de grano seco (línea azul), agua (línea roja) y una mezcla de grano y agua (línea negra). La descarga de grano seco es lineal, mientras que el caso de agua presenta una dependencia con la altura de la columna. Por otra parte, la descarga de grano y agua, presenta una parte inicial lineal asociada a la mezcla, y una segunda región no lineal relacionada a la descarga de agua. El tiempo de descarga de la mezcla es mayor a la descarga de agua pero menor a la descarga de grano seco. Imagen tomada de la referencia [14].

de cada una de éstas rectas sugiere un cierto patrón en su valor. Por ello, realizaron un ajuste lineal a cada una de las rectas y su pendiente se presenta en función de d/D (ver figura (2.14)b). Nuevamente obtuvieron una relación lineal, por lo que procedieron a un ajuste adicional de la forma $\Delta H = a + bh_s$ donde b es la pendiente y a la intersección con el eje. Encontraron que $b = (5.9 \pm 0.2)d/D$ y $a = 26 - 153.4d/D(cm)$. Finalmente, igualando ambas expresiones para ΔH lograron deducir que

$$h_l - h_s = a + bh_s. \quad (2.19)$$

Puesto que ambas columnas cambian en el tiempo, consideran $v_l = \frac{dh_l}{dt}$ y $v_s = \frac{dh_s}{dt}$ como la velocidad a la cual se descarga el agua y el grano respectivamente. Calculan la primera derivada temporal de la ecuación anterior y obtienen la expresión

$$v_l \approx \left(1 - 6\frac{d}{D}\right)v_s. \quad (2.20)$$

Establecen los parámetros con base en la figura 2.12, donde S_1 es el área transversal del cilindro y v_1 corresponde a la velocidad del líquido que pasa a través de la misma;

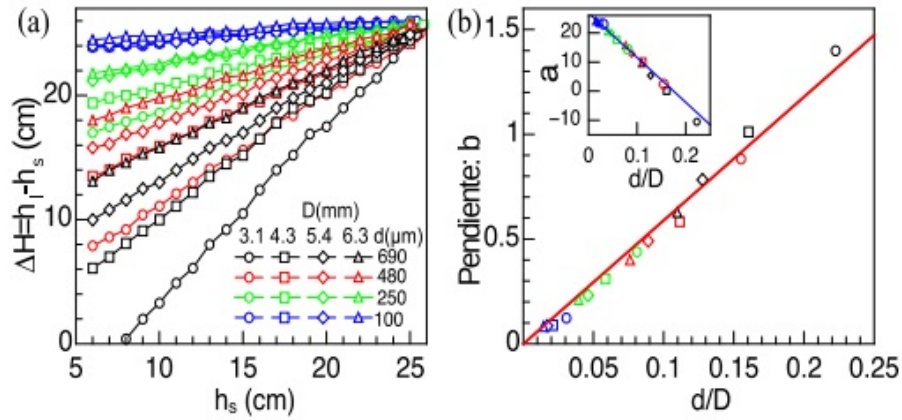


Figura 2.14: (a) Diferencia entre las alturas de las columnas de grano y agua ΔH en función de h_s para distintos valores de D y d . (b) Pendientes b de los ajustes lineales efectuados en la gráfica (a). Imagen tomada de la referencia [14].

$S_2 = C_d \pi D^2 / 4$ indica el área efectiva del orificio, donde C_d es el coeficiente de descarga el cual depende de la forma de la apertura y, v_2 se asocia con la velocidad a la cual se descarga el líquido. Basados en este sistema y los parámetros mencionados, establecen un modelo para la descarga de líquido utilizando la ecuación de continuidad $S_1 v_1 = S_2 v_2$ y combinado con la ecuación de Bernoulli $\rho_l g h_l = \frac{1}{2} \rho_l (v_2^2 - v_1^2)$. Integran $h_l(t)$ y obtienen una expresión para la descarga de agua:

$$M_l = \rho_l S_1 \left(\sqrt{h_{l0}} - \frac{1}{2} S_2 \sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2} t} \right)^2. \quad (2.21)$$

donde, ρ_l es la densidad de la agua, S_1 el área transversal del contenedor, S_2 el área del orificio de salida, h_{l0} es la altura inicial del líquido, g la gravedad y t la variable temporal.

Por otra parte, para modelar la descarga de la mezcla de grano y agua consideran al medio granular como un medio poroso. La ley de Darcy [37] relaciona el flujo volumétrico Q_v con la caída de presión ΔP existente entre los extremos del medio poroso, la permeabilidad k , la viscosidad del fluido μ , el área del medio poroso S_1 y con el espesor de la capa porosa h_s de la forma:

$$Q_v = \frac{k S_1}{\mu h_s} \Delta P. \quad (2.22)$$

La ley de Darcy es una relación empírica que describe el flujo a través de medios porosos estáticos. Sin embargo, el hecho de considerar que el medio granular asume el rol

del medio poroso, es necesario considerar que cambia su volumen durante el proceso de descarga, es decir, un medio poroso dinámico. Al tomar en cuenta lo anterior, y además, asumiendo que $v = Q_v/S_1$ logran establecer la relación

$$\Delta P = \frac{\mu}{k} h_s(t) v. \quad (2.23)$$

La permeabilidad k , corresponde a la capacidad del medio poroso de permitir que cualquier fluido pase a través de él sin que se perturbe. Este término lo obtienen con la ecuación de Kozeny-Carman $k \approx d^2 \epsilon^3 / 180(1 - \epsilon)^2$. La permeabilidad depende del diámetro de las partículas que forman el medio d y de la porosidad ϵ ; este último término está relacionado con el factor de empaquetamiento ϕ de la forma $\epsilon = 1 - \phi$. Por lo tanto logran establecer la diferencia de presión como

$$\Delta P = 180 \frac{\mu(1 - \epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3} h_s(t) v. \quad (2.24)$$

Aplican el principio de Bernoulli al líquido que fluye a través del medio poroso moviéndose con velocidad v_l a través del área S_1 y con una velocidad v_2 a través de la apertura, entonces

$$\rho_l g h_l - \Delta P = \frac{1}{2} \rho_l (v_2^2 - v_l^2). \quad (2.25)$$

El primer término de la ecuación representa la presión hidrostática, donde aparece la densidad del líquido ρ_l , la gravedad g y la altura de la columna del líquido h_l . El segundo término corresponde a la diferencia de presión generada por la resistencia hidrodinámica. Además, el término de la derecha indica el cambio en la presión cinética del sistema donde v_l corresponde a la velocidad del líquido, v_2 a la velocidad a través del área S_2 y ρ_l a la densidad del líquido. Finalmente, se incluyen la expresión (2.24) tomando en cuenta la velocidad relativa entre la velocidad del líquido y el grano, y con esto obtienen:

$$\rho_l g h_l - 180 \frac{\mu(1 - \epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3} h_s(v_l - v_s) = \frac{1}{2} \rho_l (v_2^2 - v_l^2). \quad (2.26)$$

Efectúan una consideración en la ecuación de continuidad $S_1 v_1 = \epsilon S_2 v_2$, donde añaden el término ϵ , el cual toma en cuenta sólo el espacio disponible en el orificio de salida debido a la porosidad generada por el medio granular, y además, retoman la ecuación 2.20 que relaciona v_l y v_s . Tomando en cuenta estas dos expresiones, logran resolver la ecuación diferencial 2.26 de manera numérica para $v_2(h_l)$ y así, determinan la ecuación

$$M[h_s(t)] \approx S_1 h_s(t) [(\rho_s - \rho_l) \phi + \rho_l (1 + b)] + \rho_l S_1 a, \quad (2.27)$$

donde $h_s(t)$ la altura de la columna granular dependiente del tiempo, S_1 es el área transversal del contenedor, ρ_s y ρ_l la densidad del grano y del agua respectivamente, ϕ es el factor de empaquetamiento y, $b \approx 6\frac{d}{D}$ y $a = h_{l0} - (1 + b)h_{s0}$ donde se encuentran incluidas las dependencias en el tamaño del grano y la apertura, y las condiciones iniciales del sistema. Con ésta solución describen el cambio de la masa de una mezcla de grano y agua durante el proceso de descarga

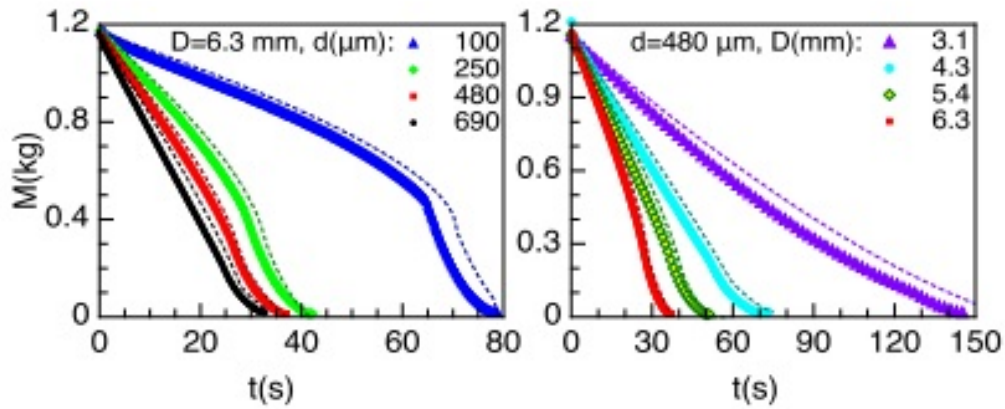


Figura 2.15: M vs t para distintos tamaños de grano d y distintos tamaños de orificios de descarga D . Los puntos corresponden a la parte experimental, mientras que las líneas punteadas corresponden al modelo teórico. Imagen tomada de la referencia [14].

Sin embargo, recordemos que las curvas experimentales registran dos comportamientos característicos (ver figura 2.15), una primera región correspondiente a la descarga de la mezcla de grano y agua, y una final, asociada con la descarga de agua. Por lo tanto, la primera parte la describen con la solución del modelo, es decir la ecuación 2.27, mientras que para la última sección utilizan la ecuación 2.21, que corresponde a la descarga hidrostática.

Con el modelo propuesto en éste trabajo logran describir de manera eficiente la descarga de la mezcla de líquido y agua a través de un orificio en el fondo tal y como se aprecia en la figura 2.15. En ésta, hacen la comparación del modelo con la parte experimental para distintos valores de D y d , en donde, podemos apreciar la eficiencia del modelo en todos los rangos establecidos.

2.4 Descarga de un silo a través de múltiples orificios.

Con lo visto anteriormente nos hemos dado cuenta que la descarga de silos con materiales monofásicos (líquido o grano seco) ha sido estudiada ampliamente, y más recientemente se han utilizado materiales bifásicos, pero todos estos trabajos han sido enfocados en la descarga a través de un solo orificio. Pero ahora, ¿qué pasa si la descarga de granos se realiza a través de dos orificios? Recientes estudios han encontrado que el flujo de descarga es dos veces el de uno solo [38]. Además, observan un cambio en el comportamiento del flujo cuando la distancia de separación de las aperturas es variada. En su trabajo de 2016

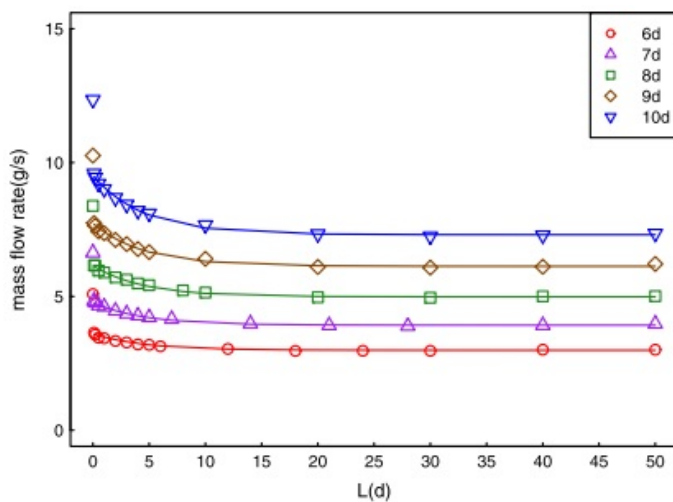


Figura 2.16: Razón de flujo para distintos valores de L y D_0 . Para valores de L grandes observamos que el flujo es constante, pero cuando $L < 20d$ se manifiesta un incremento en dicho valor, esto es, para distancias pequeñas de separación un orificio comienza a tener influencia sobre el otro durante la descarga haciendo que ésta sea más rápida. Imagen tomada de la referencia [39].

Zhang, X. et al. estudian de manera numérica la descarga de un silo cuasi-bidimensional a través de dos orificios en el fondo de tamaño D_0 y separados una distancia L [39]. Ahí determinaron que, para valores grandes de L la descarga a través de éstos es independiente, es decir que no generan ninguna influencia el uno sobre el otro, además, el flujo de descarga fue siempre el mismo. En cambio, para valores pequeños de L los dos orificios comenzaron a influir entre sí al momento de la descarga. En particular, encontraron que esto ocurre para valores menores a $L = 20d$, donde d corresponde al tamaño del grano utilizado. Esto lo

podemos observar en la figura 2.16, donde, para distancias menores a este valor observaron un aumento en el flujo de descarga para distintos tamaños de apertura.

La razón de flujo depende de la velocidad de las partículas y de la fracción de volumen sobre la salida. Al estimar los perfiles de velocidades verticales y fracciones de volumen encontraron que, las velocidades sobre la salida decrecen al incrementar el valor de L . Pero, cuando L es pequeña se genera una zona de interacción sobre los dos orificios donde las partículas son aceleradas y la interacción entre estas es más débil, manifestando un aumento en el flujo de descarga (figura 2.17).

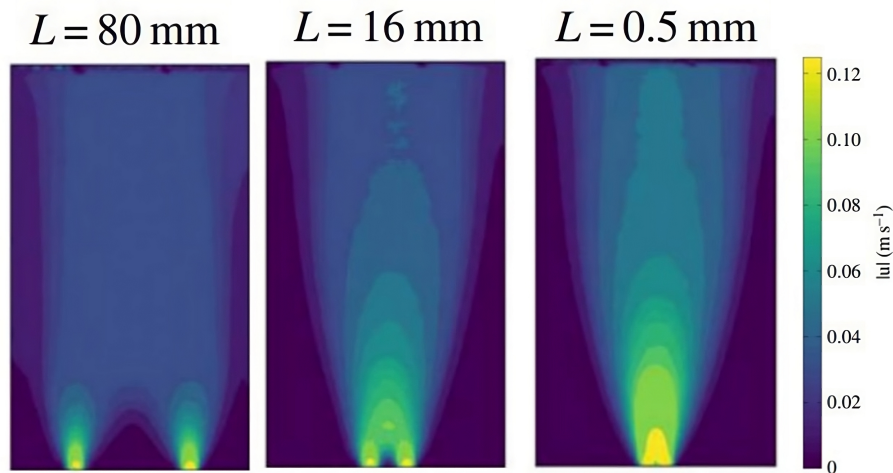


Figura 2.17: Magnitud del vector de velocidad media para la descarga de un silo, donde L corresponde a la distancia de separación entre las dos aperturas [38]. Cuando el valor de L se vuelve muy pequeño se replica el perfil de velocidad de descarga de un solo orificio pero de mayor magnitud a las dos aperturas iniciales. Imagen tomada de la referencia [38].

El hecho de que se observe un incremento del flujo para distancias de separación muy pequeñas entre las aperturas nos podría indicar que ocurre algún cambio entre las interacciones de las partículas. Como ya hemos visto, las partículas interactúan por medio de la fricción dando lugar a la formación de cadenas y arcos de fuerza, los cuales son los responsables del atascamiento de los silos al momento de la descarga a través de un orificio. Somnath Mondal. at. [40] realizaron simulaciones para estudiar la formación de arcos de fuerza en un silo de dos aperturas con diferente distancia de separación entre sí. Encontraron que, cuando los orificios se encuentran muy separados, se tiene una gran probabilidad de

formación de arcos de fuerza altamente estables tal y como ocurre en el caso de descarga por una sola apertura. Sin embargo, cuando esta distancia es muy pequeña, se generan arcos de fuerza más inestables y por periodos de tiempo cortos haciendo que la probabilidad de atascamiento del silo sea pequeña. Esta inestabilidad en los arcos de fuerza a distancias de separación pequeñas facilita el flujo del material a través de las aperturas.

Capítulo 3

Objetivos

Objetivo general

Estudiar la descarga simultánea de una mezcla de grano y agua contenidas en un silo de forma cilíndrica, buscando observar el efecto que produce el número de orificios empleados durante el proceso de descarga.

Objetivos particulares

- Analizar la relación que existe entre el flujo y el tiempo total de descarga para distinto número de orificios.
- Estudiar la relación entre el flujo y el número de orificios utilizados en la descarga.
- Establecer las condiciones necesarias de optimización para la descarga de un silo.
- Estudiar el efecto del tamaño de grano en la descarga de un silo con más de un orificio.

Hipótesis:

La hipótesis sobre la que enfocamos nuestra investigación y que trataremos de demostrar en esta tesis es la siguiente:

El flujo simultáneo de líquido y granos disminuye al aumentar el número de orificios, y el efecto se ve incrementado para granos más pequeños porque la mezcla adopta un comportamiento de fluido no-Newtoniano tipo shear-thickening. Esto se debe probablemente a que la viscosidad efectiva de la mezcla se incrementa cuando la razón de deformación del medio aumenta.

Aunque la viscosidad de la mezcla no será determinada experimentalmente, esta se determinará de un modelo matemático que será desarrollado para describir la descarga. Dicho modelo considerará la Ley de Darcy para medios porosos para determinar la caída de presión a través del lecho granular considerando la permeabilidad dada por la ecuación de Kozeny-Carman, la ecuación de Bernoulli para fluidos incompresibles y la conservación de la masa.

Capítulo 4

Desarrollo experimental: Descarga simultanea de líquido y granos a través de varios orificios

En este capítulo, presentamos nuestro estudio sobre la descarga de una mezcla de material granular y agua a través de múltiples orificios en el fondo de un silo cilíndrico. Por claridad, discutimos primero la descarga de materiales monofásicos (i.e., líquido puro y granos secos) y, posteriormente, consideramos la descarga de una mezcla bifásica (fase líquida y fase granular) y analizamos los casos $N = 1$ hasta $N = 4$, en donde N indica el número de orificios utilizados para la descarga. Examinamos el efecto que tiene el número de orificios sobre la razón de flujo, tanto para la descarga de un material monofásico como para un bifásico. Finalmente, adaptamos un modelo simple para la descarga de la mezcla, que considera al medio granular como un medio poroso dinámico, y es capaz de describir cualitativa y semicuantitativamente los resultados experimentales obtenidos para múltiples orificios.

4.1 Diseño experimental

Nuestro sistema experimental consiste en un contenedor cilíndrico transparente, con un diámetro interior de 4.4 cm y 42 cm de largo. En la parte inferior de nuestro silo se colocó una tapa cilíndrica de PVC, sobre la cual trazamos un cuadrado concéntrico de $1.4 \pm$

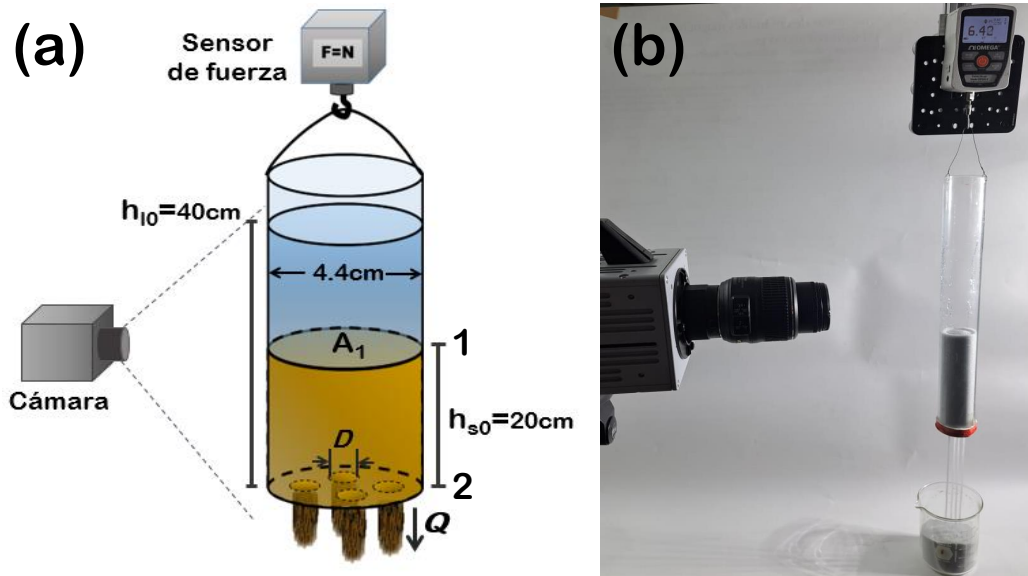


Figura 4.1: (a) Diagrama del diseño experimental: contenedor cilíndrico de 4.4 cm de diámetro y 42 cm de alto, con cuatro orificios idénticos en el fondo de diámetro D , el cual, se encuentra suspendido verticalmente de un sensor de fuerza que determina W vs t . Adicional a esto, una cámara de alta velocidad filma el proceso de descarga. $h_{l0} = 40\text{cm}$ y $h_{s0} = 20\text{cm}$ corresponden a las alturas iniciales de las columnas de agua y grano respectivamente. (b) Fotografía del montaje experimental real.

0.1cm de lado, en cuyos vértices se perforaron cuatro orificios circulares idénticos de diámetro $D = 0.5 \pm 0.1\text{cm}$. Inicialmente, los orificios fueron bloqueados con cinta para poliducto, y removidos después uno por uno para analizar la descarga para los casos $N = 1, 2, 3$ y 4. El silo fue llenado primero con agua desionizada a temperatura ambiente hasta alcanzar una altura de 20 cm y, posteriormente, se agregaron 500 g de masa de material granular (perlas de vidrio de diámetro d). Posteriormente, procedimos a agregar agua hasta alcanzar una altura $h_{l0} = 40\text{cm}$. En todos los casos, permitimos al sistema sedimentar durante un tiempo de 2 minutos antes de la apertura de orificios. Por razones que serán discutidas a continuación, el material granular fue tamizado previamente, para obtener muestras con tamaños característicos de grano en los rangos d (en μm) = 50 – 150, 150 – 250, 250 – 300, 300 – 420, 420 – 500 y 500 – 600. El proceso de descarga fue analizado suspendiendo el silo en un sensor de fuerza Mark-10 DFG-355 de manera vertical (ver figura 4.1), permitiendo monitorear el peso del sistema $W(t)$ como función del tiempo. Los datos fueron recolectados a una frecuencia de 5

Hz , con una precisión de ± 0.01 N. Un procedimiento similar fue empleado para el caso de descargas monofásicas.

Para estudiar la influencia del diámetro de los agujeros en el proceso de descarga, efectuamos experimentos adicionales. En ellos, utilizamos una mezcla compuesta por agua desionizada y granos de $d = 150-250\mu m$, considerando únicamente dos orificios y variando el tamaño D en el rango $D = 2.78, 3.1, 4.3, 5.4, 6.3, 7.94$ y 8.94 ± 0.1 mm. Éstos se encontraban en la misma posición que dos de los orificios opuestos por el vértice del cuadro trazado en los primeros experimentos.

4.2 Resultados

En la figura 4.2 se muestran los perfiles espacio-temporales formados a partir de concatenar una línea vertical de un pixel de ancho de manera consecutiva, obtenidos de las filmaciones de la descarga. Esta técnica nos permite visualizar gráficamente la evolución temporal del nivel de cada material, más adelante realizaremos un análisis numérico. En todas las imágenes utilizamos el mismo tamaño de orificio de descarga de $D \approx 5.2$ mm. Definimos t_0 como el tiempo total de descarga a través de un solo orificio (línea punteada verde) y lo tomamos como referencia para compararlo con el tiempo de descarga a través de dos (línea punteada azul) y cuatro (línea punteada roja) orificios.

Para el caso de grano seco (Fig. 4.2a) observamos que, conforme avanzamos en la línea temporal, la altura de la columna de grano seco (zona negra) disminuye de manera lineal independientemente del número de orificios que se utilicen al momento de la descarga, lo cual significa que la razón de flujo de descarga es constante. Siendo esta una representación gráfica de la ley de Beverloo (2.16). Al descargar la misma cantidad de grano seco pero a través de dos orificios simultáneamente, el tiempo de descarga es de $t_0/2$, es decir, el flujo de descarga es el doble que el caso de un orificio. Si efectuamos el mismo proceso pero ahora a través de cuatro orificios, encontramos que el tiempo se reduce cuatro veces $t_0/4$, por lo tanto, nos indica que el flujo es cuatro veces mayor que el flujo a través de un solo orificio. Analizando los tres casos anteriores podemos percibir una clara linealidad entre el flujo y el número de orificios utilizados para la descarga de grano seco.

Para el caso de la descarga de agua (Fig. 4.2b) tenemos un perfil de descarga no lineal, siendo esta una clara manifestación de la dependencia en la altura de la columna de agua al momento de la descarga, tal y como lo predice la ecuación de Torricelli 2.12.

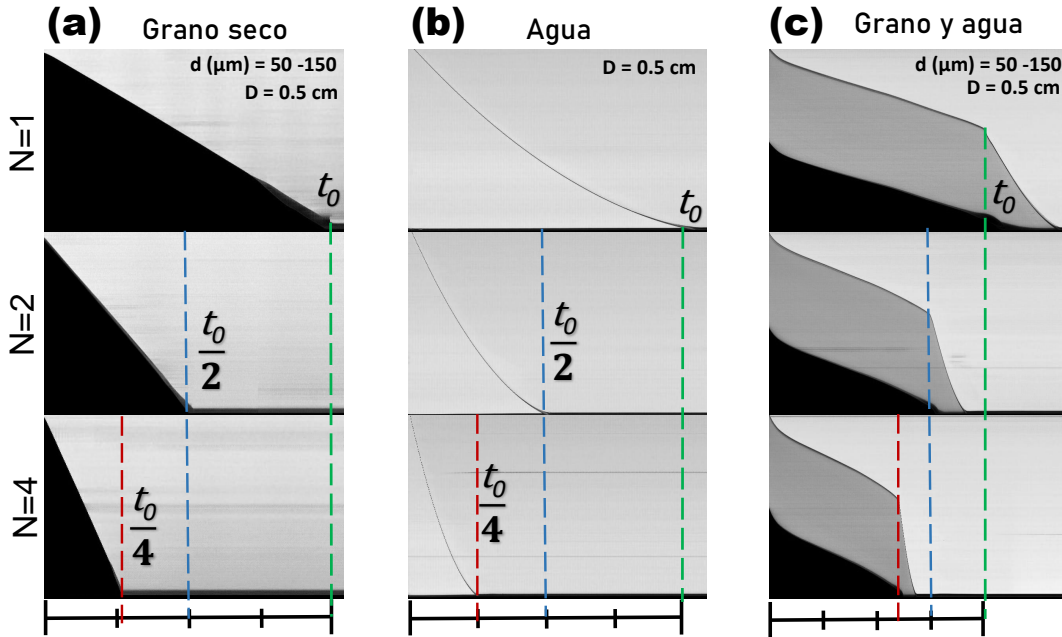


Figura 4.2: Diagramas espacio-temporales para la descarga a través de $N = 1, 2$ y 4 de (a) grano seco, (b) agua y (c) una mezcla de ambos materiales. En estos tres casos, en la parte inferior se ilustra una división equitativa de t_0 , el cual, representa el tiempo de descarga a través de un solo orificio.

Observamos en esta figura, que al igual que el caso antes mencionado, el tiempo de descarga se reduce de manera proporcional al número de orificios abiertos durante la descarga. Por lo tanto, podemos decir que, para un material monofásico (agua ó grano seco) la razón de flujo de descarga es aditiva, esto es, $Q_N = NQ_0$, donde Q_0 corresponde a la razón de flujo de descarga para $N = 1$.

En la Fig. 4.2c observamos la descarga de un material bifásico (grano y agua) (4.2c). En estos perfiles de descarga, distinguimos claramente dos líneas que van cambiando a lo largo del tiempo; la línea superior corresponde a la altura de la columna de agua, mientras que la parte más oscura describe el descenso de la columna de grano en el intervalo de tiempo. En ambas curvas podemos apreciar dos regiones diferentes: en la parte inicial un comportamiento aproximadamente lineal (descarga bifásica) y, después de este un comportamiento hidrostático (descarga monofásica). Si tomamos en cuenta solo la descarga bifásica, podemos apreciar que el tiempo de descarga para dos orificios es aproximadamente $\frac{3}{4}t_0$ y para la descarga de cuatro orificios es mayor a $\frac{2}{3}t_0$. Esto es contra intuitivo, puesto

que uno esperaría un comportamiento lineal tal y como lo vimos en el caso monofásico, sin embargo, observamos que $Q_N < NQ_0$ a pesar de utilizar orificios idénticos.

Otra manera de revisar este fenómeno con más detalle es utilizando los datos obtenidos por el sensor de fuerza. En la figura 4.3 se muestran el cambio de la masa normalizada al valor inicial de la misma, en el intervalo de tiempo correspondiente para la descarga de materiales monofásicos (a) grano o (b) agua, y bifásico (c) grano y agua. En primera instancia observamos que todas las curvas comienzan en $M/M_0 = 1$ y van decreciendo hasta llegar a cero indicando que el silo está completamente vacío. Además, los tiempos de descarga para los tres materiales son distintos, con $N = 1$, el grano seco es el que tarda mayor tiempo con $t = 78$ s. Por otra parte, el que tarda menor tiempo es el agua con un valor de $t = 22$ s. Sin embargo, si en la descarga de la mezcla consideramos solo la parte bifásica, tenemos un tiempo de $t = 44$ s. El tiempo de descarga de una mezcla de grano y agua es menor que el tiempo de descarga de grano seco pero mayor al tiempo de descarga de agua.

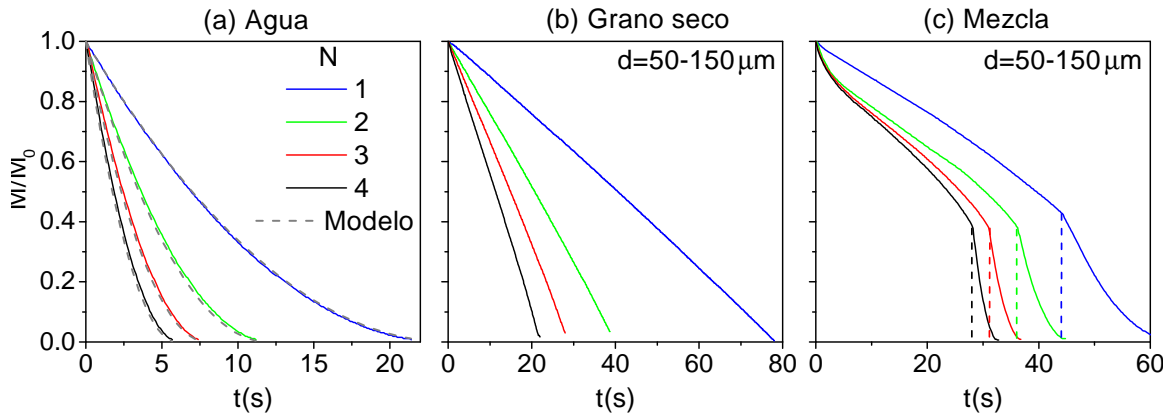


Figura 4.3: M/M_0 vs t para diferentes valores de N para la descarga de agua (a), grano seco (b) y una mezcla de grano y agua (c). Se utilizó el tamaño de orificio de $D \approx 5.2mm$ y, el grano utilizado en estos experimentos es de $50 - 150 \mu m$. En (a) se manifiesta la dependencia en la altura de la columna de agua durante la descarga al registrar un perfil no lineal que puede ser descrito por la ecuación (4.1) (línea punteada gris), mientras que en (b) observamos un perfil de descarga lineal. En (b) se presentan dos regiones: una lineal inicial asociada a una descarga bifásica, y una segunda no lineal correspondiente a una monofásica (agua).

Ahora bien, analicemos cómo es el tiempo de descarga cambiando el valor de N . Cuando realizamos la descarga de agua (Fig. 4.3a) registramos unos tiempos de $t_1 \sim 22$ s, $t_2 \sim 11$ s, $t_3 \sim 7$ s y $t_4 \sim 5.5$ s para $N = 1, 2, 3$ y 4 respectivamente. Note que, el tiempo total de descarga depende del número de orificios utilizados N y siguen la relación $t_N \approx t_1/N$, donde t_1 es el tiempo para un solo orificio. La descarga de agua puede ser descrita considerando Eq. (2.13) para calcular la masa de líquido restante en el silo como función del tiempo:

$$M_l(t) = \rho A_1 h_l(t) = \rho_l A_1 \left[h_0^{1/2} - \frac{A_{eff}}{2} \left(\frac{2g}{A_1^2 - A_{eff}^2} \right)^{1/2} t \right]^2, \quad (4.1)$$

donde, ρ_l corresponde a la densidad del agua, h_0 es la altura inicial de la columna, A_1 el área transversal del cilindro y $A_{eff} = C_d N \pi \frac{D^2}{4}$ es el área efectiva considerando N orificios utilizados en la descarga. Obtuvimos un valor razonable del coeficiente de descarga $C_d = 0.8$ ajustando a la curva experimental para el caso $N = 1$, y este mismo valor fue utilizado para $N = 2, 3, 4$. El coeficiente de descarga depende de la forma del orificio, en el caso ideal donde su forma es perfecta $C_d = 1$, pero para casos reales el valor de éste coeficiente es menor, y el que nosotros registramos es razonable para el tipo de aperturas que utilizamos, basados en los valores que típicamente se utilizan en ingeniería [41]. En la figura (4.3a) (agua), se aprecia como la solución numérica (línea discontinua) se sobrepone a la curva experimental (línea continua), confirmando con esto que la propiedad aditiva del flujo puede ser usada para modelar adecuadamente la descarga.

Para el caso de la descarga de grano seco (4.3b), en primera instancia notamos que el proceso de descarga es lineal para todos los valores de N . Estas rectas pueden ser descritas por la expresión $M/M_0 = 1 - Qt$ donde Q es el flujo de descarga. Podemos notar que $t_1 \sim 80s$, $t_2 \sim 40s$, $t_3 \sim 28s$ y $t_4 \sim 20s$. Nuevamente podemos apreciar que $t_N \approx t_1/N$. Al igual que el caso del agua, el flujo de descarga aumenta de manera lineal con el número de orificios, esto es, $Q_N = M_0/t_N \approx NQ_1$.

La figura 4.3c nos ilustran el comportamiento para el caso de la mezcla, la cual se distingue por una primera región lineal correspondiente a la descarga bifásica, y una segunda región no lineal asociada a la descarga monofásica. La transición entre estas dos regiones lo podemos apreciar por un cambio abrupto en cada una de las curvas. En este caso, claramente no se cumple que el tiempo de descarga disminuya de manera linealmente proporcional al número de orificios. Este comportamiento fue comprobado para distintos

tamaños de grano como se observa en la Fig. 4.4. En primera instancia, podemos apreciar una clara disminución del tiempo de descarga al incrementar el tamaño de grano utilizado. Por ejemplo, para el caso de un solo orificio, el tiempo que le toma al grano más pequeño en descargarse por completo es $t \approx 60$ s, sin embargo, el tiempo total de descarga para el grano más grande es de $t \approx 40$ s, es decir, hubo una diferencia de 20 s entre el grano de menor tamaño con el más grande. La razón de esta reducción temporal es que, al utilizar un tamaño de grano mayor, el espacio intersticial entre los granos aumenta, provocando que una mayor cantidad de agua fluya a través de los granos y por ende, aumente el flujo de descarga de todo el material.

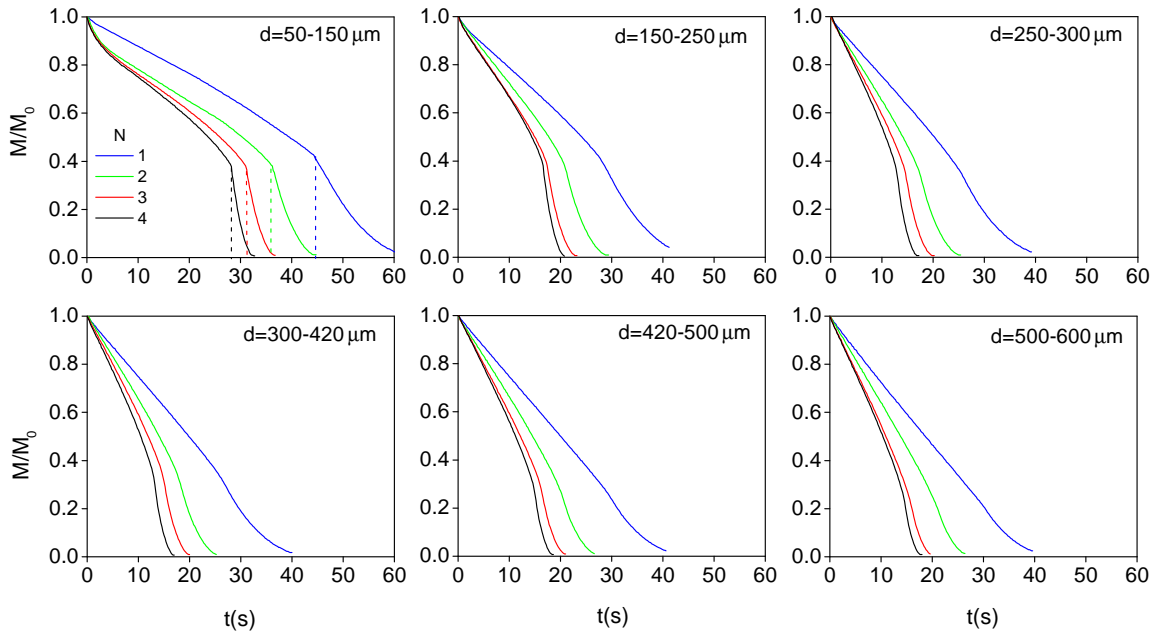


Figura 4.4: Cambio de masa en función del tiempo para todos los tamaños de grano utilizados en este trabajo. Las curvas azules, verdes, rojas y azules describen la descarga para uno, dos, tres y cuatro orificios respectivamente. Diámetro de orificio se mantuvo constante (5.2 mm)

Pero ahora analizamos qué es lo que ocurre cuando utilizamos varios orificios en la descarga. Sería razonable suponer que al utilizar N orificios, el tiempo total se reduzca a t_0/N , pero, de las gráficas vemos que no ocurre eso. Tomamos como ejemplo el tamaño de grano de $50 - 150 \mu m$ y consideramos sólo la descarga bifásica. Para $N = 1$ tenemos un tiempo de 44s; al realizar la misma descarga para $N = 2$ nosotros esperaríamos un tiempo

de 22s, sin embargo, se mide un tiempo de 38s; si ahora tomamos $N = 3$, el tiempo esperado es de 14.6s pero registramos un tiempo de 32s; para $N = 4$, esperamos un tiempo de 11s y registramos un tiempo de 28s. Podemos observar que el tiempo esperado es menor que el tiempo medido. Este mismo efecto, lo podemos apreciar para todos los tamaños de grano.

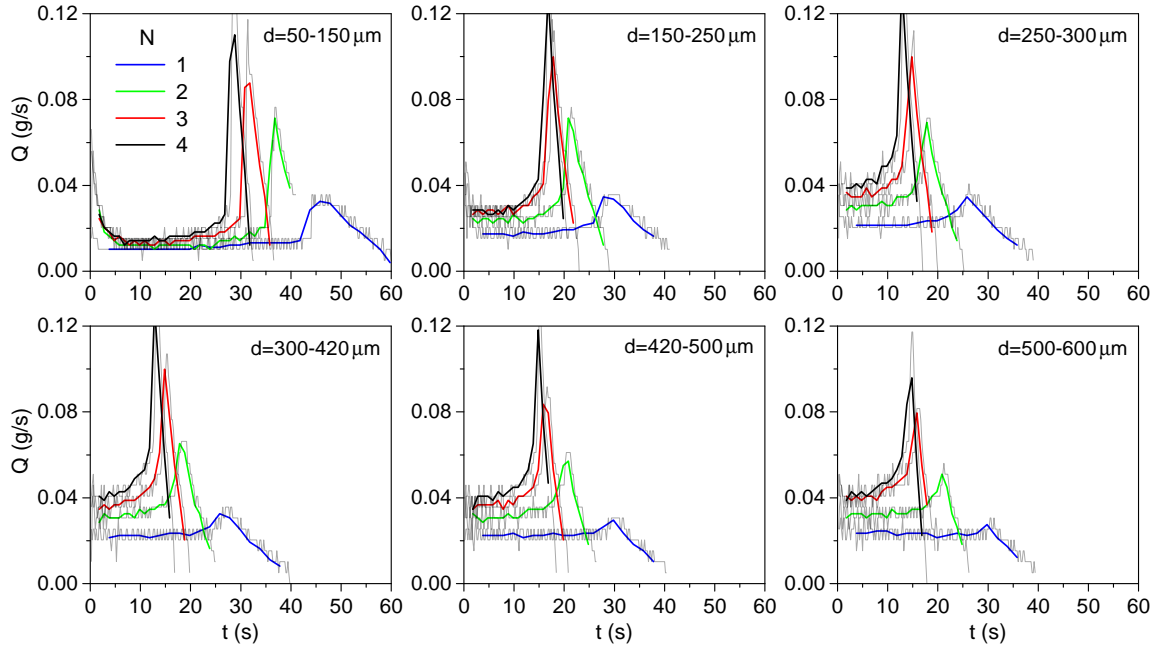


Figura 4.5: Flujo de descarga en función del tiempo para todos los tamaños de grano y los distintos números de orificios idénticos de diámetro $D = 5.2mm$ utilizados en la descarga. Estas figuras son obtenidas a partir de las gráficas (4.4). Las líneas de color gris corresponden a la primera derivada mientras que las líneas más marcadas fueron obtenidas de acuerdo a la relación $\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Otra manera de analizar nuestros resultados es conociendo el comportamiento del flujo Q (ver figura 4.5), el cual, lo obtenemos de la primera derivada de la figura 4.4. Las líneas de color gris corresponden a la primera derivada calculada de manera numérica, mientras que las líneas de color, corresponden a la derivada calculada como razón de cambio, esto es $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ para intervalos de tiempo pequeños. Podemos apreciar, cómo los flujos obtenidos por los dos métodos se sobrepone uno sobre el otro. Dicha comparación permite mostrar que el ruido obtenido en el caso de las derivadas proviene de la frecuencia de muestreo de 5 Hz. Si esta incrementara a 10 hz, por ejemplo, las derivadas presentarían menos ruido; no obstante, esto no fue posible debido a limitaciones técnicas del sensor de fuerza. En las

gráficas de Q vs t (figura 4.5), note el comportamiento constante del flujo para la parte de la descarga bifásica, mientras que, la parte monofásica, es descrita por una recta de pendiente negativa. La transición entre estas dos fases la podemos apreciar por un incremento abrupto en cada una de las curvas. Si centramos nuestra atención sólo en la parte constante (descarga bifásica), logramos apreciar un incremento en el flujo al aumentar N . Sin embargo, al reducir el tamaño de grano, el incremento del flujo es menor, como es el caso del grano de menor tamaño (50-150 μm). Otra observación importante es que los flujos de descarga para $N = 3$ y $N = 4$ son muy similares entre si, indicando que tardaríamos solo un poco más de tiempo en descargar el material a través de 4 orificios comparado con tres orificios. Esto es, el tiempo de descarga tiende a saturar conforme aumenta el número de orificios.

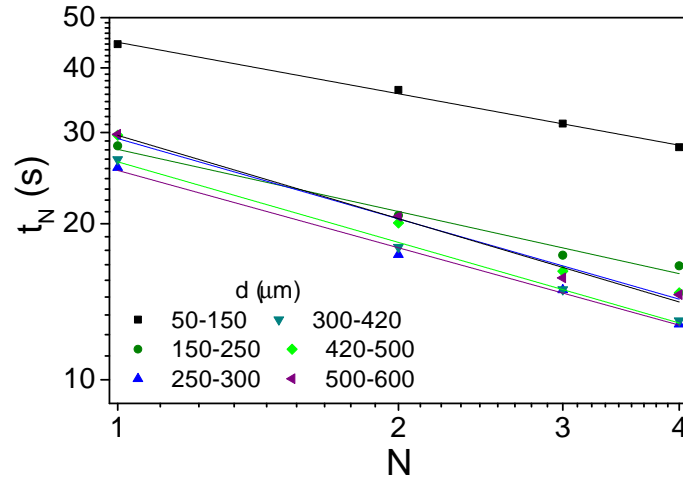


Figura 4.6: Gráfica en escala logarítmica del tiempo de descarga de la parte bifásica t_N en función del número de orificios N . Los puntos corresponden a los datos obtenidos para los distintos tamaños de grano y las líneas continuas corresponden a un ajuste en ley de potencia, que en esta escala se presenta como líneas.

La figura (4.6) muestra el tiempo de descarga de la parte bifásica en función del número de orificios N para todos los tamaños de grano. La presencia de líneas rectas en la escala logarítmica indica una dependencia en ley de potencias de la forma $t_N = t_1/N^b$ con t_1 y b constantes. Del ajuste realizado registramos que $b = 0.33$ para los granos más pequeños (50-150 μm), $b = 0.39$ para los granos de 150-250 μm y para tamaños de grano mayor a $d > 250\mu m$ registramos un valor casi constante de $b \sim 5$. Podemos notar que los valores más altos del tiempo de descarga t_N están asociados con el tamaño de grano más pequeño.

Después, los valores de t_N disminuyen como función del tamaño de grano d . Sin embargo, una vez que d alcanza valores mayores a $275\mu m$ la tendencia se revierte y los valores de t_N alcanzados para estos tamaños de grano empiezan a aumentar. Atribuimos este efecto a la aparición de una transición entre un régimen viscoso y un régimen inercial. El régimen inercial es aquel donde las partículas que conforman al medio granular son grandes y el líquido fluye con mayor velocidad a través de los granos permitiendo que predominen las interacciones hidrodinámicas. Por otra parte, en el régimen viscoso las partículas son tan pequeñas que la resistencia hidrodinámica producida por el flujo se vuelve dominante.

Este cambio de régimen lo podemos apreciar de una manera más clara en la figura (4.7) donde se muestra el tiempo de descarga de la parte bifásica en función del tamaño de grano d para distintos valores de N . Aquí resulta claro que, independientemente del número de orificios por el que ocurre la descarga, para los granos más pequeños ($50-150\mu m$) se registran los tiempos de descarga más grandes. La tendencia decreciente en el tiempo de descarga se mantiene hasta alcanzar el mínimo en $d = 275\mu m$, después de lo cual el tiempo de descarga aumenta hasta alcanzar una saturación para los valores de $460\mu m$ y $550\mu m$.

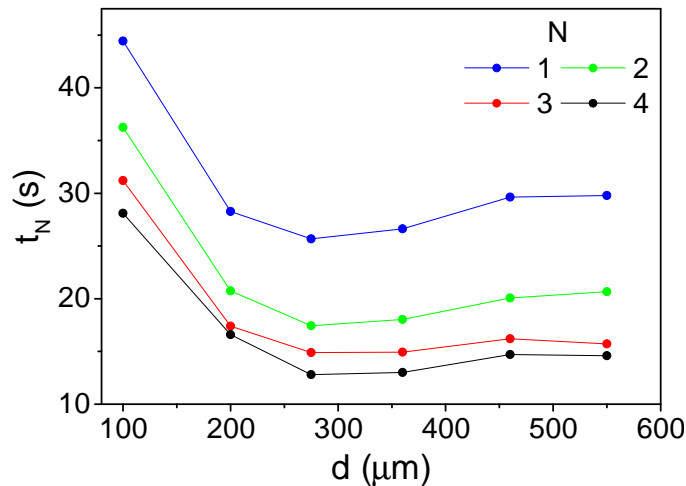


Figura 4.7: Tiempo de descarga de la parte bifásica t_N en Función del tamaño de grano d para distintos valores de N . Podemos visualizar la transición de un régimen viscoso cuando d es pequeña a un régimen inercial cuando d aumenta de tamaño.

La figura (4.8) nos muestra el flujo medio durante la descarga normalizado con el flujo medio para un solo orificio Q_1 , en función de N para todos los tamaños de grano utilizados. Para obtener cada uno de los puntos de esta gráfica, calculamos el flujo medio

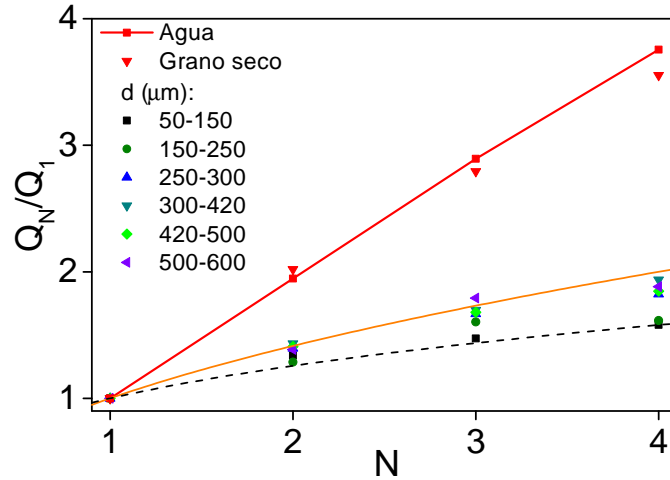


Figura 4.8: Flujo medio de descarga Q_N en función del número de orificios N . Dicha cantidad fue normalizada con el flujo de un solo orificio de descarga Q_1 . Los puntos rojos corresponden a los experimentos para el caso una descarga monofásica, mientras que el resto de los puntos corresponden a la descarga bifásica de una mezcla.

como el cambio de la masa entre el punto final y el valor inicial dividido entre el tiempo del mismo intervalo, es decir, $Q_N = \frac{\Delta M}{\Delta t} = [M_0 - M(t_N)]/t_N$. Aquí se muestran también los resultados obtenidos para el caso de la descarga de agua y grano seco, para los cuales tomamos todo el intervalo de la descarga. Estos resultados se muestran en los puntos rojos, y fueron obtenidos de las gráficas (4.3a) y (4.3b) respectivamente. Con ellos se puede confirmar la propiedad aditiva del flujo con el número de orificios para una descarga monofásica, es decir que se cumple $Q_N \approx NQ_1$. Por otra parte, para la descarga bifásica, el flujo a través de cada orificio comienza a disminuir conforme el valor de N incrementa. Este efecto es más notable cuando el tamaño del grano es más pequeño. Además se observa una saturación en el flujo total a través de N orificios en todos los casos estudiados.

De esta forma, es claro en la figura (4.8) que el flujo total de descarga para la mezcla por múltiples orificios sigue la relación $Q_N = N^b Q_1$ donde b es necesariamente menor a 1. Usando los valores obtenidos para b en la figura (4.6) podemos mostrar en la figura (4.8) que los datos obtenidos para la mezcla se encuentran en la región delimitada por $Q_N/Q_1 \approx N^{1/2}$ para el tamaño de grano más pequeño, denotado por la línea punteada color negro, y $Q_N/Q_1 \approx N^{1/3}$ para los granos más grandes, denotado por la línea color naranja.

Estudieemos ahora que sucede cuando el diámetro de los orificios D cambia de

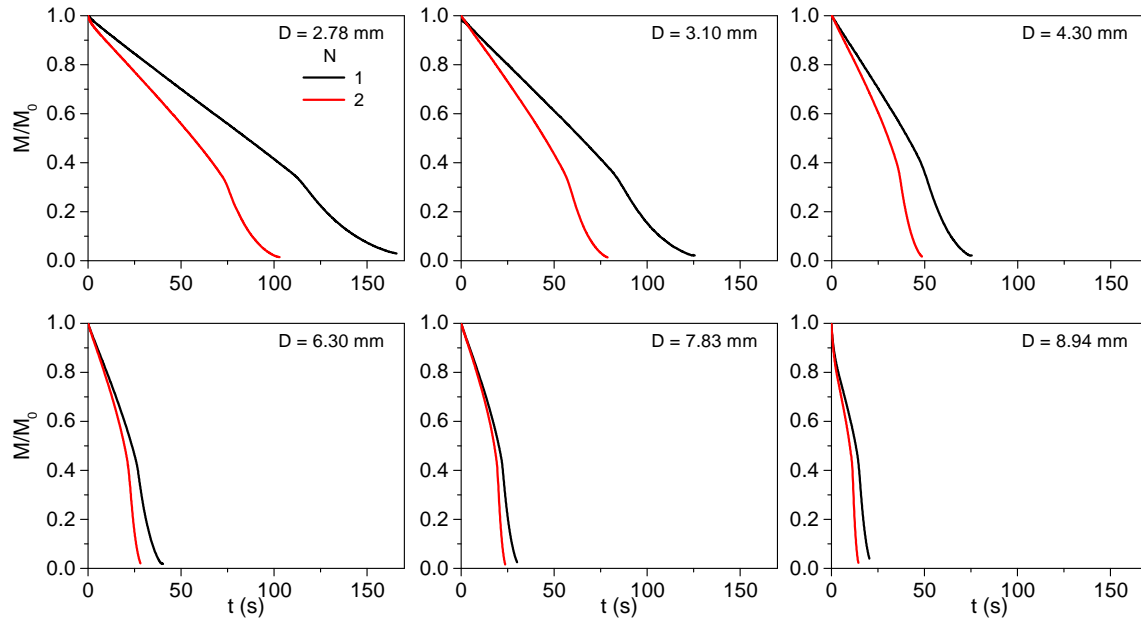


Figura 4.9: Masa en función del tiempo para distintos tamaños de orificio de descarga, con tamaños de diámetro de: 2.78, 3.1, 4.3, 5.4, 6.3, 7.94 y 8.94 ± 0.1 en unidades de mm. El tamaño de partículas utilizado fue de $150 - 250 \mu m$. La línea negra corresponde a la descarga por un orificio y la curva roja a la descarga por dos agujeros.

tamaño. La figura 4.9 muestra M/M_0 vs t para la descarga a través de uno (línea negra) y dos orificios (línea roja). El tamaño de grano se mantuvo constante ($150 - 250 \mu m$). Note que el diámetro de orificio más pequeño usado fue $D = 2.79$ mm (dado por el tamaño de la broca para perforación), debido a que para valores menores comienza a dominar la tensión superficial del agua puesto que nos aproximamos a su longitud capilar $\lambda = \sqrt{\sigma/\rho g} \approx 2.55$ mm, donde $\sigma = 0.072$ N/m, $\rho \approx 1000$ kg/m³ son la tensión superficial y densidad del fluido, y $g = 9.81$ m/s² es la aceleración de la gravedad. Cuando el diámetro del orificio es del orden de la longitud capilar, las fuerzas cohesivas dominan sobre el peso y se presenta un efecto de goteo en la descarga del fluido. Por otra parte, para el límite superior, consideramos orificios que permitan considerar al sistema como un silo, esto es D mucho menor al diámetro del contenedor.

Podemos notar en la Fig.4.9 que la descarga a través de dos orificios no es dos veces la descarga por uno solo, y esto ocurre para todos los valores de D . De las gráficas, obtuvimos el flujo medio para cada valor de D . La figura 4.10 muestra la razón Q_2/Q_1

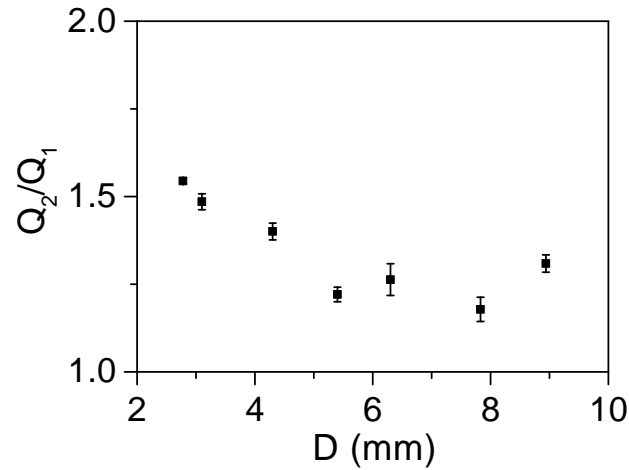


Figura 4.10: Razón Q_2/Q_1 vs D donde Q_2 es el flujo de descarga a través de 2 orificios y Q_1 el flujo por uno. Los tamaños de orificios utilizados son: 2.78 ± 0.1 , 3.1 ± 0.1 , 4.3 ± 0.1 , 5.4 ± 0.1 , 6.3 ± 0.1 , 7.94 ± 0.1 y 8.94 ± 0.1 en unidades de mm. El grano utilizado es de $150 - 250 \mu m$.

vs D . Note que la razón disminuye desde 1.5 para el orificio más pequeño, hasta un valor de aproximadamente $Q_2/Q_1 \sim 1.2$. Nuestras observaciones sugieren entonces que cuando la razón de descarga de la mezcla aumenta, ya sea aumentando el número de orificios o aumentando sus diámetros, el flujo a través de cada orificio disminuye, como si la resistencia hidrodinámica del medio granular al paso del fluido aumentara.

El lector podría cuestionar que el último punto en la Fig. 4.10 presenta un ligero incremento. Este aumento se puede explicar considerando que para dicho valor de D los perfiles de flujo de material arriba de cada orificio comienzan a interferir, tal como se reporta para el caso de descarga de grano seco [39]. Esto ocurre debido a que solo aumentamos el tamaño de los orificios y no la distancia entre ellos, por consecuencia la separación entre ambas aperturas se fue reduciendo hasta el punto en el cual comenzaron a tener efectos en la descarga de un orificio sobre el otro.

4.3 Enfoque bidimensional

Para obtener información adicional sobre los detalles microscópicos del sistema realizamos algunos experimentos de la descarga del mismo material granular, pero ahora

contenido en una celda cuasi-bidimensional. Ésta contenía 115 g del material entre dos placas de vidrio de 320 mm de altura y 85.8 mm de ancho, separadas una distancia de 4.8 mm. La descarga se hizo a través de 1 y 2 orificios cuadrados idénticos en el fondo de la celda, con $D \approx 4.8$ mm.

En éste sistema bidimensional estudiamos la descarga de grano seco y de la mezcla grano-agua. El tamaño de los granos utilizados en este caso fue solamente de $d = 500 - 600 \mu m$, puesto que el uso de granos más pequeños implicaba una serie de complicaciones debidas a formación de burbujas de aire y a las fuerzas cohesivas que existían con las paredes.

Seguimos el procedimiento experimental planteado en el caso tridimensional, esto es, haciendo uso del sensor de fuerza medimos la masa como función del tiempo durante la descarga. Además, con una cámara de alta velocidad se tomaron vídeos laterales de la descarga por 1 y 2 orificios. Los vídeos obtenidos fueron luego procesados con el software ImageJ, haciendo uso del plugging PIV (particle image velocimetry), para obtener imágenes como las que se muestran en la figura (4.11).

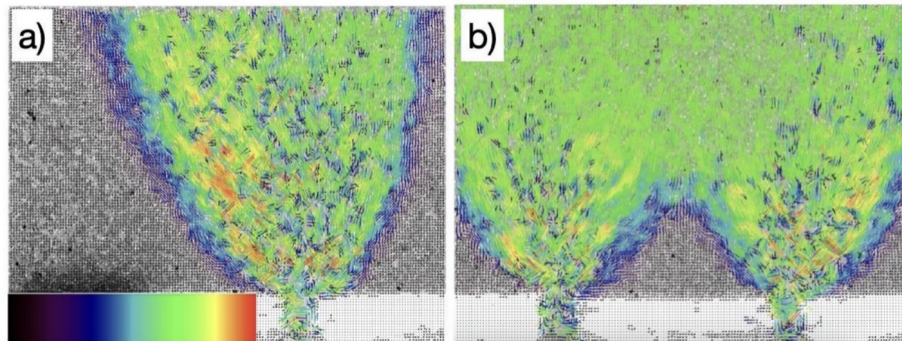


Figura 4.11: Capturas del análisis PIV para un sistema cuasi-bidimensional. en ambos se presenta la descarga de la mezcla grano-agua, a) a través de un orificio y b) a través de dos orificios

En estas figuras (figura 4.11), la escala de color representa las velocidades obtenidas, siendo los colores más oscuros los que corresponden a las velocidades más bajas y el color rojo la velocidad más alta obtenida. Para el caso de la mezcla la velocidad más alta fue de $v \approx 0.22$ m/s. En ambas figuras, para la descarga de un solo orificio (4.11 a) y para la de dos orificios (4.11 b) se pueden observar zonas de estancamiento, es decir cuando v es cercana a cero. En ambas se presentan en la cercanía de las fronteras y para el caso de la descarga por dos orificios estas zonas también se presentan en la región entre ambos.

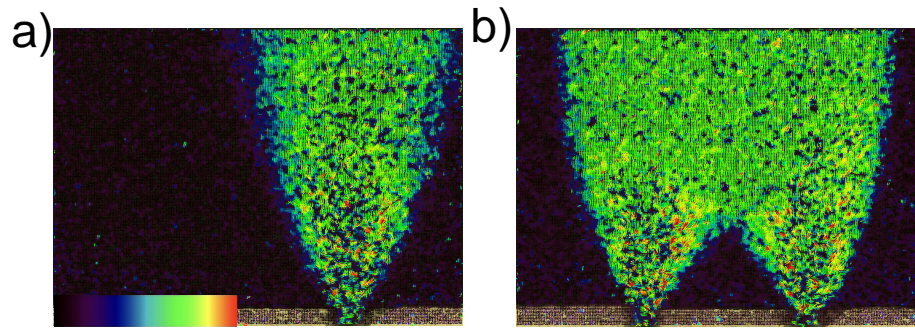


Figura 4.12: Capturas del análisis PIV para un sistema cuasi-bidimensional. en ambos se presenta la descarga de grano seco, a) a través de un orificio y b) a través de dos orificios

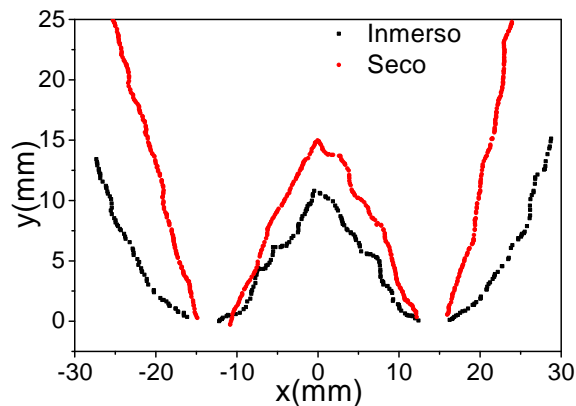


Figura 4.13: Comparación entre los perfiles obtenidos del análisis PIV para los casos de grano seco (rojo) y grano-agua (negro).

Para efectos de comparación, también aplicamos el análisis PIV en la descarga de grano seco, por 1 y 2 orificios. En la figura (4.12) se puede notar que los perfiles de flujo de descarga son mucho más delgados y más cónicos para el caso de grano seco comparados con el caso de la mezcla. Este efecto puede ser claramente observado en la figura (4.13) donde se refleja una comparativa entre los perfiles observados en cada uno de los casos. Es importante resaltar que el líquido, aunque no se puede visualizar con esta técnica, se está moviendo en toda la celda, lo que contribuye a que los perfiles de flujo se superpongan, desde las partes superiores de la celda y hasta las regiones muy cercanas a los orificios. En cambio, cuando se trata de granos secos los perfiles de flujo se muestran casi independientes, esto resulta en tazas de flujo aditivas.

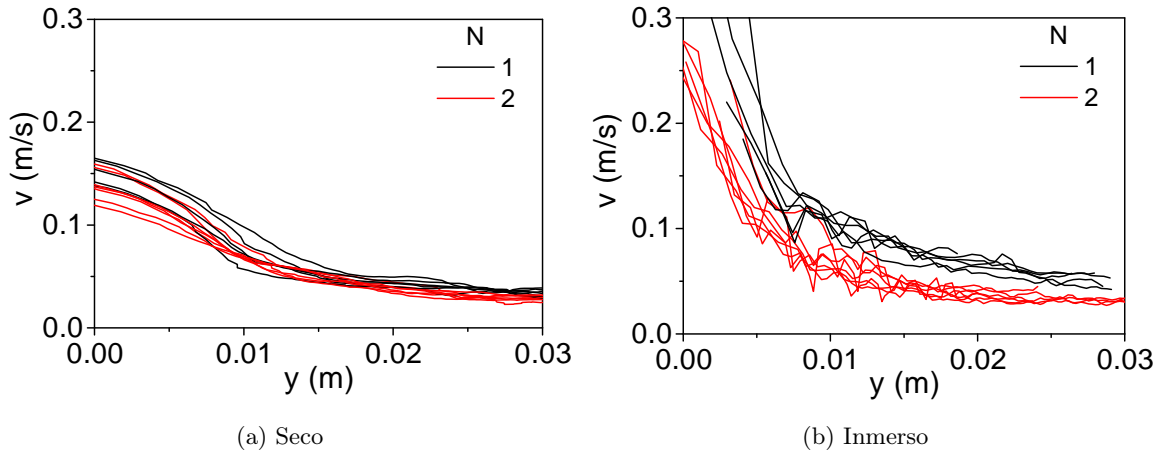


Figura 4.14: Velocidad de 5 partículas en función de la altura de la celda cuasi-bidimensional para $N = 1$ (línea negra) y $N = 2$ (línea roja) para el caso seco e inmerso.

Adicionalmente medimos la velocidad v de partículas trazadoras que seguían trayectorias similares a través de los orificios. Los resultados obtenidos se presentan en la figura (4.14). Las velocidades alcanzadas por las partículas de grano seco (ver figura 4.14 a) son esencialmente las mismas para la descarga por 1 orificio que para la descarga por 2, soportando de ésta forma el resultado de que un flujo aditivo se produce para grano seco. Por otro lado, cuando la descarga corresponde a la mezcla grano-agua (ver figura 4.14 b), las partículas se mueven más lentamente cuando la descarga se hace a través de dos orificios, confirmando la afirmación de que la taza de flujo es no aditiva para este caso.

Además se puede notar que los valores de la velocidad v son menores para los granos secos que para la mezcla, lo que concuerda con el hecho de que hay una mayor disipación por fricción para el grano seco, pues el líquido actúa lubricando los contactos en el caso sumergido.

Capítulo 5

Análisis y discusión de resultados

5.1 Modelo de descarga de la mezcla líquido-granos a través de varios orificios

Como ya vimos en el *Capítulo II*, una propuesta para describir la descarga simultánea de líquido y grano a través de un orificio en el fondo es la ecuación diferencial:

$$\rho_l g h_l - 180 \frac{\mu(1-\epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3} h_s (v_l - v_s) = \frac{1}{2} \rho_l (v_0^2 - v_l^2), \quad (2.26)$$

donde, ρ_l es la densidad del agua, g la gravedad, h_l y h_s la altura de la columna de agua y grano respectivamente, μ la viscosidad, ϵ la porosidad del medio granular, d el tamaño de las partículas, $v_l - v_s$ la velocidad relativa entre el nivel del líquido y el nivel del grano, con $v_l = \frac{dh_l}{dt}$ y $v_s = \frac{dh_s}{dt}$, y v_0 la velocidad a través del orificio de descarga. El primer término representa la parte hidrostática del sistema, el segundo se asocia a la resistencia hidrodinámica, y el término de la derecha indica el cambio en la presión cinética del sistema. La solución de esta ecuación diferencial junto con la ecuación de continuidad nos permite determinar $h_l(t)$ o $h_s(t)$, y de ahí, la masa restante en el silo puede obtenerse de la expresión:

$$M[h_s(t)] \approx A_1 h_s(t) [(\rho_s - \rho_l) \phi + \rho_l (1 + b)] + \rho_l A_1 a, \quad (5.1)$$

donde A_1 corresponde al área transversal del silo, ρ_s y ρ_l son las densidades del medio granular y el agua respectivamente, ϕ es el factor de empaquetamiento que se define en términos de la porosidad como $\phi = 1 - \epsilon$, $b \approx 6 \frac{d}{D}$ (coeficiente que depende del tamaño del grano d y del orificio de descarga D) y $a = h_{l0} - (1 + b)h_{s0}$ dada por las condiciones iniciales

del sistema. Con este modelo, se logró replicar de manera precisa la descarga de una mezcla de grano y agua a través de un solo orificio para distintos tamaños de grano d y modificando las dimensiones de la apertura D [14].

Ahora nos preguntamos: ¿es el modelo arriba descrito útil para describir el caso de la descarga a través de N orificios? Para responder a esto, debemos analizar el modelo detenidamente y determinar los cambios necesarios que debemos realizar para que tome en cuenta la cantidad de orificios que se utilizan durante la descarga.

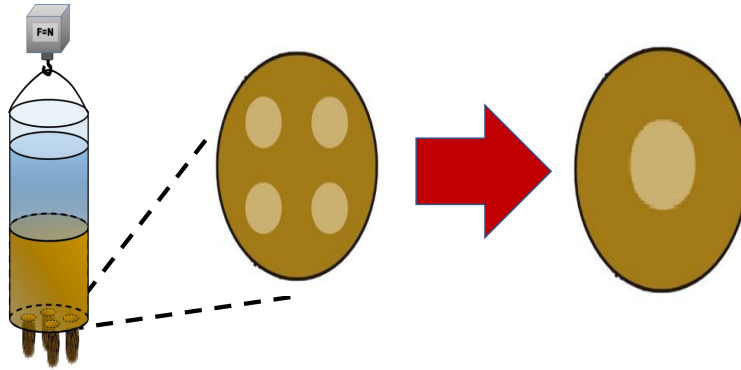


Figura 5.1: Diagrama esquemático que asume la equivalencia de la descarga a través de N orificios idénticos mapeada a la descarga a través de un solo orificio con la misma área total.

En primer lugar, hacemos la suposición de que el área A_0 de N orificios circulares idénticos puede ser equivalente a una sola área circular efectiva A_N , esto es, $NA_0 = A_N$, tal y como se ilustra en la figura 5.1. A esta nueva área, le podemos asociar un diámetro efectivo dado por:

$$d_N = 2\sqrt{\frac{NA_0}{\pi}}. \quad (5.2)$$

Por otra parte, la expresión $\Delta H = h_l - h_s = a + bh_s$, indica cómo es la diferencia entre la columna de agua (h_l) y grano (h_s) durante la descarga. De esta ecuación, podemos determinar que

$$h_s[h_l(t)] = \frac{h_l(t) - a}{b + 1}, \quad (5.3)$$

donde, $b \approx 6\frac{d}{D}$. Además, para conocer el valor de a , se toman en cuenta las condiciones iniciales de nuestro sistema y se determina que $a = h_{l0} - h_{s0}(1 + b)$, donde, h_{s0} corresponde a la altura inicial de la columna de grano y h_{l0} la de agua. Por lo tanto, podemos escribir:

$$h_s[h_l(t)] = \frac{h_l(t) - h_{l0}}{b + 1} + h_{s0}. \quad (5.4)$$

Esta expresión indica cómo es el cambio de la columna de grano durante el proceso de descarga, la cual, depende de la altura de la columna de agua, las condiciones iniciales del sistema, el tamaño de grano y las dimensiones del orificio de descarga los cuales están incluidos en el parámetro b . El único término desconocido en esta ecuación es $h_l(t)$.

Ahora, si en nuestro sistema (figura 4.1) elegimos el punto 1 como la parte superior del medio granular y el punto 2 como la posición del orificio de salida, la ecuación de continuidad nos dice que, la cantidad de material que pasa a través del punto 1 debe ser la misma que pasa a través del punto 2 durante la descarga, esto es:

$$A_1 v_1(t) = \epsilon A_N v_0(t), \quad (5.5)$$

donde la porosidad ϵ toma en cuenta solo el espacio disponible en el orificio de salida, A_N es el área efectiva, v_0 la velocidad a la cual se descarga el material y A_1 el área transversal del contenedor. Dado que, el punto 1 se encuentra en la parte superior del medio granular, el único material que pasa a través de A_1 es agua, lo que nos lleva a determinar que $v_1 = v_l = \frac{dh_l(t)}{dt}$. Por lo tanto:

$$A_1 \frac{dh_l(t)}{dt} = \epsilon A_N v_0(t). \quad (5.6)$$

Conjuntamente, de Ec. (2.26), determinamos la velocidad a la cual se descarga el material, es decir:

$$v_0(t) = \sqrt{2gh_l(t) - \frac{2\lambda v_l}{\rho_l} \left(\frac{b}{b+1}\right) h_s + v_l^2}, \quad (5.7)$$

donde $\lambda = 180 \frac{\mu(1-\epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3}$ es la permeabilidad del medio granular considerado como un medio poroso dinámico. Conociendo esta solución, solo nos resta resolver la ecuación diferencial 5.6, para ello, procedemos a hacerlo de manera numérica con ayuda del programa *Mathematica*[®]. Con esto, logramos conocer $h_l(t)$, y por consiguiente, el comportamiento de $h_s[h_l(t)]$. Finalmente, podemos describir $M[h_s(t)]$ para la descarga de una mezcla bifásica a través de múltiples orificios (ecuación 5.1).

Sin embargo recordemos que, nuestras curvas experimentales se componen de dos regiones, una inicial asociada a la descarga bifásica y una segunda perteneciente a la descarga monofásica (agua), por tanto, debemos determinar el tiempo crítico (t_c) en el cual ocurre ésta transición. Para hacer esto, nuevamente utilizamos el código de *Mathematica*[®] para encontrar la raíz de la ecuación (5.4), que corresponde al fin de la columna granular. Conociendo t_c , podemos replicar nuestros resultados experimentales de manera completa: la

descarga bifásica está descrita por la ecuación (5.1) para $t < t_c$, pero para $t > t_c$ utilizamos la ecuación (4.1) para la descarga de agua.

En la figura 5.2, se muestran las soluciones numéricas predichas por el modelo (líneas punteadas), las cuales, son comparadas con los resultados experimentales (línea continua) para los distintos valores de N y tres tamaños distintos de grano. Cabe mencionar que, aunque en la figura solo se muestran tres tamaños de grano, el análisis se realizó para todos, en los cuales se observó el mismo efecto. Primero replicamos las curvas experimentales para la descarga por un solo orificio ($N = 1$), para hacer esto, fijamos μ al valor de la viscosidad del agua (1×10^{-3} kg/ms) y mediante una comparación gráfica de las curvas numéricas y experimentales determinamos los valores de la porosidad ϵ para cada tamaño de grano. Dichos valores son registrados en la tabla (5.1). Haciendo esto, logramos replicar de manera precisa la curva experimental para $N = 1$ (ver figura 5.2). Los valores de ϵ y μ se fijan entonces y se varía N en el modelo. Sin embargo, conforme aumenta el valor de N , observamos una creciente discrepancia entre la solución numérica y las curvas experimentales, manifestando una mala predicción del modelo para $N > 1$ (Fig. 5.2a).

Tabla 5.1: Parámetros utilizados en el modelo para $N = 1$.

Diámetro: d (μm)	Porosidad: ϵ	Viscosidad: μ (1×10^{-3} kg/ms)
100	0.454	1
200	0.443	1
270	0.442	1
360	0.440	1
460	0.425	1
550	0.425	1

Las soluciones numéricas manteniendo la viscosidad constante para valores $N > 1$ muestran que el tiempo de descarga predicho por el modelo es menor que el tiempo registrado en los experimentos. Esto, junto con los resultados experimentales del capítulo anterior, nos indica que al material le cuesta mayor trabajo descargarse si aumentamos el número de orificios, por lo que nos vemos en la necesidad de incrementar el valor de la resistencia hidrodinámica en nuestro modelo conforme aumenta N , lo cual corresponde al segundo término de la ecuación 2.26. Entonces, para lograr replicar los experimentos para $N > 1$,

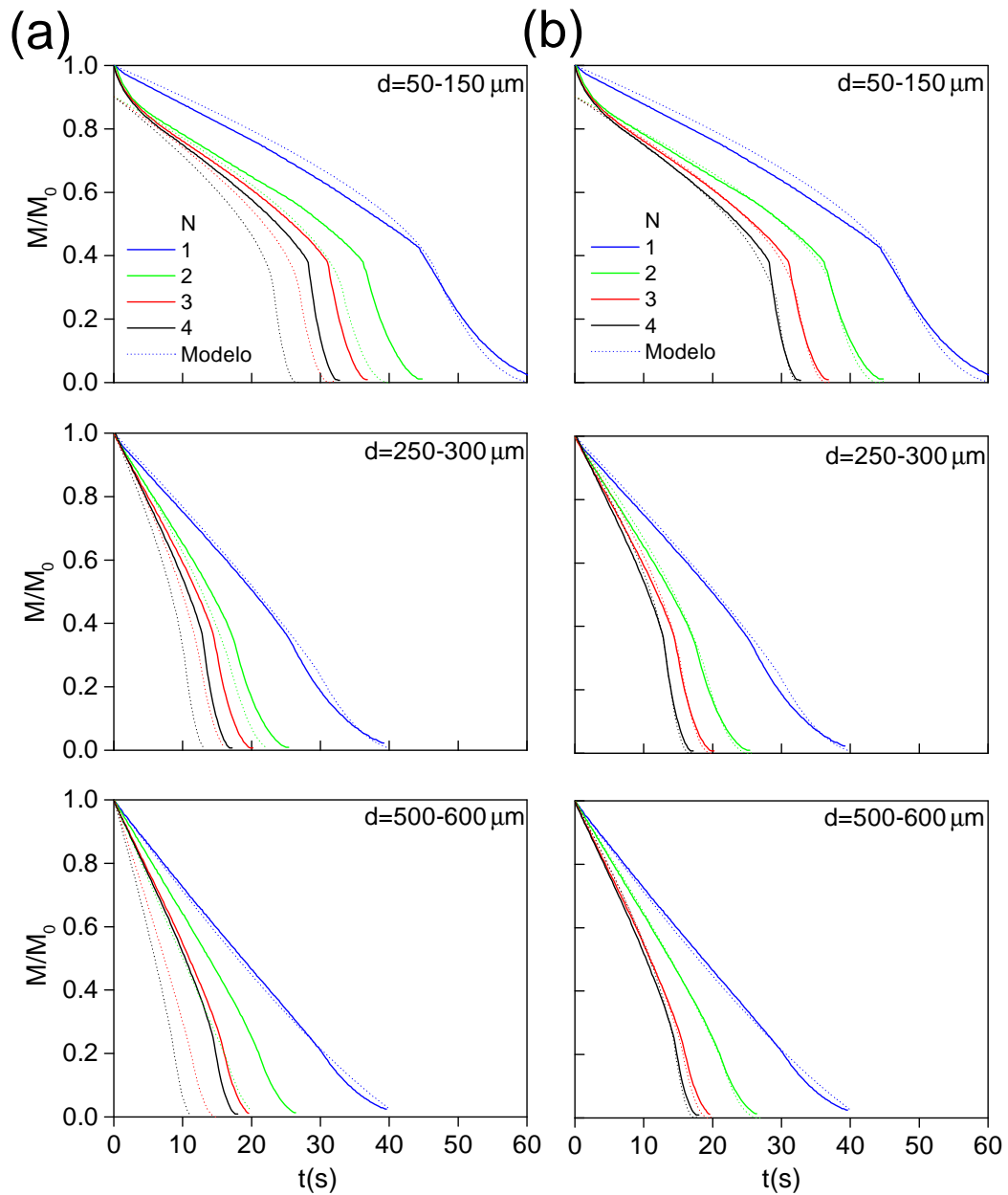


Figura 5.2: Masa en función del tiempo para distinto tamaño de grano y orificios. Las líneas punteadas corresponde a la curva predicha por el modelo, mientras que las líneas continuas a los experimentos. En las tres gráficas de la izquierda (a) tomamos los valores de porosidad y viscosidad de la tabla (5.1) y cambiamos el valor de N . Mientras que, en las gráficas de la derecha (b) se ajustó el parámetro de la viscosidad (tabla 5.3), para que el modelo y los experimentos coincidieran de manera precisa para $N > 1$.

es necesario considerar un aumento en la resistencia hidrodinámica. Como este término es pesado por el coeficiente $180 \frac{\mu(1-\epsilon)^2}{d^2\epsilon^3}$, el cual depende de la porosidad ϵ , tamaño de grano d y la viscosidad μ , existen varias maneras de incorporar el aumento de la resistencia variando estos tres parámetros. Puesto que el tamaño de grano se fija por el experimento, la única manera de variar el coeficiente es alterando los valores de la viscosidad o la porosidad.

Si suponemos que la viscosidad es siempre la misma durante el proceso de descarga ($\mu_0 = 1 \times 10^{-3}$ kg/ms), y el término que se modifica es la porosidad. Ajustamos cada una de las curvas experimentales con nuestro modelo y registramos los datos en la tabla (5.2). Nótese que fueron necesarios cambios pequeños en los valores de la porosidad al incrementar el valor de N para lograr reproducir los resultados experimentales, y que los valores de ϵ no siguen un patrón monótono (pueden aumentar o disminuir con el aumento de N), incluso un pequeño cambio en la porosidad produce una gran alteración de la curva obtenida del modelo.

Tabla 5.2: Parámetros utilizados en el modelo cambiando la porosidad.

Diámetro: d (μm)	Porosidad: ϵ					Viscosidad: μ (1×10^{-3} kg/ms)
	N:	1	2	3	4	
100		0.454	0.434	0.429	0.425	1
200		0.443	0.425	0.418	0.406	1
270		0.442	0.430	0.419	0.410	1
360		0.440	0.418	0.405	0.400	1
460		0.425	0.390	0.380	0.368	1
550		0.425	0.380	0.372	0.358	1

Otra manera de determinar el valor de la porosidad es hacerlo a través de la relación $\epsilon = 1 - \phi$, donde ϕ es el factor de empaquetamiento. La variación de ϕ durante la descarga puede ser obtenida a partir de las filmaciones laterales de la descarga. Considerando que la masa neta del sistema M es la suma de la masa de los granos, la del agua intersticial y la de la columna de agua que se mantiene en la parte de arriba de los granos, entonces tenemos que:

$$M(h_s, \Delta H) = \rho_s A_1 h_s \phi + \rho_l A_1 h_s (1 - \phi) + \rho_l A_1 \Delta H \quad (5.8)$$

donde A_1 es el área transversal del silo, ρ_s y ρ_l la densidad del grano y el líquido respectivamente, ϕ el factor de empaquetamiento y ΔH la diferencia entre la altura del líquido h_l y la

altura del grano h_s , esto es $\Delta H = h_l - h_s$. Resolviendo para el factor de empaquetamiento se transforma en:

$$\phi = \frac{M - \rho_l A_1 \Delta H}{(\rho_s - \rho_l) A_1 h_s} \quad (5.9)$$

De tal forma que podemos determinar los cambios en el valor de ϕ a través de los datos experimentales de M , h_s y ΔH , los cuales pueden ser obtenidos grabando de forma lateral las descargas y con los datos reportados por el sensor de fuerza. De esta forma podemos determinar la función $\phi(h_s)$ para las distintas aperturas y tamaños de grano.

En la figura (5.3) se presentan los datos obtenidos para dos tamaños de grano representativos ($d = 500 - 600\mu m$ y $d = 150 - 250\mu m$) que son descargados por 1 y 4 orificios. Ahí es claro que el factor de empaquetamiento permanece prácticamente constante durante las descargas en todos los casos, pues las variaciones en los valores obtenidos están incluidas en el error, reportando un valor medio de $\phi = 0.60 \pm 0.02$.

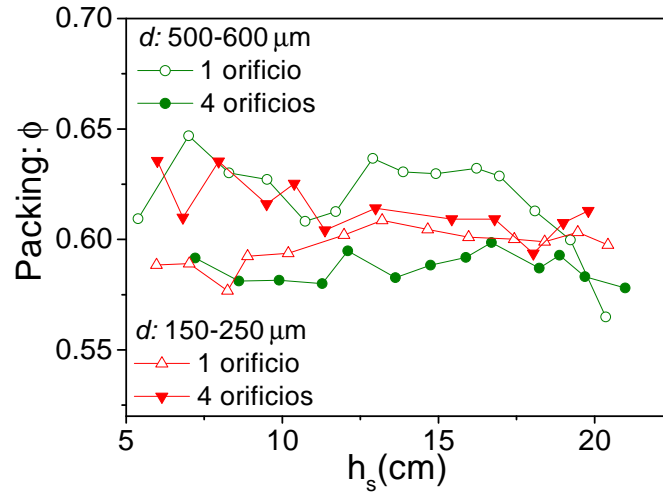


Figura 5.3: Variaciones en el factor de empaquetamiento durante la descarga de la mezcla grano-agua. Se presentan los datos obtenidos para dos tamaños de grano, $d = 500 - 600\mu m$ (verde) y $d = 150 - 250\mu m$ (rojo). Los símbolos sólidos representan la descarga por 4 orificios y los del contorno la descarga por 1 orificio.

Ahora fijamos nuestra porosidad a los valores obtenidos para $N = 1$ registrados en la tabla (5.1) y asumimos que la viscosidad es la que cambia al incrementar el valor de N . Los datos obtenidos del modelo son registrados en la tabla (5.3). Sorprendentemente, fue necesario incrementar siempre el valor de la viscosidad conforme aumentamos el número de orificios para lograr replicar nuestros resultados experimentales. Los cambios en el valor

de la viscosidad son grandes en comparación con el caso anterior y el comportamiento es monótono. La Fig. 5.2b muestra el excelente ajuste numérico-experimental obtenido aumentando la viscosidad efectiva de la mezcla conforme se aumenta el número de orificios. Por tanto nuestro estudio sugiere que la viscosidad de la mezcla incrementa cuando el material se descarga (o deforma) más rápidamente.

Tabla 5.3: Parámetros utilizados en el modelo cambiando la viscosidad.

Diámetro: d (μm)	Porosidad: ϵ	Viscosidad: μ (1×10^{-3} kg/ms)			
		N:	1	2	3
100	0.454	1	1.25	1.31	1.39
200	0.443	1	1.22	1.34	1.48
270	0.442	1	1.19	1.33	1.43
360	0.44	1	1.32	1.50	1.60
460	0.425	1	1.50	1.70	1.90
550	0.425	1	1.80	1.90	2.25

5.2 *Shear-thickening* durante la descarga de una mezcla a escala no coloidal.

En la figura (5.4) podemos apreciar de manera gráfica el comportamiento de la viscosidad como función de N , obtenido a partir de los ajustes numéricos en la Fig. (5.2 b). Podemos apreciar el mismo comportamiento creciente independientemente del tamaño de grano; sin embargo, se registra un mayor incremento de la viscosidad para el tamaño de grano más grande. Los datos sugieren un ajuste tipo ley de potencias de la forma $\mu = \mu_0 + AN^b$, con A y b constantes y cuyos valores se registran en la tabla (5.4). Con esta expresión logramos describir en buena manera el comportamiento de la viscosidad (líneas continuas) con $b \sim 0.5 \pm 0.2$.

Interpretación:

Nuestro estudio sugiere que para describir correctamente los resultados experimentales, el parámetro de viscosidad μ debe aumentar de valor conforme aumenta N . Recordando nuestros antecedentes en el capítulo II, una característica de los fluidos no newtonianos

Diámetro: d (μm)	A (kg/ms)	b
50-150	0.246	0.394
150-250	0.217	0.700
250-300	0.191	0.749
300-420	0.323	0.579
420-500	0.495	0.529
500-600	0.769	0.380

Tabla 5.4: Valores de las constantes obtenidas del ajuste no lineal de la forma $\mu = \mu_0 + AN^b$ realizado a la gráfica (5.4).

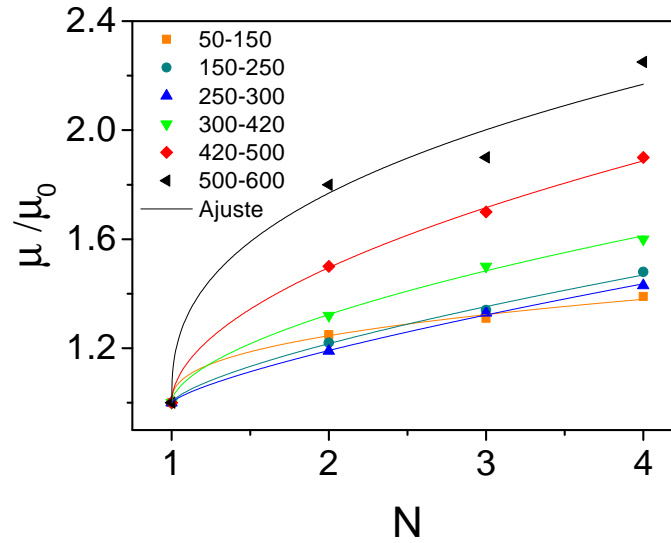


Figura 5.4: Comportamiento de la viscosidad en función del número de orificios de descarga. Esta gráfica está normalizada con la viscosidad del agua μ_0 usada para un solo orificio. Los puntos se asocian a los valores obtenidos del modelo registrados en la tabla 5.3, mientras que las líneas continuas, corresponden al ajuste no lineal de la forma $\mu = \mu_0 + AN^b$.

es que su viscosidad no es constante, sino que depende de la razón de deformación. En particular, cuando la viscosidad aumenta con la razón de deformación se considera un fluido no newtoniano de tipo dilatante. Basados en los resultados obtenidos por nuestro modelo, una posible explicación a nuestros resultados de descarga es que la mezcla se comporta como un

fluido no-newtoniano de tipo dilatante (shear-thickening). Cuando utilizamos más orificios para el proceso de descarga aumenta el flujo, por lo que estamos incrementando la razón de deformación de la mezcla, y como respuesta, la viscosidad del fluido aumenta.

En pocas palabras: *durante la descarga simultánea líquido-grano, la mezcla tiene un comportamiento con características similares a las de un fluido dilatante, incluso cuando los granos son lo suficientemente grandes y están totalmente sedimentados en el líquido. Esta es la primera observación de un efecto dilatante en un sistema fuera de la escala coloidal en la que típicamente se observa dicha respuesta a la deformación del medio.* Posiblemente, los granos arrastrados por el fluido producen cadenas de fuerza intermitentes que se forman y rompen a mayor razón cuando el flujo efectivo del medio aumenta, produciendo una malla inestable que dificulta el paso del fluido a través del medio poroso. Aunque un estudio a nivel de partícula usando tomografía de rayos X o sistemas bidimensionales que permitan visualizar la formación de cadenas de fuerza podrían requerirse para respaldar nuestra interpretación, el excelente acuerdo entre los datos experimentales y los ajustes numéricos con un solo parámetro libre (viscosidad) mostrados en la Fig. 5.2b sugieren que el modelo propuesto, junto con nuestra interpretación de un comportamiento dilatante de la mezcla durante la descarga, brindan una explicación simple y satisfactoria al fenómeno descrito en esta tesis.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió experimentalmente la descarga de flujos monofásicos (líquido ó grano) y bifásicos (mezcla de grano y agua) desde un silo con varios orificios. Además, se adaptó un modelo basado en la resistencia hidrodinámica de un medio poroso dinámico para describir los resultados experimentales. Las conclusiones derivadas de este estudio son:

- Para el caso monofásico encontramos que el flujo es linealmente proporcional al número de orificios disponibles para la descarga, mientras que para el caso bifásico, el flujo es menor a N veces el flujo a través de una apertura, esto es, $Q_N < NQ_1$.
- Se partió de un modelo hidrodinámico basado en la Ley de Darcy para determinar la caída de presión debido a un medio poroso y la ecuación de Kozeny-Carman para cuantificar la permeabilidad, las cuales fueron introducidas en la ecuación de Bernoulli para fluidos incompresibles y, junto con la ecuación de conservación de la masa, se resolvieron numéricamente para determinar la evolución temporal de la descarga. Dicho modelo fue modificado para incluir el número de orificios N . Sin embargo, dicha adecuación no fue suficiente para describir la descarga, por lo que se consideró cambiar la viscosidad efectiva del medio o la porosidad asociada al medio granular y ver si de este modo se podrían reproducir las curvas experimentales.
- Se encontró que el aumento en el valor de la viscosidad efectiva con el número de orificios o la disminución del parámetro de porosidad del medio granular son requeridos en el modelo para reproducir los datos experimentales. Sin embargo, el modelo sugiere

que los cambios más dramáticos son producidos por los efectos de la viscosidad y no por la porosidad. Eligiendo este parámetro, se encontró que la dependencia de la viscosidad en función del número de orificios puede ser descrito por la expresión $\mu = \mu_0 + AN^p$ donde, μ_0 corresponde a la viscosidad del fluido reportada en la literatura y A y p constantes.

- El modelo antes descrito sugiere la idea física de que al incrementar el número de orificios de descarga, la mezcla se descarga más rápido y por ende sufre una mayor tasa de deformación. Especulamos que presenta un comportamiento análogo al de un fluido no-newtoniano de tipo dilatante (Shear-Thickening). dado que la viscosidad parece aumentar cuando la velocidad de deformación del fluido aumenta debido al incremento del flujo. Al aumentar la viscosidad se incrementa la resistencia hidrodinámica.
- Logramos percibir este efecto de no linealidad del flujo y el número de orificios variando el diámetro de la apertura y fijando el tamaño de grano utilizado, obteniendo resultados que están en acuerdo con la interpretación de la mezcla como un fluido dilatante.
- Para un volumen fijo de mezcla, encontramos una notable reducción en el tiempo de descarga al aumentar el tamaño de grano utilizado en los experimentos. Esto refleja que al aumentar el tamaño de grano incrementa proporcionalmente el espacio intersticial en el medio granular, disminuyendo la resistencia hidrodinámica, y por ende, permitiendo que una mayor cantidad de flujo efectivo.

Los resultados arriba descritos tienen implicaciones importantes en la optimización de procesos industriales que involucran descarga de mezclas, pues indica que no debemos esperar una simple dependencia lineal entre la razón de descarga y el área total de los orificios en el diseño de silos. Además, se proporciona un modelo que nos permite predecir razonablemente la razón de flujo dependiendo del número de orificios y del tamaño de grano.

Apéndice A

Código

Una parte importante de este trabajo de tesis fue el desarrollo del código con el cual logramos comparar el modelo propuesto en este trabajo con nuestros resultados experimentales. Para desarrollar esto, recurrimos al uso del programa *Mathematica*[®], en donde, definimos los parámetros experimentales, resolvimos las ecuaciones diferenciales y comparamos gráficamente el resultado del modelo con los datos experimentales.

En las primeras líneas del código, inicializamos los siguientes parámetros:

```
ε = 0.443; (*Porosidad*)
μ = 1 * 10-3; (*Viscosidad*)
No = 1 (*NÚMERO DE ORIFICIOS*)
d = 200 * 10-6; (*TAMAÑO DE GRANO *)
Dia = 5.2 * 10-3 (*TAMAÑO DE ORIFICIO *)

λ =  $\frac{180 * \mu * (1 - \epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3}$ ; (*Coeficiente de la ec. (6) *)

hs0 = 0.195; (*Altura inicial de grano *)
hl0 = 0.4; (*Altura inicial del líquido *)
S1 = (3.14159) * (4.4 * 10-2)2 / 4; (*área de la región circular del silo*)
S2 = (3.14159) * (Dia2) / 4; (*área del orificio de descarga *)
DiaN = 2 * Sqrt[No * S2 / Pi] (*Diámetro efectivo*)
      [raíz cuadrada [número pi]
g = 9.8;
ρ = 1000; (*kg/m3*)
ρs = 2.66 * 103; (*kg/m3*)
B = 5.9 * (d / DiaN); (*valor de pendiente*)

hs = (hl[t] - hl0) / (1 + B) + hs0; (*altura de columna de grano*)
```

donde, la porosidad asociada al medio granular estaba representada por ϵ la cual era difer-

ente para cada tamaño de grano, la viscosidad efectiva del medio estaba dada por μ , No correspondía al número de orificios utilizados en la descarga y podía tomar valores desde 1-4, se definió el tamaño del grano con la variable d , como también el tamaño del orificio de descarga con Dia . Además, establecimos el coeficiente de la resistencia hidrodinámica de la ecuación (2.26) con la letra λ la cual dependía de las variables antes definidas. Introducimos las condiciones iniciales de nuestro sistema con los parámetros $hs0$ y hsl , los cuales corresponden a la altura inicial del grano y agua respectivamente. El área transversal del silo fue definida por $S1$, y $S2$ es el área del orificio de salida. Definimos nuestro diámetro efectivo como $DiaN$, el cual dependía del valor de No y el área del orificio de salida $S2$. Incluimos algunos valores físicos necesarios como la gravedad g , la densidad del agua ρ y la densidad del medio granular ρ_s . Incluimos el factor B el cual contenía la dependencia del tamaño del grano d y el diámetro efectivo $DiaN$. La altura de la columna de grano fue definida por hs , el cual correspondía a la ecuación (5.4), donde aparece la variable temporal $hl[t]$ que corresponde al cambio de la altura de la columna del líquido en el tiempo de descarga.

Después de haber definido todos nuestros parámetros y condiciones iniciales, procedimos a resolver la ecuación (2.26) de la siguiente manera:

```
v2 = Sqrt[2 g (hl[t]) - 2 λ * v1 * (B / (1 + B)) hs / ρ + v1^2]; (*Ecuación (2.9)*)
|raiz cuadrada
vel = Expand[Solve[S1^2 * v1^2 == (ε * No * S2)^2 * v2^2, v1][[2]]]; (*Solución de la ec. de continuidad para v1*)
|expand- |resuelve
s = NDSolve[{hl'[t] == -v1 /. vel, hl[0] == hl0}, hl, {t, 0, 30}]; (*Solución de ec. diferencial*)
|resolvedor diferencial numérico
```

Tomamos $v2$ como la velocidad en el orificio de salida, es decir la ecuación (5.7), donde $v1$ corresponde a la velocidad de la parte superior del medio granular. Posteriormente, incluimos $v2$ en la ecuación de continuidad (5.6), y utilizando el comando *Solve* encontramos las soluciones para $v1$, de las cuales una de las dos la definimos como vel . Después de esto, procedemos a resolver la ecuación diferencial con el comando *NDSolve* tomando en cuenta las condiciones iniciales y el intervalo de tiempo. La solución es denotada por la letra s .

Al incluir la solución s en hs logramos obtener el cambio de la columna granular en el intervalo de tiempo, sin embargo debemos conocer el valor del tiempo donde ésta columna llega a su fin, es decir la raíz de esta función, la cual denotamos como td . Este tiempo es considerado el punto de transición entre la parte de descarga bifásica y la descarga monofásica. Tal acción se ilustra en las siguientes líneas de código:

```

gg[t_] := Evaluate[hs /. s] (*Crea una función del tiempo evaluando la solución s en hs*)
|evalúa
td = t /. FindRoot[gg[t], {t, 20}] (*Encuentra la solución (el punto en el cual gg se hace cero)*)
|encuentra raíz
h0 = Evaluate[h1[td] /. s] (*Encuentra intersección con el eje y*)
|evalúa
h0s = (h0 - 0.0245) / (1 + B);

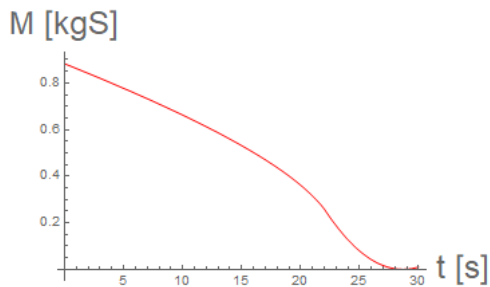
```

Sin embargo, para lograr tener nuestra curva numérica de manera completa, definimos M_s como una función a trozos, donde utiliza la solución s y la evalúa en la ecuación (5.1) para $t < td$ correspondiente a la descarga bifásica, pero para $t > td$ se evalúa la ecuación (4.1) equivalente a la descarga de agua. Esto lo podemos ver enseguida:

```

Ms = Piecewise[{{S1 * ((Evaluate[h1[t] /. s] - h10) / (B + 1) + h0s) * ((ρs - ρ) (1 - ε) + ρ (1 + B)) + ρ * S1 * (h10 - h0s (1 + B)), t <= td},
|función a trozos |evalúa
(*Lo anterior corresponde a la descarga de la mezcla t<td, ec. (2.3)*)
{ρ * S1 * (Sqrt[h0] - No * S2 * Sqrt[2 * g / (S1^2 - No * S2^2)]) * (t - td) / 2 ^ 2, t >= td}}];
|raíz cuadrada |raíz cuadrada
(*Lo anterior corresponde a la descarga de agua td<t, ec. (1.18)*)
M = Plot[Ms, {t, 0, 30}, PlotStyle -> {Red, Thickness[0.005]},
|representación gráfica |estilo de repre... |rojo |grosor
AxesLabel -> {Style["t [s]", FontSize -> 24], Style["M [kgS]", FontSize -> 24]}
|etiqueta de ejes |estilo |tamaño de tipo de l... |estilo |tamaño de tipo de letra

```



Finalmente, con esto logramos obtener el cambio de la masa en función del tiempo para la descarga bifásica y monofásica.

Apéndice B

Artículo publicado en *Physics of
Fluids*

Discharge of liquid and grains from a silo with multiple orifices

Cite as: Phys. Fluids **35**, 081702 (2023); doi: 10.1063/5.0158935

Submitted: 18 May 2023 · Accepted: 22 July 2023 ·

Published Online: 8 August 2023



View Online



Export Citation



CrossMark

D. Rodríguez-López, F. C. Pacheco-Sósol, L. F. Elizondo-Aguilera,  and F. Pacheco-Vázquez ^{a)} 

AFFILIATIONS

Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, 72570 Puebla, Mexico

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed: fpacheco@ifuap.buap.mx

ABSTRACT

Using a multi-orifice cylindrical silo, the average flow rates Q_1 and Q_N through one and N orifices, respectively, were first measured for the discharge of water or dry grains and then for the mixture. As expected, $Q_N = NQ_1$ for monophasic discharges. Nevertheless, for the mixture, $Q_N \ll NQ_1$, and the effect becomes more notorious as N augments and when the grain size is decreased. A simplified continuum model of a flow through a dynamic porous medium, with hydrodynamic resistance that increases with N , is used to reproduce the experimental results. Additional analysis in a two-dimensional cell reveals interacting parabolic flow profiles of the immersed particles close to the orifices, with a reduction in the average velocities when N is increased, which helps to understand the non-additivity of the total flow rate.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0158935>

When a dry granular material is discharged through an orifice of size D at the bottom of a silo, the flow rate Q practically does not depend on the amount of material above the outlet.^{1,2} As a first approximation, $Q \equiv \Delta M / \Delta t$ (the mass of grains ΔM flowing per unit time Δt) can be estimated using the empirical Beverloo correlation obtained from dimensional analysis,² which agrees with the experimental fact that the velocity of the particles at the aperture scales only with \sqrt{gD} , where g is the gravity acceleration. This scaling was initially explained with the controversial idea of the existence of a free fall arch region above the aperture where the material is loose and moves only under the gravity action.³ More recent research based on the detailed analysis of the particle flow velocity and density profiles^{4,5} showed that even though the free fall arch region does not exist, the kinetic pressure of the particle flow near the outlet displays a well-defined maximum in a position that scales with the outlet size, explaining the scaling of the exit velocity⁴ and providing an expression for the flow rate consistent with empirical correlations.⁵

The constant flow rate of dry grains discharged from a silo contrasts clearly with the case of a Newtonian liquid, where the fluid velocity at the output v_o depends on the height of the liquid column h_l above the outlet, $v_o \propto \sqrt{2gh_l}$. In spite of the differences between liquid and granular flows, there is an approach to model the granular silo as a continuum plastic flow⁶ showing that low friction coefficients lead to viscous fluid-like behavior, while large enough values allow for a low-pressure cavity to form above the outlet, and can thus explain the Beverloo scaling. Decreasing more the friction coefficient leads to a

dependence on the height of the material remaining in the silo, as in the case of Newtonian fluids.⁶ Some recent investigations were focused on the simultaneous discharge of water and grains.^{7–11} For silos totally submerged in water, a surge in the flow rate appears near the end of the discharge due to a pumping effect produced by the interstitial fluid moving faster than the grains.^{8,9} For the discharge of liquid and grains to the atmosphere, experiments showed different regimes ranging from the constant flow rate to a hydrostatic-like discharge depending on the aperture size and grain diameter, which was explained considering the competition of hydrostatic pressure above the granular bed and the hydrodynamic resistance of the dynamic porous medium.¹¹

From the above discussion, we can notice that the discharge rate of silos has been widely investigated for monophasic flows (liquids or dry grains) and more barely for mixtures, but in most of the cases, the material is discharged through a single aperture. Only recently, it was shown that the flow of dry granular material from a silo with two orifices is basically the addition of individual flow rates.^{12–14} Unless the two openings are quite close, the flow field created by one orifice is not affected by the flow field of the other,¹² but when the separation between the orifices is negligible, a notable increase in the flow rate is observed.¹⁴ Numerical simulations show that the particle arches on very adjacent outlets start affecting each other, and mutually stable arches become harder to form, facilitating the discharge of the material.¹⁵ In order to broad our current knowledge on silo discharge through multiple orifices, here we report experiments on the discharge of monophasic flows and mixtures of water and grains from a

cylindrical silo with N identical orifices. In contrast to the case of dry grains,¹⁴ we found a counterintuitive reduction of the flow rate per orifice for the immersed granular material. Additionally, a toy continuum model and particle image velocimetry (PIV) analysis in a quasi-two dimensional (2D) system (described in detail in the supplementary material) are used to explain our findings.

In our experiments, the silo consisted of a transparent cylindrical container of 4.4 cm inner diameter and 42 cm high, with a plastic lid at the bottom with holes of diameter $D = 5.2 \pm 0.1$ mm symmetrically distributed at the corners of a 1.4 cm sided square, centrally drawn in the lid, and one additional hole at the center of the square. Each orifice was blocked with a duct tape plug. The container was hung vertically from a fixed digital force sensor Mark-10 DFG-355, which allowed us to measure the weight of the system W as a function of time t with a force resolution of 0.01 N. Previous to the experiments, the empty system was hung from the force sensor to tare its weight. Then, distilled water at room temperature was added to the container until reaching a level of 20 cm measured from the bottom lid. After that, 500 g of glass beads of a given size d (in the ranges: 50–150, 150–250, 300–420, and 500–600 μm) were poured inside the water column until the liquid reached a height of 40 cm, see Fig. 1(a). After adding the grains, we waited 2 minutes to allow total sedimentation of the material at the bottom of the silo. From now on, we shall refer as mixture the case of grains sedimented in water and discharged simultaneously from the silo to the atmosphere. On the other hand, for monophasic discharges, the initial height of the water column was 40 cm (volume ~ 600 ml), and for the dry grains, we poured in the silo 500 g of the same glass beads used in the biphasic case. To start the discharge, we opened a given number of holes, $N = 1-5$, and W vs t was acquired with the force sensor with an acquisition rate of 10 Hz. Additionally, the discharge was filmed laterally with a high speed camera at 125 fps to determine the level of the material column as a function of time during the discharge. It is important to mention that, for our flat bottomed silo, we observed a mass flow regime in all cases because the orifices are small compared to the silo dimensions.¹⁶ Thus, no vortexes form, and the material level can be determined from the videos during all the discharge.

Figures 1(b)–1(d) show space-time montages of the discharges obtained by concatenating 1-pixel vertical lines of consecutive video frames focused on the container axis. This technique allowed us to visualize graphically the temporal evolution of the level of each material. Upper and bottom montages correspond to the case of one and two identical orifices, respectively. The dashed red line indicates in each case the total time of discharge τ for $N = 1$, and the blue line represents $\tau/2$. Figure 1(b) corresponds to water discharge. The dark line shows the non-linear decrease in the water level h_t . Note from these montages that, as expected, the same amount of water is discharged with two orifices in half the time required by one orifice. The same happens for the discharge of dry glass beads shown in Fig. 1(c), but in this case, the level h_t of granular material remaining in the silo (black zone) decreases linearly with time as a consequence of the constant flow rate. Therefore, for monophasic flows, the average flow rate is additive, i.e., $Q_{N=2} = 2Q_{N=1}$. On the other hand, Fig. 1(d) shows the discharge of the mixture, where the upper curve corresponds to the water level and the black zone to the grains. Surprisingly, the discharge time with two orifices is considerably longer than $\tau/2$. This unexpected result indicates that $Q_{N=2} < 2Q_{N=1}$, even when both orifices are identical.

Let us explore what happens when more orifices are opened. Figure 2 shows experimental results of monophasic discharges of water and dry grains. The mass M of material remaining in the silo, normalized by the initial mass M_0 , was plotted as a function of time t for $N = 1, 2, 3, 4$, and 5 (color lines). Note that the total time of discharge τ_N , depending on the number of open orifices N , follows the expected relation $\tau_N \approx \tau_1/N$, where τ_1 is the discharge time when only one orifice is open. The liquid discharge can be modeled by combining continuity and Bernoulli equations to obtain an expression for $h_t(t)$, and then, the mass of liquid M_l remaining in the cylinder is calculated by $M_l(t) = \rho_l S_1 h_l(t) = \rho_l S_1 (h_0^{1/2} - (S_2/2)[2g/(S_1^2 - S_2^2)]^{1/2} t)^2$, where S_1 is the inner cylinder area, and $S_2 = C_d N \pi D^2 / 4$ is the output area considering N open orifices. We obtained the reasonable value of the discharge coefficient $C_d = 0.8$ by fitting the experimental data for the case $N = 1$, and then, this value was used for $N = 2, 3, 4$, and 5. Figure 2(a) shows the numerical solutions of the above-mentioned

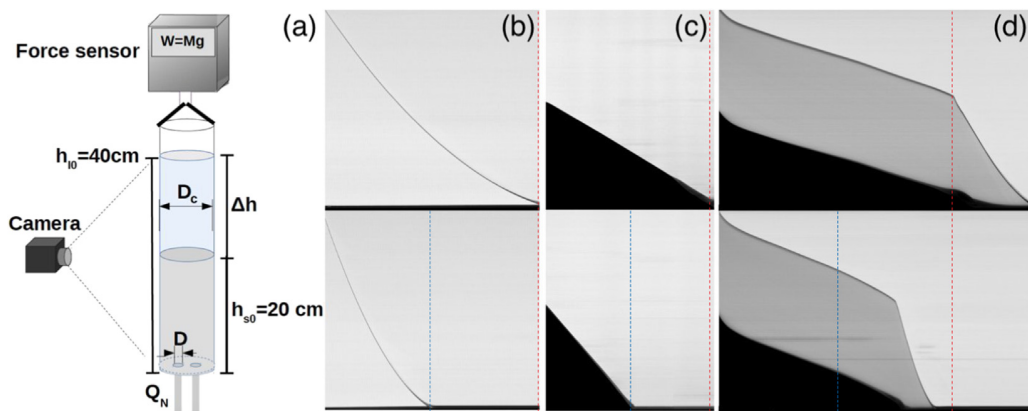


FIG. 1. (a) Sketch of the experimental setup (see details in the text). (b)–(d) Space-time montages built from the videos of the discharge with one orifice (upper panels, $N = 1$) and two orifices (lower panels, $N = 2$) showing the variation of the material levels during the discharge of (b) only water, (c) only dry grains, and (d) water with sedimented grains. In (c) and (d), $d = 50-150 \mu\text{m}$.

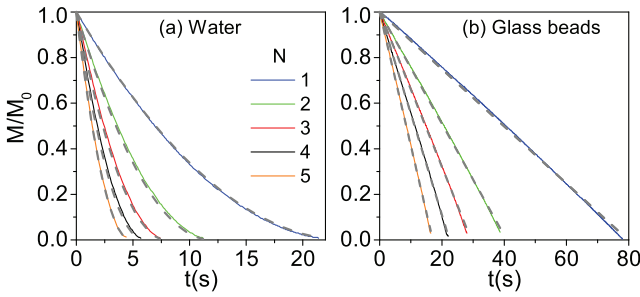


FIG. 2. M/M_0 vs t for the discharge of (a) water and (b) dry glass beads ($d = 50\text{--}150\ \mu\text{m}$) through N orifices. In both cases, the data satisfy the expected relation $\tau_N \sim \tau_1/N$.

expression (gray dashed lines) in excellent agreement with the experimental data, confirming that the total liquid flow is the addition of individual flow rates. For the case of dry grains, the flow rate is constant and given by the slope of each straight dashed line ($M/M_0 = 1 - Q_N t$) shown in Fig. 2(b), which satisfies $Q_N = M_0/\tau_N \approx NQ_1$.

Figure 3(a) shows M/M_0 vs t for the mixture of water and grains of size $d = 50\text{--}150\ \mu\text{m}$. In all cases, the curves decrease with time from $M/M_0 = 1$ until experiencing a sudden break when the silo runs out of grains. This time (highlighted by vertical dashed lines) represents the end of the biphasic flow. After this moment, the nonlinear behavior corresponds to the discharge of the remaining water. One can notice a small deviation from a linear dependence at the beginning of the discharge [also observed in the montage shown in Fig. 1(d)]. This only happens for the case of the smallest grains, probably due to a surface tension effect produced at the orifice when the silo is unblocked. Nevertheless, after this initial effect, we can notice from the first derivatives shown in the inset of Fig. 3(a) that the flow rate, $Q = dM/dt$, remains nearly constant until the end of the biphasic flow, when an abrupt increase in $Q(t)$ at $t \sim \tau_N$ is observed. In Fig. 3(a), we can notice that the biphasic flow ends at $\tau_1 \approx 44$ s for $N = 1$. If the flow rate were additive as in the monophasic cases, one would expect $\tau_2 \sim 22$, $\tau_3 \sim 15$, $\tau_4 \sim 11$, and $\tau_5 \sim 9$ s, for $N = 2, 3, 4$, and 5 , respectively. Nonetheless, instead of those values, $\tau_2 \sim 37$, $\tau_3 \sim 32$, $\tau_4 \sim 28$, and $\tau_5 \sim 26$ s, indicating that the flow rate through each orifice decreases progressively as N is increased.

Similar results were found for other grain sizes with excellent reproducibility (see supplementary material, Secs. I and II). Figure 3(b) shows a log-log plot of τ_N as a function of N for different values

of d (solid points), suggesting a power-law dependence of the form $\tau_N = \tau_1/N^b$. By fitting the data, we found $b = 0.33$ for the smallest grains (black line) and a nearly constant value $b \sim 0.5$ for larger grains (color lines). It can also be noticed that, for the smallest grains ($100\ \mu\text{m}$), we obtained the largest values of τ_N . Then, τ_N decreases with d , but starts to increase again when $d > 360\ \mu\text{m}$ (see also plots in supplementary material, Sec. II). These results suggest a transition of flow regimes depending on the grain size. Figure 3(c) shows the average flow rate defined as $Q_N = [M_0 - M(\tau_N)]/\tau_N$, normalized by Q_1 , as a function of N and for different values of d . The corresponding average flow rates for water and dry grains obtained from Figs. 2(a) and 2(b) are also shown, where $Q_N \approx NQ_1$ is confirmed. From the scaling of τ_N found for the mixture, one can write $Q_N = N^b Q_1$. Using the values of b found in Fig. 3(b), we show in Fig. 3(c) that the data fall in the region delimited by $Q_N/Q_1 \approx N^{1/3}$ for the smallest grains (black dashed line) and $Q_N/Q_1 \approx \sqrt{N}$ for larger grains (orange line).

It is important to mention that there should be a grain size leading to a maximum flow rate (minimum discharge time) because there is a threshold value for D/d below which clogging is observed. For a single orifice, the threshold for a continuous flow of the mixture¹¹ is $(D/d)^{\text{mix}} \sim 3$, considerably lower than for dry grains,² $(D/d)^{\text{dry}} \sim 5$. In this work, we used grain sizes well above such thresholds ($D/d > 7$) to ensure the conditions for continuous discharge. Moreover, we found maximum flow rates in our system with $d \approx 360\ \mu\text{m}$, i.e., $D/d \sim 14$, which is more clearly shown in the linear plot of τ_N vs N found in supplementary material, Sec. II.

The power-law dependence found above for the mixture allows us to estimate Q_N if the value of Q_1 is known. Nevertheless, it does not bring information about the temporal evolution of the process. In a previous research,¹¹ the discharge of a mixture of water and glass beads from a silo with only one orifice was modeled considering the liquid passing through a dynamic porous substrate of thickness $h_s(t)$ that decreases with time. The pressure drop ΔP between the top and the bottom of the granular substrate was estimated using Darcy's law combined with the Kozeny-Carman model. Then, ΔP was introduced in Bernoulli's equation applied to the liquid at the upper free surface and at the orifice, obtaining

$$\rho_l g h_i(t) - 180 \frac{\eta(1-\epsilon)^2}{d^2 \epsilon^3} (v_l - v_s) h_s(t) = \frac{1}{2} \rho_l (v_o^2 - v_l^2), \quad (1)$$

where ρ_l represents the water density, η the viscosity, ϵ the porosity of the granular substrate, d the particle size, $v_l - v_s$ the relative velocity

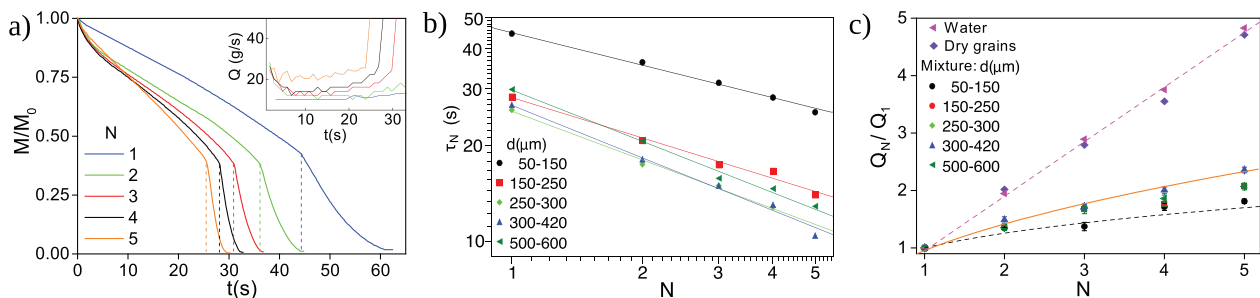


FIG. 3. (a) M/M_0 vs t for $N = 1$ to 5 for the discharge of the mixture ($d = 50\text{--}150\ \mu\text{m}$). Inset: Flow rate Q (absolute value) obtained from the first derivative of data shown in the main plot. (b) Log-log plot of τ_N vs N for the discharge of mixtures with different grain size (points), with power law fits (lines). (c) Q_N/Q_1 vs N for water, dry grains, and mixtures.

between the liquid level and the substrate level, with $v_l = dh_l/dt$ and $v_s = dh_s/dt$, and v_o the velocity at the orifice. The first term of this equation corresponds to the hydrostatic pressure contribution, the second term represents the hydrodynamic resistance imposed by the granular substrate, and the last term corresponds to the kinetic pressure difference. Equation (1) can be combined with the continuity equation applied to the liquid and solved for $h_l(t)$ and $h_s(t)$, and the results are used to calculate the mass of material $M(t)$ remaining in the silo.¹¹ For our system with N orifices, we modified the above-mentioned toy model by considering an orifice of the effective area $S_{\text{eff}} = N\pi D^2/4$. We solved Eq. (1) for v_o , and the continuity equation $S_1 dh_l/dt = \epsilon S_{\text{eff}} v_o$ was integrated numerically. Finally, the value of $M(t)$ was estimated.

Figure 4 shows the numerical solutions of Eq. (1) (dashed orange lines) compared with the experimental results of M/M_0 vs t (solid lines) for $N=1-5$ and $d = 100, 200, 360, 550 \mu\text{m}$. (In Sec. II of supplementary material, the same data with t normalized by τ_N are shown.) In Fig. 4(a), a constant viscosity $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ was used, ϵ was obtained by comparison with the experiments for $N=1$, and then, the value of the hydrodynamic resistance coefficient $180\eta(1-\epsilon)^2/d^2\epsilon^3$ was kept constant for other values of N . It can be noticed that although $M(t)$ for $N=1$ is reasonably well described by the model, the curves for $N > 1$ are underestimated, and the prediction worsens as N augments. Since the model at a constant resistance coefficient predicts faster discharges than that measured in the experiments, one can increase the value of this coefficient by assuming an increase in the effective viscosity η of the mixture when N augments, in order to diminish the discharge rate. Figure 4(b) shows the adjusting curves (dashed lines) obtained by varying η . The specific values used for each fit are reported in supplementary material, Sec. III. Outstandingly, we found that the value of η must indeed increase with N to adjust the experimental data. On the other hand, we can also increase the hydrodynamic resistance by decreasing the porosity ϵ , i.e., increasing the packing fraction $\phi = 1 - \epsilon$ (see required values of ϵ also in supplementary material, Sec. III). Nevertheless, the flow rate of

granular material from a silo is not very sensitive to the initial value of ϕ , at least for the case of dry grains.¹⁷ Moreover, we estimated the evolution of the average packing fraction of the bed ϕ during some discharges for $N=1$ and $N=4$ (see supplementary material, Sec. IV), and we found that ϕ remains fairly constant during the discharge, in agreement with results for one orifice.¹¹ The increase in the resistance coefficient may be due to networking between particles. Perhaps, in the region close to the orifices, the particles realign to form long chains that overlap forming a mesh, which is hard to break apart, increasing the hydrodynamic resistance. The packing fraction could also lie in the range of shear thickening region of non-Brownian suspensions.^{18,19} Further research is required at the particle level to fully understand the underlying physics of mixtures discharged through multiple orifices. For instance, by using x-ray tomography, it was shown recently that the dynamic behavior of dry granular systems is similar to that of complex fluids.²⁰ Two-dimensional (2D) silos were also recently used to visualize and characterize the flow of dry glass beads through a single orifice at the bottom/lateral wall of a Hele-Shaw cell.^{16,21} We adopt this less expensive 2D technique to explore some aspects of the flow in our system.

The non-additive flow rate for the case of the mixture was also found in a quasi-2D cell with two identical orifices (see setup details and protocols in supplementary material, Sec. V). Let us focus here in the analysis at the particle level. Figures 5(a) and 5(b) show PIV snapshots for the flow of dry and immersed grains, respectively. The colored scale represents the particle velocities v , with black corresponding to zero (stagnant zones), and red represents the highest values ($v \approx 0.22 \text{ m/s}$ at the apertures for the case of the mixture). Note that the flow profiles are wider and more parabolic for the case of immersed particles, reflecting the draining effect of the liquid on the granular bed.⁹ Let us remark that the liquid (not visualized with this technique) is moving in the whole cell, which contributes to the overlap of the flow profiles from the top until very close to the orifices. In contrast, dry particles flow in funnel profiles that are almost independent, which results in additive flow rates.¹² We also measured the

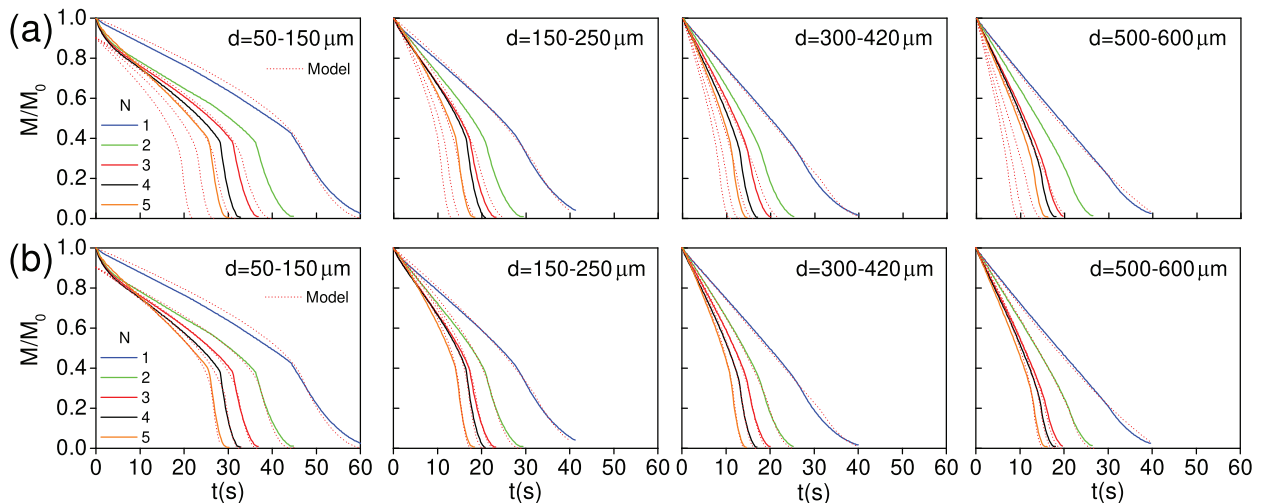


FIG. 4. Discharge experiments for different grain size d and number of orifices N (solid color lines). The numerical solution for $M(t)$ obtained from Eq. (1) is represented by dashed orange lines, considering: (a) constant viscosity and (b) variable viscosity.

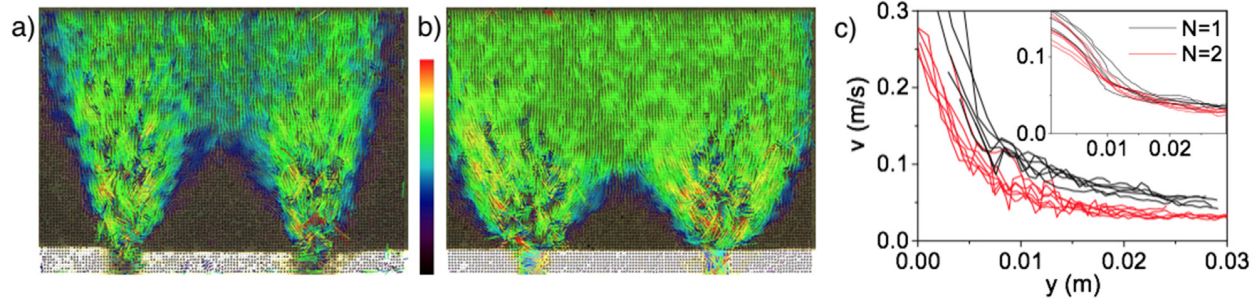


FIG. 5. (a) and (b) Snapshots of PIV analysis for the discharge of particles ($d = 500\text{--}600\ \mu\text{m}$) through two square orifices of 5 mm side at the bottom of a quasi-2D cell, for (a) dry grains and (b) water with grains. (c) Velocity of five particles per orifice followed during the last 30 mm of trajectory above the apertures, for $N = 1$ (black lines) and $N = 2$ (red lines), for the mixture (main plot) and dry grains (inset). The corresponding trajectories for each case are shown in supplementary material, Sec. V.

velocity v of particle tracers during similar trajectories toward the orifices, see Fig. 5(c). For dry particles (see inset), the velocities reach essentially the same values for one and two orifices, supporting again the result of additive flow. For the mixture, in contrast, the particles move more slowly when two orifices are opened (main plot), which leads to a non-additive flow rate. We can also notice that the values of v are lower for dry particles, which is in agreement with the fact that there is more dissipation by friction, in comparison with immersed particles where the liquid lubricates the contacts. It is important to highlight that the main result of this research, i.e., the non-additivity of the mixture flow rate, is very robust. It is observed in quasi-2D and 3D systems, with orifices at the bottom or even at the lateral walls (see supplementary material, Sec. VI). Unfortunately, it is very complex to build a 2D cell considering the grain sizes studied here ($d \ll 1\ \text{mm}$) because the required separation between the walls would be considerably smaller than the water capillary length ($\lambda_c \sim 2.7\ \text{mm}$, at room temperature) and, under such conditions, undesirable capillary effects appear during filling-discharge processes. For further research, we are planning to use a 2D system with millimetric particles to directly visualize local changes in packing fraction close to the orifices, and possible networking between particles during the discharge. The 2D system will also help to identify if the flow reduction per orifice reported here could be another manifestation of Braess's paradox,²² namely, the observation that adding one or more roads to a road network can slow down overall flow through it. Although this effect was initially observed in traffic networks,^{22,23} more recently was reported at different scales ranging from power transmission networks²⁴ to semiconductor mesoscopic networks.²⁵

In summary, we have studied the simultaneous discharge of water and glass beads from a silo with N orifices. Our experiments reveal that the average total flow rate of the mixture Q_N cannot be obtained by simply adding the individual contributions of each orifice Q_1 . In fact, we found that $Q_N \leq \sqrt{N}Q_1$. This result contrasts with the additive flow of monophasic discharges of water or grains, where $Q_N \sim NQ_1$. A toy model previously used to describe the discharge of the mixture through a single orifice was modified taking into account an orifice with a cross section equal to the area of N open orifices. Nevertheless, this simple modification overestimates the discharge rate. We found that the value of the hydrodynamic resistance must be increased in the model as more orifices are opened to reproduce the experimental findings. Particle-laden flows are encountered in many engineering fields:

in mining and oil industry, food processing, etc.; for instance, in the coffee washing process, immersed seeds are discharged from hoppers and tanks with multiple gates. Our research should be taken into account in the silo design for this kind of industrial applications.

See the supplementary material for data reproducibility, fitting values used in the model, details of the quasi-2D setup, and discharges through lateral orifices.

This research was supported by CONACYT Mexico through Frontier Science Project (No. 140604), a postdoctoral Fellowship for L.F.E.-A. (Grant No. I1200/224/2021), and a M.Sc. scholarship for D.R.-L.

AUTHOR DECLARATIONS

Conflict of Interest

The authors have no conflicts to disclose.

Author Contributions

Daniel Rodríguez-López: Data curation (equal); Formal analysis (equal); Investigation (equal); Methodology (equal); Writing – review & editing (equal). **Fernando Carlos Pacheco-Sósol:** Data curation (equal); Formal analysis (equal); Investigation (equal); Methodology (equal); Writing – review & editing (equal). **Luis Fernando Elizondo-Aguilera:** Data curation (equal); Formal analysis (equal); Investigation (equal); Methodology (equal); Writing – review & editing (equal). **Felipe Pacheco-Vázquez:** Conceptualization (lead); Investigation (lead); Methodology (equal); Project administration (lead); Supervision (lead); Writing – original draft (lead).

DATA AVAILABILITY

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

REFERENCES

- ¹R. T. Fowler and J. R. Glastonbury, "The flow of granular solids through orifices," *Chem. Eng. Sci.* **10**, 150–156 (1959).
- ²W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. van de Velde, "The flow of granular solids through orifices," *Chem. Eng. Sci.* **15**, 260 (1961).

- ³R. C. Brown, “Minimum energy theorem for flow of dry granules through apertures,” *Nature* **191**, 458 (1961).
- ⁴S. M. Rubio-Largo, A. Janda, D. Maza, I. Zuriguel, and R. C. Hidalgo, “Disentangling the free-fall arch paradox in silo discharge,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, 238002 (2015).
- ⁵A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza, “Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles,” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 248001 (2012).
- ⁶L. Staron, P.-Y. Lagrée, and S. Popinet, “The granular silo as a continuum plastic flow: The hour-glass vs the clepsidra,” *Phys. Fluids* **24**, 103301 (2012).
- ⁷T. Wilson, C. Pfeifer, N. Mesyngier, and D. Durian, “Granular discharge rate for submerged hoppers,” *Pap. Phys.* **6**, 060009 (2014).
- ⁸J. Koivisto, M. Korhonen, M. Alava, C. P. Ortiz, D. J. Durian, and A. Puisto, “Friction controls even submerged granular flows,” *Soft Matter* **13**, 7657 (2017).
- ⁹J. Koivisto and D. J. Durian, “The sands of time run faster near the end,” *Nat. Commun.* **8**, 15551 (2017).
- ¹⁰M. L. Morgan, D. W. James, M. Monloubou, K. S. Olsen, and B. Sandnes, “Subdiffusion model for granular discharge in a submerged silo,” *Phys. Rev. E* **104**, 044908 (2021).
- ¹¹A. M. Cervantes-Álvarez, S. Hidalgo-Caballero, and F. Pacheco-Vázquez, “The simultaneous discharge of liquid and grains from a silo,” *Phys. Fluids* **30**, 043302 (2018).
- ¹²R. Maiti, G. Das, and P. K. Das, “Granular drainage from a quasi-2D rectangular silo through two orifices symmetrically and asymmetrically placed at the bottom,” *Phys. Fluids* **29**(10), 103303 (2017).
- ¹³S. Kamath, A. Kunte, P. Doshi, and A. V. Orpe, “Flow of granular matter in a silo with multiple exit orifices: Jamming to mixing,” *Phys. Rev. E* **90**, 062206 (2014).
- ¹⁴L. A. Fullard, E. C. P. Breard, C. E. Davies, A. J. R. Godfrey, M. Fukuoka, A. Wade, J. Dufek, and G. Lube, “The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings,” *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **475**, 2221 (2019).
- ¹⁵S. Mondal and M. M. Sharma, “Role of flying buttresses in the jamming of granular matter through multiple rectangular outlets,” *Granular Matter* **16**, 125–132 (2014).
- ¹⁶M. A. Madrid, J. R. Darias, and L. A. Pugnaloni, “A differential equation for the flow rate during silo discharge: Beyond the Beverloo rule,” *EPJ Web Conf.* **140**, 03041 (2017).
- ¹⁷F. Pacheco-Vázquez, A. Y. Ramos-Reyes, and S. Hidalgo-Caballero, “Surface depression with double-angle geometry during the discharge of grains from a silo,” *Phys. Rev. E* **96**, 022901 (2017).
- ¹⁸E. Brown and H. M. Jaeger, “Shear thickening in concentrated suspensions: Phenomenology, mechanisms and relations to jamming,” *Rep. Prog. Phys.* **77**, 046602 (2014).
- ¹⁹M. Otsuki and H. Hayakawa, “Critical scaling near jamming transition for frictional granular particles,” *Phys. Rev. E* **83**, 051301 (2011).
- ²⁰B. Kou, Y. Cao, J. Li *et al.*, “Granular materials flow like complex fluids,” *Nature* **551**, 360–363 (2017).
- ²¹Z. Zou, P. Ruyer, P.-Y. Lagrée, and P. Aussillous, “Discharge of a silo through a lateral orifice: Role of the bottom inclination versus friction,” *Phys. Rev. E* **102**, 052902 (2020).
- ²²D. Braess, “ ber ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung,” *Unternehmensforschung Operations Research* **12**(1), 258–268 (1968).
- ²³R. Steinberg and W. I. Zangwill, “The prevalence of Braess’ paradox,” *Transp. Sci.* **17**(3), 301 (1983).
- ²⁴D. Witthaut, F. Hellmann, J. Kurths, S. Kettemann, H. Meyer-Ortmanns, and M. Timme, “Collective nonlinear dynamics and self-organization in decentralized power grids,” *Rev. Mod. Phys.* **94**, 015005 (2022).
- ²⁵M. G. Pala, S. Baltazar, P. Liu, H. Sellier, B. Hackens, F. Martins, V. Bayot, X. Wallart, L. Desplanque, and S. Huant, “Transport inefficiency in branched-out mesoscopic networks: an analog of the Braess paradox,” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 076802 (2012).

Bibliografía

- [1] Beedle, P. L. (2001). *Silos: an agricultural success story. Cooperative Extension* (1 ed., Vol. 4), University of Wisconsin–Extension.
- [2] Tighe, B.P., Sperl, M., "Pressure and motion of dry sand: translation of Hagen's paper from 1852", *Granular Matter* 9, 141–144 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10035-006-0027-x>
- [3] Sperl, M., "Experiments on corn pressure in silo cells–translation and comment of Janssen's paper from 1895", *Granular Matter* 8(2), 59-65 (2006).
- [4] Coussot, P. (2005). *Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials: applications in industry and environment* (1 ed.), John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Arriola, A., La Spina, B., Sanchez Varretti, E., & Gentile, A. E. (2017). *Producción de malta cervecera*, Universidad Nacional de Cuyo.
- [6] de Gennes, P. G., "Granular matter: a tentative view" *Reviews of modern physics* 71(2), S374-S382 (1999).
- [7] de Gennes, P. G., "Reflections on the mechanics of granular matter", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 261(3-4), 267-293 (1998).
- [8] Boutreux, T., Raphaël, E., & de Gennes, P. G., "Surface flows of granular materials: a modified picture for thick avalanches", *Physical Review E*. 58(4), 4692-4700 (1998).
- [9] Beverloo, W. A., Leniger, H. A., & Van de Velde, J., "The flow of granular solids through orifices", *Chemical engineering science* 15(3-4), 260-269 (1961).

-
- [10] Zuriguel, I., Garcimartín, A., Maza, D., Pagnaloni, L. A., & Pastor, J. M., "Jamming during the discharge of granular matter from a silo", *Physical Review E* 71(5), 051303 (2005).
- [11] Mankoc, C., Janda, A., Arevalo, R., Pastor, J. M., Zuriguel, I., Garcimartín, A., & Maza, D., "The flow rate of granular materials through an orifice", *Granular Matter* 9, 407-414 (2007).
- [12] Arévalo, R., & Zuriguel, I., "Clogging of granular materials in silos: effect of gravity and outlet size", *Soft Matter* 12(1), 123-130 (2016).
- [13] Wilson, T. J., Pfeifer, C. R., Meysingier, N., & Durian, D. J., "Granular discharge rate for submerged hoppers", *Papers in physics* 6(2), 060009 (2014).
- [14] Cervantes-Álvarez, A. M., Hidalgo-Caballero, S., & Pacheco-Vázquez, F., "The simultaneous discharge of liquid and grains from a silo" *Physics of Fluids* 30(4), 043302 (2018).
- [15] Ramírez-Navas, J. S., "Introducción a la reología de los alimentos", *Revista ReCiTeIA* 6(1), 1-46 (2006).
- [16] Koivisto, J., & Durian, D. J., "The sands of time run faster near the end", *Nature communications* 8(1), 15551 (2017).
- [17] Koivisto, J., Korhonen, M., Alava, M., Ortiz, C. P., Durian, D. J., & Puisto, A., "Friction controls even submerged granular flows", *Soft Matter* 13(41), 7657-7664 (2017).
- [18] Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). *Fundamentals of physics*(10 ed.), John Wiley & Sons.
- [19] Bernoulli, D. (1738). *Hydrodynamica: sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*.
- [20] Malcherek, A. "History of the Torricelli principle and a new outflow theory", *Journal of Hydraulic Engineering* 142(11), 02516004 (2016).
- [21] Levenspiel, O. (1993). *Flujo de Fluidos e Intercambiador de calor*, Editorial Reverte SA España.

- [22] Rees, D. A. S., & Bassom, A. P., "The effect of internal and external heating on the free convective flow of a Bingham fluid in a vertical porous channel", *Fluids* 4(2), 95 (2019).
- [23] Pereira, B. M., Dias, G. A., Cal, F. S., Rajagopal, K. R., & Videman, J. H., "Lubrication Approximation for Fluids with Shear-Dependent Viscosity", *Fluids* 4(2), 98 (2019).
- [24] Jabbari, M., McDonough, J., Mitsoulis, E., & Hattel, J. H., "Application of a projection method for simulating flow of a shear-thinning fluid", *Fluids* 4(3), 124 (2019).
- [25] Mahabaleshwar, U. S., Kumar, P. V., Nagaraju, K. R., Bognár, G., & Nayakar, S. R., "A new exact solution for the flow of a fluid through porous media for a variety of boundary conditions", *Fluids* 4(3), 125 (2019).
- [26] Lin, C. C., & Yang, F. L., "Continuum simulation of non-local effects in a granular silo discharge flow using a regularized $\mu(I)$ rheology model", *Physics of Fluids* 33(9), 093302 (2021).
- [27] Staron, L., Lagrée, P. Y., & Popinet, S., "Continuum simulation of the discharge of the granular silo: a validation test for the $\mu(I)$ visco-plastic flow law", *The European Physical Journal E* 37, 1-12 (2014).
- [28] Khalil, M., Ruggieri, S., & Uva, G. "Assessment of Structural Behavior, Vulnerability, and Risk of Industrial Silos: State-of-the-Art and Recent Research Trends", *Applied Sciences* 12(6), 3006 (2022).
- [29] Fowler, R. T., & Glastonbury, J. R., "The flow of granular solids through orifices", *Chemical engineering science* 10(3), 150-156 (1959).
- [30] Dorbolo, S., Maquet, L., Brandenbourger, M., Ludewig, F., Lumay, G., Caps, H., ... & Vincent-Bonnieu, S., "Influence of the gravity on the discharge of a silo", *Granular Matter* 15, 263-273 (2013).
- [31] O'Hern, C. S., Langer, S. A., Liu, A. J., & Nagel, S. R., "Force distributions near jamming and glass transitions", *Physical review letters* 86(1), 111 (2001).

- [32] Mankoc, C., Garcimartín, A., Zuriguel, I., Maza, D., & Pughaloni, L. A., "Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo", *Physical Review E* 80(1), 011309 (2009).
- [33] Zuriguel, I., Olivares, J., Pastor, J. M., Martín-Gómez, C., Ferrer, L. M., Ramos, J. J., & Garcimartín, A., "Effect of obstacle position in the flow of sheep through a narrow door", *Physical Review E* 94(3), 032302 (2016).
- [34] Staron, L., Lagrée, P. Y., & Popinet, S., "The granular silo as a continuum plastic flow: The hour-glass vs the clepsydra", *Physics of Fluids* 24(10), 103301 (2012).
- [35] Ferziger, J. H., Perić, M., & Street, R. L. (2002). *Computational methods for fluid dynamics* (Vol. 3, pp. 196-200). Berlin: springer.
- [36] Cundall, P. A., & Strack, O. D., "A discrete numerical model for granular assemblies", *geotechnique* 29(1), 47-65 (1979).
- [37] Nield, D. A., & Bejan, A. (2006). *Convection in porous media* (Vol. 3), New York: springer.
- [38] Fullard, L. A., Breard, E. C. P., Davies, C. E., Godfrey, A. J. R., Fukuoka, M., Wade, A., ... & Lube, G., "The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings", *Proceedings of the Royal Society A*, 475(2221), 20180462 (2019).
- [39] Zhang, X., Zhang, S., Yang, G., Lin, P., Tian, Y., Wan, J. F., & Yang, L., "Investigation of flow rate in a quasi-2D hopper with two symmetric outlets", *Physics Letters A*, 380(13), 1301-1305 (2016).
- [40] Mondal, S., & Sharma, M. M., "Role of flying buttresses in the jamming of granular matter through multiple rectangular outlets", *Granular Matter* 16(1), 125-132 (2014).
- [41] Neves, M. T., Schwarz, V. A., & Menon, G. J., "Discharge coefficient influence on the performance of aerostatic journal bearings", *Tribology International* 43(4), 746-751 (2010).



Oficio No. IF-SACAD138/2023

Asunto: Carta Aval

MTRO. ALFREDO AVENDAÑO ARENAZA
DIRECTOR GENERAL DE BIBLIOTECAS
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
PRESENTE

El que suscribe, Director del Instituto de Física "Ing. Luis Rivera Terrazas" de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, **AVALA** con base en los archivos que se encuentran en este Instituto que la tesis de **DANIEL RODRÍGUEZ LÓPEZ**, matrícula: 221470427, cuyo título es: "**DESCARGA SIMULTANEA DE LÍQUIDO Y GRANOS DESDE UN SILO CON MÚLTIPLES ORIFICIOS**", ha sido *revisada y aprobada* por el Comité respectivo para presentar y defender su examen de grado correspondiente a la **MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)** el próximo día 23 de agosto de 2023 a las 11:00 horas en el auditorio del IFUAP. Dicho Comité está integrado por los siguientes profesores:

Dra. Ana Lilia González Ronquillo	Presidente
Dr. Ulises Salazar Kuri	Secretario
Dra. Carolina Janani Diliegros Godines	Vocal
Dr. Felipe Pacheco Vázquez	Vocal

Por lo anterior, dicho comité autorizó la impresión de la tesis correspondiente.

Sin otro asunto que el particular, reciba mi más alto reconocimiento.

A T E N T A M E N T E

"Pensar Bien, Para Vivir Mejor"

Puebla, Pue., a 09 de agosto de 2023



DR. FELIPE PÉREZ RODRÍGUEZ
DIRECTOR



DR*FPR/DRA*MECR/LAE*mhr

Instituto de Física
"Luis Rivera Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 Sur, Edif. IF1,
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel
Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 5610, 5611, 2008