

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas



**PROPUESTA DE UNA METODOLOGÍA INTEGRAL PARA
EL ESTUDIO DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE
FUENTES EQUIVALENTES DE GENERACIÓN DEL EEG
USANDO EL MODELO DE MEDIO CONDUCTOR**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JAVIER MOZQUEDA LAFARGA

DIRECTOR DE TESIS

DR. ANDRÉS FRAGUELA COLLAR

PUEBLA, PUEBLA

ENERO/2020



DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

JAVIER MOZQUEDA LAFARGA

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 7 de enero de 2020, con la tesis titulada:

“PROPUESTA DE UNA METODOLOGÍA INTEGRAL PARA EL ESTUDIO DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE FUENTES EQUIVALENTES DE GENERACIÓN DEL EEG USANDO EL MODELO DE MEDIO CONDUCTOR”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 14 de enero de 2020

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

DRA.PDS/maiv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

Mi tesis se la dedico con todo mi amor y cariño a mi familia, por estar presentes en mis días de arduo trabajo, por sus palabras de aliento y por vivir conmigo cada una de las etapas de este proceso formativo.

Agradecimientos.

La vida te da oportunidades de agradecer a las personas que de alguna forma han tenido un impacto en la formación académica y moral de uno. En la biblia en Lucas 17:13-19 se cuenta la historia de 10 leprosos que fueron curados por Jesús, pero solo uno volvió a darle las gracias por haberlo curado. Esto me hace reflexionar de la importancia de esta parte de la tesis, debido a que una de las cosas que se le olvida al ser humano es ser agradecido.

Por lo que le doy las gracias, a mi esposa Abigail por tener que lidiar con mis momentos de trabajo, por mis momentos en los cuales estuviste sola debido al trabajo académico envuelto en este trabajo doctoral. Agradezco a mis hijas gemelas Grecia Nikory y Alexia Sayuri por ser el motor de mi superación en todo sentido y ser las niñas que le dan alegría a mis días con sus acciones.

Le doy las gracias a mis padres Francisco Javier y Judith por estar presentes en todos los días de mi vida, por siempre estar ahí de forma incondicional, soportando mis momentos de inseguridad ante un proyecto tan grande como este, no hay nada en la vida con la cual yo pueda pagarles por todo lo que han hecho por mí.

Le doy las gracias al Dr. Héctor Ramirez Diaz por ser quien puso la semilla de la curiosidad científica, por ser la persona que siempre me ha acompañado de alguna forma y otra en mi crecimiento académico desde mi ingeniería hasta este día, le doy las gracias por su amistad.

Le doy las gracias al Dr. Andrés Fraguela Collar por estar dispuesto a enseñarme, guiarme, corregirme, por su pasión por la ciencia, por sus consejos de la vida y por darme la oportunidad de ser mi asesor, además le doy las gracias por su hospitalidad y amistad que se han forjado en estos años cuando nuestras vidas se cruzaron por primera vez.

Le doy las gracias al Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros y a la Dra. María Monserrat Morín Castillo por su hospitalidad en todo este tiempo, por sus consejos, por estar dispuestos acompañarme en mis momentos de soledad y de ansiedad, muchas gracias por su amistad.

Además, le doy las gracias al Dr. Moisés Soto Bajo por guiarme en este trabajo de tesis y ser una persona siempre dispuesta a ayudarme. Le doy las gracias al Dr. José Julio Conde Mones y al Dr. Raúl Felipe Sosa por estar siempre dispuestos a asesorarme cuando fue necesario.

Le doy las gracias a mis compañeros Alejo y Emmanuel por estar a mi lado en distintas circunstancias de la propia vida tanto difíciles como de alegría.

Le doy las gracias al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dra. María Monserrat Morín, Dr. Fernando Rojas Rodriguez por acompañarme a lo largo del doctorado como miembros del comité tutorial, gracias por cada uno de sus consejos y por su paciencia que me tuvieron.

Le doy las gracias a los miembros del jurado Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo, Dr. Rolando José Biscay Lirio, Dr. Moisés Soto Bajo, Dra. María Monserrat Morín Castillo y al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por sus correcciones a esta tesis.

Le doy las gracias a las autoridades del posgrado en la FCFM de la BUAP, desde el inicio del doctorado, en particular Dr. Enrique Barradas Guevara, a la Dra. Lidia Aurora Rebollar Hernández así como a la Directora de la FCFM Martha Alicia Palomino Ovando por siempre estar dispuestos a ayudarme en cualquier aspecto relacionado con mi estancia doctoral.

Cada momento vivido en estos años son únicos, me ha dado la oportunidad de crecer, de corregir errores y de agradecer a Dios

por darme la oportunidad de darme la salida ante las distintas pruebas que he afrontado.

Introducción

Debido al papel central del cerebro en el funcionamiento del cuerpo humano, las enfermedades relacionadas con aquel tienen generalmente la capacidad de influir grandemente en la vida de la persona afectada, constituyendo este tipo de patologías un tema de importancia capital en el cuidado de la salud. Por ejemplo, según la Organización Mundial de la Salud, la Epilepsia es la enfermedad del cerebro crónica más común, afectando a más de 50 millones de personas de todas las edades en todo el mundo [1].

Una estrategia básica a la hora de desarrollar tratamientos para la curación y prevención de estas enfermedades, es entender sus causas y funcionamiento. Una cualidad definitoria y fundamental del cerebro, clave en su funcionamiento, es su destacada actividad eléctrica. Básicamente, las neuronas se comunican a través de conexiones que conducen corrientes eléctricas que producen cambios en el potencial eléctrico. Esta actividad puede medirse de distintas maneras, con objeto de obtener información sobre el funcionamiento interno del cerebro. En particular, una de las técnicas más usadas es la Electroencefalografía. Las señales electroencefalográficas (EEG) son mediciones de las diferencias de potencial eléctrico en electrodos dispuestos de distintas maneras sobre el cuero cabelludo de la cabeza [2], [3].

En este contexto, una de las cuestiones principales a la que tratan de dar respuesta expertos de varias disciplinas (neurofisiólogos, bioingenieros, físicos, matemáticos, computólogos, entre otros) es el Problema de identificación de fuentes de actividad eléctrica en el cerebro. A grandes rasgos, este problema consiste en identificar o estimar las fuentes, incluyendo su localización y descripción, que originan o generan el potencial eléctrico que resulta ser medido en forma de EEG.

Introducción

Desde el punto de vista de la Modelación Matemática y Computacional, se parte de las teorías fundamentales de la Física y la Electrofisiología para construir modelos de conducción de las señales eléctricas adecuados. A partir de éstos, se plantean los paradigmas matemáticos que modelan los problemas de interés. En particular, el Problema de identificación de fuentes de actividad eléctrica en el cerebro cae en el marco de la Teoría de problemas inversos [4], [5]. Básicamente, se trata de determinar la causa de cierto fenómeno. Posteriormente, se diseñan métodos y algoritmos para el cálculo numérico, por lo general computacional, de las soluciones matemáticas (o más bien aproximaciones) que representan las fuentes de actividad.

Existen muchos trabajos en la literatura [6], [7], [8], [9], [10] y las referencias citadas ahí que tratan sobre el Problema de identificación de fuentes de actividad eléctrica en el cerebro y que usan como base el modelo de medio conductor, cuya justificación puede encontrarse en [11], [12]. Desde el punto de vista matemático, existen varios problemas que surgen con este tipo de modelos, los cuales están resueltos parcialmente en la literatura, pero no totalmente.

Un primer problema es debido al carácter estacionario del modelo. El fenómeno, la variación del potencial eléctrico en los distintos tejidos de la cabeza, y en particular las mediciones EEG, es obviamente dependiente del tiempo. Sin embargo, el modelo estacionario no refleja esta dependencia temporal. Esto provoca que, aunque los datos electroencefalográficos sean utilizados lógicamente para resolver el problema inverso, su naturaleza variable en el tiempo no es tomada en cuenta enteramente, sino indirectamente. La omisión de este tipo de información puede ser relevante.

Lo que usualmente se hace para identificar la fuente, también dependiente del tiempo, es resolver secuencialmente el problema

inverso para cada instante de tiempo de la medición EEG, que por naturaleza es discreta. Esto provoca que los errores se vayan acumulando, especialmente debido al mal planteamiento de los problemas de identificación estacionarios.

El segundo problema es la falta de unicidad en la clase de las fuentes a identificar. Esto generalmente no se toma en consideración de manera explícita en la solución del problema inverso, lo que puede acarrear problemas en la convergencia de las aproximaciones (véase capítulo 6 de [4]).

Por lo general, lo que se hace es resolver el problema por un método de ajuste iterativo mediante algún método de descenso, asociado a un funcional que mida el error entre la medición teórica asociada a la fuente en la iteración dada, y la medición real. Se trata de minimizar el funcional de ajuste, reduciendo el error. De esta manera se van obteniendo aproximaciones que se espera se vayan ajustando a la medición.

Sin embargo, al no tener garantizada la unicidad de solución del problema inverso en la clase en cuestión, no se puede asegurar la convergencia de todos los algoritmos numéricos que se reducen a resolver ecuaciones operacionales mal planteadas de primer tipo, como son todos los problemas de identificación de fuentes, coeficientes y condiciones de contorno que se modelan a través de ecuaciones diferenciales.

En particular, se tiene toda la clase de algoritmos en que se imponen restricciones a priori sobre compactos como son los métodos de soluciones aproximadas y cuasisoluciones que pueden consultarse en el epígrafe 1 del capítulo 6 de [4] y también para todos los algoritmos que se derivan de generalizaciones de la estrategia de regularización de Tikhonov para construir estrategias admisibles, basadas en el análisis de un sistema singular asociado al operador, como es el caso de la teoría general

Introducción

de regularización para operadores compactos desarrollada en el epígrafe 2.1 de [5] donde se definen diferentes estrategias a partir de la introducción del concepto de filtros regularizantes.

Cuando no se exige que la clase de objetos a identificar sea una clase de unicidad, lo cual en el caso de problemas inversos lineales equivale a la inyectividad del operador (por ejemplo, identificación de fuentes para problemas de contorno lineales) entonces pueden haber muchas soluciones. Si el problema inverso es lineal se encuentra un subespacio vectorial y de soluciones y la salida es “quedarse con la de norma mínima” lo cual es sólo un argumento matemático para obviar la falta de unicidad pero no asegura que esta solución corresponde a la solución real. Cuando los problemas son no lineales los algoritmos usuales de optimización de funcionales empiezan a “brincar de un posible mínimo a otro” y, por ello se han desarrollado los algoritmos genéticos en los que se añaden restricciones que conducen a una solución única y la teoría de “Optimización Global” (véase [13]) junto con métodos heurísticos de gran complejidad numérica que se complican aún más en el caso cuando los problemas de optimización son mal planteados y, en el mejor de los casos, nos permiten encontrar múltiples soluciones del problema inverso que se consideran como múltiples escenarios y se requieren criterios adicionales de los expertos que van a usar los resultados para decidir por uno de ellos.

Nosotros partimos de la base de que lo mejor es obtener suficiente información a priori sobre la clase de objetos a identificar para que sea una clase de unicidad y, de esa manera, poder aplicar los resultados más clásicos que están debidamente fundamentados teóricamente y no se basan en algoritmos heurísticos.

Como consecuencia, no queda claro que las “aproximaciones” sucesivas sean algo que aproxima a una fuente que reproduzca de manera aproximada la medición. Puesto que el error puede no

Introducción

tender a cero, como consecuencia el error del funcional puede no ser menor que el error de medición. Esta dificultad se observa claramente en la aplicación del método iterativo de cuasisoluciones (ver [4]), por ejemplo.

Además, es importante tener en cuenta la información fisiológica sobre la ubicación y propiedades de la fuente que genera una actividad EEG determinada (ritmo básico, potencial evocado, etc). Esto permite caracterizar las propiedades de la clase de fuentes donde se resuelve el problema de identificación. Una vez hecho esto, el problema no consiste únicamente en resolver el problema matemático de minimizar un funcional de ajuste. Por un lado, la fuente que minimice el funcional puede estar muy lejos de reproducir de manera aproximada la señal EEG medida. Por otro lado, generalmente las clases de fuentes con sentido fisiológico, tales como los multipolos, las fuentes concentradas en corteza y las fuentes espacialmente constantes a trozos, o bien corresponden a clases de funciones generalizadas -para las que es necesario dar una interpretación adecuada a las soluciones de los problemas de contorno asociados-, o son subconjuntos con interior vacío en las clases de funciones comúnmente utilizadas para resolver los problemas de optimización, y por lo tanto, no tiene sentido aplicar los métodos de descenso, que requieren conjuntos abiertos, para estudiar estos problemas.

Por otro lado, como las mediciones electroencefalográficas son mediciones espacialmente discretas, se requiere simplificar excesivamente la clase de fuentes para poder obtener unicidad en la identificación. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se trata de ajustar las mediciones EEG obtenidas en un electroencefalógrafo convencional con 18 electrodos activos a un número finito de puentes puntuales en forma de dipolos (véase [14], [15]). En ese caso, si se quiere determinar completamente las 3 coordenadas de la ubicación de cada dipolo y las 3 coordenadas de su respectivo

Introducción

momento dipolar, se pueden identificar de manera única solamente 3 dipolos. Así, para poder identificar 6 dipolos que reproduzcan una medición EEG, usualmente se fija su ubicación espacial de antemano, de manera que únicamente sea necesario determinar las coordenadas de sus momentos dipolares. Otra cosa que puede hacerse es discretizar el modelo de medio conductor junto con las fuentes para que el número de parámetros a identificar sea del mismo orden que el número de datos obtenidos de la medición, pero esto puede sobre simplificar las características fisiológicas de la clase de fuentes que se pueden identificar. Es por ello que nosotros preferimos utilizar el modelo continuo, extrapolando la medición en los electrodos del EEG a todo el cuero cabelludo de una manera conveniente, obteniendo señales continuas coherentes con el modelo.

En este trabajo de tesis se da una respuesta a las dificultades expuestas anteriormente, y se da una metodología integral que puede ser aplicada a cualquier clase de fuentes variables en el tiempo y de cuadrado integrable en el volumen ocupado por el cerebro, fijada a priori de acuerdo a las características de las mediciones.

Nuestro objetivo es mostrar la metodología general, utilizando expresiones analíticas para las soluciones de ciertos problemas de contorno. Para ello, desarrollaremos todo el trabajo suponiendo una geometría simple, en forma de esferas concéntricas para las superficies de separación entre el cerebro y las diferentes capas que componen el resto de la cabeza. Por simplicidad, nos limitaremos a considerar una sola capa. En el caso en el que se quiera trabajar con geometrías realistas, deben considerarse varias capas, así como superficies más complicadas. Los problemas de contorno serán resueltos numéricamente en este caso, por lo general.

Introducción

Se destacará la importancia de que las clases de fuentes a identificar satisfagan una condición de unicidad con respecto a la solución del problema inverso.

Una de las conclusiones principales de este trabajo, que merece la pena destacar, es la siguiente: se considera una clase de fuentes arbitraria, que satisfaga la condición de unicidad con respecto a la solución del problema inverso de identificación de la fuente que aproxima una medición dada. Independientemente de cuál sea esta clase de fuentes, la clase de fuentes armónicas con respecto a la variable espacial, y sus propiedades, juega un papel central en la caracterización de la fuente en la primera clase. Una parte importante del presente trabajo se dedica a desarrollar este hecho.

A pesar de que nos encontramos en el marco de un modelo estacionario, veremos cómo es posible trabajar directamente con las mediciones EEG como señales dependientes del tiempo.

Otro punto sobre el que se quiere hacer énfasis es que el problema de identificación de fuentes no debe resolverse pensando solamente en las fuentes, sino también teniendo en cuenta la naturaleza de las mediciones EEG. Para ello, en el capítulo 3 se desarrolla una teoría de representación de este tipo de señales. Basándonos en un análisis previo, se proponen expresiones sencillas que permiten aproximar adecuadamente estas señales de banda limitada. Esto se aplica tanto en el caso de ritmos básicos como en el de ráfagas de espigas, ondas y espigas-onda, correspondientes a ciertas manifestaciones anómalas del EEG.

Sobre el contenido de este capítulo 3, merece la pena hacer hincapié en lo siguiente: en los métodos tradicionales de filtraje, se trata de "eliminar las frecuencias que se consideran ruido". El inconveniente de este enfoque, es que se corre el riesgo de eliminar también frecuencias "necesarias" para caracterizar la

Introducción

señal pura, modificando "demasiado" la señal EEG. Éste es el caso frecuentemente de los ruidos provocados por los artefactos musculares; al "limpiar" estos artefactos, la señal queda afectada sensiblemente.

Por este motivo, planteamos que no es necesario ni conveniente este tipo de filtrado previo a la identificación de fuentes. En vez de esto, se muestra cómo analizando la señal se pueden obtener "aproximaciones convenientes" en forma de señales de banda limitada. Estas descomposiciones "extraen" las componentes relevantes de la señal, obviando aquellas que no son características de la señal pura. De esta manera, los ruidos se "descartan" de manera automática.

Finalmente, dado que el problema de identificación de fuentes es un problema mal planteado, se requiere utilizar un algoritmo de regularización para minimizar la sensibilidad a los errores en los datos EEG. Es muy natural resolver este tipo de problemas con métodos iterativos. Sin embargo, estos métodos, como por ejemplo el algoritmo de Tikhonov, imponen restricciones en la suavidad de la solución. Para evitar este inconveniente, en este trabajo se ha decidido utilizar una metodología diferente, que además permite desde un inicio determinar si la clase de fuentes utilizada es apropiada. El método utilizado se llama "Método de Datos Admisibles", y se expone en la sección 2.5.

El método de datos admisibles requiere de una metodología específica de interpolación de los datos EEG medidos en los electrodos en toda la cabeza. Este tema está fuera del alcance de este trabajo, debido a su extensión, quedando como una propuesta de trabajo futuro.

Además, hemos aplicado la metodología completa de identificación al caso de fuentes variables en el tiempo con soporte en una vecindad de la corteza cerebral, donde son

Introducción

armónicas. Esta clase de fuentes tiene un sentido práctico mucho más importante que la clase de fuentes armónicas en todo el volumen cerebral. Esto sin menoscabo de la importancia de esta última clase en la caracterización de la fuente armónica en una vecindad de la corteza.

Objetivos del trabajo de tesis

El problema de estudio de esta tesis se enmarca en el problema inverso electroencefalográfico, el cual consiste en hallar las fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de mediciones del potencial eléctrico medido en el cuero cabelludo debido a la actividad de estas fuentes. Las fuentes bioeléctricas que se trata de identificar en este problema corresponden a la divergencia de la función vectorial que describe la densidad de las corrientes impresas (\vec{J}^P). Para este estudio se considera a la cabeza dividida en capas conductoras con conductividad constante, y la más interna de ellas se identifica con el volumen ocupado por el cerebro.

Primeramente, identificaremos cierto tipo de fuentes equivalentes que corresponden a funciones armónicas en todo el volumen cerebral o en una vecindad de la corteza.

Posteriormente veremos cómo esta metodología se traslada al caso cuando se consideran mediciones EEG variables en el tiempo y se propondrá un algoritmo para reconstruir la variación espacio-temporal de la fuente que reproduce dichas mediciones.

También se desarrollará una metodología basada en el método de datos admisibles para disminuir el efecto de los errores de medición en la identificación de la fuente. La metodología aplicada toma en consideración la relación existente entre las propiedades de las fuentes a identificar y las propiedades de las mediciones generadas por ellas (método de datos admisibles).

Estructura de la tesis

La estructura de la tesis se da de la siguiente forma. En el Capítulo 1 “Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro”, se discutió lo relacionado con la conceptualización de la medición EEG y las causas que la originan. A partir del modelo de medio conductor se hace el planteamiento del problema, así como los resultados preliminares para el estudio de éste.

En el Capítulo 2 llamado “Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo”, se hace el planteamiento operacional del problema de identificación de fuentes, debido a que se reduce el problema inverso a un planteamiento operacional. Además se da la solución del problema de Cauchy en esferas concéntricas con datos exactos. Se obtienen las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado, para que el problema de Cauchy tenga solución, así como la determinación de la fuente armónica que reproduzca la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado, en volumen. Esta es de suma importancia debido a que la determinación de dicha fuente armónica en el volumen cerebral es parte central en la metodología de identificación de fuentes en clases de unicidad arbitrarias y en la definición de un esquema general de regularización que es aplicable a la identificación de fuentes distribuidas y focalizadas. En el Capítulo 3 “Expresión matemática aproximada de señales EEG” se da una representación matemática de las mediciones electroencefalográficas, tales como los ritmos básicos, ráfagas de espigas, espigas-ondas y ondas afiladas, las cuales pueden ser utilizadas para identificar las fuentes que las reproducen.

Índice de simbología

$M_{M \times N}(\mathbb{R})$	Conjunto de matrices reales de M filas por N columnas.
$W^{(1)}$	Se utiliza el superíndice (1) en estos espacios para designar sus subespacios correspondientes a funciones que son ortogonales a las constantes con respecto al producto escalar correspondiente, es decir, si W es cualquiera de estos espacios de Hilbert, entonces denotaremos mediante $W^{(1)} = \{w \in W : \langle w, 1 \rangle_W = 0\}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ es el producto escalar en W .
F^\perp	El superíndice \perp se usa para denotar el subespacio ortogonal en W a un subconjunto F de W , es decir, $F^\perp = \{w \in W : \langle w, f \rangle_W = 0, \forall f \in F\}$.
$L_2(\Omega_i)$	Funciones de cuadrado integrable definidas en Ω_i , para $i = 1, 2$.
$L_1(\mathbb{R})$	Funciones definidas en \mathbb{R} que son integrables en el sentido de Lebesgue.
$\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$	Funciones armónicas ortogonales a las constantes con respecto al producto escalar en $L_2(\Omega_1)$.
$H_1(\Omega_i)$	Funciones de Sobolev definidos de la siguiente forma $H_1(\Omega_i) = \{u \in L_2(\Omega_i) : u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_i)\}$, donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ son derivadas generalizadas en el sentido de Sobolev para todo $i = 1, 2$.
$H_{\frac{1}{2}}(S_i)$	Subespacios de $L_2(S_i)$ para $i = 1, 2$, constituidos por las trazas a S_i de las funciones de $H_1(\Omega_i)$.
$L_2([0, T], L_2^{(1)}(\Omega_1))$	Espacios de funciones cuadrado integrable sobre $[0, T] \times \Omega_1$ véase([16], [17]).
$C^\infty(S_2)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre S_2 .



Índice

Dedicatoria	I
Agradecimientos.....	III
Introducción.....	VII
Objetivos del trabajo de tesis.....	XVII
Estructura de la tesis	XIX
Índice de simbología.....	XXI
Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro.....	1
1.1 Conceptualización de la noción de fuente de actividad eléctrica en el cerebro y un modelo simplificado de medio conductor para modelar la generación del EEG	2
1.2 Conceptualización de la medición EEG y las causas que la originan.....	7
1.2.1 Hipótesis con respecto a las mediciones EEG.....	7
1.2.2 Hipótesis con respecto a las fuentes bioeléctricas	12
1.3 Discusión sobre los planteamientos de problemas inversos del modelo del EEG.....	17
Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo.....	25
2.1 Reducción del problema inverso a un planteamiento operacional cuando la distribución del potencial en el cuero cabelludo no varía en el tiempo (caso estacionario).....	27
2.2 Reducción del problema de identificación de fuentes en el cerebro en el caso estacionario, a un problema de datos de Cauchy sobre la corteza cerebral	34

2.3 Problema de identificación de fuentes armónicas definidas en el volumen ocupado por el cerebro en el caso estacionario	42
2.4 Importancia de la clase de fuentes armónicas en la metodología de identificación de fuentes en clases de unicidad arbitrarias para el caso estacionario y aplicación al caso particular de identificación de fuentes armónicas en una vecindad de la corteza	49
2.5 Importancia de la clase de fuentes armónicas en la aplicación del método de datos admisibles (MDA) a un esquema general de regularización para el problema de identificación de fuentes en clases de unicidad en el caso estacionario	69
2.6 Identificación de fuentes variables en el tiempo a partir de mediciones EEG	78
Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG	86
3.1 Expresión matemática aproximada de ritmos basales en las señales EEG	86
3.1.1 Motivación	86
3.1.2 Operadores de restricción	89
3.1.3 Funciones básicas para los ritmos basales	92
3.1.4 Esquema de aproximación de los ritmos basales	97
3.1.5 Algoritmo para el cálculo numérico de los aproximantes de la medición EEG en un electrodo	107
3.1.6 Aproximación numérica de los ritmos básicos que componen una señal EEG	110
3.2 Peso relativo de los ritmos básicos y segmentación	114

3.3 Ejemplos numéricos de aproximación de ritmos básicos y segmentación	118
3.3.1 Simulación 1	119
3.3.2 Simulación 2	132
3.4 Expresión matemática aproximada de eventos en las señales EEG: espigas, espigas-ondas y ondas afiladas.....	145
3.4.1 Motivación.....	145
3.4.2 Parametrizaciones.....	147
3.4.3 Ejemplos	150
Resumen de resultados principales de la tesis	158
Conclusiones y perspectivas.....	164
Índice de figuras	170
Apéndice A.....	176
A.1. Conceptualización del origen del EEG.....	176
A.2. Conceptualización de la manifestación electroencefalográfica de la actividad del cerebro	187
A.2.1 Interpretación del electroencefalograma.....	193
A.2.2 Epilepsia focalizada y epilepsia generalizada.....	194
Bibliografía.....	200



Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

A través de los años, el estudio del cerebro se ha ido incrementando. El volumen de la investigación en ingeniería biomédica ha crecido enormemente en las últimas décadas. Los desarrollos tecnológicos que permitieron el procesamiento de datos a gran escala han significado una demanda de investigadores adecuadamente calificados en este campo. Desafortunadamente, la capacitación de los investigadores no ha seguido esta demanda. Es cierto que hay muchos neurofisiólogos y muchos matemáticos aplicados a su alrededor, sin embargo, para desarrollar una tecnología biológicamente aplicable, particularmente en el caso en que los dispositivos deben interactuar directamente con la biología, es necesario contar con personas que puedan comprender estas disciplinas.

Esta tesis es un acercamiento a un área particular de la ingeniería biomédica: en particular si se tiene una medición de actividad electroencefalográfica que puede ser considerada normal o anormal desde una perspectiva de la Teoría de “señales”, el objetivo es encontrar las fuentes que generan dicha actividad.

La experiencia y la teoría necesarias para avanzar en la comprensión del cerebro están bien establecidas tanto en neurofisiología como en ingeniería, pero el vínculo de comunicación que permitiría la portabilidad del conocimiento de una disciplina a la otra es incipiente.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

Veamos a continuación las bases para la modelación de medio conductor y como se puede conceptualizar la noción de fuente para la generación del EEG.

1.1 Conceptualización de la noción de fuente de actividad eléctrica en el cerebro y un modelo simplificado de medio conductor para modelar la generación del EEG

En el modelo simple de medio conductor que se desarrolla en [11], [12] se considera al cerebro como un medio conductor de la corriente eléctrica, en el que además existe un mecanismo de generación de otras corrientes de carácter biológico producidas por la actividad neuronal a las que llamaremos corrientes impresas. Denotaremos por Ω_1 a la región ocupada por el cerebro, $\partial\Omega_1 = S_1$ su frontera, que corresponde a la corteza cerebral, σ_1 su conductividad para la corriente Óhmica (que en un cerebro “normal” puede considerarse constante e igual a la conductividad del agua saturada de sal [2]) y μ su permeabilidad magnética.

Además, supondremos que el campo eléctrico generado en el cerebro se debe a las propiedades conductivas del cerebro como medio físico y a fuentes de actividad eléctrica generadas únicamente por la actividad neuronal que producen un vector de corriente al que denotaremos mediante \vec{j}^i , al cual llamaremos densidad de “corriente impresa”. Esta densidad de corriente se origina de la fuerza electromotriz producida por la actividad biológica en el tejido cerebral y a las fuentes que la originan les llamaremos fuentes de actividad neuronal.

También en el trabajo [11] se ha estudiado el problema de identificar las fuentes de actividad exacerbada, correlacionando el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} con la densidad de

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

corriente \vec{j}^i , mediante la aproximación cuasiestática de las ecuaciones de Maxwell (las cuales se justifican en [18]), y que se establece mediante las ecuaciones:

$$\vec{E} = -\nabla u_1, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{j} = \vec{j}^i + \sigma_1 \vec{E}, \quad (1.4)$$

donde u_1 es el potencial del campo eléctrico producido en el volumen cerebral por la actividad neuronal, \vec{j} es la densidad total de corriente producida en el cerebro, la cual como se puede observar en (1.4) es la suma de la contribución de la densidad de corriente impresa \vec{j}^i más la corriente de desplazamiento, y $\sigma_1 \vec{E}$ es obtenida a partir de la ley de Ohm dado que se supone que el campo \vec{E} es conservativo.

Es importante señalar que la corriente impresa \vec{j}^i es una corriente local en el contexto neuronal, mientras que la corriente óhmica $\sigma_1 \vec{E}$ no está restringida a fluir localmente debido a que fluye en todo el espacio extracelular.

En el análisis que se realiza en [11] se supone que la variación temporal del campo magnético \vec{B} es despreciable. Por lo tanto, de las ecuaciones (1.2), (1.3) y de la identidad vectorial $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$, se concluye fácilmente que

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.5)$$

Por otro lado, en biomagnetismo la búsqueda de las localizaciones de las fuentes de corriente suele limitarse a una escala de longitud

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

macroscópica, por lo cual es conveniente reemplazar \vec{j}^i por una corriente de densidad equivalente \vec{j}^P que incorpora \vec{j}^i y los efectos de los cambios microscópicos en la conductividad, según [19].

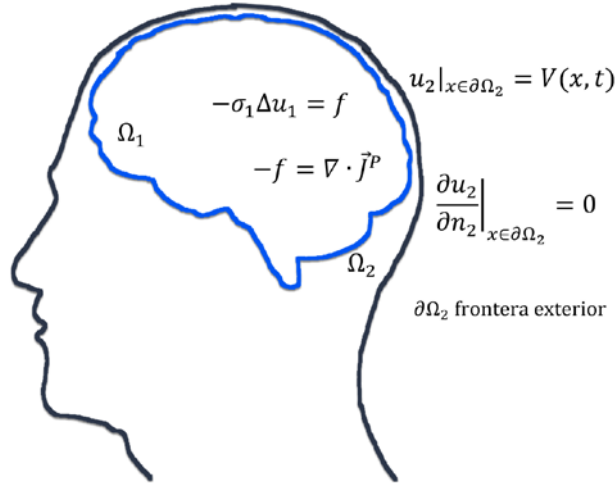


Figura 1-1 Representación esquemática del modelo simple de medio conductor.

Si se utiliza la ecuación (1.1) para el campo eléctrico \vec{E} , y se reemplaza \vec{j}^i por \vec{j}^P , se puede expresar (1.4) de la siguiente manera:

$$\vec{j} = \vec{j}^P - \sigma_1 \nabla u_1. \quad (1.6)$$

Si se utiliza la ecuación (1.5) y se le aplica a (1.6) se obtiene que

$$\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) = \nabla \cdot \vec{j}^P. \quad (1.7)$$

En lo que sigue se va a denotar a $\nabla \cdot \vec{j}^P$ mediante $-f$ y por abuso de lenguaje nos referiremos a $-f$ como la “fuente de actividad

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

eléctrica” en el cerebro, cuando realmente la fuente está relacionada con \vec{j}^P y no con $\nabla \cdot \vec{j}^P$.

Si suponemos que la conductividad es constante, entonces obtendremos la ecuación de tipo Poisson:

$$-\sigma_1 \Delta u_1 = f \quad (\text{en } \Omega_1), \quad (1.8)$$

para describir la variación del potencial eléctrico en el volumen cerebral.

Como podemos observar, el modelo anterior no considera el mecanismo de generación de las corrientes impresas. El modelo es muy simple debido a que en la expresión para la densidad de corriente volumétrica impresa \vec{j}^P en realidad aparecen otras variables que dependen del tiempo y del estado del cerebro, el cual no sólo está descrito por u_1 , sino además depende de una serie de parámetros que tienen que ver con las conductividades de cada tipo de corriente iónica, así como de la probabilidad de activación y de inactivación de los canales iónicos, por lo que se concluye que la fuente no es extrínseca del sistema, que es lo que se supone en este modelo [20].

Lo anterior es mencionado con la finalidad de enfatizar la simplicidad del modelo que vamos a utilizar para poder identificar fuentes bioeléctricas que reproduzcan las mediciones EEG. Es por ello por lo que será importante definir el tipo de actividad que podemos asociar a la existencia de una fuente que la genera, como es el caso de la actividad del tipo 1 y 2 mencionada en la sección 1.1, es decir:

1. Ritmos básicos que corresponden a una actividad relacionada con estados mentales.
2. Actividad sensorial evocada por estímulos sensoriales.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

Esto es debido a que la actividad de tipo 3, 4 y 5 puede tener un origen mucho más complejo que el que se pueda describir a través de una fuente.

Por otra parte, se considera que el resto de la cabeza es también un medio conductor homogéneo Ω_2 con frontera externa (correspondiente al cuero cabelludo) S_2 , con una conductividad promedio constante σ_2 , en el que no se producen fuentes generadoras de actividad eléctrica (ver Figura 1-1.). Es decir, no se tienen en cuenta todas las capas existentes tales como cráneo, líquido encéfalo raquídeo, entre otras, y se supone que el medio exterior a la cabeza tiene conductividad nula. Entonces si se denota mediante u_2 al potencial eléctrico generado en Ω_2 se tiene para u_2 la ecuación:

$$\sigma_2 \Delta u_2 = 0 \quad (\text{en } \Omega_2), \quad (1.9)$$

y los potenciales u_1 y u_2 satisfacen las condiciones de contorno:

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1 \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \right| = 0 \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.11)$$

donde n_1 y n_2 denotan a los vectores normales exteriores unitarios en las fronteras S_1 y S_2 respectivamente.

Finalmente obtenemos el problema de contorno (1.8) - (1.11) que describe la variación espacial instantánea del potencial eléctrico en el volumen ocupado por el cerebro y el resto de la cabeza cuando la densidad de distribución de la fuente de actividad eléctrica en el volumen cerebral viene dada por la función f , donde la medición de dicho potencial en el cuero cabelludo está dado por $u_2|_{x \in S_2} = V(x, t)$.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

1.2 Conceptualización de la medición EEG y las causas que la originan

Es de suma importancia tener una conceptualización apropiada de las mediciones y las causas que las originan. De no ser así, el planteamiento del modelo matemático pudiera no tener sentido; en otras palabras, el modelo matemático propuesto no reflejará la medición electroencefalográfica.

En el modelo expuesto en la sección 1.1, la generación de la actividad eléctrica es resultado de las variaciones de la conductividad y la fuente. En lo que respecta a esta tesis, solo se van a considerar variaciones de la fuente.

Dada la importancia que tiene la información a priori (características de las fuentes) y a posteriori (características de las señales EEG) para resolver el problema inverso de identificación de fuentes a partir de mediciones EEG y tomando en cuenta toda la discusión previa, propondremos dos hipótesis de trabajo con respecto a las características que deben tener las fuentes y las señales EEG respectivamente. Estas hipótesis se utilizarán a lo largo de este trabajo de tesis y nos permitirán resolver el problema de identificación de fuentes en los casos de actividad normal y anómala.

1.2.1 Hipótesis con respecto a las mediciones EEG

En lo relativo a la estructura de las señales EEG la hipótesis es la siguiente: cualquier señal EEG se puede descomponer en ventanas temporales, en cada una de las cuales, se comporta aproximadamente como una superposición de ondas de banda limitada y con un perfil determinado para cada una de ellas, las cuales corresponden a los ritmos básicos, y a estos ritmos básicos se le superponen trenes o ráfagas de espigas o de ondas-espiga,

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

que se caracterizan por su amplitud, rango de frecuencias y tiempo de duración, pudiendo ser intermitentes.

Esta hipótesis se justifica con una breve descripción de señales continuas, obtenida de [21]. Un ejemplo de señales sinusoidales, similares a las obtenidas de tejidos vivos, se muestra en la Figura 1-2.

Las ondas continuas que son producidas por generadores fisiológicos pueden ser descritas por sus componentes de frecuencias. Cuando una forma de onda cambia de una frecuencia a otra, esto puede deberse a que cada generador cambia su frecuencia o porque se comportan como una especie de interruptor, apareciendo señales a cierta frecuencia (“encendido”) y luego aparecen otras de distinta frecuencia (las primeras se “apagan”).

Si los electrodos están posicionados cerca de estructuras que generan señales de diferentes frecuencias, entonces se produce una señal más compleja, que son la combinación de las dos frecuencias, tal como se ilustra en la Figura 1-2.

Si las frecuencias son muy cercanas, cada señal será poco reconocible. Si, por el contrario, tienen la misma frecuencia, pero diferente forma de onda, entonces las ondas se vuelven más complejas, como las que se muestran en la Figura 1-3

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

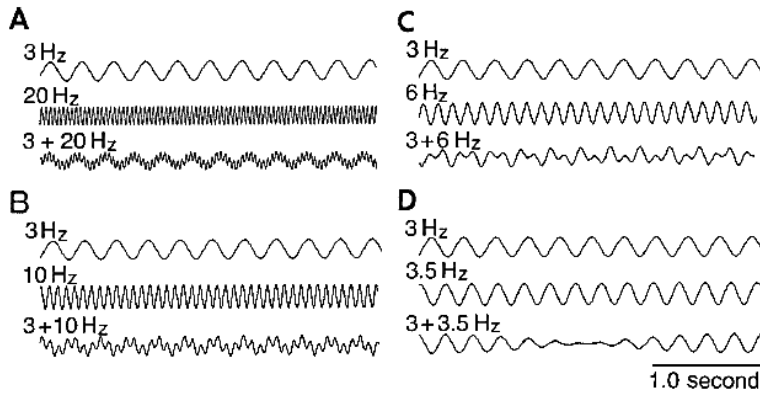


Figura 1-2. Ondas sinusoidales continuas de distintas frecuencias y la superposición de las mismas.

Si se hiciera un análisis de frecuencia en cada una de las señales de la Figura 1-2, se vería una frecuencia fundamental, exceptuando en el caso de la superposición de ondas, en donde se verían dos frecuencias en el análisis.

Lo anterior justifica la hipótesis de considerar que una señal EEG es la superposición de ondas o ritmos cerebrales que tienen una banda limitada, una forma determinada, una amplitud y una duración definidas. Usando el diagrama mostrado en la Figura 1-4, se supone que las señales EEG son una superposición de actividad cerebral (ritmos cerebrales), artefactos de diferentes orígenes, a los que se pueden agregar también señales anómalas, todas ellas denotadas con la letra s_k . Todas estas señales se están superponiendo con diferentes factores o pesos (C) y lo que se registra en un sistema de medición EEG es la combinación lineal de todos los componentes previamente mencionados ($y_k = Cs_k$). En el presente trabajo se asume que los artefactos han sido filtrados previamente, o sea no nos avocaremos al problema de filtraje de las señales, lo cual de por sí es un problema muy serio.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

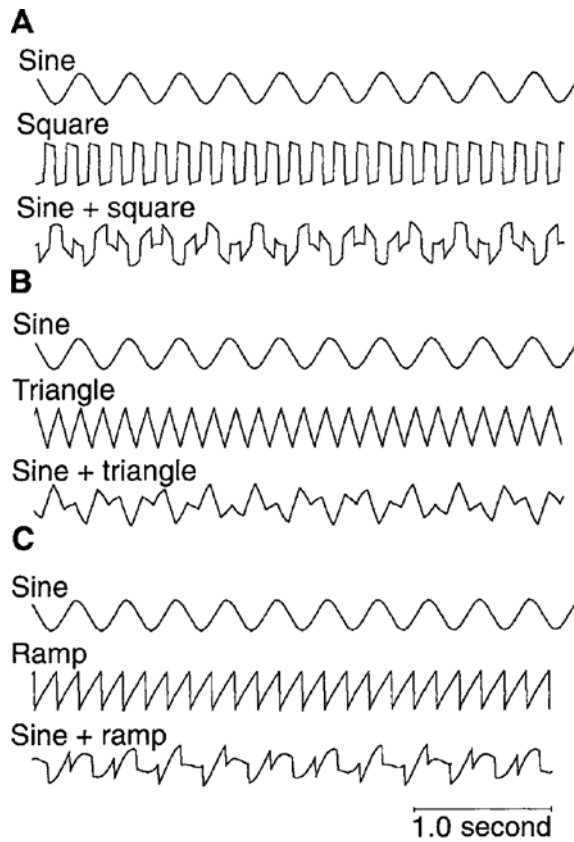


Figura 1-3. Superposición de señales de la misma frecuencia, pero con distinta forma de onda.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

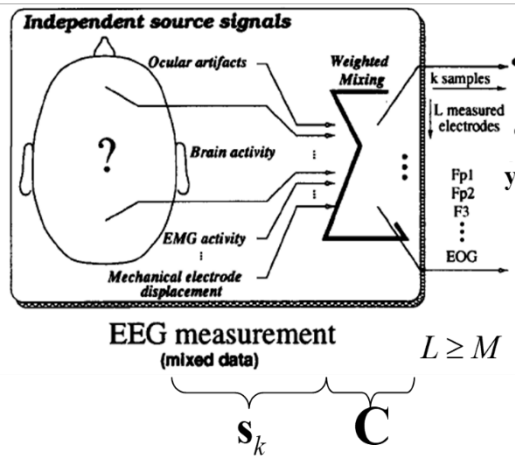


Figura 1-4. Diagrama que representa las mediciones EEG como una combinación lineal de ritmos cerebrales, artefactos y señales anómalas (Imagen modificada de [22]).

La Teoría de funciones de banda limitada, así como sus aplicaciones al procesamiento digital de señales, está ampliamente desarrollada y se puede decir que es clásica. Está relacionada con los teoremas de muestreo (Teorema de Nyquist-Shannon-Whittaker y generalizaciones), las llamadas funciones ondas esferoidales prolata y sus propiedades de concentración simultánea en tiempo y frecuencia [23], [24], y los espacios clásicos de Paley-Wiener y las funciones enteras de tipo exponencial [25]. Recordamos que, fijado $\omega > 0$, el espacio de Paley-Wiener correspondiente es el espacio de funciones en la recta real de cuadrado sumable (en el sentido de Lebesgue) cuya transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-\omega, \omega]$. Recientemente, se han desarrollado sistemas tipo-ondícula en análisis multirresolucionales relacionados con estos espacios, basados en las funciones ondas esferoidales prolata [26]. Es razonable postular que las componentes correspondientes a los

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

ritmos cerebrales puedan representarse matemáticamente de manera útil con ayuda de estas herramientas.

En todo este trabajo supondremos que las señales anómalas que se pueden superponer a los ritmos cerebrales de una señal corresponden a ráfagas de espigas o de espigas-onda cuyas características en cuanto a amplitud, frecuencia, morfología y duración se suponen previamente establecidas.

1.2.2 Hipótesis con respecto a las fuentes bioeléctricas

Supondremos que cualquier “fuente de actividad neuronal” en el cerebro se puede representar mediante una distribución de dipolos contenidos en el volumen cerebral cuyas propiedades y distribución espacial pueden variar con respecto al tiempo y las clasificaremos en “distribuidas” y “focalizadas”.

Llamaremos distribuidas a las fuentes que están generadas por una distribución continua de dipolos variables en el tiempo con soporte fundamentalmente localizado en la corteza cerebral ya que son estas las que pueden ser más fácilmente detectables por los electrodos del electroencefalógrafo.

Las fuentes focalizadas supondremos que “idealmente” tienen su soporte en un punto del interior del cerebro y varían con el tiempo. Es frecuente “modelar” este tipo de fuentes por “multipolos eléctricos” y generalmente es suficiente considerar su aproximación por dipolos, pero, en la práctica, se supone que una fuente focalizada tiene su soporte en una bola de radio suficientemente pequeño centrada en un punto que, en principio, puede desplazarse y para cada instante de tiempo la fuente toma un valor constante sobre dicha bola (y necesariamente debe tomar otro valor constante sobre el complemento de manera que la integral de esta función sobre el volumen cerebral se anule; esto

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

último es una exigencia matemática para cualquier fuente, ya sea distribuida o focalizada).

En general la fuente asociada a una actividad EEG determinada es una superposición de fuentes distribuidas y focalizadas.

La justificación de esta hipótesis se da por ejemplo en los ritmos cerebrales. Estos se observan en ciertas áreas del cerebro dependiendo de la actividad que el sujeto esté realizando en el momento de la medición. Es decir, cada uno de los ritmos se produce en una región cerebral. Es por ello, que se considera que las fuentes que los generan son distribuidas, puesto que se producen en un área específica del cerebro, y en las restantes áreas en principio no aparecen. Por supuesto, puede darse el caso de que se extiendan a otras regiones, dependiendo de las actividades que esté realizando el sujeto.

En el marco del modelo (1.8) - (1.11) se supone que los potenciales eléctricos son generados por fuentes cerebrales [27], [18], y a partir de la localización e intensidad de éstas se puede obtener información sobre el estado clínico de los sujetos o pacientes en estudio.

La existencia de fuentes generadoras de actividad eléctrica en cerebro puede justificarse observando la Figura 1-5, la cual muestra una gran red separada de dos subredes (**L** y **E**) que están conectadas a dos puertos (**a** y **b**). Los voltajes medidos en las redes **L** y **E** son análogos a los potenciales de campo locales y a los registros EEG, respectivamente.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

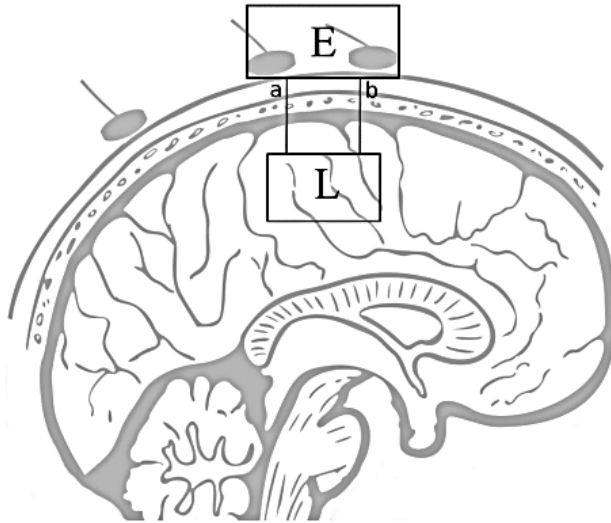


Figura 1-5 Dos subredes eléctricas **L** y **E** están conectadas a los puertos **a** y **b**. (Imagen modificada de [28]).

En este caso, **L** representa cierta área del cerebro que se activa para producir lo que se está midiendo en los electrodos representados por **E**. Cada fuente macro cerebral consiste en miles de millones de micro fuentes de escala sináptica que actúan en las superficies de la membrana (análoga a las fuentes en **L**).

Ahora, el problema inverso asociado a identificar una fuente no es único. Es decir, un número finito de redes **L**, que puede contener millones de fuentes dependientes o independientes, producirá corrientes y voltajes idénticos en **E**, tal como se detalla en [28]. Para poder darle solución al problema inverso se tienen que hacer suposiciones y tener información *a priori*, como se mencionó anteriormente.

Debido a la complejidad del sistema nervioso central tenemos varias preguntas abiertas, cuyas respuestas no están claras:

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

- En caso de que el rango de frecuencias, las amplitudes y el tiempo de duración de las ráfagas, caractericen una señal EEG dada (esa información se puede obtener a partir de la señal EEG después de filtrar los artefactos), ¿hay alguna correlación directa entre esta información y las características de la fuente que genera dicha señal; es decir, la amplitud, rango de frecuencias y tiempo de duración de la fuente? En particular, ¿es el tiempo de duración de las ráfagas de espigas o de ondas –espigas el mismo tiempo que dura actuando la fuente que las genera?
- Hasta el momento se ha propuesto que las mediciones EEG son generadas por una fuente, incluyendo los ritmos básicos y la actividad evocada, pero podría ser que hubiera otro mecanismo generador de la actividad eléctrica en el cerebro. ¿Cuál podría ser ese mecanismo? ¿Cuál es el papel de la conectividad cerebral en la generación de la actividad eléctrica en el cerebro? Sería más conveniente que los modelos matemáticos reflejaran no sólo el comportamiento eléctrico a través de la presencia de fuentes de actividad neuronal extrínseca, sino también la conectividad entre zonas del cerebro y los mecanismos que modulan la dinámica de la actividad de las corrientes iónicas. ¿En ese caso, cuáles serían las regiones principales que habría que considerar para la conectividad, por ejemplo, tálamo, encéfalo y corteza, o también otros como ganglios basales, núcleo accumbens, sistema límbico, etc.?

Aunque se tienen estas preguntas abiertas, las hipótesis planteadas con respecto a las mediciones EEG, y su relación con la existencia de fuentes de actividad neuronal están fundamentadas lo mejor posible.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

En esta sección se comentó que el problema inverso de determinación de la fuente de actividad neuronal a partir de la señal EEG, no es único, por lo que, en la siguiente sección, vamos a discutir aspectos importantes de algunos planteamientos de los problemas inversos asociados al modelo (1.8) - (1.11) para la generación del EEG.

Con respecto al problema inverso es importante destacar un aporte de este trabajo. Si bien el concepto de fuente de actividad neuronal tiene un sentido realista ya que el soporte de estas fuentes está asociado con la zona activa del cerebro que produce una medición EEG dada, también se ha introducido el concepto matemático de *fente equivalente*, el cual corresponde a fuentes que aunque no tengan un sentido fisiológico, ellas reproducen la misma actividad EEG que las fuentes de actividad neuronal.

Dado que encontrar la fuente de actividad neuronal puede ser un objetivo muy complicado, ya que en general no se tiene información a priori suficiente para poder identificarlas, en ocasiones hay que conformarse con obtener una fuente equivalente, cualitativamente más simple, que reproduzca la actividad EEG observada. En este trabajo de tesis vamos a ver que la identificación de cierto tipo de fuentes equivalentes a partir de la medición EEG permite obtener de manera única la fuente de actividad neuronal (realista) que reproduce dicha medición.

1.3 Discusión sobre los planteamientos de problemas inversos del modelo del EEG

Al identificar fuentes de actividad bioeléctrica es muy importante estar consciente de que el modelo de medio conductor es una versión muy limitada de la realidad ya que estos modelos están asociados a propiedades físicas, mientras que el sistema real además incluye propiedades biológicas y fisiológicas [29]. Por esto cuando se utiliza un modelo de medio conductor para poder reproducir mediciones electroencefalográficas, se debe tener claro que el resultado que se obtiene proviene de una gran simplificación de la actividad cerebral, la cual no incluye el efecto de los fenómenos que suceden a nivel celular [18] ni tampoco los efectos de la conectividad [30], [31].

Por las razones expuestas anteriormente, con los modelos simples de medio conductor como el modelo (1.8) - (1.11), sólo se pueden plantear problemas inversos del siguiente tipo:

1. Identificación de la fuente (localización de zonas activas).
2. Identificación de la conductividad (cuando la presencia de una anomalía se asocie con una conductividad variable).
3. Identificación del potencial en S_1 (sobre la corteza cerebral; corticograma).
4. Identificación de fronteras con propiedades predeterminadas (localización de tumores, calcificaciones y edemas).

En nuestro caso, las mediciones electroencefalográficas son usadas para identificar fuentes bioeléctricas, las cuales corresponden a mediciones EEG que son señales que varían en el tiempo en cada uno de los electrodos. Sin embargo, el modelo que hemos introducido es un modelo estacionario y por ello para poder describir la variación temporal de la fuente lo que se hace generalmente es resolver el problema inverso para cada instante de la discretización del EEG y posteriormente conectar las

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

imágenes de las fuentes obtenidas en cada caso como cuadros discretos de una película.

Esta metodología para describir la dinámica de la fuente incrementa el mal planteamiento del problema inverso en cada instante de tiempo con el mal planteamiento inherente al comportamiento temporal.

Es por ello que en este trabajo proponemos una metodología que permite disminuir el efecto del mal planteamiento espacio temporal de forma simultánea y no por separado.

Esto se complementa además con una nueva metodología de regularización que corresponde a un nuevo esquema que hemos denominado método de datos admisibles (MDA).

Cuando se habla de problemas inversos es importante explicar qué es lo que significa el buen y mal planteamiento de un problema. Un problema se dice que es “bien planteado”, si para resolver el problema hay información suficiente pero no más de la necesaria y además hay una dependencia continua entre la información que existe y el dato que se quiere obtener [4], [5].

Si se quiere identificar algo que no se puede medir directamente, es necesario verificar que la información con la cual contamos para ello es suficiente para que el objeto a identificar sea único.

Luego el análisis matemático de la unicidad de solución del problema inverso es un factor determinante para construir algoritmos cuyas aproximaciones converjan a su solución.

Dado que la teoría de los problemas inversos se ha desarrollado principalmente para ecuaciones operacionales mal planteadas, nosotros comenzaremos por encontrar un planteamiento operacional equivalente al problema inverso asociado al modelo (1.8) - (1.11). Existen diversos desarrollos teóricos asociados a este esquema de solución de problemas inversos y sus

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

correspondientes métodos de regularización que pueden consultarse en [32], [4], [5].

La existencia y unicidad de solución de un problema inverso depende de la información a priori que se imponga a la clase de objetos a identificar y los métodos de regularización permiten corregir el mal planteamiento del problema en el sentido de minimizar el efecto de la sensibilidad de la solución con respecto a los errores en los datos.

También pueden existir otras fuentes de mal planteamiento en un problema de identificación diferentes de los errores de medición y que corresponden a la deficiencia del modelo para reflejar el problema de estudio, a errores de procedimiento relacionados con la aproximación numérica del modelo y a los errores de truncamiento en los cálculos.

En el caso particular del problema de identificación de fuentes de actividad neuronal a través del modelo (1.8) - (1.11) el cual ya ha sido estudiado y además se han dado condiciones para los cuales existe solución ([9], [8]), el planteamiento operacional significa encontrar un operador \mathcal{A} que a una fuente de actividad neuronal (o fuente equivalente) f dada, en una cierta clase de funciones \mathcal{F} , le hace corresponder la medición V , es decir tenemos que reducir el planteamiento del problema inverso de identificación de la fuente a resolver la ecuación operacional

$$\mathcal{A}(f) = V, \quad (1.12)$$

donde $V = u_2|_{S_2}$ y u_2 representa el potencial que aparece en la ecuación (1.9).

En lo que sigue llamaremos conjunto de datos admisibles a la imagen por el operador \mathcal{A} de la clase \mathcal{F} ; es decir, al conjunto de mediciones que son reproducibles por fuentes de la clase \mathcal{F} .

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

A continuación denotaremos al conjunto de datos admisibles asociados a una clase de fuentes \mathcal{F} mediante $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$:

$$\mathcal{A}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}[\mathcal{F}]. \quad (1.13)$$

Diremos que la clase \mathcal{F} es una clase de unicidad, si el operador \mathcal{A} restringido a la clase \mathcal{F} es inyectivo.

Veremos que el operador \mathcal{A} es lineal y no inyectivo y por lo tanto la solución de (1.12) es, en general, no única salvo que se restrinja la clase \mathcal{F} a la que pertenece la fuente f . En [33, p. 71] se demuestra que el operador \mathcal{A} es compacto de $L_2^{(1)}(\Omega_1)$ en $L_2^{(1)}(S_2)$, donde el supraíndice (1) denota el subespacio ortogonal a las constantes, y en el Teorema 15 de [33] se muestra que $(\text{Ker}\mathcal{A})^\perp = \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ donde $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ es el subespacio (cerrado) de las funciones armónicas en $L_2(\Omega_1)$ que son ortogonales a las constantes y \perp denota el subespacio ortogonal en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$. De este último resultado se extraen dos conclusiones que son fundamentales para nuestro trabajo:

- a) Si la fuente (equivalente) se busca en la clase $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ entonces se cumple el teorema de unicidad para la solución del problema inverso que corresponde a la solución de la ecuación operacional (1.12).
- b) Si la fuente f de actividad neuronal que reproduce una medición EEG dada V se busca en una cierta clase de fuentes \mathcal{F} que satisface la condición de unicidad para la solución del problema inverso y V se puede reproducir (de manera única) por una función $h \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ entonces h coincide con la proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$, independientemente de la clase de fuentes \mathcal{F} que se considere.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

Otra clase de unicidad para el problema de identificación de fuentes se obtiene en [10] para ciertos tipos de fuentes constantes a trozos.

Notemos que de b) y del teorema de descomposición ortogonal en un espacio de Hilbert (Teorema 6.6.9 de [34]) se concluye que

$$f - h \in \left(\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1) \right)^\perp. \quad (1.14)$$

Adicionalmente veremos que el problema de identificación de fuentes de actividad neuronal a partir de la medición EEG se puede reducir a un problema más simple, definido sobre el volumen cerebral, si se resuelve previamente el llamado problema de Cauchy que consiste en recuperar el potencial y la corriente en S_1 a partir del conocimiento del potencial (medición EEG) y la corriente (que se supone nula) en S_2 .

La discusión anterior hace énfasis en la importancia de imponer una información a priori conveniente sobre la naturaleza de la fuente para resolver el problema inverso de identificación de fuentes. En la sección 1.2.2 hemos visto que las fuentes de actividad neuronal distribuidas y focalizadas corresponden a distribuciones continuas o discretas de dipolos concentradas fundamentalmente en la corteza cerebral, que en el modelo (1.8) - (1.11) corresponde a la superficie S_2 .

De los resultados del artículo [7] se concluye que estas fuentes se identifican de manera única a partir de mapeos potenciales del EEG obtenidos sobre una distribución continua de puntos sobre el cuero cabelludo (S_2). Es decir, los resultados de [7] sugieren que para obtener unicidad en la reconstrucción de la fuente de actividad neuronal a partir de la medición EEG, es necesario interpolar los datos entre los electrodos sobre el cuero cabelludo debido a que no es posible identificar de manera única la fuente

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

partiendo de un mapeo potencial sobre el cuero cabelludo correspondiente a un conjunto discreto de puntos.

Es por ello que los algoritmos tradicionales para identificar fuentes equivalentes consideran únicamente dipolos ubicados en puntos predeterminados del volumen cerebral y se trata de identificar las tres componentes del vector de momento dipolar de cada dipolo a partir de las mediciones en los puntos de ubicación de los electrodos, por lo que, si n es el número de dipolos que se quiere identificar, se requieren $3n$ electrodos de medición para poder identificarlos.

Es importante resaltar que cuando nos referimos a fuentes que corresponden a distribuciones de dipolos concentrados en la corteza cerebral es necesario interpretar la solución del modelo (1.8) - (1.11) en sentido de distribuciones. En este caso no es claro que la identificación de una fuente de tipo δ con soporte en un subconjunto de medida nula en el volumen ocupado por el cerebro (distribución de simple capa) o del tipo de una derivada de la δ (distribución de doble capa), se pueda aproximar mediante la identificación de algún tipo de unidad aproximativa de la δ (fuentes de tipo Gaussiano o sus derivadas).

Finalmente es necesario comentar que la metodología clásica de regularización para la solución de ecuaciones operacionales mal planteadas para operadores lineales compactos se basa en generalizaciones del método de regularización de Tikhonov a través de la noción de filtro regularizante [5]. El método de regularización de Tikhonov, aplicado al problema inverso de identificación de la fuente asociado con el modelo (1.8) - (1.11) es un método iterativo, que en cada paso de la iteración requiere que se resuelva un problema de contorno asociado al modelo con el objetivo de ir mejorando la expresión de la fuente, para minimizar el ajuste con respecto a la medición EEG. Estas iteraciones conllevan un alto costo computacional del método.

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

En este trabajo se mejora este procedimiento introduciendo un nuevo método de regularización llamado “Método de Datos Admisibles” que ha sido desarrollado por el Dr. Andrés Fraguela y colaboradores en los trabajos [10], [35].

Capítulo 1 Formalización matemática de los conceptos que se utilizan en la modelación de los mecanismos de generación y propagación de la actividad eléctrica del cerebro

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

El objetivo de este capítulo es resolver el problema de identificación de fuentes para ciertas clases de unicidad, en el modelo de medio conductor (1.8) - (1.11). Para ello, lo primero que haremos será reducir el problema inverso a un planteamiento operacional equivalente lo cual nos permitirá obtener un sistema de ecuaciones operacionales que nos permitirán identificar la fuente f a partir de la medición del potencial de superficie V en el cuero cabelludo.

Por otro lado, resolver el problema inverso para diferentes clases de fuentes que satisfacen la condición de unicidad con geometrías realistas es un problema matemático complicado, por lo cual se consideran dos esferas concéntricas como una idealización de las geometrías reales de la cabeza y el cerebro, que permite desarrollar la metodología matemática de una forma más sencilla, la primera de ellas de radio R_1 correspondiente al volumen cerebral Ω_1 y el espacio comprendido entre esta esfera y otra concéntrica de radio $R_2 > R_1$ que corresponde al resto de la cabeza Ω_2 (ver Figura 1-1 y Figura 2-1). Por simplicidad continuaremos denotando por Ω_1 y Ω_2 a los volúmenes correspondientes al sistema de esferas concéntricas y además denotaremos mediante Ω a la bola de radio R_2 . La ventaja de considerar el problema en dominios esféricos concéntricos en lugar de geometrías realistas de la cabeza se debe a que en este caso vamos a poder construir expresiones explícitas de la solución en términos de series de Fourier con respecto a bases ortonormales conocidas, lo cual facilita el análisis cualitativo y

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

nos permite construir un método numérico de resolución de los problemas directo e inverso.

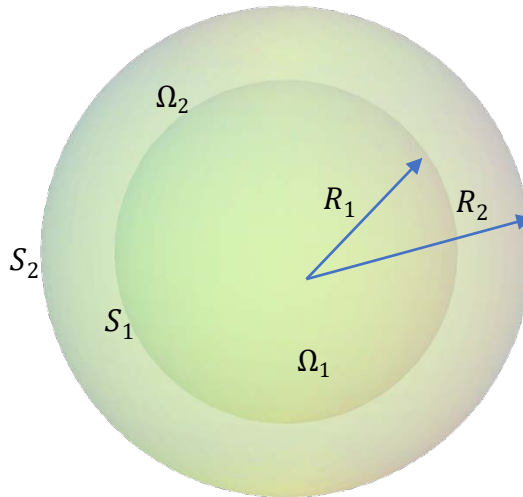


Figura 2-1 Esquema simple de la cabeza y el cerebro.

Finalmente, el modelo simplificado que consideraremos para resolver el problema inverso de identificación de fuentes es:

$$-\sigma_1 \Delta u_1 = f \text{ en } \Omega_1, \quad (2.1)$$

$$\Delta u_2 = 0 \text{ en } \Omega_2, \quad (2.2)$$

$$u_1 = u_2 \text{ sobre } S_1, \quad (2.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \text{ sobre } S_1, \quad (2.4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \text{ sobre } S_2, \quad (2.5)$$

donde Ω_1 y Ω_2 están representados en la Figura 2-1.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Así resolver el problema inverso de identificación de fuentes significa que a partir de la medición electroencefalográfica que corresponde a tener el valor de $V = u_2|_{S_2}$, se pueda determinar una fuente f tal que pueda “reproducir la medición”; es decir, que al sustituir esta fuente en el modelo (1.8) - (1.11), exista una solución única $(u_1^{(f)}, u_2^{(f)})$ y se cumpla que $u_2^{(f)}|_{S_2} = V$.

En el caso que nos concierne comenzaremos por suponer que la fuente pertenece a una clase de unicidad \mathcal{F} de funciones contenidas en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$. Nótese que en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$ el problema directo (2.1) - (2.5) tiene solución única y pertenece al espacio de Sobolev $H_1^{(1)}(\Omega)$, y por lo tanto su restricción a la frontera S_2 se considera en el sentido de trazas de Sobolev sobre S_2 , [36].

Para el desarrollo teórico se supone de manera ideal que la medición electroencefalográfica está dada sobre todo el cuero cabelludo, lo cual en la práctica no es así, ya que la medición se conoce únicamente en las regiones de contacto entre los electrodos y el cuero cabelludo.

2.1 Reducción del problema inverso a un planteamiento operacional cuando la distribución del potencial en el cuero cabelludo no varía en el tiempo (caso estacionario)

Comenzaremos introduciendo varios problemas de contorno auxiliares cuyas soluciones se interpretarán en el sentido débil lo cual permitirá definir un operador asociado a cada uno de estos problemas que relaciona el dato con la solución correspondiente.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

A partir de este momento consideraremos la fuente $f \in L_2^{(1)}(\Omega_1)$ y una función $\psi \in L_2^{(1)}(S_1)$, y estudiaremos los siguientes problemas de contorno auxiliares:

$$\sigma_1 \Delta w_1 = f \text{ en } \Omega_1, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial n_1} = 0 \text{ sobre } S_1,$$

$$\Delta v_1 = 0 \text{ en } \Omega_1, \quad (2.7)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = \psi \text{ sobre } S_1,$$

$$\Delta v_2 = 0 \text{ en } \Omega_2, \quad (2.8)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial v_2}{\partial n_1} = \psi \text{ sobre } S_1,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial n_2} = 0 \text{ sobre } S_2.$$

Definición 2.1 Llamaremos soluciones débiles de los problemas (2.6), (2.7) y (2.8) a las funciones $w_1, v_1 \in H_1(\Omega_1), v_2 \in H_1(\Omega_2)$, que satisfagan las siguientes relaciones

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla w_1 \cdot \nabla \omega_1 dx = \int_{\Omega_1} f \omega_1 dx, \forall \omega_1 \in H_1(\Omega_1), \quad (2.9)$$

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \nabla \omega_1 dx = \int_{S_1} \psi \omega_1 dx, \forall \omega_1 \in H_1(\Omega_1), \quad (2.10)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \nabla \omega_2 dx = - \int_{S_1} \psi \omega_2 ds, \forall \omega_2 \in H_1(\Omega_2), \quad (2.11)$$

respectivamente.

Teorema 2.1 *Las soluciones débiles de los problemas (2.6), (2.7) y (2.8) existen si y sólo si $f \in L_2^{(1)}(\Omega_1)$ y $\psi \in L_2^{(1)}(S_1)$. En este caso, las correspondientes soluciones débiles son únicas en $H_1^{(1)}(\Omega_1)$ y $H_1^{(1)}(\Omega_2)$, y se cumple*

$$\|w_1\|_{H_1(\Omega_1)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega_1)}, \quad (2.12)$$

$$\|v_1\|_{H_1(\Omega_1)} \leq K_1 \|\psi\|_{L_2(S_1)}, \quad (2.13)$$

$$\|v_2\|_{H_1(\Omega_2)} \leq C_2 \|\psi\|_{L_2(S_1)}, \quad (2.14)$$

donde las constantes C_1 , K_1 y C_2 no dependen de f o ψ , ver sección 1.2 del Capítulo IV de [36].

Del resultado anterior (2.12), (2.13) y (2.14) se deduce que el operador que a la fuente f le hace corresponder w_1 , del respectivo problema de contorno (2.6), es lineal y continuo de $L_2(\Omega_1)$ a $H_1(\Omega_1)$; el operador que al dato ψ le hace corresponder v_1 , del respectivo problema de contorno (2.7), es lineal y continuo de $L_2(S_1)$ a $H_1(\Omega_1)$; el operador que al dato ψ le hace corresponder v_2 , del respectivo problema de contorno (2.8), es lineal y continuo de $L_2(S_1)$ a $H_1(\Omega_2)$; y por lo tanto si consideramos la compacidad del operador traza de $H_1(\Omega_1)$ a $L_2(S_1)$, y de $H_1(\Omega_2)$ a $L_2(S_1)$ y a $L_2(S_2)$, se deduce que la composición de los operadores anteriormente mencionados con los respectivos operadores traza nos dan operadores compactos de $L_2^{(1)}(\Omega_1)$ a $L_2(S_1)$, de $L_2^{(1)}(S_1)$ a $L_2(S_1)$ y de $L_2(S_1)$ a $L_2(S_1)$ los cuales son definidos de siguiente manera:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$A_0: L_2^{(1)}(\Omega_1) \rightarrow L_2(S_1), \quad (2.15)$$

$$f \mapsto w_1|_{S_1},$$

$$B_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2(S_1), \quad (2.16)$$

$$\psi \mapsto v_1|_{S_1},$$

$$C_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2(S_1), \quad (2.17)$$

$$\psi \mapsto v_2|_{S_1},$$

$$D_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2(S_2), \quad (2.18)$$

$$\psi \mapsto v_2|_{S_2}.$$

Por conveniencia consideraremos los operadores proyección $P_i: L_2(S_i) \rightarrow L_2^{(1)}(S_i)$, los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$P_i \varphi_i = \varphi_i - \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} \varphi_i ds, i = 1, 2, \quad (2.19)$$

donde $|S_i|$ denota la medida de S_i .

Definamos los siguientes operadores:

$$A = P_1 \circ A_0: L_2^{(1)}(\Omega_1) \rightarrow L_2^{(1)}(S_1), \quad (2.20)$$

$$f \mapsto w_1|_{S_1},$$

$$B = P_1 \circ B_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2^{(1)}(S_1), \quad (2.21)$$

$$\psi \mapsto v_1|_{S_1},$$

$$C = P_1 \circ C_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2^{(1)}(S_1), \quad (2.22)$$

$$\psi \mapsto v_2|_{S_1},$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$D = P_2 \circ D_0: L_2^{(1)}(S_1) \rightarrow L_2^{(1)}(S_2), \quad (2.23)$$

$$\psi \mapsto v_2|_{S_2}.$$

Usando los operadores A, B, C y D , la solución del problema inverso asociada con el problema de contorno (2.1) - (2.5) puede ser obtenida resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones operacionales:

$$Af + B\psi = C\psi, \quad (2.24)$$

$$D\psi = V. \quad (2.25)$$

En efecto, notemos que resolver la ecuación (2.25) es equivalente a resolver el problema de Cauchy en la región Ω_2 para el operador de Laplace a partir de los datos de Cauchy $\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0$ en

S_2 y $u_2|_{S_2} = V$, donde $V \in L_2^{(1)}(S_2)$. Una vez que conocemos ψ entonces se puede sustituir en (2.24) y el problema se reduce a resolver la ecuación operacional

$$Af = -(B - C)\psi. \quad (2.26)$$

Resolver la ecuación (2.26) nos permite obtener f y es por ello que la solución del sistema (2.24) y (2.25) es equivalente al problema inverso de identificación de la fuente f a partir de la medición V .

En [8] se demuestra que el operador $B - C$ es un operador estrictamente positivo y por lo tanto es invertible y que, además, $K = -(B - C)^{-1}$ es un operador cerrado y se concluye que KA también es cerrado. Aplicando el Teorema del Grafo Cerrado se demuestra que KA es continuo [37].

El operador que relaciona f con la medición V viene entonces definido por:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\mathcal{A} = D(-(B - C)^{-1}A) = -D(B - C)^{-1}A. \quad (2.27)$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [10]:

Teorema 2.2

$$[\text{Ker } \mathcal{A}]^\perp = \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1).$$

El teorema previo justifica las observaciones a) y b) que se enunciaron en la sección 1.3. La componente de la fuente f en $\text{Ker } \mathcal{A}$ no tiene por qué ser única, por lo que es necesario imponer condiciones adicionales a la clase de funciones \mathcal{F} , para su unicidad, donde se asume a priori que pertenece dicha fuente.

Una conclusión muy importante de este resultado es su independencia de la información a priori para identificar la fuente, es decir, si $f \in \mathcal{F}$ reproduce la medición V y la función armónica h_0 es la única fuente armónica en Ω_1 que reproduce a la misma medición V , entonces la proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ es siempre h_0 independientemente de la clase \mathcal{F} a la que pertenezca f , y $f - h_0$ es la componente de f en $\text{Ker } \mathcal{A}$.

Entonces, la condición necesaria y suficiente para que \mathcal{F} sea una clase de unicidad del problema de identificación de la fuente a partir de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, es que

$$(\mathcal{F} - \mathcal{F}) \cap \text{Ker } \mathcal{A} = \{0\},$$

donde $\langle \mathcal{F} - \mathcal{F} \rangle = \{f_1 - f_2 : f_1, f_2 \in \mathcal{F}\}$ y 0 denota la función idénticamente nula. En efecto, \mathcal{F} es una clase de unicidad si el operador \mathcal{A} (o A) restringido a \mathcal{F} es inyectivo. Que \mathcal{A} sea inyectivo equivale a que para cualquier par $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ se tenga que $\mathcal{A}(f_1) = \mathcal{A}(f_2)$ implica que $f_1 = f_2$, pero $\mathcal{A}(f_1 - f_2) = \mathcal{A}(f_1) - \mathcal{A}(f_2)$, luego $\mathcal{A}(f_1) = \mathcal{A}(f_2)$ equivale a $f_1 - f_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$, que debe ser nulo.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

En el caso cuando el dato $V \in Im(D)$ está dado sin error, entonces una única $\psi \in L_2^{(1)}(S_1)$ resuelve la ecuación (2.25). Después de obtener la solución ψ de (2.25) esta se sustituye en (2.24) y buscamos la solución de la ecuación operacional:

$$Af = -(B - C)\psi. \quad (2.28)$$

Resolver la ecuación (2.28) es equivalente a resolver el problema inverso de identificar f en el problema de contorno (2.6) basado en la información adicional

$$w_1|_{S_1} = -(B - C)\psi. \quad (2.29)$$

Para obtener la función ψ , se necesita resolver el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en Ω_2 , con condición de Neumann nula y dato de Dirichlet igual a la medición electroencefalográfica V en S_2 , lo cual desarrollaremos en la siguiente sección.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

2.2 Reducción del problema de identificación de fuentes en el cerebro en el caso estacionario, a un problema de datos de Cauchy sobre la corteza cerebral

Estudiaremos el problema de encontrar la restricción a S_1 de u_2 del siguiente problema de contorno, el cual en la literatura [9] se le llama problema de Cauchy:

$$\Delta u_2 = 0 \text{ en } \Omega_2, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \text{ en } S_2, \quad (2.31)$$

$$u_2|_{S_2} = V, \quad (2.32)$$

donde V es la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado en la corona esférica Ω_2 que se encuentra entre las dos esferas concéntricas de la Figura 2-1.

La relación entre el sistema de coordenadas esféricas y rectangulares está dada por: $x = r \text{sen} \theta \cos \phi$, $y = r \text{sen} \theta \text{sen} \phi$, donde $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, ver [38, p. 316].

Consideraremos los armónicos esféricos ortonormalizados sobre la esfera S_2 (ver [38, pp. 765-778]):

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.33)$$

donde $P_n^{|m|}(\theta, \phi)$ son los polinomios asociados de Legendre (ver [38, pp. 760-764]).

Se propone la solución u_2 del problema (2.30) - (2.32) ver [38, p. 772] en la forma

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}) Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.34)$$

donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (|A_{nm}|^2 + |B_{nm}|^2) < \infty, \quad (2.35)$$

y expresemos la medición V en términos de los armónicos esféricos

$$V(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.36)$$

donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty, \quad (2.37)$$

Entonces del hecho que

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta, \phi)|_{S_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} R_2^n + B_{nm} R_2^{-(n+1)}) Y_{nm}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi), \end{aligned}$$

por la unicidad de coeficientes ($\{Y_{nm}: n \geq 0, |m| \leq n\}$) es base ortonormalizada de $L_2(S_2)$ con constantes determinados pero normalizar se obtiene la relación

$$A_{nm} R_2^n + B_{nm} R_2^{-(n+1)} = V_{nm} \quad \forall n \geq 0, m = -n, \dots, n. \quad (2.38)$$

Usando (2.31) tenemos

$$\left. \frac{\partial u_2(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} n R_2^{n-1} - B_{nm} (n+1) R_2^{-n-2}) Y_{nm}(\theta, \phi) = 0,$$

por la unicidad de coeficientes de donde se concluye la relación

$$n A_{nm} R_2^{n-1} - (n+1) B_{nm} R_2^{-n-2} = 0 \quad (n \geq 0, |m| \leq n), \quad (2.39)$$

o equivalentemente

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$A_{nm} = \frac{n+1}{n} B_{nm} R_2^{-2n-1} \quad \forall n \geq 0, m = -n, \dots, n. \quad (2.40)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.38) obtenemos los valores de los coeficientes de Fourier A_{nm} y B_{nm} en términos de la medición

$$A_{nm} = \frac{n+1}{2n+1} R_2^{-n} V_{nm}, \quad (2.41)$$

$$B_{nm} = \frac{n}{2n+1} R_2^{n+1} V_{nm} \quad (n \geq 0, |m| \leq n). \quad (2.42)$$

Sustituyendo (2.41) y (2.42) en la expresión (2.34) se obtiene la solución u_2 del problema de contorno, que viene dada por

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{r}{R_2} \right)^n + \frac{n}{2n+1} \left(\frac{R_2}{r} \right)^{n+1} \right) V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.43)$$

La solución del problema de Cauchy se obtiene al restringir u_2 a S_1 lo cual se reduce a evaluar $r = R_1$, por lo que se tiene

$$u_2(R_1, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n + \frac{n}{2n+1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \right) V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.44)$$

La condición que tenemos que imponer a los coeficientes de Fourier V_{nm} está relacionada con la condición para que $u_2(R_1, \theta, \phi)$ sea la traza de una función $H_1(\Omega_1)$ a S_1 . La condición para que esto ocurra es que la serie de los coeficientes de Fourier de (2.44) al cuadrado multiplicados por n converja [36, p. 221]. Si se calcula esta serie se puede ver utilizando un resultado elemental del Cálculo¹ se puede ver que la condición para que (2.44) sea la traza de una función de $H_1(\Omega_1)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty. \quad (2.45)$$

¹ Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de términos positivos y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha$, tal que $\alpha \in (0, \infty)$, entonces se dice que ambas sucesiones son "equivalentes" y, en ese caso, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$ si sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n < +\infty$ [64].

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Ahora veremos qué condiciones deben cumplir los coeficientes de Fourier de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado para que $\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$ pertenezca a $L_2^{(1)}(S_1)^2$. En efecto es fácil ver que

$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \left(\frac{R_1^{n-1}}{R_2^n} - \frac{R_2^{n+1}}{R_1^{n+2}} \right) V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.46)$$

Para que $\psi \in L_2(S_1)$, la serie dada por (2.46) debe converger en $L_2(S_1)$, lo cual se cumple si y solo si la serie de los cuadrados de sus coeficientes Fourier converge.

Utilizando el mismo resultado elemental del Análisis clásico que se utilizó para obtener (2.45) se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.3 *La condición necesaria y suficiente que deben cumplir los coeficientes de Fourier V_{nm} de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, para que ψ pertenezca a $L_2^{(1)}(S_1)$ es³*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty. \quad (2.47)$$

Todo lo anterior nos sirve para reducir el problema de identificación de fuentes en el cerebro a partir de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, a un problema de identificación de fuentes en el cerebro a partir de datos de Cauchy sobre la corteza cerebral.

² Esto es una consecuencia de la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace en $\Omega_1 \cup \Omega_2$ y en Ω_1 . [36, pp. 188-193, 215-220].

³ La condición (2.47) implica a la condición (2.45).

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

A partir de este momento supondremos que los coeficientes V_{nm} de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, satisfacen la condición (2.47).

Ahora desde el punto de vista operacional, lo que tenemos que resolver al sustituir la expresión de ψ dada por (2.46) en la ecuación operacional (2.28) es

$$Af = g, \quad (2.48)$$

donde g lo conocemos a partir de (2.28), el cual es

$$g = C\psi - B\psi. \quad (2.49)$$

Esto significa que f es una función tal que la solución $w_1 \in H_1(\Omega_1)$ del siguiente problema de contorno

$$\sigma_1 \Delta w_1 = f \text{ en } \Omega_1, \quad (2.50)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right|_{S_1} = 0 \text{ sobre } S_1, \quad (2.51)$$

satisface además que $w_1|_{S_1} = g$.

Por lo tanto, esto significa que estamos identificando la fuente f que reproduce el potencial g medido en la corteza cerebral.

De aquí concluimos que para identificar la fuente se requiere construir el potencial g que corresponde a lo que sería la medición de la distribución de potencial en un instante dado sobre la corteza cerebral, si se considera únicamente el cerebro sin el resto de la cabeza (virtualmente).

Ahora obtengamos $g = C\psi - B\psi$, para lo cual utilizando la expresión (2.46) junto con el hecho de que B y C son operadores lineales y continuos, el problema se reduce a calcular $B(Y_{nm}(\theta, \phi))$ y $C(Y_{nm}(\theta, \phi))$. Para calcular estas expresiones se

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

resuelven los problemas de contorno (2.7) y (2.8) sustituyendo ψ por $Y_{nm}(\theta, \phi)$ y se utilizan las definiciones (2.16) y (2.17).

Primero obtengamos $C(\psi)$, el cual viene dado por

$$C(\psi) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{R_1^{n-1}}{R_2^n} - \frac{R_2^{n+1}}{R_1^{n+2}} \right) V_{nm} C(Y_{nm}(\theta, \phi)). \quad (2.52)$$

Como se comentó anteriormente, el cálculo de $C(Y_{nm}(\theta, \phi))$ corresponde a resolver el problema de contorno (2.8), por lo que la solución se propone en la forma

$$v_2(r, \theta, \phi) = (A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)})Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.53)$$

Los coeficientes A_{nm} y B_{nm} se obtienen al sustituir la expresión (2.53) en las condiciones de contorno del problema (2.8) con $\psi = Y_{nm}(\theta, \phi)$, obteniéndose:

$$\sigma_2(A_{nm}nR_1^{n-1} - B_{nm}(n+1)R_1^{-n-2})Y_{nm}(\theta, \phi) = Y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$(A_{nm}nR_2^{n-1} - B_{nm}(n+1)R_2^{-n-2})Y_{nm}(\theta, \phi) = 0.$$

Esta nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_{nm}nR_1^{n-1} - B_{nm}(n+1)R_1^{-n-2} = \frac{1}{\sigma_2}, \quad (2.54)$$

$$A_{nm}nR_2^{n-1} - B_{nm}(n+1)R_2^{-n-2} = 0. \quad (2.55)$$

De este obtenemos los coeficientes A_{nm} y B_{nm} , que vienen dados por

$$A_{nm} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{R_1^{n+2}}{n} \frac{1}{R_1^{2n+1} - R_2^{2n+1}}, \quad (2.56)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$B_{nm} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{R_1^{n+2}}{(n+1)} \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n+1} - 1}, \quad (2.57)$$

por lo que finalmente (2.53) se expresa como

$$v_2(r, \theta, \phi) = \left(\frac{1}{\sigma_2} \frac{R_1^{n+2}}{n} \frac{1}{R_1^{2n+1} - R_2^{2n+1}} \right) r^n + \left(\frac{1}{\sigma_2} \frac{R_1^{n+2}}{(n+1)} \frac{1}{(R_1/R_2)^{2n+1} - 1} \right) r^{-(n+1)} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.58)$$

Por lo tanto, de la definición del operador \mathcal{C} en (2.17) vemos que la evaluación de $\mathcal{C}(Y_{nm}(\theta, \phi))$ corresponde a obtener la traza de v_2 sobre S_1 . Por tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Y_{nm}(\theta, \phi)) &= v_2(R_1, \theta, \phi) \\ &= \frac{1}{\sigma_2} \frac{R_1}{(R_1/R_2)^{2n+1} - 1} \left(\frac{1}{n} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) Y_{nm}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2.59)$$

de donde se concluye finalmente

$$c(\psi) = \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{1}{n} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \right) \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.60)$$

Continuemos ahora con el cálculo de $B(\psi)$, el cual está dado por

$$B(\psi) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{R_1^{n-1}}{R_2^n} - \frac{R_2^{n+1}}{R_1^{n+2}} \right) V_{nm} B(Y_{nm}(\theta, \phi)),$$

De la expresión anterior se puede observar que sólo es necesario obtener $B(Y_{nm}(\theta, \phi))$ (B es lineal y continuo), lo cual es equivalente a resolver el problema de contorno (2.7). Para ello se busca la solución de este problema de contorno en la forma

$$v_1(r, \theta, \phi) = \rho_{nm} r^n Y_{nm}(\theta, \phi).$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

El coeficiente ρ_{nm} se obtiene al utilizar la condición de contorno de (2.7) sobre S_1 , por lo que finalmente $v_1(r, \theta, \phi)$ se expresa como

$$v_1(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sigma_1 n R_1^{n-1}} r^n Y_{nm}(\theta, \phi).$$

De igual forma a como se procedió con $C(\psi(\theta, \phi))$, ahora se usa la definición del operador B en (2.16), por lo que se obtiene

$$B(\psi) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n+1} - 1 \right) \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.61)$$

Con $C\psi$ y $B\psi$ ya calculados, ahora podemos calcular $C\psi - B\psi = g$, donde g está dada finalmente por la siguiente expresión:

$$g = \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.62)$$

de lo cual concluimos el siguiente resultado.

Teorema 2.4 *Si los coeficientes V_{nm} de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, satisfacen la condición (2.47), entonces el problema de identificar la fuente en el cerebro a partir de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado, se convierte en resolver la ecuación $Af = g$, donde g viene dada por (2.62).*

Note que en el Teorema 2.4 sólo hemos impuesto la condición (2.47) debido a que esta condición implica (2.45).

Resolver este problema corresponde a resolver el problema de identificación de fuentes si supusiéramos que el cerebro está

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

extraído de la cabeza y que la medición de la distribución de potencial en un instante dado, obtenido sobre la superficie del cerebro coincide, con g .

En lo que sigue aplicaremos este resultado para determinar la fuente armónica que reproduce una medición sobre la corteza, cuando dicha fuente exista.

2.3 Problema de identificación de fuentes armónicas definidas en el volumen ocupado por el cerebro en el caso estacionario

Estudiaremos las condiciones que debe satisfacer la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, de tal forma que exista una fuente armónica f (la que se sabemos que es única)⁴ en el volumen cerebral que la reproduzca. Como parte de la metodología encontramos una expresión completamente explícita para la fuente f que nos permite reproducir la distribución del potencial en todo el cuero cabelludo.

A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación

$$H_{nm}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi R_1^{2n+3}}} r^n Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (n \geq 0, |m| \leq n). \quad (2.63)$$

Observación: Las funciones $\{H_{nm}(r, \theta, \phi): 1 \leq n < +\infty, -n \leq m \leq n\}$ son una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ (ver [38, p. 772]).

La fuente f se expresa de la siguiente forma

⁴ Una consecuencia fundamental del Teorema 2.2 es que las fuentes armónicas son una clase de unicidad para la solución del problema inverso

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{nm} H_{nm}(r, \theta, \phi), \quad (2.64)$$

con respecto a la base ortonormalizada de funciones $H_{nm}(r, \theta, \phi)$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |F_{nm}|^2 < \infty$. Cuando aplicamos el operador A a f , debido a que el operador A es lineal y continuo, se obtiene

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{nm} A(H_{nm}(r, \theta, \phi)). \quad (2.65)$$

Para obtener $A(H_{nm}(r, \theta, \phi))$ calculamos

$$A(r^n Y_{nm}(\theta, \phi)), \quad (2.66)$$

para lo cual se requiere resolver el siguiente problema asociado

$$-\sigma_1 \Delta w_1(r, \theta, \phi) = r^n Y_{nm}(\theta, \phi) \text{ en } \Omega_1, \quad (2.67)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right|_{S_1} = 0 \text{ sobre } S_1. \quad (2.68)$$

Se propone a w_1 en la forma:

$$w_1 = v(r) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.69)$$

Si nosotros sustituimos la expresión (2.69) en la ecuación (2.67), donde se usa de manera explícita la expresión para $\Delta w_1(r, \theta, \phi)$ de la ecuación (2.67) en coordenadas esféricas, tenemos

$$-\sigma_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(v(r))}{dr} \right) Y_{nm}(\theta, \phi) + \frac{v(r)}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial(Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial \phi} \right) \right) = r^n Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.70)$$

En lo que sigue utilizaremos la notación de Tikhonov dada en [38, p. 767], ecuación (5):

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$\Delta_{\theta,\phi} Y_{nm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial(Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial(Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial\phi}. \quad (2.71)$$

Del hecho que $Y_{nm}(\theta, \phi)$ es una función propia del operador $\Delta_{\theta,\phi}$ correspondiente al valor propio $-n(n+1)$, (vease [36, p. 784]) y de (2.70) se obtiene

$$-\sigma_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(v(r))}{dr} \right) Y_{nm}(\theta, \phi) - \frac{v(r)}{r^2} (n(n+1) Y_{nm}(\theta, \phi)) \right) = r^n Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.72)$$

Dividiendo entre $\frac{Y_{nm}(\theta, \phi)}{r^2}$ (si $v \neq 0, Y_{nm}(\theta, \phi) \neq 0$) se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(v(r))}{dr} \right) - v(r)n(n+1) = -\frac{r^{n+2}}{\sigma_1}, \quad (2.73)$$

la cual sabemos que se expresa como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular

$$v(r) = v_0(r) + v_p(r), \quad (2.74)$$

donde v_0 es solución de la ecuación homogénea y v_p es una solución particular, respectivamente.

La solución particular que se propone es

$$v_p(r) = Lr^k. \quad (2.75)$$

Así pues, ésta satisface (2.73), y se obtiene lo siguiente:

$$L(k(k+1)r^k - r^k n(n+1)) = -\frac{1}{\sigma_1} r^{n+2}. \quad (2.76)$$

Con un poco de álgebra obtenemos

$$r^k L(k(k+1) - n(n+1)) = -\frac{1}{\sigma_1} r^{n+2}. \quad (2.77)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Para que la igualdad anterior se cumpla entonces se debe cumplir que $k = n + 2$, lo cual nos da

$$L(n^2 + 5n + 6 - n^2 - n) = -\frac{1}{\sigma_1}, \quad (2.78)$$

y con la expresión anterior obtenemos

$$L = -\frac{1}{2\sigma_1(2n + 3)}, \quad (2.79)$$

por lo que la solución particular v_p se expresa como

$$v_p(r) = -\frac{1}{2\sigma_1(2n + 3)}r^{n+2}. \quad (2.80)$$

Por ser v_0 la solución homogénea debe cumplir

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv_0(r)}{dr} \right) - v_0(r)n(n + 1) = 0. \quad (2.81)$$

Se debe encontrar un sistema fundamental de soluciones para (2.81). El sistema fundamental de soluciones se encuentra si se propone una solución $v_0(r) = r^k$, la cual se sustituye en (2.81), y se encuentran los valores de k , lo que nos da, dos soluciones linealmente independientes, las cuales son r^n y $r^{-(n+1)}$. Por lo tanto, toda solución se escribe como una combinación lineal de ellas dos de la forma siguiente:

$$v_0(r) = Br^n + Cr^{-(n+1)}, \quad (2.82)$$

Se impone la condición de acotación en $r = 0$, lo cual implica que $C = 0$ y

$$v_0(r) = Br^n. \quad (2.83)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Para calcular el coeficiente B , se usa la condición de contorno dada por (2.68), junto con la solución propuesta (2.69) con v propuesto en (2.74). Así obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right|_{S_1} &= \left. \frac{\partial w_1}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{\partial (v(r)Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial r} \right|_{r=R_1} \\ &= Y_{nm}(\theta, \phi) \left. \frac{d(v(r))}{dr} \right|_{r=R_1} \\ &= Y_{nm}(\theta, \phi) \left. \frac{d(v_0(r) + v_p(r))}{dr} \right|_{r=R_1} = 0. \end{aligned}$$

Por el hecho que $Y_{nm}(\theta, \phi) \neq 0$ entonces se ha de cumplir que

$$\frac{dv_0(R_1)}{dr} + \frac{dv_p(R_1)}{dr} = 0. \quad (2.84)$$

Con las ecuaciones dadas para v_0 y v_p respectivamente por (2.83) y (2.80) para usarlas en (2.84) se tiene

$$BnR_1^{n-1} - \frac{n+2}{2\sigma_1(2n+3)}R_1^{n+1} = 0, \quad (2.85)$$

de donde resolvemos para B , el cual nos da

$$B = \frac{n+2}{\sigma_1 2n(2n+3)} R_1^2. \quad (2.86)$$

De esta forma la solución homogénea es

$$v_0(r) = \frac{n+2}{\sigma_1 2n(2n+3)} R_1^2 r^n. \quad (2.87)$$

Con v_0 y v_p ya determinados la solución propuesta en (2.74) es finalmente

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$v(r) = -\frac{1}{2\sigma_1(2n+3)}r^{n+2} + \frac{n+2}{\sigma_1 2n(2n+3)}R_1^2 r^n. \quad (2.88)$$

Por la definición del operador A en (2.20), se tiene que $A(r^n Y_{nm}(\theta, \phi))$ es igual a la evaluación de w_1 en R_1 , por lo que llegamos a

$$\begin{aligned} A(r^n Y_{nm}(\theta, \phi)) &= v(R_1)Y_{nm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{1}{n(2n+3)} \right) R_1^{n+2} Y_{nm}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Notemos que de esta expresión se obtiene

$$A(H_{nm}(r, \theta, \phi)) = \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi R_1^{2n+3}}} \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{1}{n(2n+3)} \right) R_1^{n+2} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.90)$$

Sustituyendo (2.90) en (2.65) se llega a

$$Af(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{nm} \frac{1}{\sigma_1 n} \sqrt{\frac{R_1}{4\pi(2n+3)}} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.91)$$

A partir de (2.28) se tiene que (2.91) debe ser igual a g dado por (2.62), lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{nm} \frac{1}{\sigma_1 n} \sqrt{\frac{R_1}{4\pi(2n+3)}} Y_{nm}(\theta, \phi) \\ = \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right) \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

De la pasada expresión obtendremos los coeficientes de Fourier F_{nm} en términos de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado, dados por

$$F_{nm} = \sqrt{\frac{4\pi}{(2n+3)R_1}} \frac{n(n+1)(2n+3)}{2n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \right. \quad (2.92)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] V_{nm} \quad (n \geq 0, |m| \leq n)$$

De la anterior expresión se obtienen las condiciones que se le deben imponer a la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado, para que pueda ser reproducida por una fuente armónica.

En efecto, de (2.64) se tiene que la expresión final de la fuente es:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{4\pi}{(2n+3)R_1} \frac{n(n+1)(2n+3)}{2n+1}} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right] + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] V_{nm} H_{nm}(r, \theta, \phi), \quad (2.93)$$

y la condición sobre los coeficientes de Fourier de la medición se obtiene finalmente de la condición para la convergencia de la serie (2.93) en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$, por un procedimiento similar al que utilizamos en la obtención del resultado (2.45) del Teorema 2.3. Se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.5 *Para que exista una función armónica que reproduzca la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado, la condición necesaria y suficiente es que los coeficientes de Fourier de dicha medición con respecto a los armónicos esféricos ortonormalizados satisfagan la condición siguiente:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty \quad (2.94)$$

Si se cumple la condición (2.94) sobre los coeficientes de Fourier de la medición de la distribución de potencial en un instante dado, entonces la única fuente armónica que reproduce dicha medición viene dada por la expresión (2.93).

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

En consecuencia, en vista de (1.13) el conjunto de datos admisibles $\mathcal{M}[\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)]$ para el caso de identificación de fuentes armónicas en el volumen cerebral, y el conjunto de mediciones V de la forma (2.36) tales que sus coeficientes de Fourier V_{nm} satisfacen la condición (2.94).

2.4 Importancia de la clase de fuentes armónicas en la metodología de identificación de fuentes en clases de unicidad arbitrarias para el caso estacionario y aplicación al caso particular de identificación de fuentes armónicas en una vecindad de la corteza

Anteriormente hemos obtenido el conjunto de datos admisibles correspondiente al problema de identificación de fuentes armónicas en el volumen cerebral. A continuación se deducirá la condición que debe satisfacer la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado y, de tal forma que exista una fuente armónica en una vecindad de la corteza cerebral que reproduzca a V , con lo cual obtendremos el conjunto de datos admisibles para fuentes armónicas con soporte en una vecindad de la corteza. Para ello será necesario determinar la componente armónica, la cual es la misma que la fuente armónica soportada en el volumen cerebral. Antes de continuar, definamos la siguiente notación, basada en la Figura 2-2 la cual es una representación del modelo de medio conductor. Denotemos lo siguiente:

$\Omega_1^{(0)}$ es la región definida por $0 < r \leq R_0$, que representa la parte subcortical del cerebro.

$\Omega_1^{(1)}$ es la región definida por $R_0 < r \leq R_1$, que representa un entorno de la corteza cerebral.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Ω_2 es la región definida por $R_1 < r \leq R_2$, que representa las capas restantes, como son el cuero cabelludo, el cráneo y las meninges, donde la frontera exterior (cuero cabelludo) corresponde a $r = R_2$, que es donde se toman las mediciones.

S_0 es la frontera de $\Omega_1^{(0)}$ que corresponde $r = R_0$.

S_1 es la frontera exterior de $\Omega_1^{(1)}$ que corresponde $r = R_1$ (corteza cerebral).

S_2 es la frontera superior de Ω_2 que corresponde $r = R_2$ (cuero cabelludo).

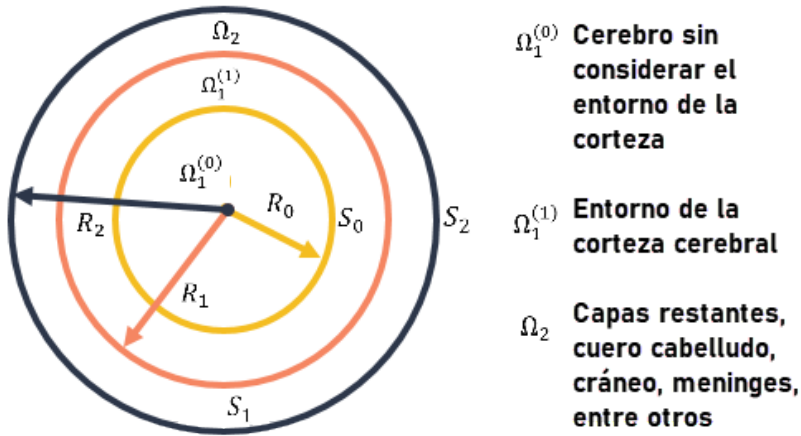


Figura 2-2 Figura esquemática del modelo de medio conductor denotando como $\Omega_1^{(0)}$ a el cerebro sin considerar el entorno de la corteza, $\Omega_1^{(1)}$ simboliza el entorno de la corteza cerebral, Ω_2 representa las capas restantes como el cuero cabelludo, cráneo, meninges, entre otros.

Definimos por conveniencia lo siguiente

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$\bar{r} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r \leq R_0 \\ r & \text{si } R_0 < r \leq R_1 \end{cases} \quad (2.95)$$

A partir de ahora utilizaremos las siguientes notaciones

$$J_{nm}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}} \bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (2.96)$$

$$K_{nm}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n-1}{4\pi(R_0^{-2n+1} - R_1^{-2n+1})}} \bar{r}^{-(n+1)} Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (2.97)$$

Observación: Las funciones $\{J_{nm}(r, \theta, \phi), K_{nm}(r, \theta, \phi): 1 \leq n < +\infty, -n \leq m \leq n\}$ constituyen una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ (ver [38, p. 772]).

Después de haber definido la notación para este problema, se va a resolver el problema de contorno auxiliar (2.6). Luego, con la solución w_1 restringida a S_1 se obtiene la evaluación de $A(f)$.

Para el caso que estamos tratando, la fuente f es armónica y además está concentrada en la región $\Omega_1^{(1)}$, fuera de este rango vale cero. Podemos expresar f de la forma siguiente:

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm} J_{nm}(r, \theta, \phi) + b_{nm} K_{nm}(r, \theta, \phi)), \quad (2.98)$$

donde

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (|a_{nm}|^2 + |b_{nm}|^2) < \infty. \quad (2.99)$$

Debido a que el operador es lineal y continuo, cuando aplicamos el operador A a f tenemos lo siguiente:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm}A(J_{nm}(r, \theta, \phi)) + b_{nm}A(K_{nm}(r, \theta, \phi))). \quad (2.100)$$

Para obtener $A(J_{nm}(r, \theta, \phi))$ calculamos

$$A(\bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi)), \quad (2.101)$$

para lo cual se requiere resolver el siguiente problema asociado

$$-\sigma_1 \Delta w_1(r, \theta, \phi) = \bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi) \text{ en } \Omega_1, \quad (2.102)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right|_{S_1} = 0 \text{ sobre } S_1. \quad (2.103)$$

Buscaremos la solución en la forma:

$$w_1 = a_{nm}(r)Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.104)$$

que nos conduce a

$$-\sigma_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(a_{nm}(r))}{dr} \right) Y_{nm}(\theta, \phi) - \frac{a_{nm}(r)}{r^2} (n(n+1)Y_{nm}(\theta, \phi)) \right) = \bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.105)$$

de donde concluimos que $a(r)$ satisface la ecuación

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(a(r))}{dr} \right) - a(r)n(n+1) = -\frac{\bar{r}^{n+2}}{\sigma_1}. \quad (2.106)$$

De la definición de la función \bar{r} en (2.95) se deduce que el problema anterior se divide en dos, uno para cuando $0 < r \leq R_0$, al que corresponde el subconjunto de Ω_1 (véase Figura 2-2) que denotamos $\Omega_1^{(0)}$, donde $\bar{r}^{n+2} = 0$, y el siguiente cuando $R_0 < r \leq R_1$, que corresponde al subconjunto de Ω_1 que denotamos $\Omega_1^{(1)}$, donde $\bar{r}^{n+2} = r^{n+2}$. Aquí la ecuación (2.106) se reescribe respectivamente en dos problemas

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(a_0(r))}{dr} \right) - a_0(r)n(n+1) = 0, \text{ para } 0 < r \leq R_0, \quad (2.107)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(a_1(r))}{dr} \right) - a_1(r)n(n+1) = -\frac{r^{n+2}}{\sigma_1}, \text{ para } R_0 < r \leq R_1. \quad (2.108)$$

Denotamos

$$w_1^{(0)} = \begin{cases} w_1 \text{ en } \Omega_1^{(0)}, \\ 0 \text{ en } \Omega_1^{(1)}, \end{cases} \quad (2.109)$$

y

$$w_1^{(1)} = \begin{cases} 0 \text{ en } \Omega_1^{(0)}, \\ w_1 \text{ en } \Omega_1^{(1)}, \end{cases} \quad (2.110)$$

de forma que $w_1 = w_1^{(0)} + w_1^{(1)}$.

Entonces, en $S_0 = \{(r, \theta, \phi): r = R_0\}$ deben cumplirse las condiciones de compatibilidad (continuidad de potenciales y corrientes)

$$w_1^{(0)} \Big|_{r=R_0} = w_1^{(1)} \Big|_{r=R_0} \text{ sobre } S_0, \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \text{ sobre } S_0. \quad (2.112)$$

De la condición (2.111) concluimos que

$$a_0(R_0)Y_{nm}(\theta, \phi) = a_1(R_0)Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.113)$$

y por lo tanto, se debe cumplir que

$$a_0(R_0) = a_1(R_0). \quad (2.114)$$

La condición (2.112) se traduce en

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\frac{\partial(a_0(R_0)Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial r} = \frac{\partial(a_1(R_0)Y_{nm}(\theta, \phi))}{\partial r}, \quad (2.115)$$

de donde se concluye que se debe cumplir

$$\frac{da_0}{dr}(R_0) = \frac{da_1}{dr}(R_0). \quad (2.116)$$

Entonces calcularemos la solución del sistema de ecuaciones (2.107), (2.108) con las condiciones de contorno (2.114), (2.116) y las condiciones adicionales:

$$|a_0(0)| < \infty, \quad (2.117)$$

$$\frac{da_1}{dr}(R_1) = 0, \quad (2.118)$$

donde (2.118) es consecuencia de la condición de contorno (2.103). Comencemos buscando la solución general de la ecuación (2.107) en el intervalo $0 < r \leq R_0$. Es conocido que la expresión general de dicha solución es de la forma $a_0(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$, para dos constantes A y B arbitrarias. De la condición (2.117) se deduce que $B = 0$, de lo que concluimos que:

$$a_0(r) = Ar^n, \quad (2.119)$$

donde la constante A se elegirá posteriormente de acuerdo con las condiciones de contorno.

Calculemos ahora la solución general de la ecuación (2.108), la cual sabemos que se expresa como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de (2.108), es decir, $a_1(r) = a_h(r) + a_p(r)$, donde $a_h(r)$ tiene la forma

$$a_h(r) = Cr^n + Dr^{-(n+1)}, \quad (2.120)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

para dos constantes arbitrarias C y D y buscaremos la solución particular en la forma $a_p(r) = Zr^k$. Si sustituimos esta expresión en (2.108) tenemos

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZr^k}{dr} \right) - Zr^k n(n+1) = -\frac{1}{\sigma_1} r^{n+2}. \quad (2.121)$$

De aquí se obtiene la relación

$$Z(k(k+1) - n(n+1))r^k = -\frac{1}{\sigma_1} r^{n+2},$$

de lo cual es necesario que $k = n + 2$, y se obtiene

$$Z = -\frac{1}{\sigma_1 2(2n+3)}. \quad (2.122)$$

Finalmente la solución particular de (2.108) es

$$a_p(r) = -\frac{1}{\sigma_1 2(2n+3)} r^{n+2}.$$

De aquí concluimos que la solución general de la ecuación (2.108) se expresa como

$$a_1(r) = Cr^n + Dr^{-(n+1)} - \frac{1}{\sigma_1 2(2n+3)} r^{n+2}. \quad (2.123)$$

Ahora debemos seleccionar los parámetros A, C y D en las expresiones (2.119) y (2.123) de manera que se satisfagan las condiciones de contorno (2.114), (2.116) y (2.118).

Como resultado se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$AR_0^n = CR_0^n + DR_0^{-n-1} - \frac{1}{2\sigma_1(2n+3)} R_0^{n+2}, \quad (2.124)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$AnR_0^{n-1} = CnR_0^{n-1} - D(n+1)R_0^{-n-2} - \frac{n+2}{2\sigma_1(2n+3)}R_0^{n+1}, \quad (2.125)$$

$$CnR_1^{n-1} - D(n+1)R_1^{-n-2} - \frac{n+2}{2\sigma_1(2n+3)}R_1^{n+1} = 0. \quad (2.126)$$

Al resolver este sistema obtenemos

$$A = \frac{1}{\sigma_1} \left(-\frac{n+1}{n(2n+1)(2n+3)} \frac{R_0^{2n+3}}{R_1^{2n+3}} + \frac{(n+2)R_1^2}{2n(2n+3)} \right) - \frac{1}{\sigma_1} \frac{R_0^2}{2(2n+1)}, \quad (2.127)$$

$$C = -\frac{n+1}{\sigma_1 n(2n+1)(2n+3)} \frac{R_0^{2n+3}}{R_1^{2n+3}} + \frac{(n+2)R_1^2}{2\sigma_1 n(2n+3)}, \quad (2.128)$$

$$D = -\frac{R_0^{2n+3}}{\sigma_1(2n+1)(2n+3)}. \quad (2.129)$$

Entonces, las soluciones de las ecuaciones (2.107) y (2.108) con las condiciones de contorno (2.114), (2.116) y (2.118) con los coeficientes ya calculados son:

$$a_0(r) = \frac{1}{\sigma_1} \left(-\frac{n+1}{n(2n+1)(2n+3)} \frac{R_0^{2n+3}}{R_1^{2n+3}} + \frac{(n+2)R_1^2}{2n(2n+3)} - \frac{R_0^2}{2(2n+1)} \right) r^n, \quad (2.130)$$

$$a_1(r) = \left(-\frac{n+1}{\sigma_1 n(2n+1)(2n+3)} \frac{R_0^{2n+3}}{R_1^{2n+3}} + \frac{(n+2)R_1^2}{2\sigma_1 n(2n+3)} \right) r^n \quad (2.131)$$

$$- \left(\frac{R_0^{2n+3}}{\sigma_1(2n+1)(2n+3)} \right) r^{-(n+1)} - \frac{1}{\sigma_1 2(2n+3)} r^{n+2}$$

Una vez obtenida la expresión para $a(r)$ en $0 < r \leq R_1$ se tiene que

$$A(\bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi)) = a(R_1) Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (2.132)$$

$$= a_1(R_1) Y_{nm}(\theta, \phi).$$

Notemos que de esta expresión se obtiene

$$A(J_{nm}(r, \theta, \phi)) = \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}} \left(-\frac{R_0^{2n+3}(1+n(1+R_1^2))}{\sigma_1 n(2n+3)(2n+1)R_1^{n+3}} \right. \quad (2.133)$$

$$\left. + \frac{R_1^{n+2}}{\sigma_1 n(2n+3)} \right) Y_{nm}(\theta, \phi).$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Pasemos ahora a obtener $A(K_{nm}(r, \theta, \phi))$. Para ello calculemos $A(\bar{r}^{-(n+1)}Y_{nm}(\theta, \phi))$, lo cual implica resolver el siguiente problema de contorno asociado:

$$-\sigma_1 \Delta w_1(r, \theta, \phi) = \bar{r}^{-(n+1)}Y_{nm}(\theta, \phi) \text{ en } \Omega_1, \quad (2.134)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right|_{S_1} = 0 \text{ sobre } S_1. \quad (2.135)$$

Buscaremos la solución en la forma

$$w_1 = b(r)Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.136)$$

Un cálculo similar al efectuado anteriormente nos conduce a la ecuación

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(b(r))}{dr} \right) - b(r)n(n+1) = -\frac{\bar{r}^{-n+1}}{\sigma_1}. \quad (2.137)$$

La ecuación anterior se divide en dos. Partiendo de (2.95), una para cuando $0 < r \leq R_0$, donde $\bar{r}^{-(n+1)} = 0$, y la otra cuando $R_0 < r \leq R_1$, por lo que la ecuación (2.137) se reescribe respectivamente en dos problemas:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(b_0(r))}{dr} \right) - b_0(r)n(n+1) = 0 \text{ para } 0 < r \leq R_0, \quad (2.138)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(b_1(r))}{dr} \right) - b_1(r)n(n+1) = -\frac{\bar{r}^{-n+1}}{\sigma_1} \text{ para } R_0 < r \leq R_1. \quad (2.139)$$

Es fácil ver, repitiendo el razonamiento anterior, que las condiciones de contorno que se deben satisfacer son idénticas a las condiciones (2.114), (2.116), (2.117) y (2.118), sustituyendo a por b :

$$b_0(R_0) = b_1(R_0), \quad (2.140)$$

$$\frac{db_0}{dr}(R_0) = \frac{db_1}{dr}(R_0), \quad (2.141)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$|b_0(0)| < \infty, \quad (2.142)$$

$$\frac{db_1}{dr}(R_1) = 0. \quad (2.143)$$

No es necesario repetir todo el cálculo que ya efectuamos anteriormente, sino que sólomente calcularemos una solución particular de la ecuación (2.139), para $R_0 < r \leq R_1$. Esto se puede buscar en la forma $b_p(r) = Pr^k$, obteniéndose

$$b_p(r) = -\frac{1}{2\sigma_1(1-2n)}r^{-n+1}. \quad (2.144)$$

Obviamente, la solución general de la ecuación homogénea asociada a (2.139) es de la forma

$$b_h(r) = Hr^n + Jr^{-(n+1)}, \quad (2.145)$$

donde H y J son constantes arbitrarias, de donde concluimos que la solución general de (2.139) es de la forma

$$b_1(r) = Hr^n + Jr^{-(n+1)} - \frac{1}{\sigma_1 2(-2n+1)}r^{-n+1}. \quad (2.146)$$

Al igual que antes, es fácil ver que la solución general de la ecuación (2.138) es de la forma

$$b_0(r) = Nr^n, \quad (2.147)$$

donde N es una constante arbitraria. Para determinar los valores de las constantes N, H y J se procede como antes, utilizando las condiciones de contorno (2.140), (2.141) y (2.143), lo cual conduce a un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$NR_0^n = HR_0^n + JR_0^{-n-1} - \frac{1}{2\sigma_1(1-2n)}R_0^{1-n}, \quad (2.148)$$

$$nNR_0^{n-1} = HnR_0^{n-1} - J(n+1)R_0^{-n-2} - \frac{(1-n)}{2\sigma_1(1-2n)}R_0^{-n}, \quad (2.149)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$HnR_1^{n-1} - J(n+1)R_1^{-n-2} - \frac{(1-n)}{2\sigma_1(1-2n)}R_1^{-n} = 0. \quad (2.150)$$

Al resolver este sistema obtenemos

$$N = \frac{(1-n)R_1^{-2n+1}}{2\sigma_1n(1-2n)} - \frac{(1+n)R_0^2R_1^{-2n-1}}{2\sigma_1n(1+2n)} - \frac{R_0^{1-2n}}{\sigma_1(1+2n)}, \quad (2.151)$$

$$H = \frac{(1-n)R_1^{-2n+1}}{2\sigma_1n(1-2n)} - \frac{(1+n)R_0^2R_1^{-2n-1}}{2\sigma_1n(1+2n)}, \quad (2.152)$$

$$J = -\frac{R_0^2}{2\sigma_1(1+2n)}. \quad (2.153)$$

Entonces, las soluciones de las ecuaciones (2.138) y (2.139) con las condiciones de contorno (2.140), (2.141) y (2.143) con los coeficientes ya calculados son:

$$b_0(r) = \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{(1-n)R_1^{-2n+1}}{2n(1-2n)} - \frac{(1+n)R_0^2R_1^{-2n-1}}{2n(1+2n)} - \frac{R_0^{1-2n}}{(1+2n)} \right) r^n, \quad (2.154)$$

$$b_1(r) = \left(\frac{(1-n)R_1^{-2n+1}}{2\sigma_1n(1-2n)} - \frac{(1+n)R_0^2R_1^{-2n-1}}{2\sigma_1n(1+2n)} \right) r^n - \left(\frac{R_0^2}{2\sigma_1(1+2n)} \right) r^{-(n+1)} - \frac{1}{2\sigma_1(1-2n)} r^{-n+1}. \quad (2.155)$$

Una vez obtenida la expresión para $b(r)$ en $0 < r \leq R_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} A \left(\bar{r}^{-(n+1)} Y_{nm}(\theta, \phi) \right) &= b(R_1) Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (2.156) \\ &= b_1(R_1) Y_{nm}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Notemos que de esta expresión se obtiene

$$A(K_{nm}(r, \theta, \phi)) = \sqrt{\frac{2n-1}{4\pi(R_0^{-2n+1} - R_1^{-2n+1})}} \left(\frac{(R_1^{-n+1} - R_0^2R_1^{-n-1})}{2\sigma_1n} \right) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.157)$$

Sustituyendo las igualdades (2.133) y (2.157) en (2.100) se llega a:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\begin{aligned}
 Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(a_{nm} \sqrt{\frac{2n+3}{R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3}}} \left[-\frac{R_0^{2n+3}(1+n(1+R_1^2))}{\sigma_1 n(2n+3)(2n+1)R_1^{n+3}} \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{R_1^{n+2}}{\sigma_1 n(2n+3)} \right] \right. \\
 \left. + b_{nm} \sqrt{\frac{2n-1}{R_0^{-2n+1} - R_1^{-2n+1}}} \left[\frac{R_1^{-n+1} - R_0^2 R_1^{-n-1}}{2\sigma_1 n} \right] \right) Y_{nm}(\theta, \phi)
 \end{aligned} \quad (2.158)$$

Para encontrar las propiedades que deben satisfacer los coeficientes de la medición V hay que igualar los coeficientes en la relación

$$Af = g, \quad (2.159)$$

donde g ya ha sido calculado anteriormente en (2.62) para el caso de la fuente armónica con soporte en todo el volumen cerebral. Se tiene

$$\begin{aligned}
 g = \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right. \\
 \left. + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right) \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi)
 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de $Y_{nm}(\theta, \phi)$ en las expresiones de Af y g , se llega a las relaciones:

$$\begin{aligned}
 \left(a_{nm} \sqrt{\frac{2n+3}{R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3}}} \left(-\frac{(1+n(1+R_1^2))R_0^{2n+3}}{n(2n+1)(2n+3)R_1^{n+3}} + \frac{R_1^{n+2}}{n(2n+3)} \right) \right. \\
 \left. + b_{nm} \sqrt{\frac{2n-1}{R_0^{-2n+1} - R_1^{-2n+1}}} \left(\frac{R_1^{-n+1} - R_0^2 R_1^{-n-1}}{2\sigma_1 n} \right) \right) \\
 = \sqrt{4\pi} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \\
 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) V_{nm}
 \end{aligned} \quad (2.160)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

Si denotamos por α_n y β_n respectivamente los coeficientes de a_{nm} y b_{nm} en la expresión (2.160) es fácil ver que

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3}}} \left(\frac{R_1^{n+2}}{n(2n+3)} - \frac{(1+n(1+R_1^2))R_0^{2n+3}}{n(2n+3)(2n+1)R_1^{n+3}} \right), \quad (2.161)$$

$$\beta_n = \frac{(R_1^2 - R_0^2) \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{2\sqrt{n}R_1\sqrt{R_1} \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{2n-1} - 1}}, \quad (2.162)$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n^{-\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{2}}, \quad (2.163)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n} = \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1 \sqrt{2R_0}}. \quad (2.164)$$

De aquí se deduce que α_n y $n^{-\frac{3}{2}}$ son sucesiones equivalentes y β_n es equivalente a la sucesión $n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n$. Es fácil ver que si denotamos por γ_n el coeficiente de V_{nm} en (2.160) entonces γ_n es equivalente a $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n$. Si expresamos (2.160) en la forma

$$\alpha_n a_{nm} + \beta_n b_{nm} = \gamma_n V_{nm}, \quad (2.165)$$

y si dividimos por α_n a cada lado, queda

$$a_{nm} + \frac{\beta_n}{\alpha_n} b_{nm} = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} V_{nm}. \quad (2.166)$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad (2.166) obtenemos

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2} + 2a_{nm}b_{nm} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\gamma_n^2}{\alpha_n^2} V_{nm}^2. \quad (2.167)$$

Sumando a ambos lados para n de 1 a infinito y m de $-n$ a n , y usando que f es armónica en $\Omega_1^{(1)}$, entonces tenemos lo siguiente:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_{nm}|^2$ converge dado que a_{nm} son coeficientes de Fourier de la función armónica f .
2. La sucesión cuyo término general es el segundo sumando de la parte izquierda de la igualdad (2.167) es equivalente a la sucesión $n^2 \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n} |b_{nm}|^2$, y del hecho que $n^2 \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y b_{nm} son coeficientes de Fourier de la función armónica f se tiene que la serie cuyo término general es este segundo sumando, también converge.

Pero entonces de los incisos 1 y 2 anteriores se concluye, que también converge la serie cuyo término general es la parte derecha de (2.167), que es una sucesión equivalente a la sucesión $n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} |V_{nm}|^2$, y por lo tanto la convergencia de la serie cuyo término general es la parte derecha de (2.167) es equivalente a la condición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < +\infty, \quad (2.168)$$

que es la condición necesaria y suficiente, la cual ya habíamos obtenido sobre la medición V para que sea reproducible por una fuente armónica definida en todo Ω_1 .

De esta manera hemos llegado a una primera conclusión importante: si existe una función armónica $f \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ que

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

reproduce la medición V , entonces V debe satisfacer la condición (2.168), la cual es una condición necesaria.

A continuación, veremos que la condición (2.168) también es suficiente.

En el Teorema 2.2 se muestra que para cualquier $f \in L_2(\Omega_1)$ que reproduzca V se tiene $f - h_0 \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)^\perp$, donde denotamos por h_0 a la única función en $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ que reproduce V .

Supongamos que $f \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ reproduce V . Entonces

$$\langle f - h_0, r^n Y_{nm}(\theta, \phi) \rangle = 0 \quad (2.169)$$

para $n \geq 1, -n \leq m \leq n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en $L_2(\Omega_1)$. Pero de la expresión (2.98) de f y del hecho que $\bar{r}^n Y_{nm}(\theta, \phi)$ y $\bar{r}^{-(n+1)} Y_{nm}(\theta, \phi)$ son ortogonales en $L_2(\Omega_1^{(1)})$, al igual que $r^n Y_{nm}(\theta, \phi)$ y $r^k Y_{kl}(\theta, \phi)$ para todo $n \neq k$, se tiene

$$\langle f, r^n Y_{nm}(\theta, \phi) \rangle = a_{nm} \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}}, \quad (n \geq 0, |m| \leq n). \quad (2.170)$$

Pero sabemos que

$$h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{1}{(2n+3)R_1}} \frac{n(n+1)(2n+3)}{(2n+1)} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right) V_{nm} \sqrt{\frac{2n+3}{R_1^{2n+3}}} r^n Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.171)$$

y por eso

$$\langle h_0, r^n Y_{nm}(\theta, \phi) \rangle \\ = \frac{n(n+1)(2n+3)}{R_1^{n+2}(2n+1)} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right) V_{nm}. \quad (2.172)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Por (2.169) se pueden igualar (2.170) y (2.172), y resolviendo para a_{nm} se tiene

$$a_{nm} = \sqrt{\frac{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}{2n+3}} \frac{n(n+1)(2n+3)}{(2n+1)} R_1^{n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right) V_{nm}. \quad (2.173)$$

Por otro lado de (2.165) se tiene que b_{nm} es

$$b_{nm} = \frac{\gamma_n}{\beta_n} V_{nm} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} a_{nm}. \quad (2.174)$$

Para calcular b_{nm} de una forma más sencilla expresemos a a_{nm} como:

$$a_{nm} = \delta_n V_{nm}. \quad (2.175)$$

Por lo tanto δ_n es

$$\delta_n = \sqrt{\frac{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}{2n+3}} \frac{n(n+1)(2n+3)}{(2n+1)} R_1^{n+1} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \right). \quad (2.176)$$

α_n , β_n están dados respectivamente por (2.161) y (2.162), donde γ_n es el coeficiente de V_{nm} en (2.160), dado por

$$\gamma_n = \sqrt{4\pi} \frac{n+1}{2n+1} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right\}. \quad (2.177)$$

Después de hacer los cálculos respectivos para obtener b_{nm} llegamos a

$$b_{nm} = \frac{2(1-R_1^2)}{\sqrt{R_1}} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^2 \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} \frac{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{2n-1} - 1}}{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{2n+3} - 1} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right] V_{nm}. \quad (2.178)$$

Para que exista $f \in \mathcal{H}^{(1)} \left(\Omega_1^{(1)} \right)$ que reproduzca V es necesario y suficiente que

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (|a_{nm}|^2 + |b_{nm}|^2) < +\infty. \quad (2.179)$$

Pero de (2.173) y (2.178) se ve que la sucesión $|a_{nm}|$ es equivalente a $n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n |V_{nm}|$ y $|b_{nm}|$ es equivalente a $\sqrt{n} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n |V_{nm}|$.

Por tanto $|a_{nm}|^2 + |b_{nm}|^2 \approx n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n}\right] |V_{nm}|^2$ de donde se concluye que la desigualdad (2.179) se cumple si y solo si se cumple la desigualdad (2.168).

Así, hemos concluido que la clase de datos admisibles para las fuentes de $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ coincide con la clase de datos admisibles para las fuentes de $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ independientemente del valor de R_0 ($0 < R_0 < R_1$).

Sin embargo, las clases $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ no son de unicidad. En efecto, si f_1 y f_2 son dos fuentes de esta clase que generan la misma medición V en $\mathcal{M}(\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)}))$ entonces se tendrá que $f_1 - f_2 \in \text{Ker}A$, por lo cual

$$\langle f_1 - f_2, r^n Y_{nm} \rangle = 0, 1 \leq n < \infty, -n \leq m \leq n.$$

De aquí se concluye la igualdad de los coeficientes $a_{nm}^{(1)}$ y $a_{nm}^{(2)}$ de f_1 y f_2 respectivamente, pero no se puede decir nada de los coeficientes de Fourier $b_{nm}^{(1)}$ y $b_{nm}^{(2)}$.

De aquí se deduce que una subclase de unicidad contenida en $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1^{(1)})$ se obtiene si consideramos únicamente las funciones armónicas que se expresan en términos de series con respecto a las funciones $J_{nm}(r, \theta, \phi)$. Es decir, que tienen la forma siguiente:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} J_{nm}(r, \theta, \phi), \quad (2.180)$$

con

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_{nm}|^2 < \infty. \quad (2.181)$$

Supongamos que una fuente f de esta clase reproduce una medición V y calculemos los correspondientes coeficientes de Fourier a_{nm} , para lo cual igualaremos coeficientes en la igualdad $Af = g$. Cuando aplicamos el operador A a f , debido a que el operador A es lineal y continuo, se obtiene

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} A(J_{nm}(r, \theta, \phi)), \quad (2.182)$$

donde $A(J_{nm}(r, \theta, \phi))$ ya ha sido calculado anteriormente en (2.133), por lo que (2.182) se expresa como:

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \sqrt{\frac{2n+3}{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}} \left(-\frac{R_0^{2n+3}(1+n(1+R_1^2))}{\sigma_1 n(2n+3)(2n+1)R_1^{n+3}} \right. \quad (2.183) \\ \left. + \frac{R_1^{n+2}}{\sigma_1 n(2n+3)} \right) Y_{nm}(\theta, \phi)$$

A partir de (2.159) se tiene que (2.183) debe ser igual a g dado por (2.62), lo cual nos lleva a

$$a_{nm} \left(-\frac{R_0^{2n+3}(1+n(1+R_1^2))}{n(2n+1)(2n+3)R_1^{n+3}} + \frac{R_1^{n+2}}{n(2n+3)} \right) = \quad (2.184) \\ = \frac{\sqrt{4\pi(R_1^{2n+3} - R_0^{2n+3})}}{\sqrt{2n+3}} \frac{n+1}{2n+1} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right\} V_{nm}.$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

De la ecuación anterior obtendremos los coeficientes de Fourier a_{nm} en términos de la medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante prefijado. Éstos son

$$a_{nm} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt{2 + \frac{3}{n}} \sqrt{4\pi R_1 \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n+3}\right)}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{R_1^2} [1-n] - 1\right) \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n+3}} n^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \right\} V_{nm} \quad (2.185)$$

De aquí se concluye

$$|a_{nm}|^2 \approx n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} |V_{nm}|^2. \quad (2.186)$$

En efecto, de (2.180) y (2.185), se tiene que la expresión final de la fuente es:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt{2 + \frac{3}{n}} \sqrt{4\pi R_1 \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n+3}\right)}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{R_1^2} [1-n] - 1\right) \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{2n+3}} n^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \right\} V_{nm} \quad (2.187)$$

A partir de ahora denotaremos a la subclase de fuentes (2.187) mediante

$$\mathcal{H}_0^{(1)} \left(\Omega_1^{(1)} \right). \quad (2.188)$$

Los anteriores resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema:

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Teorema 2.6 Para cualquier R_0 con $0 < R_0 < R_1$, los conjuntos de datos admisibles $\mathcal{M}\left(\mathcal{H}^{(1)}\left(\Omega_1^{(1)}\right)\right)$ y $\mathcal{M}\left(\mathcal{H}_0^{(1)}\left(\Omega_1^{(1)}\right)\right)$ coinciden con el conjunto de datos admisibles $\mathcal{M}\left(\mathcal{H}^{(1)}\left(\Omega_1\right)\right)$; es decir, estos 3 conjuntos de datos admisibles corresponden a las mediciones V cuyos coeficientes de Fourier satisfacen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty. \quad (2.189)$$

Además, la clase de fuentes $\mathcal{H}_0^{(1)}\left(\Omega_1^{(1)}\right)$ es una clase de unicidad.

Observación: el anterior resultado puede ser interpretado como la justificación matemática de que el EEG está determinado fundamentalmente por la actividad eléctrica de fuentes con soporte cercano a la corteza, tal como se menciona en [39, p. 22], donde se explica que la actividad sináptica en las estructuras superficiales es la que da lugar a flujos de corriente extracelular que resultan en potenciales de campo superficial que es lo que mide el EEG [28].

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

2.5 Importancia de la clase de fuentes armónicas en la aplicación del método de datos admisibles (MDA) a un esquema general de regularización para el problema de identificación de fuentes en clases de unicidad en el caso estacionario

El “Método de Datos Admisibles”, como estrategia de regularización, se asocia a cualquier clase de fuentes que satisfaga la condición de unicidad.

Comenzaremos por aplicar este método como estrategia de regularización para la clase de fuentes armónicas ortogonales a las constantes ($\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$) cuando suponemos que la medición en todo el cuero cabelludo no varía con el tiempo, en cuyo caso sabemos que la correspondiente clase de datos admisibles está conformada por las funciones de $L_2^{(1)}(S_2)$ de la forma

$$V(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.190)$$

los coeficientes de Fourier de (2.190) con respecto a los armónicos esféricos ortonormalizados en base al Teorema 2.5, satisfacen la condición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 < \infty. \quad (2.191)$$

En lo que sigue denotaremos mediante $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ al subespacio de las funciones de $L_2^{(1)}(S_2)$ cuyos coeficientes de Fourier satisfacen la condición (2.191).

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

El método de datos admisibles, aplicado al problema de identificación de fuentes armónicas a partir de mediciones que no dependen del tiempo para el problema de contorno (2.1) - (2.5), consiste de los siguientes pasos:

1. Seleccionar, de ser posible, un subespacio vectorial cerrado o un subconjunto compacto convexo, al que denotaremos mediante \mathcal{M}_0 , de manera conveniente, en el conjunto de datos admisibles de manera que el problema de distancia mínima a este subconjunto sea un problema bien planteado en $L_2(S_2)$.
2. Dada una medición con error $\tilde{V} \in L_2(S_2)$, encontrar el dato admisible $V_0 \in \mathcal{M}_0$ donde se alcanza la distancia mínima a \tilde{V} y verificar que dicha distancia es, a lo sumo, “del orden” del error de medición. Esto depende del paso 1.
3. Finalmente, la fuente armónica regularizada \tilde{h} se construye a partir de la expresión (2.93) a partir de los coeficientes de Fourier de V_0 .

NOTA 1: *La exigencia en el paso 2 de que la distancia de \tilde{V} a \mathcal{M}_0 sea a lo sumo del orden del error de medición es para asegurar que \tilde{V} se pueda reproducir de manera aproximada por una fuente armónica a partir del problema de contorno (2.1) - (2.5), que es quien define la clase de datos admisibles asociados a las fuentes armónicas. De no ser así no tendría sentido aplicar el paso 3 en el marco del modelo propuesto. El orden del error que se menciona en el paso 2 es algo que debe definirse con un criterio práctico y a menudo se toma como 4δ donde δ es el error de medición.*

NOTA 2. *El hecho que la estrategia definida en los pasos 1-3 es una estrategia de regularización se debe a que el paso 1 asegura la existencia y la dependencia continua del proyector asociado a*

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

la distancia mínima. Por otra parte, aplicando el Teorema de Banach sobre el operador inverso en el caso en que \mathcal{M}_0 sea un subespacio cerrado o el teorema de Tikhonov sobre la inversión continua de operadores continuos biyectivos entre espacios métricos compactos, al operador que a una fuente armónica le hace corresponder la correspondiente medición V en S_2 , se tiene que el operador que a V_0 le hace corresponder \tilde{h} es también continuo. Entonces la combinación de este operador con el proyector asociado a la distancia mínima en el paso 2 es un operador continuo, lo cual nos dice que la estrategia 1-3 es una estrategia de regularización ya que la obtención de la fuente armónica que reproduce aproximadamente la medición no es sensible a pequeños errores de medición.

Es fácil ver que el conjunto $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ es un subespacio vectorial que no es cerrado en $L_2^{(1)}(S_2)$ con respecto a la norma de $L_2^{(1)}(S_2)$, por lo que el problema de distancia mínima a $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ no está bien planteado en $L_2^{(1)}(S_2)$.

Entonces para cumplir el paso 2 de la estrategia propuesta podemos actuar de dos formas diferentes:

- a) Seleccionando un subespacio vectorial de $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$, cerrado en $L_2^{(1)}(S_2)$, en particular de dimensión finita, que necesariamente debe ser cerrado.
- b) Seleccionando un subconjunto compacto convexo en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$.

La primera propuesta no parece ser muy apropiada dado que es difícil caracterizar los subespacios vectoriales de $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ que sean cerrados en $L_2^{(1)}(S_2)$, salvo que sean de dimensión finita, y, en este caso se podría tomar cualquier subespacio de dimensión finita en $L_2^{(1)}(S_2)$ lo cual sería demasiado arbitrario.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Por esta razón optaremos por la propuesta b) y para ello equiparemos al espacio $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ con una norma para la cual sea un espacio de Banach compactamente sumergido en $L_2^{(1)}(S_2)$. En ese caso cualquier bola en el nuevo espacio de Banach será un subconjunto convexo y relativamente compacto en $L_2^{(1)}(S_2)$.

Dado que $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ está formado por las funciones de la forma (2.190) que satisfacen la condición (2.191), definiremos una nueva norma para las funciones V pertenecientes a $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ mediante:

$$\|V\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2}. \quad (2.192)$$

Teorema 2.7 *El espacio $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ provisto de la norma (2.192) es un espacio de Banach que está compactamente sumergido en $L_2^{(1)}(S_2)$.*

Demostración: Completitud: Es muy fácil ver que $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ es un subespacio vectorial y que (2.192) define una norma en este subespacio.

Sean $\{V^{(l)}\}_{l=1}^{\infty} \dots$, y denotemos $\{V_{nm}^{(l)}\}_{n,m}$ los coeficientes de Fourier de $V^{(l)}$ ($l \geq 1$). Donde $\{V^{(l)}\}_{l=1}^{\infty} \dots$, sea una sucesión de Cauchy en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ con respecto a la norma (2.192). Esto significa que $\forall \varepsilon > 0 \exists l_0(\varepsilon)$ tal que:

$$p, q \geq l_0 \Rightarrow \|V^{(p)} - V^{(q)}\|_{\mathcal{H}}^2 < \varepsilon^2, \quad (2.193)$$

lo que quiere decir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 < \varepsilon^2. \quad (2.194)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Para cada n fijo, del hecho de que $n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} > 1$, se sigue que de (2.194) se tiene que

$$\begin{aligned} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 &< \varepsilon^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 &< \frac{\varepsilon^2}{n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}} < \varepsilon^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 &< \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Entonces para todo n y m fijos y cumpliendo $-n \leq m \leq n$, la sucesión $\{V_{nm}^{(l)}\}_{n,m}$ es de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que $\{V_{nm}^{(l)}\}_{n,m} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} V_{nm}$.

En segundo lugar, a partir de (2.194) se cumple que para cualquier N se tiene

$$\sum_{n=1}^N n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 < \varepsilon^2. \quad (2.195)$$

Ahora dejando $p \geq l_0$ fijo y haciendo tender q a ∞ en (2.195) se sigue cumpliendo que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}^{(p)} - V_{nm}^{(q)}|^2 \leq \varepsilon^2, \quad (2.196)$$

y por la continuidad del módulo se tiene

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuerpo cabelludo

$$\sum_{n=1}^N n^3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n \left| V_{nm}^{(p)} - V_{nm} \right|^2 \leq \varepsilon^2, \forall p \geq l_0. \quad (2.197)$$

Lo anterior se cumple para cualquier N , y como en (2.197) se tiene una serie de sumas parciales de términos positivos que está uniformemente acotada por ε^2 , entonces por el Teorema de Weierstrass se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n^3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n \left| V_{nm}^{(p)} - V_{nm} \right|^2 \leq \varepsilon^2, \quad (2.198)$$

o sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n \left| V_{nm}^{(p)} - V_{nm} \right|^2 \leq \varepsilon^2, \forall p \geq l_0. \quad (2.199)$$

lo que quiere decir que

$$\|V^{(p)} - V\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq l_0, \quad (2.200)$$

Utilizando la desigualdad triangular

$$\|V\|_{\mathcal{H}} \leq \|V - V^{(p)}\|_{\mathcal{H}} + \|V^{(p)}\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.201)$$

luego se tiene que $V \in L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ y de (2.200) se tiene la convergencia de $V^{(p)}$ a V en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ de donde concluimos la completitud de $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ provisto de la norma (2.192). ■

Inmersión compacta: Demostraremos que la inyección canónica

$$i: (L_2^{\mathcal{H}}(S_2), \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \rightarrow (L_2^{(1)}(S_2), \|\cdot\|_2) \quad (2.202)$$

$$i(V) = V,$$

es un operador compacto.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

En efecto, es conocido que los polinomios armónicos $\{Y_{nm}(\theta, \phi): n \geq 1, -n \leq m \leq n\}$ son funciones propias del operador de Laplace – Beltrami $\Delta_{\theta, \phi}$ en S_2 (vease [38, p. 774]), correspondientes al valor propio $\lambda_n = n(n+1)$, respectivamente. De aquí se deduce que toda función en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ pertenece al espacio de Sobolev $H_2(S_2)$, ya que si

$$V(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi),$$

entonces

$$\begin{aligned} \|V\|_{H_2(S_2)}^2 &\leq M(\|V\|_{L_2(S_2)}^2 + \|\Delta_{\theta, \phi} V\|_{L_2(S_2)}^2) \leq \\ &M(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)^2 \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2) \leq \\ &M_1 \|V\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

De estas desigualdades se obtiene la continuidad de la inyección canónica

$$i_1: (L_2^{\mathcal{H}}(S_2), \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \rightarrow H_2(S_2), \quad (2.203)$$

y como la inyección canónica

$$i_2: H_2(S_2) \rightarrow (L_2^{(1)}(S_2), \|\cdot\|_2)$$

es compacta e $i = i_2 \circ i_1$, concluimos la compacidad de la inmersión de $(L_2^{\mathcal{H}}(S_2), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ en $(L_2^{(1)}(S_2), \|\cdot\|_2)$. ■

Del teorema anterior se deduce que para cada $K > 0$, el subconjunto \mathcal{M}_K del conjunto de datos admisibles \mathcal{M} definido mediante

$$\mathcal{M}_K = \{V \in L_2^{\mathcal{H}}(S_2): \|V\|_{\mathcal{H}} \leq K\},$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

es un compacto convexo en $L_2^{(1)}(S_2)$, y por ello se puede tomar este conjunto con K elegido convenientemente para aplicar el método de datos admisibles como estrategia de regularización para encontrar la fuente armónica que mejor aproxima a una medición de la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo en un instante dado \tilde{V} dada con error.

Ahora podemos aplicar el segundo paso del método de datos admisibles, para lo cual debemos encontrar el elemento $V_0 \in \mathcal{M}_K$ que se encuentra a distancia mínima de \tilde{V} en $L_2^{(1)}(S_2)$.

Para ello notemos primeramente que si $\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}} \leq K$ entonces el elemento de la bola B_K de centro el origen y radio K en $L_2^{(1)}(S_2)$ coincide con \tilde{V} , y si $\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}} > K$, entonces dicho elemento es

$$\begin{aligned} V_0 &= K \frac{\tilde{V}}{\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}}} = \frac{K}{\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{V}_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{K}{\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}}} \sum_{n=0}^{\infty} n^{3/2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \sum_{m=-n}^n n^{-3/2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \tilde{V}_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi), \end{aligned}$$

donde $\{\tilde{V}_{nm}\}_{n,m}$ son los coeficientes de Fourier de \tilde{V} con respecto al sistema $\{Y_{nm}\}_{n,m}$.

Esta última expresión nos dice que V_0 es precisamente el elemento de \mathcal{M}_K cuyos coeficientes V_{nm}^0 de Fourier con respecto al sistema $Y_{nm}(\theta, \phi)$ son:

$$\begin{aligned} V_{nm}^0 &= n^{-3/2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \tilde{V}_{nm}, & \text{si } \|\tilde{V}\|_2 \leq K, \\ V_{nm}^0 &= \frac{K}{\|\tilde{V}\|_{\mathcal{H}}} n^{-3/2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \tilde{V}_{nm}, & \text{si } \|\tilde{V}\|_2 > K, (n \geq 1, |m| \leq n). \end{aligned}$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Entonces, finalmente, la función armónica \tilde{f} que reproduce aproximadamente la medición con error \tilde{V} viene dada por la fórmula (2.93) sustituyendo V_{nm} por V_{nm}^0 .

En la práctica la medición se puede aproximar por un número finito de armónicos, lo cual quiere decir que en la serie de Fourier de \tilde{V} podemos eliminar todos los armónicos \tilde{V}_{nm} con $n \geq N(\delta)$ si se cumple

$$\sum_{n=N(\delta)+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |\tilde{V}_{nm}|^2 \leq \delta,$$

donde δ es el error de medición y, por lo tanto, se puede considerar que

$$\tilde{V} = \sum_{n=1}^{N(\delta)} \sum_{m=-n}^n \tilde{V}_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi),$$

y en la expresión de la fuente armónica correspondiente se puede también considerar una suma finita en $1 \leq n \leq N(\delta)$.

Supongamos finalmente que tenemos una clase de fuentes \mathcal{F} que satisface las condiciones de unicidad y para la cual el conjunto de datos admisibles $\mathcal{M}[\mathcal{F}]$ está contenido en el conjunto de las $V \in L_2^{(1)}(S_2)$ que satisfacen la condición (2.191).

Entonces si \tilde{V} es una medición con error y \tilde{f} es la fuente armónica que reproduce aproximadamente a \tilde{V} , como consecuencia del Teorema 2.2 de la sección 2.1, podemos considerar que la fuente $\tilde{g} \in \mathcal{F}$ que reproduce aproximadamente a \tilde{V} debe satisfacer la condición

$$\tilde{g} - \tilde{f} \in [\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)]^\perp.$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Es fácil ver que este criterio para elegir \tilde{g} es una estrategia de regularización para la determinación de la fuente en la clase \mathcal{F} a partir de mediciones con error.

2.6 Identificación de fuentes variables en el tiempo a partir de mediciones EEG

En esta sección estudiaremos cómo es posible obtener directamente la fuente $f(t; r, \theta, \phi)$ en una cierta clase de funciones definidas en Ω_1 (en cerebro), que reproduce una medición EEG dada por una función $V(t; \theta, \phi)$ definida en todo el cuero cabelludo S_2 durante un intervalo de tiempo $[0, T]$.

Comenzaremos haciendo las siguientes suposiciones sobre las fuentes y las mediciones EEG:

- Las fuentes son elementos del espacio $L_2\left([0, T], L_2^{(1)}(\Omega_1)\right)$ de las funciones de cuadrado integrable sobre $[0, T] \times \Omega_1$, que por el Teorema de Fubini coincide con el conjunto de funciones de cuadrado integrable en $[0, T]$ y que para t casi donde quiera en $[0, T]$ son funciones pertenecientes a $L_2^{(1)}(\Omega_1)$.
- Las mediciones EEG⁵ son funciones medibles en $[0, T] \times S_2$ que para cada t fijo casi donde quiera en $[0, T]$ son funciones pertenecientes a $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(S_2)$, subespacio de funciones de $L_2^{(1)}(S_2)$ que son trazas a S_2 de funciones de $H_1(\Omega_2)$.

⁵ Aquí nos referimos por mediciones EEG a la distribución de potencial en todo el cuero cabelludo S_2 , no sólo a las mediciones que se toman en cada electrodo.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Definición 2.2 Diremos que la fuente $f \in L_2\left([0, T], L_2^{(1)}(\Omega_1)\right)$ reproduce la medición EEG V en el intervalo $[0, T]$ si para casi todo t fijo en $[0, T]$, la fuente estacionaria $f_t(r, \theta, \phi)$ reproduce la medición estacionaria $V_t(\theta, \phi)$, donde

$$f_t(r, \theta, \phi) = f(t; r, \theta, \phi), \quad (2.204)$$

$$V_t(\theta, \phi) = V(t; \theta, \phi). \quad (2.205)$$

Proposición 2.1 Si la fuente f reproduce la medición EEG V en el intervalo $[0, T]$, entonces $V \in L_2\left([0, T], L_2^{(1)}(S_2)\right)$.

Demostración: En la sección 2.1 se demuestra que el operador \mathcal{A} definido en (2.27) es un operador compacto de $L_2^{(1)}(\Omega_1)$ a $L_2^{(1)}(S_2)$ que a cada fuente le hace corresponder la medición EEG asociada en el caso estacionario. Es decir, en el caso estacionario, la medición V corresponde a la fuente f si y sólo si $\mathcal{A}(f) = V$. Por lo tanto, según la Definición 2.2, la función $f(t; r, \theta, \phi)$ reproduce a la medición EEG $V(t; \theta, \phi)$ si y sólo si

$$\mathcal{A}(f_t) = V_t, \forall t \text{ c.d. en } [0, T].$$

Pero entonces para cualquier medición EEG V , se cumple que

$$\|V_t\|_{L_2^{(1)}(S_2)} \leq \|\mathcal{A}\| \|f_t\|_{L_2^{(1)}(\Omega_1)}, \quad (2.206)$$

donde $\|\mathcal{A}\|$ denota la norma del operador acotado \mathcal{A} .

Entonces

$$\int_0^T \|V(t; \theta, \phi)\|_{L_2^{(1)}(S_2)}^2 dt \leq \quad (2.207)$$

$$\|\mathcal{A}\|^2 \int_0^T \|f(t; r, \theta, \phi)\|_{L_2^{(1)}(\Omega_1)}^2 dt < +\infty,$$

o sea, $V \in L_2\left([0, T], L_2^{(1)}(S_2)\right)$. ■

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

A partir de ahora consideraremos clases de fuentes variables en tiempo de la forma

$$\mathcal{F}^T = L_2([0, T], \mathcal{F}), \quad (2.208)$$

donde \mathcal{F} es una clase de fuentes estacionarias contenida en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$.

Teorema 2.8 Si $\mathcal{M} \subseteq L_2^{(1)}(S_2)$ es la clase de datos admisibles correspondiente a una clase de fuente \mathcal{F} contenida en $L_2^{(1)}(\Omega_1)$, entonces la clase de EEG admisibles correspondientes a la clase de fuentes variables en el tiempo \mathcal{F}^T , viene dada por

$$\mathcal{M}^T = L_2([0, T], \mathcal{M}). \quad (2.209)$$

Además, si \mathcal{F} es una clase de unicidad para los datos admisibles \mathcal{M} en el caso estacionario, entonces \mathcal{F}^T es una clase de unicidad para la clase de EEG admisible \mathcal{M}^T .

Demostración: La primera parte del teorema es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.1 y la definición del operador \mathcal{A} .

Por otra parte, \mathcal{F} es una clase de unicidad para los datos admisibles \mathcal{M} si y sólo si el operador \mathcal{A} es una biyección de \mathcal{F} sobre \mathcal{M} .

Entonces, si $f^{(1)}$ y $f^{(2)} \in \mathcal{F}^T$ son dos fuentes generadoras de un mismo EEG V , se tiene que

$$\mathcal{A}(f_t^{(1)}) = \mathcal{A}(f_t^{(2)}) \quad \forall t \text{ c.d. en } [0, T], \quad (2.210)$$

y por la inyectividad de \mathcal{A} sobre \mathcal{F} se concluye que $f_t^{(1)} = f_t^{(2)}$ para todo t casi donde quiera en $[0, T]$; es decir, $f^{(1)} = f^{(2)}$ en $L_2([0, T], \mathcal{F})$. ■

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Ahora pasaremos a considerar el caso particular de \mathcal{F}^T cuando $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$; es decir, cuando las fuentes varían con el tiempo y para cada t casi donde quiera en $[0, T]$, son funciones armónicas en Ω_1 ortogonales a las constantes. Según el Teorema 2.8

$$\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)^T = L_2([0, T], \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)), \quad (2.211)$$

es una clase de unicidad de fuentes. La clase de EEG admisibles correspondientes es

$$L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T = L_2([0, T], L_2^{\mathcal{H}}(S_2)), \quad (2.212)$$

donde $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ es el espacio de Hilbert de funciones que satisfacen (2.191) provisto de la norma (2.192).

Para $V \in L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T$ y para t casi donde quiera en $[0, T]$ se define $\{V_{nm}(t)\}_{n,m}$ como los coeficientes de Fourier de V_t con respecto al sistema ortonormalizado de armónicos esféricos $\{Y_{nm}(\theta, \phi)\}_{n,m}$ dados en (2.33).

Teorema 2.9 *El conjunto de mediciones EEG admisibles $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T$ correspondiente a la clase de fuentes $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)^T$ está constituido por las funciones $V \in L_2([0, T], L_2^{(1)}(S_2))$ tales que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n \|V_{nm}(t)\|_{L_2[0,T]}^2 < +\infty. \quad (2.213)$$

Demostración: Es fácil ver que las funciones $V_{nm}(t)$ pertenecen a $L_2[0, T]$. Definamos una sucesión creciente de funciones de $L_1[0, T]$ mediante

$$v_N(t) = \sum_{n=1}^N n^3 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}(t)|^2 < +\infty. \quad (2.214)$$

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Claramente $v_N(t)$ converge casi donde quiera en $[0, T]$ a

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |V_{nm}(t)|^2. \quad (2.215)$$

Por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T v_N(t) dt = \int_0^T v(t) dt. \quad (2.216)$$

Pero también se cumple que

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T v_N(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n \|V_{nm}(t)\|_{L_2[0, T]}^2. \end{aligned} \quad (2.217)$$

De (2.216) y (2.217) se concluye que $v \in L_1[0, T]$ si y sólo si se cumple la condición (2.213), y es fácil ver que la condición $v \in L_1[0, T]$ es equivalente a que $v \in L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T$. O sea, para que V sea una medición EEG admisible para la clase de fuentes $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)^T$. ■

Es fácil ver de $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ son infinitamente diferenciables y todas sus derivadas pertenecen a $L_2(S_2)$ por lo cual $L_2^{\mathcal{H}}(S_2) \subset H_k(S_2)$ para todo $k \geq 1$ donde $H_k(S_2)$ es el espacio de Sobolev de las funciones con derivadas generalizadas hasta orden k en $L_2(S_2)$ y de los teoremas de inmersión de Sobolev [40], se tiene que $L_2^{\mathcal{H}}(S_2) \subset C^\infty(S_2)$, donde $C^\infty(S_2)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en sentido usual en S_2 .

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Por este motivo tiene sentido considerar la medición EEG en cualquier punto de S_2 , obteniéndose una señal temporal perteneciente a $L_2[0, T]$.

Sin embargo, es conveniente considerar que la medición en cada electrodo del EEG no es una señal puntual sino un promedio sobre la región de S_2 ocupada por la base del electrodo; es decir, si denotamos por $A_e^{(i)}$ la región de la base del electrodo cuyo centro se ubica en un punto (x_i, y_i, z_i) de S_2 caracterizado por las coordenadas esféricas (θ_i, ϕ_i) , entonces la medición $m_i(t)$ obtenida en este electrodo se expresa mediante la medición $V(t; \theta, \phi)$ a través de la relación:

$$m_i(t) = \frac{1}{|A_e^{(i)}|} \int_{A_e^{(i)}} V(t; \theta, \phi) dS, \quad (2.218)$$

donde $|A_e^{(i)}|$ denota el área de la base del electrodo.

Entonces, si se tienen N electrodos del EEG ubicados en los puntos (x_i, y_i, z_i) de S_2 con $i = 1, 2, \dots, N$ a partir de estas señales se debe obtener la medición EEG, $V(t; r, \theta, \phi)$ en todo S_2 .

Para ello se debe resolver el siguiente problema de optimización:

“Encontrar $V(t; \theta, \phi)$ de norma mínima en $L_2([0, T], L_2^{(1)}(S_2))$ que minimiza el funcional

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{1}{|A_e^{(i)}|} \int_{A_e^{(i)}} V(t; \theta, \phi) dS - m_i(t) \right\|_{L_2[0, T]}^2 \quad (2.219)$$

sobre $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T$, donde $m_i(t)$ es la señal medida en el electrodo i -ésimo del EEG”.

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

Una vez resuelto este problema de optimización, en base al Teorema 2.9 se construye la fuente de la clase $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)^T$ mediante la fórmula (2.93) sustituyendo V_{nm} por $V_{nm}(t)$.

De esta forma se obtiene la fuente variable en el tiempo y armónica con respecto a la variable espacial en Ω_1 , que mejor aproxima las mediciones $m_i(t)$ en los N electrodos del EEG.

Es conocido el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [41].

Proposición 2.2 Sean H un espacio de Hilbert separable, H_0 un subespacio cerrado de H y H_1 el complemento ortogonal de H_0 en H . Entonces se cumple:

- a) $L_2([0, T], H_0)$ es un subespacio cerrado en $L_2([0, T], H)$.
- b) El subespacio ortogonal $L_2^\perp([0, T], H_0)$ de $L_2([0, T], H_0)$ en $L_2([0, T], H)$ es $L_2([0, T], H_1)$.

Si se aplica este resultado al caso cuando $H_0 = \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)$ tendremos que el espacio ortogonal a la clase de fuentes armónicas y dependientes del tiempo es:

$$L_2^\perp([0, T], \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1)) = L_2([0, T], \text{Ker}\mathcal{A}), \quad (2.220)$$

donde \mathcal{A} es el operador definido en la sección 2.1 dado por la ecuación (2.27).

Luego, si se considera cualquiera otra clase de fuentes \mathcal{F} con la propiedad de unicidad en el caso estacionario, (tal que el correspondiente conjunto de datos admisibles \mathcal{M} esté contenido en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$) tendremos que si la fuente $f \in L_2([0, T], \mathcal{F})$ reproduce una medición EEG V y si $h \in L_2([0, T], \mathcal{H}^{(1)}(\Omega_1))$ también reproduce la misma V , entonces para t casi donde quiera

Capítulo 2 Identificación de fuentes equivalentes que reproducen una distribución de potencial en todo el cuero cabelludo

en $[0, T]$ se tendrá que $f_t - h_t$ es ortogonal a todas las funciones armónicas en Ω_1 .

Generalmente esta propiedad, junto con la caracterización del conjunto de datos admisibles \mathcal{M} , permiten encontrar la expresión de $f \in \mathcal{F}^T$ que reproduce V en el caso de datos sin error, tal como se hizo en el caso estacionario para determinar la fuente armónica en una vecindad de S_1 que reproduce una medición dada en S_2 .

La diferencia fundamental entre el caso estacionario y el no estacionario radica en que para la obtención de una solución única del problema de optimización (2.219) que no dependa sensiblemente de los errores en la medición EEG, se requiere restringir el conjunto donde se busca el óptimo a un subconjunto de $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)^T$ que sea compacto y convexo en $L_2([0, T], L_2^{(1)}(S_2))$, lo cual no se logra únicamente, como en el caso estacionario, considerando una bola de centro 0 y radio K en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ a la que denotaremos mediante B_K , sino también se requiere suavizar el comportamiento temporal en $L_2([0, T], B_K)$. Bastará con minimizar el funcional (2.219) sobre el conjunto

$$\{V \in H_1([0, T], B_K): \|V\|_{H_1([0, T], B_K)} \leq L\}, \quad (2.221)$$

donde mediante $H_1([0, T], B_K)$ hemos denotado el subespacio de Sobolev en $L_2([0, T], B_K)$ de las funciones cuyas derivadas de primer orden con respecto a t también pertenecen a este espacio.

La elección de los parámetros K y L ($K, L > 0$) que definen el “tamaño” de las bolas seleccionadas en $L_2^{\mathcal{H}}(S_2)$ y $H_1([0, T], B_K^T)$ puede ser interpretado como una estrategia de regularización.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

El objetivo principal de este capítulo es proponer expresiones analíticas explícitas (más o menos realistas) que permitan representar señales electroencefalográficas (EEG), de forma que toda señal de este tipo, correspondiente a un electrodo (entendida como una serie temporal) pueda aproximarse (suficientemente bien) por una señal patrón, dada por una expresión analítica concreta, tratable matemáticamente desde el punto de vista teórico, y determinada por valores de ciertos parámetros.

Para ello, se parte de la hipótesis de trabajo desarrollada en el Capítulo 1 (sección 1.2.2): la señal EEG es, de manera ideal, y en cada ventana temporal de una segmentación temporal adecuada, una superposición de ritmos básicos y trenes o ráfagas de ondas afiladas, espigas y espigas-ondas. A continuación, se exponen expresiones matemáticas que permitan aproximar estos ritmos básicos y ráfagas, respectivamente, para poder trabajar con expresiones explícitas que nos permitan hacer cálculos.

3.1 Expresión matemática aproximada de ritmos basales en las señales EEG

3.1.1 Motivación

En la Tabla A.1 se muestran los ritmos cerebrales básicos que suelen identificarse en una señal electroencefalográfica normal. Como se comenta en el Apéndice A (sección A.2), estos ritmos se caracterizan en base a tres características que los definen: rango de frecuencias, rango de amplitudes, morfología y región del cerebro en la que se genera el ritmo (ver Figura A-5). De acuerdo

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

a la literatura especializada, aproximadamente son los siguientes ([42], [43], [3]):

- Ritmo Delta (δ): su rango de frecuencias es de 0 Hz a 4 Hz, y su voltaje oscila entre $20\mu V$ y $200\mu V$.
- Ritmo Theta (θ): su rango de frecuencias es de 4 Hz a 8 Hz, y su voltaje promedio es de $20\mu V$ a $100\mu V$.
- Ritmo Alfa (α): su rango de frecuencias es de 8 Hz a 12 Hz y su voltaje oscila entre $20\mu V$ y $60\mu V$. Está asociado al estado de vigilia, a una conciencia relajada sin ninguna concentración.
- Ritmo Beta (β): su rango de frecuencias es de 13 Hz a 30 Hz y su voltaje es inferior a $30\mu V$.
- Ritmo Gamma (γ): sus frecuencias son mayores a los 30 Hz (principalmente a 100 Hz) y su voltaje oscila entre $5\mu V$ y $10\mu V$.

Como se comentó en el Capítulo 1 (sección 1.2.1), los ritmos básicos se modelarán matemáticamente atendiendo a su caracterización en términos de rangos de frecuencias, amplitudes, y morfología; se asume que la región generadora del cerebro tiene mayor relación con los electrodos específicos (y su ubicación) en los que se registra la señal EEG. Así, en general cada ritmo básico será una superposición de ondas sinusoidales (o tonos puros) de frecuencias particulares dentro del rango de frecuencias correspondiente al ritmo. Las amplitudes y morfologías vendrán dadas entonces por los valores de los coeficientes en las correspondientes combinaciones lineales en la superposición (ver Figura 1-3, [21]).

En este punto es importante realizar el siguiente comentario. Una señal EEG no es en absoluto periódica, ni tampoco estacionaria (su espectro de Fourier varía sensiblemente en el tiempo), sino que la preponderancia de sus componentes, y en particular los

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

ritmos basales, va alternándose en el tiempo véase ([44] [45], [46], [47]). Dependiendo del estado cerebral del individuo, las ondas continuas generadas por los generadores fisiológicos cambian su frecuencia instantáneamente, o los mecanismos de activación/inhibición pueden resultar en encendido/apagado de los ritmos basales, como un interruptor, como ya se comentó en el Capítulo 1 (sección 1.2.1). Por tanto, a la hora de trabajar con señales EEG, puesto que éstas no son periódicas ni estacionarias, para el análisis de los ritmos conviene partir estas señales en pedazos más pequeños, que llamaremos ventanas, de manera que la composición espectral de estas ventanas pueda considerarse constante en la práctica. Así, en las descomposiciones resultantes, los coeficientes -relacionados con la amplitud y morfología de las señales- podrán considerarse constantes; es decir, no dependientes del tiempo (aunque sí de la ventana). En consecuencia, las expresiones propuestas estarán a su vez definidas en ventanas temporales finitas.

Es importante mencionar en este punto que, en base a lo anterior, una señal patrón para un ritmo basal es un tipo de señal bien localizada simultáneamente en tiempo y en frecuencia; en tiempo, porque estará localizada en una ventana temporal por la no periodicidad y no estacionariedad de las señales EEG, como ya se comentó antes; y en frecuencia, ya que cada ritmo basal está caracterizado por poseer un rango de frecuencias característico, como ya se ha comentado. Por este motivo, las señales patrón deben tener estas propiedades matemáticas.

A la hora de proponer expresiones matemáticas para los ritmos basales, en base a la discusión anterior es claro que lo primero que debemos atender es al concepto de frecuencia. En este capítulo, modelizaremos el concepto de frecuencia usando la Transformada de Fourier: dada $f \in L_1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier es

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt, \quad (3.1)$$

donde la variable $\xi \in \mathbb{R}$ es la variable de frecuencia, medida en Hertzios (Hz, o ciclos por segundo, la unidad de medida de t). Nótese el 2π en el exponente. Esta definición se extiende de la manera usual a $L_2(\mathbb{R})$, resultando en una aplicación unitaria (ver [48]).

Así, en $L_2(\mathbb{R})$, la Transformada de Fourier tiene una inversa, que llamamos Transformada inversa de Fourier, y que en el caso de que $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ tiene la siguiente expresión:

$$\check{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi \quad (3.2)$$

donde si $g = \hat{f}$ entonces $\check{g} = f$ (ver [48]).

3.1.2 Operadores de restricción

En este punto, que una señal esté localizada en frecuencia, o más concretamente en un rango de frecuencias, se interpreta matemáticamente como que su transformada de Fourier se anula fuera de ese rango de frecuencias. Esto es, si el rango de frecuencias es un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\hat{f}(\xi) = 0$ siempre que $\xi \notin \Omega$. Diremos que una señal localizada en frecuencia es de “banda limitada” cuando el conjunto Ω es acotado.

Definición 3.1 Llamamos *proyección de restricción a la banda Ω* a la *proyección ortogonal sobre esa banda de frecuencias F_Ω* , (donde \mathcal{X}_Ω denota la función indicatriz de Ω) que viene dada por la siguiente expresión:

$$F_\Omega f = (\hat{f} \cdot \mathcal{X}_\Omega)^\vee \quad (f \in L_2(\mathbb{R})), \quad (3.3)$$

Es decir, se considera la transformada de Fourier \hat{f} , se la restringe al conjunto Ω multiplicando por \mathcal{X}_Ω , y se regresa a la variable

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

temporal aplicando la transformada inversa de Fourier. Esta proyección nos permite conocer la componente $F_{\Omega}f$ de la señal $f \in L_2(\mathbb{R})$ en el rango de frecuencias $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Particularizamos esto en el caso que nos ocupa.

Definición 3.2 De acuerdo a la clasificación de los ritmos basales (ver Tabla A.1), consideramos los siguientes rangos de frecuencias:

$$\Omega_0 = [-1,1], \quad (3.4)$$

$$\Omega_{\delta} = [-4, -1] \cup [4,1],$$

$$\Omega_{\theta} = [-8, -4] \cup [4,8],$$

$$\Omega_{\alpha} = [-12, -8] \cup [8,12], \Omega_{\beta} = [-30, -12] \cup [12,30]$$

$$\Omega_{\gamma} = [-100, -30] \cup [30,100] \text{ y } \Omega_{\infty} = (-\infty, -100] \cup [100, \infty).$$

De esta forma, todo el espectro de frecuencias queda dividido o particionado en esos rangos,

$$\mathbb{R} = \Omega_0 \cup \Omega_{\delta} \cup \Omega_{\theta} \cup \Omega_{\alpha} \cup \Omega_{\beta} \cup \Omega_{\gamma} \cup \Omega_{\infty},$$

donde los rangos se superponen únicamente en las frecuencias que los delimitan, y los rangos Ω_0 y Ω_{∞} corresponden a las frecuencias demasiado bajas y altas respectivamente, que por lo general se desprecian. De esta forma, para cualquier señal $f \in L_2(\mathbb{R})$ se tiene la siguiente descomposición espectral de acuerdo con los rangos de frecuencias anteriores:

$$f = F_{\Omega_0}f + F_{\Omega_{\delta}}f + F_{\Omega_{\theta}}f + F_{\Omega_{\alpha}}f + F_{\Omega_{\beta}}f + F_{\Omega_{\gamma}}f + F_{\Omega_{\infty}}f, \quad (3.5)$$

Para cada rango de frecuencias, la componente correspondiente nos da la parte de la señal que se ubica en ese rango. Además, se tiene la siguiente relación de energías entre la señal y sus distintas componentes (véase [49]):

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 = & \|F_{\Omega_0}f\|_2^2 + \|F_{\Omega_\delta}f\|_2^2 + \|F_{\Omega_\theta}f\|_2^2 + \|F_{\Omega_\alpha}f\|_2^2 \quad (3.6) \\ & + \|F_{\Omega_\beta}f\|_2^2 + \|F_{\Omega_\gamma}f\|_2^2 + \|F_{\Omega_\infty}f\|_2^2. \end{aligned}$$

Estas identidades se deducen de la ortogonalidad de las componentes, que es obvia debido a que los soportes son esencialmente disjuntos y a que la transformada de Fourier es unitaria (ver identidad de Parseval [48]).

Sin embargo, estas componentes no están muy localizadas en tiempo, salvo en casos triviales. No pueden estarlo, ya que la única función de soporte compacto de banda limitada es la función trivial (ver [50] capítulo 3). Por este motivo, si queremos tener información local de la señal EEG debemos localizar también en tiempo.

Definición 3.3 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, para localizar una señal en el intervalo $[a, b]$ utilizaremos el operador proyección de restricción sobre la ventana $[a, b]$, que es la proyección ortogonal $P_{a,b}$ sobre este intervalo, que viene dada por la ecuación*

$$P_{a,b}f = f \cdot \chi_{[a,b]} \quad (f \in L_2(\mathbb{R})). \quad (3.7)$$

Aplicando este operador, junto con el anterior operador F_Ω ; es decir, calculando $P_{a,b}F_\Omega f$, podemos obtener la información de la señal $f \in L_2(\mathbb{R})$ en un rango de frecuencias Ω y un intervalo temporal $[a, b]$. Nótese que $P_{a,b}F_\Omega f$ no puede ser de banda limitada salvo que sea trivial, por lo comentado anteriormente. Esto se debe a que al proyectar sobre el intervalo $[a, b]$, la transformada de Fourier de $F_\Omega f$ se transforma de manera que ya no está soportada en un conjunto acotado.

En general, si se ha dividido el eje temporal en ventanas, de la forma $[a_k, a_{k+1}]$, donde $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

estrictamente creciente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ y $\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = -\infty$, se obtiene la descomposición

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} f,$$

para toda señal $f \in L_2(\mathbb{R})$, con la identidad de energías

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} f\|_2^2.$$

Estas identidades se deducen de manera análoga a las anteriores. Aplicando esto a cada componente de la descomposición anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_0} f + \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\delta} f + \quad (3.8) \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\theta} f + \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\alpha} f + \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\beta} f + \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\gamma} f + \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\infty} f. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_0} f\|_2^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\delta} f\|_2^2 + \quad (3.9) \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\theta} f\|_2^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\alpha} f\|_2^2 + \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\beta} f\|_2^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\gamma} f\|_2^2 + \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_{a_k, a_{k+1}} F_{\Omega_\infty} f\|_2^2. \end{aligned}$$

3.1.3 Funciones básicas para los ritmos basales

Ahora, dados $a, b, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ cumpliendo

$$\begin{aligned} a < b, \quad 0 \leq \omega_1 < \omega_2 \quad \text{y} \quad (3.10) \\ \Omega &= [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], \end{aligned}$$

nos planteamos cómo aproximar la componente $P_{a,b} F_{\Omega} f$ para una señal $f \in L_2(\mathbb{R})$. Para ello utilizaremos ondas sinusoidales correspondientes a ciertos armónicos dentro del rango de

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

frecuencias requerido, pero truncadas en un intervalo temporal. De esta manera, se obtendría la localización espacio-temporal requerida.

Definición 3.4 En concreto, usaremos funciones de la forma

$$f_{\omega}(t) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(2\pi\omega t) \mathcal{X}_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ y} \quad (3.11)$$

$$g_{\omega}(t) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(2\pi\omega t) \mathcal{X}_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (3.12)$$

donde $\omega \in \Omega$. A la hora de trabajar con la Transformada de Fourier, será conveniente trabajar con las exponenciales complejas. Denotemos también

$$e_{\omega}(t) = \sqrt{\frac{1}{b-a}} e^{2\pi i \omega t} \mathcal{X}_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (3.13)$$

Usando las identidades elementales

$$f_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (e_{\omega} - e_{-\omega}) \quad (3.14)$$

y

$$g_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{\omega} + e_{-\omega}), \quad (3.15)$$

es sencillo pasar de la versión compleja a la real y viceversa.

Parece razonable, para tratar de representar lo mejor posible el rango de frecuencias, tomar como conjunto de modos una malla suficientemente fina de Ω . Concretamente, escogemos una malla uniformemente distribuida en Ω .

Definición 3.5 Dado un entero d positivo, definimos

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\Lambda_d = \{\omega_{d,k}\}_{k=1}^{2d+2} \subset \Omega, \quad \omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{d}, \quad (3.16)$$

$$\omega_{d,k} = \begin{cases} \omega_1 + \omega_d(d+1-k) & \text{si } 1 \leq k \leq d+1, \\ -\omega_1 - \omega_d(k-d-2) & \text{si } d+2 \leq k \leq 2d+2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Nótese que $\omega_d > 0$, $\omega_1 \leq \omega_{d,k} \leq \omega_2$ si $1 \leq k \leq d+1$ y $-\omega_2 \leq \omega_{d,k} \leq -\omega_1$ si $d+2 \leq k \leq 2d+2$. Además, $\omega_{d,k}$ es decreciente en k . Λ_d consiste en partir cada intervalo de los dos que conforman Ω en d intervalos de igual longitud, obteniéndose $d+1$ puntos por cada uno.

Definición 3.6 Dado d entero positivo, por conveniencia denotamos

$$e_{d,k} = e_{\omega_{d,k}} \quad (1 \leq k \leq 2d+2). \quad (3.18)$$

Es decir,

$$e_{d,k}(t) = \sqrt{\frac{1}{b-a}} e^{2\pi i \omega_{d,k} t} \chi_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq 2d+2). \quad (3.19)$$

Definición 3.7 Dado d entero positivo, denotamos

$$\mathcal{B}_d = \{e_{d,k}\}_{k=1}^{2d+2} \quad \text{y} \quad V_d = \text{span} \mathcal{B}_d. \quad (3.20)$$

Observamos que si j y k son tales que $1 \leq j, k \leq 2d+2$ y $j+k = 2d+3$ (son simétricos), se tiene

$$\omega_{d,j} = -\omega_{d,k} \quad (3.21)$$

y por tanto

$$\overline{e_{d,j}} = e_{d,k}. \quad (3.22)$$

Esta propiedad es importante, ya que nos permitirá posteriormente convertir \mathcal{B}_d en una base de cosenos y senos. Nótese que en el caso en el que $\omega_1 = 0$, se tiene $\omega_{d,d+1} = \omega_{d,d+2} = 0$, y hay que considerar que la función $e_{d,d+1} = e_{d,d+2}$ está repetida.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Del Lema 1.7.2 de [51] se deduce que \mathcal{B}_d es linealmente independiente, y por tanto es una base de V_d . La justificación para escoger este tipo de bases es la siguiente: las exponenciales trigonométricas $e^{2\pi i\omega \cdot}$ son tonos puros, armónicos asociados a la frecuencia $\omega \in \mathbb{R}$. Esto se refleja en que su transformada de Fourier está hiperconcentrada, ya que únicamente está soportada en un punto. De hecho, su transformada de Fourier es la Delta de Dirac soportada en ω . Esto hay que entenderlo en el sentido de las distribuciones, ya que la exponencial trigonométrica, al ser una señal periódica, no puede ser una función integrable ni de cuadrado integrable (ver [48]). Sin embargo, al multiplicar por la indicatriz $\mathcal{X}_{[a,b]}$ (y normalizar), resulta una función $e_\omega \in L_2(\mathbb{R})$. Esta función tiene la propiedad de estar localizada en el intervalo $[a, b]$ y ser un tono puro de frecuencia ω . Este hecho es obvio, aunque contraste con el hecho de que su transformada de Fourier \hat{e}_ω está soportada en todo \mathbb{R} . Concretamente, se tiene

$$\hat{e}_\omega(\xi) = \sqrt{b-a} e^{-\pi i(a+b)(\xi-\omega)} \frac{\text{sen}(\pi(b-a)(\xi-\omega))}{\pi(b-a)(\xi-\omega)} \quad (\xi \in \mathbb{R}), \quad (3.23)$$

donde se asume $\hat{e}_\omega(\omega) = \sqrt{b-a}$.

Antes de continuar, aclaremos cómo considerar funciones básicas reales.

Definición 3.8 En el caso real, los rangos de frecuencias son

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_0 &= [0,1], \tilde{\Omega}_\delta = [1,4], \\ \tilde{\Omega}_\theta &= [4,8], \tilde{\Omega}_\alpha = [8,12], \\ \tilde{\Omega}_\beta &= [12,30], \tilde{\Omega}_\gamma = [30,100] \text{ y } \tilde{\Omega}_\infty = [100, \infty). \end{aligned}$$

En general, un rango genérico se denotará $\tilde{\Omega} = [\omega_1, \omega_2]$. La malla en este rango de frecuencias es la siguiente:

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Definición 3.9 Dado d entero positivo, definimos

$$\tilde{\Lambda}_d = \{\omega_{d,k}\}_{k=1}^{d+1} \subset \tilde{\Omega}, \quad \omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{d}$$

y

$$\omega_{d,k} = \omega_1 + \omega_d (d + 1 - k) \quad (1 \leq k \leq d + 1).$$

Nótese que esto coincide con el caso complejo, pero se seleccionan únicamente las frecuencias no negativas.

Definición 3.10 Así, dado d entero positivo, las funciones utilizadas serían

$$f_{d,k} = f_{\omega_{d,k}} \quad \text{y} \quad g_{d,k} = g_{\omega_{d,k}} \quad (1 \leq k \leq d + 1).$$

Es decir,

$$f_{d,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(2\pi\omega_{d,k}t) \mathcal{X}_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq d + 1)$$

y

$$g_{d,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(2\pi\omega_{d,k}t) \mathcal{X}_{[a,b]}(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq d + 1).$$

Aquí, habría que exceptuar el caso en que $\omega_{d,k} = 0$ (concretamente $\omega_{d,d+1} = 0$ si $\omega_1 = 0$), en el que se tiene $f_0 = 0$ y $g_0 = (1/\sqrt{b-a})\mathcal{X}_{[a,b]}$.

Definición 3.11 La base y el espacio que generan son

$$\tilde{\mathcal{B}}_d = \{f_{d,k}, g_{d,k}\}_{k=1}^{d+1} \quad \text{y} \quad V_d = \text{span}\tilde{\mathcal{B}}_d.$$

Nótese que, si se consideran escalares complejos, el espacio V_d es el mismo, pero si se consideran escalares reales, son únicamente las funciones en V_d reales. Para hacer el cambio entre desarrollos en una y otra base, se puede utilizar simplemente la identidad

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\alpha_k e_{d,k} + \beta_k e_{d,2d+3-k} = i \frac{\alpha_k - \beta_k}{\sqrt{2}} f_{d,k} + \frac{\alpha_k + \beta_k}{\sqrt{2}} g_{d,k} \quad (3.24)$$

$$(1 \leq k \leq d+1),$$

donde además se tiene

$$\left| i \frac{\alpha_k - \beta_k}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{\alpha_k + \beta_k}{\sqrt{2}} \right|^2 = |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2. \quad (3.25)$$

3.1.4 Esquema de aproximación de los ritmos basales

Con todas estas herramientas, fijados un rango de frecuencias Ω y una ventana $[a, b]$, al proyectar una señal f sobre estos espacios compacto finito-dimensionales V_d , lo que se está haciendo es aproximar la proyección $P_{a,b} F_\Omega f$ por una superposición de tonos puros de frecuencias uniformemente distribuidas en el rango de frecuencias dado Ω , soportados en la ventana fijada $[a, b]$. Cuanto mayor es d , más fina resulta la malla de frecuencias muestreadas dentro de Ω , y mejor será la aproximación.

Concretamente, dada $f \in L_2(\mathbb{R})$, es claro que $F_\Omega f \in L_2(\mathbb{R})$ y $P_{a,b} F_\Omega f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, ya que su soporte está en $[a, b]$. Entonces, usando las identidades anteriores y la identidad de Plancherel (ver [48]), se tiene

$$\begin{aligned} (P_{a,b} F_\Omega f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} P_{a,b} F_\Omega f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt \\ &= \int_a^b F_\Omega f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt \\ &= \sqrt{b-a} \int_{\mathbb{R}} F_\Omega f(t) e_{-\xi}(t) dt \\ &= \sqrt{b-a} \langle F_\Omega f, e_\xi \rangle = \sqrt{b-a} \langle (F_\Omega f)^\wedge, \hat{e}_\xi \rangle \\ &= \sqrt{b-a} \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \overline{\hat{e}_\xi(\eta)} d\eta = \sqrt{b-a} \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) d\eta = \end{aligned}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{b-a} \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{e}_0(\xi - \eta) d\eta \\
 &= (b-a) \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) e^{-\pi i(a+b)(\xi-\eta)} \frac{\sin(\pi(b-a)(\xi-\eta))}{\pi(b-a)(\xi-\eta)} d\eta.
 \end{aligned}$$

Aquí, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en $L_2(\mathbb{R})$.

Por otro lado, todo $g \in V_d$ tiene la forma

$$g = \sum_{k=1}^{2d+2} a_k e_{d,k},$$

para ciertos $\{a_k\}_{k=1}^{2d+2}$ complejos. En vista de la expresión anterior para $(P_{a,b} F_{\Omega} f)^{\wedge}$, no es difícil escoger ciertos coeficientes para aproximar esas integrales por sumas. De esta manera se obtienen aproximantes de fácil construcción.

Supongamos que \hat{f} es continua (esto ocurre, por ejemplo, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, ver [48]). Escojamos

$$a_k = a_{d,k}(f) = \omega_d \sqrt{b-a} \hat{f}(\omega_{d,k}) \quad (1 \leq k \leq 2d+2), \quad (3.26)$$

que definen

$$A_d f = \sum_{k=1}^{2d+2} a_{d,k}(f) e_{d,k} \in V_d. \quad (3.27)$$

Entonces

$$(A_d f)^{\wedge} = \sum_{k=1}^{2d+2} a_{d,k}(f) \hat{e}_{d,k} = \omega_d \sqrt{b-a} \sum_{k=1}^{2d+2} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}.$$

Denotemos el módulo de continuidad de \hat{f} sobre Ω por

$$\rho(\hat{f}, \Omega, s) = \max\{|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| : \xi, \eta \in \Omega, |\xi - \eta| \leq s\} (s > 0). \quad (3.28)$$

Denotemos también

$$\|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} = \max_{\xi \in \Omega} |\hat{f}(\xi)|. \quad (3.29)$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Nótese que si \hat{f} es continua, como Ω es compacto, \hat{f} es uniformemente continua, y el módulo de continuidad y su máximo son finitos.

Se tiene el siguiente resultado de convergencia de los aproximantes $A_d(f)$.

Teorema 3.1 *Sea $f \in L_2(\mathbb{R})$ tal que \hat{f} es continua en Ω . Entonces*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} A_d f = P_{a,b} F_{\Omega} f \quad \text{en } L_2(\mathbb{R}). \quad (3.30)$$

Si además \hat{f} es Lipschitz en Ω , se tiene

$$\|P_{a,b} F_{\Omega} f - A_d f\|_2 = \mathcal{O}(d^{-1}) \text{ cuando } d \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

Demostración: Sea $\xi \in \mathbb{R}$. En primer lugar, contraponemos las dos expresiones:

$$\begin{aligned} & \left| (P_{a,b} F_{\Omega} f)^{\wedge}(\xi) - (A_d f)^{\wedge}(\xi) \right| = \\ & = \left| \sqrt{b-a} \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) d\eta - \right. \\ & \left. \omega_d \sqrt{b-a} \sum_{k=1}^{2d+2} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi) \right| = \\ & = \sqrt{b-a} \left| \int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) d\eta - \omega_d \sum_{k=1}^{2d+2} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi) \right|. \end{aligned}$$

Nótese que se tiene

$$\Omega = \left(\bigcup_{k=1}^d [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}] \right) \cup \left(\bigcup_{k=d+2}^{2d+1} [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}] \right).$$

Usando esta descomposición, en este punto descomponemos el primer sumando como

$$\int_{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) d\eta =$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\sum_{k=1}^d \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} \hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) d\eta + \sum_{k=d+2}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} \hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) d\eta$$

y la segunda suma la transformamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega_d \sum_{k=1}^{2d+2} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi) &= \\ &= \sum_{k=1}^d \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi) d\eta \\ &\quad + \sum_{k=d+2}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi) d\eta + \\ &\quad + \omega_d \hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi) + \omega_d \hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi). \end{aligned}$$

Así, agrupando los términos en cada intervalo, se tiene

$$\begin{aligned} &| (P_{a,b} F_\Omega f)^\wedge(\xi) - (A_d f)^\wedge(\xi) | \leq \\ &\leq \sqrt{b-a} \left\{ \sum_{k=1}^d \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} |\hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| d\eta \right. \\ &\quad + \sum_{k=d+2}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} |\hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| d\eta + \\ &\quad \left. + \omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \right\}. \end{aligned}$$

Para el último sumando se tiene

$$\begin{aligned} &\omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \leq \\ &\leq \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} (|\hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|). \end{aligned}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Los integrandos anteriores pueden estimarse como sigue. Suponemos $\eta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]$ para algún índice k en las sumas anteriores.

$$\begin{aligned}
 & |\hat{f}(\eta)\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k})\hat{e}_{d,k}(\xi)| \leq \\
 & \leq |\hat{f}(\eta)\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k})\hat{e}_\eta(\xi)| \\
 & \quad + |\hat{f}(\omega_{d,k})\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k})\hat{e}_{d,k}(\xi)| \\
 & = |\hat{f}(\eta) - \hat{f}(\omega_{d,k})||\hat{e}_\eta(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,k})||\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{e}_{d,k}(\xi)| \leq \\
 & \leq \rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) |\hat{e}_\eta(\xi)| + \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} |\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{e}_{d,k}(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Este último factor se puede estimar usando el Teorema del valor medio:

$$\begin{aligned}
 |\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{e}_{d,k}(\xi)| &= |\hat{e}_\xi(\eta) - \hat{e}_\xi(\omega_{d,k})| \leq \\
 & \leq |\eta - \omega_{d,k}| \max_{\theta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]} \left| \frac{d}{d\eta} \hat{e}_\xi(\theta) \right| \leq \\
 & \leq \omega_d \max_{\theta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]} \left| \frac{d}{d\eta} \hat{e}_0(\xi - \theta) \right|.
 \end{aligned}$$

Se divide la recta en tres intervalos. En el intervalo central (es decir, $-\omega_2 - 1/(2(b-a)) \leq \xi \leq \omega_2 + 1/(2(b-a))$), se usan las estimaciones

$$\begin{aligned}
 |\hat{e}_\eta(\xi)| &\leq \omega_d \sqrt{b-a} \quad \text{y} \\
 \max_{\theta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]} \left| \frac{d}{d\eta} \hat{e}_0(\xi - \theta) \right| &\leq \pi|a+b| + \frac{\pi(b-a)}{2},
 \end{aligned}$$

de forma que se tiene

$$|\hat{f}(\eta)\hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k})\hat{e}_{d,k}(\xi)| \leq$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{b-a} \rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \omega_{d,k} \pi \frac{2|a+b| + (b-a)}{2} \leq \\ &\leq \max\left(\sqrt{b-a}, \pi \frac{2|a+b| + (b-a)}{2}\right) \left(\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}\right). \end{aligned}$$

Denotemos por comodidad

$$C_1 = \max\left(\sqrt{b-a}, \pi \frac{2|a+b| + (b-a)}{2}\right).$$

Los últimos sumandos se estiman así:

$$\begin{aligned} &\omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \leq \\ &\leq 2\sqrt{b-a} \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} &|(P_{a,b} F_{\Omega} f)^{\wedge}(\xi) - (A_d f)^{\wedge}(\xi)| \leq \\ &\leq \sqrt{b-a} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq d+1}}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k} - \omega_d}^{\omega_{d,k}} |\hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| d\eta + \\ &\omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \leq \\ &\leq \sqrt{b-a} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq d+1}}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k} - \omega_d}^{\omega_{d,k}} C_1 (\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}) d\eta \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{b-a} \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \right\} \leq \\ &\leq (2\sqrt{b-a}(\omega_2 - \omega_1) C_1 + 2(b-a)) (\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}). \end{aligned}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Si denotamos por comodidad

$$C_2 = 2\sqrt{b-a}(\omega_2 - \omega_1)C_1 + 2(b-a).$$

hemos probado que en este caso se tiene

$$\left| (P_{a,b}F_{\Omega}f)^{\wedge}(\xi) - (A_d f)^{\wedge}(\xi) \right| \leq C_2 \left(\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \right).$$

Fuera del intervalo central, donde $|\xi| > \omega_2 + \frac{1}{2(b-a)}$, se usan las estimaciones

$$|\hat{e}_{\eta}(\xi)| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{\pi(b-a)|\xi-\eta|} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{b-a}(|\xi|-\omega_2)}$$

y

$$\begin{aligned} & \max_{\theta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]} \left| \frac{d}{d\eta} \hat{e}_{\xi}(\xi - \theta) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{b-a} \max_{\theta \in [\omega_{d,k} - \omega_d, \omega_{d,k}]} \left\{ \left(\pi|a+b| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{|\xi-\theta|} \right) \left| \frac{\sin(\pi(b-a)(\xi-\theta))}{\pi(b-a)(\xi-\theta)} \right| + \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \frac{\cos(\pi(b-a)(\xi-\theta))}{(\xi-\theta)} \right| \right\} \leq \\ & \leq \sqrt{b-a} \left\{ \frac{\pi|a+b| + 2(b-a)}{\pi(b-a)(|\xi|-\omega_2)} + \frac{1}{|\xi|-\omega_2} \right\} = \\ & = \frac{\pi|a+b| + (\pi+2)(b-a)}{\pi\sqrt{b-a}} \frac{1}{|\xi|-\omega_2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$|\hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| \leq$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi\sqrt{b-a}(|\xi| - \omega_2)} \rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) \\
&\quad + \frac{\pi|a+b| + (\pi+2)(b-a)}{\pi\sqrt{b-a}} \frac{1}{|\xi| - \omega_2} \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \leq \\
&\leq \frac{\text{máx}(1, \pi|a+b| + (\pi+2)(b-a))}{\pi\sqrt{b-a}} \frac{\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{|\xi| - \omega_2}.
\end{aligned}$$

Denotemos por comodidad

$$C_3 = \frac{\text{máx}(1, \pi|a+b| + (\pi+2)(b-a))}{\pi\sqrt{b-a}}.$$

Los últimos sumandos se estiman así:

$$\begin{aligned}
&\omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \leq \\
&\leq \frac{2\omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{\pi\sqrt{b-a}(|\xi| - \omega_2)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&|(P_{a,b} F_{\Omega} f)^{\wedge}(\xi) - (A_d f)^{\wedge}(\xi)| \leq \\
&\leq \sqrt{b-a} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq d+1}}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} |\hat{f}(\eta) \hat{e}_{\eta}(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \omega_d (|\hat{f}(\omega_{d,d+1}) \hat{e}_{d,d+1}(\xi)| + |\hat{f}(\omega_{d,2d+2}) \hat{e}_{d,2d+2}(\xi)|) \right\} \leq \\
&\leq \sqrt{b-a} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq d+1}}^{2d+1} \int_{\omega_{d,k}-\omega_d}^{\omega_{d,k}} C_3 \frac{\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{|\xi| - \omega_2} d\eta + \right.
\end{aligned}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\left. + \frac{2\omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{\pi\sqrt{b-a}(|\xi| - \omega_2)} \right\} \leq$$

$$\leq \left(2\sqrt{b-a}(\omega_2 - \omega_1)C_3 + \frac{2}{\pi} \right) \frac{\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{|\xi| - \omega_2}.$$

Si denotamos por comodidad

$$C_4 = 2\sqrt{b-a}(\omega_2 - \omega_1)C_3 + \frac{2}{\pi},$$

hemos probado que en este caso se tiene

$$|\hat{f}(\eta) \hat{e}_\eta(\xi) - \hat{f}(\omega_{d,k}) \hat{e}_{d,k}(\xi)| \leq C_4 \frac{\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty}}{|\xi| - \omega_2}.$$

Definimos la función auxiliar

$$M(\xi) = \begin{cases} C_4(-\omega_2 - \xi)^{-1} & \text{si } \xi < -\omega_2 - \frac{1}{2(b-a)} \\ C_2 & \text{si } -\omega_2 - \frac{1}{2(b-a)} \leq \xi \leq \omega_2 + \frac{1}{2(b-a)} \quad (\xi \in \mathbb{R}). \\ C_4(\xi - \omega_2)^{-1} & \text{si } \xi > \omega_2 + \frac{1}{2(b-a)} \end{cases}$$

Entonces, en resumen, lo que se tiene es

$$\begin{aligned} & \left| (P_{a,b}F_\Omega f)^\wedge(\xi) - (A_d f)^\wedge(\xi) \right| \\ & \leq M(\xi) \left(\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \right), \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} \|M\|_2^2 &= \int_{-\omega_2 - \frac{1}{2(b-a)}}^{\omega_2 + \frac{1}{2(b-a)}} C_2^2 d\xi + 2 \int_{\omega_2 + \frac{1}{2(b-a)}}^{\infty} \frac{C_4^2}{(\xi - \omega_2)^2} d\xi = \\ &= 2 C_2^2 \left(\omega_2 + \frac{1}{2(b-a)} \right) + 8 C_4^2 (b-a). \end{aligned}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Puesto que $M \in L_2(\mathbb{R})$, de aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| (P_{a,b}F_{\Omega}f)^{\wedge}(\xi) - (A_d f)^{\wedge}(\xi) \right|^2 d\xi \\ \leq \int_{\mathbb{R}} |M(\xi)|^2 d\xi \left(\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \right)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, por la identidad de Parseval (ver [48]) se tiene que

$$\begin{aligned} \|P_{a,b}F_{\Omega}f - A_d f\|_2 &= \left\| (P_{a,b}F_{\Omega}f)^{\wedge} - (A_d f)^{\wedge} \right\|_2 \leq \\ &\leq \|M\|_2 \left(\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) + \omega_d \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty} \right). \end{aligned}$$

Puesto que $\omega_d \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow \infty$, y como \hat{f} es uniformemente continua sobre Ω también se tiene $\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow \infty$, esto prueba que

$$A_d f \xrightarrow{d \rightarrow \infty} P_{a,b}F_{\Omega}f \text{ en } L_2(\mathbb{R}).$$

Más aún, si \hat{f} es Lipschitz en Ω con constante $L_{\hat{f}} > 0$, el módulo de continuidad cumple $\rho(\hat{f}, \Omega, \omega_d) \leq L_{\hat{f}}\omega_d$, y entonces

$$\|P_{a,b}F_{\Omega}f - A_d f\|_2 \leq \frac{\|M\|_2(\omega_2 - \omega_1)(L_{\hat{f}} + \|\hat{f}\|_{\Omega, \infty})}{d} = \mathcal{O}(d^{-1}) \quad \text{cuando } d \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Nótese que este resultado es razonable, puesto que para pedir que la componente $P_{a,b}F_{\Omega}f$ se pueda aproximar razonablemente por superposiciones de armónicos puros formando mallas en Ω soportados en $[a, b]$, no es extraño pedir que la variación de \hat{f} en este rango de frecuencias no sea muy brusca, de manera que las componentes de ciertos armónicos aproximen suficientemente bien a las correspondientes a armónicos cercanos.

3.1.5 Algoritmo para el cálculo numérico de los aproximantes de la medición EEG en un electrodo

Denotemos mediante $f_{re}(t)$ el registro continuo de la señal real del EEG y supongamos que $f_{re} \in L_2(\mathbb{R})$. Con respecto a la notación utilizada hasta el momento, $f_{re}(t) = m_i(t)$, que corresponde idealmente a la ubicación de un electrodo puntual. En la práctica la información con que se cuenta de f_{re} consiste en un vector $F = (F_1, \dots, F_L) \in \mathbb{R}^L$ ($L \in \mathbb{N}$) de mediciones del potencial en base a un muestreo temporal uniforme procedente de las mediciones de un electrodo. Así, dada una frecuencia de muestreo ζ (entero positivo), que representa el número de muestras por segundo, se tiene

$$F_\mu \sim f_{re} \left(\frac{\mu - 1}{\zeta} \right) \quad (1 \leq \mu \leq L). \quad (3.32)$$

Es decir, la medición es un muestreo aproximado de la señal real en un intervalo temporal $[a, b]$, donde $b = a + (L - 1)/\zeta$ y se puede considerar $a = 0$.

Se asume que la frecuencia de muestreo ζ ha sido escogida de forma que se pueden obviar las frecuencias mayores a una frecuencia determinada igual a $\zeta/2$, es decir, suponemos que en el intervalo $[-\zeta/2, \zeta/2]$ se encuentran todas las frecuencias importantes de la señal EEG, de acuerdo al teorema de muestreo de Shannon-Whittaker-Kotelnikov y el criterio correspondiente de Nyquist (ver [2]). Buscaremos una aproximación f_{med} de f_{re} con $f_{med} \in L_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f_{med} \left(\frac{\mu - 1}{\zeta} \right) = F_\mu \quad (1 \leq \mu \leq L). \quad (3.33)$$

y $\hat{f}_{med}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \zeta/2$. Nótese que al corresponder f_{med} a una señal de banda limitada entonces es una función continua debido a que $\hat{f}_{med} \in L_1(\mathbb{R})$, luego tiene sentido la evaluación en

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

los puntos del muestreo. Considerando entonces f_{med} un representante adecuado de la medición (como función), el error de medición es $\|f_{re} - f_{med}\|_2$ donde $\|\cdot\|_2$ representa la norma en $L_2(\mathbb{R})$.

Al estar \hat{f}_{med} soportada en $[-\zeta/2, \zeta/2]$, se puede desarrollar en términos de una serie de Fourier adecuada:

$$\hat{f}_{med}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_{\mu} e^{2\pi i \mu \xi / \zeta} \quad (\xi \in [-\zeta/2, \zeta/2]), \quad (3.34)$$

donde la convergencia es en $L_2(\mathbb{R})$ (o $L^2([-\zeta/2, \zeta/2])$) y los coeficientes de Fourier para cada $\mu \in \mathbb{Z}$ vienen dados por

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \hat{f}_{med}(\xi) e^{-2\pi i \mu \xi / \zeta} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{med}(\xi) e^{-2\pi i \mu \xi / \zeta} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} f_{med}\left(-\frac{\mu}{\zeta}\right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Además, por la identidad de Parseval (ver [48]) se tiene

$$\begin{aligned} \|f_{med}\|_2^2 &= \|\hat{f}_{med}\|_2^2 = \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} |\hat{f}_{med}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} |a_{\mu}|^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Asumiendo que $f_{med}\left(\frac{\mu}{\zeta}\right) = 0$ si $\mu < 0$ o $\mu \geq L$, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{f}_{med}(\xi) &= \frac{1}{\zeta} \sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med}\left(\frac{\mu}{\zeta}\right) e^{-2\pi i \mu \xi / \zeta} = \\ &= \frac{1}{\zeta} \sum_{\mu=0}^{L-1} F_{\mu+1} e^{-2\pi i \mu \xi / \zeta} \quad \text{para todo } \xi \in \left[-\frac{\zeta}{2}, \frac{\zeta}{2}\right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

y

$$\|f_{med}\|_2^2 = \|\hat{f}_{med}\|_2^2 = \frac{1}{\zeta} \sum_{\mu=0}^{L-1} \left| f_{med} \left(\frac{\mu}{\zeta} \right) \right|^2 = \frac{\|F\|^2}{\zeta}. \quad (3.38)$$

En fin, hemos demostrado que si f_{med} es una aproximación de f_{re} que satisface las condiciones (3.33) y $\hat{f}_{med}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \zeta/2$, entonces \hat{f}_{med} se expresa en la forma (3.37). Nótese que esta expresión para \hat{f}_{med} tiene la forma de una suma de Riemann de la integral que la define en base a la definición de transformada de Fourier, en caso de que f_{med} fuera integrable y estuviera soportada en $[a, b]$. De hecho, la hipótesis anterior no implica que $f_{med}(t) = 0$ si $t \notin [a, b]$, sino sólo en los puntos anteriores. Esto se debe a que f_{med} es de banda limitada. De hecho, se tiene

$$f_{med}(t) = \sum_{\mu=0}^{L-1} F_{\mu+1} \frac{\sin(\pi\zeta(t - \mu/\zeta))}{\pi\zeta(t - \mu/\zeta)} \quad (3.39)$$

para $t \in \mathbb{R}$, lo cual se obtiene calculando la transformada inversa de Fourier en la expresión (3.37).

Para construir los aproximantes requerimos evaluar \hat{f}_{med} en la malla del rango de frecuencias. En general $f_{med} \notin L_1(\mathbb{R})$, ya que \hat{f}_{med} no será continua en $\xi = \pm\zeta/2$, por ejemplo. Sin embargo, si nos interesa el análisis de una componente de la señal EEG con frecuencias en el rango $[\omega_1, \omega_2]$ con $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \zeta/2$, se tiene

$$\Omega = [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2] \subseteq \left[-\frac{\zeta}{2}, \frac{\zeta}{2} \right],$$

y \hat{f}_{med} sí será continua sobre Ω , ya que coincide con un polinomio trigonométrico. Entonces, dados $d \in \mathbb{N}$ y k con $1 \leq k \leq 2d + 2$, se tiene

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned} \hat{f}_{med}(\omega_{d,k}) &= \frac{1}{\zeta} \sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med}\left(\frac{\mu}{\zeta}\right) e^{-2\pi i \mu \omega_{d,k} / \zeta} \\ &= \frac{1}{\zeta} \sum_{\mu=0}^{L-1} F_{\mu+1} e^{-2\pi i \frac{\mu}{\zeta} \omega_{d,k}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A partir de estas expresiones es trivial construir los aproximantes $A_d(f_{med})$ para cada entero positivo.

Usando las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.40), es sencillo dar una expresión explícita en términos de la medición de los aproximantes reales, para no tener que hacer cálculos con números complejos.

3.1.6 Aproximación numérica de los ritmos básicos que componen una señal EEG

En esta sección consideraremos $a = 0$, es decir $t \in [0, b]$. El principio que utilizaremos en esta sección consiste en que es posible aproximar la componente de una señal EEG correspondiente a un ritmo básico mediante los aproximantes $A_d f_{med}$ dados por (3.27) si se consideran únicamente los términos que corresponden a las frecuencias involucradas en el ritmo.

Para poder construir el ejemplo numérico, es necesario obtener una expresión adecuada de los aproximantes $A_d f_{med}$ dados en (3.27):

$$A_d f_{med}(t) = \sum_{k=1}^{2d+2} a_{d,k}(f_{med}) e_{d,k}(t) \in V_d, \quad (3.41)$$

donde los $a_{d,k}$ y los $e_{d,k}(t)$ están dados por (3.26) y (3.19). Es necesario llegar a una expresión de (3.41) que nos facilite la programación del algoritmo para mostrar el ejemplo numérico. Si

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

suponemos que $f \in L_1(\mathbb{R})$ entonces su Transformada de Fourier (3.1) se puede expresar en términos de las Transformada Coseno y Seno de Fourier, a las que denotaremos mediante $\mathcal{F}_C f$ y $\mathcal{F}_S f$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(2\pi t \xi) dt \\ &\quad - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \operatorname{sen}(2\pi t \xi) dt \\ &= \mathcal{F}_C f(\xi) - i \mathcal{F}_S f(\xi). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Del hecho que

$$\overline{\hat{f}(\xi)} = \check{f}(\xi), \quad (3.43)$$

se tiene que

$$\mathcal{F}_C f(\xi) = \frac{1}{2} (\hat{f}(\xi) + \overline{\hat{f}(\xi)}) = \operatorname{Re}(\hat{f}(\xi)), \quad (3.44)$$

$$\mathcal{F}_S f(\xi) = \frac{1}{2i} (\hat{f}(\xi) - \overline{\hat{f}(\xi)}) = -\operatorname{Im}(\hat{f}(\xi)). \quad (3.45)$$

Es fácil ver que $A_{df_{med}}$ se expresa en la forma

$$\begin{aligned} A_{df_{med}}(t) &= \omega_d \sqrt{2b} \sum_{k=1}^{d+1} \left(\mathcal{F}_S f_{med}(\omega_{d,k}) f_{d,k}(t) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_C f_{med}(\omega_{d,k}) g_{d,k}(t) \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

y usando (3.44) y (3.45) se llega a

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$\begin{aligned}
 & A_d f_{med}(t) \tag{3.47} \\
 &= \omega_d \sqrt{2b} \sum_{k=1}^{d+1} \left(-Im \left(\hat{f}_{med}(\omega_{d,k}) \right) f_{d,k}(t) \right. \\
 & \quad \left. + Re \left(\hat{f}_{med}(\omega_{d,k}) \right) g_{d,k}(t) \right).
 \end{aligned}$$

Si se expresa $\hat{f}_{med}(\omega_{d,k})$ en términos de su parte real e imaginaria, podemos concluir que (3.47) se reduce a

$$\begin{aligned}
 & A_d f_{med}(t) \tag{3.48} \\
 &= \frac{\omega_d \sqrt{2b}}{\zeta} \sum_{k=1}^{d+1} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med} \left(\frac{\mu}{\zeta} \right) sen \left(2\pi \frac{\mu \omega_{d,k}}{\zeta} \right) \right) f_{d,k}(t) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med} \left(\frac{\mu}{\zeta} \right) cos \left(2\pi \frac{\mu \omega_{d,k}}{\zeta} \right) \right) g_{d,k}(t) \right\}.
 \end{aligned}$$

El aproximante de $A_d f_{med}$ para $t \in [0, b]$ se evalúa en $t = \frac{v}{\zeta}$:

$$\begin{aligned}
 & A_d f_{med} \left(\frac{v}{\zeta} \right) \tag{3.49} \\
 &= \frac{2\omega_d}{\zeta} \sum_{k=1}^{d+1} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med} \left(\frac{\mu}{\zeta} \right) sen \left(2\pi \omega_{d,k} \frac{\mu}{\zeta} \right) \right) sen \left(2\pi \omega_{d,k} \frac{v}{\zeta} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{\mu=0}^{L-1} f_{med} \left(\frac{\mu}{\zeta} \right) cos \left(2\pi \frac{\mu \omega_{d,k}}{\zeta} \right) \right) cos \left(2\pi \omega_{d,k} \frac{v}{\zeta} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

donde $0 \leq v < L$, $b = \frac{L-1}{\zeta}$.

Utilizamos la siguientes expresiones matriciales y vectoriales para facilitar la programación del algoritmo numérico:

$$A_d F = \left(A_d f_{med} \left(\frac{v}{\zeta} \right) \right)_{v=0, \dots, L-1}^T \in M_{L \times 1}(\mathbb{R}), \tag{3.50}$$

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

$$F = \left(f_{med} \left(\frac{v}{\zeta} \right) \right)_{\mu=0, \dots, L-1}^T \in M_{L \times 1}(\mathbb{R}), \quad (3.51)$$

$$S_d = \left(\text{sen} \left(2\pi\omega_{d,k} \frac{\mu}{\zeta} \right) \right)_{\substack{\mu=0, \dots, L-1 \\ k=0, \dots, d+1}} \in M_{L \times (d+1)}(\mathbb{R}), \quad (3.52)$$

$$C_d = \left(\text{cos} \left(2\pi\omega_{d,k} \frac{\mu}{\zeta} \right) \right)_{\substack{\mu=0, \dots, L-1 \\ k=0, \dots, d+1}} \in M_{L \times (d+1)}(\mathbb{R}), \quad (3.53)$$

La notación anterior nos permite expresar (3.49) en la forma matricial

$$A_d F = \frac{2\omega_d}{\zeta} [S_d S_d^T F + C_d C_d^T F]. \quad (3.54)$$

Nótese que el producto matricial de $S_d^T F$ y $C_d^T F$ es

$$\mathcal{F}_C f_{med} \left(\frac{v}{\zeta} \right) = C_d^T F, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{F}_S f_{med} \left(\frac{v}{\zeta} \right) = S_d^T F. \quad (3.56)$$

En la forma matricial del aproximante (3.54), las columnas de las matrices (3.52) y (3.53) están relacionadas con las componentes en frecuencias consideradas para describir la señal EEG, mientras que las filas corresponden a la ventana temporal de interés. Luego, si nos interesa describir la componente del EEG correspondiente a un cierto ritmo básico caracterizado por un rango de frecuencias en una ventana temporal preestablecida, es suficiente quedarnos con la componente de la expresión (3.54) asociada a las correspondientes columnas y filas.

3.2 Peso relativo de los ritmos básicos y segmentación

En esta sección se propone una metodología para “medir” el peso relativo de los ritmos en una señal EEG, y en base a ella, otra metodología para segmentar un EEG de acuerdo a la preponderancia de éstos. Por lo primero queremos expresar la importancia de cada uno de los ritmos basales en la configuración de la señal EEG completa.

Esto hay que entenderlo de la siguiente forma: fijados el parámetro de aproximación $d \in \mathbb{N}$ y $([A, B]$ u otra de interés), para cada componente asociada a un rango de frecuencias (véase [43]) en (3.4) se tiene un aproximante que denotaremos

$$A_{d,\lambda}(f_{med}) \text{ para } \lambda \in \{0, \delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \infty\}. \quad (3.57)$$

La suma de todos nos da un aproximante de la señal EEG

$$A_d(f_{med}) = \sum_{\lambda \in \{0, \delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \infty\}} A_{d,\lambda}(f_{med}), \quad (3.58)$$

de acuerdo al Teorema 3.1.

Claramente éstas son funciones del tiempo. Cada sumando contiene la información correspondiente a un rango de frecuencias. Pero además, la amplitud de éstas es variable en el tiempo, ya que en general no son constantes. Se utilizará esta amplitud, en el sentido que se explicará a continuación, como medida de la importancia local (en tiempo) de cada componente.

En Análisis de Fourier clásico, dado el desarrollo en serie de Fourier (por ejemplo, de senos y cosenos) de una función periódica, se toma la energía como la norma en L_2 (o su cuadrado) de la señal o función, que coincide por la identidad de Parseval con la suma de los cuadrados (en valor absoluto) de sus

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

coeficientes de Fourier. Cada uno de estos, obviamente, coincide (salvo un factor de normalización) con la amplitud de la onda sinusoidal que constituye el sumando correspondiente. Es decir, si $f \in L_2([0,1])$ y se definen sus coeficientes de Fourier por

$$\hat{f}_s(k) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \operatorname{sen}(2\pi kt) dt \quad (k \geq 1), \quad (3.59)$$

$$\hat{f}_c(k) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \operatorname{cos}(2\pi kt) dt \quad (k \geq 1), \quad (3.60)$$

con $\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t) dt$, entonces la serie de Fourier de f se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_s(k) \operatorname{sen}(2\pi kt) \\ + \hat{f}_c(k) \operatorname{cos}(2\pi kt)). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Así que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\hat{f}_s(k)$ es la amplitud de la onda sinusoidal $\hat{f}_s(k) \operatorname{sen}(2\pi kt)$ y $\hat{f}_c(k)$ es la amplitud de la onda sinusoidal $\hat{f}_c(k) \operatorname{cos}(2\pi kt)$, y la energía total de f es (identidad de Parseval)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f) &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt \quad (3.62) \\ &= |\hat{f}(0)|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{f}_s(k)|^2 + |\hat{f}_c(k)|^2). \end{aligned}$$

Nótese que, en el caso anterior, al tratarse de ondas sinusoidales se tiene amplitud constante, no dependiente del tiempo. En el caso de las aproximaciones A_d , consideraremos que esta amplitud es variable, dependiente del tiempo. Para medir esta amplitud,

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

definiremos dos envolventes de las curvas, una superior y otra inferior.

Si se supone que f_{med} toma valores reales, entonces $A_d(f_{med})$ es una combinación lineal de las funciones $\{f_{d,k}, g_{d,k}\}_{k=1}^{d+1}$; es decir, salvo porque las frecuencias no tienen por qué ser enteras, se trata de un polinomio trigonométrico. Por lo tanto, alcanzará un número finito de máximos y mínimos locales, que estarán aislados. Se definen las envolventes superior e inferior $\mathcal{E}_{sup,d,\lambda}(f_{med})$ y $\mathcal{E}_{inf,d,\lambda}(f_{med})$, respectivamente, como las curvas poligonales que unen secuencialmente los puntos inicial y final ($t = a$ y $t = b$) y los máximos/mínimos locales de $A_{d,\lambda}(f_{med})$ ($\lambda \in \{0, \delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \infty\}$). Entonces la Amplitud de la componente se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{d,\lambda}(f_{med})(t) & \quad (3.63) \\ & = \mathcal{E}_{sup,d,\lambda}(f_{med})(t) \\ & \quad - \mathcal{E}_{inf,d,\lambda}(f_{med})(t) \quad (t \in [a, b]). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que es una función no negativa.

En analogía con el caso de las series de Fourier clásico, se define la Energía local de la componente λ por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{d,\lambda}(f_{med})(t) & = \left(\mathcal{A}_{d,\lambda}(f_{med})(t) \right)^2 & (3.64) \\ & = \left(\mathcal{E}_{sup,d,\lambda}(f_{med})(t) \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{E}_{inf,d,\lambda}(f_{med})(t) \right)^2 \quad (t \in [a, b]). \end{aligned}$$

Esta energía es claramente no negativa, y su valor puntual nos indica la magnitud de la componente λ localmente en el punto t , en términos de la amplitud definida arriba.

Una vez que se tiene la energía relativa, medimos el peso relativo como la proporción de energía relativa de cada una de las

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

componentes en relación al total, de la siguiente manera. Se exceptúan las frecuencias bajas y altas (es decir, los rangos Ω_0 y Ω_∞), ya que las primeras son por lo general mucho mayores en amplitud al resto y desvirtúan el análisis, y las segundas por considerarse ruido. Por supuesto, esta es sólo una propuesta inicial, pero lo importante es la metodología expuesta. Así, para cada $\lambda \in \{\delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma\}$, el peso relativo local de la componente λ es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{d,\lambda}(f_{med})(t) & \quad (3.65) \\ &= \frac{\mathcal{E}_{d,\lambda}(f_{med})(t)}{\sum_{\rho \in \{\delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma\}} \mathcal{E}_{d,\rho}(f_{med})(t)} \quad (t \in [a, b]). \end{aligned}$$

En caso de que la suma del divisor se anule, se le puede asignar el valor cero, o en la práctica tratando con valores discretizados en una malla, el promedio de los vecinos. Claramente el peso relativo es una función que toma valores en el intervalo $[0,1]$, teniéndose

$$\sum_{\rho \in \{\delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma\}} \mathcal{P}_{d,\rho}(f_{med})(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.66)$$

Aquí quizá haya que exceptuar los puntos en los que el divisor en (3.65) se anule, dependiendo de cómo se defina el peso relativo en ellos.

El peso relativo nos da una forma de medir la importancia de cada ritmo en la señal EEG, en el sentido de la amplitud de las ondas que conforman los ritmos basales, localizada en un instante de tiempo.

Con los pesos relativos es sencillo dar un algoritmo de segmentación del EEG muy sencillo. Se consideran los intervalos en los que un ritmo $\lambda \in \{\delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma\}$ tiene el peso relativo mayor entre ellos. De esta manera, en cada uno de estos intervalos, que

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

segmentan la ventana $[a, b]$, si λ es el ritmo con mayor peso relativo, se considera que este ritmo es el preponderante en este segmento del EEG.

3.3 Ejemplos numéricos de aproximación de ritmos básicos y segmentación

Para mostrar el desempeño de las metodologías anteriores, se probó sobre señales EEG provenientes de la base de datos "EEG Alpha Waves Dataset" [52]. Ésta es un conjunto de señales EEG de 16 electrodos tomadas a 20 sujetos a los cuales se les pidió que abrieran y cerraran sus ojos en periodos intermitentes de 10 segundos. Las señales vienen con unas marcas en los inicios y finales de estos periodos. Se conoce que durante los periodos en los que el sujeto cierra los ojos, el ritmo α suele tener un papel preponderante en el EEG, en los electrodos de la región occipital. La frecuencia de muestreo reportada es de 512 muestras por segundo. Se puede encontrar más información en la referencia [52] y en la documentación aportada ahí.

A continuación, se exponen los resultados de las metodologías expuestas en esta sección aplicadas a dos secciones de una señal EEG correspondiente a esta base de datos. En concreto, se tomó la señal EEG correspondiente al canal 17 del individuo 3, y se extrajeron dos ventanas correspondientes cada una a dos periodos contiguos, uno de ojos cerrados y otro de ojos abiertos, de acuerdo a las marcas reportadas.

En los resultados que siguen se puede comprobar cómo efectivamente nuestra metodología permite reportar la preponderancia del ritmo α en la primera parte de cada ventana. Esto se manifiesta claramente en las amplitudes y energías locales de este ritmo, pero sobre todo en los pesos relativos y las segmentaciones subsiguientes.

3.3.1 Simulación 1

La primera ventana escogida en la primera simulación comprende las entradas entre los nodos $k = 6686$ y $k = 24108$. Esto supone una señal de longitud 17423 muestras, que corresponde a aproximadamente 34.029 segundos. Para evitar errores, a la señal extraída (considerada medición) se le restó su media (nivel de directa) y se dividió por el máximo del valor absoluto de sus entradas (normalizando este valor a 1).

Los parámetros de aproximación escogidos para cada uno de los rangos son

$$d_0 = d, d_\delta = 3d, d_\theta = 4d, d_\alpha = 4d, d_\beta = 18d, d_\gamma = 70d, \\ d_\delta = 156d,$$

con $d = 35$. Tomando en consideración que las frecuencias de corte, que delimitan los rangos de frecuencias, fueron

$$\omega = 0, 1, 4, 8, 12, 30, 100, 256 \text{ Hz},$$

se tiene por tanto que el paso en frecuencia en todos los rangos fue

$$\omega_{d_\lambda} = \frac{1}{d} \text{ Hz} = \frac{1}{35} \text{ Hz} \quad \lambda \in \{0, \delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \infty\}.$$

Con estos parámetros de aproximación se obtuvieron buenos resultados, teniéndose un error de aproximación de

$$\|f_{med} - A_d(f_{med})\|_2 \sim 0.011385.$$

A continuación, se muestran las gráficas en la Figura 3-1 Transformada de Fourier seno, transformada de Fourier coseno y valor absoluto de la compleja correspondientes con un paso de 1/35 Hz, de la 1era simulación de las transformadas de Fourier (de seno y de coseno, y el valor absoluto de la transformada de

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Fourier compleja) en las frecuencias de las mallas correspondientes a los rangos y el paso escogidos.

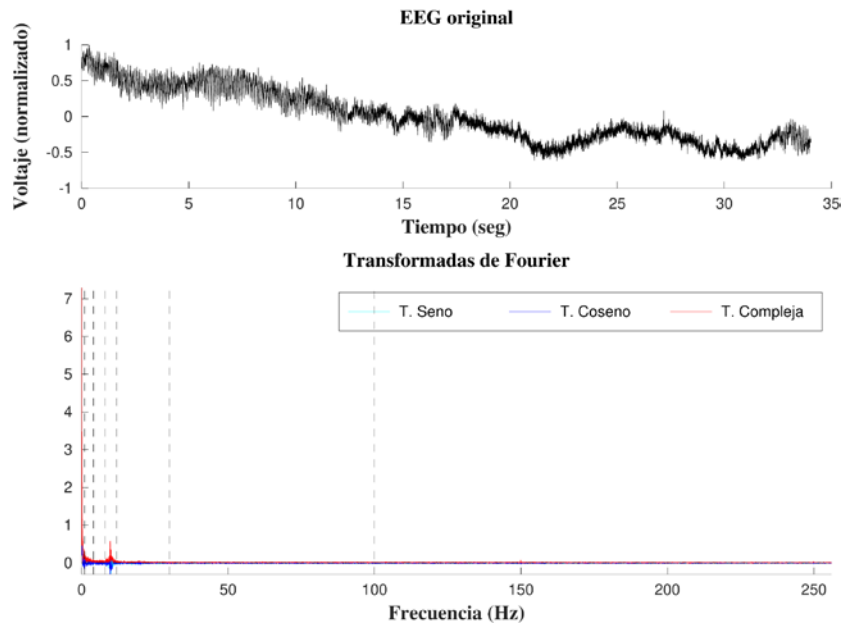


Figura 3-1 Transformada de Fourier seno, transformada de Fourier coseno y valor absoluto de la compleja correspondientes con un paso de 1/35 Hz, de la 1era simulación.

Se observa claramente una concentración de masa en el rango α .

Para más detalle, se grafica lo mismo en la Figura 3-2 y en la Figura 3-3, pero por cada rango.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

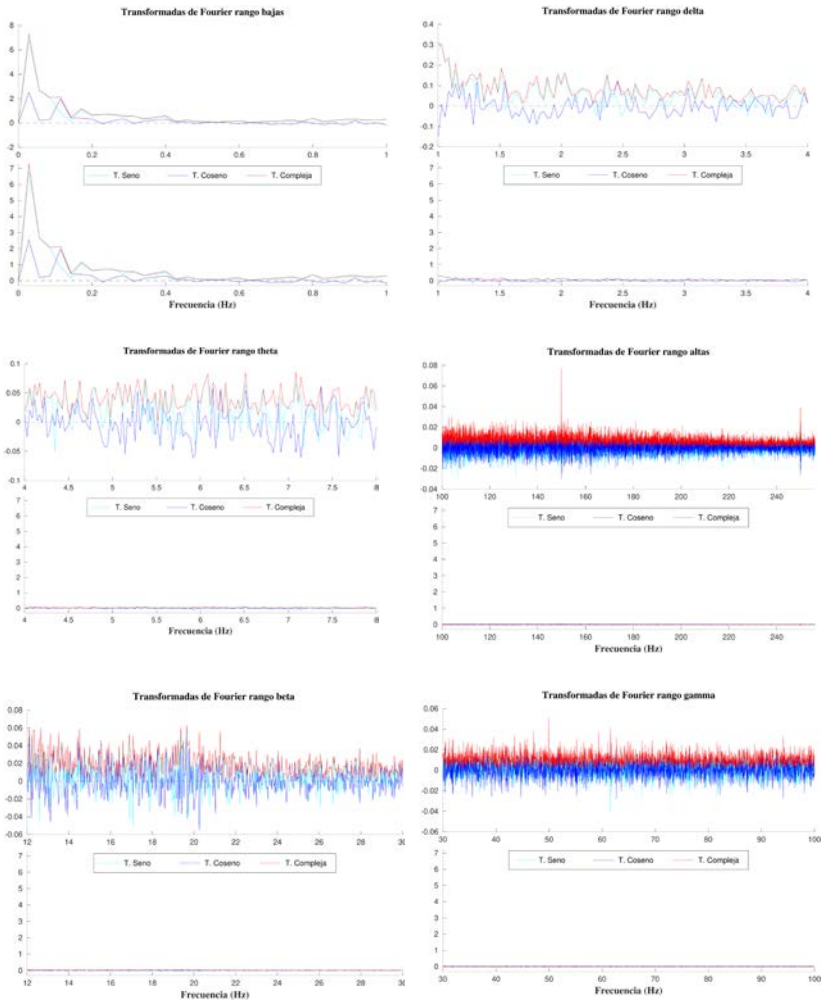


Figura 3-2 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en el rango de las frecuencias bajas, δ , θ , β , γ y altas.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

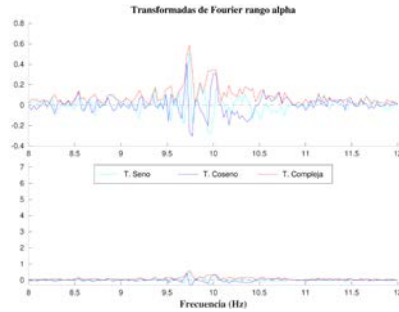


Figura 3-3 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en la frecuencia α .

A continuación, se grafican la señal EEG f_{med} y todas las componentes $A_{d\lambda,\lambda}(f_{med})$ en la Figura 3-4. Para mejor visualización de la aproximación, también se grafican las señales $A_{d_0,0}(f_{med}) + A_{d\lambda,\lambda}(f_{med})$.

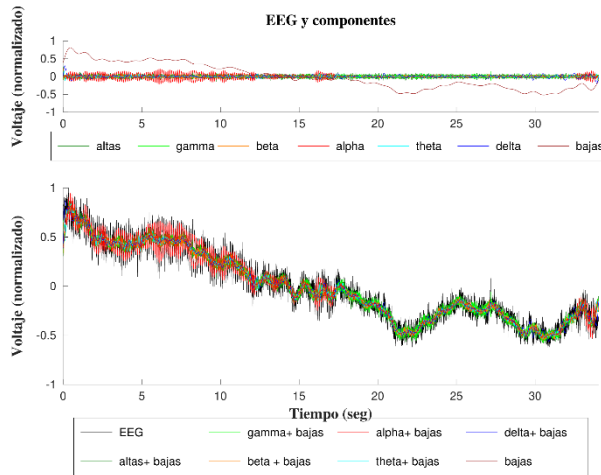


Figura 3-4 Señal EEG f_{med} y todas las componentes $A_{d\lambda,\lambda}(f_{med})$.

A continuación, se muestran cada una por separado en la Figura 3-5 y Figura 3-6.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

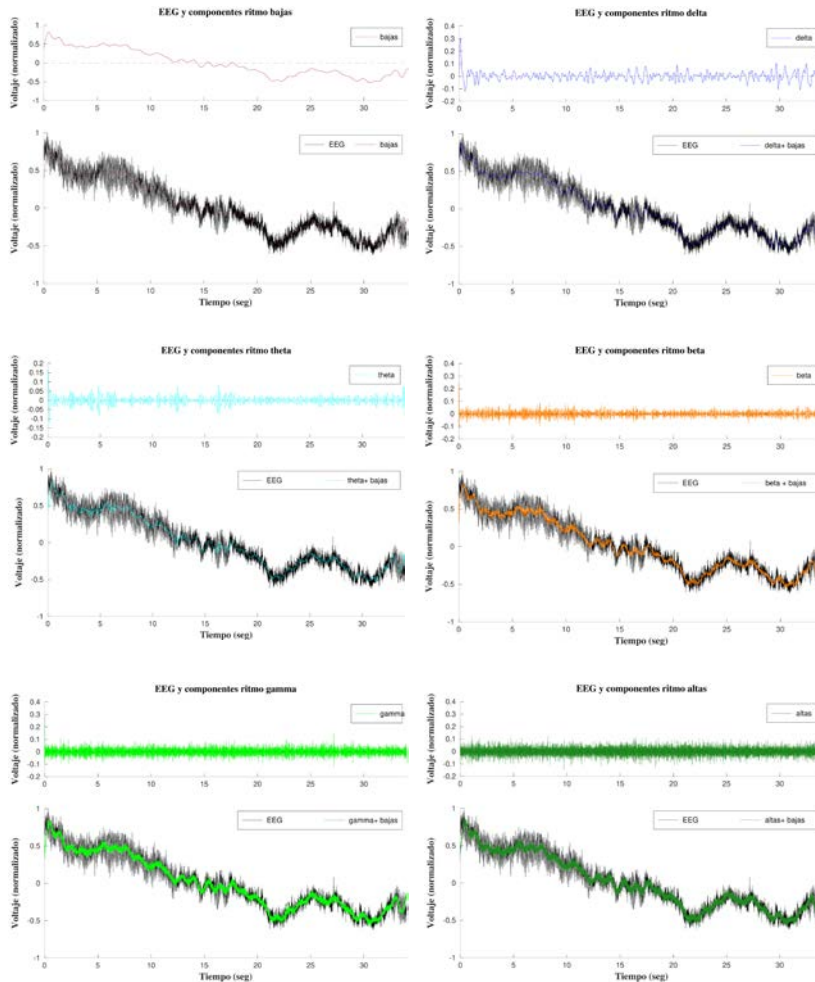


Figura 3-5 Señal EEG f_{med} y las componentes $\delta, \theta, \beta, \gamma$ y altas de $A_{d,\lambda,\lambda}(f_{med})$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

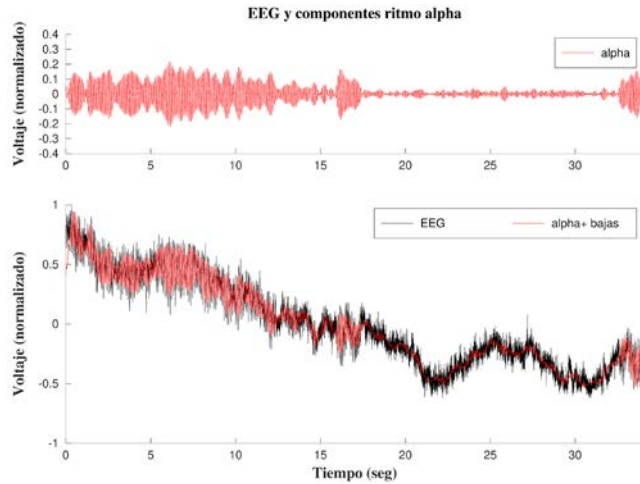


Figura 3-6 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d,\alpha}(f_{med})$.

A continuación, se muestran las componentes y sus envolventes o envolturas en la Figura 3-7, Figura 3-8, Figura 3-9 y Figura 3-10

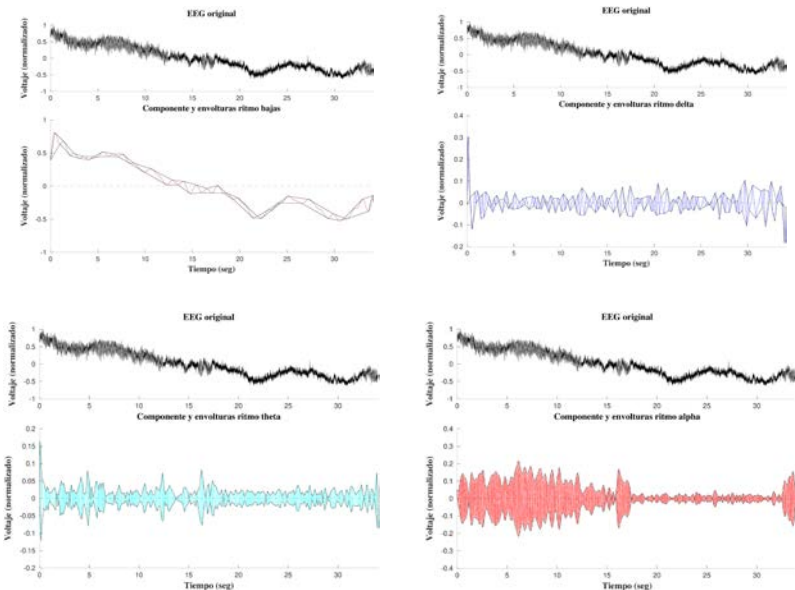


Figura 3-7 Señal EEG f_{med} y las componentes $A_{d,\lambda}(f_{med})$ con sus envolventas ($\lambda = 0, \delta, \theta, \alpha$).

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

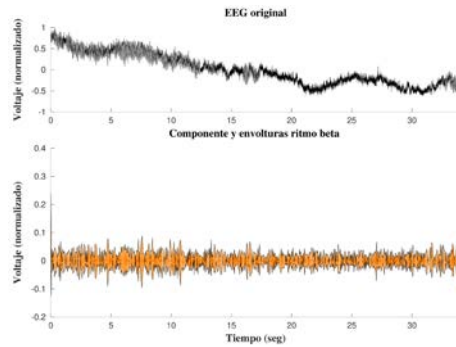


Figura 3-8 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d,\beta}(f_{med})$ con su envoltura.

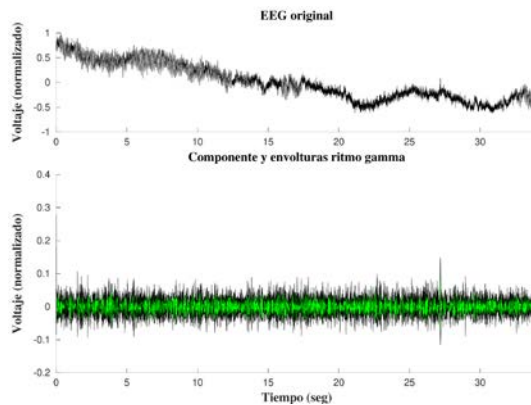


Figura 3-9 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d,\gamma}(f_{med})$ con su envoltura.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

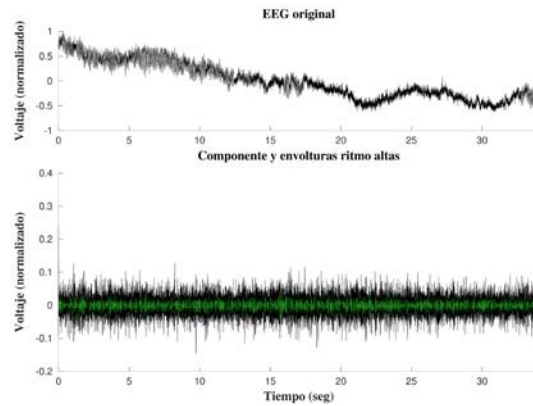


Figura 3-10 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d_{\infty,\infty}}(f_{med})$ con su envoltura.

A continuación, se grafican las energías locales en la Figura 3-11.

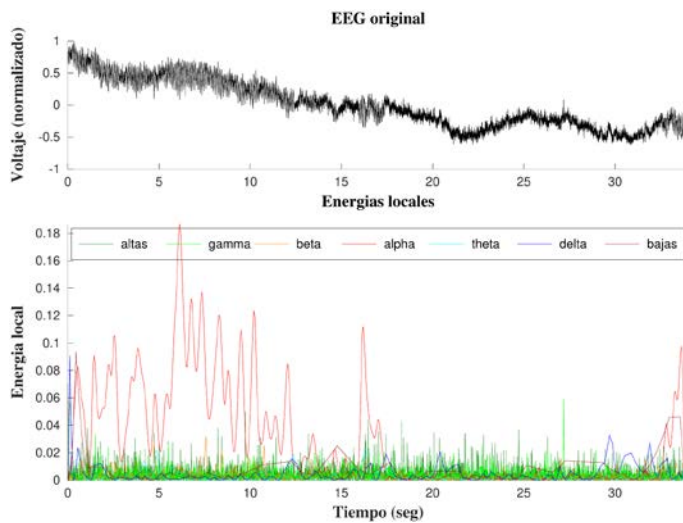


Figura 3-11 Energías locales de los diferentes ritmos.

Aquí se presentan las energías locales también de otro modo en la Figura 3-12.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

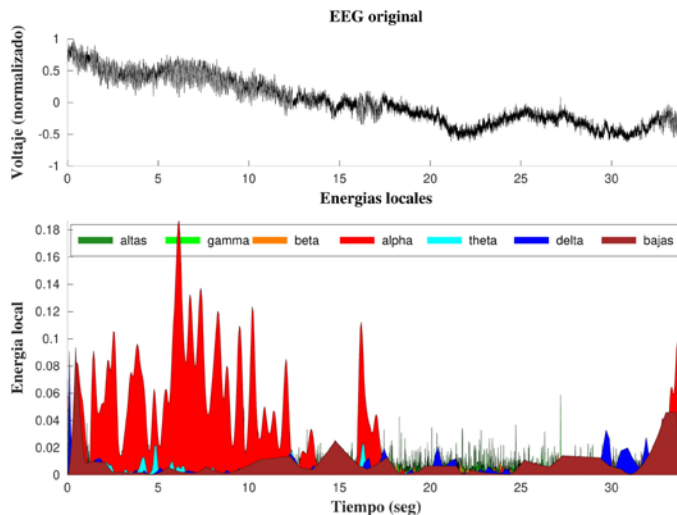


Figura 3-12 Energías locales de los diferentes ritmos.

A continuación, se presentan los pesos relativos de todas las componentes en la Figura 3-13.

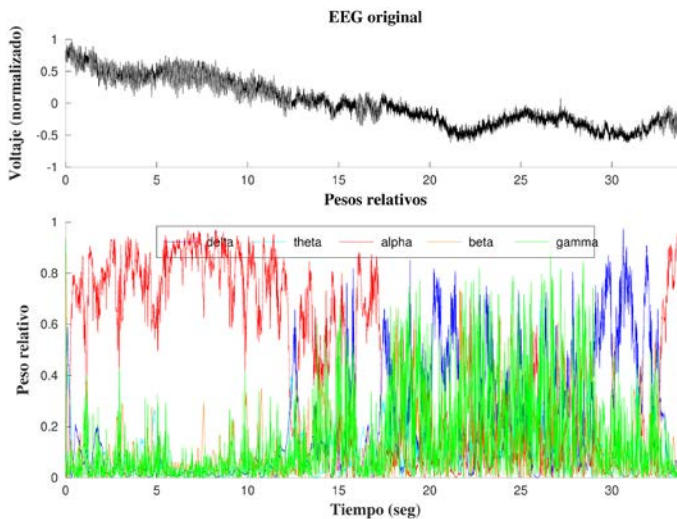


Figura 3-13 Pesos relativos de todas las componentes.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

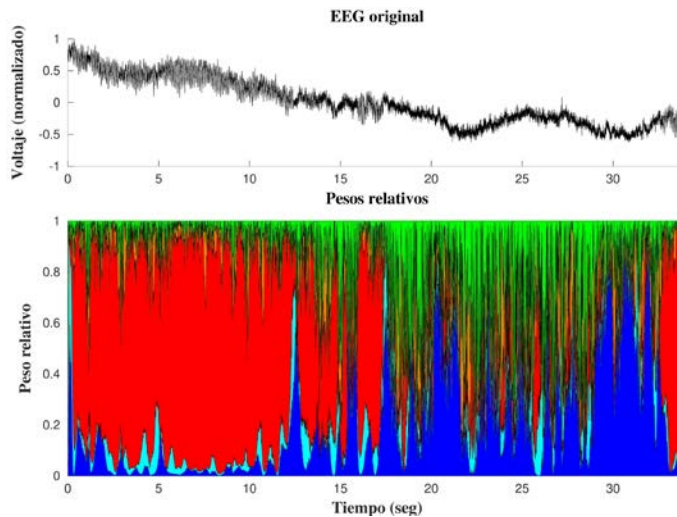


Figura 3-14 Pesos relativos de todas las componentes.

En vista de que los pesos relativos suman 1, como se vio en la identidad (3.66), se pensó conveniente representarlos en un rectángulo de altura 1, donde se grafican las sumas acumulativas de los pesos relativos, en el orden δ , θ , α , β , γ , y el área de la región entre cada par de curvas, coloreado con los mismos colores que antes, representa el peso relativo del ritmo correspondiente (véase Figura 3-14).

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

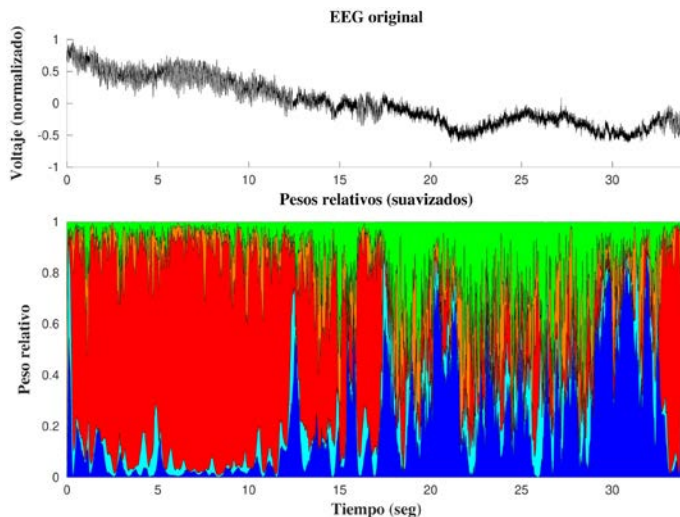


Figura 3-15 Pesos relativos suavizados de todas las componentes.

Debido al cambio rápido de los pesos relativos en los ritmos de frecuencias más altas, como β y γ , se suavizaron los pesos relativos con un filtro de promediado. Esto hace que se pierda resolución temporal, pero se visualiza mejor en la escala de la ventana escogida (véase Figura 3-15.)

En las gráficas anteriores se aprecia claramente la preponderancia del ritmo α en la primera mitad de la ventana temporal.

A continuación, en la Figura 3-16, Figura 3-17 y Figura 3-18, se muestran los pesos relativos por componente.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

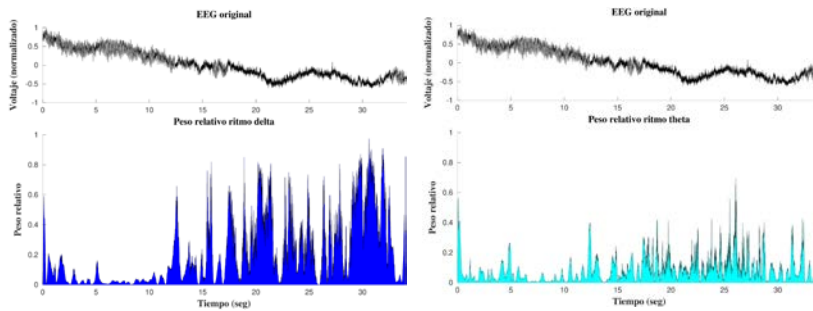


Figura 3-16 Pesos relativos para cada una de las componentes δ y θ .

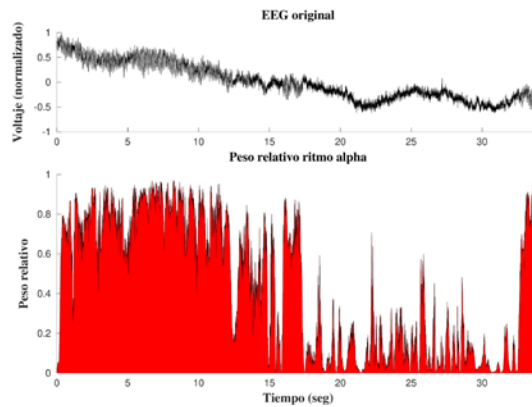


Figura 3-17 Peso relativo para la componente α .

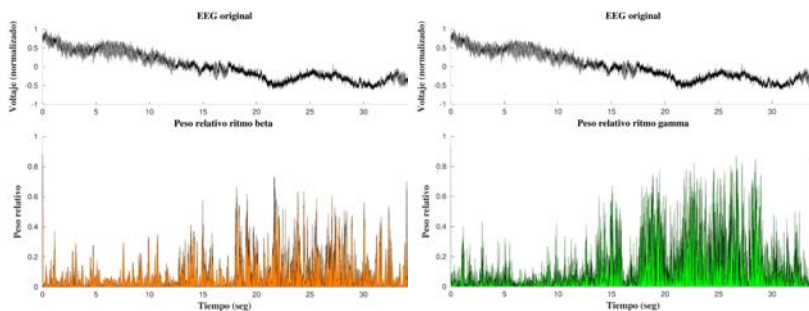


Figura 3-18 Pesos relativos para las componentes β y γ .

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Finalmente, se presenta la segmentación obtenida con la metodología anterior en la sección 3.2; es decir, considerando el ritmo con mayor peso relativo. En la Figura 3-19 se representa la señal EEG, coloreada en cada intervalo de la segmentación con el color correspondiente al ritmo con mayor peso relativo. Los cambios de segmento están marcados con líneas discontinuas verticales.

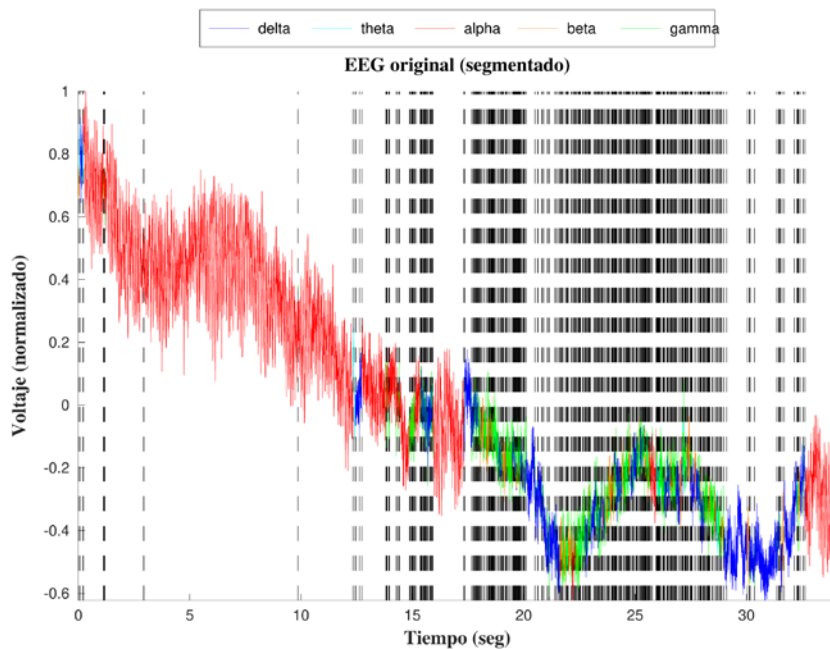


Figura 3-19 Segmentación de la señal EEG coloreada en cada intervalo de la segmentación con el color correspondiente al ritmo con mayor peso relativo.

En la Figura 3-20 también se representa la misma segmentación, pero de otra manera. La señal EEG se grafica en negro, y cada segmento está encuadrado con un rectángulo del color correspondiente. En la parte inferior, se ha graficado una barra

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

cuyos colores representan los segmentos de los ritmos correspondientes.

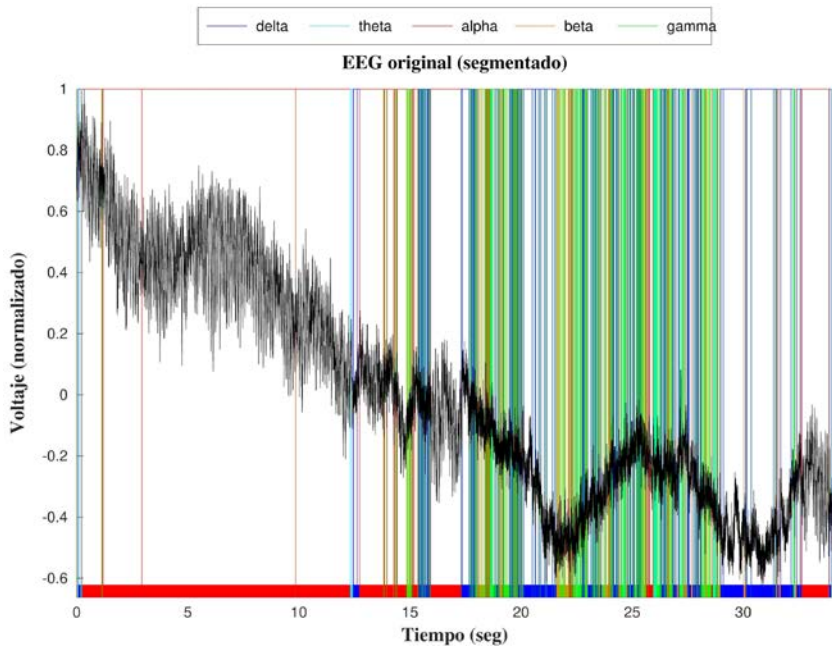


Figura 3-20 Segmentación de la señal EEG. Los colores de la barra en la parte inferior representan los segmentos de los ritmos correspondientes.

3.3.2 Simulación 2

La segunda ventana, escogida en la segunda simulación, comprende las entradas entre los nodos $k = 24108$ y $k = 42883$. Esto supone una señal de longitud 18776 muestras, que corresponde a aproximadamente 36.679 segundos. Como antes, a la señal extraída (considerada medición) se le restó su media (nivel de directa) y se dividió por el máximo del valor absoluto de sus entradas (normalizando este valor a 1).

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Los parámetros de aproximación escogidos para cada uno de los rangos son

$$d_0 = d, d_\delta = 3d, d_\theta = 4d, d_\alpha = 4d, d_\beta = 18d, d_\gamma = 70d,$$

$$d_\delta = 156d,$$

con $d = 37$. Las frecuencias de corte son las mismas que antes,

$$\omega = 0, 1, 4, 8, 12, 30, 100, 256 \text{ Hz},$$

luego el paso en frecuencia en todos los rangos fue

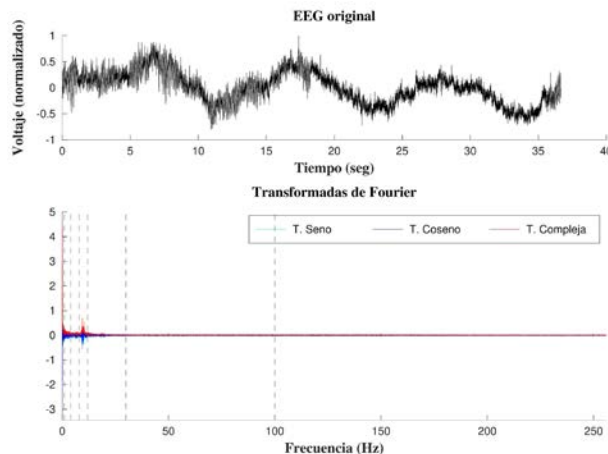
$$\omega_{d_\lambda} = \frac{1}{d} \text{ Hz} = \frac{1}{37} \text{ Hz} \quad (\lambda \in \{0, \delta, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \infty\}).$$

Con estos parámetros de aproximación se obtuvieron buenos resultados, teniéndose un error de aproximación de

$$\|f_{med} - A_d(f_{med})\|_2 \sim 0.0087374.$$

Aquí aplican los mismos comentarios que en la sección anterior, por lo que sólo exponemos las gráficas con los resultados.

A continuación, se muestran las gráficas de las transformadas de Fourier.

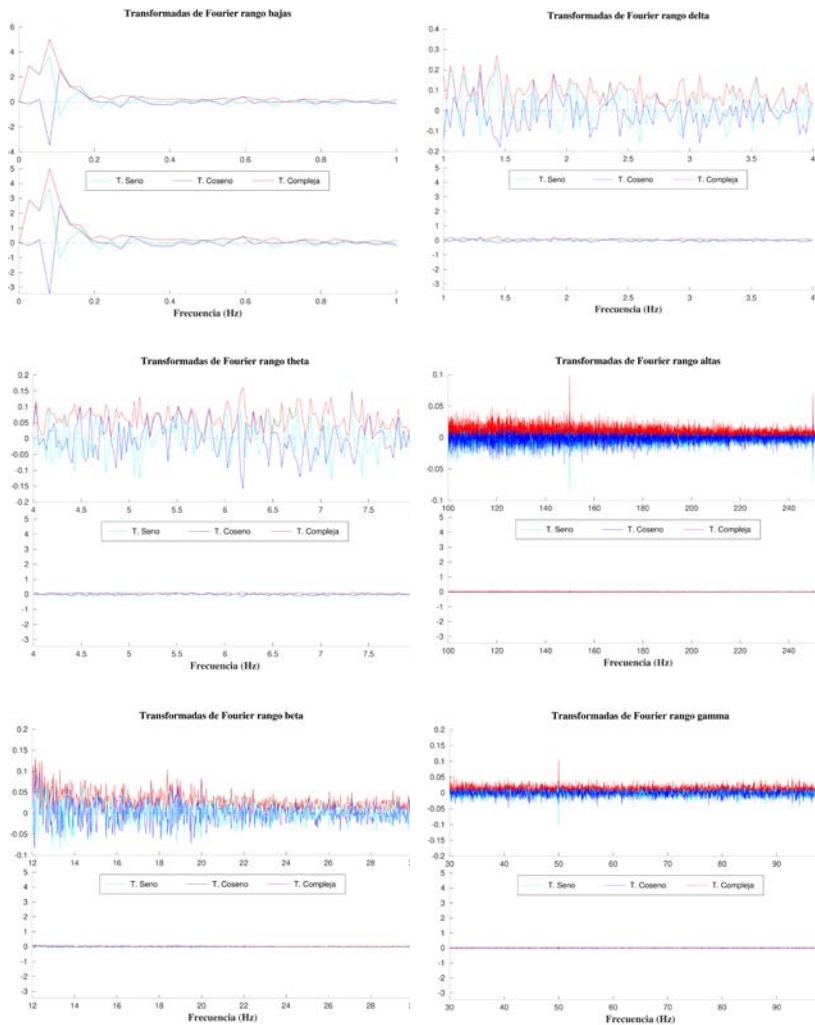


Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Figura 3-21 Transformada de Fourier seno, transformada de Fourier coseno y valor absoluto de la compleja correspondientes con un paso de 1/35 Hz de la 2da simulación.

Se observa claramente una concentración de masa en el rango α .

A continuación, se muestran las gráficas de las transformadas de Fourier por cada rango en la Figura 3-22 y Figura 3-23.



Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Figura 3-22 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en el rango de las frecuencias bajas, δ , θ , β , γ y altas.

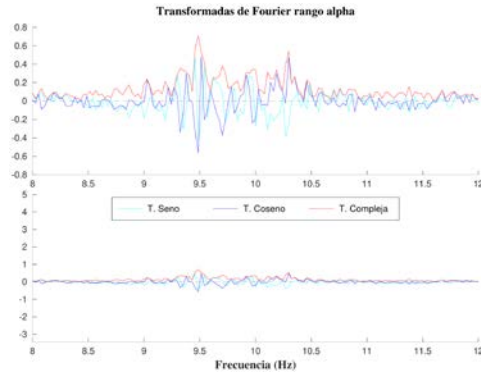
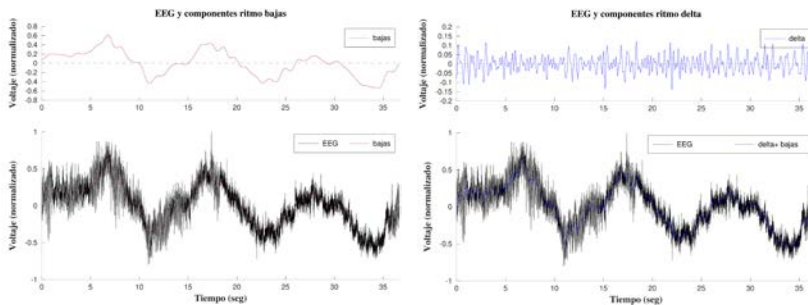


Figura 3-23 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en la frecuencia α .

A continuación, en la Figura 3-24 y Figura 3-25 se grafican la señal EEG f_{med} y todas las componentes $A_{d,\lambda}(f_{med})$.



Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

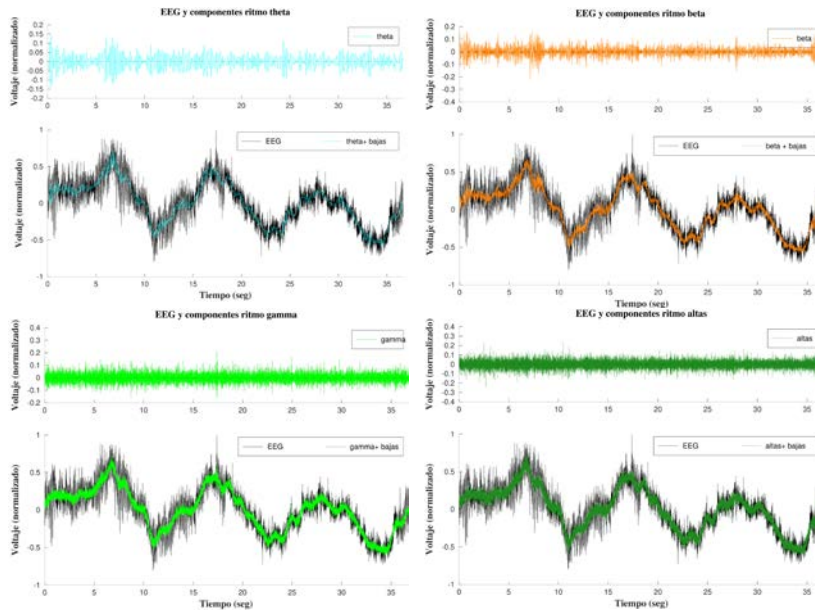
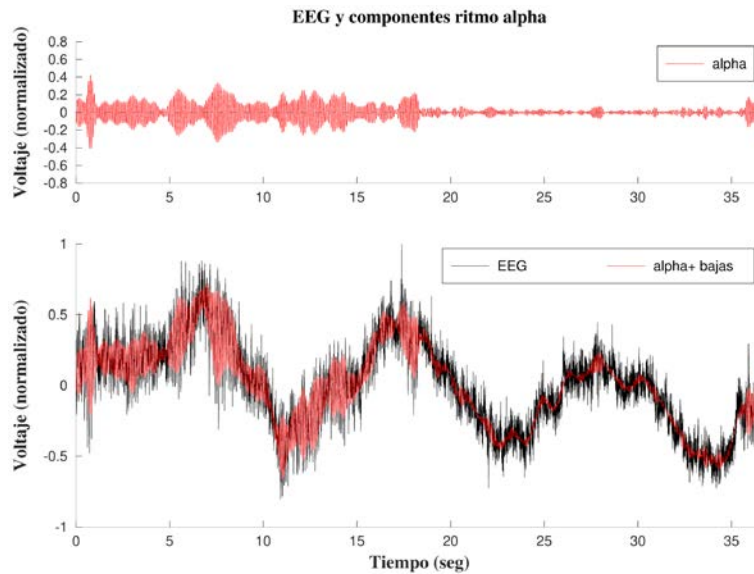


Figura 3-24 Señal EEG f_{med} y las componentes $A_{d,\lambda}(f_{med})$ ($\lambda = \delta, \theta, \beta, \gamma, \infty$).



Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Figura 3-25 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d,\alpha}(f_{med})$.

A continuación, se muestran en la Figura 3-26, Figura 3-27, Figura 3-28 y Figura 3-29 las componentes y sus envolventes o envolturas.

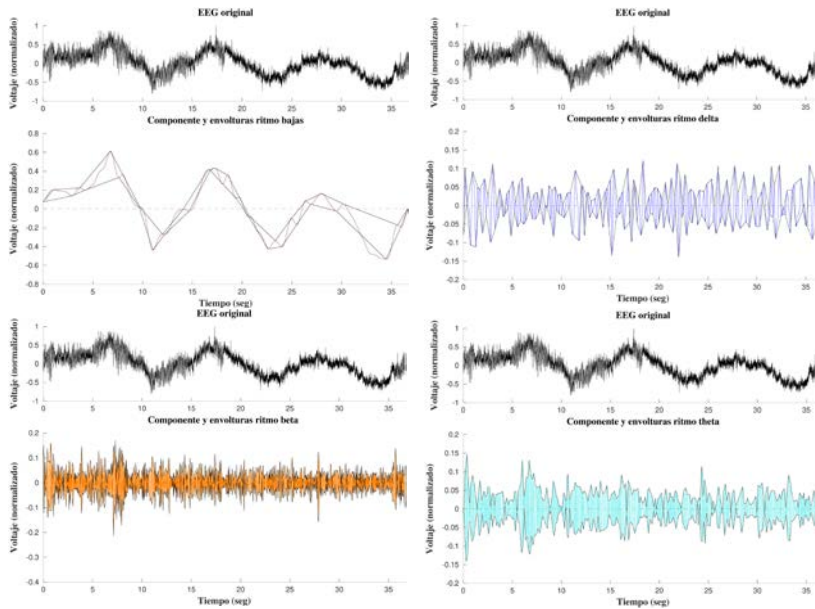


Figura 3-26 Señal EEG f_{med} y las componentes bajas, δ, β, θ de $A_{d,\lambda}(f_{med})$ con sus envolventas. ($\lambda = 0, \delta, \beta, \theta$)

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

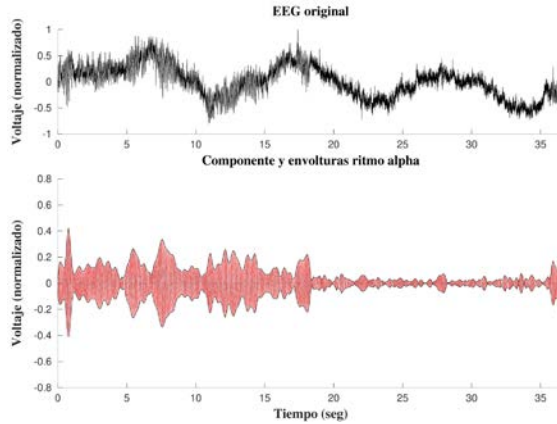


Figura 3-27 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d\alpha,\alpha}(f_{med})$ con su envoltura.

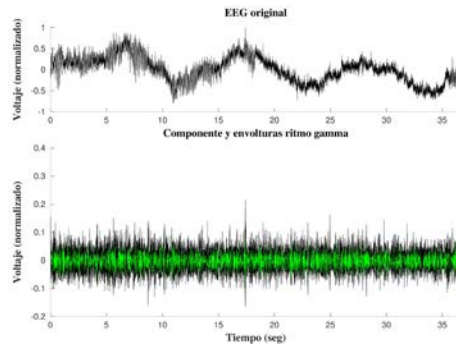


Figura 3-28 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d\gamma,\gamma}(f_{med})$ con su envoltura.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

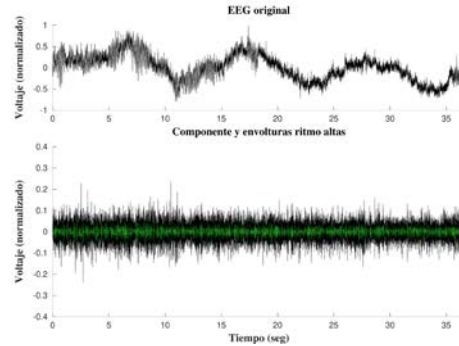


Figura 3-29 Señal EEG f_{med} y la componente $A_{d,\lambda}(f_{med})$ con su envoltura ($\lambda = \infty$).

A continuación, se grafican las energías locales en la Figura 3-30.

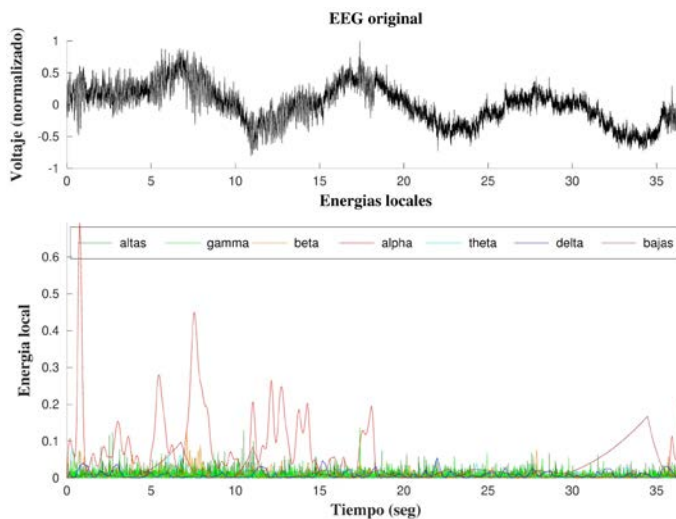


Figura 3-30 Energías locales de los diferentes ritmos.

Aquí se presentan las energías locales visualizadas de otro modo en la Figura 3-31.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

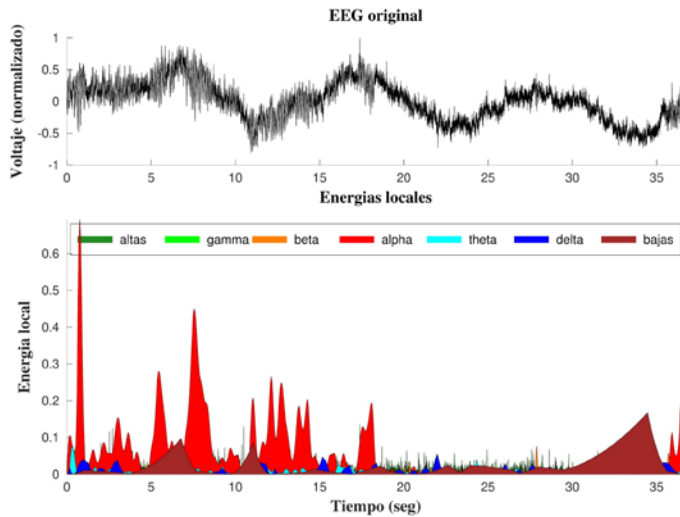


Figura 3-31 Energías locales de los diferentes ritmos.

A continuación, se presentan los pesos relativos de todas las componentes en la Figura 3-32, Figura 3-33.

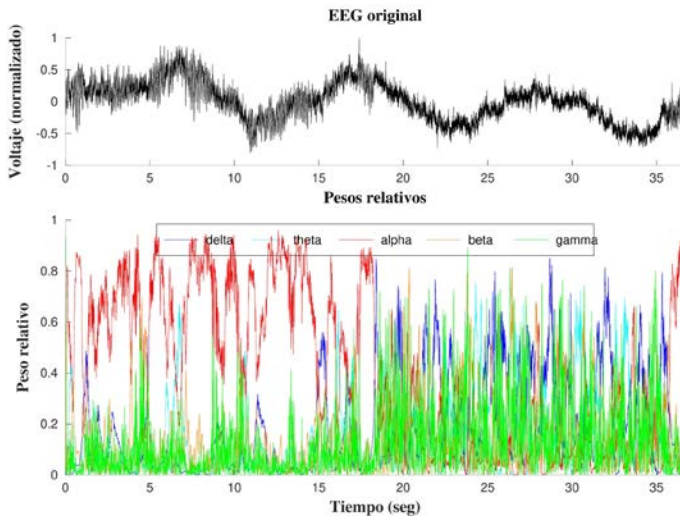


Figura 3-32 Pesos relativos de todas las componentes.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

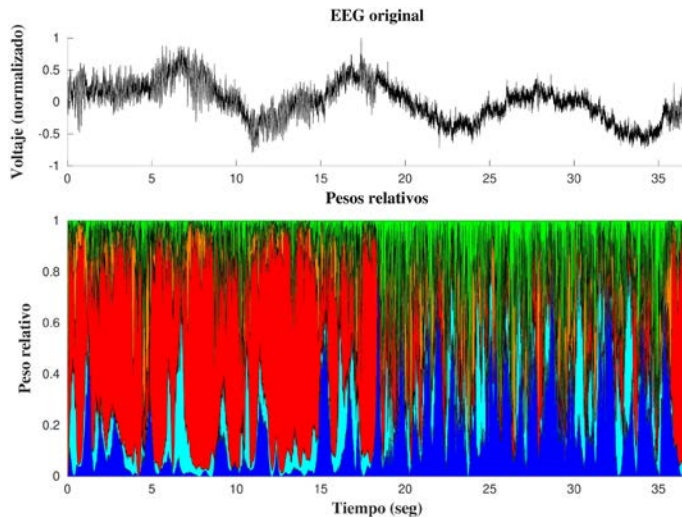
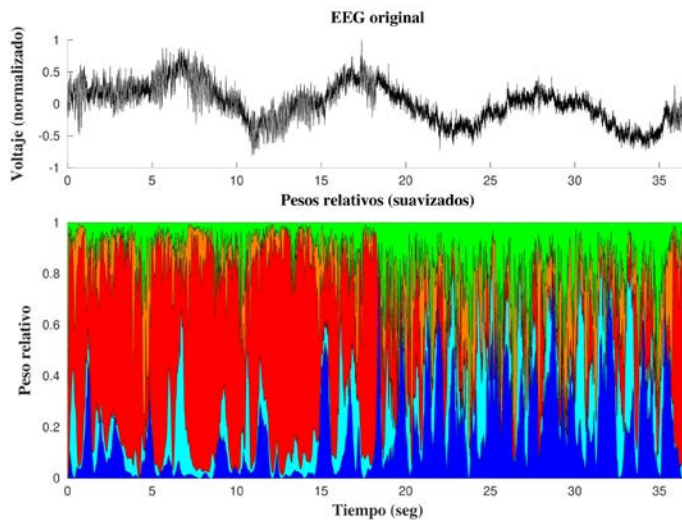


Figura 3-33 Pesos relativos de todas las componentes.

En la Figura 3-33 se grafican las sumas acumulativas de los pesos relativos, en el orden δ , θ , α , β , γ , y el área de la región entre cada par de curvas, coloreado con los mismos colores que antes, representa el peso relativo del ritmo correspondiente.



Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Figura 3-34 Pesos relativos suavizados de todas las componentes.

Al igual que en la simulación 1, debido al cambio rápido de los pesos relativos en los ritmos de frecuencias más altas, como β y γ , se suavizaron los pesos relativos con un filtro de promediado. Esto se visualiza en la Figura 3-34.

En las gráficas anteriores al igual que en la simulación 1, se aprecia claramente la preponderancia del ritmo α en la primera mitad de la ventana temporal.

A continuación, en la Figura 3-35, Figura 3-36 y Figura 3-37 se muestran los pesos relativos por componente.

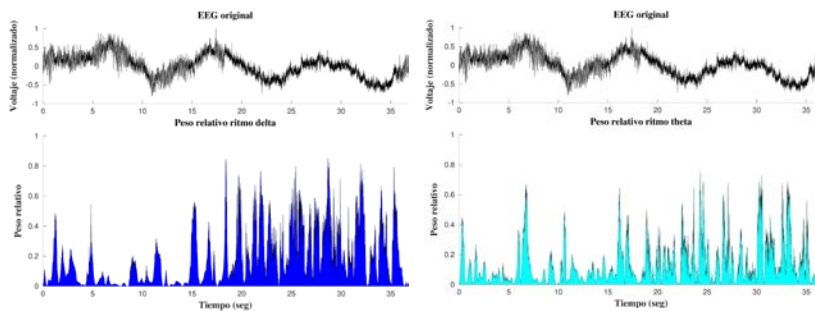


Figura 3-35 Pesos relativos para cada una de las componentes δ y θ .

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

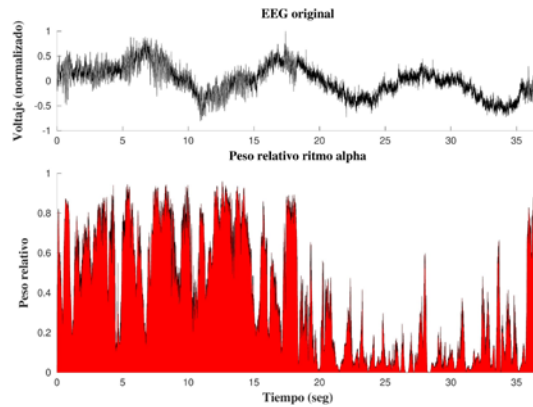


Figura 3-36 Peso relativo para la componente α .

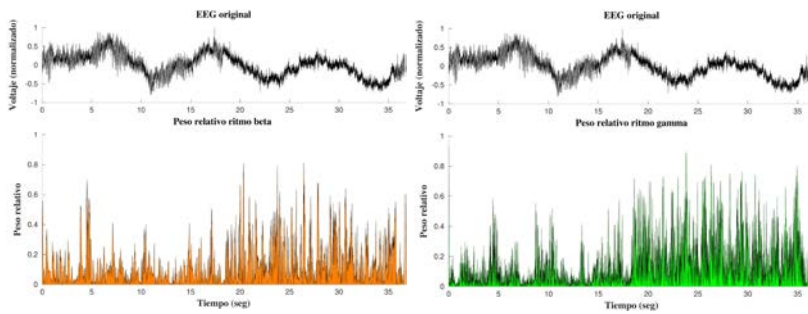


Figura 3-37 Pesos relativos para las componentes β y γ .

Finalmente, se presenta en la Figura 3-38 la segmentación obtenida con la metodología expuesta en la sección 3.2.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

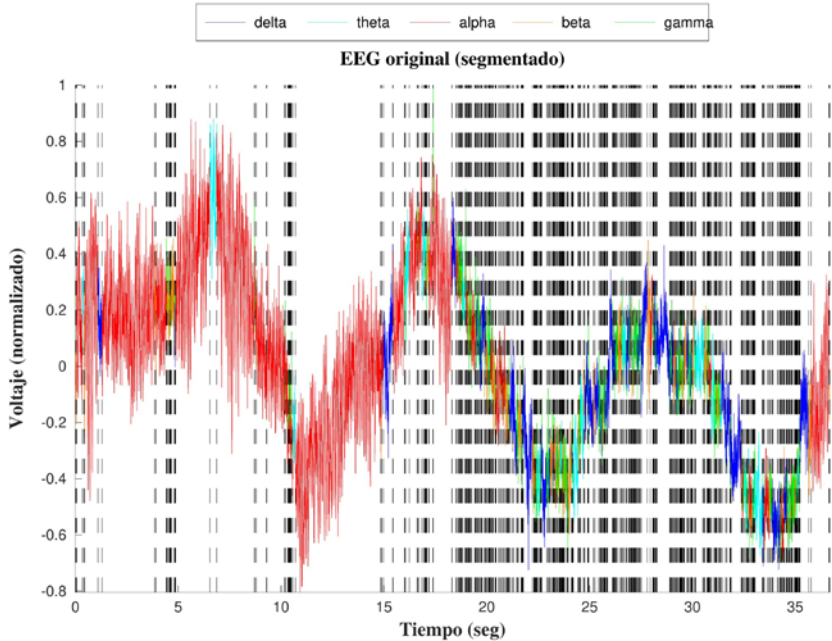


Figura 3-38 Segmentación de la señal EEG coloreada en cada intervalo de la segmentación con el color correspondiente al ritmo con mayor peso relativo.

En la Figura 3-39 también se representa la misma segmentación, pero de otra manera. En la parte inferior, se ha graficado una barra cuyos colores representan los segmentos de los ritmos correspondientes.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

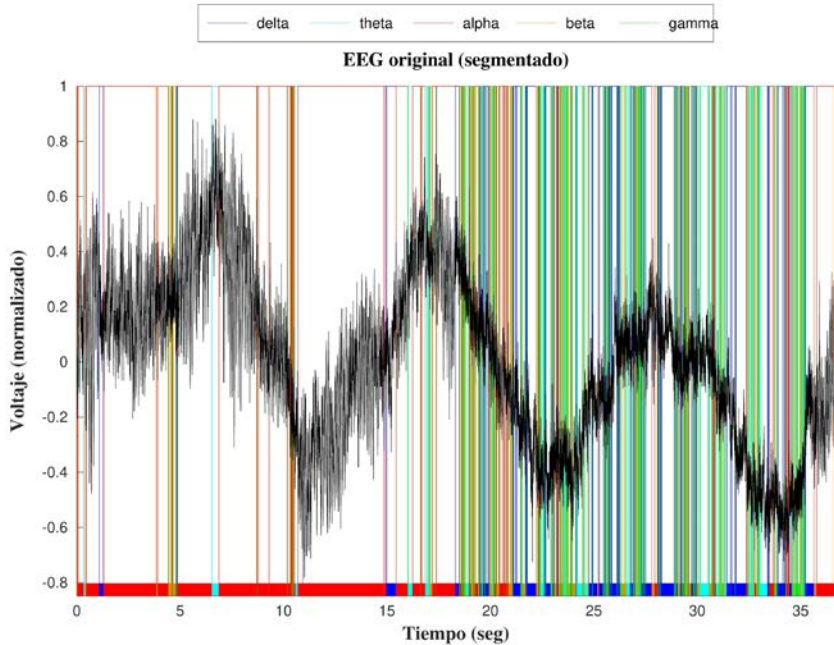


Figura 3-39 Segmentación de la señal EEG. Los colores de la barra en la parte inferior representan los segmentos de los ritmos correspondientes.

En estas imágenes también queda de manifiesto la preponderancia del ritmo α en la primera mitad de la señal, como cabe esperar por la descripción de las señales EEG.

3.4 Expresión matemática aproximada de eventos en las señales EEG: espigas, espigas-ondas y ondas afiladas

3.4.1 Motivación

En el Apéndice A (sección A.2) se describe la relación entre ciertas patologías (por ejemplo, epilepsia) con la aparición de ciertas manifestaciones en el EEG, llamadas eventos: ondas afiladas, espigas y espigas-onda, bien aisladas o agrupadas en

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

ráfagas (bursts) de mayor o menor duración (ver Figura A-6). En esta sección se proponen expresiones analíticas explícitas para representar los complejos espiga (spike), onda-espiga (wave-spike) y onda afilada (sharp wave), de forma que sean suficientemente realistas y se tenga una base analítica con la que hacer cálculos explícitos teóricamente.

Las ráfagas se describen indicando el complejo característico, el número de eventos por unidad de tiempo (segundo), en promedio, y la regularidad con la que ocurren (ver [21]). Con respecto a los complejos, se observa que básicamente consisten en una unión de ondas, en el sentido de lóbulos o protuberancias (como un semiperiodo de una función sinusoidal, más o menos filoso). La configuración de los complejos es muy variada, pero típicamente las descargas son trifásicas con sentidos de deflexión alternados (positivo-negativo-positivo o cima-valle-cima, o quizá el opuesto valle-cima-valle) cuando el generador está cerca del electrodo (ver [21], [53]). Por simplicidad, nos centraremos en este tipo de forma de onda, aunque la metodología que se expondrá es fácilmente generalizable a otras.

La morfología de los complejos puede ser descrita en términos de frecuencia. Sin embargo, esta opción no parece demasiado acertada; debido a la gran localización de estos complejos, el espectro de Fourier correspondiente de la señal está por lo general altamente desconcentrado. Más adecuado es el siguiente enfoque. Directamente relacionada con la frecuencia de oscilación está la duración de los lóbulos (o de las subidas y bajadas, independientemente, ya que no necesitan ser simétricas). Esto entraña cierta dificultad, ya que para indicar comienzo (onset) y final (offset) de las ondas hay que tener de cierta manera una noción de línea base para el potencial, lo cual no es obvio en señales reales. Sin embargo, esta opción parece más ventajosa.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

Dicho esto, nuestra estrategia consistirá en parametrizar cada una de las subidas y bajadas entre las cimas y los valles con una función que haga ese “salto” (de manera suave). Esto implica una simplificación de la morfología de los complejos, pero en nuestra opinión contiene suficientemente la información más relevante.

Por tanto, partimos de la siguiente hipótesis. Nuestros complejos ideales son trifásicos, conformados de tres lóbulos con sentidos de deflexión alternados. Es decir, partiendo de una línea base inicial, tenemos una subida a la primera cima, una bajada al valle central, otra subida a la segunda cima, y finalmente una bajada a una línea base final. En el caso de una polaridad de deflexión inversa, se intercambian subidas y bajadas, y cimas y valles. Los niveles de potencial de las cimas y valles, así como de las líneas base inicial y final, y por tanto las amplitudes, pueden tomar cualquier valor a priori. Con esta descripción, la morfología depende esencialmente de los niveles de potencial, así como de las duraciones de las bajadas y subidas. Los giros (turns) quedan fuera de este patrón ideal, aunque si es necesario pueden incluirse como lóbulos más pequeños (ver [21], [54]).

3.4.2 Parametrizaciones

Para modelar matemáticamente estos saltos se utilizarán las siguientes funciones. Fijemos dos posiciones temporales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, dos niveles de potencial $A, B \in \mathbb{R}$ y un exponente $p > 0$. La función básica que define la forma del salto es

$$\tau_{a,b}(t) = \int_a^t e^{-\left(\frac{s-a}{b-s}\right)^p} e^{-\left(\frac{b-s}{s-a}\right)^p} ds \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (3.67)$$

Obsérvese que se trata de una función suave, especialmente en los extremos, lo que hará que el pegado de estos saltos resulte en una función también suave. El parámetro p modula la forma; cuanto más cercano a cero sea, más filoso se verá el pico, y

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

recíprocamente, cuanto más alejado de cero, más redondeado será el salto. Se ha escogido poner el mismo p en los dos exponentes por simplicidad, pero si se requiriera un tratamiento distinto en cada extremo del intervalo $[a, b]$, podría usarse una pareja (p, q) . A partir de esta, la función de salto $\sigma_{a,b,A,B,p}$ viene dada por

$$\sigma_{a,b,A,B,p} = \begin{cases} A & \text{si } t \leq a, \\ A + (B - A) \frac{\tau_{a,b}(t)}{\tau_{a,b}(b)} & \text{si } a \leq t < b, \\ B & \text{si } t \geq b, \end{cases} \quad (3.68)$$

Con estas funciones de salto, el complejo consiste en “pegar” adecuadamente los diferentes saltos, de acuerdo con las duraciones y niveles de potencias deseados. Dados los instantes $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}$ cumpliendo $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, los niveles de potencial $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \in \mathbb{R}$ y un exponente $p > 0$, la función complejo $K_{a,A,p}$ viene dada por

$$K_{a,A,p}(t) = \begin{cases} A_1 & \text{si } t \leq a_1, \\ \sigma_{a_1,a_2,A_1,A_2,p}(t) & \text{si } a_1 \leq t \leq a_2, \\ \sigma_{a_2,a_3,A_2,A_3,p}(t) & \text{si } a_2 \leq t \leq a_3, \\ \sigma_{a_3,a_4,A_3,A_4,p}(t) & \text{si } a_3 \leq t \leq a_4, \\ \sigma_{a_4,a_5,A_4,A_5,p}(t) & \text{si } a_4 \leq t \leq a_5, \\ A_5 & \text{si } t \geq a_5, \end{cases} \quad (3.69)$$

Por simplicidad, se escoge el mismo p , pero podría variarse en cada salto.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

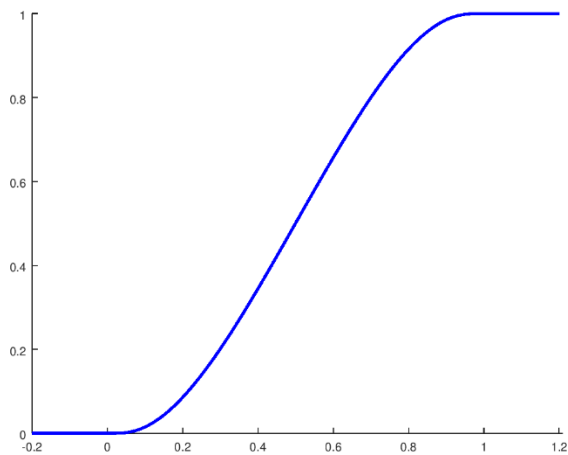


Figura 3-40 Función $\sigma_{0,1,0,1,1/2}$.

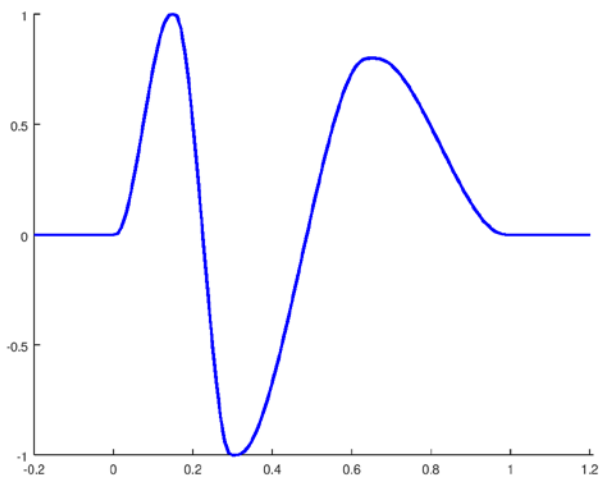


Figura 3-41 Función $K_{(0,0.15,0.3,0.65,1),(0.1,-1,0.8,0),1/2}$.

3.4.3 Ejemplos

Para ejemplificar esta metodología, se tomó una señal EEG, reportada como *absence_1*, proporcionada por la Dra. Alina Santillán, que presenta eventos. La frecuencia de muestreo de la señal es 256. En el canal 1, se identificaron 4 periodos (segundos 319-329, 505-512, 576-582 y 824-832, aproximadamente) con trenes de complejos espiga-onda. Para el ejemplo que sigue, se consideró la primera ráfaga.

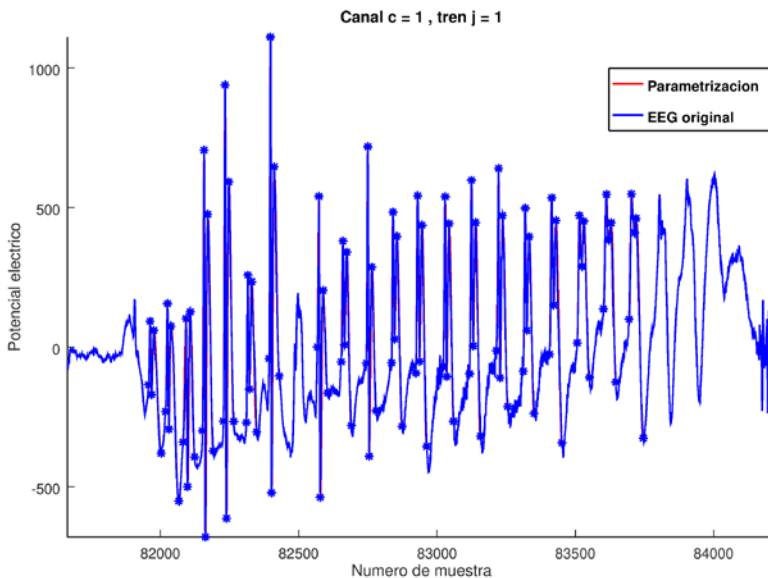


Figura 3-42 Señal original EEG de una primera ráfaga de epilepsia de ausencia junto con la respectiva parametrización.

Se identificaron manualmente los 5 nodos en cada complejo (inicio, cima 1, valle, cima 2 y final, marcados en las gráficas con asterisco), se consideraron como niveles de potencial los valores de la señal correspondientes a esos nodos, y se calcularon y graficaron las parametrizaciones usando las expresiones

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

desarrolladas anteriormente, con la calibración obtenida, en cada caso. Se tomó $p = \frac{1}{2}$.

A continuación, se presentan los resultados, en los que se puede observar que las parametrizaciones se acercan bastante a la señal EEG original. Cabe mencionar que la calidad de la aproximación es bastante buena en general en los saltos intermedios, pero depende fuertemente de una identificación adecuada de los puntos onset y offset del complejo, en los extremos.

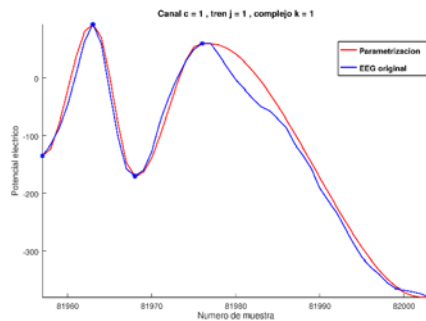


Figura 3-43 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 1$.

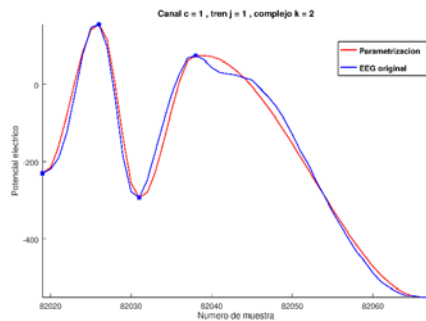


Figura 3-44 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 2$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

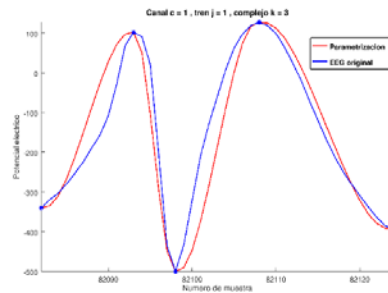


Figura 3-45 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 3$.

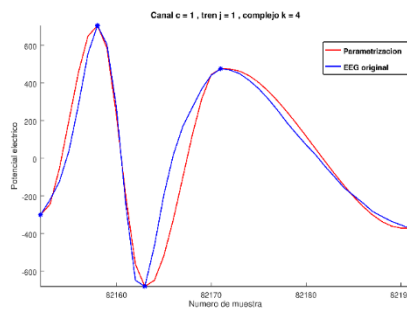


Figura 3-46 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 4$.

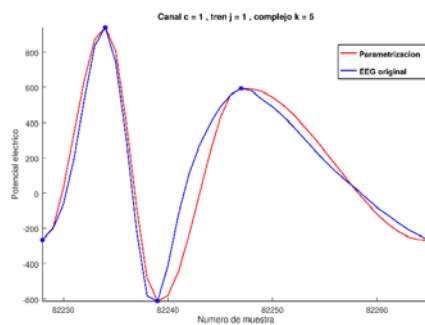


Figura 3-47 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 5$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

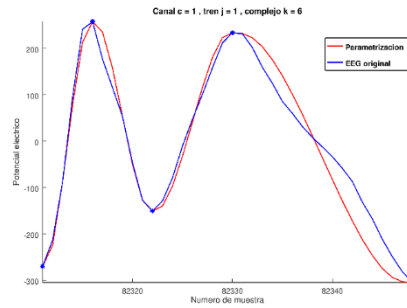


Figura 3-48 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 6$.

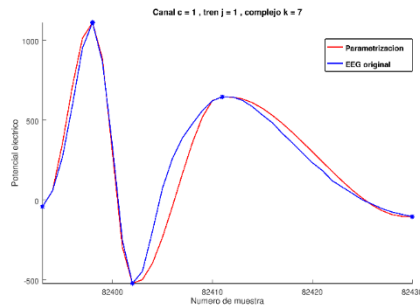


Figura 3-49 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 7$.

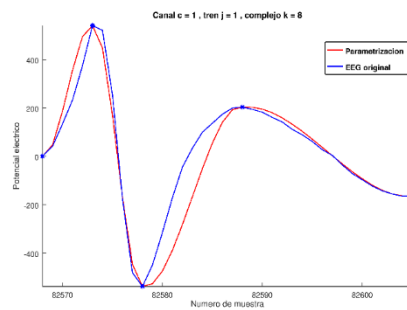


Figura 3-50 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 8$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

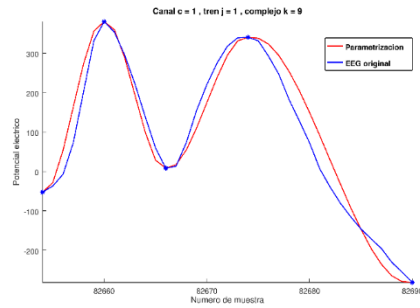


Figura 3-51 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 9$.

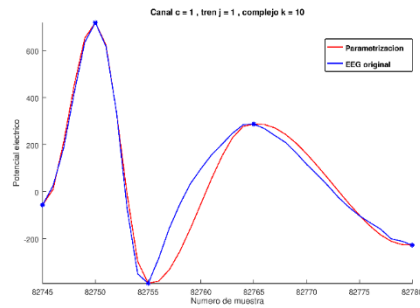


Figura 3-52 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 10$.

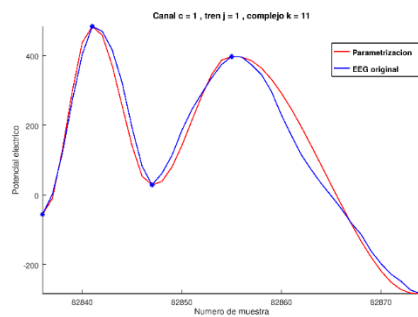


Figura 3-53 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 11$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

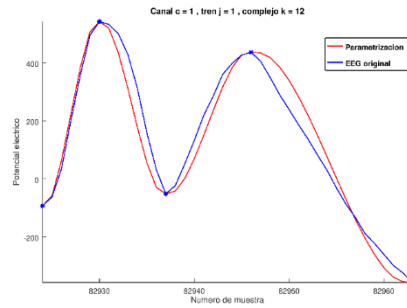


Figura 3-54 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 12$.

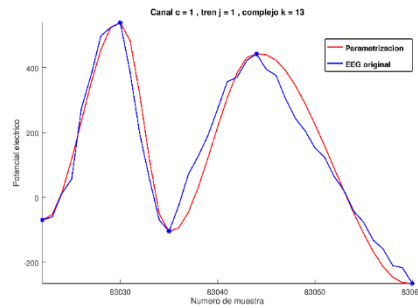


Figura 3-55 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 13$.

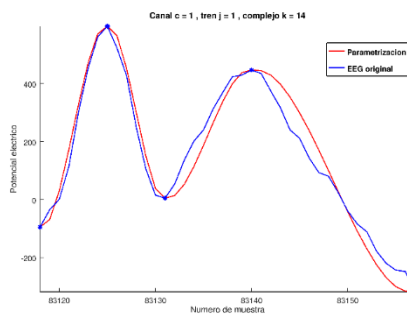


Figura 3-56 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 14$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

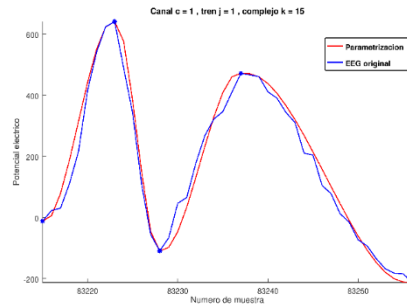


Figura 3-57 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 15$.

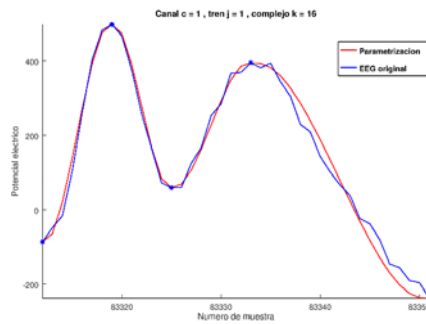


Figura 3-58 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 16$.

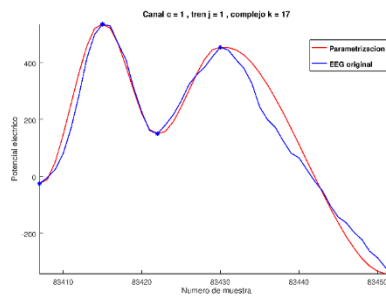


Figura 3-59 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 17$.

Capítulo 3 Expresión matemática aproximada de señales EEG

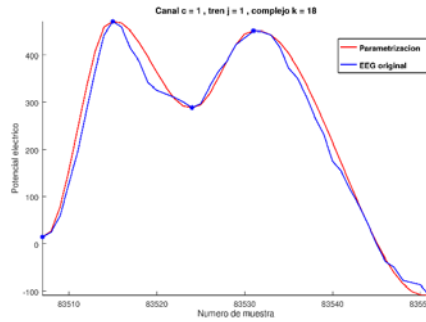


Figura 3-60 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 18$.

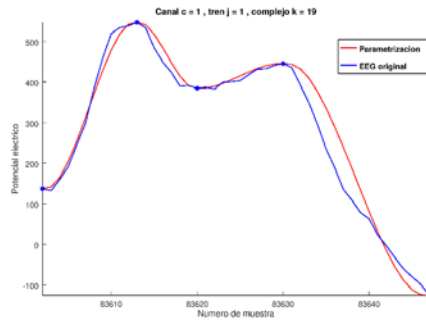


Figura 3-61 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 19$.

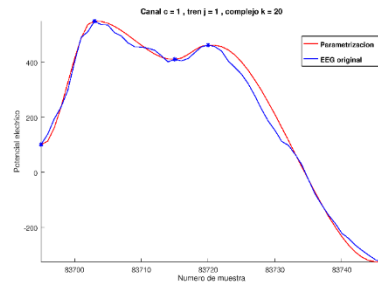


Figura 3-62 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 20$.

Resumen de resultados principales de la tesis

La tesis tiene tres partes principales:

La primera de ellas que corresponde al Capítulo 1, aunque es de carácter introductorio, tiene un valor en sí misma ya que en ella se explica la conceptualización del origen del EEG qué es la medición de la manifestación sobre el cuero cabelludo de la actividad eléctrica del cerebro a nivel de macro escala y se da un resumen importante de las bases que permiten justificar cómo pueden ser utilizados los modelos más simples de actividad eléctrica del cerebro, para obtener información sobre las zonas activas del cerebro a partir de una medición EEG dada.

El modelo que utilizamos en la tesis, para correlacionar con el EEG, es el de medio conductor, propuesto por Geselowitz (ver [12]) y estudiado por Sarvas (ver [11]), el cual se obtiene en base a ciertas suposiciones, algunas de las cuales, tienen un fundamento experimental y que, aunque ha sido ampliamente utilizado también ha tenido mucha controversia por no considerar las propiedades dieléctricas del tejido cerebral.

Por otra parte, en este primer capítulo se resumen los resultados de Paul Nunez sobre el concepto de fuente equivalente y la justificación de que el EEG refleja fundamentalmente la actividad eléctrica macroscópica que se produce en la corteza cerebral, como resultado de la posible activación de estructuras interiores al cerebro y su conectividad con la corteza. También se explica el hecho ya reconocido de que la actividad macroscópica en la corteza se puede interpretar como la de una capa dipolar, donde los dipolos corresponden a arreglos de miles de neuronas piramidales organizadas en estructuras llamadas macrocolumnas. Esta capa dipolar se activa de acuerdo a un diagrama de conexiones, excitatorias a corta y larga distancia e inhibitorias a

Resumen de resultados principales de la tesis

corta distancia, entre las macrocolumnas y con las estructuras internas del cerebro.

Además, como señala Paul Nunez, en un cerebro sin anomalías anatómicas o funcionales asociadas a variaciones en la conducción, se puede considerar la conductividad de la masa cerebral constante e igual a la del agua pura saturada de sal.

Todo lo anterior conduce a modelos estacionarios muy simples con coeficientes constantes para correlacionar las fuentes de corrientes impresas con las mediciones macroscópicas del potencial sobre el cuero cabelludo generado por dichas corrientes. La principal deficiencia de estos modelos, aunque son ampliamente utilizados, es que ignoran las propiedades dieléctricas del tejido cerebral pero también ignoran las características específicas de cada componente del cerebro, en particular la corteza cerebral y los diagramas de conexiones excitatorias e inhibitorias entre las distintas componentes.

La importancia fundamental de este trabajo de tesis es que muestra una metodología de trabajo para la identificación de fuentes que es extensible a no sólo a la identificación de fuentes sino también de anomalías utilizando cualquier nuevo modelo más realista de actividad eléctrica del cerebro (normal y anómalo) y en el caso de geometrías reales.

Los resultados principales individuales obtenidos en la tesis y que se integran en el desarrollo de la mencionada metodología son:

Del Capítulo 2:

1. La formalización matemática del planteamiento operacional del problema inverso en el marco del modelo de medio conductor.
2. Se muestra la importancia de la propiedad de unicidad para la clase de fuentes y la existencia de una clase

“natural” con esta propiedad que, en el caso del modelo de medio conductor, corresponde a las funciones armónicas ortogonales a las constantes y que puede ser utilizada a través de la aplicación de varios resultados teóricos para identificar la fuente de cualquier otra clase arbitraria de fuentes con la propiedad de unicidad que reproduce aproximadamente a una medición dada.

3. La introducción del concepto de conjunto de datos admisibles asociado a una clase de fuentes y la caracterización de este conjunto para las clases de fuentes armónicas en todo el volumen cerebral y en una vecindad arbitraria de la corteza cerebral.
4. La estrategia de interpolación mediciones en electrodos a toda la corteza cerebral utilizando la caracterización del conjunto de datos admisibles.
5. La introducción del Método de Datos Admisibles como estrategia práctica de regularización para la solución del problema inverso cuando se consideran errores de medición.
6. Los resultados teóricos que permiten dar una solución al dilema de la estacionariedad del modelo versus la dependencia temporal de las señales EEG, lo cual permite generalizar la estrategia para el caso de identificación de fuentes estacionarias a partir de datos de potencial dados en un instante, a la identificación de la fuente variables en el tiempo utilizando la señal EEG en cada electrodo. En particular el desarrollo del algoritmo de interpolación de las señales EEG en los electrodos a todo el cuero cabelludo.

Del Capítulo 3:

- 1) Se da una descripción matemática aproximada de cierto tipo de señales EEG cómo son los ritmos basales (ritmos Delta, Theta, Alpha, Beta y Gamma), así como otros

eventos que se observan en las señales EEG tales como las ráfagas de espigas, espigas-ondas y ondas afiladas.

- 2) Se da un algoritmo para descomponer la señal EEG en ventanas de acuerdo a una medida del peso relativo de cada componente del EEG en la ventana, de manera que la composición espectral de estas ventanas pueda considerarse constante en la práctica. Así, en las descomposiciones resultantes, los coeficientes - relacionados con la amplitud y morfología de las señales- podrán considerarse constantes; es decir, no dependientes del tiempo (aunque sí de la ventana).
- 3) En el caso de los ritmos basales se construye una base de cierto tipo de señales patrón de banda limitada y un algoritmo numérico que permite aproximar las componentes de los diferentes ritmos basales dentro de la señal EEG correspondiente a cada ventana. La base de señales patrón se construye partiendo de la hipótesis de que modelamos los ritmos básicos matemáticamente atendiendo a su caracterización en términos de rangos de frecuencias, amplitudes, y morfología.
Esto es muy diferente a lo que se hace comúnmente con el filtraje de las señales pues no se trata de extraer de la señal los ruidos que no nos interesan ya que, con ello se corre el riesgo de eliminar componentes del EEG cuyo rango de frecuencias se traslapa con el del ruido. Lo que se hace es detectar y extraer la componente que nos interesa, en este caso, las componentes de la señal correspondientes a los ritmos basales aunque en el resto de la señal queden presentes los ruidos.
Se usan otro tipo de bases de señales parametrizadas para obtener resultados similares para las ráfagas de espigas, espigas-ondas y ondas afiladas.
- 4) Se definen y estudian las propiedades de los que llamamos los operadores de restricción de una señal arbitraria $f \in L_2(\mathbb{R})$ a una banda de frecuencias dada Ω , mediante

$F_{\Omega}f = (\hat{f} \cdot \mathcal{X}_{\Omega})^{\vee}$ y a un intervalo temporal $[a, b]$, mediante $P_{a,b}f = f \cdot \mathcal{X}_{[a,b]}$.

- 5) A partir de los operadores de restricción se estudia la composición $P_{a,b}F_{\Omega}f$ que nos da la localización en tiempo frecuencia de la señal $f \in L_2(\mathbb{R})$ en el intervalo temporal $[a, b]$ y la banda de frecuencias Ω y se estudia cómo aproximar la componente $P_{a,b}F_{\Omega}f$ para una señal $f \in L_2(\mathbb{R})$. Con este objetivo utilizamos ondas sinusoidales correspondientes a ciertos armónicos dentro del rango de frecuencias requerido, pero truncadas en un intervalo temporal, de manera, de obtener la localización espacio-temporal requerida para cada ritmo.
- 6) Utilizando los resultados anteriores se definen y estudian los operadores $A_d f$ que aproximan la componente de la señal f correspondiente a la banda de frecuencias Ω en la ventana temporal $[a, b]$ y se demuestra que, si la transformada de Fourier \hat{f} es continua, entonces $\lim_{d \rightarrow \infty} A_d f = P_{a,b}F_{\Omega}f$ en $L_2(\mathbb{R})$ y, si además, \hat{f} es de Lipschitz, entonces se tiene que $\|P_{a,b}F_{\Omega}f - A_d f\|_2 = \mathcal{O}(d^{-1})$ cuando $d \rightarrow \infty$.
- 7) Finalmente se dieron ejemplos numéricos de aproximación de ritmos básicos y segmentación siguiendo la metodología propuesta. Para ello se utilizaron señales EEG provenientes de la base de datos "EEG Alpha Waves Dataset" tomadas con un total de 16 electrodos a 20 sujetos a los cuales se les pidió que abrieran y cerraran sus ojos en periodos intermitentes de 10 segundos. Las señales vienen con unas marcas en los inicios y finales de estos periodos. Se conoce que durante los periodos en los que el sujeto cierra los ojos, el ritmo α suele tener un papel preponderante en el EEG, en los electrodos de la región occipital. La frecuencia de muestreo reportada es de 512 muestras por segundo.

Se mostró que nuestra metodología permite reportar la preponderancia del ritmo α en la primera parte de cada ventana.

Resumen de resultados principales de la tesis

Esto se manifiesta claramente en las amplitudes y energías locales de este ritmo, pero sobre todo en los pesos relativos y las segmentaciones.

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se da una respuesta *innovadora e integral* al problema inverso de identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro humano a partir de mediciones electroencefalográficas medidas sobre un conjunto de electrodos en el cuero cabelludo.

El trabajo se aplica al caso de un modelo simple y muy controversial, aunque ampliamente utilizado, de medio conductor, propuesto por Geselowitz (ver [12]) y desarrollado por Sarvas (ver [11]), y para poder destacar aspectos conceptuales de los resultados, lo aplicamos al caso ideal en que la cabeza junto con el cerebro se modelan mediante un sistema de capas conductoras concéntricas con conductividades constantes y diferentes, lo cual nos permite obtener soluciones analíticas, pero sin tomar en consideración las propiedades dieléctricas del tejido cerebral por restricciones propias del modelo de Geselowitz.

El objetivo principal de esta tesis es la propuesta de una metodología general de resolución del problema inverso electroencefalográfico de identificación de fuentes.

La innovación del trabajo consiste en:

- 1) La forma que se utiliza el planteamiento operacional del problema inverso.
- 2) El hecho de destacar la importancia de caracterizar la clase de datos admisibles asociada a cualquier clase de fuentes y que las fuentes sean una clase unicidad.
- 3) El acentuar la importancia de cierta clase de fuentes equivalentes que, en nuestro caso corresponden a las fuentes armónicas ortogonales a las constantes en el volumen cerebral, para con ello poder determinar lo que es verdaderamente importante que es la dinámica de activación de la corteza, considerada como una capa dipolar constituida por macrocolumnas de células piramidales (ver [28]).
- 4) La propuesta de un nuevo esquema de regularización que es el Método de Datos Admisibles (MDA), que es mucho más natural y eficiente para este tipo de problemas que el

esquema de regularización de Tikhonov que no es un esquema optimal para muchas clases de fuentes mientras que el MDA siempre lo es.

- 5) El desarrollo de un esquema teórico que permite identificar directamente las fuentes variables en el tiempo a partir de la información de la señal EEG medida en los electrodos sin necesidad de discretizar en el tiempo, lo cual también es otra fuente de mal planteamiento debido a la acumulación de errores en cada iteración.
- 6) El esquema desarrollado en el capítulo tres para segmentar la señal EEG y poder aproximar cada una de las componentes principales del EEG (ritmos basales y ráfagas de espigas, espigas-onda y ondas afiladas) con una metodología absolutamente diferente de la metodología tradicional de utilizar filtros para eliminar las componentes ruidosas de la señal corriéndose el riesgo de eliminar componentes importantes de la misma y la propuesta de una metodología para medir el peso relativo de cada una de las componentes dentro de la señal EEG completa.
- 7) Por último, la forma en como todo esto se integra en un esquema para interpolar las aproximaciones a las componentes del EEG utilizando la descripción de la clase de datos admisibles correspondiente a la clase de fuentes que se utilice en la identificación para después poder obtener la fuente de dicha clase que mejor aproxima a la medición EEG dada o, por el contrario, poder decidir si la clase en cuestión no es apropiada para reproducir la medición que tenemos.

Por otra parte, *el carácter integral* de este trabajo consiste en que *se da una metodología completa que no sólo es aplicable al problema de identificación de fuentes sino también al problema de identificación de componentes anómalas del tejido y, no únicamente en el marco del modelo de medio conductor sino también para modelos más complejos que incluyan, propiedades*

Conclusiones y perspectivas

dieléctricas del cerebro, características más específicas de las capas de la corteza y diagramas de conectividad.

Queda algún trabajo teórico en el marco del modelo de medio conductor, que consiste en la aplicación de la metodología propuesta para el caso en que las fuentes pueden ser una cantidad finita arbitraria de multipolos (fundamentalmente dipolos) variables en el tiempo, o fuentes generalizadas concentradas en superficies internas del cerebro. En la tesis se han considerado fuentes de cuadrado integrable en el volumen ocupado por el cerebro debido a las complicaciones inherentes al uso de modelos elípticos con fuentes generalizadas y que no son consideradas con profundidad en la mayoría de los trabajos que se han efectuado hasta el momento, pero ya está completamente trazado y queda proyectado para su desarrollo inmediato.

El trabajo numérico y de programación se proyecta más a largo plazo, aunque ya se está abordando. El objetivo es desarrollar algoritmos numéricos y computacionales que permitan visualizar la dinámica de las fuentes con soporte en la corteza que reproducen una medición electroencefalográfica determinada en un cierto conjunto de electrodos en el marco, primeramente, del modelo de medio conductor. Con este objetivo se seguirá la siguiente estrategia:

Utilizando la metodología desarrollada en el capítulo 3, se puede obtener una representación adecuada de los ritmos básicos en cada electrodo, así como de las ráfagas de espigas, espigas-ondas y ondas afiladas, que son las componentes principales de cualquier señal EEG. Además, siguiendo la metodología desarrollada en el capítulo 2, en base a la caracterización del conjunto de datos admisibles para la clase de las fuentes armónicas variables en el tiempo, es posible extrapolar las aproximaciones obtenidas para cada una de las componentes del EEG en cada electrodo a todo el cuero cabelludo. Esto nos permite encontrar, a partir de los resultados del capítulo 2, la fuente armónica variable en el tiempo que recupera cada

Conclusiones y perspectivas

componente del EEG por separado y a partir de cada una de estas fuentes se puede determinar la dinámica de la densidad de activación de las macrocolumnas corticales que corresponden a capas dipolares asociadas a cada una de las componentes del EEG.

Este esquema general para obtener la dinámica de activación de la corteza cerebral, que es lo que detectan los electrodos, no solo para todo el EEG, sino para cada una de sus componentes principales es la propuesta y objetivo principal de este trabajo de tesis.

Obviamente este esquema puede ser aplicado a cualquier otro tipo de modelo más realista de la actividad del cerebro que incluya sus propiedades dieléctricas, características específicas de ciertas componentes importantes del cerebro como la corteza cerebral e incluyendo geometrías realistas de la cabeza y el cerebro.

Sin embargo, nuestro trabajo inmediato consiste en aplicar este esquema al caso más simple del modelo de medio conductor con esferas concéntricas para desarrollar un software que permita visualizar la dinámica de activación de la corteza asociada a cada componente principal del EEG.

Posteriormente, tenemos ya pensada una metodología para trasladar todo este esquema al caso de geometrías reales que incluye la forma de digitalizar la geometría de la cabeza, el cráneo y el cerebro para cada persona y la aplicación de métodos perturbativos para no tener que estar resolviendo problemas numéricos para la solución de problemas de contorno elípticos en geometrías irregulares usando elemento finito que conllevan a una discretización que solo introduce mayor grado de mal planteamiento al problema.

Simultáneamente estamos ya trabajando en problemas de conectividad y de identificación de anomalías, estos últimos en el marco de modelos mucho más complejos que incluyen las propiedades dieléctricas.

Conclusiones y perspectivas

Es importante destacar que estos trabajos se están desarrollando en colaboración y con apoyo e interés de importantes grupos de especialistas en Estados Unidos, Austria, Canadá, China y Francia y están incluidos en el marco de un proyecto CONACYT de Ciencia Básica y de un proyecto Ecos Nord del sistema CONACYT-CNRS.

Índice de figuras

Figura 1-1 Representación esquemática del modelo simple de medio conductor.	4
Figura 1-2. Ondas sinusoidales continuas de distintas frecuencias y la superposición de las mismas.....	9
Figura 1-3. Superposición de señales de la misma frecuencia, pero con distinta forma de onda.	10
Figura 1-4. Diagrama que representa las mediciones EEG como una combinación lineal de ritmos cerebrales, artefactos y señales anómalas (Imagen modificada de [17]).	11
Figura 1-5 Dos subredes eléctricas L y E están conectadas a los puertos a y b . (Imagen modificada de [23]).	14
Figura 2-1 Esquema simple de la cabeza y el cerebro.....	26
Figura 2-2 Figura esquemática del modelo de medio conductor denotando como $\Omega_1^{(0)}$ a el cerebro sin considerar el entorno de la corteza, $\Omega_1^{(1)}$ simboliza el entorno de la corteza cerebral, Ω_2 representa las capas restantes como el cuero cabelludo, cráneo, meninges, entre otros.....	50
Figura 3-1 Transformada de Fourier seno, transformada de Fourier coseno y valor absoluto de la compleja correspondientes con un paso de 1/35 Hz, de la 1era simulación.	120
Figura 3-2 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en el rango de las frecuencias bajas, $\delta, \theta, \beta, \gamma$ y altas.	121
Figura 3-3 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en la frecuencia α	122
Figura 3-4 Señal EEG <i>fmed</i> y todas las componentes $A_{d,\lambda,\lambda}(fmed)$	122
Figura 3-5 Señal EEG <i>fmed</i> y las componentes $\delta, \theta, \beta, \gamma$ y altas de $A_{d,\lambda,\lambda}(fmed)$	123
Figura 3-6 Señal EEG <i>fmed</i> y la componente $A_{d,\alpha,\alpha}(fmed)$	124

Figura 3-7 Señal EEG $fmed$ y las componentes $A_{d,\lambda}(fmed)$ con sus envolturas $\lambda = 0, \delta, \theta, \alpha$	124
Figura 3-8 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d,\beta}(fmed)$ con su envoltura.....	125
Figura 3-9 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d,\gamma}(fmed)$ con su envoltura.	125
Figura 3-10 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d,\infty}(fmed)$ con su envoltura.....	126
Figura 3-11 Energías locales de los diferentes ritmos.....	126
Figura 3-12 Energías locales de los diferentes ritmos.....	127
Figura 3-13 Pesos relativos de todas las componentes.....	127
Figura 3-14 Pesos relativos de todas las componentes.....	128
Figura 3-15 Pesos relativos suavizados de todas las componentes.	129
Figura 3-16 Pesos relativos para cada una de las componentes δ y θ	130
Figura 3-17 Peso relativo para la componente α	130
Figura 3-18 Pesos relativos para las componentes β y γ	130
Figura 3-19 Segmentación de la señal EEG coloreada en cada intervalo de la segmentación con el color correspondiente al ritmo con mayor peso relativo.....	131
Figura 3-20 Segmentación de la señal EEG. Los colores de la barra en la parte inferior representan los segmentos de los ritmos correspondientes.	132
Figura 3-21 Transformada de Fourier seno, transformada de Fourier coseno y valor absoluto de la compleja correspondientes con un paso de 1/35 Hz de la 2da simulación.....	134
Figura 3-22 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en el rango de las frecuencias bajas, $\delta, \theta, \beta, \gamma$ y altas.	135
Figura 3-23 Transformada de Fourier seno, coseno y valor absoluto de la compleja en la frecuencia α	135

Figura 3-24 Señal EEG $fmed$ y las componentes $A_{d_{\lambda},\lambda}(fmed)$
 $\lambda = \delta, \theta, \beta, \gamma, \infty$136

Figura 3-25 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d_{\alpha},\alpha}(fmed)$.
137

Figura 3-26 Señal EEG $fmed$ y las componentes bajas, δ, β, θ
 de $A_{d_{\lambda},\lambda}(fmed)$ con sus envolturas. $\lambda = 0, \delta, \beta, \theta$ 137

Figura 3-27 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d_{\alpha},\alpha}(fmed)$
 con su envoltura.138

Figura 3-28 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d_{\gamma},\gamma}(fmed)$
 con su envoltura.138

Figura 3-29 Señal EEG $fmed$ y la componente $A_{d_{\lambda},\lambda}(fmed)$
 con su envoltura $\lambda = \infty$139

Figura 3-30 Energías locales de los diferentes ritmos.139

Figura 3-31 Energías locales de los diferentes ritmos.140

Figura 3-32 Pesos relativos de todas las componentes.140

Figura 3-33 Pesos relativos de todas las componentes.141

Figura 3-34 Pesos relativos suavizados de todas las
 componentes.142

Figura 3-35 Pesos relativos para cada una de las componentes
 δ y θ142

Figura 3-36 Peso relativo para la componente α143

Figura 3-37 Pesos relativos para las componentes β y γ143

Figura 3-38 Segmentación de la señal EEG coloreada en cada
 intervalo de la segmentación con el color correspondiente al ritmo
 con mayor peso relativo.144

Figura 3-39 Segmentación de la señal EEG. Los colores de la
 barra en la parte inferior representan los segmentos de los ritmos
 correspondientes.145

Figura 3-40 Función $\sigma_{0,1,0,1,1/2}$149

Figura 3-41 Función $K_{(0,0.15,0.3,0.65,1,0,1),(-1,0.8,0,1/2)}$149

Figura 3-42 Señal original EEG de una primera ráfaga de
 epilepsia de ausencia junto con la respectiva parametrización.
150

Figura 3-44 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 1$	151
Figura 3-45 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 2$	151
Figura 3-46 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 3$	152
Figura 3-47 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 4$	152
Figura 3-48 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 5$	152
Figura 3-49 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 6$	153
Figura 3-50 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 7$	153
Figura 3-51 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 8$	153
Figura 3-52 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 9$	154
Figura 3-53 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 10$	154
Figura 3-54 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 11$	154
Figura 3-55 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 12$	155
Figura 3-56 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 13$	155
Figura 3-57 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 14$	155
Figura 3-58 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 15$	156
Figura 3-59 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 16$	156

Figura 3-60 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 17$	156
Figura 3-61 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 18$	157
Figura 3-62 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 19$	157
Figura 3-63 Señal espiga – onda, canal $c = 1$, tren $j = 1$, complejo $k = 20$	157
Figura A-1 Una descomposición funcional de todo el cerebro. (a) muestra cómo la corteza cerebral se divide en los cuatro lóbulos, cada uno responsable de diferentes funciones cognitivas y motoras. (b) es una sección transversal del cerebro que muestra algunos de los principales sistemas subcorticales, el más importante es el tálamo. En (c) se muestra el flujo de información hacia y desde una columna y otras regiones del cerebro. El gráfico en (b) es una reproducción modificada de una figura tomada de la Anatomía del cuerpo humano, publicada originalmente en 1918 y que pasó al dominio público (Imagen modificada de [23]).	178
Figura A-2 Una neurona piramidal típica que se encuentra en la corteza cerebral. En (a) hay una mancha obtenida del tejido cortical que muestra aproximadamente el 1% de las neuronas en la región, tomada de brainmaps.org y reproducida libremente utilizando la licencia Creative Commons Attribution 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/). (b) es una descomposición estructural de las neuronas, que muestra las regiones de entrada en las sinapsis en el árbol dendrítico. Estas entradas están integradas en el soma o cuerpo de la célula y dan como resultado una salida en el axón (Imagen modificada de [22]).	179
Figura A-3 Cambios de potencial de membrana (PM) y flujos de corriente durante la activación sináptica. (A): El PM de la neurona postsináptica y el PM de las fibras presinápticas se registran por medio de microelectrodos intracelulares. Los potenciales de acción en la fibra presináptica excitatoria e inhibitoria conducen	

a un potencial postsináptico excitador (EPSP) y un potencial postsináptico inhibitorio (IPSP), respectivamente, en la neurona postsináptica. Dos EPSP suman un potencial arriba del umbral de activación, con lo cual se da un potencial de acción en la neurona postsináptica. (B): Durante EPSP e IPSP, los flujos de corriente iónica se producen a través de la membrana neuronal, como lo muestran las flechas. La densidad de + y - donde los signos indican la polarización del área subsináptica (área oscura) así como la de la membrana postsináptica durante la activación sináptica. (Imagen modificada de [22]).....181

Figura A-4 a) Dipolo simple; b) fuentes puntuales distribuidas a lo largo del eje vertical (Imagen tomada de [29]).186

Figura A-5. Ritmos cerebrales más comunes [3].190

Figura A-6. Ejemplo de una onda afilada (parte izquierda), una espiga (centro) y espiga-onda (derecha) [16].196

Figura A-7 Ejemplo de epilepsia focalizada [16].....197

Figura A-8 Ejemplo de epilepsia generalizada.....198

Apéndice A.

A.1. Conceptualización del origen del EEG

El cerebro es parte del sistema nervioso central (SNC) y es responsable entre otras tareas, de interpretar la información sensorial recibida del entorno. Cada región del cerebro tiene su propia tarea en este proceso.

La Figura A-1(a) muestra una descomposición funcional de la *corteza cerebral*, una delgada capa de aproximadamente 2-3 mm de espesor que cubre toda la superficie del cerebro. Las diferentes regiones funcionales de la corteza (lóbulo temporal, lóbulo parietal, lóbulo occipital, lóbulo frontal) son responsables del control motor, así como de las funciones cognitivas y de memoria. La información sensorial se transmite a la corteza desde un sistema subcortical conocido como tálamo que se muestra en la Figura A-1(b). Es de notar en la Figura A-1(b) el tamaño relativo de la materia gris donde se encuentran las neuronas y la sustancia blanca utilizada para las conexiones entre los subsistemas.

El tálamo juega un papel importante en la regulación de la interacción entre las diferentes regiones del cerebro. En la Figura A-1(c) se muestra el flujo de información hacia y desde una columna y otras regiones del cerebro. Observe que las entradas a esta columna provienen de otras columnas corticales, así como de sistemas subcorticales. La mayoría de las conexiones se proyectan a través de la sustancia blanca, aunque las columnas cercanas se conectan más directamente.

Las *neuronas* del SNC son las responsables del procesamiento y transmisión de información, pero no son el único tipo de célula presente. Entre estas están las células *gliales*, las cuales superan a las neuronas en poco menos de 4 a 1. Se hace referencia a estas

células *gliales* debido a su papel dentro de la propagación de los potenciales bioeléctricos que se generan en las neuronas.

Los mecanismos básicos que dan origen a potenciales registrados fuera de los elementos del SNC, se discuten a continuación. Esta información es tomada de [39]. Primero se describirá las características de las neuronas. Se conoce que una neurona típica tiene cuatro regiones definidas morfológicamente: el cuerpo celular, las dendritas, el axón y las terminales presinápticas como se ve en la Figura A-2.

El cuerpo celular habitualmente es el origen de dos clases de prolongaciones: varias dendritas cortas y un único axón largo, tubular. Las dendritas se ramifican como un árbol y son el aparato principal de recepción de señales procedentes de otras neuronas.

La neurona que transmite una señal se denomina célula presináptica. La que recibe la señal, célula postsináptica. Como se ve en la Figura A-2, el axón sale del cuerpo celular y es la principal unidad de conducción de señales a otras neuronas. Cerca de su terminación, el axón tubular se divide en finas ramas que forman los lugares de comunicación con otras neuronas. El punto en que se comunican dos neuronas se conoce como sinapsis. La célula presináptica no tiene contacto real o anatómico con la neurona postsináptica, porque ambas células están separadas por un espacio. La neurona presináptica transmite señales de las ramas engrosadas de su axón, conocidas como terminales presinápticas. Estas señales son llamadas potenciales de acción y viajan a lo largo de la membrana celular modificando la distribución de la carga eléctrica.

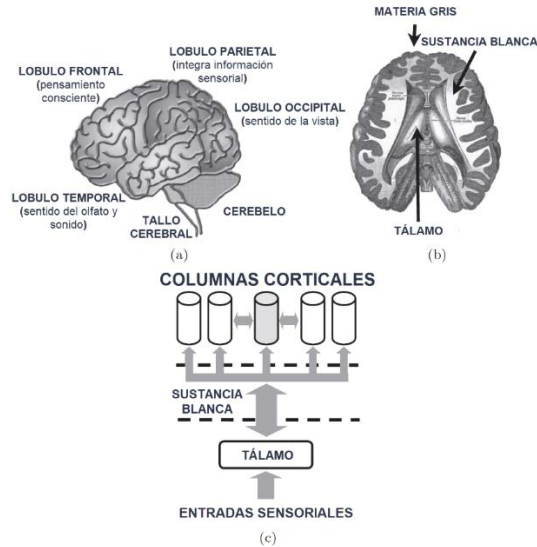


Figura A-1 Una descomposición funcional de todo el cerebro. (a) muestra cómo la corteza cerebral se divide en los cuatro lóbulos, cada uno responsable de diferentes funciones cognitivas y motoras. (b) es una sección transversal del cerebro que muestra algunos de los principales sistemas subcorticales, el más importante es el tálamo. En (c) se muestra el flujo de información hacia y desde una columna y otras regiones del cerebro. El gráfico en (b) es una reproducción modificada de una figura tomada de la Anatomía del cuerpo humano, publicada originalmente en 1918 y que pasó al dominio público (Imagen modificada de [45]).

Si un potencial de acción viaja a lo largo de la fibra, que termina en una sinapsis excitatoria, se produce un potencial postsináptico excitador (EPSP, por sus siglas en inglés) en la siguiente neurona (Figura A-3 (A)). Si dos potenciales de acción viajan a lo largo de la misma fibra en un intervalo corto de tiempo, habrá una suma de EPSP que activará un potencial de acción en la neurona postsináptica después de alcanzar el umbral de la membrana [39].

Apéndice A

Si un potencial de acción viaja a lo largo de una fibra que termina en una sinapsis inhibitoria, se producirá una hiperpolarización, que representa un potencial postsináptico inhibitorio (IPSP, por sus siglas en inglés). Con la obtención de un EPSP, se produce una entrada neta de cationes a través de la membrana subsináptica. Como se muestra en la (Figura A-3 (B)), se desarrolla un gradiente de potencial a lo largo de la membrana neuronal en los espacios intra y extracelulares [39].

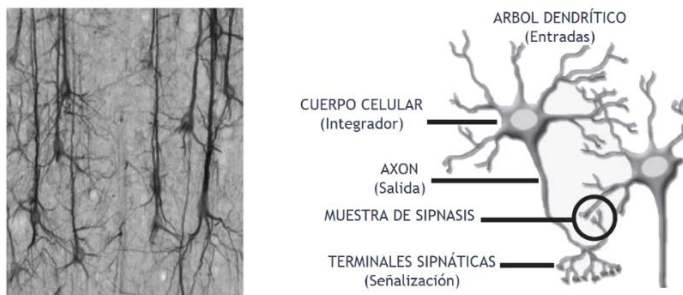


Figura A-2 Una neurona piramidal típica que se encuentra en la corteza cerebral. En (a) hay una mancha obtenida del tejido cortical que muestra aproximadamente el 1% de las neuronas en la región, tomada de brainmaps.org y reproducida libremente utilizando la licencia Creative Commons Attribution 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>). (b) es una descomposición estructural de las neuronas, que muestra las regiones de entrada en las sinapsis en el árbol dendrítico. Estas entradas están integradas en el soma o cuerpo de la célula y dan como resultado una salida en el axón (Imagen modificada de [39]).

Debido a este gradiente de potencial, los cationes se mueven a lo largo de la membrana de la célula nerviosa a través del espacio extracelular en la dirección de la región subsináptica. Un flujo inversamente dirigido tiene lugar en el espacio intracelular.

Con la generación de un IPSP, hay una salida de cationes de la célula nerviosa y/o una entrada de aniones en la célula nerviosa. Estos cambios primero aumentan el potencial de membrana en la membrana subsináptica en comparación con los segmentos circundantes de la membrana [39]. Por este motivo, se desarrolla un gradiente de potencial a lo largo de la membrana de la célula nerviosa, como en el caso de la génesis de los EPSP. Este gradiente de potencial causa, en el espacio extracelular, un flujo de cationes desde la región subsináptica a las porciones circundantes de la membrana [39].

Se desarrolla un proceso inverso en el espacio intracelular. Debido al curso temporal de las fluctuaciones de diversos potenciales de membrana, se cree que los potenciales postsinápticos contribuyen principalmente a la generación de los potenciales de campo extracelular en cuestión [55].

Además de las neuronas, las células gliales también pueden desempeñar un papel en la generación de potenciales de campo extracelular [39].

El tamaño de este potencial de membrana se aproxima al potencial de equilibrio de potasio y, por lo tanto, excede un poco el potencial de membrana de las células nerviosas. Un aumento de la concentración extracelular de potasio (actividad del potasio) provoca la despolarización de las células gliales. Los cambios en la concentración de otros iones causan sólo alteraciones insignificantes del potencial de la membrana de la célula glial.

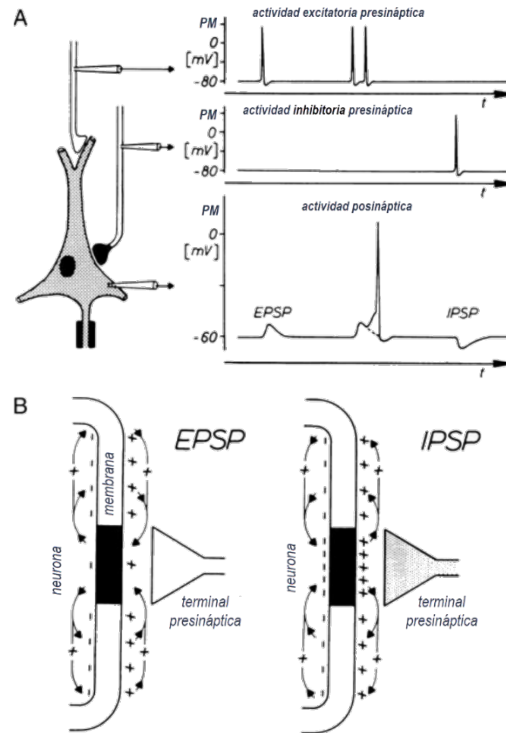


Figura A-3 Cambios de potencial de membrana (PM) y flujos de corriente durante la activación sináptica. (A): El PM de la neurona postsináptica y el PM de las fibras presinápticas se registran por medio de microelectrodos intracelulares. Los potenciales de acción en la fibra presináptica excitatoria e inhibitoria conducen a un potencial postsináptico excitador (EPSP) y un potencial postsináptico inhibitorio (IPSP), respectivamente, en la neurona postsináptica. Dos EPSP suman un potencial arriba del umbral de activación, con lo cual se da un potencial de acción en la neurona postsináptica. (B): Durante EPSP e IPSP, los flujos de corriente iónica se producen a través de la membrana neuronal, como lo muestran las flechas. La densidad de + y - donde los signos indican la polarización del área subsináptica (área oscura) así como la de la membrana postsináptica durante la activación sináptica. (Imagen modificada de [39]).

La dependencia del potencial de membrana glial en la concentración extracelular de potasio es la razón de un enlace funcional con estructuras neuronales adyacentes [39]. Por lo tanto, la actividad neuronal se asocia con la salida de iones de potasio.

La activación repetitiva de las neuronas da lugar a un aumento de la concentración extracelular de potasio y, por tanto, a la despolarización de las células gliales. Una porción de estas corrientes que fluye a través del espacio extracelular es directamente responsable de la generación de potenciales de campo [39].

Si los potenciales de campo se registran contra un punto de referencia inactivo con un límite de frecuencia superior de aproximadamente 100 Hz, entonces se pueden distinguir dos tipos de potenciales de campo, dependiendo de la constante de tiempo del dispositivo de grabación amplificador. En el caso de una constante de tiempo de 1 segundo o menos, los potenciales de campo extracelular se corresponden con lo que comúnmente se conoce como EEG [55].

Los orígenes de los potenciales de campo son debidos a diferentes actividades. En algunos de esos casos la actividad va a estar relacionada con la conectividad. Dicha actividad se puede dividir en actividad normal y anómala. La actividad normal se puede subdividir en las siguientes categorías [43]:

1. Ritmos básicos que corresponden a una actividad relacionada con estados mentales.
2. Actividad sensorial evocada por estímulos sensoriales.
3. Actividad asociada a la solución de tareas, donde la “conectividad” entre distintas regiones del cerebro juega un papel importante.
4. Actividad espontánea asociada al control que ejerce el cerebro en las actividades fisiológicas del organismo.

5. Actividad asociada al estado de ánimo.

Cuando hay un estímulo externo, éste da origen a actividad sensorial evocada, la cual se manifiesta en ciertas áreas de la corteza, como si se generara una fuente externa que está concentrada sobre esas áreas de la corteza.

De la misma forma los estímulos externos eventuales producen fuentes que están concentradas sobre ciertas partes de la corteza y se superponen a los ritmos, dando lugar a una manifestación electroencefalográfica (EEG) que, en general, es normal.

Sin embargo, al someter a la persona a estímulos externos periódicos continuados se puede generar actividad evocada que se considera anómala [56].

Además, cuando se realiza una tarea específica, se hace uso de la conectividad cerebral, debido a que generalmente intervienen distintas funciones cerebrales para poder llevarla a cabo, por lo que es necesario que se establezca una comunicación entre diferentes partes del cerebro tales como la corteza visual y motora, entre otras [44].

La actividad electroencefalográfica anómala, se refleja generalmente como una distorsión de la actividad normal y en muchas ocasiones se manifiesta de manera espontánea como resultado de alteraciones anatómicas o a nivel neuronal, como por ejemplo en la Epilepsia y el Parkinson, entre otras enfermedades mentales [57].

Por tanto, la señal EEG es, fundamentalmente (excluyendo el efecto, por lo general secundario, de fuentes concentradas en el interior del volumen cerebral), la medición de las corrientes que fluyen del cerebro hacia los electrodos ubicados en el cuero cabelludo, atravesando las capas intermedias de la cabeza, que aparecen durante la actividad sináptica de las dendritas de millones de neuronas piramidales en la corteza cerebral. Estas

neuronas piramidales se agrupan de forma organizada en clusters (macrocolumnas), cada uno de los cuales se comporta como un dipolo eléctrico y que interactúan entre sí a través de la actividad sináptica excitatoria e inhibitoria resultante de cada una de sus componentes dando lugar a una gran red neuronal que se comporta masivamente como una distribución (discreta o continua) de dipolos de corriente ubicados a lo largo de la corteza cerebral [28].

Nota: esta observación es lo que nos va a permitir considerar las fuentes focalizadas como dipolos de corriente aislados en el volumen cerebral y las fuentes distribuidas como distribuciones continuas de dipolos soportados sobre ciertas curvas o superficies, fundamentalmente contenidos en la corteza cerebral.

Como se mencionó anteriormente, el cerebro se divide en 4 lóbulos y en cada uno de ellos se pueden observar diferentes tipos de señales o ritmos cerebrales. La localización de fuentes que producen tanto las señales espontáneas, como las anomalías, ha sido un campo muy estudiado y necesario para determinar en forma más precisa los daños fisiológicos, mentales, patológicos y funcionales del cerebro [45].

La localización de fuentes basada en los potenciales del cuero cabelludo requiere la solución de un problema inverso mal planteado, con muchas posibles soluciones. La selección de una solución particular requiere de conocimiento o información *a priori* tanto del estado fisiológico del cerebro, como del estado general del sujeto en estudio [8].

Para localizar las fuentes que generan una determinada actividad EEG, dos aproximaciones frecuentemente utilizadas y que han sido propuestas por udiversos autores son [3], [6]:

- a) Dipolos equivalentes de corriente.

- b) Aproximaciones distribuidas lineales basadas en algoritmos de norma mínima.

En el primer caso, se asume que las señales son generadas por un número relativamente pequeño de fuentes focales. En el segundo caso, todas las fuentes posibles son consideradas simultáneamente y lo que asegura la unicidad de la fuente (si se tiene un conjunto de fuentes donde una de ellas genera la medición esta tiene que ser la única fuente que reproduce la medición) es el criterio matemático de “norma mínima” para seleccionar la fuente.

En la práctica, una fuente idealizada representada por un dipolo de corriente se aproxima por dos aglomerados neuronales idealmente localizados en dos puntos del volumen cerebral separados por una distancia d , uno de los cuales actúa como una fuente puntual de intensidad $+I$ y el otro como un sumidero puntual de intensidad $-I$, como se observa en la Figura A-4 a).

En la Figura A-4 b) se muestra una configuración de fuentes y sumideros puntuales, que se encuentran a distancias r de la ubicación del electrodo y cuando r es grande comparado con d , entonces esas configuraciones pueden ser aproximadas por fuentes en forma de dipolos. Por esta razón, los dipolos corticales proveen modelos de fuente útiles para potenciales registrados sobre el cuero cabelludo [28].

la

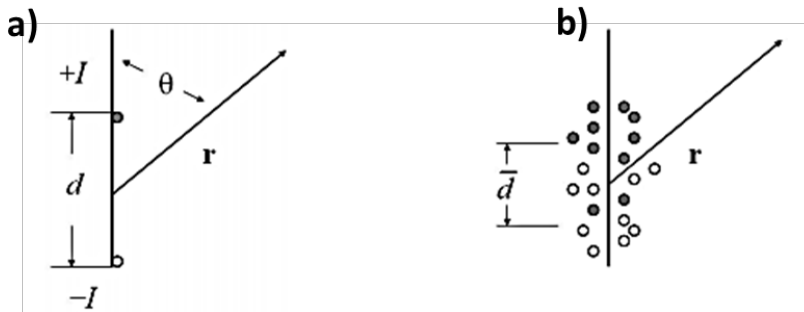


Figura A-4 a) Dipolo simple; b) fuentes puntuales distribuidas a lo largo del eje vertical (Imagen tomada de [28]).

Cada sinapsis activa produce una corriente de membrana activa local más una corriente de retorno pasiva desde superficies de membrana más distantes, según lo exige la conservación de corriente.

Las sinapsis excitadoras producen regiones de sumideros locales y producen fuentes positivas en ubicaciones de membrana más distantes.

Las sinapsis inhibitorias producen corriente en direcciones opuestas; es decir, fuentes locales de membrana y sumideros distribuidos más distantes. Es decir, las sinapsis excitatorias producen sumideros locales de corriente mientras que las inhibitorias producen fuentes locales, luego los arreglos locales de sinapsis inhibitorias y excitatorias dan lugar a distribuciones de tipo fuente – sumidero que generan los dipolos de corriente en el cerebro [6], [29].

Como se vio en la sección 1.1 nuestra clasificación en fuentes “focalizadas y distribuidas” es más natural y, sin necesidad de un criterio matemático adicional como el de norma mínima, nos permite determinar la densidad de distribución de fuentes generadoras de la actividad EEG, bajo la única suposición de que

los generadores detectados por el EEG se encuentran fundamentalmente concentrados en la corteza cerebral.

A.2. Conceptualización de la manifestación electroencefalográfica de la actividad del cerebro

La caracterización de la actividad eléctrica del cerebro reviste de suma importancia en la neurología moderna. Una herramienta clave para ello es la electroencefalografía (EEG), que consiste en la medición de los biopotenciales que se generan en el cerebro. El EEG mide dichos biopotenciales utilizando electrodos que se colocan sobre el cuero cabelludo.

Las distintas propiedades de las señales del EEG (forma, amplitud, ubicación espacial, contenido frecuencial, etc.), contienen información útil respecto a distintos estados mentales asociados a actividades motoras, sensoriales y estadios del sueño o de diferentes enfermedades [43].

La interpretación del EEG es un área de estudio muy amplia y profunda, por lo que es necesario una conceptualización con la finalidad de describir lo mejor posible la manifestación electroencefalográfica de la actividad eléctrica del cerebro. Después de revisar la bibliografía ([42], [43], [3]) vemos que en la literatura se divide el EEG en dos tipos de señales: en el EEG normal y el EEG anormal.

En el EEG normal están los ritmos cerebrales, como se discutió anteriormente y en lo que se ve reflejado en la Figura A-3, se vio que los orígenes de la actividad eléctrica del cerebro y las manifestaciones respectivas a éstas son muy difíciles de conceptualizar completamente, así como el espectro de su variabilidad.

Apéndice A

Lo que sí está claramente estudiado dentro la actividad normal, son los ritmos básicos del cerebro, los cuales se han dividido históricamente según las bandas de frecuencias que ocupan, denominándose con las letras griegas α , β , δ , θ y γ ; sin embargo con el paso del tiempo se han ido descubriendo nuevos ritmos que comparten estas bandas frecuenciales, pero que se diferencian en características como localización o funciones del cerebro.

De acuerdo con la literatura ([42], [43], [3]) en adultos sanos, las amplitudes y frecuencias de los ritmos cerebrales cambian un poco de un humano a otro, como por ejemplo la vigilia y el sueño. Las características de las ondas también cambian con la edad. Hay cinco ondas cerebrales principales que se distinguen por sus diferentes rangos de frecuencia. A continuación, se presenta la Tabla A.1 con información resumida de cada ritmo básico del cerebro, obtenida de [42], [43], [3].

Ritmo Cerebral	Rango de Frecuencia	Rango de Amplitud	Zona Generadora	Manifestación
Pi π	menos de 4 Hz			se produce dentro de los dos segundos posteriores al cierre del ojo
Delta δ	0.5 a 4 Hz	20 a 200 μ V	se puede originar ya sea en el tálamo o en la corteza	sueño profundo, el estado de vigilia, en caso de detectarse en una persona despierta, puede indicar que existe algún tipo de anomalía en el cerebro.
Theta θ	4 a 8 Hz	20 a 100 μ V	se registra en el lóbulo temporal	aparecen cuando la conciencia se desliza hacia la somnolencia, se

Apéndice A

				han asociado con el acceso a material inconsciente, inspiración creativa y meditación profunda. Si se observan en la adultez, pueden ser signo de alguna anomalía o problemas patológicos
Alfa α	8 a 12 Hz	20 a 60 μ V	se registra principalmente en la zona posterior de la cabeza, en el área occipital, parietal y la región temporal posterior	conciencia relajada sin ninguna atención o concentración
Mu μ	8 a 12 Hz	amplitud es menor a 50 μ V	se registra en el lóbulo frontal, cerca de la corteza motora primaria, bloqueándose con la realización de movimientos	características topográficas y fisiológicas claramente diferentes al ritmo alfa
Beta β	13 a 30 Hz	inferior a 30 μ V	se registra principalmente en la región central y frontal del cuero cabelludo,	suele asociarse a un estado de concentración mental.

Apéndice A

			cerca o sobre la corteza motora primaria	
Gamma γ	frecuencias mayores a los 30 Hz (principalmente hasta 50 Hz)	entre 5 y 10 μ V	esta actividad se puede observar en una zona extensa de la corteza cerebral, manifestandose principalmente en la zona frontal y la central.	se presenta como respuesta a estímulos sensoriales, como sonidos contundentes o luces intermitentes, la detección de estos ritmos se puede usar para confirmar ciertas enfermedades cerebrales

Tabla A.1 Tabla de ritmos cerebrales y sus características.

En la Figura A-5 se observan las imágenes obtenidas del EEG de los ritmos más comunes, ordenadas en forma descendente según su frecuencia [3].

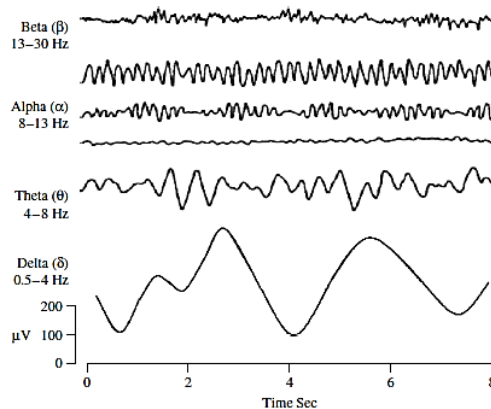


Figura A-5. Ritmos cerebrales más comunes [3].

De la tabla anterior de los ritmos del cerebro se puede observar que los ritmos se clasifican de acuerdo a tres parámetros tales

como rango de frecuencia, rango de amplitud y un generador del ritmo que se encuentra localizado en una región determinada de la corteza o del tálamo.

Se va a suponer que en la región de la corteza donde se genera el ritmo es donde también se registra la medición. Es importante señalar que algunos ritmos tienen rangos de frecuencias iguales pero las manifestaciones de éstos varían en base a distintas cuestiones conductuales y tienen diferentes topografías.

En consecuencia, en relación a lo discutido anteriormente cuando se menciona una actividad cerebral normal, se refiere a una actividad que corresponde a un rango de frecuencias determinada, un rango de amplitudes determinadas y con un generador que se encuentra localizado en una región determinada de la corteza o del tálamo.

Por otro lado, cuando se registran las señales EEG y se observa que existen formas de onda que no corresponden a los ritmos cerebrales, se dice que el sujeto en estudio puede tener alguna *anomalía*. Esta puede ser debido a la distorsión y la desaparición de patrones normales, la aparición y el aumento de patrones anormales, o la desaparición de todos los patrones.

A lo largo de la investigación en los temas médicos relacionados con el tema de esta tesis se ha encontrado que la descripción, etiología y semiología de algunas anormalidades cerebrales es muy extensa y diversa. El papel de la electroencefalografía clínica es de vital importancia para su clínica, la cual se ha estado utilizando como herramienta de monitoreo de video EEG en toda su extensión [58]. Sin embargo, en [59] se dividió las anomalías no específicas en los EEG en tres categorías:

- a) anomalías de onda lenta intermitentes generalizadas, a menudo en el rango de onda delta y asociadas con disfunción cerebral.

- b) EEG bilateral persistente, generalmente asociado con alteraciones de las reacciones cerebrales conscientes.
- c) EEG focal persistente generalmente asociado con alteración cerebral focal.

Por tanto, al EEG se le puede utilizar para detectar la Epilepsia Focal, Generalizada y la presencia de lesiones agudas del cerebro. La frecuencia, amplitud y forma de las ondas, no indican si la lesión es traumática, vascular, neoplásica, infecciosa o degenerativa [43].

En el caso cuando se presentan ondas lentas en el EEG, éstas significan simplemente que existe una disfunción, que está generalizada o que tiene una localización dada.

En la epilepsia, durante la fase tónica aparecen las ondas de espiga u ondas rítmicas rápidas, algunas veces acompañadas de elementos hipersincrónicos en todo el cerebro [43].

En la fase clónica, las ondas son lentas de corta duración y sincronizadas. Durante la fase comatosa, que sigue al ataque, el cual dura aproximadamente de 1 a 5 minutos, el EEG se caracteriza por presentar ondas lentas, difusas y en espiga [43].

El EEG también puede registrar una trombosis cerebral, una embolia cerebral, un hematoma subdural, una encefalopatía hipertensiva, una trombosis carotídea, y apoya en la localización de tumores cerebrales o el diagnóstico de ciertos tipos de trastornos psicopáticos, que muestran patrones característicos de ondas cerebrales [60].

Los tumores cerebrales grandes bloquean la actividad eléctrica de cierta porción del cerebro; en tal caso, la intensidad de las ondas cerebrales disminuye considerablemente en la región del tumor al ser comprimidas las neuronas, provocando una excitación eléctrica anómala en las zonas que lo rodean, produciéndose así descargas sincrónicas de ondas de gran voltaje en el EEG [61].

A.2.1 Interpretación del electroencefalograma

La interpretación del EEG desde el punto de vista clínico se hace tradicionalmente (para ritmos básicos y potenciales evocados) en base al análisis de su frecuencia, amplitud, forma y su coincidencia con el conocimiento existente sobre la localización de los generadores del tipo de ondas cerebrales que se miden. Se tienen los siguientes sistemas de interpretación.

A.2.1.1 Sistema Davis

Los registros EEG se valoran de I a V grados, sobre la base de la estabilidad del Patrón I.

Al Grado I le corresponde un tipo de patrón normal, estable, con una frecuencia y amplitud dentro de límites bastantes estrechos y sin transiciones violentas.

Al Grado II, le corresponden registros normales ligeramente menos estables que los del Grado I.

En el Grado III, algún trazo del EEG puede estar exagerado, aunque no puede ser considerado anormal por sí mismo.

En el Grado IV, el trazo es arrítmico y sospechoso y en él las anormalidades ya son claras.

En el Grado V, los trazos revelan arritmias anormales bien reconocidas, como las que se encuentran en la epilepsia.

A.2.1.2 Sistema Gibbs

Toma en cuenta la frecuencia, amplitud dominante o forma de la onda significativa presente en los registros.

Un trazo de la señal con frecuencia inferior a 12 ciclos por segundo y con amplitud menor de 15 microvoltios, es considerado lento, incluso puede ser moderadamente lento (L-1) o muy lento (L-2). Si hay mucha actividad con una frecuencia

mayor a 12 ciclos por segundo y un voltaje de más de 15 microvoltios, el registro se clasifica como rápido, subdividiéndose igualmente en moderadamente rápido (R-1) y muy rápido (R-2).

A.2.1.3 Sistema Jasper y colaboradores

Toma en cuenta la localización de los generadores y las formas anormales de las ondas, además de considerar, si se localizan las ondas unilateralmente o están bilateralmente sincronizadas o si son difusas, en cuyo caso podemos hablar de anormalidad.

Se ha observado que el uso de electrodos nasofaríngeos insertados en la nariz puede brindar una información adicional referente a la actividad eléctrica de la base del encéfalo y puede servir como electrodo de referencia o localización.

El estudio que realizaremos en este trabajo de tesis permite obtener información precisa sobre la ubicación de las fuentes que generan una medición EEG dada, ya sea normal o anómala teniendo en cuenta la información a priori sobre la región del cerebro donde debe estar soportada dicha fuente y por ello este estudio resulta ser un complemento al análisis clínico tradicional del EEG.

A continuación, se discutirá una manifestación anómala de la actividad cerebral: la Epilepsia, que corresponde a una de las anomalías no específicas discutidas en [59].

A.2.2 Epilepsia focalizada y epilepsia generalizada

Hans Berger, en sus estudios de las ondas cerebrales, descubrió que algunas ondas presentaban descargas asociadas a diferentes “crisis” (seizures, en inglés) [62]. Con esto, el EEG sirvió para ayudar a localizar el sitio de las descargas.

Posteriormente, se descubrieron algunos fármacos para remediar o al menos aminorar la sintomatología de la epilepsia [43] . Años

más tarde, técnicas de neuroimagen como la resonancia magnética funcional y la tomografía de emisión de positrones, sirvieron para determinar y confirmar su diagnóstico [63].

Sin embargo, el número de máquinas de resonancia magnética funcional es limitado, es más costoso y se ocupa mucho más tiempo para escanear el cerebro que usando solamente el EEG. Es por ello, que el EEG sigue siendo la modalidad más útil y de menor costo para el estudio de la epilepsia.

La Epilepsia es entonces descrita como la pérdida de conciencia, aunque en algunos casos esto no sucede así. La palabra Epilepsia proviene del griego *epilambanein* que significa “ataque”. Estos ataques se deben a las descargas eléctricas repentinas, breves y excesivas en las neuronas que pueden darse en distintas partes del cerebro. En otras palabras, la Epilepsia es una mala función cerebral repentina y recurrente, que refleja una actividad excesiva e hipsíncrona de las neuronas cerebrales [3].

La actividad epileptiforme puede referirse a espigas, ondas afiladas, o espigas-ondas.

- La espiga es una onda cuya duración es menor a 70 ms y tiene una forma afilada o puntiaguda, con una pendiente ascendente y descendente pronunciada.
- La onda afilada presenta una morfología menos puntiaguda que la espiga y con una duración mayor a 70 ms.
- En el caso de las espigas-onda, como su nombre lo indica, es una espiga seguida de una onda más lenta.

En la Figura A-6 se observan estos tres tipos de actividad epileptiforme [21].

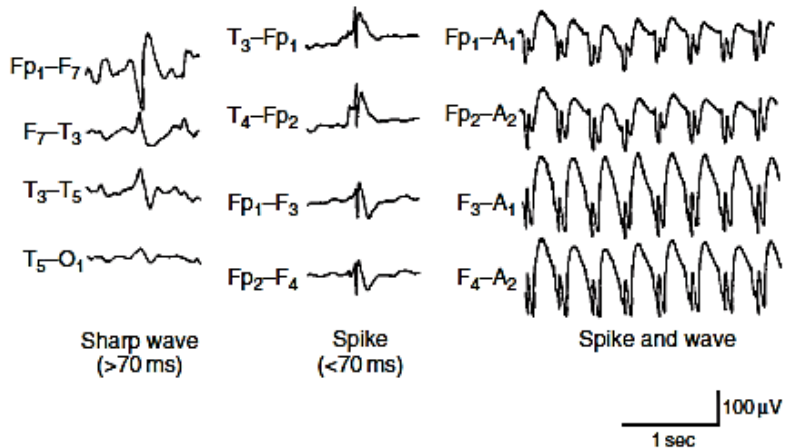


Figura A-6. Ejemplo de una onda afilada (parte izquierda), una espiga (centro) y espiga-onda (derecha) [21].

Dependiendo de las regiones involucradas, la epilepsia puede clasificarse como focalizada o generalizada. La epilepsia generalizada es aquella en la que la mayor parte de las áreas cerebrales están involucradas, mientras que la epilepsia focalizada es cuando solamente en ciertas partes se presentan las descargas eléctricas repentinas [3].

Epilepsia parcial o focalizada: Las crisis son producidas por una descarga eléctrica en una o más áreas localizadas del cerebro. Este tipo de crisis puede ocasionar que al inicio solo sean focalizadas y posteriormente se generalicen. Se pueden subdividir en [3]:

- a) Simples: No hay pérdida de conciencia.
- b) Complejas: Alteración de la conciencia.
 - Se inicia como una crisis parcial simple seguida de una alteración de conciencia.
 - Parcial evolucionando en una generalizada.

Apéndice A

En la Figura A-7 se presenta un ejemplo de epilepsia focalizada, dada en la parte temporal izquierda del cerebro.

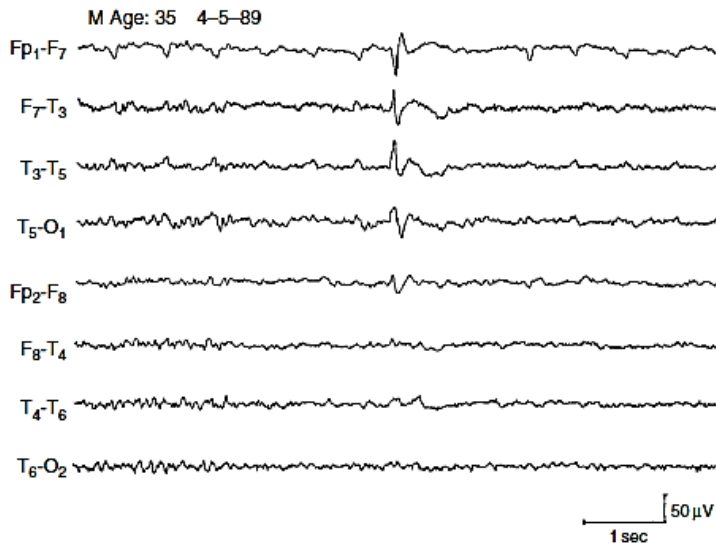


Figura A-7 Ejemplo de epilepsia focalizada [21].

Epilepsia generalizada (convulsivas o no convulsivas): Las descargas eléctricas involucran todo el cerebro y pueden causar pérdida de conciencia y/o contracciones o rigidez musculares. Se pueden subdividir en [3]:

- a) Ausencia.
- b) Clónica, tónica o tónico-clónica.
- c) Mioclónica.
- d) Atónica.

En la Figura A-8 se muestra un ejemplo de epilepsia generalizada, en donde la crisis se observa en todos los canales, predominando en la parte frontal.

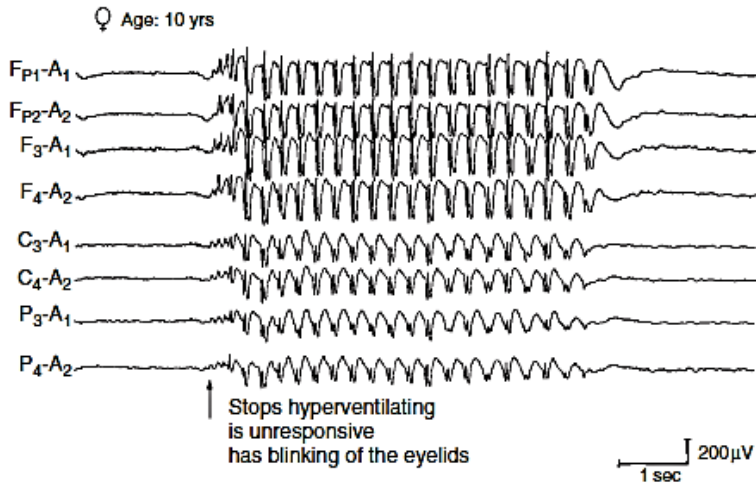


Figura A-8 Ejemplo de epilepsia generalizada.

Una actividad normal perturbada se ve en la Figura A-7 y Figura A-8 con un generador que se encuentra localizado en una región determinada de la corteza o del tálamo.

Recientemente, dadas las técnicas para el procesamiento digital y análisis de señales, además de distintos métodos matemáticos, ha habido un incremento en el interés de detectar y localizar las diferentes crisis epilépticas, además de su predicción [45].

Hasta el momento se han discutido las señales epilépticas como parte del conjunto de las señales anómalas cerebrales, lo cual nos permite hablar de actividad cerebral anómala. Dicha actividad corresponde a un rango de frecuencias determinado, un rango de amplitudes determinadas, pero con una temporalidad finita, o se puede presentar como distorsión, desaparición de patrones normales, así como la aparición y aumento de patrones anormales, o la desaparición de todos los patrones. También como la aparición de ondas lentas intermitentes generalizadas las cuales no tienen una temporalidad finita.



Bibliografía

- [1] «World Health Organization,» 20 Junio 2019. [En línea]. Available: <https://www.who.int/en/news-room/factsheets/detail/epilepsy>. [Último acceso: 11 Diciembre 2019].
- [2] P. L. Nunez y R. Srinivasan, *Electric Fields of the Brain: The Neurophysics of EEG*, 2nd ed., Oxford University Press, 2006.
- [3] S. Sanei y J. A. Chambers, *EEG Signal Processing*, 1st ed., Chichester: John Wiley & Sons, 2007.
- [4] A. M. Denisov, *Elements of Theory of Inverse Problems*. Volumen 14 of *Inverse and Ill-Posed Problems Series*, VSP, 1999.
- [5] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, vol. 120, Karlsruhe: Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] J. C. Munck, B. W. Van Dik y H. Spekreijse, «Mathematical Dipoles are Adequate to Describe Realistic Generators of Human Brain Activity,» *IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING*, vol. 35, n° 11, pp. 960-966, 1988.
- [7] A. Amir, «Uniqueness of the Generators of Brain Evoked Potential Maps,» *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 41, n° 1, pp. 1-11, 1994.
- [8] A. Fraguera Collar, M. Morín Castillo y J. Oliveros Oliveros, «Inverse electroencephalography for volumetric

-
- sources,» *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 78, p. 481–492, 2008.
- [9] M. M. Morín Castillo, J. J. Oliveros Oliveros, J. J. Conde Mones, A. Fraguela Collar, F. F. Gutiérrez Arias y E. Flores Mena, «Simplificación del Problema Inverso Electroencefalográfico a una Sola Región Homogénea con Condición de Neumann Nula,» *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, vol. 34, n° 1, pp. 41-51, 13 Abril 2013.
- [10] A. Fraguela Collar, J. J. Oliveros Oliveros, M. M. Morin Castillo y J. J. Conde Mones, « Identification of piecewise constant sources in non-homogeneous media based on boundary measurements,» *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, p. 7697–7717, 2015.
- [11] J. Sarvas, «Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem,» *Physics in Medicine and Biology*, vol. 32, n° 1, pp. 11-22, 1987.
- [12] D. B. Geselowitz, «On bioelectric potentials in an inhomogeneous volume conductor,» *Biophysical journal*, vol. 7, n° 1, pp. 1-11, 1967.
- [13] M. Locatelli y F. Schoen, *Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications*, T. Liebling, Ed., Parma: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [14] A. Fraguela Collar, M. M. Morín Castillo y J. J. Oliveros Oliveros, «Planteamiento del problema inverso de localización de los parámetros de una fuente volumétrica de corriente neuronal en forma de dipolo,» *Aportaciones Matemáticas Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 25, pp. 41-55, 1999.

-
- [15] J. B. Biscay Lirios, J. F. Bosch Bayard y R. D. Pascual Marqui, «Unmixing EEG Inverse Solutions Based on Brain Segmentation Based on Brain Segmentation,» *Frontiers in Neuroscience*, vol. 12, n° 325, pp. 1-19, 2018.
- [16] T. Roubiček , *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, 2nd ed., Birkhauser, 2015.
- [17] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 2002.
- [18] F. D. G. Plonsey Robert, «Bioelectric Phenomena,» New York, McGraw-Hill, 1969, pp. 338-357.
- [19] S. J. Williamson, G.-L. Romani, L. Kaufman y I. Modena, de *Biomagnetism: an Interdisciplinary Approach*, 1st ed., New York, Springer Science, 1983, p. 123.
- [20] R. Plonsey y R. R. Barr, «Bioelectricity a quantitative approach,» 3rd ed., Durham, North Carolina: Springer, 2007, pp. 45-69.
- [21] J. R. Daube y D. I. Rubin, «Clinical Neurophysiology,» 3rd ed., New York, New York: Oxford University Press, 2009, pp. 137-150.
- [22] R. Vigário, . J. Särelä, V. Jousmäki, M. Hämäläinen y E. Oja, «Independent Component Approach to the Analysis of EEG and MEG Recordings,» *IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING*, vol. 47, n° 5, pp. 589-593, 2000.
- [23] D. Slepian, «Some Comments on Fourier Analysis, Uncertainty and Modeling,» *SIAM Review*, vol. 25, n° 3, pp. 379-393, 1983.

-
- [24] A. Osipov, V. Rokhlin y H. Xiao , Prolate Spheroidal Wave Functions of Order Zero: Mathematical Tools for Bandlimited Approximation, Springer Series Applied Mathematical Sciences, 2013.
- [25] R. M. Young, «An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series. Vol 93,» Academic Press, 2001.
- [26] G. G. Walter y X. Shen, «Wavelets Based on Prolate Spheroidal Wave Functions,» *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 10, n° 1, pp. 1-26, 2004.
- [27] R. Plonsey, «The nature of sources of bioelectric and biomagnetic fields,» *Biophysical Journal*, vol. 39, pp. 309-312, September 1982.
- [28] P. L. Nunez, M. D. Nunez y R. Srinivasan, «Multi-Scale Neural Sources of EEG: Genuine, Equivalent, and Representative. A Tutorial Review,» *Brain Topography*, n° 32, pp. 193-214, 2019.
- [29] R. Plonsey y R. R. Barr, «Bioelectricity a quantitative approach,» 3rd ed., Durham, North Carolina: Springer, 2007, pp. 23-38.
- [30] M. Breakspear y V. K. Jirsa, «Handbook of Brain Connectivity,» J. A. Scott Kelso, Ed., Springer, 2007, pp. 3-64.
- [31] S. L. Bressler y A. R. McIntosh, «Handbook of Brain Connectivity,» J. A. Scott Kelso, Ed., Springer, 2007, pp. 403-420.
- [32] N. A. Tikhonov y V. I. Arsenin, Solutions of ill-posed problems, Winston & Sons, 1977.

-
- [33] M. M. Morín Castillo, «Análisis del problema de identificación de fuentes de actividad bioeléctrica en el cerebro por medio de planteamientos operacionales (Tesis de doctorado),» Puebla de Zaragoza, 2005.
- [34] A. Fraguera Collar, «Análisis Matemático Avanzado,» Puebla, Puebla: Textos Científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2004, pp. 351-466.
- [35] E. Hernandez Montero, A. Fraguera Collar y J. Henry, «An optimal quasi solution for the Cauchy problem for Laplace equation in the framework of inverse ECG,» *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 14, n° 2, pp. 1-22, 16 February 2019.
- [36] V. P. Mijailov, «Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,» 1era ed., Moscú, MIR, 1978, pp. 188-290.
- [37] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991, pp. 50-52.
- [38] A. N. Tjonov y A. A. Samarsky, «Ecuaciones de la física matemática,» 2da. ed., Moscú, MIR, 1980, pp. 765-778.
- [39] E. J. Speckmann, C. E. Elger y A. Gorji, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: Lippincott Williams & Wilkins, 2011, pp. 17-24.
- [40] S. L. Sobolev, *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1963.

-
- [41] J. L. Lions y E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Primera ed., vol. I, Paris: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.
- [42] D. L. Schomer y F. Lopes da Silva , «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., Philadelphia, Pensilvania: Lippincott Williams & Wilkins, 2011, pp. 183-214.
- [43] R. Azzam, M. Z. Koubeissi y N. J. Azar, «Epilepsy Board Review: A Comprehensive Guide,» M. Z. Koubeissi y N. J. Azar, Edits., New York, New York: Springer, 2017, pp. 33-53.
- [44] G. Buzsáki, «Rhythms of the Brain,» New York, New York: Oxford University Press, 2006.
- [45] A. Varsavsky, I. Mareels y M. Cook, *Epileptic Seizures and the EEG Measurement, Models, Detection and Prediction*, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2011, p. 4.
- [46] W. Klonowski, «Everything you wanted to ask about EEG but were afraid to get the right answer,» *Nonlinear Biomedical Physics*, vol. 3, n° 2, pp. 1-5, 2009.
- [47] A. Y. Kaplan, A. A. Fingelkurts, A. A. Fingelkurts, S. V. Borisov y B. S. Darkhovsky, «Nonstationary nature of the brain activity as revealed by EEG/MEG: Methodological, practical and conceptual challenges,» *Signal Processing*, vol. 85, pp. 2190-2212, 2005.
- [48] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973.

-
- [49] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform: An Introduction to Its Theory and Application*, 1st ed., Prentice Hall, 1973.
- [50] S. Engelberg, *Digital Signal Processing An Experimental Approach*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [51] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, 2nd ed., Birkhäuser, 2016, p. 35.
- [52] G. Cattan, P. L. Coelho Rodrigues y M. Congedo, «EEG Alpha Waves Dataset,» GIPSA-LAB, 2018.
- [53] D. Dumitru, «Physiologic basis of potentials recorded in electromyography.,» *Muscle & Nerve: Official Journal of the American Association of Electrodiagnostic Medicine*, vol. 23, n° 11, p. 1667–1685, 2000.
- [54] D. Dumitru, J. C. King y D. F. Stegeman, «Normal needle electromyographic insertional activity morphology: A clinical and simulation study,» *Muscle & Nerve*, vol. 21, n° 7, pp. 910-920, 1998.
- [55] E. J. Speckmann, C. E. Elger y A. Gorji, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, a WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 20,21.
- [56] F. H. Lopes Da Silva, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, a WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 923,924.

-
- [57] A. D. Krystal, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, a WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 1113-1127.
- [58] L. d. S. F. H. Schomer Donald L., «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., Philadelphia, Pennsylvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, A WOLTERS KLUWER, 2011, p. 14.
- [59] F. W. Sharbrough, «'Nonspecific abnormal EEG patterns',» de *Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 4ta ed., Philadelphia, Pennsylvania: Lippincott, Williams and Wilkins, 1999.
- [60] R. L. Beach, H. Barkan y E. DePeralta, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, 6th ed., L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 331-349.
- [61] A. L. Hartman y R. P. Lesser, «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, L. d. S. F. H. Schomer Donald L., Ed., Philadelphia, Pensilvania: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 321-330.
- [62] L. d. S. F. H. Schomer Donald L., «Niedermeyer's Electroencephalography,» de *Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, Philadelphia, Unites

States: LIPPINCOTT WILLIAMS & WILKINS, a
WOLTERS KLUWER, 2011, pp. 5-7.

[63] S. Warach, J. R. Ives, G. Schlaug, M. R. Patel, D. G. Darby,
V. Thangaraj, R. R. Edelman y D. L. Schomer, «EEG-
triggered echo-planar functional MRI in epilepsy,»
Neurology, vol. 47, p. 89–93, 1996.

[64] W. W. Wade, *Introduction to Analysis*, 4ta ed., Harlow:
Pearson, 2014, p. 196.