



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simetrías y grados de libertad en la frontera para teorías de
norma en cuatro dimensiones

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA APLICADA)**

por

Juan Manuel Badillo Serrano

Asesorado por

Dra. Iraís Rubalcava García

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
Mayo de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simetrías y grados de libertad en la frontera para teorías de
norma en cuatro dimensiones

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA APLICADA)**

por

Juan Manuel Badillo Serrano

Asesorado por

Dra. Iraís Rubalcava García

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
Mayo de 2025

Título: Simetrías y grados de libertad en la frontera para teorías de norma en cuatro dimensiones

Estudiante: JUAN MANUEL BADILLO SERRANO

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Secretario

Dr. Héctor Novales Sánchez
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez
Quesada
Suplente

Dra. Iraís Rubalcava García
Asesor

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Co-asesor

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi familia, que son mi mayor motivación. A mi mamá Nely, por el apoyo inmenso que me brindó a lo largo de estos últimos años, sobre todo sus palabras de ánimo que siempre me hicieron sentir seguro y capaz de superar cualquier objetivo que me propusiera. A mi papá Jashiel, porque a pesar de su ausencia, siempre acudió a apoyarme en los momentos que se requería.

A mis hermanos L. Jashiel y Amir F., porque con ustedes siempre pude expresar cualquier pensamiento o duda sin miedo de ser juzgado y por toda la paciencia que me tuvieron en mis momentos de mayor frustración.

A mis mascotas Charize, Richard, Montu, Carrie y Tori, porque estar con ustedes siempre fue el mejor método para aliviar el estrés.

A mi primo Jonathan, por el tiempo que me brindó disfrutando juntos los pasatiempos en los que coincidimos, a pesar de su trabajo pendiente, y por las pláticas serias que siempre estaban llenas de consejos de vida o profesionales.

A mis amigos Fernando, Irving y Gustavo, porque a pesar de la distancia y el tiempo, esas breves salidas y conversaciones siempre me permitieron despejar la mente, sobre todo con nuestros comentarios incoherentes.

A mi novia Margarita, por su apoyo incondicional en cada una de mis decisiones, por darme muchísimos ánimos cuando me sentí decepcionado y afligido, por escuchar cada una de mis angustias en cuanto a mi trabajo de tesis y por todas sus palabras de aliento que me hicieron superar cualquier adversidad que se me presentó. Gracias por todo lo demás, que siempre se me ha hecho difícil de expresar, pero que solo tú sabes entender.

A los integrantes de mi comité tutorial y jurado de tesis: Dr. Cupatitzio Ramírez, Dr. Gilberto Silva, Dr. Héctor Novales y Dra. Mercedes Velázquez, por su disponibilidad para acudir y orientarme en cada evaluación, por cada una de sus observaciones y comentarios que me hicieron esforzarme más en mi trabajo de tesis, lo cual me servirá en mi futura vida profesional.

A mis asesores, la Dra. Iraís Rubalcava, por darme la oportunidad de volver a trabajar con usted, por toda la paciencia que me tuvo, sobre todo en las épocas de evaluación, donde mayor angustiado me encontraba. Por orientarme en todas mis decisiones profesionales e incluso en algunas personales. Por seguir fomentando en mí la pasión por la física. Y el Dr. Gerardo Torres del Castillo, por cada una de sus observaciones durante las evaluaciones que me motivaron a profundizar aún más en mi tema de tesis.

A CONAHCYT, ahora SECIHTI, por el apoyo económico que me permitió emprender, desarrollar y finalizar este trabajo de tesis.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	ix
Introducción	x
1. Preliminares	1
1.1. Método para construir una teoría en la frontera	1
1.1.1. Elección del principio de acción	2
1.1.2. Elección del tipo de frontera	3
1.1.3. Proyección del principio de acción	3
1.1.4. Construcción del principio de acción en la frontera	5
1.2. Análisis de la teoría en la frontera	6
1.2.1. Ecuaciones de movimiento	6
1.2.2. Dinámica en la frontera	7
1.2.3. Análisis hamiltoniano: bulto vs frontera	8
1.2.4. Acción reducida	9
2. Electrodinámica sin fuentes en la frontera	11
2.1. Elección del principio de acción	11
2.2. Elección del tipo de frontera	12
2.3. Proyección del principio de acción	12
2.4. Construcción del principio de acción en la frontera	13
2.5. Análisis lagrangiano	14
2.5.1. Ecuaciones de movimiento	14
2.5.2. Condiciones asintóticamente planas	18
2.6. Análisis hamiltoniano	21
2.6.1. Matriz Hessiana	23
2.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias	23
2.6.3. Condiciones de regularidad	24
2.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria	24
2.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	25
2.6.6. Restricciones de primera y segunda clase	29
2.6.7. Grados de libertad	29
2.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas	30
2.6.9. Condiciones asintóticamente planas	32
2.6.10. Acción reducida	35
2.7. Ejemplos	42
2.7.1. Onda plana transversal electromagnética	44
2.7.2. Onda plana transversal eléctrica	45

3. Pontryagin en la frontera	47
3.1. Elección del principio de acción	47
3.2. Elección del tipo de frontera	48
3.3. Proyección del principio de acción	48
3.4. Construcción del principio de acción en la frontera	49
3.5. Análisis lagrangiano	49
3.5.1. Ecuaciones de movimiento	49
3.5.2. Chern-Simons en la frontera	50
3.6. Análisis hamiltoniano	51
3.6.1. Matriz Hessiana	53
3.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias	53
3.6.3. Condiciones de regularidad	54
3.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria	54
3.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	55
3.6.6. Restricciones de primera y segunda clase	57
3.6.7. Grados de libertad	58
3.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas	59
3.6.9. Transformaciones de norma	61
3.7. Dinámica de Pontryagin en la frontera	62
3.7.1. Sector quiral	62
3.7.2. Sécctor topológico (Chern-Simons)	64
4. Electrodinámica+Pontryagin en la frontera	67
4.1. Elección del principio de acción	68
4.2. Elección del tipo de frontera	68
4.3. Proyección del principio de acción	68
4.4. Construcción del principio de acción en la frontera	69
4.5. Análisis lagrangiano	69
4.5.1. Ecuaciones de movimiento	70
4.6. Análisis hamiltoniano	74
4.6.1. Matriz Hessiana	75
4.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias	76
4.6.3. Condiciones de regularidad	76
4.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria	76
4.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	78
4.6.6. Restricciones de primera y segunda clase	80
4.6.7. Grados de libertad	81
4.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas	81
4.6.9. Acción reducida	82
4.7. Dinámica de electrodinámica+Pontryagin en la frontera	85
4.7.1. Sector quiral de Pontryagin	86
4.7.2. Sector topológico de Pontryagin	86
Bibliografía	90

Resumen

En este trabajo de tesis se construye y analiza la correspondiente teoría en la frontera de tres teorías de norma definidas en un espacio-tiempo de 4 dimensiones: la electrodinámica sin fuentes, Pontryagin y el acoplamiento de las dos anteriores, siendo la frontera una hipersuperficie temporaloide. Para las tres teorías en la frontera se estudia su dinámica por medio de un análisis lagrangiano y uno hamiltoniano, el algoritmo de Dirac-Bergmann, determinando en ambos casos las ecuaciones de movimiento y con respecto a la descripción hamiltoniana, se determinan: restricciones, simetrías, el conteo y la caracterización de los grados de libertad. Además, se realiza una comparación “bulto vs frontera” de todos los resultados obtenidos para cada una de las teorías. En particular, para las últimas dos se muestra que hay una conexión con los aislantes topológicos.

Introducción

El estudio de teorías de norma definidas en un espacio tiempo con fronteras ha resultado de bastante interés recientemente, una de las razones es debido a que al analizar el comportamiento en la frontera, uno puede obtener grados de libertad, simetrías u observables localizadas en tal frontera, ver [1, 2], además de que al considerar la existencia de una frontera es posible también analizar una amplia variedad de fenómenos físicos desde otro enfoque.

Por ejemplo, si se desean estudiar fenómenos físicos lejanos, uno puede suponer que es un observador asintótico y así el lugar donde se encuentra correspondería a una región asintótica, la cual podría verse como una frontera externa del espacio tiempo, teniendo así que analizar la influencia del fenómeno de interés en tal frontera. Un caso particular corresponde a la región asintóticamente plana (infinito espacial) vista como la frontera, donde se han realizado análisis en los temas de Relatividad General [3, 4] y Electromagnetismo [5, 6]. Otro ejemplo donde al considerar la existencia de fronteras ha resultado fructífero es la dualidad Norma/Gravedad [7], la cual ha permitido crear nuevas conexiones entre la teoría cuántica y la gravedad, además de resolver problemas en el régimen de acoplamiento fuerte, que de otro modo eran muy difíciles de abordar con los métodos estándar [8, 9]. Esta dualidad parte del principio holográfico [10] el cual establece que toda la información de una teoría de gravedad cuántica en un hipervolumen dado se puede codificar en una teoría efectiva en la frontera, hipersuperficie, de este hipervolumen. Uno de los casos particulares y de hecho el más destacado de esta dualidad es la correspondencia AdS/CFT, propuesta por J. M. Maldacena [9]. Como última motivación se tienen las teorías topológicas, que pueden generar teorías efectivas en la frontera, ver la primer sección de [11], o en su caso, las referencias, de la 2 a la 17, de tal artículo. Un ejemplo son los aislantes topológicos en sistemas de materia condensada [13], cuyos estados de borde/superficie se intentan modelar de manera efectiva a partir de los grados de libertad emergentes en la frontera de las teorías topológicas, uno de los casos más conocidos es el efecto Hall cuántico [14], donde los estados de borde se pueden modelar de manera efectiva a partir del grado de libertad emergente en la frontera de la teoría topológica de Chern-Simons [15, 13, 2].

Cabe destacar que, a pesar de que en todos estos ejemplos se hace uso de teorías definidas en espacios-tiempos con fronteras, en ninguno de los casos se ha desarrollado un mecanismo para construir la correspondiente teoría en la frontera, sino que uno analiza el comportamiento en la frontera de manera indirecta. Es por ello que, recientemente, en [2] se ha propuesto un método general para construir la correspondiente teoría en la frontera de cualquier teoría clásica de campos definida en una región del espacio-tiempo con fronteras, cabe mencionar que este método ha sido ejemplificado con el principio de acción de Chern-Simons abeliano, además de que las fronteras elegidas son temporaloides, ya que lo que se desea con este método es que después de construir la teoría en la frontera uno pueda analizar la correspondiente dinámica; no obstante, los detalles del método se pueden extender a fronteras (hipersuperficies) espacioaloides.

Con base en lo comentado anteriormente, uno de los objetivos de esta tesis es emplear el método propuesto en [2] para construir las correspondientes teorías en la frontera de tres teorías de norma: la electrodinámica, la teoría topológica de Pontryagin y el acoplamiento de ambas. Así, el segundo objetivo será estudiar la dinámica de las teorías en la frontera construidas, determinando las características más relevantes, como: las ecuaciones de movimiento y su correspondiente

interpretación física, simetrías de norma, el conteo y la caracterización de los grados de libertad, donde los últimos tres son resultados que no han sido reportados en la literatura para estas teorías en la frontera, pese a que el comportamiento en la frontera de las últimas dos teorías ya se ha intentado estudiar con un enfoque diferente, [11, 12], pero sin construir la correspondiente teoría en la frontera. Además de que la teoría acoplada ha sido bastante relevante en varios sistemas de materia condensada, en principio, debido al acoplamiento de la teoría topológica de Pontryagin, donde se sugiere que puede tener grados de libertad en la frontera, [16, 17, 18, 19].

Siendo así, este trabajo de tesis está organizado como sigue:

1. En el Capítulo 1 se hace una breve revisión del método propuesto en [2] para construir la correspondiente teoría en la frontera de una teoría clásica de campos definida en una región del espacio-tiempo con fronteras, haciendo énfasis en los desarrollos y conceptos principales que serán empleados en los capítulos posteriores.
2. En el Capítulo 2 se construye la correspondiente teoría en la frontera de la Electrodinámica sin fuentes. Seguidamente, se analiza la dinámica en la frontera a nivel lagrangiano, determinando e interpretando las ecuaciones de movimiento. También se proponen unas condiciones de frontera asintóticas que hacen bien definido el principio de acción, las cuales contienen a las propuestas en [5]. Después se analiza la dinámica a nivel hamiltoniano, por medio del algoritmo de Dirac-Bergmann, determinando las simetrías, el conteo y la caracterización de los grados de libertad. Cabe mencionar que, en cada punto se realiza una comparación bulto vs frontera, destacando las principales diferencias entre ambas teorías. Finalmente, se revisan un par de soluciones de tipo onda plana, para ver el comportamiento en la frontera.
3. En el Capítulo 3 se construye la correspondiente teoría en la frontera de la teoría topológica de Pontryagin. Seguidamente, se analiza la dinámica en la frontera a nivel lagrangiano, determinando e interpretando las ecuaciones de movimiento. Como caso particular, partiendo de estas ecuaciones se demuestra que Chern-Simons está contenida en la frontera de Pontryagin. Después se analiza la dinámica a nivel hamiltoniano, por medio del algoritmo de Dirac-Bergmann, determinando las simetrías, el conteo y la caracterización de los grados de libertad. Cabe mencionar que, en cada punto se realiza una comparación bulto vs frontera, destacando las principales diferencias entre ambas teorías. Finalmente, se demuestra que Pontryagin en la frontera presenta más de un sector, uno topológico, donde se muestra que está contenido Chern-Simons, [29, 11], y uno dinámico, asociado a un grado de libertad emergente en la frontera y que tiene un comportamiento quiral.
4. En el Capítulo 4 se construye la correspondiente teoría en la frontera de la teoría acoplada Electrodinámica+Pontryagin. Al igual que en las dos teorías anteriores, se analiza la dinámica, determinando e interpretando las ecuaciones de movimiento a nivel lagrangiano; y determinando las simetrías, el conteo y la caracterización de los grados de libertad a nivel hamiltoniano, por medio del algoritmo de Dirac-Bergmann. A partir de lo anterior, se muestra que las características que presenta esta teoría en la frontera en realidad son una combinación de las características ya presentes en las dos teorías en la frontera anteriores, es decir, no hay una dinámica a destacar. No obstante, también se hace notar que los sectores presentes en Pontryagin en la frontera influyen de manera significativa en el acoplamiento en la frontera, ya que uno reduce el acoplamiento en la frontera a solo la Electrodinámica en la frontera y el otro reduce el acoplamiento en el interior a una teoría topológica, mientras que en la frontera se tiene un grado de libertad con comportamiento quiral.

Finalmente, en el Capítulo 5 se dan las conclusiones generales de este trabajo de tesis. Cabe destacar que, los resultados presentados en este trabajo son originales, y por ende, no han sido reportados en la literatura.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se va a presentar una breve revisión de los conceptos físicos y herramientas matemáticas necesarias que fueron empleadas para llevar a cabo este trabajo de tesis. El contenido que sigue a continuación se puede consultar de manera más detallada en el artículo [2], siendo este la base principal para la realización de esta tesis. Sin embargo, también es necesario aclarar que para poder comprender [2] se requieren conceptos básicos de teoría clásica de campos, geometría diferencial y el algoritmo de Dirac-Bergmann, temas que uno puede consultar en las siguientes referencias correspondientemente: [20, 21, 22], [23] y [24, 25].

1.1. Método para construir una teoría en la frontera

Dada una teoría de campos definida en un espacio-tiempo con fronteras, lo que se desea es construir, de manera general y geométrica, la correspondiente teoría en la frontera, para así después encontrar su dinámica, los grados de libertad y sus simetrías sin necesidad de imponer condiciones de frontera particulares a priori. Además, también se podrán obtener las condiciones de frontera permitidas que son compatibles con el principio de acción.

Tomando en cuenta el enunciado anterior, en esta sección se presenta un breve resumen de las ideas principales contenidas en el artículo [2], donde se propone una metodología para construir la correspondiente teoría en la frontera, asociada a una teoría de campos dada definida en un espacio-tiempo con fronteras; además de analizar la dinámica en la frontera. Cabe aclarar que en [2] este método se ejemplifica con el principio de acción de Chern-Simons [29], no obstante el método propuesto es general, es decir, se puede aplicar a cualquier teoría de campos que esté definida en una región del espacio-tiempo con fronteras. Esto último se verá ejemplificado con más detalle en los capítulos posteriores, ya que este se aplicará a los principios de acción de: la electrodinámica, Pontryagin y el acoplamiento de las dos anteriores.

Ahora bien, a pesar de que el método propuesto en [2] es lo más general posible, se deben hacer un mínimo de elecciones: elegir el principio de acción definido en una región del espacio-tiempo con fronteras, y en qué tipo de frontera se desea proyectar esta teoría (temporaloide, espacialoide, nula). De esta manera, la metodología propuesta en [2] para construir una teoría en la frontera está dada por los siguientes pasos:

1. **Elegir el principio de acción:** Se elige un principio de acción definido en un espacio-tiempo con fronteras. Para esta acción, se supone que va a estar bien definida bajo ciertas condiciones de frontera apropiadas, las cuales se van a poder identificar más adelante.
2. **Elegir el tipo de frontera:** Se elige el tipo de frontera de interés. Esta frontera puede ser una hipersuperficie temporaloide o espacialoide.¹

¹El caso nulo no se discute en el artículo [2].

3. **Proyectar el principio de acción:** Una vez elegido el principio de acción y el tipo de frontera, lo que se requiere ahora es proyectar el principio de acción en la frontera con la que se ha deseado trabajar.
4. **Construyendo el principio de acción en la frontera:** Teniendo proyectado el principio de acción en la frontera deseada, lo que se necesita ahora es asegurarse de que no existan grados de libertad que se propaguen fuera de la frontera (hipersuperficie), para ello se debe imponer una condición de restricción. Esta condición se puede leer directamente del principio de acción proyectado, como se verá en la práctica. La razón de restringir a que los grados de libertad no se propaguen fuera de la frontera se debe a que más adelante lo que se hará es estudiar la dinámica en la frontera y debido a ello se requiere que esta dinámica en todo instante de tiempo permanezca únicamente en la frontera elegida.
5. **Encontrar la información relevante en la frontera:** Después de haber construido el correspondiente principio de acción en la frontera, dado un principio de acción (en el bulto), el último paso es obtener y analizar su información relevante, como por ejemplo: calcular sus ecuaciones de movimiento y así poder conocer su dinámica en la frontera. Cabe mencionar que, en principio, se puede hacer un análisis lagrangiano o hamiltoniano.

Ahora que se conocen en general los pasos del método, se pasará a revisar cada uno de estos con más detalle, usando como ejemplo el principio de acción de Chern-Simons abeliano tridimensional, al igual que se hizo en [2].

1.1.1. Elección del principio de acción

Dada una teoría de campos definida en un espacio-tiempo, se sabe que no hay una elección única de un principio de acción que lleve a las mismas ecuaciones de movimiento clásicas en el bulto. En particular, dos acciones que difieren en un término de frontera podrán ser clásicamente equivalentes en el bulto. Por lo tanto, de entre todas las posibilidades, se va a elegir un principio de acción para encontrar su teoría en la frontera correspondiente.

Una vez que se haya elegido el principio de acción, se supone que va a estar bien definido bajo ciertas condiciones de frontera apropiadas. En particular, se necesita que sea diferenciable para que se puedan recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange y como se verá más adelante, esto va a permitir encontrar las condiciones de frontera compatibles con la teoría elegida, de manera que no será necesario imponerlas a priori.

Tomando en cuenta estas consideraciones y como ya se ha venido comentado anteriormente, el principio de acción elegido para ejemplificar el método es el de Chern-Simons abeliano en un espacio-tiempo de 3 dimensiones con fronteras, que está dado como sigue:

$$S_{CS}[A] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} A \wedge dA,$$

o expresado en componentes,

$$S_{CS}[A_\mu] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho} d^3x = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} A_\mu F_{\nu\rho} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho} d^3x, \quad (1.1.1)$$

donde $F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu$ es la curvatura abeliana de la conexión A_μ , siendo $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$ índices espacio-temporales y κ es una constante de acoplamiento. \mathcal{M} representa una región del espacio-tiempo en 3 dimensiones con fronteras donde es aplicable el método, $d^3x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ y el tensor de densidad de Levi-Civita $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho}$ está relacionado con el símbolo de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ como sigue, $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho} = s\sqrt{|g|}\varepsilon^{\mu\nu\rho}$, con s la signatura de la métrica g que en este caso es igual a 1.

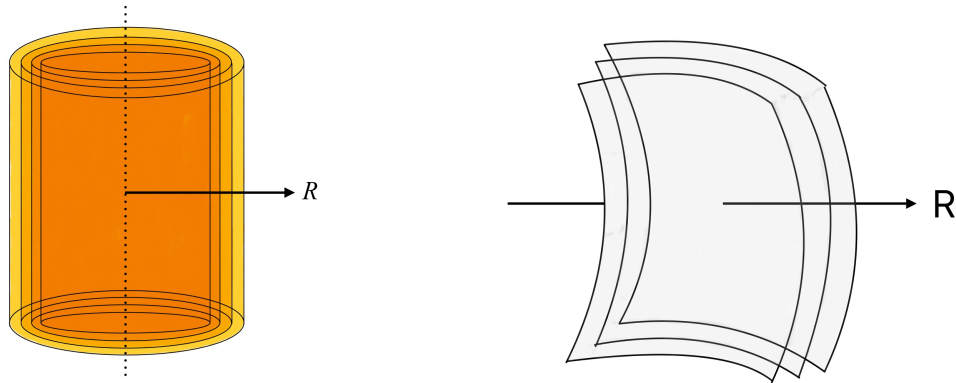
Cabe notar que, la teoría de Chern-Simons es una teoría topológica, es decir, no tiene grados de libertad locales y además, no necesita de una métrica para estar bien definida en un espacio-tiempo con fronteras. Pese a esto, también se recuerda que este método es general y puede ser aplicado

a varias teorías, ya sea que estas tengan o no grados de libertad locales y que estén en cualquier dimensión definidas en una región del espacio-tiempo con fronteras.

1.1.2. Elección del tipo de frontera

Una de las ventajas de este método es que es local, es decir, no necesita que la frontera esté globalmente definida, es suficiente con que localmente se pueda encajar una hipersuperficie que actuará como la frontera. En otras palabras, este método siempre podrá ser aplicado en una región del espacio del espacio-tiempo, \mathcal{M} , que pueda ser foliada por una familia de hipersuperficies (donde una de ellas será la frontera), incluso si no está bien definida en todo el espacio-tiempo.

Ahora bien, este método general para construir la teoría en la frontera es aplicable a cualquier familia de hipersuperficies en el espacio-tiempo, abiertas o cerradas, siempre y cuando estas no se intersecten y además folien por completo toda la región del espacio-tiempo, \mathcal{M} , donde se va a trabajar. Sin embargo, en estos momentos (al igual que se hizo en [2] y como se hará en los capítulos posteriores) se va a elegir una frontera (hipersuperficie) temporaloide^{2 3}, la razón de esta elección es porque lo que se desea, una vez construida la teoría en la frontera correspondiente, es estudiar la dinámica de la teoría en la frontera, aplicando el análisis Lagrangiano o Hamiltoniano, de manera que se necesita tener en la frontera (hipersuperficie) una coordenada temporal.



(a) Región del espacio-tiempo, \mathcal{M} , foliada por hipersuperficies cilíndricas temporaloides, con R el vector normal. (b) Región del espacio-tiempo, \mathcal{M} , foliada por hipersuperficies abiertas temporaloides, con R el vector normal.

Figura 1.1: Región del espacio-tiempo, \mathcal{M} , foliada por dos distintos tipos de hipersuperficies.

1.1.3. Proyección del principio de acción

Para poder proyectar el principio de acción elegido, (1.1.1), en la familia de hipersuperficies temporaloides (donde una de ellas actuará como la frontera), se emplea el operador de proyección P , el cual se define como:

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - \sigma n_\nu n^\mu, \tag{1.1.2}$$

siendo,

²El método propuesto en [2] es aplicable a hipersuperficies temporaloides y espacialoides, el caso nulo no se discute.

³Aunque la teoría de Chern-Simons abeliana tridimensional es una teoría topológica, y por tanto, no necesita una métrica para estar bien definida, al momento de elegir el tipo de frontera, espacialoide o temporaloide, se debe introducir una métrica. Entonces, en el caso de teorías topológicas, solo cuando se quiere proyectar la teoría en una frontera (hipersuperficie) particular es que se necesita introducir una métrica.

$$\sigma = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{n} \text{ es temporaloide,} \\ 1 & \text{si } \mathbf{n} \text{ es espacialoide.} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Con \mathbf{n} el vector normal a la familia de hipersuperficies (espacialoides o temporaloides) y n^μ sus correspondientes componentes.

Entonces, dada una región del espacio-tiempo con frontera, \mathcal{M} , que puede ser foliada por una familia de hipersuperficies temporaloides, el operador de proyección, P_ν^μ , sirve para proyectar un campo tensorial, T_μ , en la familia de hipersuperficies temporaloides ($\sigma = 1$) y de hecho, lo que se obtiene es la descomposición del campo tensorial T_μ en su parte completamente tangente y completamente normal a las hipersuperficies, es decir:

$$\underbrace{P_\nu^\mu T_\mu}_{\text{Parte tangencial}} = \delta_\nu^\mu T_\mu - \sigma \underbrace{n_\nu n^\mu T_\mu}_{\text{Parte normal}}. \quad (1.1.4)$$

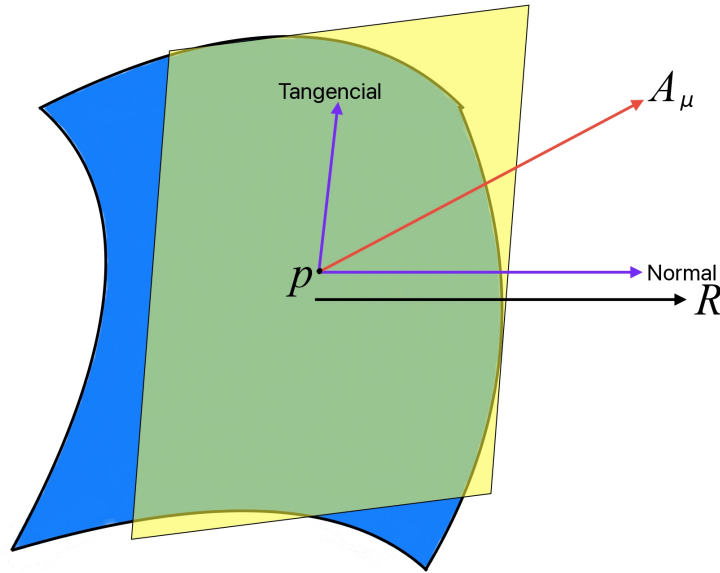


Figura 1.2: Campo tensorial A_μ descompuesto en su parte completamente tangente y normal a la hipersuperficie temporaloide, con R el vector normal a esta.

Comentado lo anterior, para proyectar el principio de acción de Chern-Simons, (1.1.1), lo que se necesita es aplicar un operador de proyección, P_ν^μ , por cada campo tensorial. Sin embargo, se sabe que el tensor de densidad de Levi-Civita proyectado es⁴: $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho} = 3R^{[\mu} \tilde{\varepsilon}^{\nu\rho]}$. Así, insertar este tensor de densidad de Levi-Civita proyectado en la acción (1.1.1) es equivalente a proyectar la conexión A_μ en la frontera (hipersuperficies temporaloides). De esta manera, la acción proyectada de Chern-Simons es:

⁴Tomando en cuenta que la región del espacio-tiempo, \mathcal{M} , se está foliando en una familia de hipersuperficies temporaloides, el vector normal a esta familia va a ser espacialoide y se denotará por $\mathbf{R} = R^\mu \partial_\mu$.

$$\begin{aligned}
S_{CS}[A_\mu] &= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} A_\mu F_{\nu\rho} 3R^{[\mu} \tilde{\varepsilon}^{\nu\rho]} dRd^2x \\
&= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} A_\mu F_{\nu\rho} (R^\mu \tilde{\varepsilon}^{\nu\rho} + R^\rho \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} + R^\nu \tilde{\varepsilon}^{\rho\mu}) dRd^2x \\
&= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [(R^\mu A_\mu) F_{\nu\rho} \tilde{\varepsilon}^{\nu\rho} + 2A_\mu F_{\nu\rho} R^\rho \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}] dRd^2x,
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

con $dRd^2x := dR \wedge dx^0 \wedge dx^1$. Usando la siguiente relación⁵, $F_{\nu\rho} R^\rho = \partial_\nu (R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu$, la ecuación anterior pasa a ser:

$$S_{CS}[A_\mu] = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [(A_\rho R^\rho) F_{\mu\nu} + 2A_\mu \partial_\nu (A_\rho R^\rho) - 2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} dRd^2x. \tag{1.1.6}$$

1.1.4. Construcción del principio de acción en la frontera

Ahora que se tiene el principio de acción de Chern-Simons proyectado, (1.1.6), nótese que el término que tiene una derivada de Lie, $2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}$, contiene la información sobre la propagación de los grados de libertad a lo largo de \mathbf{R} , es decir, de cómo se propagan las conexiones A_μ de una hipersuperficie temporaloide (B_R) a la siguiente ($B_{\delta R}$).

Además, recuerde que una de estas hipersuperficies (la que sea, B_R) va a servir como la frontera, de manera que, cuando se vaya a estudiar la dinámica de la teoría en una frontera particular, B_R , lo que se desea es que no existan grados de libertad que se propaguen de esa frontera a otra, por tanto será necesario deshacerse del término que contiene la información de la propagación de los grados de libertad a través de las hipersuperficies B_R . Cabe mencionar que esta restricción se introducirá de manera general, es decir, para cada una de las hipersuperficies, ya que cualquier podría ser la frontera, de este modo, la restricción es para que la dinámica en cada hipersuperficie sea independiente de la dinámica en cualquier otra, es decir, los grado de libertad no se van a propagar y la evolución temporal de estos estará dada en cada frontera de manera independiente.

Entonces, para poder deshacerse de ese término sin perder información de la dinámica de las variables, lo que se hace es restringir el principio de acción, (1.1.6), a cada una de las hipersuperficies temporaloides, B_R 's, donde cualquiera de estas actuará como la frontera. Y para esto, se usa el método de multiplicadores de Lagrange y se impone como condición de restricción el término que codifica la propagación de los grados de libertad de una frontera a otra, es decir, se considera el término $2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} = 0$ como una restricción que debe cumplirse en cada frontera B_R .

Tomando en cuenta la discusión anterior, se define el principio de acción de Chern-Simons en la familia de fronteras B_R como:

$$\begin{aligned}
S_{CS-B}[A_\mu, \lambda] &= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [(A_\rho R^\rho) F_{\mu\nu} + 2A_\mu \partial_\nu (A_\rho R^\rho) - 2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu - \lambda 2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} dRd^2x \\
&= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [(A_\rho R^\rho) F_{\mu\nu} + 2A_\mu \partial_\nu (A_\rho R^\rho) - 2(1 + \lambda) A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} dRd^2x,
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

siendo λ el multiplicador de Lagrange y una variable dinámica, que permite introducir al término $-2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}$ como restricción, la cual en [2] se denomina como *condición de restricción a la frontera*,

$$-2A_\mu \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu} = 0. \tag{1.1.8}$$

Cabe mencionar que, el principio de acción (1.1.7) sigue siendo una acción en el interior, por ello se está considerando a \mathcal{M} como región de integración. Pero, este principio de acción ya con-

⁵Esta relación es obtenida usando la identidad: $\mathcal{L}_{\mathbf{R}} A = i_{\mathbf{R}} dA + d(i_{\mathbf{R}} A)$, para formas diferenciales, y la definición $F := dA$. Para más información sobre formas diferenciales, consultar [23].

tiene la información sobre la familia de hipersuperficies temporaloides, que folian a \mathcal{M} , cada una independiente de la otra.

1.2. Análisis de la teoría en la frontera

Una vez que se ha construido la correspondiente teoría en la frontera de Chern-Simons, (1.1.7), uno puede pasar a analizar la dinámica de esta teoría en la frontera, como por ejemplo: calcular ecuaciones de movimiento, y por tanto, determinar su dinámica, para también así encontrar las condiciones de frontera apropiadas que hacen que el principio de acción en la frontera esté bien definido. Además, se podrá realizar un análisis Lagrangiano o Hamiltoniano (en este caso se presentarán los resultados principales que se obtuvieron en [2] al aplicar el algoritmo de Dirac-Bergmann al principio de acción (1.1.7)).

Antes de comenzar con el análisis, se va a escribir el principio de acción (1.1.7) usando coordenadas adaptadas a la foliación⁶, $\partial_R A_i = \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_i$, $A_R = A_\rho R^\rho$, donde ahora los índices latinos $i, j = 0, 1$ etiquetan coordenadas arbitrarias en cada una de las hipersuperficies temporaloides, B_R . Así, la acción pasa a escribirse como:

$$S_{CSB}[A_R, A_i, \lambda] = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [A_R F_{ij} + 2A_i \partial_j A_R - 2(1 + \lambda) A_i \partial_R A_j] \tilde{\varepsilon}^{ij} dR d^2 x. \quad (1.2.1)$$

Al igual que en (1.1.7), este principio de acción de Chern-Simons en la frontera contiene la información de todas las hipersuperficies temporaloides, cada una independiente de la otra (esto debido a que se impuso la condición de restricción a la frontera y así no hay grados de libertad que se propaguen a lo largo de las hipersuperficies que folian la región del espacio-tiempo \mathcal{M}).

1.2.1. Ecuaciones de movimiento

Realizando la variación de la acción (1.2.1) e igualando a cero,

$$0 = \delta S_{CSB}[A_R, A_i, \lambda] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_i (A_R \delta A_j - A_j \delta A_R) - \frac{1}{2} \partial_R ((1 + \lambda) (A_i \delta A_j - A_j \delta A_i)) \right. \\ \left. + (F_{ij}) \delta A_R - 2 \left(\partial_i A_R - \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \partial_R A_i - \frac{1}{2} A_i \partial_R \lambda \right) \delta A_j - 2 (A_i \partial_R A_j) \delta \lambda \right] \tilde{\varepsilon}^{ij} dR d^2 x, \quad (1.2.2)$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\delta A_R \quad : \quad \tilde{\varepsilon}^{ij} F_{ij} = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\delta A_j \quad : \quad -2 \left(\partial_i A_R - \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \partial_R A_i - \frac{1}{2} A_i \partial_R \lambda \right) \tilde{\varepsilon}^{ij} = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\delta \lambda \quad : \quad -2 A_i \partial_R A_j \tilde{\varepsilon}^{ij} = 0, \quad (1.2.5)$$

siempre y cuando el término de frontera,

$$\delta S_{CSB}[A_R, A_i, \lambda] \Big|_{on \ shell} = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_i (A_R \delta A_j - A_j \delta A_R) - \frac{1}{2} \partial_R ((1 + \lambda) (A_i \delta A_j - A_j \delta A_i)) \right] \tilde{\varepsilon}^{ij} dR d^2 x, \quad (1.2.6)$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas. Estas ecuaciones de movimiento describen la dinámica en cada una de las hipersuperficies temporaloides, donde los grados de libertad no se

⁶Coordenadas adaptadas a la geometría de las hipersuperficies temporaloides que folian la región del espacio-tiempo \mathcal{M}

propagan de una hipersuperficie a otra, debido a que se impuso la condición de restricción a la frontera.

Usando nuevamente coordenadas adaptadas a la foliación, (t, R, \bar{x}) , el término de frontera, (1.2.6), se puede escribir como:

$$\delta S_{CSB}[A_R, A_t, A_{\bar{x}}, \lambda] \Big|_{on\ shell} = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} [\partial_t (A_R \delta A_{\bar{x}} - A_{\bar{x}} \delta A_R) - \partial_{\bar{x}} (A_R \delta A_t - A_t \delta A_R) - \partial_R ((1 + \lambda) (A_t \delta A_{\bar{x}} - A_{\bar{x}} \delta A_t))] \tilde{\varepsilon}^{t\bar{x}} dR dt d\bar{x}. \quad (1.2.7)$$

Para que el principio de acción (1.2.1) sea diferenciable se requiere que el término de frontera (1.2.7) se haga cero bajo ciertas condiciones de frontera apropiadas. Y para encontrar estas condiciones, lo primero que uno puede hacer es resolver la condición de restricción a la frontera, (1.2.5). Cuando se obtiene la solución a esta ecuación de restricción y se emplea en la expresión (1.2.7), el último término se hace cero y así esta expresión se reduce a:

$$\delta S_{CSB}[A_R, A_t, A_{\bar{x}}, \lambda] \Big|_{on\ shell} = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} [\partial_t (A_R \delta A_{\bar{x}} - A_{\bar{x}} \delta A_R) - \partial_{\bar{x}} (A_R \delta A_t - A_t \delta A_R)] \tilde{\varepsilon}^{t\bar{x}} dR dt d\bar{x}. \quad (1.2.8)$$

La solución a la condición (1.2.5) se puede ver como una condición de frontera. Observe que a pesar de haber encontrado las soluciones a la condición de restricción a la frontera y emplearlas en la expresión (1.2.7), el principio de acción todavía no es diferenciable, ya que el término de frontera no se ha hecho cero por completo. Debido a esto, se deben buscar e imponer condiciones de frontera adicionales que hagan cero los términos restantes, (1.2.8). En el artículo [2] se pueden revisar de manera detallada varios tipos de condiciones de frontera adicionales para distintos tipos de topología.

1.2.2. Dinámica en la frontera

Una vez que se revisan las posibles condiciones de frontera que son compatibles con el principio de acción en la frontera, (1.2.1), se puede pasar a resolver y analizar las ecuaciones de movimiento, (1.2.3), (1.2.4) y (1.2.5).

Siguiendo el procedimiento en [2], las soluciones a las ecuaciones de movimiento se van a clasificar de acuerdo a las posibles soluciones de la condición de restricción a la frontera⁷. Cabe recordar que esta condición asegura que una vez realizada la proyección de la acción en la familia de hipersuperficies temporaloides, los grados de libertad no se van a propagar de una hipersuperficie a la siguiente. Además, cuando ya se elige una hipersuperficie temporaloide particular (que será la frontera), la dinámica se restringe a esta.

En varias teorías, por razones físicas, puede estar claro qué condiciones de frontera imponer, pero en otros casos esto no es tan fácil. La condición (1.2.5) asegura que no hay grados de libertad propagándose de una hipersuperficie temporaloide a otra. Por lo cual, en ese sentido, es una condición de frontera que restringe la dinámica a cada una de las hipersuperficies de manera independiente.

Resolviendo la condición de restricción a la frontera,

$$-2A_i \partial_R A_j \tilde{\varepsilon}^{ij} = 0, \quad (1.2.9)$$

se tiene que la solución general es de la forma,

$$A_t - v(t, \bar{x}) A_{\bar{x}} = 0, \quad (1.2.10)$$

⁷Cada una de las soluciones a la condición de restricción a la frontera lleva a un conjunto particular de soluciones en la frontera que pueden no estar de acuerdo con la física que describen.

con $v = v(t, \bar{x})$ una función arbitraria. En principio, también se tiene una solución trivial, $A_t = 0$, la cual se usa comúnmente como una condición de norma en el bulto.

Si ahora se propone una solución para los campos dada por,

$$A_t = \partial_t \phi \quad \text{y} \quad A_{\bar{x}} = \partial_{\bar{x}} \phi, \quad (1.2.11)$$

con ϕ una función definida en el espacio-tiempo tridimensional. Entonces, de (1.2.10) se obtiene la siguiente ecuación para ϕ ,

$$\partial_t \phi - v(t, \bar{x}) \partial_{\bar{x}} \phi = 0, \quad (1.2.12)$$

que corresponde a la ecuación de onda quiral bidimensional. Este resultado tiene bastante relevancia física puesto que, como se verá más adelante en la descripción hamiltoniana, la teoría de Chern-Simons en la frontera tiene 1 grado de libertad y tal grado en la descripción lagrangiana se puede identificar como ϕ , que corresponde a un bosón quiral y cuya solución general está dada como,

$$\phi = C(R) \varphi(x + vt). \quad (1.2.13)$$

Ahora bien, una vez que se tiene la solución de la condición de restricción a la frontera, (1.2.10), esta se usa para resolver las demás ecuaciones de movimiento, (1.2.3) y (1.2.4), para así determinar la dinámica de la teoría y el comportamiento de λ . Estos detalles se pueden revisar de manera detallada en el artículo [2].

Cabe recalcar que en esta teoría de campos fue posible encontrar la solución de la condición de restricción a la frontera y por ende, también la dinámica de la teoría en la formulación lagrangiana, debido a la sencillez estructural que presenta Chern-Simons. Sin embargo, esto no siempre será posible para cualquier otra teoría de campos, sobre todo si estas son más complicadas, como se verá en los capítulos siguientes.

1.2.3. Análisis hamiltoniano: bulto vs frontera

En la subsección anterior se ha ido haciendo un análisis de la dinámica de la teoría en la frontera de Chern-Simons únicamente empleando y resolviendo las ecuaciones de movimiento, donde se incluye la condición de restricción a la frontera, que permitió determinar las condiciones de frontera compatibles con esta acción, (1.2.1).

Ahora, en esta subsección se van a presentar los resultados principales que se obtuvieron en [2] al haber realizado el análisis hamiltoniano de la teoría de Chern-Simons tanto en el interior como en la frontera para así poderse comparar. El análisis hamiltoniano que se emplea (y que se empleará de igual manera en los siguientes capítulos) es el algoritmo de Dirac-Bergmann⁸.

Entonces, los principios de acción que se analizaron en [2] por medio de este algoritmo son,

1. Chern-Simons en el bulto:

$$S_{CS}[A_R, A_i] = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [A_R F_{ij} + 2A_i \partial_j A_R - 2A_i \partial_R A_j] \tilde{\varepsilon}^{ij} dR d^2 x. \quad (1.2.14)$$

2. Chern-Simons en la frontera:

$$S_{CSB}[A_R, A_i, \lambda] = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [A_R F_{ij} + 2A_i \partial_j A_R - 2(\lambda + 1) A_i \partial_R A_j] \tilde{\varepsilon}^{ij} dR d^2 x. \quad (1.2.15)$$

Y los resultados principales del algoritmo se presentan en la siguiente tabla:

⁸Ver [24, 25] para detalles específicos del algoritmo de Dirac-Bergmann.

Bulto	Frontera
Variables del espacio fase	
$A_t, \Pi_t, A_R, \Pi_R, A_{\bar{x}}, \Pi_{\bar{x}}$	$A_t, \Pi_t, A_R, \Pi_R, A_{\bar{x}}, \Pi_{\bar{x}}, \lambda, \Pi_\lambda$
Restricciones primarias	
$\phi_t := \Pi_t \approx 0$ $\phi_R := \Pi_R + \alpha A_{\bar{x}} \approx 0$ $\phi_{\bar{x}} := \Pi_{\bar{x}} - \alpha A_R \approx 0$	$\phi_t := \Pi_t \approx 0$ $\pi_R := \Pi_R + \alpha A_{\bar{x}} \approx 0$ $\pi_{\bar{x}} := \Pi_{\bar{x}} - \alpha A_R$ $\phi_\lambda := \Pi_\lambda \approx 0$
Restricciones secundarias	
$\psi := -\partial_{\bar{x}} A_R + \partial_R A_{\bar{x}} \approx 0$ $\lambda_{\bar{x}} := -\partial_{\bar{x}} A_t$ $\lambda_R := -\partial_R A_t$	$\psi_t := 2\alpha \partial_{\bar{x}} A_R - 2\alpha(1 + \lambda) \partial_R A_{\bar{x}} \approx 0$ $\psi_\lambda := \alpha(A_t \partial_R A_{\bar{x}} - A_{\bar{x}} \partial_R A_t) \approx 0$ $\lambda_{\bar{x}} := \partial_{\bar{x}} A_t$ $\lambda_R := (1 + \lambda) \partial_R A_t$
Restricciones de primera clase	
$\gamma_1 := \Pi_t \approx 0$ $\gamma_2 := \partial_R A_R + \partial_{\bar{x}} A_{\bar{x}} + 2\alpha(\partial_R A_{\bar{x}} + \partial_{\bar{x}} A_R) \approx 0$	No tiene
Restricciones de segunda clase	
$\chi_1 := \Pi_R + \alpha A_{\bar{x}} \approx 0$ $\chi_2 := \Pi_{\bar{x}} - \alpha A_R \approx 0$	$\chi_1 := \Pi_t \approx 0$ $\chi_2 := \Pi_R + \alpha A_{\bar{x}} \approx 0$ $\chi_3 := \Pi_{\bar{x}} - \alpha A_R$ $\chi_4 := \Pi_\lambda \approx 0$ $\chi_5 := 2\alpha \partial_{\bar{x}} A_R - 2\alpha(1 + \lambda) \partial_R A_{\bar{x}} \approx 0$ $\chi_6 := \alpha(A_t \partial_R A_{\bar{x}} - A_{\bar{x}} \partial_R A_t) \approx 0$
Simetría de norma	
$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$	No tiene
Grados de libertad locales	
$D.O.F. = \frac{1}{2} [6 - 2(4) - 2] = \mathbf{0}$	$D.O.F. = \frac{1}{2} [8 - 2(0) - 6] = \mathbf{1}$

Tabla 1.1: Resultados principales obtenidos del análisis hamiltoniano de la teoría de Chern-Simons: Bulto vs Frontera

Como puede observar, hay claras diferencias entre la teoría de Chern-Simons en el interior y en la frontera. Comparando con el interior, en la frontera se tienen 2 variables dinámicas de más (debido a la introducción de λ y su momento canónico asociado Π_λ). De esta manera, al calcular las restricciones primarias, se obtiene una de más y al calcular las secundarias, se obtiene también una de más, esto en la frontera comparado con lo sucedido en el interior. Además, al separar las restricciones entre de primera y segunda clase, note que la teoría en la frontera no es de norma, como sí lo es la del interior, y además todas sus restricciones son de segunda clase.

Tomando en cuenta los resultados posteriores, se ve que la teoría en el interior va a presentar simetrías de norma, mientras que la de la frontera no. Además, al realizar un conteo de los grados de libertad, se obtiene que la teoría en la frontera no es una teoría topológica, sino que es dinámica y presenta un grado de libertad local.

1.2.4. Acción reducida

Ahora bien, para caracterizar este grado de libertad en la frontera, dado que todas las restricciones son de segunda clase, uno puede tratarlas como simples relaciones entre variables del espacio fase e intentar despejar aquellas que van a ser dependientes de las demás. En este caso, al tener

6 restricciones se segunda clase, se tendrían que despejar 6 variables del espacio fase que serán dependientes de las otras 2 restantes. Una vez despejadas tales variables, si uno las emplea en la acción extendida, esta se va reducir y por tanto, se define la acción reducida S_{E-R} como,

$$S_{E-R}[A_{\bar{x}}, \Pi_{\bar{x}}] = \int_{\mathcal{M}} [\Pi_{\bar{x}}(\partial_t A_{\bar{x}} - \partial_{\bar{x}}(v(t, \bar{x})A_{\bar{x}})) - A_{\bar{x}}(\partial_t \Pi_{\bar{x}} - v(t, \bar{x})\partial_{\bar{x}}\Pi_{\bar{x}})] d\bar{x}dRdt, \quad (1.2.16)$$

cuyas ecuaciones de movimiento, que se obtienen al variar la acción e igualarla a cero, son,

$$\partial_t A_{\bar{x}} - \partial_{\bar{x}}[v(t, \bar{x})A_{\bar{x}}] = 0, \quad (1.2.17)$$

$$\partial_t \Pi_{\bar{x}} - v(t, \bar{x})\partial_{\bar{x}}\Pi_{\bar{x}}, \quad (1.2.18)$$

o de forma equivalente,

$$\partial_t A_{\bar{x}} - \partial_{\bar{x}}[v(t, \bar{x})A_{\bar{x}}] = 0, \quad (1.2.19)$$

$$\partial_t A_R - v(t, \bar{x})\partial_{\bar{x}}A_R = 0. \quad (1.2.20)$$

A partir de estas ecuaciones, que codifican la dinámica general de la teoría en la frontera, se sabe por ecuaciones diferenciales que dado un conjunto de condiciones iniciales o de frontera, las soluciones a las ecuaciones de movimiento serán únicas. Un tipo de condición de frontera es,

$$A_{\bar{x}}|_{t_1, \bar{x}_1} = wA_R|_{t_1, \bar{x}_1}, \text{ con } w = \text{const.}, \quad (1.2.21)$$

de manera que, de la ecuación (1.2.19) y por el teorema de unicidad y existencia, entonces se tendrá una sola ecuación de movimiento que satisface las condiciones de frontera (o iniciales),

$$\partial_t A_{\bar{x}} - v(t, \bar{x})\partial_{\bar{x}}A_{\bar{x}} = 0, \quad (1.2.22)$$

con $v = \text{const.}$ Esta es la ecuación para el bosón quiral. Por lo tanto, se observa que de la acción extendida se pudo caracterizar de manera sencilla el grado de libertad obtenido, $A_{\bar{x}}$, que corresponde a un bosón quiral⁹.

Nótese que una vez construido el principio de acción en la frontera, este se puede analizar con el formalismo que más sea de su agrado. En particular, lo que se quiere hacer notar en esta sección, es que gracias a que se ha podido construir la teoría en la frontera, uno puede obtener toda la información relevante correspondiente a esta teoría de manera directa, como: las condiciones de frontera apropiadas que son compatibles con el principio de acción, sin necesidad de imponerlas a priori, obtener y resolver las ecuaciones de movimiento en la frontera; en el formalismo hamiltoniano, obtener todas las restricciones que presenta la teoría, realizar el conteo de los grados de libertad y además, poder caracterizar estos grados de libertad, sin necesidad de hacer suposiciones antes de.

Entonces, una vez que ya se conocen los conceptos e ideas más importantes del método propuesto en [2], en los capítulos siguientes se empleará este método para construir y analizar las teorías en la frontera de: la electrodinámica, Pontryagin y el acoplamiento de las dos anteriores.

⁹Para más detalles sobre esta idea consultar [2]

Capítulo 2

Electrodinámica sin fuentes en la frontera

En este capítulo se construirá y analizará la correspondiente teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes, no hay cargas ni corrientes, empleando el método propuesto en [2]. Cabe recordar que, la electrodinámica sin fuentes en el interior presenta 2 grados de libertad, los dos estados de polarización del fotón, y simetrías de norma.

Una de las razones por la cual se realiza este análisis en la frontera para la electrodinámica sin fuentes es para indagar si su dinámica en la frontera es diferente a la del interior debido, solamente, al hecho de restringir la interacción entre los campos electromagnéticos en el vacío a la frontera.

Por otra parte, nótese que en [2] se construyó la teoría en la frontera de una teoría que es topológica¹ en el interior y lo que se encontró fue que su correspondiente teoría en la frontera es dinámica, tiene un grado de libertad, y además no tiene simetrías de norma. Esto sucedió para una teoría topológica, así que ahora la pregunta es si estos cambios en la frontera también sucederán para teorías que en el interior son dinámicas, siendo la electrodinámica sin fuentes una de estas, que además tiene mucho contenido físico.

Tomando en cuenta lo anterior, además de la construcción de la correspondiente teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes, los objetivos de este capítulo son determinar por completo la dinámica de la teoría en la frontera, es decir: obtener e interpretar ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera, restricciones, simetrías, número y caracterización de grados de libertad; para después comparar estos resultados obtenidos en la frontera con los que uno obtiene en el interior, destacando las principales diferencias y similitudes que hay entre ambas. Cabe destacar que, los resultados que se presentan a continuación son originales.

2.1. Elección del principio de acción

El principio de acción de la electrodinámica sin fuentes en un espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras está definido como,

$$S_{ED}[A_\mu] = -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x, \quad (2.1.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la curvatura de la conexión A_μ , siendo estas las variables dinámicas²,

¹Una teoría topológica es aquella que no tiene grados de libertad locales. En [2] la teoría topológica con la que se trabajó fue la teoría de Chern-Simons, que además tiene simetrías de norma.

²En esta teoría, las conexiones A_μ corresponden al cuadripotencial, esto es, $A_\mu = (-\Phi, \mathbf{A})$, con Φ el potencial escalar eléctrico y \mathbf{A} el potencial vectorial magnético.

con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ índices espacio-temporales³. \mathcal{M} es una región del espacio-tiempo de $4D^4$, κ es una constante de acoplamiento, $d^4x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ y g es el determinante de la métrica empleada. En este capítulo y en los siguientes se va a trabajar en un espacio-tiempo plano, por lo que la métrica empleada será la de Minkowski, $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (en la base de coordenadas (t, x, y, z)), así $\sqrt{|g|}=1$.

Cabe recordar que, a este principio de acción se le va a pedir que sea diferenciable, es decir, que se puedan recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2.2. Elección del tipo de frontera

Como ya se comentó en el capítulo 1, se va a elegir una frontera del tipo temporaloide, es decir, la región \mathcal{M} del espacio-tiempo se va a foliar mediante una familia de hipersuperficies temporaloides (donde alguna de estas será la frontera). El motivo de esta elección es que más adelante, al tener una dirección temporal en estas hipersuperficies, uno podrá estudiar la dinámica de la teoría en la frontera, aplicando un análisis Lagrangiano o Hamiltoniano.

2.3. Proyección del principio de acción

Una vez elegido el principio de acción y el tipo de frontera, lo que sigue es proyectar el principio de acción, (2.1.1), en una familia de hipersuperficies temporaloides que folien la región del espacio-tiempo \mathcal{M} (donde una de ellas será la frontera). Para esto, se emplea el operador de proyección que se presentó en el capítulo anterior, $P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - \sigma n_\nu n^\mu$ (1.1.2), donde $\sigma = 1$ ya que $\mathbf{n} = \mathbf{R}$ será espacialoide, es decir:

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - R_\nu R^\mu, \quad (2.3.1)$$

con $\mathbf{R} = R^\mu \partial_\mu$ el vector espacialoide normal a la familia de hipersuperficies temporaloides que folian la región \mathcal{M} del espacio-tiempo y R^μ sus correspondientes componentes.

Entonces, el cálculo de la proyección del principio de acción (2.1.1) está dado como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &:= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta F_{\alpha\beta} P_\rho^\mu P_\tau^\nu F^{\rho\tau} \\ &= P_\mu^\alpha P_\rho^\mu P_\nu^\beta P_\tau^\nu F_{\alpha\beta} F^{\rho\tau} \\ &= P_\rho^\alpha P_\tau^\beta F_{\alpha\beta} F^{\rho\tau} \\ &= (\delta_\rho^\alpha - R_\rho R^\alpha) (\delta_\tau^\beta - R_\tau R^\beta) F_{\alpha\beta} F^{\rho\tau} \\ &= (\delta_\rho^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\rho^\alpha R_\tau R^\beta - \delta_\tau^\beta R_\rho R^\alpha + R_\rho R^\alpha R_\tau R^\beta) F_{\alpha\beta} F^{\rho\tau} \\ &= F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} R^\beta F^{\alpha\tau} R_\tau - R^\alpha F_{\alpha\beta} R_\rho F^{\rho\beta} + R^\alpha R^\beta R_\rho R_\tau F_{\alpha\beta} F^{\rho\tau} \\ &= F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - 2F_{\alpha\beta} R^\beta F^{\alpha\tau} R_\tau \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + 2F_{\alpha\beta} R^\beta F^{\alpha\tau} R_\tau. \quad (2.3.3)$$

En estos cálculos se han usado propiedades del operador de proyección, $P_\mu^\alpha P_\rho^\mu = P_\rho^\alpha$, y el hecho de que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es igual a cero. Además, el término $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se define como la parte de $F_{\mu\nu}$ que es completamente tangente a la familia de hipersuperficies. Si ahora se usa la relación, $F_{\nu\rho} R^\rho = \partial_\nu (R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\nu$, se tiene,

³En este capítulo y los siguientes se usarán las letras griegas minúsculas para los índices espacio-temporales en 4 dimensiones.

⁴Región del espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras donde es aplicable el método propuesto en [2].

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2(\partial_\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha)(\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha) \\
&= \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - 2\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha - 2(\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha \\
&= \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - 2(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Empleando este último resultado en la ecuación (2.1.1), entonces el principio de acción de la electrodinámica⁵ proyectado está dado como,

$$S_{ED}[A_\mu] = -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - 2(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha] d^4x. \tag{2.3.5}$$

Este sigue siendo un principio de acción en el bulo, pero que ya sabe sobre la foliación de la región del espacio-tiempo \mathcal{M} mediante una familia de hipersuperficies temporaloides.

2.4. Construcción del principio de acción en la frontera

Ahora que se tiene el principio de acción de la electrodinámica proyectado, (2.3.5), nótese que el término que tiene la derivada de Lie, $-2(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha$, contiene la información de cómo se propagan los grados de libertad a lo largo de \mathbf{R} y como se comentó anteriormente, para restringir que estos grados de libertad no se propaguen de una hipersuperficie temporaloide a la siguiente, es necesario imponer ese término como una restricción de la teoría e introducirlo al principio de acción (2.3.5) por medio del método de los multiplicadores de Lagrange. La razón de este paso, como se discutió en el capítulo 1, se debe a que cuando se vaya a estudiar la dinámica de la teoría en la frontera (una hipersuperficie particular elegida de la foliación), lo que se desea es que esta dinámica permanezca en la frontera elegida, es decir, que las conexiones A_μ no se propaguen de una frontera a otra de un momento a otro, por lo cual es necesario introducir una restricción que corresponda al término que contiene esta información.

De esta manera, se define el principio de acción de la electrodinámica en la familia de fronteras (hipersuperficies) temporaloides como,

$$S_{ED-B}[A_\mu, \Upsilon] = -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + 2\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - 2(1 + \Upsilon)(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha] d^4x, \tag{2.4.1}$$

siendo Υ el multiplicador de Lagrange y una variable dinámica, que permite introducir la restricción $-2(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha = 0$ a la acción, que debe cumplirse para cada frontera (hipersuperficie) temporaloide. En este caso, esta restricción corresponde a la *condición de restricción a la frontera*:

$$-2(2\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha)\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha = 0. \tag{2.4.2}$$

El principio de acción (2.4.1) sigue siendo uno en el interior, por ello se está considerando a \mathcal{M} como región de integración. Pero, a diferencia de (2.1.1), este principio de acción, (2.4.1), ya contiene la información de la familia de hipersuperficie temporaloides, que folian \mathcal{M} , y donde la dinámica en cada una será independiente de las demás.

⁵En lo que sigue de la tesis ya solo se escribirá “electrodinámica” para referirse a la electrodinámica sin fuentes, esto es, se omitirá el término “sin fuentes”, a menos que se requiera para evitar ambigüedad.

2.5. Análisis lagrangiano

Teniendo el principio de acción en la frontera, el último paso es realizar el análisis de la dinámica de esta teoría. Para ello, lo primero que se hará es usar coordenadas adaptadas a la foliación⁶, de manera que, $\partial_R A_i = \mathcal{L}_R A_i$ y $A_R := A_\rho R^\rho$, donde los índices latinos⁷, $i = 0, 1, 2$, etiquetan coordenadas espacio-temporales arbitrarias en cada una de las hipersuperficies temporaloides. Además, como $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ es un término completamente tangente a la familia de hipersuperficies, entonces al usar coordenadas adaptadas este término se puede redefinir como $\mathcal{F}_{\mu\nu} := F_{ij}$, pues los índices i, j etiquetan coordenadas en las hipersuperficies. De esta manera, el principio de acción de la electrodinámica en la frontera, (2.4.1), pasa a ser:

$$S_{EDB}[A_R, A_i, \Upsilon] = -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} \left[F_{ij} F^{ij} + 2\partial_i A_R \partial^i A_R - 2(1 + \Upsilon) (2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R A_i \right] dR d^3x, \quad (2.5.1)$$

siendo $dR d^3x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dR$ y con esta acción se va a trabajar a continuación.

2.5.1. Ecuaciones de movimiento

Partiendo de la variación de la acción (2.5.1) e igualando a cero,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_{EDB} &= -\frac{\kappa}{4} \delta \int_{\mathcal{M}} \left[F_{ij} F^{ij} + 2\partial_i A_R \partial^i A_R - 2(1 + \Upsilon) (2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R A_i \right] \sqrt{|\gamma|} dR d^3x \\ &= -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} \left[4F^{ij} \partial_i \delta A_j + 4\partial^i A_R \partial_i \delta A_R - 2(2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R A_i \delta \Upsilon \right. \\ &\quad \left. - 4(1 + \Upsilon) \partial_R A^i \partial_i \delta A_R + 2(1 + \Upsilon) \partial_R A^i \partial_R \delta A_i \right. \\ &\quad \left. - 2(1 + \Upsilon) (2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R \delta A_i \right] dR d^3x \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

⁶Usar coordenadas adaptadas a la foliación quiere decir que, se está eligiendo trabajar en un sistema de referencia con base coordenada (x^0, x^1, x^2, R) donde ahora uno de los ejes espaciales tiene la misma dirección que la del vector normal a las hipersuperficies temporaloides, \mathbf{R} .

⁷En este capítulo y los siguientes, los índices latinos, con letras minúsculas de la i a la q , van a etiquetar coordenadas arbitrarias en un espacio-tiempo de 3 dimensiones.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0 = \delta S_{EDB} &= -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} \left[-4\partial_i F^{ij} \delta A_j + \partial_i (4F^{ij} \delta A_j) - 4\partial_i \partial^i A_R \delta A_R + \partial_i (4\partial^i A_R \delta A_R) \right. \\
&\quad - 2(2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R A_i \delta \Upsilon + 4\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R \\
&\quad - \partial_i (4(1 + \Upsilon) \partial_R A^i \delta A_R) + 4\partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^i A_R - \partial_R A^i)) \delta A_i \\
&\quad \left. - \partial_R (4(1 + \Upsilon) (\partial^i A_R - \partial_R A^i) \delta A_i) \right] dR d^3 x, \\
&= -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} \left[-4\partial_i F^{ij} \delta A_j + 4\partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^j A_R - \partial_R A^j)) \delta A_j \right. \\
&\quad - 4\partial_i \partial^i A_R \delta A_R + 4\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R \\
&\quad - 2(2\partial^i A_R - \partial_R A^i) \partial_R A_i \delta \Upsilon \\
&\quad + \partial_i (4F^{ij} \delta A_j) + \partial_i (4\partial^i A_R \delta A_R) - \partial_i (4(1 + \Upsilon) \partial_R A^i \delta A_R) \\
&\quad \left. - \partial_R (4(1 + \Upsilon) (\partial^i A_R - \partial_R A^i) \delta A_i) \right] dR d^3 x, \\
&= \kappa \int_{\mathcal{M}} \left[(\partial_i F^{ij} - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^j A_R - \partial_R A^j))) \delta A_j \right. \\
&\quad + \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R \\
&\quad + \left(\partial^i A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^i \right) \partial_R A_i \delta \Upsilon \\
&\quad + \partial_i (-F^{ij} \delta A_j - (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R) \\
&\quad \left. + \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^i A_R - \partial_R A^i) \delta A_i) \right] dR d^3 x,
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento,

$$\delta A_R : \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) = 0, \tag{2.5.4}$$

$$\delta A_j : \partial_i F^{ij} - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^j A_R - \partial_R A^j)) = 0, \tag{2.5.5}$$

$$\delta \Upsilon : \left(\partial^i A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^i \right) \partial_R A_i = 0, \tag{2.5.6}$$

siempre y cuando el término de frontera,

$$\begin{aligned}
\delta S_{EDB}|_{boundary \ term} &= \kappa \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_i (-F^{ij} \delta A_j - (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R) \right. \\
&\quad \left. + \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^i A_R - \partial_R A^i) \delta A_i) \right] dR d^3 x,
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas.

Teniendo las ecuaciones de movimiento, se procede a reescribirlas en términos de los campos eléctrico y magnético, para lo cual, será necesario recordar lo siguiente,

$$E^{\bar{i}} = F^{0\bar{i}}, \quad F^{\bar{i}\bar{j}} = \varepsilon^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} B_{\bar{k}} \quad \text{y} \quad A^0 = \Phi, \tag{2.5.8}$$

donde los índices latinos con una barra encima se usan para etiquetar coordenadas espaciales en 3 dimensiones, esto es, $\bar{i} = R, 1, 2$.

Entonces, de la ecuación (2.5.4),

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \\
&= \partial_0 (\partial^0 A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^0) + \partial_b (\partial^b A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^b) \\
&= \partial_0 (F^{0R} - \Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (F^{bR} - \Upsilon \partial_R A^b) \\
&= \partial_0 (E^R - \Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (\varepsilon^{bRa} B_a - \Upsilon \partial_R A^b) \\
&= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \varepsilon^{Rba} \partial_b B_a - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b) \\
&= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - (\nabla \times \mathbf{B})^R - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b) \\
\Rightarrow \quad \dot{E}^R &= (\nabla \times \mathbf{B})^R + \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b),
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

se tiene una ecuación de movimiento para la componente E^R del campo eléctrico, que es similar a la ley de Ampere-Maxwell más términos extra.

De la ecuación (2.5.5), para $j = 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i F^{i0} - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^0 A_R - \partial_R A^0)) \\
&= \partial_b F^{b0} - \partial_R ((1 + \Upsilon) F^{0R}) \\
&= -\partial_b E^b - \partial_R ((1 + \Upsilon) E^R) \\
&= -\partial_b E^b - \partial_R E^R - \partial_R (\Upsilon E^R) \\
&= -\nabla \cdot \mathbf{E} - \partial_R (\Upsilon E^R) \\
\Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_R (\Upsilon E^R),
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

se tiene una ecuación de movimiento para el campo eléctrico, que es similar a la ley de Gauss más términos extra.

De la ecuación (2.5.5), para $j = b$,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i F^{ib} - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^b A_R - \partial_R A^b)) \\
&= \partial_0 F^{0b} + \partial_a F^{ab} - \partial_R ((1 + \Upsilon) F^{bR}) \\
&= \partial_0 E^b + \partial_a (\varepsilon^{abR} B_R) - \partial_R ((1 + \Upsilon) \varepsilon^{bRa} B_a) \\
&= \dot{E}^b - \varepsilon^{baR} \partial_a B_R - \varepsilon^{bRa} \partial_R B_a - \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a) \\
&= \dot{E}^b - \varepsilon^{ba\bar{j}} \partial_a B_{\bar{j}} - \varepsilon^{bR\bar{j}} \partial_R B_{\bar{j}} - \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a) \\
&= \dot{E}^b - \varepsilon^{b\bar{i}\bar{j}} \partial_{\bar{i}} B_{\bar{j}} - \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a) \\
&= \dot{E}^b - (\nabla \times \mathbf{B})^b - \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a) \\
\Rightarrow \quad \dot{E}^b &= (\nabla \times \mathbf{B})^b + \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a),
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

se tienen dos ecuaciones de movimiento para las componentes E^b del campo eléctrico, que son similares a la ley de Ampere-Maxwell más términos extra.

Cabe notar que, las ecuaciones de movimiento para el campo magnético se pueden obtener directamente de las identidades de Bianchi,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.5.12}$$

llegando a ser iguales a la ley de Gauss magnética,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{para } \mu = 0;$$

y a la ley de Faraday-Lenz,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \text{para } \mu = \bar{i} = R, 1, 2;$$

como sucede con la electrodinámica en el interior.

Finalmente, la ecuación (2.5.6), que corresponde a la condición de restricción a la frontera, se verá como,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\partial^i A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^i \right) \partial_R A_i \\
&= \left(\partial^0 A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) \partial_R A_0 + \left(\partial^b A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b \\
&= \left(\partial^0 A_R - \partial_R A^0 + \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) \partial_R A_0 + \left(\partial^b A_R - \partial_R A^b + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b \\
&= \left(F^{0R} + \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) \partial_R A_0 + \left(F^{bR} + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b \\
&= \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) \partial_R (-\Phi) + \left(\varepsilon^{bRa} B_a + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b \\
\Rightarrow 0 &= \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) \partial_R \Phi + \left(\varepsilon^{Rba} B_a - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b.
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Por tanto, el conjunto de ecuaciones de movimiento reescrito en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{B})^R &= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \\
(\nabla \times \mathbf{B})^b &= \dot{E}^b - \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a), \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_R (\Upsilon E^R), \\
0 &= \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) \partial_R \Phi + \left(\varepsilon^{Rba} B_a - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b.
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Nótese que si uno define las siguientes cantidades,

$$\begin{aligned}
J^R &:= -\partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \\
J^b &:= -\partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a), \\
\rho &:= -\partial_R (\Upsilon E^R),
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

donde las J^R y J^b se podrían interpretar como las componentes de una densidad de corriente \mathbf{J} , mientras que ρ se podría interpretar como una densidad de carga; entonces las ecuaciones de movimiento anteriores pasan a ser,

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{B})^R &= \dot{\mathbf{E}}^R + J^R, \\
(\nabla \times \mathbf{B})^b &= \dot{\mathbf{E}}^b + J^b, \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\
0 &= \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) \partial_R \Phi + \left(\varepsilon^{Rba} B_a - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b,
\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

que junto con,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

se llega a que el conjunto de ecuaciones de movimiento (2.5.16) y (2.5.17) es similar al conjunto de ecuaciones de Maxwell con fuentes, pero acompañadas de la condición de restricción a la frontera. Cabe mencionar que se partió de la electrodinámica sin fuentes, en el interior, y lo que se está

obteniendo en la frontera es una teoría similar a la electrodinámica con fuentes más la condición de restricción a la frontera.

Ahora bien, los términos que corresponderían a las fuentes, J^R , J^b y ρ , no son cualesquiera, sino que dependen funcionalmente de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , de forma directa e indirecta (por medio de los potenciales Φ y \mathbf{A}), pero también tienen dependencia de Υ , siendo esta una variable auxiliar que se emplea para introducir la condición de restricción a la frontera. Entonces, de lo ya comentado se puede inferir que los términos de fuente son inducidos por los campos eléctrico y magnético que están siendo restringidos a la frontera.

En otras palabras, se tiene el siguiente razonamiento: a pesar de que se partió de la electrodinámica sin fuentes (en el interior), al introducir la condición de restricción a la frontera para construir la teoría en la frontera, esta condición lo que hizo fue restringir la dinámica de los campos eléctrico y magnético a la frontera, lo cual modificó el comportamiento de los campos de tal modo que estos indujeron una densidad de corriente \mathbf{J} y una densidad de carga ρ , como si los propios \mathbf{E} y \mathbf{B} actuaran como fuentes. Es por ello que los términos de fuente, (2.5.15), son dependientes de \mathbf{E} , \mathbf{B} e Υ , esto es, son consecuencia de haber restringido a los campos a moverse en la frontera, de hecho, si tal restricción no existiera, teniendo que ser $\Upsilon = 0$, uno recupera de (2.5.16) y (2.5.17) nuevamente 4 ecuaciones, que serían las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

2.5.2. Condiciones asintóticamente planas

Una vez que se tienen las ecuaciones de movimiento, nótese que una de ellas, (2.5.6), corresponde a la condición de restricción a la frontera. Si esta ecuación se resuelve de manera general, lo que se puede obtener es una gran parte de las condiciones de frontera que hacen bien definido el principio de acción (2.5.1). Sin embargo, en estos momentos el propósito no es encontrar su solución general, sino revisar alguna solución particular con relevancia física.

A partir del estudio de los campos eléctricos y magnéticos en la naturaleza, se sabe que uno de los comportamientos que pueden tener las conexiones A_μ es de la forma:

$$A_\mu(t, r, \theta, \varphi) = A_\mu^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r}A_\mu^{(1)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2}A_\mu^{(2)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-3}), \quad (2.5.18)$$

donde se están usando coordenadas hiperesféricas. Cuando se toma el $\lim_{r \rightarrow \infty}$ se dice que los campos decaen asintóticamente.

Ahora bien, en el artículo [5] se analiza la región asintóticamente plana del electromagnetismo, (2.5.18) con $\lim_{r \rightarrow \infty}$, con el objetivo de mostrar que hay presencia de simetrías (asintóticas) en esta región, las cuales van a ser compatibles con las cargas de Poincaré. Para esto, se proponen unas condiciones de frontera apropiadas, las cuales se verifican que sean invariantes bajo el grupo $U(1)$ y el grupo de Poincaré, conservando así las simetrías del electromagnetismo. Sin embargo, para que se cumpla parte de lo anterior se debe agregar un grado de libertad superficial, el cual contribuirá a la estructura simpléctica.

Tomando en cuenta que la forma asintóticamente plana que se propone en [5] contiene relevancia física, como la conservación de las simetrías del electromagnetismo; y que además esta región asintótica, $\lim_{r \rightarrow \infty}$, se puede considerar como una frontera. Lo que se pretende realizar a continuación es verificar que, bajo las condiciones asintóticas que ellos proponen, el principio de acción (2.5.1) está bien definido, es decir, que hacen cero el término de frontera (2.5.7).

Cabe mencionar que, en [5] se hace un análisis de la región asintótica del electromagnetismo en la formulación hamiltoniana, pero como en esta sección se está trabajando en la formulación lagrangiana (solo las conexiones A_μ), entonces únicamente se hará uso de la propuesta que se da en [5] para las conexiones, dada por,

$$A_t(t, r, \theta, \varphi) = A_t^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r}A_t^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \quad (2.5.19)$$

$$A_R(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}A_R^{(1)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2}A_R^{(2)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-3}), \quad (2.5.20)$$

$$A_\Omega(t, r, \theta, \varphi) = A_\Omega^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r}A_\Omega^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \quad (2.5.21)$$

siendo $\Omega = \theta, \varphi$ un índice espacial y $x^\Omega = \theta, \varphi$ las coordenadas espaciales en la 2-esfera. Por simplicidad, se dejará de colocar la dependencia que tienen las $A_\mu^{(I)}$ con $I = 0, 1, 2, \dots$

Por otra parte, en [5] también se proponen las siguientes condiciones de paridad,

$$A_R^{(1)}(-x^\Omega) = -A_R^{(1)}(x^\Omega), \quad (2.5.22)$$

$$A_\Omega^{(0)}(-x^\Omega) = -A_\Omega^{(0)}(x^\Omega), \quad (2.5.23)$$

mientras que a los demás coeficientes no se les asigna condición de paridad alguna.

Un primer paso es verificar que las condiciones para los campos, (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21) en el $\lim_{r \rightarrow \infty}$, satisfacen la condición de restricción a la frontera, (2.5.6), lo que aseguraría que los grados de libertad no se propagan. Sustituyendo y realizando el álgebra correspondiente se llega a lo siguiente,

$$\left(\partial^i A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^i \right) \partial_R A_i = -\frac{1}{r^3} A_j^{(1)} \partial^j A_R^{(1)} + O(r^{-4}), \quad (2.5.24)$$

que será cero cuando se tome el $\lim_{r \rightarrow \infty}$. Entonces esta propuesta cumple con la condición de restricción a la frontera.

Antes de ver si las ecuaciones (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21) hacen cero el término de frontera que se obtuvo bajo la variación de la acción, (2.5.7), nótese lo siguiente. En este trabajo de tesis, para construir la teoría en la frontera de la electrodinámica se necesitó introducir una variable dinámica extra, Υ , para incluir la condición de restricción a la frontera, (2.4.2). En [5] esta variable dinámica no se contempla ya que el análisis realizado es completamente diferente al que se hace aquí, bajo tales consideraciones, hasta ahorita Υ no tiene ningún comportamiento asintótico. Sin embargo, en vista de que todos los campos tendrán ese comportamiento, no está de más suponer que esta variable dinámica sigue el mismo modelo, esto es, se puede suponer que,

$$\Upsilon(t, r, \theta, \varphi) = \Upsilon^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \Upsilon^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}). \quad (2.5.25)$$

Tomando en cuenta lo anterior, se procede con el cálculo de interés. Partiendo de (2.5.7), al descomponer la parte temporal y espacial se llega a,

$$\begin{aligned} \delta S_{EDB}|_{BT} = \kappa \int_{\mathcal{M}} & \left[-\partial_t (F^{t\theta} \delta A_\theta + F^{t\varphi} \delta A_\varphi + (\partial^t A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^t) \delta A_R) \right. \\ & - \partial_\theta (F^{\theta t} \delta A_t + F^{\theta\varphi} \delta A_\varphi + (\partial^\theta A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^\theta) \delta A_R) \\ & - \partial_\varphi (F^{\varphi t} \delta A_t + F^{\varphi\theta} \delta A_\theta + (\partial^\varphi A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^\varphi) \delta A_R) \\ & \left. + \partial_R ((1 + \Upsilon) ((\partial^t A_R - \partial_R A^t) \delta A_t + (\partial^\theta A_R - \partial_R A^\theta) \delta A_\theta \right. \\ & \left. + (\partial^\varphi A_R - \partial_R A^\varphi) \delta A_\varphi)) \right] dR dt r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Imponiendo las condiciones de frontera,

$$\delta A_R|_{t_1} = 0 = \delta A_R|_{t_2}; \quad \delta A_\theta|_{t_1} = 0 = \delta A_\theta|_{t_2}; \quad \delta A_\varphi|_{t_1} = 0 = \delta A_\varphi|_{t_2}; \quad (2.5.27)$$

el primer término de la expresión anterior se hace cero y $\delta S_{EDB}|_{BT}$ se reduce a,

$$\begin{aligned} \delta S_{EDB}|_{BT} = -\kappa \int_{\mathcal{M}} & [\partial_\theta (F^{\theta t} \delta A_t + F^{\theta\varphi} \delta A_\varphi + (\partial^\theta A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^\theta) \delta A_R) \\ & + \partial_\varphi (F^{\varphi t} \delta A_t + F^{\varphi\theta} \delta A_\theta + (\partial^\varphi A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^\varphi) \delta A_R) \\ & - \partial_R ((1 + \Upsilon) ((\partial^t A_R - \partial_R A^t) \delta A_t + (\partial^\theta A_R - \partial_R A^\theta) \delta A_\theta \\ & + (\partial^\varphi A_R - \partial_R A^\varphi) \delta A_\varphi))] dR dt r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

Ahora bien, al sustituir las expresiones (2.5.19), (2.5.20), (2.5.21) y (2.5.25) en (2.5.28) y simplificar, quedarán algunos términos que estarán acompañados de r^2 , r^1 , r^0 y $\frac{1}{r}$, por lo que no se harán cero cuando se tome el $\lim_{r \rightarrow \infty}$, el último caso debido a la integración en r , quedando $\ln(r)$. En consecuencia, habrá que buscar una forma en que se hagan cero tales términos y para esto se emplean las condiciones de paridad. En otras palabras, lo que se desea es hallar las condiciones de paridad, en θ y φ , para las variables $A_\mu^{(I)}$ y $\Upsilon^{(I)}$ que acompañan a los términos restantes que no se hacen cero cuando se toma el $\lim_{r \rightarrow \infty}$, de tal manera que se sus integrales correspondientes sean las que se hagan cero, tomando en cuenta que los límites de integración en las coordenadas angulares son simétricos, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

En principio, en el artículo [5] ya se proporcionan algunas condiciones de paridad, (2.5.22) y (2.5.21), sin embargo, una vez que se ha sustituido la forma asintótica de las variables dinámicas en el término de frontera, (2.5.28), y se ha simplificado, uno llega a que esas condiciones propuestas no son suficientes, ya que no todas las expresiones resultantes se hacen cero, esto es, se requiere proponer algunas extras. Además, hay un solo término que no se hace cero bajo las condiciones de paridad que se proponen en tal artículo,

$$\kappa \int_{\mathcal{M}} \partial_R \left(\frac{1 + \Upsilon^{(0)}}{r} \partial^\theta A_R^{(1)} \delta A_\theta^{(0)} \right) dR dt r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.5.29)$$

por lo que, para que este término en particular se haga cero, lo que en este trabajo de tesis se propone es que simplemente $A_\theta^{(0)}$ sea un escalar, así $\delta A_\theta^{(0)}$ será igual a cero y no se tendrá que lidiar con modificar su paridad.

Por otra parte, las condiciones de paridad que deben tener los demás términos $A_\mu^{(I)}$ y $\Upsilon^{(I)}$, que acompañan a los r^2 , r^1 , r^0 y $\frac{1}{r}$, para que hagan bien definido el principio de acción (2.5.1), es decir para que hagan cero el término de frontera (2.5.28), son las siguientes:

$A_R^{(1)}$ – impar en θ e impar en φ		$A_t^{(0)}$ – impar en θ y par en φ
$A_R^{(2)}$ – impar en θ y par en φ		$A_t^{(1)}$ – “
$\Upsilon^{(0)}$ – par en θ y par en φ		$A_t^{(2)}$ – “
$\Upsilon^{(1)}$ – impar en θ y par en φ		$A_t^{(3)}$ – “
$A_\theta^{(0)}$ – Escalar Antes : impar en θ y φ		$A_\varphi^{(0)}$ – impar en θ e impar en φ
$A_\theta^{(1)}$ – par en θ y par en φ		$A_\varphi^{(1)}$ – “
$A_\theta^{(2)}$ – cualquiera de los dos casos anteriores		$A_\varphi^{(2)}$ – “
$A_\theta^{(3)}$ – cualquiera de los dos casos anteriores		$A_\varphi^{(3)}$ – “

(2.5.30)

Donde ya se están considerando las condiciones de paridad propuestas en [5] y la corrección necesaria para $A_\theta^{(0)}$. Así, las condiciones de frontera, (2.5.21), (2.5.27) y (2.5.30), hacen bien definido

el principio de acción de la electrodinámica en la frontera, (2.5.1), siendo la frontera la región asintótica, $\lim_{r \rightarrow \infty}$, que también se conoce como el infinito espacial.

2.6. Análisis hamiltoniano

En esta sección se va a realizar un análisis hamiltoniano del principio de acción (2.5.1), esto es, se aplicará el algoritmo de Dirac-Bergmann⁸ al principio de acción de la electrodinámica en la frontera. Pero para esto, será necesario proyectar nuevamente el principio de acción, (2.5.1), solo que ahora será en una familia de superficies espacialoides, siendo el vector normal a estas temporaloide. Por lo cual, el operador de proyección empleado en este caso estará dado como,

$$P_i^j = \delta_i^j + T_i T^j, \quad (2.6.1)$$

con $\mathbf{T} = T^i \partial_i$ el vector temporaloide normal a la familia de superficies espacialoides y T^i sus correspondientes componentes. Note que en P_j^i , (1.1.2), $\sigma = -1$ pues para esta proyección $\mathbf{n} = \mathbf{T}$ es temporaloide.

Debido a que el principio de acción (2.5.1) consta de 3 términos, entonces se va a calcular la proyección de cada término por separado como sigue:

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}^{ij} &:= P_i^k P_j^l F_{kl} P_m^i P_n^j F^{mn} \\ &= P_i^k P_m^i P_j^l P_n^j F_{kl} F^{mn} \\ &= P_m^k P_n^l F_{kl} F^{mn} \\ &= (\delta_m^k + T_m T^k) (\delta_n^l + T_n T^l) F_{kl} F^{mn} \\ &= (\delta_m^k \delta_n^l + \delta_m^k T_n T^l + \delta_n^l T_m T^k + T_m T^k T_n T^l) F_{kl} F^{mn} \\ &= F_{kl} F^{kl} + F_{kl} T^l F^{kn} T_n + T^k F_{kl} T_m F^{ml} + T^k T^l T_m T_n F_{kl} F^{mn} \\ &= F_{kl} F^{kl} + 2F_{kl} T^l F^{kn} T_n \\ \Rightarrow F_{kl} F^{kl} &= \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}^{ij} - 2F_{kl} T^l F^{kn} T_n. \end{aligned}$$

En estos cálculos se han usado propiedades del operador de proyección, $P_i^k P_m^i = P_m^k$, y el hecho de que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es igual a cero. Además, el término \mathcal{F}_{ij} se define como la parte de F_{ij} que es completamente tangente a la familia de superficies. Si ahora se usa la relación, $F_{jm} T^m = \partial_j (T^m A_m) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A_j$, se tiene,

$$\Rightarrow F_{kl} F^{kl} = \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}^{ij} - 2(\partial_k (T^m A_m) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A_k) (\partial^k (T^n A_n) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A^k). \quad (2.6.2)$$

2.

$$\begin{aligned} 2\bar{\partial}_i A_R \bar{\partial}^i A_R &:= 2P_i^k \partial_k A_R P_l^i \partial^l A_R \\ &= 2P_i^k P_l^i \partial_k A_R \partial^l A_R \\ &= 2P_l^k \partial_k A_R \partial^l A_R \\ &= 2(\delta_l^k + T_l T^k) \partial_k A_R \partial^l A_R \\ &= 2\partial_k A_R \partial^k A_R + 2T^k \partial_k A_R T_l \partial^l A_R \\ \Rightarrow 2\partial_k A_R \partial^k A_R &= 2\bar{\partial}_i A_R \bar{\partial}^i A_R - 2T^k \partial_k A_R T_l \partial^l A_R. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

⁸Consultar [24, 25] para información más detallada sobre el algoritmo de Dirac-Bergmann.

3.

$$\begin{aligned}
& -2(1 + \Upsilon) (2\bar{\partial}^i A_R - \partial_R \bar{A}^i) \partial_R \bar{A}_i := -2(1 + \Upsilon) (2P_l^i \partial^l A_R - \partial_R P_l^i A^l) \partial_R P_i^k A_k \\
& \quad = -2(1 + \Upsilon) P_l^i P_i^k (2\partial^l A_R - \partial_R A^l) \partial_R A_k \\
& \quad = -2(1 + \Upsilon) P_l^k (2\partial^l A_R - \partial_R A^l) \partial_R A_k \\
& \quad = -2(1 + \Upsilon) (\delta_l^k + T_l T^k) (2\partial^l A_R - \partial_R A^l) \partial_R A_k \\
& \quad = -2(1 + \Upsilon) (2\partial^k A_R - \partial_R A^k) \partial_R A_k \\
& \quad \quad - 2(1 + \Upsilon) (2T_l \partial^l A_R - \partial_R T_l A^l) \partial_R T^k A_k \\
\Rightarrow \quad & -2(1 + \Upsilon) (2\partial^k A_R - \partial_R A^k) \partial_R A_k = -2(1 + \Upsilon) (2\bar{\partial}^i A_R - \partial_R \bar{A}^i) \partial_R \bar{A}_i \\
& \quad + 2(1 + \Upsilon) (2T_l \partial^l A_R - \partial_R T_l A^l) \partial_R T^k A_k.
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Por lo tanto, de los resultados obtenidos en (2.6.2), (2.6.3) y (2.6.4), el principio de acción (2.5.1) proyectado en la familia de superficies espacialoides va a estar dado como,

$$\begin{aligned}
S_{ED-B2}[A_R, A_i, \Upsilon] = & -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}^{ij} - 2(\partial_k (T^m A_m) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A_k) (\partial^k (T^n A_n) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A^k) \\
& + 2\bar{\partial}_i A_R \bar{\partial}^i A_R - 2T^k \partial_k A_R T_l \partial^l A_R \\
& - 2(1 + \Upsilon) (2\bar{\partial}^i A_R - \partial_R \bar{A}^i) \partial_R \bar{A}_i \\
& + 2(1 + \Upsilon) (2T_l \partial^l A_R - \partial_R T_l A^l) \partial_R T^k A_k] dR d^3 x.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Usando ahora coordenadas adaptadas a la foliación⁹, $\partial_t = \mathcal{L}_{\mathbf{T}} = T^i \partial_i$ y $A_t := T^i A_i$, mientras que los índices latinos¹⁰, $a = 1, 2$, van a etiquetar coordenadas espaciales arbitrarias en cada una de las superficies espacialoides. Además, como \mathcal{F}_{ij} es un término completamente tangente a la familia de superficies, entonces al usar coordenadas adaptadas este término se puede redefinir como $\mathcal{F}_{ij} := F_{ab}$, pues los índices a, b etiquetan coordenadas en las superficies. De esta manera, el principio de acción (2.6.5) de la electrodinámica en la frontera pasa a ser,

$$\begin{aligned}
S_{EDB2}[A_t, A_R, A_a, \Upsilon] = & -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [F_{ab} F^{ab} - 2(\partial_a A_t - \partial_t A_a) (\partial^a A_t - \partial_t A^a) \\
& + 2\partial_a A_R \partial^a A_R - 2\partial_t A_R \partial_t A_R \\
& - 2(1 + \Upsilon) (2\partial^a A_R - \partial_R A^a) \partial_R A_a \\
& + 2(1 + \Upsilon) (2\partial_t A_R - \partial_R A_t) \partial_R A_t] dt dR d^2 x,
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

con $dt dR d^2 x := dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dR$ y donde se identifica la densidad lagrangiana de la teoría¹¹,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EDB} = & -\frac{\kappa}{2} \left[\frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} - (\partial_a A_t - \partial_t A_a) (\partial^a A_t - \partial_t A^a) + \partial_a A_R \partial^a A_R - \partial_t A_R \partial_t A_R \right. \\
& \quad \left. - (1 + \Upsilon) (2\partial^a A_R - \partial_R A^a) \partial_R A_a + (1 + \Upsilon) (2\partial_t A_R - \partial_R A_t) \partial_R A_t \right] \\
= & -\frac{\kappa}{2} \left[\frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} - (\partial_a A_t - \dot{A}_a) (\partial^a A_t - \dot{A}^a) + \partial_a A_R \partial^a A_R - \dot{A}_R \dot{A}_R \right. \\
& \quad \left. - (1 + \Upsilon) (2\partial^a A_R - \partial_R A^a) \partial_R A_a + (1 + \Upsilon) (2\dot{A}_R - \partial_R A_t) \partial_R A_t \right]
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

⁹Usar coordenadas adaptadas a la foliación quiere decir que, se está eligiendo trabajar en un sistema de referencia con base coordenada (t, x^1, x^2, R) donde ahora el eje temporal tiene la misma dirección que la del vector normal a las superficies espacioaloides, \mathbf{T}

¹⁰En este capítulo y los siguientes, los índices latinos, con letras minúsculas de la a a la h , van a etiquetar coordenadas espaciales arbitrarias en las superficies espacialoides de 2 dimensiones.

¹¹A continuación, en este capítulo y en los siguientes se va a utilizar la siguiente definición, $\partial_t \mathcal{A}_{\Xi} := \dot{\mathcal{A}}_{\Xi}$, para cualquier \mathcal{A}_{Ξ} variable dinámica.

2.6.1. Matriz Hessiana

Una vez que se cuenta con la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{EDB} , se procede a revisar si la teoría es singular o no, para ello se calcula la matriz hessiana,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t \Upsilon)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{\Upsilon}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

donde, debido a la forma en que está dada \mathcal{L}_{EDB} , (2.6.7), las componentes de esta matriz que son distintas de cero van a estar dadas por,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R} = -\frac{\kappa}{2} \left[-2\dot{A}_R + 2(1 + \Upsilon)\partial_R A_t \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_R} = \kappa \quad (2.6.9)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^b} = -\frac{\kappa}{2} \left[2 \left(\partial_b A_t - \dot{A}_b \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}^b} = \kappa \delta_{ab}, \quad (2.6.10)$$

de manera que, la matriz hessiana \mathbf{H} es,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{H} = 0, \quad (2.6.11)$$

por lo cual, se concluye que la teoría es singular, así que se procede a emplear el algoritmo de Dirac-Bergmann para estudiar esta teoría en la formulación hamiltoniana.

2.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias

Dada la forma de la matriz hessiana, (2.6.11), se tiene que el $\text{Rango}(\mathbf{H}) = 3$ y la $\text{Nulidad}(\mathbf{H}) = 2$, lo cual nos garantiza que se van a poder despejar 3 \dot{A}_Ξ y que además se esperan 2 restricciones primarias.

Calculando los momentos canónicos,

$$\Pi_R := \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_R} = \kappa \left[\dot{A}_R - (1 + \Upsilon)\partial_R A_t \right] \quad \Rightarrow \quad \dot{A}_R = \frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon)\partial_R A_t, \quad (2.6.12)$$

$$\Pi_b := \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}^b} = \kappa \left[\dot{A}_b - \partial_b A_t \right] \quad \Rightarrow \quad \dot{A}_b = \frac{\Pi_b}{\kappa} + \partial_b A_t, \quad (2.6.13)$$

$$\Pi_t := \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{A}_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_t := \Pi_t \approx 0, \quad (2.6.14)$$

$$\Pi_\Upsilon := \frac{\partial \mathcal{L}_{EDB}}{\partial \dot{\Upsilon}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_\Upsilon := \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (2.6.15)$$

se comprueban entonces los resultados comentados anteriormente, ya que se pudieron despejar 3 \dot{A}_Ξ y se obtuvieron 2 restricciones primarias, ϕ_t y ϕ_Υ .

2.6.3. Condiciones de regularidad

Ahora que se cuenta con las restricciones primarias, que presenta esta teoría, ϕ_t y ϕ_Υ , se requiere que cumplan con las condiciones de regularidad. Fijándose en la matriz jacobiana,

$$\left(\frac{\partial(\phi_t, \phi_\Upsilon)}{\partial(A_t, A_R, A^b, \Upsilon, \Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6.16)$$

se puede ver que esta tiene rango constante e igual a 2, la misma cantidad de restricciones primarias independientes encontradas. Así, se concluye que ϕ_t y ϕ_Υ , dadas por (2.6.14) y (2.6.15) respectivamente, van a definir una subvariedad de dimensión 8 en el espacio fase $(A_\Xi, \Pi_\Xi)^{12}$.

2.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria

Se procede a definir la hamiltoniana canónica, H_C , la cual solo está bien definida en la superficie de restricciones primarias. Cabe notar que, para calcular esta hamiltoniana se van a emplear los resultados obtenidos en la definición de los momentos canónicos y a la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{EDB} , de esta manera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_C &:= \int \mathcal{H}_C d^3y \\ &= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{L}_{EDB} \right] d^3y \\ &= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} - (\partial_b A_t - \dot{A}_b) (\partial^b A_t - \dot{A}^b) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_b A_R \partial^b A_R - \dot{A}_R \dot{A}_R - (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \Upsilon) (2\dot{A}_R - \partial_R A_t) \partial_R A_t \right) \right] d^3y \\ &= \int \left[\Pi_R \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \right) + \Pi_b \left(\frac{\Pi_b}{\kappa} + \partial^b A_t \right) + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \left(-\frac{\Pi_b}{\kappa} \right) \left(-\frac{\Pi^b}{\kappa} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \right) \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \left(2 \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \right) - \partial_R A_t \right) \partial_R A_t \right] d^3y \\ &= \int \left[\frac{1}{\kappa} \Pi_R \Pi_R + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \frac{1}{\kappa} \Pi_b \Pi^b + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon)^2 \partial_R A_t \partial_R A_t \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \right. \\ &\quad \left. + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \kappa (1 + \Upsilon)^2 \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \right] d^3y, \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

¹²Por simplicidad, se van a denotar al conjunto de campos y de momentos como: $A_\Xi = (A_t, A_R, A_b, \Upsilon)$ y $\Pi_\Xi = (\Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)$ respectivamente.

por lo tanto,

$$H_C = \int \left[\frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \right] d^3 y, \quad (2.6.18)$$

Ahora bien, una vez que se ha calculado H_C , se define la hamiltoniana primaria,

$$H_1 := H_C + \int [\lambda_t \phi_t + \lambda_\Upsilon \phi_\Upsilon] d^3 y \\ = \int \left[\frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b + \lambda_t \Pi_t + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon \right] d^3 y, \quad (2.6.19)$$

con $(\lambda_t, \lambda_\Upsilon)$ los multiplicadores de Lagrange y (ϕ_t, ϕ_Υ) las restricciones primarias.

2.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Ahora que se cuenta con la hamiltoniana primaria, lo que sigue es comprobar que las restricciones primarias, (2.6.14) y (2.6.15), cumplan con las condiciones de consistencia, es decir, que no cambien con el tiempo,

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_1\} \approx 0. \quad (2.6.20)$$

Un resultado directo que proporcionan las condiciones de consistencia es que se pueden identificar explícitamente las restricciones secundarias, en caso de que las haya.

Por simplicidad, en los cálculos posteriores se hace uso de los paréntesis de Poisson fundamentales, siendo los únicos distintos de cero ¹³,

$$\{A_t(x^0, \vec{x}), \Pi_t(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \quad (2.6.21)$$

$$\{A_R(x^0, \vec{x}), \Pi_R(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \quad (2.6.22)$$

$$\{A_a(x^0, \vec{x}), \Pi^b(x^0, \vec{y})\} = \delta_a^b \delta^3(x - y), \quad (2.6.23)$$

$$\{\Upsilon(x^0, \vec{x}), \Pi_\Upsilon(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y). \quad (2.6.24)$$

Entonces, las condiciones de consistencia para cada restricción están dadas como sigue.

Para la restricción primaria ϕ_t ,

¹³Los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales son iguales a cero:

$$\{A_\Xi(x^0, \vec{x}), A_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0 = \{\Pi_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\}, \\ \{A_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0, \text{ si los índices } \Xi \neq \Theta,$$

donde $\Xi, \Theta = t, R, b, \Upsilon$, no olvidando también que $b = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_t(x) &= \{\phi_t(x), H_1\} = \int \{\phi_t(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3y \\
&= \int \{\Pi_t, (1 + \Upsilon)\Pi_R \partial_R A_t + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t\} d^3y \\
&= \int [(1 + \Upsilon)\Pi_R \{\Pi_t, \partial_R A_t\} + \Pi_b \{\Pi_t, \partial^b A_t\} + \kappa \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \{\Pi_t, \partial_R A_t\}] d^3y \\
&= - \int [(1 + \Upsilon)\Pi_R \partial_R \delta^3(x - y) + \Pi_b \partial^b \delta^3(x - y) + \kappa \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R \delta^3(x - y)] d^3y \\
&= \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.6.25}$$

se encuentra una restricción secundaria,

$$\psi_t := \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \approx 0. \tag{2.6.26}$$

Para la restricción primaria ϕ_Υ ,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_\Upsilon(x) &= \{\phi_\Upsilon(x), H_1\} = \int \{\phi_\Upsilon(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3y \\
&= \int \{\Pi_\Upsilon, (1 + \Upsilon)\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b\} d^3y \\
&= \int \left[\Pi_R \partial_R A_t \{\Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon\} + \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \{\Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon\} + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \{\Pi_\Upsilon, \Upsilon\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa}{2} (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \{\Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon\} \right] d^3y \\
&= - \int \left[\Pi_R \partial_R A_t \delta^3(x - y) + \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \delta^3(x - y) + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \delta^3(x - y) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa}{2} (2\partial^b A_R - \partial_R A^b) \partial_R A_b \delta^3(x - y) \right] d^3y \\
&= -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \\
&= -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t,
\end{aligned} \tag{2.6.27}$$

se encuentra otra restricción secundaria,

$$\psi_\Upsilon := -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t \approx 0. \tag{2.6.28}$$

Dados los resultados anteriores, como se encontraron dos restricciones secundarias, (2.6.26) y (2.6.28), va a ser necesario definir la hamiltoniana secundaria,

$$H_2 := H_1 + \int [\tilde{\lambda}_t \psi_t + \tilde{\lambda}_\Upsilon \psi_\Upsilon] d^3y, \tag{2.6.29}$$

y verificar que estas restricciones (ψ_t, ψ_Υ) cumplan con las condiciones de consistencia,

$$\dot{\Psi} = \{\Psi, H_2\} \approx 0, \tag{2.6.30}$$

donde $(\tilde{\lambda}_t, \tilde{\lambda}_\Upsilon)$ son multiplicadores de Lagrange.

Entonces, para la restricción ψ_t ,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_t(x) &= \{\psi_t(x), H_2\} = \int \{\psi_t(x), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\
&= \int \{\partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^c \Pi_c + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t), \\
&\quad \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b + \lambda_t \Pi_t + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon\} d^3y \\
&= \int \left[\{\partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R), \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R\} + \{\partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R), -\kappa(1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial^b A_R \partial_R A_b\} \right. \\
&\quad + \{\partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R), \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon\} + \{\partial^c \Pi_c, \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab}\} \\
&\quad + \{\partial^c \Pi_c, \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b\} \\
&\quad \left. + \{\kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t), \lambda_t \Pi_t\} + \{\kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t), \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon\} \right] d^3y \\
&= \int \left[\partial_R \left((1 + \Upsilon) \kappa \partial_b A_R \partial^b \{\Pi_R, A_R\} \right) - \partial_R \left((1 + \Upsilon) \kappa (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_R A_b \partial^b \{\Pi_R, A_R\} \right) \right. \\
&\quad + \partial_R (\Pi_R \lambda_\Upsilon \{1 + \Upsilon, \Pi_\Upsilon\}) + \partial^c (\kappa F_{ab} \partial^a \{\Pi_c, A^b\}) \\
&\quad + \partial^c \left(\kappa (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_R A_b \partial_R \{\Pi_c, A^b\} \right) - \partial^c \left(\kappa (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial^b A_R \partial_R \{\Pi_c, A_b\} \right) \\
&\quad + \kappa \partial_R (\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R (\lambda_t \{A_t, \Pi_t\})) + \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t \lambda_\Upsilon \{\Upsilon, \Pi_\Upsilon\}) \\
&\quad \left. + \kappa \partial_R (\Upsilon \partial_R A_t \lambda_\Upsilon \{(1 + \Upsilon), \Pi_\Upsilon\}) \right] d^3y \\
&= \kappa \partial_R \left((1 + \Upsilon) \partial^b \partial_b A_R \right) - \kappa \partial_R \left((1 + \Upsilon) \partial^b \left((1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_R A_b \right) \right) + \partial_R (\Pi_R \lambda_\Upsilon) \\
&\quad + \kappa \partial^b \partial^a F_{ab} + \kappa \partial^b \left(\partial_R \left((1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_R A_b \right) \right) - \kappa \partial^b \left(\partial_R \left((1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_b A_R \right) \right) \\
&\quad + \kappa \partial_R (\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R \lambda_t) + \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t \lambda_\Upsilon) + \kappa \partial_R (\Upsilon \partial_R A_t \lambda_\Upsilon) \\
&= \kappa \partial_R \left[(1 + \Upsilon) \partial^b \left(\partial_b A_R - (1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) \partial_R A_b \right) + \frac{1}{\kappa} \Pi_R \lambda_\Upsilon + \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R \lambda_t \right. \\
&\quad \left. + (1 + \Upsilon) \lambda_\Upsilon \partial_R A_t + \Upsilon \lambda_\Upsilon \partial_R A_t + \partial^b \left((1 + \Upsilon - \tilde{\lambda}_\Upsilon) (\partial_R A_b - \partial_b A_R) \right) \right] \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.6.31}$$

se obtiene una ecuación para poder determinar algún multiplicador de Lagrange, de manera que ya no habrá restricciones secundarias.

Para la restricción ψ_Υ ,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_\Upsilon(x) &= \{\psi_\Upsilon(x), H_2\} = \int \{\psi_\Upsilon(x), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\
&= \int \left\{ -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} \partial_R A^c \partial_R A_c + \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
&\quad \left. - \kappa (1 + \Upsilon) \partial^b A_R \partial_R A_b + \lambda_t \Pi_t + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon + \tilde{\lambda}_t \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \tilde{\lambda}_t \partial^b \Pi_b \right\} d^3y \\
&= \int \left[\left\{ -\Pi_R \partial_R A_t, \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right\} + \left\{ -\Pi_R \partial_R A_t, -\kappa (1 + \Upsilon) \partial^b A_R \partial_R A_b \right\} \right. \\
&\quad + \left\{ -\Pi_R \partial_R A_t, \lambda_t \Pi_t \right\} + \left\{ -\frac{\kappa}{2} \partial_R A^c \partial_R A_c, \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b \right\} + \left\{ -\frac{\kappa}{2} \partial_R A^c \partial_R A_c, \Pi_b \partial^b A_t \right\} \\
&\quad + \left\{ -\frac{\kappa}{2} \partial_R A^c \partial_R A_c, \tilde{\lambda}_t \partial^b \Pi_b \right\} + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R \right\} + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b \right\} \\
&\quad + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t \right\} + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, \Pi_b \partial^b A_t \right\} \\
&\quad + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, \tilde{\lambda}_t \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) \right\} + \left\{ \kappa \partial^c A_R \partial_R A_c, \tilde{\lambda}_t \partial^b \Pi_b \right\} \\
&\quad \left. + \left\{ -\kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t, \lambda_t \Pi_t \right\} + \left\{ -\kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t, \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon \right\} \right] d^3y \\
&= \int \left[-\partial_R A_t \kappa \partial_b A_R \partial^b \{ \Pi_R, A_R \} + \partial_R A_t \kappa (1 + \Upsilon) \partial_R A_b \partial^b \{ \Pi_R, A_R \} \right. \\
&\quad - \Pi_R \partial_R (\lambda_t \{ A_t, \Pi_t \}) - \partial_R A_c \partial_R (\Pi^b \{ A^c, \Pi_b \}) - \kappa \partial_R A_c \partial_R (\partial^b A_t \{ A^c, \Pi_b \}) \\
&\quad - \kappa \partial_R A_c \partial_R (\tilde{\lambda}_t \partial^b \{ A^c, \Pi_b \}) + \partial_R A_c \partial^c (\Pi_R \{ A_R, \Pi_R \}) + \partial^c A_R \partial_R (\Pi_b \{ A_c, \Pi^b \}) \\
&\quad + \kappa \partial_R A_c \partial^c ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t \{ A_R, \Pi_R \}) + \kappa \partial^c A_R \partial_R (\partial^b A_t \{ A_c, \Pi_b \}) \\
&\quad + \kappa \partial_R A_c \partial^c (\tilde{\lambda}_t \partial_R ((1 + \Upsilon) \{ A_R, \Pi_R \})) + \kappa \partial^c A_R \partial_R (\tilde{\lambda}_t \partial^b \{ A_c, \Pi_b \}) \\
&\quad \left. - 2\kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R (\lambda_t \{ A_t, \Pi_t \}) - \kappa \partial_R A_t \partial_R A_t \lambda_\Upsilon \left\{ \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right), \Pi_\Upsilon \right\} \right] d^3y \\
&= -\kappa \partial_R A_t \partial^b \partial_b A_R + \kappa \partial_R A_t \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b) - \Pi_R \partial_R \lambda_t - \partial_R A_b \partial_R \Pi^b \\
&\quad - \kappa \partial_R A_b \partial_R \partial^b A_t + \kappa \partial_R A_b \partial_R \partial^b \tilde{\lambda}_t + \partial_R A_b \partial^b \Pi_R + \partial^b A_R \partial_R \Pi_b \\
&\quad + \kappa \partial_R A_b \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t) + \kappa \partial^b A_R \partial_R \partial_b A_t - \kappa \partial_R A_b \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R \tilde{\lambda}_t) \\
&\quad - \kappa \partial^b A_R \partial_R \partial_b \tilde{\lambda}_t - 2\kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R \lambda_t - \kappa \partial_R A_t \partial_R A_t \lambda_\Upsilon \\
&= -\Pi_R \partial_R \lambda_t + \partial^b A_R \partial_R (\Pi_b + \kappa \partial_b (A_t - \tilde{\lambda}_t)) \\
&\quad - \kappa \partial_R A_t (\partial^b (\partial_b A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A_b) + (1 + 2\Upsilon) \partial_R \lambda_t + \lambda_\Upsilon \partial_R A_t) \\
&\quad + \partial_R A_b (\partial^b \Pi_R - \partial_R \Pi^b + \kappa \partial_R \partial^b (\tilde{\lambda}_t - A_t) + \kappa \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R (A_t - \tilde{\lambda}_t))) \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.6.32}$$

se obtiene una ecuación para poder determinar algún multiplicador de Lagrange, de manera que ya no habrá restricciones secundarias.

Finalmente, de los dos resultados anteriores se concluye que ya no hay más restricciones secundarias, por lo tanto, esta teoría presenta 4 restricciones, $(\phi_t, \phi_\Upsilon, \psi_t, \psi_\Upsilon)$.

2.6.6. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez que se han encontrado todas las restricciones que presenta la teoría, (2.6.14), (2.6.15), (2.6.26) y (2.6.28); el siguiente paso es separarlas en restricciones de primera y segunda clase, para lo cual será necesario calcular los paréntesis de Poisson de cada una de las restricciones con todas las demás. Haciendo uso nuevamente de los paréntesis de Poisson fundamentales, uno obtiene lo siguiente:

- (I) $\{\phi_t, \phi_t\} = \{\Pi_t, \Pi_t\} = 0$; $\{\phi_\Upsilon, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_\Upsilon, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (II) $\{\phi_t, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_t, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (III) $\{\psi_t, \phi_t\} = \kappa \partial_R [\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R \delta^3(x - y)]$
- (IV) $\{\psi_t, \phi_\Upsilon\} = \partial_R [(\Pi_R + \kappa(1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta^3(x - y)]$
- (V) $\{\psi_\Upsilon, \phi_t\} = -(\Pi_R + \kappa(1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \partial_R \delta^3(x - y)$
- (VI) $\{\psi_\Upsilon, \phi_\Upsilon\} = -\kappa \partial_R A_t \partial_R A_t \delta^3(x - y)$
- (VII) $\{\psi_t, \psi_t\} = 0$; $\{\psi_\Upsilon, \psi_\Upsilon\} = 0$
- (VIII) $\{\psi_t, \psi_\Upsilon\} = \kappa \partial_R [\Upsilon \partial^b (\partial_R A_b \delta^3(x - y)) + \partial^b (\partial_b A_R \delta^3(x - y))]$

Por lo tanto, de los resultados anteriores se concluye que todas las restricciones, (2.6.14), (2.6.15), (2.6.26) y (2.6.28), son de segunda clase, de modo que uno las puede redefinir como,

$$\chi_t := \phi_t = \Pi_t \approx 0, \quad (2.6.33)$$

$$\chi_\Upsilon := \phi_\Upsilon = \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (2.6.34)$$

$$\tilde{\chi}_t := \psi_t = \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \approx 0, \quad (2.6.35)$$

$$\tilde{\chi}_\Upsilon := \psi_\Upsilon = -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t \approx 0. \quad (2.6.36)$$

Nótese que entonces la teoría de la electrodinámica sin fuentes en la frontera no presenta simetría de norma, algo que sí ocurre en la electrodinámica sin fuentes en el interior, ya que presenta 2 restricciones de primera clase y ninguna de segunda clase.

2.6.7. Grados de libertad

Separadas las restricciones entre de primera y segunda clase, se procede a realizar el conteo de grados de libertad, el cual se calcula como sigue:

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) \right]. \quad (2.6.37)$$

Así, para la electrodinámica sin fuentes en la frontera, que tiene 4 restricciones de segunda clase, se tiene que:

$$GL = \frac{1}{2} [10 - 2(0) - 4] = 3. \quad (2.6.38)$$

Este resultado hace evidente la diferencia entre la dinámica de la electrodinámica en la frontera y el interior. Puesto que, la primera presenta un grado de libertad extra comparada con la segunda, que solo tiene dos grados de libertad. Más adelante se abordará el análisis sobre a qué corresponden estos tres grados de libertad, pero por el momento se prosigue con la obtención de las ecuaciones de movimiento generales.

2.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas

Se define la acción extendida como,

$$\begin{aligned}
S_E [A_R, A_t, A^b, \Upsilon, \Pi_R, \Pi_t, \Pi_b, \Pi_\Upsilon, u_t, u_\Upsilon, \tilde{u}_t, \tilde{u}_\Upsilon] \\
&:= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{H}_C - u_t \chi_t - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t - \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon \right] dt dR d^2x \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi_b \right. \\
&\quad - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t - \Pi_b \partial^b A_t - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \\
&\quad - u_t \Pi_t - u_\Upsilon \Pi_\Upsilon - \tilde{u}_t (\partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t)) \\
&\quad \left. + \tilde{u}_\Upsilon \left(\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b + \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right) \right] dt dR d^2x,
\end{aligned} \tag{2.6.39}$$

donde se puede identificar a la hamiltoniana extendida, dada por,

$$\begin{aligned}
H_E &:= \int [\mathcal{H}_C + u_t \chi_t + u_\Upsilon \chi_\Upsilon + \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t + \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon] d^3y \\
&= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi_b + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_b \partial^b A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \\
&\quad + u_t \Pi_t + u_\Upsilon \Pi_\Upsilon + \tilde{u}_t (\partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t)) \\
&\quad \left. - \tilde{u}_\Upsilon \left(\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b + \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right) \right] d^3y.
\end{aligned} \tag{2.6.40}$$

siendo $u_t, u_\Upsilon, \tilde{u}_t$ y \tilde{u}_Υ multiplicadores de Lagrange.

Cabe notar que, tanto la acción extendida S_E como la hamiltoniana extendida H_E contienen toda la información de esta teoría. Ahora bien, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener empleando ambas, pero en este caso se van a calcular a partir de la variación de la acción S_E . Siendo así, el desarrollo está dado como,

$$\begin{aligned}
\delta S_E = \int_{\mathcal{M}} & \left[\dot{A}_t \delta \Pi_t + \Pi_t \delta \dot{A}_t + \dot{A}_R \delta \Pi_R + \Pi_R \delta \dot{A}_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b + \Pi_b \delta \dot{A}^b + \dot{\Upsilon} \delta \Pi_\Upsilon + \Pi_\Upsilon \delta \dot{\Upsilon} \right. \\
& - \frac{1}{\kappa} \Pi_R \delta \Pi_R - \frac{1}{\kappa} \Pi^b \delta \Pi_b - \Pi_R \partial_R A_t \delta \Upsilon - (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \delta \Pi_R - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R \delta A_t \\
& - \partial^b A_t \delta \Pi_b - \Pi_b \partial^b \delta A_t - \kappa F_{ab} \partial^a \delta A^b - \kappa \partial_b A_R \partial^b \delta A_R - \frac{\kappa}{2} (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \delta \Upsilon \\
& - \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R \delta A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \delta \Upsilon + \kappa (1 + \Upsilon) \partial_R A_b \partial^b \delta A_R \\
& - \kappa (1 + \Upsilon) (\partial_R A^b - \partial^b A_R) \partial_R \delta A_b - \Pi_t \delta u_t - u_t \delta \Pi_t - \Pi_\Upsilon \delta u_\Upsilon - u_\Upsilon \delta \Pi_\Upsilon \\
& - (\partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t)) \delta \tilde{u}_t - \tilde{u}_t \partial_R (\Pi_R \delta \Upsilon + (1 + \Upsilon) \delta \Pi_R) \\
& - \tilde{u}_t \partial^b \delta \Pi_b - \kappa \tilde{u}_t \partial_R ((1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t \delta \Upsilon + \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \delta A_t) + \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_t \delta \Pi_R + \tilde{u}_\Upsilon \Pi_R \partial_R \delta A_t \\
& + \left(\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b + \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right) \delta \tilde{u}_\Upsilon - \kappa \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_b \partial^b \delta A_R \\
& \left. + \kappa \tilde{u}_\Upsilon (\partial_R A^b - \partial^b A_R) \partial_R \delta A_b + \kappa \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \delta \Upsilon + \kappa \tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t \partial_R \delta A_t \right] dt dR d^2 x
\end{aligned} \tag{2.6.41}$$

y al usar integración por partes,

$$\begin{aligned}
\delta S_E = \int_{\mathcal{M}} & \left[\dot{A}_t \delta \Pi_t - \dot{\Pi}_t \delta A_t + \dot{A}_R \delta \Pi_R - \dot{\Pi}_R \delta A_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b - \dot{\Pi}_b \delta A^b + \dot{\Upsilon} \delta \Pi_\Upsilon - \dot{\Pi}_\Upsilon \delta \Upsilon \right. \\
& - \frac{1}{\kappa} \Pi_R \delta \Pi_R - \frac{1}{\kappa} \Pi^b \delta \Pi_b - \Pi_R \partial_R A_t \delta \Upsilon - (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \delta \Pi_R + \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) \delta A_t \\
& - \partial^b A_t \delta \Pi_b + \partial^b \Pi_b \delta A_t + \kappa \partial^a F_{ab} \delta A^b + \kappa \partial^b \partial_b A_R \delta A_R - \frac{\kappa}{2} (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \delta \Upsilon \\
& + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \delta A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \delta \Upsilon - \kappa \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b) \delta A_R \\
& + \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial_R A_b - \partial_b A_R)) \delta A^b - \Pi_t \delta u_t - u_t \delta \Pi_t - \Pi_\Upsilon \delta u_\Upsilon - u_\Upsilon \delta \Pi_\Upsilon \\
& - (\partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t)) \delta \tilde{u}_t + \partial_R \tilde{u}_t (\Pi_R \delta \Upsilon + (1 + \Upsilon) \delta \Pi_R) \\
& + \partial^b \tilde{u}_t \delta \Pi_b + \kappa (1 + 2\Upsilon) \partial_R \tilde{u}_t \partial_R A_t \delta \Upsilon - \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \tilde{u}_t) \delta A_t \\
& + \left(\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b + \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right) \delta \tilde{u}_\Upsilon \\
& + \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_t \delta \Pi_R - \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon \Pi_R) \delta A_t + \kappa \partial^b (\tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_b) \delta A_R - \kappa \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon (\partial_R A_b - \partial_b A_R)) \delta A^b \\
& \left. + \kappa \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \delta \Upsilon - \kappa \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta A_t \right] dt dR d^2 x \\
& + \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_t (\Pi_t \delta A_t) + \partial_t (\Pi_R \delta A_R) + \partial_t (\Pi_b \delta A^b) + \partial_t (\Pi_\Upsilon \delta \Upsilon) - \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R \delta A_t) \right. \\
& - \partial^b (\Pi_b \delta A_t) - \kappa \partial^a (F_{ab} \delta A^b) - \kappa \partial^b (\partial_b A_R \delta A_R) - \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \delta A_t) \\
& + \kappa \partial^b ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b \delta A_R) - \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial_R A_b - \partial_b A_R) \delta A^b) \\
& - \partial_R (\tilde{u}_t (\Pi_R \delta \Upsilon + (1 + \Upsilon) \delta \Pi_R)) - \partial^b (\tilde{u}_t \delta \Pi_b) - \kappa \partial_R ((1 + 2\Upsilon) \tilde{u}_t \partial_R A_t \delta \Upsilon) \\
& + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \tilde{u}_t \delta A_t) - \kappa \partial_R (\tilde{u}_t \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \delta A_t) + \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon \Pi_R \delta A_t) \\
& - \kappa \partial^b (\tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_b \delta A_R) + \kappa \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon (\partial_R A_b - \partial_b A_R) \delta A^b) \\
& \left. + \kappa \partial_R (\tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t \delta A_t) \right] dt dR d^2 x = 0,
\end{aligned} \tag{2.6.42}$$

por lo tanto, se tienen las ecuaciones de movimiento siguientes:

$$\begin{aligned}
\delta A_t &: -\dot{\Pi}_t + \partial^b \Pi_b + \partial_R [(1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \Pi_R + \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R (A_t - \tilde{u}_t) - \kappa \tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t] = 0, \\
\delta A_R &: -\dot{\Pi}_R + \kappa \partial^b [\partial_b A_R - (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \partial_R A_b] = 0, \\
\delta A^b &: -\dot{\Pi}_b + \kappa \partial^a F_{ab} + \kappa \partial_R [(1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) (\partial_R A_b - \partial_b A_R)] = 0, \\
\delta \Upsilon &: -\dot{\Pi}_\Upsilon - \Pi_R \partial_R (A_t - \tilde{u}_t) - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A_b - 2\partial_b A_R) \partial_R A^b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\
&\quad + \kappa (1 + 2\Upsilon) \partial_R \tilde{u}_t \partial_R A_t = 0, \\
\delta \Pi_t &: \dot{A}_t - u_t = 0, \\
\delta \Pi_R &: \dot{A}_R - \frac{1}{\kappa} \Pi_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A_t + (1 + \Upsilon) \partial_R \tilde{u}_t + \tilde{u}_\Upsilon \partial_R A_t = 0, \\
\delta \Pi_b &: \dot{A}^b - \frac{1}{\kappa} \Pi^b - \partial^b (A_t - \tilde{u}_t) = 0, \\
\delta \Pi_\Upsilon &: \dot{\Upsilon} - u_\Upsilon = 0, \\
\delta u_t &: \chi_t = \Pi_t = 0, \\
\delta u_\Upsilon &: \chi_\Upsilon = \Pi_\Upsilon = 0, \\
\delta \tilde{u}_t &: \tilde{\chi}_t = \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t) = 0, \\
\delta \tilde{u}_\Upsilon &: \tilde{\chi}_\Upsilon = -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t = 0,
\end{aligned} \tag{2.6.43}$$

siempre y cuando el término se frontera,

$$\begin{aligned}
\delta S_E \Big|_{\text{Boundary}} = \int_{\mathcal{M}} & [\partial_t (\Pi_t \delta A_t + \Pi_R \delta A_R + \Pi_b \delta A^b + \Pi_\Upsilon \delta \Upsilon) \\
\text{term} & - \partial^b (\Pi_b \delta A_t + \kappa (\partial_b A_R - (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \partial_R A_b) \delta A_R + \kappa F_{ba} \delta A^a + \tilde{u}_t \delta \Pi_b) \\
& - \partial_R ((\kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R (A_t - \tilde{u}_t) + (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \Pi_R - \kappa \tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta A_t \\
& \quad + \kappa \tilde{u}_t \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \delta A_t + \kappa (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) (\partial_R A_b - \partial_b A_R) \delta A^b \\
& \quad + \tilde{u}_t (\Pi_R + \kappa (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta \Upsilon + \tilde{u}_t (1 + \Upsilon) \delta \Pi_R] dt dR d^2x,
\end{aligned} \tag{2.6.44}$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas.

2.6.9. Condiciones asintóticamente planas

Ahora que se está trabajando en la formulación hamiltoniana, se procede a realizar un análisis similar al que se hizo en la subsección 2.5.2. Se probará si las condiciones asintóticas que proponen en [5], para las conexiones y momentos, hacen bien definido el principio de acción (2.6.39), es decir, que hacen cero el término de frontera (2.6.44).

Antes de continuar con los cálculos, al estar en la descripción hamiltoniana y haber obtenido ya varios resultados importantes, resulta conveniente retomar la motivación por la cual vale la pena fijarse en este ejemplo particular de frontera y que anteriormente ya se dio de forma breve en la descripción lagrangiana. Lo que se tiene es que en [5], cuando se analiza la electrodinámica en el infinito espacial (región asintóticamente plana), para que aparezcan simetrías asintóticas infinito-dimensiones no triviales se tienen que asignar ciertas condiciones de paridad, a algunas variables del espacio fase, de tal manera que estas contengan un término invariante de norma y otro que no, con lo cual desaparece la simetría de norma al elegir de manera conveniente las condiciones de frontera. Por otra parte, para conservar la simetría bajo el grupo de Poincaré resulta ser necesario introducir un grado de libertad superficial que modifique la estructura simpléctica, ya que sin esta

variable hay problemas con las transformaciones de Lorentz, en particular, con los boosts. Estas dos características presentes en [5], cuando se analiza la electrodinámica en el infinito espacial, resultan ser dos características principales que se han obtenido en este trabajo de forma general para la electrodinámica en la frontera. Es decir, fijándose por el momento en el infinito espacial como la frontera, con los resultados generales que se han encontrado hasta ahora en este capítulo, se concluiría que la teoría de la electrodinámica en la frontera ya no presenta simetrías de norma y además tiene un grado de libertad extra, $GL = 3$, comparado con la teoría en el interior, $GL = 2$. Por lo cual, estas dos características son algo natural de la teoría en la frontera, con la región asintótica como la frontera, de modo que quizás no debería sorprender que en [5] aparezcan tales características de forma natural.

Siguiendo ahora sí con los desarrollos. Anteriormente, como se estaba en la formulación lagrangiana solo se presentaron las propuestas para las conexiones que se dan en [5], (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21), pero ahora que ya se está en la formulación hamiltoniana se procede a presentar nuevamente la propuesta que dan en tal artículo, esta vez para conexiones y momentos:

$$\begin{aligned}
 A_t(t, r, \theta, \varphi) &= A_t^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} A_t^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \\
 A_R(t, r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} A_R^{(1)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} A_R^{(2)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-3}), \\
 A_\Omega(t, r, \theta, \varphi) &= A_\Omega^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} A_\Omega^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \\
 \Pi_t(t, r, \theta, \varphi) &= 0, \\
 \Pi_R(t, r, \theta, \varphi) &= \Pi_R^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \Pi_R^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \\
 \Pi_\Omega(t, r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \Pi_\Omega^{(1)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} \Pi_\Omega^{(2)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-3}),
 \end{aligned} \tag{2.6.45}$$

siendo $\Omega = \theta, \varphi$ un índice espacial y $x^\Omega = \theta, \varphi$ las coordenadas espaciales en la 2-esfera. Por simplicidad, se dejará de colocar la dependencia que tienen los $A^{(I)}$ y $\Pi^{(I)}$ con $I = 0, 1, 2, \dots$

Por otra parte, en [5] se proponen las siguientes condiciones de paridad, para los coeficientes de las conexiones y momentos,

$$\begin{aligned}
 A_R^{(1)}(-x^\Omega) &= -A_R^{(1)}(x^\Omega), \\
 A_\Omega^{(0)}(-x^\Omega) &= -A_\Omega^{(0)}(x^\Omega), \\
 \Pi_R^{(0)}(-x^\Omega) &= \Pi_R^{(0)}(x^\Omega), \\
 \Pi_\Omega^{(1)}(-x^\Omega) &= \Pi_\Omega^{(1)}(x^\Omega),
 \end{aligned} \tag{2.6.46}$$

mientras que a los demás coeficientes no se les ha asignado condición de paridad alguna.

Además, se supone nuevamente que Υ tendrá un comportamiento asintótico similar al de las conexiones y momentos, (2.5.25); y por analogía, esta misma suposición se aplica a los multiplicadores de Lagrange que aparecen en el término de frontera (2.6.44), es decir:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon(t, r, \theta, \varphi) &= \Upsilon^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \Upsilon^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \\
 \tilde{u}_t(t, r, \theta, \varphi) &= \tilde{u}_t^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \tilde{u}_t^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}), \\
 \tilde{u}_\Upsilon(t, r, \theta, \varphi) &= \tilde{u}_\Upsilon^{(0)}(t, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \tilde{u}_\Upsilon^{(1)}(t, \theta, \varphi) + O(r^{-2}).
 \end{aligned} \tag{2.6.47}$$

Tomando en cuenta lo anterior, se procede con el cálculo de interés. Imponiendo las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \delta A_t|_{t_1} = 0 = \delta A_t|_{t_2}; \quad \delta A_R|_{t_1} = 0 = \delta A_R|_{t_2}; \quad \delta A_\theta|_{t_1} = 0 = \delta A_\theta|_{t_2}; \\ \delta A_\varphi|_{t_1} = 0 = \delta A_\varphi|_{t_2}; \quad \delta \Upsilon|_{t_1} = 0 = \delta \Upsilon|_{t_2}; \end{aligned} \quad (2.6.48)$$

el primer término de (2.6.44) se hace cero y así $\delta S_E|_{BT}$ se reduce a,

$$\begin{aligned} \delta S_E|_{BT} = - \int_{\mathcal{M}} & \left[\partial^\theta (\Pi_\theta \delta A_t + \kappa (\partial_\theta A_R - (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \partial_R A_\theta) \delta A_R + \kappa F_{\theta\varphi} \delta A^\varphi + \tilde{u}_t \delta \Pi_\theta) \right. \\ & + \partial^\varphi (\Pi_\varphi \delta A_t + \kappa (\partial_\varphi A_R - (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \partial_R A_\varphi) \delta A_R + \kappa F_{\varphi\theta} \delta A^\theta + \tilde{u}_t \delta \Pi_\varphi) \\ & + \partial_R ((\kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R (A_t - \tilde{u}_t) + (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) \Pi_R - \kappa \tilde{u}_\Upsilon (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta A_t \\ & \quad + \kappa \tilde{u}_t \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \delta A_t + \kappa (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) (\partial_R A_\theta - \partial_\theta A_R) \delta A^\theta \\ & \quad + \kappa (1 + \Upsilon - \tilde{u}_\Upsilon) (\partial_R A_\varphi - \partial_\varphi A_R) \delta A^\varphi \\ & \quad \left. + \tilde{u}_t (\Pi_R + \kappa (1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta \Upsilon + \tilde{u}_t (1 + \Upsilon) \delta \Pi_R \right] dt dR r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (2.6.49)$$

Ahora bien, al sustituir las expresiones (2.6.45) y (2.6.47) en (2.6.49) y simplificar, quedarán algunos términos que estarán acompañados de r^2 , r^1 , r^0 y $\frac{1}{r}$, por lo que no se harán cero cuando se tome el $\lim_{r \rightarrow \infty}$, el último caso debido a la integración en r , quedando $\ln(r)$. En consecuencia, habrá que buscar una forma en que se hagan cero tales términos y para esto se emplean las condiciones de paridad. En otras palabras, lo que se desea es hallar las condiciones de paridad, en θ y φ , para las variables $A_\mu^{(I)}$, $\Pi_\mu^{(I)}$, $\Upsilon^{(I)}$, $\tilde{u}_t^{(I)}$ y $\tilde{u}_\Upsilon^{(I)}$ que acompañan a los términos restantes que no se hacen cero cuando se toma el $\lim_{r \rightarrow \infty}$, de tal manera que sus integrales correspondientes sean las que se hagan cero, tomando en cuenta que los límites de integración en las coordenadas angulares son simétricos, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

En el artículo [5] ya se proporcionan algunas condiciones de paridad, (2.6.46), sin embargo, una vez que se ha sustituido la forma asintótica, (2.6.45) y (2.6.47), en el término de frontera, (2.6.49), y se ha simplificado, uno se da cuenta que esas condiciones propuestas no son suficientes, ya que no todas las expresiones resultantes se hacen cero, esto es, se requiere proponer algunas extras. Además, hay un solo término que no se hace cero bajo las condiciones de paridad que se proponen en tal artículo,

$$\kappa \int_{\mathcal{M}} \partial_R \left(\frac{\Upsilon^{(0)} + 1 - \tilde{u}_\Upsilon^{(0)}}{r} \partial^\theta A_R^{(1)} \delta A_\theta^{(0)} \right) dR dt r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.6.50)$$

por lo que, para este término en particular se haga cero, lo que en este trabajo de tesis se propone es que simplemente $A_\theta^{(0)}$ sea un escalar, así $\delta A_\theta^{(0)} = 0$ será igual a cero y no se tendrá que lidiar con modificar su paridad. Nótese que este término es muy similar al que aparece en la formulación lagrangiana, (2.5.29), que igual no se hace cero bajo las condiciones de paridad propuestas en [5], la diferencia entre ambos radica en el multiplicador de Lagrange $-\tilde{u}_\Upsilon^{(0)}$.

Cabe destacar que, las condiciones de paridad que se van a proponer para los términos $A_\mu^{(I)}$ y $\Upsilon^{(I)}$, que acompañan a los r^2 , r^1 , r^0 y $\frac{1}{r}$, además de las ya propuestas en [5], son las encontradas en la formulación lagrangiana, (2.5.30). Entonces, estas condiciones sirven también para hacer bien definido el principio de acción en la formulación hamiltoniana, (2.6.39), es decir para que hagan cero el término de frontera (2.6.49),

$$\begin{array}{l|l}
 A_R^{(1)} - \text{impar en } \theta \text{ e impar en } \varphi & A_t^{(0)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi \\
 A_R^{(2)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi & A_t^{(1)} - \text{''} \\
 \Upsilon^{(0)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi & A_t^{(2)} - \text{''} \\
 \Upsilon^{(1)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi & A_t^{(3)} - \text{''}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 A_\theta^{(0)} - \text{Escalar} \mid \text{Antes : impar en } \theta \text{ y } \varphi & A_\varphi^{(0)} - \text{impar en } \theta \text{ e impar en } \varphi \\
 A_\theta^{(1)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi & A_\varphi^{(1)} - \text{''} \\
 A_\theta^{(2)} - \text{cualquiera de los dos casos anteriores} & A_\varphi^{(2)} - \text{''} \\
 A_\theta^{(3)} - \text{cualquiera de los dos casos anteriores} & A_\varphi^{(3)} - \text{''}
 \end{array}$$

sin embargo y como era de esperarse, no son suficientes, a estas se le deben agregar las siguientes condiciones de paridad, para algunos $\Pi_\mu^{(I)}$, $\Upsilon^{(I)}$, $\tilde{u}_t^{(I)}$ y $\tilde{u}_\Upsilon^{(I)}$;

$$\begin{array}{l|l}
 \Pi_R^{(0)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi & \tilde{u}_t^{(0)} - \text{par en } \theta \text{ e impar en } \varphi \\
 \Pi_R^{(1)} - \text{''} & \tilde{u}_t^{(1)} - \text{''} \\
 \Pi_R^{(2)} - \text{''} & \tilde{u}_t^{(2)} - \text{''}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \tilde{u}_\Upsilon^{(0)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi & \Upsilon^{(2)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi \\
 \tilde{u}_\Upsilon^{(1)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi & \tilde{u}_\Upsilon^{(2)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \Pi_\theta^{(1)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi & \Pi_\varphi^{(1)} - \text{par en } \theta \text{ y par en } \varphi \\
 \Pi_\theta^{(2)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi & \Pi_\varphi^{(2)} - \text{par en } \theta \text{ e impar en } \varphi \\
 \Pi_\theta^{(3)} - \text{impar en } \theta \text{ y par en } \varphi & \Pi_\varphi^{(3)} - \text{par en } \theta \text{ e impar en } \varphi
 \end{array}$$

(2.6.51)

donde ya se están considerando las condiciones de paridad propuestas en [5] para algunos coeficientes de los momentos. Así, las condiciones de frontera, (2.6.45), (2.6.48), (2.5.30) y (2.6.51) hacen bien definido el principio de acción extendido de la electrodinámica en la frontera, (2.6.39), siendo la frontera la región asintótica, $\lim_{r \rightarrow \infty}$, que también se le conoce como el infinito espacial.

2.6.10. Acción reducida

Ahora que se tienen las ecuaciones de movimiento, (2.6.43), el siguiente paso es analizarlas para determinar cuáles son las variables del espacio fase que corresponden a los 3 grados de libertad que tiene esta teoría y cuáles son aquellas dependientes, además de obtener su evolución temporal así como su caracterización. Sin embargo, lo anterior resulta una tarea difícil debido a la estructura complicada que tienen estas ecuaciones de movimiento.

A causa de esta complejidad, para determinar cuáles son los 3 grados de libertad de esta teoría, su evolución temporal y caracterizarlos, en vez de analizar directamente las ecuaciones de movimiento que resultan de la acción extendida S_E , (2.6.39), lo que se hará es resolver las cuatro restricciones de segunda clase¹⁴ (que pueden tratarse como simples relaciones entre campos y momentos, pudiendo cambiar \approx por $=$), para así encontrar aquellas variables del espacio fase

¹⁴Con resolver las restricciones de segunda clase uno quiere decir que, se van a maniobrar algebraicamente las

que son dependientes y después usar esta información en la acción extendida S_E , de manera que se simplifique y que ya solo dependa de variables del espacio fase independientes. Cabe mencionar que, para resolver tales restricciones se harán algunas suposiciones para los campos o momentos, de manera que estas se simplifiquen. Esto implica que no se va a determinar la dinámica de la teoría de manera general, sino un caso particular que permita ver los 3 grados de libertad de forma simple. En resumen, lo que se quiere es hallar y trabajar con la acción reducida de la teoría.

Antes de resolver las restricciones de segunda clase, (2.6.33)-(2.6.36), se va a reescribir la acción extendida S_E , (2.6.39), usando la información que hasta el momento nos proporcionan tales restricciones,

$$\begin{aligned}\chi_t &:= \Pi_t = 0, \\ \chi_\Upsilon &:= \Pi_\Upsilon = 0, \\ \tilde{\chi}_t &:= \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t) = 0, \\ \tilde{\chi}_\Upsilon &:= -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t = 0,\end{aligned}$$

de esta manera,

$$\begin{aligned}S'_E &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\ &\quad - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t - \Pi_b \partial^b A_t - \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - u_t \chi_t - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t + \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\ &\quad + \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) A_t + \partial^b \Pi_b A_t - \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R A_t) - \partial^b (\Pi_b A_t) \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\ &\quad - \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t) A_t - \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R A_t) - \partial^b (\Pi_b A_t) \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\ &\quad + \kappa \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t A_t) - \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R A_t) - \partial^b (\Pi_b A_t) \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\frac{1}{2} + \Upsilon\right) \partial_R A_t \partial_R A_t \right] dt dR d^2x,\end{aligned}$$

por tanto,

restricciones para así poder despejar las variables del espacio fase que son dependientes de las otras. También puede ocurrir que, de las restricciones, uno encuentre que algunas variables del espacio fase simplemente van a ser iguales a escalares constantes.

$$\begin{aligned}
S'_E = \int_{\mathcal{M}} & \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
& \left. + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (1 + 3\Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t \right] dt dR d^2x \quad (2.6.52) \\
& - \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_R ((1 + \Upsilon) (\kappa \Upsilon \partial_R A_t + \Pi_R) A_t) + \partial^b (\Pi_b A_t) \right] dt dR d^2x.
\end{aligned}$$

Ahora bien, las restricciones de segunda clase χ_t y χ_Υ , (2.6.33) y (2.6.34) respectivamente, ya están resueltas, de modo que solo hace falta resolver las otras dos, $\tilde{\chi}_t$ y $\tilde{\chi}_\Upsilon$, dadas por (2.6.35) y (2.6.36) respectivamente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_t &= \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^b \Pi_b + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t) = 0, \\
\tilde{\chi}_\Upsilon &= -\Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (\partial_R A^b - 2\partial^b A_R) \partial_R A_b - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t = 0,
\end{aligned}$$

pero para esto se van a imponer algunas condiciones a las variables dinámicas,

$$\partial_R A_b = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \Upsilon = 0, \quad (2.6.53)$$

por lo que las dos restricciones anteriores se reducen a,

$$\tilde{\chi}_t = (1 + \Upsilon) \partial_R \Pi_R + \partial^b \Pi_b + \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \partial_R A_t = 0, \quad (2.6.54)$$

$$\tilde{\chi}_\Upsilon = -\Pi_R \partial_R A_t - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t = 0. \quad (2.6.55)$$

Despejando $\partial_R A_t$ de (2.6.55),

$$\partial_R A_t = -\frac{2\Pi_R}{\kappa(1 + 2\Upsilon)}, \quad (2.6.56)$$

donde se ha supuesto que $\partial_R A_t \neq 0$. Sustituyendo este resultado en (2.6.54) y despejando Υ ,

$$\Upsilon = -\frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b}, \quad (2.6.57)$$

y finalmente, al emplear este último resultado en (2.6.56),

$$\partial_R A_t = \frac{2}{\kappa} \frac{\Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b). \quad (2.6.58)$$

De esta manera, se ha despejado Υ y $\partial_R A_t$ en términos de algunas otras variables del espacio fase. Cabe notar que, estrictamente, no se ha despejado A_t , pero como se verá a continuación, no será necesario y bastará con tener $\partial_R A_t$. Por otra parte, dada la forma que tiene Υ , (2.6.57), y la condición que se le está exigiendo, (2.6.53), uno puede suponer lo siguiente para que se cumpla tal condición,

$$\partial_R \partial_R \Pi_R = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \partial^b \Pi_b = 0. \quad (2.6.59)$$

Empleando los dos resultados anteriores, (2.6.57) y (2.6.58), en la acción S'_E , (2.6.52), uno tiene lo siguiente¹⁵,

¹⁵Se está tomando en cuenta que, el término de frontera que antes aparecía en S'_E , (2.6.52), se hizo cero bajo las condiciones de frontera apropiadas.

$$\begin{aligned}
S'_E &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \left(1 - 3 \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \left(\frac{2}{\kappa} \frac{\Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b) \right)^2 \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \Pi_R \frac{2}{\kappa} \frac{\Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b) \right] dt dR d^2 x \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
&\quad - \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \left(\frac{2\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \left(\frac{\Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b) \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \right) \frac{\Pi_R \Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b) \right] dt dR d^2 x \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\kappa} \partial^b \Pi_b (2\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c) \frac{\Pi_R \Pi_R}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} + \frac{2}{\kappa} \partial^b \Pi_b \frac{\Pi_R \Pi_R}{\partial_R \Pi_R} \right] dt dR d^2 x,
\end{aligned}$$

por lo tanto, la acción reducida va a estar dada como:

$$\begin{aligned}
S_{E-Reducida}[A_R, A^b, \Pi_R, \Pi_b] &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right] dt dR d^2 x.
\end{aligned} \tag{2.6.60}$$

Nótese que esta acción ya solo depende funcionalmente de 6 variables del espacio fase. Al calcular su variación e igualar a cero, uno llega a,

$$\begin{aligned}
0 = \delta S_{E-Reducida} &= \int_{\mathcal{M}} \left[\dot{A}_R \delta \Pi_R + \Pi_R \delta \dot{A}_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b + \Pi_b \delta \dot{A}^b - \frac{1}{\kappa} \Pi_R \delta \Pi_R - \frac{1}{\kappa} \Pi^b \delta \Pi_b \right. \\
&\quad - \kappa F_{ab} \partial^a \delta A^b - \kappa \partial_b A_R \partial^b \delta A_R - \frac{4}{\kappa} \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_R \\
&\quad - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \partial^b \delta \Pi_b - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^c \Pi_c \frac{\partial_R \delta \Pi_R + \partial^b \delta \Pi_b}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \\
&\quad \left. + \frac{4}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{(\partial_R \Pi_R)^3} \partial_R \delta \Pi_R \right] dt dR d^2 x \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left[\dot{A}_R \delta \Pi_R - \dot{\Pi}_R \delta A_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b - \dot{\Pi}_b \delta A^b - \frac{1}{\kappa} \Pi_R \delta \Pi_R - \frac{1}{\kappa} \Pi^b \delta \Pi_b \right. \\
&\quad + \kappa \partial^a F_{ab} \delta A^b + \kappa \partial^b \partial_b A_R \delta A_R - \frac{4}{\kappa} \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_R \\
&\quad + \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right) \delta \Pi_b \\
&\quad + \frac{2}{\kappa} \partial_R \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial^b \Pi_b}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right) \delta \Pi_R \\
&\quad + \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right) \delta \Pi_b \\
&\quad \left. - \frac{4}{\kappa} \partial_R \left(\Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{(\partial_R \Pi_R)^3} \right) \delta \Pi_R \right] dt dR d^2 x \\
&+ \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_t (\Pi_R \delta A_R + \Pi_b \delta A^b) - \kappa \partial^a (F_{ab} \delta A^b) - \kappa \partial^b (\partial_b A_R \delta A_R) \right. \\
&\quad - \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_b \right) \\
&\quad - \frac{2}{\kappa} \partial_R \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial^b \Pi_b}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_R \right) \\
&\quad - \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_b \right) \\
&\quad \left. + \frac{4}{\kappa} \partial_R \left(\Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{(\partial_R \Pi_R)^3} \delta \Pi_R \right) \right] dt dR d^2 x,
\end{aligned}$$

de donde se tienen las ecuaciones de movimiento,

$$\delta A_R : -\dot{\Pi}_R + \kappa \partial^b \partial_b A_R = 0, \quad (2.6.61)$$

$$\delta A^b : -\dot{\Pi}_b + \kappa \partial^a F_{ab} = 0, \quad (2.6.62)$$

$$\delta \Pi_R : \dot{A}_R - \frac{1}{\kappa} \Pi_R - \frac{4}{\kappa} \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} - \frac{2}{\kappa} \partial_R \left(\Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + 2\partial^c \Pi_c}{(\partial_R \Pi_R)^3} \right) = 0, \quad (2.6.63)$$

$$\delta \Pi_b : \dot{A}^b - \frac{1}{\kappa} \Pi^b + \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + 2\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right) = 0, \quad (2.6.64)$$

siempre y cuando el término de frontera se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas.

Despejando \dot{A}_R y \dot{A}^b de las ecuaciones (2.6.63) y (2.6.64) respectivamente, además de usar las condiciones (2.6.59), uno obtiene,

$$\dot{A}_R = \frac{1}{\kappa}\Pi_R + \frac{4}{\kappa}\Pi_R\partial^b\Pi_b \frac{2\partial_R\Pi_R + 3\partial^c\Pi_c}{(\partial_R\Pi_R)^2}, \quad (2.6.65)$$

$$\dot{A}^b = \frac{1}{\kappa}\Pi^b - \frac{2}{\kappa}\partial^b \left(\Pi_R\Pi_R \frac{\partial_R\Pi_R + 2\partial^c\Pi_c}{\partial_R\Pi_R\partial_R\Pi_R} \right). \quad (2.6.66)$$

Si se derivan con respecto al tiempo las ecuaciones (2.6.61) y (2.6.62),

$$-\ddot{\Pi}_R + \kappa\partial^b\partial_b\dot{A}_R = 0 \quad \text{y} \quad -\ddot{\Pi}_b + \kappa\partial^a\partial_a\dot{A}_b - \kappa\partial^a\partial_b\dot{A}_a = 0, \quad (2.6.67)$$

y si ahora se sustituyen (2.6.65) y (2.6.66) en las ecuaciones anteriores, uno llega a:

$$\begin{aligned} \ddot{\Pi}_R &= \kappa\partial^b\partial_b \left(\frac{1}{\kappa}\Pi_R + \frac{4}{\kappa}\Pi_R\partial^a\Pi_a \frac{2\partial_R\Pi_R + 3\partial^c\Pi_c}{(\partial_R\Pi_R)^2} \right) \\ &= \partial^b\partial_b \left(\Pi_R \left(1 + 8\frac{\partial^c\Pi_c}{\partial_R\Pi_R} + 12\frac{(\partial^c\Pi_c)^2}{(\partial_R\Pi_R)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.6.68)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{\Pi}_b &= \kappa\partial^a\partial_a \left(\frac{1}{\kappa}\Pi_b - \frac{2}{\kappa}\partial_b \left(\Pi_R\Pi_R \frac{\partial_R\Pi_R + 2\partial^c\Pi_c}{\partial_R\Pi_R\partial_R\Pi_R} \right) \right) \\ &\quad - \kappa\partial^a\partial_b \left(\frac{1}{\kappa}\Pi_a - \frac{2}{\kappa}\partial_a \left(\Pi_R\Pi_R \frac{\partial_R\Pi_R + 2\partial^c\Pi_c}{\partial_R\Pi_R\partial_R\Pi_R} \right) \right) \\ &= \partial^a\partial_a\Pi_b - \partial^a\partial_b\Pi_a. \end{aligned} \quad (2.6.69)$$

Además, de la ecuación (2.6.62), al contraer el índice libre con ∂^b , uno llega a que,

$$\partial^b\dot{\Pi}_b = \kappa\partial^b\partial^a F_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t\partial^b\Pi_b = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^b\Pi_b = f(x^d), \quad (2.6.70)$$

donde también se está considerando la condición antes impuesta a $\partial^b\Pi_b$, (2.6.59).

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para Π_R y Π_b son las siguientes:

$$\ddot{\Pi}_R = \partial^b\partial_b \left(\Pi_R \left(1 + 8\frac{\partial^c\Pi_c}{\partial_R\Pi_R} + 12\frac{(\partial^c\Pi_c)^2}{(\partial_R\Pi_R)^2} \right) \right), \quad (2.6.71)$$

$$\ddot{\Pi}_b = \partial^a\partial_a\Pi_b - \partial^a\partial_b\Pi_a, \quad (2.6.72)$$

nótese que estas son 3 ecuaciones de movimiento acopladas para 3 variables dinámicas, Π_R y Π_b , entonces, uno puede identificar a estas variables como los 3 grados de libertad de la teoría. Además, estas ecuaciones tienen forma de ecuación de onda inhomogénea en 2 dimensiones, por lo cual se puede inferir que el comportamiento será ondulatorio. De hecho, si uno recuerda lo discutido anteriormente en la descripción lagrangiana y también las ecuaciones de onda que se obtienen en la electrodinámica con fuentes, entonces se puede inferir que los términos inhomogéneos que aparecen están asociados a las fuentes. Por otra parte, observe que la primera ecuación tiene expresiones de la forma $\partial_R\Pi_R$, de manera que la dinámica de la teoría en la frontera va a depender de la frontera, es decir, dependerá de la hipersuperficie que se elija de toda la foliación para ser la frontera. Un último dato a retomar es que, si en la frontera hubiera libertad de norma uno podría elegir en particular que: $\partial^b\Pi_b = 0$, análogo a la norma de Coulomb, con lo cual las ecuaciones de movimiento terminarían siendo ecuaciones de onda homogéneas.

Como un ejemplo particular, debido a que anteriormente se supuso que $\partial_R\Upsilon = 0$ cuando se resolvieron las restricciones de segunda clase, (2.6.53), entonces por simplicidad se puede realizar la siguiente elección: $\Upsilon = \text{cte.} = \mathcal{C}$ y así de la expresión (2.6.57) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \Upsilon &= -\frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b} \\
\Rightarrow \mathcal{C} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b) &= -(\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c) \\
\Rightarrow (1 + \mathcal{C})\partial_R \Pi_R &= -(1 + 2\mathcal{C})\partial^c \Pi_c \\
\Rightarrow \frac{1 + \mathcal{C}}{1 + 2\mathcal{C}} &= -\frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R}.
\end{aligned} \tag{2.6.73}$$

Teniendo dos caso límites:

- Límite cuando $\mathcal{C} \rightarrow 0$. En esta situación,

$$\lim_{\mathcal{C} \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{C}}{1 + 2\mathcal{C}} = 1 = -\frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} \Rightarrow \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} = -1, \tag{2.6.74}$$

por lo que las ecuaciones de movimiento para Π_R y Π_b pasan a ser,

$$\begin{aligned}
\ddot{\Pi}_R &= 5\partial^b \partial_b \Pi_R, \\
\ddot{\Pi}_b &= \partial^a \partial_a \Pi_b - \partial_b f.
\end{aligned} \tag{2.6.75}$$

Estas tres ecuaciones siguen teniendo forma de ecuaciones de onda en 2 dimensiones, pero ahora solo dos de estas son inhomogéneas. Entonces, los grados de libertad, Π_R y Π_b , siguen teniendo un comportamiento ondulatorio. No obstante, la ecuación para Π_R se ha simplificado, ahora esta variable ya admite una solución de onda plana, mientras que las Π_b no admiten esta clase de soluciones debido a la contribución del término inhomogéneo.

- Límite cuando $\mathcal{C} \rightarrow \infty$. En esta situación,

$$\lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} \frac{1 + \mathcal{C}}{1 + 2\mathcal{C}} = \frac{1}{2} = -\frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} \Rightarrow \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} = -\frac{1}{2}, \tag{2.6.76}$$

por lo que las ecuaciones de movimiento para Π_R y Π_a pasan a ser,

$$\begin{aligned}
\ddot{\Pi}_R &= 0, \\
\ddot{\Pi}_b &= \partial^a \partial_a \Pi_b - \partial_b f.
\end{aligned} \tag{2.6.77}$$

De estas tres ecuaciones se observa que las últimas dos siguen siendo ecuaciones de onda inhomogéneas en 2 dimensiones, por lo cual los grados de libertad Π_b siguen teniendo un comportamiento ondulatorio. Por otra parte, la ecuación restante para Π_R se ha simplificado y ahora se interpreta como un campo con evolución temporal constante con respecto a la coordenada temporal t , $\dot{\Pi}_R = h(x^b, R)$, de manera que este grado de libertad ha perdido el comportamiento ondulatorio.

Así, con este ejemplo se ha podido simplificar una de las ecuaciones de movimiento, la de Π_R , y con ello se ha mostrado que bajo dos casos límite ocurren situaciones diferentes: en la primera, el grado de libertad Π_R sigue teniendo un comportamiento ondulatorio, pero ahora es similar al de la electrodinámica sin fuentes, pues satisfará la ecuación de onda homogénea; mientras que en la segunda, el grado de libertad Π_R pierde su comportamiento ondulatorio y ahora se interpreta como un campo con evolución temporal constante con respecto a la coordenada temporal t . Finalmente, pese a la simplificación que uno obtiene, estas siguen siendo tres ecuaciones de movimiento, una desacoplada y las otras dos acopladas, para tres variables dinámicas, que se identifican como los 3 grados de libertad de la teoría en la frontera, donde esto último se rectifica con el hecho de que todo se sigue reduciendo a resolver tres ecuaciones para las tres variables Π_R y Π_b .

2.7. Ejemplos

Con base en los resultados obtenidos en la formulación hamiltoniana, lo que se hará a continuación es revisar soluciones a las ecuaciones de movimiento de la teoría en la frontera de la electrodinámica, pero a nivel lagrangiano, ya que las ecuaciones son más simples y por ende los cálculos requerirán menos desarrollos.

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, uno puede llegar por medio de desarrollos matemáticos a las ecuaciones de onda homogéneas para \mathbf{E} y \mathbf{B} ¹⁶,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

o en el caso de los potenciales, se llegan a las ecuaciones de onda homogéneas para Φ y \mathbf{A} ,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Es decir, el campo electromagnético debe satisfacer las ecuaciones onda homogéneas y por tanto tendrá un comportamiento ondulatorio. Una de las soluciones más simples que tienen estas ecuaciones para el campo electromagnético son las ondas planas, cuya forma sinusoidal está dada por,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0),\end{aligned}\tag{2.7.1}$$

con \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 vectores constantes¹⁷, \mathbf{k} el vector de onda (también constante), \mathbf{r} el vector de posición tridimensional, ω la frecuencia angular y ϕ_0 la fase, siendo los últimos dos escalares constantes. Pese a la simplicidad que presentan este tipo de soluciones, lo relevante radica en que la solución general a las ecuaciones de onda homogéneas del electromagnetismo puede ser escrita como una superposición lineal de ondas planas con diferentes parámetros (vector de polarización, frecuencia, fase y número de onda).

Tomando en cuenta esto último, además de tener comportamientos ondulatorios para el campo electromagnético, también se podrán tener soluciones estáticas, ya que en principio tales soluciones se podrán ver como una superposición de ondas planas con diferentes parámetros que interfieren entre ellas mismas, de manera que el resultado o perturbación final sólo llega a depender de las coordenadas espaciales y no de la coordenada temporal.

Cabe destacar que, en esta situación los campos eléctrico y magnético son transversales, es decir, son perpendiculares a la dirección de propagación, un resultado que de hecho se obtiene al sustituir las expresiones (2.7.1) en las ecuaciones de Maxwell sin fuentes,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_0 \times \mathbf{k} = \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_0.\tag{2.7.2}$$

Por otra parte, la teoría en la frontera resultó ser similar a la electrodinámica con fuentes,

¹⁶Ver [27], páginas 393-394.

¹⁷El vector constante \mathbf{E}_0 contiene la información de la polarización de la onda.

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{B})^R &= \dot{\mathbf{E}}^R + J^R, \\(\nabla \times \mathbf{B})^b &= \dot{\mathbf{E}}^b + J^b, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

sólo que con una ecuación extra, la condición de restricción a la frontera,

$$0 = \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) \partial_R \Phi + \left(\varepsilon^{Rba} B_a - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \partial_R A_b,$$

no olvidando también que los términos de fuente que aparecen dependen funcionalmente del campo eléctrico, el campo magnético y la variable Υ ,

$$\begin{aligned}J^R &:= -\partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \\ J^b &:= -\partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a), \\ \rho &:= -\partial_R (\Upsilon E^R).\end{aligned}$$

Además, la teoría en la frontera tiene 3 grados de libertad y no tiene simetría de norma. Debido a lo anterior, las ecuaciones de onda que se obtendrán para \mathbf{E} y \mathbf{B} serán del tipo inhomogéneas¹⁸,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \nabla \rho + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \mathbf{J},\end{aligned}\tag{2.7.3}$$

lo mismo sucederá para \mathbf{A} y Φ ¹⁹,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) &= -\mathbf{J}.\end{aligned}\tag{2.7.4}$$

El hecho de que los campos ahora tengan que satisfacer las ecuaciones de onda inhomogéneas anteriores es una razón por la cual las ondas planas ya no serían una solución para el campo electromagnético en la frontera. Aunque, debido a que los términos de fuente no son cualesquiera funciones, esto en principio podría contribuir a que las ondas planas sí fueran un tipo de solución y siendo así, no se sabría con certeza si lo comentado inmediato anterior es cierto. Además, las cuatro ecuaciones similares a las de Maxwell con fuentes no son todo el conjunto de ecuaciones de movimiento de la teoría en la frontera, se tiene también la condición de restricción a la frontera, que por cierto, esta ecuación es el motivo por el cual la teoría en la frontera resulta ser análoga a la electrodinámica con fuentes. Esta última ecuación, en principio, daría información de cómo se deben comportar las ondas planas (propuestas como solución) para permanecer en la frontera, es decir, que los grados de libertad no se propaguen.

Tomando esto a consideración, lo que se hará a continuación es proponer algunas soluciones de la electrodinámica sin fuentes y revisar si satisfacen la condición de restricción a la frontera, en caso de que no sea así se mostrará qué requisitos deben cumplir este tipo de soluciones para satisfacer tal ecuación. Una vez revisado lo anterior, el paso siguiente es ver la información que proporcionan las ecuaciones de movimiento (en la frontera) restantes, aquellas que son similares a

¹⁸Ver [26], página 246.

¹⁹Ver [26], página 240. Estas ecuaciones, en la electrodinámica (en el bulto) con fuentes, se pueden simplificar si se emplea la condición de norma de Lorenz. En esta situación, al no haber simetría de norma en la teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes, tales ecuaciones no se simplifican.

las ecuaciones de Maxwell con fuentes, o las ecuaciones de onda inhomogéneas, en particular, lo que se espera es obtener la información correspondiente a Υ .

2.7.1. Onda plana transversal electromagnética

Una onda plana transversal electromagnética es una solución a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, esta onda se caracteriza por tener campos eléctrico y magnético que además de ser perpendiculares a la dirección de propagación, no van a tener componentes en la dirección susodicha, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}, \\ \mathbf{B} &= B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y},\end{aligned}\tag{2.7.5}$$

donde se ha elegido que la dirección del vector de propagación sea a lo largo del eje z ,

$$\mathbf{k} = k \hat{z}.\tag{2.7.6}$$

Con esta solución, los potenciales escalar y vectorial pueden estar dados como,

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{E_0}{k} \text{sen}(kz - \omega t), \\ \mathbf{A} &= \frac{E_0}{\omega} \text{sen}(kz - \omega t) (\hat{x} + \hat{z}),\end{aligned}\tag{2.7.7}$$

con $\frac{E_0}{\omega} = \frac{B_0}{k}$. Esto se obtiene de las relaciones,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.\tag{2.7.8}$$

Por otra parte, se elige $R = z$, por lo cual una frontera estará definida como una hipersuperficie tal que $z = cte$. Ahora bien, de la condición de restricción a la frontera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}0 &= \left(E_z + \frac{1}{2} \partial_z \Phi \right) \partial_z \Phi + \left(\varepsilon^{zba} B_a - \frac{1}{2} \partial_z A^b \right) \partial_z A_b \\ &= \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)^2 + \varepsilon^{zxy} B_y \partial_z A_x - \frac{1}{2} (\partial_z A_x)^2 \\ &= \frac{1}{2} (E_0^2 + B_0^2) \cos^2(kz - \omega t) \\ \Rightarrow 0 &= \cos^2(kz - \omega t) \quad \text{y por tanto} \quad \text{sen}^2(kz - \omega t) = 1 \\ \Rightarrow 0 &= \cos(kz - \omega t) \quad \text{y} \quad \text{sen}(kz - \omega t) = \pm 1 \\ \Rightarrow \frac{2n+1}{2} \pi &= kz - \omega t \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{2.7.9}$$

Estos resultados indican que los campos eléctrico y magnético en la frontera tienen que ser cero, mientras que los potenciales electromagnéticos en la frontera deben ser constantes,

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \Phi = \frac{E_0}{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \pm \frac{E_0}{\omega} (\hat{x} + \hat{z}).\tag{2.7.10}$$

Por lo cual, se concluye que no hay dinámica en la frontera para este tipo de solución. Además, si se elige una frontera particular, $z = z_0$, esta solo estará definida en los instantes de tiempo,

$$t = \frac{k}{\omega} z_0 - \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\omega}.\tag{2.7.11}$$

Por otra parte, para un instante de tiempo dado, $t = t_0$, los frentes de onda en la frontera tienen que estar dados como,

$$z = \frac{\omega}{k}t_0 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}, \quad (2.7.12)$$

que en realidad están definiendo fronteras en ese instante de tiempo, pues $z = cte$.

Lo siguiente es trabajar con las ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales electromagnéticos, donde se van a emplear los resultados obtenidos anteriormente. Pero para esto primero es necesario calcular las densidades de carga y corriente inducidas,

$$\rho = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad (2.7.13)$$

estos resultados son coherentes, puesto que se obtuvo que los campos eléctrico y magnético desaparecen en la frontera. Más aún, las ecuaciones (2.7.4) se satisfacen trivialmente y por ende Υ queda indefinido.

Una interpretación que se le puede dar a los resultados anteriores es que los campos eléctrico y magnético se hacen cero en la frontera porque la onda electromagnética inicialmente, en el interior, se propagaba en dirección perpendicular a la frontera (hipersuperficie temporaloide).

2.7.2. Onda plana transversal eléctrica

Una onda plana transversal eléctrica es una solución a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, esta onda se caracteriza por tener campos eléctrico y magnético que además de ser perpendiculares a la dirección de propagación, el campo eléctrico no va a tener componente en la dirección susodicha, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(ky + kz - \omega t)\hat{x}, \\ \mathbf{B} &= B_0 \cos(ky + kz - \omega t)(\hat{y} - \hat{z}), \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

donde se ha elegido que la dirección del vector de propagación sea a lo largo de los ejes y y z ,

$$\mathbf{k} = k(\hat{y} + \hat{z}). \quad (2.7.15)$$

Con esta solución, los potenciales escalar y vectorial pueden estar dados como:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{E_0}{k} \cos(ky + kz - \omega t), \\ \mathbf{A} &= \frac{E_0}{\omega} \sin(ky + kz - \omega t)\hat{x} + \frac{E_0}{\omega} \cos(ky + kz - \omega t)(\hat{y} + \hat{z}), \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

con $\frac{E_0}{\omega} = \frac{B_0}{k}$.

Por otra parte, se elige $R = z$, por lo cual una frontera estará definida como una hipersuperficie tal que $z = cte$. Ahora bien, de la condición de restricción a la frontera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(E_z + \frac{1}{2} \partial_z \Phi \right) \partial_z \Phi + \left(\varepsilon^{zba} B_a - \frac{1}{2} \partial_z A^b \right) \partial_z A_b \\ &= \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)^2 + \varepsilon^{zxy} B_y \partial_z A_x - \frac{1}{2} (\partial_z A_x)^2 - \frac{1}{2} (\partial_z A_y)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{k} \right)^2 - \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \right] \text{sen}^2(ky + kz - \omega t) + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{\omega} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2 - \left(\frac{\omega}{k} \right)^2} &= \text{sen}^2(ky + kz - \omega t) \quad \text{con} \quad \frac{\omega}{k} \neq \sqrt{2} \\ \Rightarrow \frac{1 - \left(\frac{\omega}{k} \right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k} \right)^2} &= \text{cos}^2(ky + kz - \omega t). \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Estos resultados indican que los campos eléctrico y magnético en la frontera tienen que ser constantes, lo mismo para los potenciales electromagnéticos en la frontera,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \pm E_0 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} \hat{x}, & \Phi &= \pm \frac{E_0}{k} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}}, \\
 \mathbf{B} &= \pm B_0 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} (\hat{y} - \hat{z}), & \mathbf{A} &= \pm \frac{E_0}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} \pm \frac{E_0}{\omega} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} (\hat{y} + \hat{z}).
 \end{aligned} \tag{2.7.18}$$

Por lo cual, se concluye que no hay dinámica en la frontera para este tipo de solución.

Lo siguiente es trabajar con las ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales electromagnéticos, donde se van a emplear los resultados obtenidos anteriormente. Pero primero será necesario calcular las densidades de carga y corriente inducidas,

$$\rho = 0, \quad J^z = 0, \quad J^x = B_y \partial_z \Upsilon \quad \text{y} \quad J^y = 0, \tag{2.7.19}$$

así, al utilizar estos resultados en (2.7.4) se llega a una sola ecuación que no se satisface trivialmente,

$$0 = J^x = B_y \partial_z \Upsilon = \pm B_0 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{2 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}} \partial_z \Upsilon \quad \Rightarrow \quad 0 = \partial_z \Upsilon \quad \Rightarrow \quad \Upsilon = \Upsilon(t, x, y),$$

y de esta ecuación se concluye que al final no hay fuentes inducidas, lo cual es coherente con el hecho de que los campos eléctrico y magnético son constantes en la frontera. Por otra parte, no se pudo determinar el comportamiento de Υ , salvo que es independiente de z .

Nótese que, en el ejemplo anterior también se obtuvo que no hay dinámica y que las fuentes inducidas son cero, pero a diferencia del ejemplo presente, se obtuvo que los campos desaparecen en la frontera, mientras que en este son constantes. El hecho de que en este tipo de onda el campo electromagnético sea constante, no cero, se puede asociar a que su dirección de propagación inicial, en el interior, no es perpendicular a la frontera, se tiene una componente tangencial, de manera que los campos no desaparecen en la frontera, aunque sí permanecen constantes y estáticos.

Capítulo 3

Pontryagin en la frontera

La teoría de Pontryagin abeliana en un espacio-tiempo de 4 dimensiones es una teoría topológica, es decir, no tiene grados de libertad locales. En el capítulo 1 se vio que la teoría de Chern-Simons abeliana en un espacio-tiempo 3D es dinámica en la frontera, con 1 grado de libertad, mientras que en el bulto es una teoría topológica, al igual que Pontryagin. Tomando en cuenta este último hecho, uno puede preguntarse si para Pontryagin se obtiene un resultado similar, esto es, que en la frontera también se tengan grados de libertad, teniendo así una teoría dinámica. Esta es una de las razones de interés por las cuales en este capítulo se va a construir y analizar la correspondiente teoría en la frontera de Pontryagin, usando el algoritmo propuesto en [2]. Por otra parte, sabiendo que en la frontera de la teoría de Pontryagin se encuentra definida la teoría de Chern-Simons,

$$S_P[A] = \xi \int_{\mathcal{M}'} dA \wedge dA = \xi \underbrace{\int_{\partial\mathcal{M}'} A \wedge dA}_{S_{C-S}} \quad (3.0.1)$$

y como en este capítulo se va a construir la teoría en la frontera de Pontryagin, parte del análisis también se dedicará a mostrar que efectivamente Chern-Simons está contenida en la frontera de Pontryagin, pero de manera local, ya que el algoritmo propuesto en [2] es local, es decir, se trabaja en una región \mathcal{M} del espacio-tiempo donde es aplicable tal algoritmo.

Por lo tanto, de lo comentado con anterioridad, además de la construcción de la correspondiente teoría en la frontera de Pontryagin, los objetivos de este capítulo son determinar por completo la dinámica de la teoría en la frontera, es decir: obtener e interpretar ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera, restricciones, simetrías, número y caracterización de grados de libertad; para después comparar estos resultados obtenidos en la frontera con los que uno obtiene en el interior, destacando las principales diferencias y similitudes que hay entre ambas. Un objetivo más es mostrar que la teoría de Chern-Simons está contenida en la teoría en la frontera de Pontryagin. Cabe destacar que, los resultados que se presentan a continuación son originales.

3.1. Elección del principio de acción

El principio de acción de la teoría de Pontryagin abeliana en un espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras está definido por,

$$S_P[A_\mu] = \frac{\rho}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x, \quad (3.1.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la curvatura de la conexión A_μ (siendo estas las variables dinámicas), con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ índices espacio-temporales, \mathcal{M} es una región del espacio-tiempo de

$4D^1$ y ρ es una constante de acoplamiento. Además, se tiene la densidad tensorial de Levi-Civita, $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = (-1)^{\tilde{s}} \sqrt{|g|} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, con $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ el símbolo de Levi-Civita, completamente antisimétrico, g el determinante de la métrica y \tilde{s} la signatura de la métrica².

Cabe recordar que, a este principio de acción se le va a pedir que sea diferenciable, es decir, que se puedan recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

3.2. Elección del tipo de frontera

Como ya se comentó en el capítulo 1, se va a elegir una frontera del tipo temporaloide, es decir, la región \mathcal{M} del espacio-tiempo se va a foliar mediante una familia de hipersuperficies temporaloides (donde alguna de estas será la frontera). El motivo de esta elección es que más adelante, al tener una dirección temporal en estas hipersuperficies, uno podrá estudiar la dinámica de la teoría en la frontera, aplicando un análisis Lagrangiano o Hamiltoniano.

3.3. Proyección del principio de acción

Una vez elegido el principio de acción y el tipo de frontera, lo que sigue es proyectar el principio de acción, (3.1.1), en una familia de hipersuperficies temporaloides que folian la región del espacio-tiempo \mathcal{M} (donde una de estas será la frontera). Para esto, uno puede emplear el operador de proyección que se presentó en el capítulo 1, $P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - \sigma n_\nu n^\mu$ (1.1.2), donde $\sigma = 1$ ya que $\mathbf{n} = \mathbf{R}$ será espacialoide, es decir:

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - R_\nu R^\mu, \quad (3.3.1)$$

con $\mathbf{R} = R^\mu \partial_\mu$ el vector espacialoide normal a la familia de hipersuperficies temporaloides que folian la región \mathcal{M} del espacio tiempo y R^μ sus correspondientes componentes.

Sin embargo, para realizar la proyección de la acción (3.1.1) no se empleará directamente el operador de proyección (3.3.1), sino que se hará uso únicamente de la proyección de la densidad tensorial de Levi-Civita,

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = 4R^{[\alpha} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu\nu]}. \quad (3.3.2)$$

Uno puede verificar que el resultado de emplear la proyección (3.3.2) en la acción (3.1.1) es el mismo que se obtiene al aplicar directamente el operador de proyección (3.3.1) a la acción (3.1.1).

Siendo así, la acción de Pontryagin proyectada va a estar dada como:

$$\begin{aligned} S_P[A] &= \frac{\rho}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} 4R^{[\alpha} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu\nu]} d^4x \\ &= \frac{\rho}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} [R^\alpha \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu\nu} - R^\beta \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} + R^\mu \tilde{\varepsilon}^{\nu\alpha\beta} - R^\nu \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu}] d^4x \\ &= \rho \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} R^\alpha \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Si ahora se usa la relación, $F_{\beta\alpha} R^\alpha = \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta$, entonces se llega a que el principio de acción de Pontryagin proyectado estará dado por,

$$\begin{aligned} S_P[A_\mu] &= \rho \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta - \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha)] F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\beta\mu\nu} d^4x \\ &= \rho \int_{\mathcal{M}} [F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta - F_{\mu\nu} \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha)] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} d^4x. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

¹Región del espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras donde es aplicable el método propuesto en [2].

²La teoría de Pontryagin, al ser topológica, no necesita de una métrica para estar bien definida en un espacio-tiempo con fronteras.

Cabe mencionar que, este sigue siendo un principio de acción en el bulto, pero que ya sabe acerca de que la región del espacio-tiempo \mathcal{M} ha sido foliada por una familia de hipersuperficies temporaloides.

3.4. Construcción del principio de acción en la frontera

Ahora que se tiene el principio de acción de Pontryagin proyectado, (3.3.4), notése que el término que tiene la derivada de Lie, $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta$, contiene la información de cómo se propagan los grados de libertad a lo largo de \mathbf{R} y como se comentó anteriormente, para restringir que estos grados de libertad no se propaguen de una hipersuperficie temporaloide a la siguiente, es necesario imponer ese término como una restricción de la teoría e introducirlo al principio de acción (3.3.4) por medio del método de los multiplicadores de Lagrange. La razón de este paso, como se discutió en el capítulo 1, se debe a que cuando se vaya a estudiar la dinámica de la teoría en la frontera (una hipersuperficie particular elegida de la foliación), lo que se desea es que esta dinámica permanezca en la frontera elegida, es decir, que las conexiones A_μ no se propaguen de una frontera a otra de un momento a otro, por lo cual es necesario introducir una restricción que corresponda al término que contiene esta información.

De esta manera, se define el principio de acción de la teoría de Pontryagin en la familia de fronteras (hipersuperficies) temporaloides como,

$$S_{P-B}[A_\mu, \Upsilon] = \rho \int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu} [(1 + \Upsilon) \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta - \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha)] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} d^4x, \quad (3.4.1)$$

siendo Υ el multiplicador de Lagrange y una variable dinámica, que permite introducir la restricción $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta = 0$ a la acción, que debe cumplirse para cada frontera (hipersuperficie) temporaloide. En este caso, esta restricción corresponde a la *condición de restricción a la frontera*:

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta = 0. \quad (3.4.2)$$

El principio de acción (3.4.1) sigue siendo una acción en el interior, por ello se está considerando a \mathcal{M} como región de integración. Pero, a diferencia de (3.1.1), este principio de acción, (3.4.1), ya contiene la información de la familia de hipersuperficie temporaloides, que folian \mathcal{M} , y donde ahora la dinámica en cada una es independiente de las demás.

3.5. Análisis lagrangiano

Teniendo el principio de acción en la frontera, el último paso es realizar el análisis de la dinámica de esta teoría. Para ello, primero se reescribirá el principio de acción (3.4.1) usando coordenadas adaptadas a la foliación, de manera que, $\partial_R A_i = \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_i$ y $A_R := A_\alpha R^\alpha$, donde los índices latinos, $i = 0, 1, 2$, etiquetan coordenadas espacio-temporales arbitrarias en cada una de las hipersuperficies temporaloides. De esta manera, el principio de acción de Pontryagin en la frontera, (3.4.1), pasa a ser:

$$S_{PB}[A_R, A_i, \Upsilon] = \rho \int_{\mathcal{M}} F_{ij} [(1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dR d^3x, \quad (3.5.1)$$

y con esta acción se va a trabajar a continuación.

3.5.1. Ecuaciones de movimiento

Partiendo de la variación de la acción (3.5.1) e igualando a cero,

$$\begin{aligned}
0 = \delta S_{PB} &= \rho \delta \int_{\mathcal{M}} F_{ij} [(1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x \\
&= \rho \int_{\mathcal{M}} [2((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) \partial_i \delta A_j + F_{ij} \partial_R A_k \delta \Upsilon + F_{ij} (1 + \Upsilon) \partial_R \delta A_k \\
&\quad - F_{ij} \partial_k \delta A_R] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x \\
&= \rho \int_{\mathcal{M}} [-2\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) \delta A_j + 2\partial_i [(1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R] \delta A_j \\
&\quad + F_{ij} \partial_R A_k \delta \Upsilon - \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon)) \delta A_k + \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon) \delta A_k) \\
&\quad + \partial_k F_{ij} \delta A_R - \partial_k (F_{ij} \delta A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 = \delta S_{PB} &= \rho \int_{\mathcal{M}} [\partial_k F_{ij} \delta A_R + [2\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A_j - \partial_j A_R) - \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon))] \delta A_k \\
&\quad + F_{ij} \partial_R A_k \delta \Upsilon] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x \\
&+ \rho \int_{\mathcal{M}} [-\partial_k (2((1 + \Upsilon) \partial_R A_i - \partial_i A_R) \delta A_j + F_{ij} \delta A_R) \\
&\quad + \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon) \delta A_k)] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x,
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

se obtienen así las ecuaciones de movimiento,

$$\delta A_R : \partial_k F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0, \tag{3.5.4}$$

$$\delta A_k : [2\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A_j - \partial_j A_R) - \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon))] \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0, \tag{3.5.5}$$

$$\delta \Upsilon : F_{ij} \partial_R A_k \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0, \tag{3.5.6}$$

siempre y cuando el término de frontera,

$$\begin{aligned}
\delta S_{PB}|_{\text{boundary term}} &= -\rho \int_{\mathcal{M}} [\partial_k (2((1 + \Upsilon) \partial_R A_i - \partial_i A_R) \delta A_j + F_{ij} \delta A_R) \\
&\quad - \partial_R (F_{ij} (1 + \Upsilon) \delta A_k)] \tilde{\varepsilon}^{ijk} dRd^3x,
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas.

Cabe mencionar que, una de las ecuaciones de movimiento es la condición de restricción a la frontera, (3.5.6), y como lo dice el nombre, esta ecuación también se puede ver como una condición de frontera, de modo que, al resolverla el término de frontera (3.5.7) se puede simplificar. Por otro lado, de las ecuaciones de movimiento se observa que, la ecuación (3.5.5) es la única que contiene información sobre el campo A_R , pero de hecho ese término se hace cero por antisimetría, debido a esto A_R queda como un campo arbitrario, lo cual se puede asociar a cierta libertad de norma que presenta la teoría (esto se verificará más adelante en la formulación hamiltoniana).

3.5.2. Chern-Simons en la frontera

Como se ha comentado anteriormente, en este capítulo uno de los objetivos es comprobar que la teoría de Chern-Simons (C-S) está contenida en la teoría en la frontera de Pontryagin. Para esto, se mostrará a continuación que, bajo una solución particular de la ecuación (3.5.6) las ecuaciones de movimiento (3.5.5) se reducen a las ecuaciones de movimiento de Chern-Simons en la formulación lagrangiana.

Entonces, lo primero a realizar es recordar que el principio de acción de Chern-Simons abeliano en un espacio-tiempo \mathcal{N} de 3 dimensiones está definido como,

$$S_{CS}[A_i] = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{N}} A_k F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{kij} d^3x, \quad (3.5.8)$$

siendo sus ecuaciones de movimiento,

$$\tilde{\varepsilon}^{kij} F_{ij} = 0, \quad (3.5.9)$$

que se obtienen directamente de la variación de la acción S_{CS} .

Ahora bien, partiendo de la ecuación (3.5.6), que corresponde a la condición de restricción a la frontera, se propone una solución para esta ecuación tal que las A_j y Υ tienen la forma,

$$\partial_R A_j = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \Upsilon \neq 0, \quad (3.5.10)$$

ya que así (3.5.6) se satisface directamente. Por otra parte, de la ecuación de movimiento (3.5.5), al desarrollar las derivadas correspondientes y restar los términos semejantes, uno llega a,

$$\begin{aligned} & [2\partial_i((1 + \Upsilon)\partial_R A_j - \partial_j A_R) - \partial_R(F_{ij}(1 + \Upsilon))] \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \\ \Rightarrow & 2[\partial_i((1 + \Upsilon)\partial_R A_j - \partial_j A_R) - \partial_R(\partial_i A_j(1 + \Upsilon))] \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \\ \Rightarrow & 2[\partial_i \Upsilon \partial_R A_j + (1 + \Upsilon)\partial_i \partial_R A_j - \partial_i \partial_j A_R - (1 + \Upsilon)\partial_R \partial_i A_j - \partial_i A_j \partial_R \Upsilon] \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \\ \Rightarrow & 2(\partial_i \Upsilon \partial_R A_j - \partial_R \Upsilon \partial_i A_j) \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Finalmente, al usar las soluciones (3.5.10), la ecuación (3.5.11) se reduce a lo siguiente:

$$-2\partial_R \Upsilon \partial_i A_j \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \quad (3.5.12)$$

$$\Rightarrow 2\partial_i A_j \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \quad (3.5.13)$$

$$\Rightarrow F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0 \quad (3.5.14)$$

Con este resultado se puede concluir que, a nivel lagrangiano, la teoría de Chern-Simons está contenida en la frontera de Pontryagin, ya que las ecuaciones de movimiento de C-S son un caso particular de las ecuaciones de movimiento de Pontryagin en la frontera ³. Por otra parte, de las soluciones (3.5.10), al ser Υ la única variable dinámica que tendrá dependencia funcional de la coordenada espacial R , se puede suponer por simplicidad que $\Upsilon = \Upsilon(R)$, con lo cual Υ se puede interpretar como una etiqueta de las hipersuperficies temporaloides que folían la región \mathcal{M} del espacio-tiempo. Con base en lo anterior, se concluye que en cualquier hipersuperficie temporaloide de que se elija como frontera se encontrará contenida la teoría de Chern-Simons, es decir, para cualquier R .

Nótese que no hará falta analizar la ecuación de movimiento restante, (3.5.4), puesto que se va a satisfacer idénticamente, ya que corresponde a las identidades de Bianchi un un espacio-tiempo tridimensional.

3.6. Análisis hamiltoniano

En esta sección se va a realizar un análisis hamiltoniano del principio de acción (3.5.1), esto es, se aplicará el algoritmo de Dirac-Bergmann al principio de acción en la frontera de Pontryagin. Pero para esto, será necesario proyectar nuevamente el principio de acción, (3.5.1), solo que ahora será en una familia de superficies espacialoides, siendo el vector normal a estas temporaloides. Por lo cual, el operador de proyección empleado en este caso estará dado como,

³Son un caso particular en el sentido de que se obtienen al proponer una solución particular para las ecuaciones de movimiento de la teoría en la frontera de Pontryagin, para ser más exacto, una solución particular a la condición de restricción a la frontera.

$$P_i^j = \delta_i^j + T_i T^j. \quad (3.6.1)$$

Con $\mathbf{T} = T^i \partial_i$ el vector temporaloide normal a la familia de superficies espacialoides y T^i sus correspondientes componentes. Note que en P_j^i , (1.1.2), $\sigma = -1$ ya que para esta proyección $\mathbf{n} = \mathbf{T}$ es temporaloide.

Sin embargo, de forma similar a lo que se hizo anteriormente, no será necesario emplear directamente el operador de proyección (3.6.1), sino que se hará uso simplemente de la proyección de la densidad tensorial de Levi-Civita,

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} = -3T^{[i} \varepsilon^{jk]}. \quad (3.6.2)$$

En principio, uno puede verificar que el resultado de emplear la proyección (3.6.2) en la acción (3.5.1) es el mismo que se obtiene al aplicar directamente el operador de proyección (3.6.1) a la acción (3.5.1).

Siendo así, el cálculo de la proyección del principio de acción (3.5.1) en la familia de superficies espacialoides va a estar dado como,

$$\begin{aligned} S_{P-B2}[A_R, A_i, \Upsilon] &= -\rho \int_{\mathcal{M}} F_{ij} [(1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R] 3T^{[i} \tilde{\varepsilon}^{jk]} dR d^3 x \\ &= -\rho \int_{\mathcal{M}} F_{ij} [(1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R] (T^i \tilde{\varepsilon}^{jk} + T^j \tilde{\varepsilon}^{ki} + T^k \tilde{\varepsilon}^{ij}) dR d^3 x \\ &= -\rho \int_{\mathcal{M}} [2F_{ij} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) T^i \tilde{\varepsilon}^{jk} \\ &\quad + F_{ij} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) T^k \tilde{\varepsilon}^{ij}] dR d^3 x \\ &= -\rho \int_{\mathcal{M}} [2F_{ij} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) T^i \tilde{\varepsilon}^{jk} \\ &\quad + F_{ij} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) T^k \tilde{\varepsilon}^{ij}] dR d^3 x. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Si ahora se usa la relación, $F_{ji} T^i = \partial_j (T^i A_i) - \mathcal{L}_{\mathbf{T}} A_j$, entonces se llega a que el principio de acción (3.5.1) proyectado en la familia de superficies espacialoides va a estar dado por,

$$\begin{aligned} S_{P-B2}[A_R, A_i, \Upsilon] &= -\rho \int_{\mathcal{M}} [2 (\mathcal{L}_{\mathbf{T}} A_j - \partial_j (T^i A_i)) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) \tilde{\varepsilon}^{jk} \\ &\quad + F_{ij} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_k T^k - T^k \partial_k A_R) \tilde{\varepsilon}^{ij}] dR d^3 x. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Usando ahora coordenadas adaptadas a la foliación, $\partial_t = \mathcal{L}_{\mathbf{T}} = T^i \partial_i$ y $A_t := T^i A_i$, donde los índices latinos, $a = 1, 2$, etiquetan coordenadas espaciales arbitrarias en cada una de las superficies espacialoides. De esta manera, el principio de acción (3.6.4) pasa a ser,

$$\begin{aligned} S_{PB2}[A_t, A_R, A_a, \Upsilon] &= -\rho \int_{\mathcal{M}} [2 (\partial_t A_a - \partial_a A_t) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \\ &\quad + F_{ab} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \partial_t A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ab} dt dR d^2 x, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

donde se identifica la densidad lagrangiana de la teoría,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PB} &= -\rho [2 (\partial_t A_a - \partial_a A_t) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) + F_{ab} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \partial_t A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ab} \\ &= -\rho \left[2 \left(\dot{A}_a - \partial_a A_t \right) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) + F_{ab} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \dot{A}_R \right) \right] \tilde{\varepsilon}^{ab}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

3.6.1. Matriz Hessiana

Una vez que se cuenta con la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{PB} , se procede a revisar si la teoría es singular o no, para ello se calcula la matriz hessiana,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_t) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A_R) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t A^a) \partial(\partial_t \Upsilon)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A_t)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A_R)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t A^b)} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial(\partial_t \Upsilon) \partial(\partial_t \Upsilon)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{\Upsilon}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

cuyas componentes están dadas por⁴,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t} = 0 &\implies \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}_t} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R} = \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} &\implies \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}_R} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a} = -2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab} &\implies \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}^a} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon}} = 0 &\implies \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{\Upsilon}} = 0, \end{aligned}$$

de manera que, la matriz hessiana \mathbf{H} es,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \det \mathbf{H} = 0, \quad (3.6.8)$$

por lo cual, se concluye que la teoría es singular, así que se procede a emplear el algoritmo de Dirac-Bergmann para estudiar esta teoría en la formulación hamiltoniana.

3.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias

Dada la forma de la matriz hessiana, (3.6.8), se tiene que el $\text{Rango}(\mathbf{H}) = 0$ y la $\text{Nulidad}(\mathbf{H}) = 5$, lo cual nos asegura que no se va a poder despejar ninguna \dot{A}_Ξ y que además se esperan 5 restricciones primarias.

Calculando los momentos canónicos,

⁴Por simplicidad, se van a denotar al conjunto de campos y de momentos como: $A_\Xi = (A_t, A_R, A_b, \Upsilon)$ y $\Pi_\Xi = (\Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)$ respectivamente.

$$\Pi_t := \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_t := \Pi_t \approx 0, \quad (3.6.9)$$

$$\Pi_R := \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}_R} = \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \quad \Rightarrow \quad \phi_R := \Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0, \quad (3.6.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_a &:= \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{A}^a} = -2\rho \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R \right) \tilde{\varepsilon}_{ab} \\ &\Rightarrow \quad \phi_a := \Pi_a + 2\rho \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R \right) \tilde{\varepsilon}_{ab} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

$$\Pi_\Upsilon := \frac{\partial \mathcal{L}_{PB}}{\partial \dot{\Upsilon}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_\Upsilon := \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (3.6.12)$$

se comprueban entonces los resultados comentados anteriormente, ya que ninguna \dot{A}_Ξ se pudo despejar y se obtuvieron 5 restricciones primarias.

3.6.3. Condiciones de regularidad

Ahora que se cuenta con las restricciones primarias que presenta esta teoría, ϕ_t , ϕ_R , ϕ_a y ϕ_Υ ; se requiere que cumplan con las condiciones de regularidad. Fijándose en la siguiente matriz jacobiana,

$$\left(\frac{\partial(\phi_t, \phi_R, \phi_a, \phi_\Upsilon)}{\partial(A_t, A_R, A^b, \Upsilon, \Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6.13)$$

se puede ver que esta tiene rango constante e igual a 5, la misma cantidad de restricciones primarias independientes encontradas. Así, se concluye que ϕ_t , ϕ_R , ϕ_a y ϕ_Υ , dadas por (3.6.9)-(3.6.12), van a definir una subvariedad de dimensión 5 en el espacio fase (A_Ξ, Π_Ξ) .

3.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria

Se procede a definir la hamiltoniana canónica, H_C , la cual sólo está bien definida en la superficie de restricciones primarias. Cabe notar que, para calcular esta hamiltoniana se van a emplear los resultados obtenidos en la definición de los momentos canónicos y a la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{PB} , de esta manera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_C &:= \int \mathcal{H}_C d^3y \\ &= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_a \dot{A}^a + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{L}_{PB} \right] d^3y \\ &= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_a \dot{A}^a + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} + 2\rho \left(\dot{A}_a - \partial_a A_t \right) \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right. \\ &\quad \left. + \rho F_{ab} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \dot{A}_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] d^3y \\ &= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \dot{A}_R + (\Pi_a + 2\rho \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R \right) \tilde{\varepsilon}_{ab}) \dot{A}^a + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} \right. \\ &\quad \left. - 2\rho \partial_a A_t \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} + \rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] d^3y \\ &= \int \left[-2\rho \partial_a A_t \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} + \rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] d^3y, \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

por lo tanto,

$$H_C = \rho \int [F_{ab}(1 + \Upsilon)\partial_R A_t - 2\partial_a A_t ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ab} d^3 y, \quad (3.6.15)$$

Ahora bien, una vez que se ha calculado H_C , se define la hamiltoniana primaria,

$$\begin{aligned} H_1 &:= H_C + \int [\lambda_t \phi_t + \lambda_R \phi_R + \lambda^a \phi_a + \lambda_\Upsilon \phi_\Upsilon] d^3 y \\ &= \int [\rho F_{ab}(1 + \Upsilon)\partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_a A_t ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} + \lambda_t \Pi_t + \lambda_R (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \\ &\quad + \lambda^a (\Pi_a + 2\rho ((1 + \Upsilon)\partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}) + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon] d^3 y, \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

con $(\lambda_t, \lambda_R, \lambda^a, \lambda_\Upsilon)$ los multiplicadores de Lagrange y $(\phi_t, \phi_R, \phi_a, \phi_\Upsilon)$ las restricciones primarias.

3.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Ahora que se cuenta con la hamiltoniana primaria, lo que sigue es comprobar que las restricciones primarias, (3.6.9)-(3.6.12), cumplan con las condiciones de consistencia, es decir, que no cambien con el tiempo,

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_1\} \approx 0. \quad (3.6.17)$$

Un resultado directo que proporcionan las condiciones de consistencia es que se pueden identificar explícitamente las restricciones secundarias, en caso de que las haya.

Por simplicidad, en los cálculos posteriores se hace uso de los paréntesis de Poisson fundamentales, siendo los únicos distintos de cero ⁵,

$$\{A_t(x^0, \vec{x}), \Pi_t(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \quad (3.6.18)$$

$$\{A_R(x^0, \vec{x}), \Pi_R(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \quad (3.6.19)$$

$$\{A_a(x^0, \vec{x}), \Pi^b(x^0, \vec{y})\} = \delta_a^b \delta^3(x - y), \quad (3.6.20)$$

$$\{\Upsilon(x^0, \vec{x}), \Pi_\Upsilon(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y). \quad (3.6.21)$$

Entonces, las condiciones de consistencia para cada restricción están dadas como sigue.

Para ϕ_t ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_t(x) &= \{\phi_t(x), H_1\} = \int \{\phi_t(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3 y \\ &= \int \{\Pi_t, \rho F_{ab}(1 + \Upsilon)\partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_a A_t ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab}\} d^3 y \\ &= \int [\rho F_{ab}(1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_t, \partial_R A_t\} - 2\rho ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_t, \partial_a A_t\}] d^3 y \\ &= \int [-\rho F_{ab}(1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R \delta^3(x - y) + 2\rho ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta^3(x - y)] d^3 y \\ &= \rho [\partial_R (F_{ab}(1 + \Upsilon)) - 2\partial_a ((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ab} \\ &= 2\rho [\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b] \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

⁵Los paréntesis de Poisson fundamentales iguales a cero son los siguientes:

$$\{A_\Xi(x^0, \vec{x}), A_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0 = \{\Pi_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\},$$

$$\{A_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0, \text{ si los índices } \Xi \neq \Theta,$$

donde $\Xi, \Theta = t, R, b, \Upsilon$, no olvidando también que $b = 1, 2$.

se encuentra una restricción secundaria,

$$\psi_t := 2\rho [\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b] \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0. \quad (3.6.23)$$

Para ϕ_R ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_R(x) &= \{\phi_R(x), H_1\} = \int \{\phi_R(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3 y \\ &= \int \{\Pi_R - \rho F_{cd} \tilde{\varepsilon}^{cd}, 2\rho \partial_a A_t \partial_b A_R \tilde{\varepsilon}^{ab} + \lambda^a \Pi_a - 2\rho \lambda^a \partial^b A_R \tilde{\varepsilon}_{ab}\} d^3 y \\ &= \int [2\rho (\partial_a A_t - \lambda_a) \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_R, \partial_b A_R\} - 2\rho \lambda^a \tilde{\varepsilon}^{cd} \{\partial_c A_d, \Pi_a\}] d^3 y \\ &= \int [-2\rho (\partial_a A_t - \lambda_a) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_b \delta^3(x-y) - 2\rho \partial_c \lambda^a \tilde{\varepsilon}^{cd} \delta_{ad} \delta^3(x-y)] d^3 y \\ &= 2\rho [\partial_b (\partial_a A_t - \lambda_a) \tilde{\varepsilon}^{ab} - \partial_c \lambda_a \tilde{\varepsilon}^{ca}] \\ &= 2\rho [\partial_a \partial_b A_t - \partial_b \lambda_a + \partial_b \lambda_a] \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

no hay restricciones secundarias, pero tampoco se puede determinar algún multiplicador de Lagrange, de hecho, la condición se cumple de manera directa.

Para ϕ_c ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_c(x) &= \{\phi_c(x), H_1\} = \int \{\phi_c(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3 y \\ &= \int \{\Pi_c + 2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^d - \partial^d A_R) \tilde{\varepsilon}_{cd}, \rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_a A_t (1 + \Upsilon) \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \\ &\quad + \lambda_R \Pi_R - \rho \lambda_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} + \lambda^a \Pi_a + 2\rho \lambda^a (1 + \Upsilon) \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab} + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon\} d^3 y \\ &= \int [2\rho (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_c, \partial_a A_b\} - 2\rho \partial_a A_t (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_c, \partial_R A_b\} - 2\rho \lambda_R \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_c, \partial_a A_b\} \\ &\quad + 2\rho \lambda^a (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}_{ab} \{\Pi_c, \partial_R A^b\} - 2\rho \lambda_R \tilde{\varepsilon}_{cd} \{\partial^d A_R, \Pi_R\} + 2\rho (1 + \Upsilon) \lambda^a \tilde{\varepsilon}_{cd} \{\partial_R A^d, \Pi_a\} \\ &\quad + 2\rho \partial_R A^d \lambda_\Upsilon \tilde{\varepsilon}_{cd} \{(1 + \Upsilon), \Pi_\Upsilon\}] d^3 y \\ &= \int [-2\rho (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta_{cb} \partial_a \delta^3(x-y) + 2\rho \partial_a A_t (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta_{cb} \partial_R \delta^3(x-y) \\ &\quad + 2\rho \lambda_R \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta_{cb} \partial_a \delta^3(x-y) - 2\rho \lambda^a (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta_c^b \partial_R \delta^3(x-y) - 2\rho \partial^d \lambda_R \tilde{\varepsilon}_{cd} \delta^3(x-y) \\ &\quad + 2\rho (1 + \Upsilon) \partial_R \lambda^a \tilde{\varepsilon}_{cd} \delta_a^d \delta^3(x-y) + 2\rho \partial_R A^d \lambda_\Upsilon \tilde{\varepsilon}_{cd} \delta^3(x-y)] d^3 y \\ &= 2\rho \partial^a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \tilde{\varepsilon}_{ac} - 2\rho \partial_R (\partial^a A_t (1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}_{ac} - 2\rho \partial^a \lambda_R \tilde{\varepsilon}_{ac} + 2\rho \partial_R (\lambda^a (1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}_{ac} \\ &\quad - 2\rho \partial^d \lambda_R \tilde{\varepsilon}_{cd} + 2\rho (1 + \Upsilon) \partial_R \lambda^a \tilde{\varepsilon}_{ca} + 2\rho \partial_R A^d \lambda_\Upsilon \tilde{\varepsilon}_{cd} \\ &= 2\rho [\partial^a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t) - \partial_R (\partial^a A_t (1 + \Upsilon)) - \partial^a \lambda_R + \partial_R (\lambda^a (1 + \Upsilon)) + \partial^a \lambda_R \\ &\quad - (1 + \Upsilon) \partial_R \lambda^a - \partial_R A^a \lambda_\Upsilon] \tilde{\varepsilon}_{ac} \\ &= 2\rho [\partial^a \Upsilon \partial_R A_t - \partial^a A_t \partial_R \Upsilon + \lambda^a \partial_R \Upsilon - \partial_R A^a \lambda_\Upsilon] \tilde{\varepsilon}_{ac} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

no hay restricciones secundarias y en principio, se pueden determinar algunos multiplicadores de Lagrange.

Para ϕ_Υ ,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_\Upsilon(x) &= \{\phi_\Upsilon(x), H_1\} = \int \{\phi_\Upsilon(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3y \\
&= \int \{\Pi_\Upsilon, \rho F_{ab}(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_a A_t (1 + \Upsilon) \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2\rho \lambda^a (1 + \Upsilon) \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab}\} d^3y \\
&= \int [\rho F_{ab} \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_\Upsilon, \Upsilon\} - 2\rho \partial_a A_t \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \{\Pi_\Upsilon, \Upsilon\} + 2\rho \lambda^a \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab} \{\Pi_\Upsilon, \Upsilon\}] d^3y \\
&= \int [-\rho F_{ab} \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta^3(x - y) + 2\rho \partial_a A_t \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta^3(x - y) - 2\rho \lambda^a \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta^3(x - y)] d^3y \\
&= 2\rho [-\partial_a A_b \partial_R A_t + \partial_a A_t \partial_R A_b - \lambda_a \partial_R A_b] \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.6.26}$$

no hay ninguna restricción secundaria y en principio, se puede determinar un multiplicador de Lagrange.

De los resultados anteriores, al haber encontrado una sola restricción secundaria, (3.6.23), va a ser necesario definir la hamiltoniana secundaria,

$$H_2 := H_2 + \int \tilde{\lambda}_t \psi_t d^3y, \tag{3.6.27}$$

con $\tilde{\lambda}_t$ un multiplicador de Lagrange; y verificar que esta nueva restricción ψ_t cumple con las condiciones de consistencia. Entonces, para ψ_t ,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_t(x) &= \{\psi_t(x), H_1\} = \int \{\psi_t(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3y \\
&= \int \{2\rho (\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab}, \lambda^c \Pi_c + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon\} d^3y \\
&= \int 2\rho [\partial_R \Upsilon \lambda^c \{\partial_a A_b, \Pi_c\} + \partial_a A_b \lambda_\Upsilon \{\partial_R \Upsilon, \Pi_\Upsilon\} - \partial_R A_b \lambda_\Upsilon \{\partial_a \Upsilon, \Pi_\Upsilon\} \\
&\quad - \partial_a \Upsilon \lambda^c \{\partial_R A_b, \Pi_c\}] \tilde{\varepsilon}^{ab} d^3y \\
&= \int 2\rho [\partial_R \Upsilon \partial_a \lambda^c \delta_{bc} \delta^3(x - y) + \partial_a A_b \partial_R \lambda_\Upsilon \delta^3(x - y) - \partial_R A_b \partial_a \lambda_\Upsilon \delta^3(x - y) \\
&\quad - \partial_a \Upsilon \partial_R \lambda^c \delta_{bc} \delta^3(x - y)] \tilde{\varepsilon}^{ab} d^3y \\
&= 2\rho [\partial_R \Upsilon \partial_a \lambda_b + \partial_a A_b \partial_R \lambda_\Upsilon - \partial_R A_b \partial_a \lambda_\Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R \lambda_b] \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

no hay ninguna restricción secundaria y en principio, se puede determinar un multiplicador de Lagrange.

Con el último resultado, se concluye que no hay más restricciones secundarias, por lo tanto, esta teoría presenta 6 restricciones, $(\phi_t, \phi_R, \phi_a, \phi_\Upsilon, \psi_t)$.

3.6.6. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez que se han encontrado todas las restricciones que presenta la teoría, (3.6.9), (3.6.10), (3.6.11), (3.6.12) y (3.6.23); lo que sigue es separarlas en restricciones de primera y segunda clase, para lo cual será necesario calcular los paréntesis de Poisson de cada una de las restricciones con todas las demás. Haciendo uso nuevamente de los paréntesis de Poisson fundamentales, se obtiene lo siguiente:

- (I) $\{\phi_t, \phi_t\} = \{\Pi_t, \Pi_t\} = 0$
- (II) $\{\phi_t, \phi_R\} = \{\Pi_t, \Pi_R - \rho F_{cd} \tilde{\varepsilon}^{cd}\} = 0$
- (III) $\{\phi_t, \phi_c\} = \{\Pi_t, \Pi_c + 2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^d - \partial^d A_R) \tilde{\varepsilon}_{cd}\} = 0$

- (IV) $\{\phi_t, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_t, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (V) $\{\phi_t, \psi_t\} = \{\Pi_t, 2\rho(\partial_c A_d \partial_R \Upsilon - \partial_c \Upsilon \partial_R A_d) \tilde{\varepsilon}^{cd}\} = 0$
- (VI) $\{\phi_R, \phi_R\} = \{\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}, \Pi_R - \rho F_{cd} \tilde{\varepsilon}^{cd}\} = 0$
- (VII) $\{\phi_R, \phi_c\} = \{\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}, \Pi_c + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^d - \partial^d A_R) \tilde{\varepsilon}_{cd}\}$
 $= -2\rho \tilde{\varepsilon}_{cd} \partial^d \delta^3(x - y) - 2\rho \tilde{\varepsilon}_{ac} \partial^a \delta^3(x - y) = 0$
- (VIII) $\{\phi_R, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (IX) $\{\phi_R, \psi_t\} = \{\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}, 2\rho(\partial_c A_d \partial_R \Upsilon - \partial_c \Upsilon \partial_R A_d) \tilde{\varepsilon}^{cd}\} = 0$
- (X) $\{\phi_a, \phi_c\} = \{\Pi_a + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}, \Pi_c + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^d - \partial^d A_R) \tilde{\varepsilon}_{cd}\}$
 $= -2\rho \tilde{\varepsilon}_{ac} \partial_R \Upsilon \delta^3(x - y)$
- (XI) $\{\phi_a, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_a + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}, \Pi_\Upsilon\} = 2\rho \tilde{\varepsilon}_{ab} \partial_R A^b \delta^3(x - y)$
- (XII) $\{\phi_\Upsilon, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_\Upsilon, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (XIII) $\{\psi_t, \psi_t\} = \{2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab}, 2\rho(\partial_c A_d \partial_R \Upsilon - \partial_c \Upsilon \partial_R A_d) \tilde{\varepsilon}^{cd}\} = 0$
- (XIV) $\{\psi_t, \phi_\Upsilon\} = \{2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab}, \Pi_\Upsilon\}$
 $= 2\rho \tilde{\varepsilon}^{ab} [\partial_a A_b \partial_R \delta^3(x - y) - \partial_R A_b \partial_a \delta^3(x - y)]$
- (XV) $\{\psi_t, \phi_c\} = \{2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab}, \Pi_c + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^d - \partial^d A_R) \tilde{\varepsilon}_{cd}\}$
 $= 2\rho \tilde{\varepsilon}_{ac} [\partial_R \Upsilon \partial^a \delta^3(x - y) - \partial^a \Upsilon \partial_R \delta^3(x - y)]$

De los resultados anteriores, se concluye que 2 restricciones son de primera clase y 4 restricciones son de segunda clase, de modo que uno las puede redefinir como,

$$\gamma_t := \phi_t = \Pi_t \approx 0, \quad (3.6.29)$$

$$\gamma_R := \phi_R = \Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0, \quad (3.6.30)$$

y

$$\chi_a := \phi_a = \Pi_a + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab} \approx 0, \quad (3.6.31)$$

$$\chi_\Upsilon := \phi_\Upsilon = \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (3.6.32)$$

$$\chi_t := \psi_t = 2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \approx 0. \quad (3.6.33)$$

Nótese que, a pesar de que la teoría de Pontryagin en la frontera cuenta con restricciones de primera clase y por ende, con transformaciones de norma, también presenta restricciones de segunda clase, siendo esta una diferencia clara con la teoría de Pontryagin en el bulto, que únicamente cuenta con restricciones de primera clase, esto es, es una teoría pura de norma.

3.6.7. Grados de libertad

Separadas las restricciones entre de primera y segunda clase, se procede a realizar el conteo de grados de libertad, el cual se calcula como sigue:

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) \right]. \quad (3.6.34)$$

Así, para la teoría de Pontryagin en la frontera, que tiene 2 restricciones de primera clase y 4 de segunda clase, se tiene que,

$$GL = \frac{1}{2} [10 - 2(2) - 4] = 1. \quad (3.6.35)$$

Finalmente, este resultado marca la diferencia principal entre la dinámica de Pontryagin en la frontera y el interior. Puesto que, la primera presenta un grado de libertad, mientras que la segunda no tiene grados de libertad, es decir, una teoría es dinámica y la otra es topológica. Cabe recordar que algo similar sucedió con la teoría de Chern-Simons, teniendo así dos teorías que son topológicas en el interior, pero que en la frontera presentan un grado de libertad.

Ahora bien, partiendo de este resultado se tienen dos caminos a seguir. El primero es responder a qué corresponde este grado de libertad y el segundo es verificar que Chern-Simons se encuentra definida en la frontera de Pontryagin, lo cual en principio parecería un resultado complicado de obtener, ya que la primer teoría es topológica y esta última resultó ser dinámica. El análisis y discusión de estos resultados se realizará en las secciones posteriores. Por el momento, se prosigue con la obtención de las ecuaciones de movimiento generales y las transformaciones de norma.

3.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas

Se define la acción extendida como,

$$\begin{aligned} S_E [A_R, A_t, A^b, \Upsilon, \Pi_R, \Pi_t, \Pi_b, \Pi_\Upsilon, v_t, v_R, u^a, u_\Upsilon, u_t] \\ &:= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{H}_C - v_t \gamma_t - v_R \gamma_R - u^a \chi_a - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - u_t \chi_t \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \right. \\ &\quad + 2\rho \partial_a A_t ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} - v_t \Pi_t - v_R (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \\ &\quad - u^a (\Pi_a + 2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}) - u_\Upsilon \Pi_\Upsilon \\ &\quad \left. - u_t 2\rho (\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] dt dR d^2x, \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

donde se puede identificar a la hamiltoniana extendida, dada por,

$$\begin{aligned} H_E &:= \int [\mathcal{H}_C + v_t \gamma_t + v_R \gamma_R + u^a \chi_a + u_\Upsilon \chi_\Upsilon + u_t \chi_t] d^3y \\ &= \int [\rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_a A_t ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} + v_t \Pi_t + v_R (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \\ &\quad + u^a (\Pi_a + 2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}) + u_\Upsilon \Pi_\Upsilon \\ &\quad + u_t 2\rho (\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab}] d^3y, \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

siendo $v_t, v_R, u^a, u_\Upsilon$ y u_t multiplicadores de Lagrange.

Cabe notar que, tanto la acción extendida S_E como la hamiltoniana extendida H_E contienen toda la información de esta teoría. Ahora bien, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener empleando ambas, pero en este caso se van a calcular a partir de la variación de la acción S_E . Siendo así, el desarrollo está dado como,

$$\begin{aligned}
\delta S_E = \int_{\mathcal{M}} & \left[\dot{A}_t \delta \Pi_t + \Pi_t \delta \dot{A}_t + \dot{A}_R \delta \Pi_R + \Pi_R \delta \dot{A}_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b + \Pi_b \delta \dot{A}^b + \dot{\Upsilon} \delta \Pi_\Upsilon + \Pi_\Upsilon \delta \dot{\Upsilon} \right. \\
& - 2\rho(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta A_b - \rho F_{ab} \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon - \rho F_{ab} (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R \delta A_t \\
& + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta A_t + 2\rho \partial_a A_t \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon + 2\rho \partial_a A_t (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R \delta A_b \\
& - 2\rho \partial_a A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_b \delta A_R - \Pi_t \delta v_t - v_t \delta \Pi_t - (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \delta v_R - v_R \delta \Pi_R + 2\rho v_R \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta A_b \\
& - (\Pi_a + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}) \delta u^a - u^a \delta \Pi_a - 2\rho u^a \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta \Upsilon \\
& - 2\rho u^a (1 + \Upsilon) \tilde{\varepsilon}_{ab} \partial_R \delta A^b + 2\rho u^a \tilde{\varepsilon}_{ab} \partial^b \delta A_R - \Pi_\Upsilon \delta u_\Upsilon - u_\Upsilon \delta \Pi_\Upsilon \\
& - 2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta u_t - 2\rho u_t \partial_R \Upsilon \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta A_b - 2\rho u_t \partial_a A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R \delta \Upsilon \\
& \left. + 2\rho u_t \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta \Upsilon + 2\rho u_t \partial_a \Upsilon \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R \delta A_b \right] dt dR d^2x \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{3.6.38}$$

y al usar integración por partes se llega a,

$$\begin{aligned}
0 = \delta S_E = \int_{\mathcal{M}} & \left[\dot{A}_t \delta \Pi_t - \dot{\Pi}_t \delta A_t + \dot{A}_R \delta \Pi_R - \dot{\Pi}_R \delta A_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b - \dot{\Pi}_b \delta A^b + \dot{\Upsilon} \delta \Pi_\Upsilon - \dot{\Pi}_\Upsilon \delta \Upsilon \right. \\
& + 2\rho \partial_a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_b - \rho F_{ab} \partial_R A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon + \rho \partial_R (F_{ab} (1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_t \\
& - 2\rho \partial_a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_t + 2\rho \partial_a A_t \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon \\
& - 2\rho \partial_R (\partial_a A_t (1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_b + 2\rho \partial_b \partial_a A_t \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_R - \Pi_t \delta v_t - v_t \delta \Pi_t \\
& - (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab}) \delta v_R - v_R \delta \Pi_R - 2\rho \partial_a v_R \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_b \\
& - (\Pi_a + 2\rho((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab}) \delta u^a - u^a \delta \Pi_a - 2\rho u^a \partial_R A^b \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta \Upsilon \\
& + 2\rho \partial_R (u^a (1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta A^b - 2\rho \partial^b u^a \tilde{\varepsilon}_{ab} \delta A_R - \Pi_\Upsilon \delta u_\Upsilon - u_\Upsilon \delta \Pi_\Upsilon \\
& - 2\rho(\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta u_t + 2\rho \partial_a (u_t \partial_R \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_b \\
& \left. + 2\rho \partial_R (u_t \partial_a A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon - 2\rho \partial_a (u_t \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta \Upsilon - 2\rho \partial_R (u_t \partial_a \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \delta A_b \right] dt dR d^2x \\
& + \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_t (\Pi_t \delta A_t) + \partial_t (\Pi_R \delta A_R) + \partial_t (\Pi_b \delta A^b) + \partial_t (\Pi_\Upsilon \delta \Upsilon) \right. \\
& - 2\rho \partial_a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t \delta A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} - \rho \partial_R (F_{ab} (1 + \Upsilon) \delta A_t) \tilde{\varepsilon}^{ab} \\
& + 2\rho \partial_a (((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \delta A_t) \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2\rho \partial_R (\partial_a A_t (1 + \Upsilon) \delta A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \\
& - 2\rho \partial_b (\partial_a A_t \delta A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2\rho \partial_a (v_R \delta A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_R (u^a (1 + \Upsilon) \delta A^b) \tilde{\varepsilon}_{ab} \\
& + 2\rho \partial^b (u^a \delta A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab} - 2\rho \partial_a (u_t \partial_R \Upsilon \delta A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} - 2\rho \partial_R (u_t \partial_a A_b \delta \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} \\
& \left. + 2\rho \partial_a (u_t \partial_R A_b \delta \Upsilon) \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2\rho \partial_R (u_t \partial_a \Upsilon \delta A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] dt dR d^2x
\end{aligned} \tag{3.6.39}$$

por lo tanto, se tienen las ecuaciones de movimiento siguientes:

$$\begin{aligned}
\delta A_t &: -\dot{\Pi}_t + 2\rho [\partial_R (\partial_a A_b (1 + \Upsilon)) - \partial_a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R)] \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
\delta A_R &: -\dot{\Pi}_R + 2\rho \partial_b (\partial_a A_t - u_a) \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
\delta A^b &: -\dot{\Pi}_b + 2\rho [\partial^a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - v_R + u_t \partial_R \Upsilon) - \partial_R ((\partial^a A_t - u^a)(1 + \Upsilon) + u_t \partial^a \Upsilon)] \tilde{\varepsilon}_{ab} = 0, \\
\delta \Upsilon &: -\dot{\Pi}_\Upsilon - 2\rho [\partial_a A_b \partial_R A_t + (u_a - \partial_a A_t) \partial_R A_b - \partial_R (u_t \partial_a A_b) + \partial_a (u_t \partial_R A_b)] \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
\delta \Pi_t &: \dot{A}_t - v_t = 0, \\
\delta \Pi_R &: \dot{A}_R - v_R = 0, \\
\delta \Pi_b &: \dot{A}^b - u^b = 0, \\
\delta \Pi_\Upsilon &: \dot{\Upsilon} - u_\Upsilon = 0, \\
\delta v_t &: \gamma_t = \Pi_t = 0, \\
\delta v_R &: \gamma_R = \Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
\delta u^a &: \chi_a = \Pi_a + 2\rho ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab} = 0, \\
\delta u_\Upsilon &: \chi_\Upsilon = \Pi_\Upsilon = 0, \\
\delta u_t &: \chi_t = 2\rho (\partial_a A_b \partial_R \Upsilon - \partial_a \Upsilon \partial_R A_b) \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0,
\end{aligned} \tag{3.6.40}$$

siempre y cuando el término se frontera,

$$\begin{aligned}
\delta S_E \Big|_{\text{Boundary}} = \int_{\mathcal{M}} & \left[\partial_t (\Pi_t \delta A_t + \Pi_R \delta A_R + \Pi_b \delta A^b + \Pi_\Upsilon \delta \Upsilon) \right. \\
& - 2\rho \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_R (\partial_a A_b (1 + \Upsilon) \delta A_t + ((u_a - \partial_a A_t)(1 + \Upsilon) - u_t \partial_a \Upsilon) \delta A_b + u_t \partial_a A_b \delta \Upsilon) \\
& + 2\rho \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a (((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \delta A_t + (\partial_b A_t - u_b) \delta A_R + u_t \partial_R A_b \delta \Upsilon \\
& \left. + (v_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - u_t \partial_R \Upsilon) \delta A_b) \right] dt dR d^2 x,
\end{aligned} \tag{3.6.41}$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas.

3.6.9. Transformaciones de norma

Encontradas las ecuaciones de movimiento, un siguiente paso es calcular las transformaciones de norma que mantienen invariantes estas ecuaciones. Haciendo uso del formalismo de Castellani⁶, se puede definir el generador de estas transformaciones en términos de las restricciones de primera clase, esto es,

$$G := \int [\epsilon_t(y) \gamma_t(y) + \epsilon_R(y) \gamma_R(y)] d^3 y \tag{3.6.42}$$

$$= \int [\epsilon_t \Pi_t + \epsilon_R (\Pi_R - \rho F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab})] d^3 y. \tag{3.6.43}$$

De manera que, las transformaciones de norma son,

$$\begin{aligned}
A_\Xi &\rightarrow A'_\Xi = A_\Xi + \delta A_\Xi, \\
\Pi_\Xi &\rightarrow \Pi'_\Xi = \Pi_\Xi + \delta \Pi_\Xi,
\end{aligned}$$

⁶Para más información ver [30].

donde ,

$$\delta A_t(x) = \{A_t(x), G\} = \int \epsilon_t(y) \{A_t(x), \Pi_t(y)\} d^3y = \epsilon_t(x) = \epsilon_t \quad (3.6.44)$$

$$\delta A_R(x) = \{A_R(x), G\} = \int \epsilon_R(y) \{A_R(x), \Pi_R(y)\} d^3y = \epsilon_R(x) = \epsilon_R \quad (3.6.45)$$

$$\delta A_a(x) = \{A_a(x), G\} = 0 \quad (3.6.46)$$

$$\delta \Upsilon(x) = \{\Upsilon(x), G\} = 0 \quad (3.6.47)$$

y

$$\delta \Pi_t(x) = \{\Pi_t(x), G\} = 0 \quad (3.6.48)$$

$$\delta \Pi_R(x) = \{\Pi_R(x), G\} = 0 \quad (3.6.49)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a(x) &= \{\Pi_a(x), G\} = - \int \epsilon_R(y) 2\rho \tilde{\epsilon}^{bc} \{\Pi_a(x), \partial_b^{(y)} A_c(y)\} d^3y \\ &= \int \epsilon_R(y) 2\rho \tilde{\epsilon}^{bc} \partial_b^{(y)} \delta_{ac} \delta^3(x-y) d^3y \\ &= -2\rho \partial^b \epsilon_R \tilde{\epsilon}_{ba} = 2\rho \tilde{\epsilon}_{ab} \partial^b \epsilon_R \end{aligned} \quad (3.6.50)$$

$$\delta \Pi_\Upsilon(x) = \{\Pi_\Upsilon(x), G\} = 0. \quad (3.6.51)$$

En vista de los resultados anteriores, se concluye que la teoría en la frontera no es invariante por completo bajo el grupo $U(1)$ ni bajo difeomorfismos, mientras que en el bulto sí tenía estas simetrías; esto se debe a que ahora los únicos campos que tienen simetría de norma son A_t y A_R , es decir, sólo es invariante bajo un subgrupo de $U(1)$ y de los difeomorfismos

3.7. Dinámica de Pontryagin en la frontera

Llegado a este punto, será necesario realizar las siguientes observaciones. Por una parte, uno de los objetivos fue probar que Chern-Simons está contenido en la teoría en la frontera de Pontryagin, lo cual se realizó anteriormente en el análisis lagrangiano. Este resultado indicaría que Pontryagin en la frontera es una teoría topológica, ya que Chern-Simons se encuentra definida ahí y tal teoría es topológica. No obstante, en el análisis hamiltoniano se probó que la teoría en la frontera es diferente a la correspondiente teoría en el bulto, ya que la teoría en la frontera de Pontryagin presenta 1 grado de libertad local, lo cual indica que esta teoría es dinámica.

Estos dos resultados resultan contradictorios, pero lo que en realidad está sucediendo es que la teoría en la frontera de Pontryagin tiene más de un sector: uno topológico y otro dinámico. El sector que se obtenga dependerá en parte de la solución a las ecuaciones de movimiento, más aún, de la solución a la condición de restricción a la frontera, es decir, de la forma en que se deben comportar los campos para no propagarse de una hipersuperficie (frontera) a otro.

Esto se mostró de manera detallada en la descripción lagrangiana, con las soluciones (3.5.10) para la condición de restricción a la frontera (3.5.6). Donde las ecuaciones de movimiento restantes se reducen a las de Chern-Simons, mostrando así que bajo esta solución Pontryagin en la frontera es topológica y por tanto, uno está en el sector topológico.

Por otra parte, bajo otra solución a (3.5.6), la dinámica que se obtiene va a corresponder al grado de libertad dinámico, estando ahora en el sector dinámico, lo cual se podrá ver de manera más detallada en lo que sigue.

3.7.1. Sector quiral

Usando el algoritmo de Dirac-Bergmann se ha podido obtener el número de grados de libertad locales que presenta la teoría de Pontryagin en la frontera, $GL = 1$, y con este resultado se pueden

analizar nuevamente las ecuaciones de movimiento lagrangianas, para así dar una descripción de la dinámica de esta teoría con base en el grado de libertad que se tiene, es decir, caracterizar al grado de libertad. La razón de fijarse en la formulación lagrangiana se debe a que las ecuaciones de movimiento hamiltonianas resultan ser más complicadas de manejar, además de que se tienen más variables dinámicas: los campos, momentos y multiplicadores de Lagrange, es por ello que se opta trabajar en la descripción lagrangiana.

Entonces, al saber que se tiene 1 grado de libertad local, se comienza por proponer una solución a la condición de restricción a la frontera,

$$F_{ij}\partial_R A_k \tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0,$$

donde esta solución es tal que los campos van a tener la forma,⁷,

$$A_R = \partial_R \Psi \quad \text{y} \quad A_k = \partial_k \Psi, \quad (3.7.1)$$

con $\Psi = \Psi(x^\mu)$ un campo escalar. Así, la ecuación (3.5.6) se va a satisfacer trivialmente, ya que $F_{ij} = 0$. Por otra parte, la ecuación (3.5.5) pasa a ser,

$$\begin{aligned} 0 &= [\partial_i((1 + \Upsilon)\partial_R\partial_j\Psi)] \tilde{\varepsilon}^{ijk} \\ &= \partial_i \Upsilon \partial_R \partial_j \Psi \tilde{\varepsilon}^{ijk}. \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Con este resultado ahora se propone,

$$\Upsilon = \Psi, \quad (3.7.3)$$

así, la ecuación anterior termina por ser,

$$0 = \partial_i \Psi \partial_R \partial_j \Psi \tilde{\varepsilon}^{ijk}, \quad (3.7.4)$$

la cual lleva a las 3 ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} k = 0 & : 0 = \partial_1 \Psi \partial_R \partial_2 \Psi - \partial_2 \Psi \partial_R \partial_1 \Psi \Rightarrow 0 = \partial_R \left(\frac{\partial_2 \Psi}{\partial_1 \Psi} \right) \Rightarrow \partial_2 \Psi = f(t, x^b) \partial_1 \Psi, \\ k = 1 & : 0 = \partial_2 \Psi \partial_R \partial_0 \Psi - \partial_0 \Psi \partial_R \partial_2 \Psi \Rightarrow 0 = \partial_R \left(\frac{\partial_0 \Psi}{\partial_2 \Psi} \right) \Rightarrow \partial_0 \Psi = g(t, x^b) \partial_2 \Psi, \\ k = 2 & : 0 = \partial_0 \Psi \partial_R \partial_1 \Psi - \partial_1 \Psi \partial_R \partial_0 \Psi \Rightarrow 0 = \partial_R \left(\frac{\partial_1 \Psi}{\partial_0 \Psi} \right) \Rightarrow \partial_0 \Psi = h(t, x^b) \partial_1 \Psi, \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

que se reducen a un conjunto de 2 ecuaciones de onda quirales dependientes para Ψ ,

$$\partial_0 \Psi = h(t, x^b) \partial_1 \Psi \quad \text{y} \quad \partial_0 \Psi = g(t, x^b) \partial_2 \Psi, \quad (3.7.6)$$

con $f = \frac{h}{g}$ y cuya solución general está dada por,

$$\Psi = C(R)\Psi(x^1 + fx^2 + ht). \quad (3.7.7)$$

Nótese que entonces Ψ se identifica como el grado de libertad de la teoría en la frontera de Pontryagin y su dinámica es similar a la de un bosón quiral tridimensional. Este comportamiento resulta ser análogo al que se obtiene en [2] con la teoría de Chern-Simons, donde se obtiene una dinámica similar a la un bosón quiral bidimensional que se puede asociar al efecto Hall cuántico.

Ahora bien, conociendo la dinámica general de esta teoría uno puede preguntarse qué sistema físico podría modelar. En principio, y siguiendo la analogía con Chern-Simons, los sistemas físicos

⁷Esta solución está motivada en la propuesta que se da en [2] para resolver la condición de restricción a la frontera de la teoría de Chern-Simons en la frontera.

cuyo comportamiento más se asemeja a la dinámica de Pontryagin (en el interior y en la frontera) son los aislantes topológicos, que corresponden a materiales, en esta situación tridimensionales, los cuales tienen la característica de que en el volumen son aislantes (no hay grados de libertad en el bulto), mientras que en la superficie son conductores (hay grados de libertad en la frontera).

3.7.2. Séctor topológico (Chern-Simons)

El sector topológico a nivel lagrangiano se puede consultar de manera detallada en la sección 3.5.2, donde bajo ciertas condiciones para las variables dinámicas, (3.5.10), se obtuvo que las ecuaciones de movimiento (3.5.5) se reducen a las ecuaciones de Chern-Simons, (3.5.9), siendo esta última una teoría topológica. Mientras que la ecuación (3.5.6) se satisface de manera trivial bajo la elección realizada para los campos. Entonces, con estas condiciones la teoría de Pontryagin en la frontera es una teoría topológica.

Para observar este sector a nivel hamiltoniano, igual con la teoría de Chern-Simons, se tiene el siguiente desarrollo.

Tomando en cuenta que ahora se está en la formulación hamiltoniana, lo que se hará a continuación es comprobar que la teoría de Chern-Simons está contenida en la teoría de Pontryagin en la frontera, como ya se hizo anteriormente en la formulación lagrangiana, sección 3.5.2. Para ello, se van a proponer algunas condiciones particulares para las variables dinámicas y se va a comparar la información que proporcionan las ecuaciones de movimiento de ambas teorías.

Para poder realizar lo anterior, primero será necesario recordar que la acción extendida de Chern-Simons abeliana está dada como,

$$S_{E(C-S)} = \int_{\mathcal{N}} \left[\Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^b \dot{A}_b + \frac{1}{2} A_0 \partial_a A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} + \frac{1}{2} A_a \partial_b A_0 \tilde{\varepsilon}^{ab} - v_0 \Pi^0 - v \left(\partial_a \Pi^a + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a A_b \right) - u_a \left(\Pi^a - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} A_b \right) \right] d^3x, \quad (3.7.8)$$

siendo sus ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} \delta A_0 &: -\dot{\Pi}^0 + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} = 0, \\ \delta A_b &: -\dot{\Pi}^b + \frac{1}{2} (u_a + \partial_a v) \tilde{\varepsilon}^{ab} - \partial_a A_0 \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\ \delta \Pi^0 &: \dot{A}_0 - v_0 = 0, \\ \delta \Pi^b &: \dot{A}_b + \partial_b v - u_b = 0, \\ \delta v_0 &: \Pi^0 = 0, \\ \delta v &: \partial_a \Pi^a + \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} = 0, \\ \delta u_a &: \Pi_a - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ab} A_b = 0, \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

que se obtienen directamente de la variación de la acción $S_{E(C-S)}$, siendo v y v_0 multiplicadores de Lagrange que acompañan a las restricciones de primera clase, mientras que u_a son multiplicadores de Lagrange que acompañan a las restricciones de segunda clase.

Para las ecuaciones de movimiento de Chern-Simons, considere la elección y redefiniciones siguientes,

$$\partial_b v = 0, \quad A_0 := \frac{1}{2} A_0 \quad \text{y} \quad v_0 := \frac{1}{2} v_0, \quad (3.7.10)$$

lo cual no modifica la información que proporcionan tales ecuaciones puesto que v y v_0 son funciones arbitrarias. Además, al realizar un poco de álgebra y reorganizar, las ecuaciones (3.7.9) pasan a ser,

$$\begin{aligned}
\dot{A}_0 &= v_0, \\
\Pi^0 &= 0, \\
0 = \dot{\Pi}^0 &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} = 0, \\
\dot{A}_b &= u_b, \\
\dot{\Pi}^b &= \frac{1}{2} (u_a - \partial_a A_0) \tilde{\varepsilon}^{ab}, \\
\partial_a \Pi^a &= -\frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} \quad \Rightarrow \quad \partial_a \Pi^a = 0, \\
\Pi^a &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ab} A_b.
\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

Por otra parte, para las ecuaciones de movimiento de Pontryagin en la frontera, considere las siguientes condiciones para las variables dinámicas⁸,

$$\begin{aligned}
\partial_R A_t &= 0, \quad \partial_R A_b = 0, \quad \partial_R u_t = 0, \quad \partial_R u^a = 0, \\
\partial_R \Upsilon &= 1, \quad A^b = \partial^b A_R, \quad \partial^a v_R = \partial^a u_t \partial_R \Upsilon \quad \text{y} \quad \rho = \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{3.7.12}$$

Además, al realizar un poco de álgebra y reorganizar, parte de las ecuaciones de movimiento (3.6.40) pasan a ser⁹,

$$\begin{aligned}
\dot{A}_t &= v_t, \\
\Pi_t &= 0, \\
0 = \dot{\Pi}_t &= \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} = 0, \\
\dot{A}^b &= u^b, \\
\dot{\Pi}_b &= \frac{1}{2} (u^a - \partial^a A_t) \tilde{\varepsilon}_{ab}, \\
\partial^a \Pi_a &= \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}_{ab} F^{ab} \quad \Rightarrow \quad \partial^a \Pi_a = 0, \\
\Pi_a &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ab} A^b.
\end{aligned} \tag{3.7.13}$$

De estos últimos dos conjuntos de ecuaciones de movimiento se puede observar que hay un claro parecido, de hecho, ambos conjuntos de ecuaciones contienen la misma información física, tal como la evolución temporal, las restricciones y los multiplicadores de Lagrange. Por lo cual, se puede concluir que las ecuaciones de Chern-Simons (3.7.11) están contenidas, como caso particular¹⁰, en las ecuaciones de Pontryagin en la frontera (3.7.13).

Cabe destacar que, las ecuaciones de movimiento restantes son las siguientes¹¹,

⁸Este tipo de condiciones están inspiradas en las que se usaron en la descripción lagrangiana.

⁹Las ecuaciones de movimiento empleadas son las que se obtienen de δA_t , δA^b , $\delta \Pi_t$, $\delta \Pi_b$, δv_t y δu^a

¹⁰Son un caso particular en el sentido de que se obtienen al proponer condiciones particulares para las variables dinámicas de la teoría en la frontera de Pontryagin.

¹¹Las ecuaciones de movimiento restantes son las que se obtienen de δA_R , $\delta \Upsilon$, $\delta \Pi_R$, $\delta \Pi_\Upsilon$, δv_R , δu_Υ y δu_t

$$\begin{aligned}
 0 = \dot{\Pi}_R &= -\frac{1}{2}\partial_b u_a \tilde{\varepsilon}^{ab} \Rightarrow \partial_b u_a \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
 \dot{\Pi}_\Upsilon &= 0, \\
 \dot{A}_R &= v_R, \\
 \dot{\Upsilon} &= u_\Upsilon, \\
 \Pi_R &= \frac{1}{4}F_{ab}\tilde{\varepsilon}^{ab} = 0, \\
 \Pi_\Upsilon &= 0, \\
 \frac{1}{2}\partial_a A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} &= 0 \Rightarrow \partial_a A_b \tilde{\varepsilon}^{ab} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.7.14}$$

las cuales contienen información redundante que ya se encuentra en (3.7.13) e indican que algunos campos son cero o funciones arbitrarias. Es decir, la teoría de Pontryagin en la frontera sujeta a (3.7.12) resulta ser topológica y además, para este caso particular, tiene contenida a la teoría de Chern-Simons.

Capítulo 4

Electrodinámica+Pontryagin en la frontera

De la literatura, se sabe que la electrodinámica sin fuentes es una teoría dinámica y la teoría de Pontryagin es una teoría topológica. Ahora bien, cuando se acoplan ambas teorías y se analiza el sistema conjunto, lo que se obtiene es la dinámica de la electrodinámica¹. Es decir, cuando se acopla la teoría de Pontryagin a la electrodinámica, la primera no modifica a la segunda en ningún aspecto, lo cual se debe a que Pontryagin es topológica. Cabe destacar que este resultado es en el bulto.

Por otra parte, en los capítulos anteriores se ha mostrado que las teorías en la frontera de la electrodinámica y de Pontryagin son completamente diferentes a sus correspondientes teorías en el interior. Debido a esto, uno puede esperar que la teoría acoplada tenga un comportamiento similar en la frontera, lo cual se mostrará a lo largo de este capítulo, esto es, se va a construir y analizar la correspondiente teoría en la frontera de Electrodinámica+Pontryagin, usando el algoritmo propuesto en [2].

No obstante, surge una pregunta con respecto a lo que se ha comentado inicialmente del acoplamiento en el bulto. Es decir, quizás la teoría en la frontera de la electrodinámica más Pontryagin sea diferente a la teoría en la frontera de la electrodinámica más Pontryagin en el bulto, pero ¿puede ocurrir que la electrodinámica más Pontryagin en la frontera se reduzca a la electrodinámica en la frontera? lo cual diría que el acoplamiento de Pontryagin a la electrodinámica no afecta tampoco en la frontera, así como sucede en el bulto; o será que la dinámica de la electrodinámica más Pontryagin en la frontera sea diferente a la que se obtuvo en la electrodinámica en la frontera y que la contribución de Pontryagin a la electrodinámica sea relevante, ya sea en las ecuaciones de movimiento, simetrías o grados de libertad en la frontera. Con esta motivación, en este capítulo

Tomando en cuenta lo anterior, además de la construcción de la correspondiente teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes acoplada a Pontryagin, los objetivos de este capítulo son determinar por completo la dinámica de la teoría en la frontera, es decir: obtener e interpretar ecuaciones de movimiento, condiciones de frontera, restricciones, simetrías, número y caracterización de grados de libertad; para después comparar estos resultados obtenidos en la frontera con los que uno obtiene en el interior, destacando las principales diferencias y similitudes que hay entre ambas. También se mostrará cuál de los dos razonamientos comentados con anterioridad es cierto. Cabe destacar que, los resultados que se presentan a continuación son originales.

¹En lo que sigue de la tesis ya solo se escribirá “electrodinámica” para referirse a la electrodinámica sin fuentes, esto es, se omitirá el término “sin fuentes”, a menos que se requiera para evitar ambigüedad.

4.1. Elección del principio de acción

El principio de acción de la electrodinámica sin fuentes acoplada al invariante topológico de Pontryagin en un espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras está definido como,

$$S_{ED+P}[A_\mu] = -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + \frac{\xi}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x, \quad (4.1.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la curvatura de la conexión A_μ , siendo estas las variables dinámicas², con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ índices espacio-temporales. \mathcal{M} es una región del espacio-tiempo de $4D^3$, κ y ξ son constantes de acoplamiento. Además, se tiene la densidad tensorial de Levi-Civita, $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = (-1)^{\bar{s}} \sqrt{|g|} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, con $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ el símbolo de Levi-Civita, completamente antisimétrico, g el determinante de la métrica y \bar{s} la signatura de la métrica.

Cabe recordar que, a este principio de acción se le va a pedir que sea diferenciable, es decir, que se puedan recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

4.2. Elección del tipo de frontera

Como ya se comentó en el capítulo 1, se va a elegir una frontera del tipo temporaloide, es decir, la región \mathcal{M} del espacio-tiempo se va a foliar mediante una familia de hipersuperficies temporaloides (donde alguna de estas será la frontera). El motivo de esta elección es que más adelante, al tener una dirección temporal en estas hipersuperficies, uno podrá estudiar la dinámica de la teoría en la frontera, aplicando un análisis Lagrangiano o Hamiltoniano.

4.3. Proyección del principio de acción

Una vez elegido el principio de acción y el tipo de frontera, lo que sigue es proyectar el principio de acción, (4.1.1), en una familia de hipersuperficies temporaloides que folien la región del espacio-tiempo \mathcal{M} (donde una de ellas será la frontera). Para esto, se van a emplear los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, como el principio de acción de la teoría acoplada es una suma de los principios de acción de la electrodinámica y Pontryagin, entonces la proyección del principio de acción acoplado será la suma de sus correspondientes principios de acción proyectados separadamente, (2.3.5) más (3.3.4), esto es:

$$\begin{aligned} S_{ED+P}[A_\mu] &= -\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\partial_\alpha (R^\rho A_\rho) \partial^\alpha (R^\tau A_\tau) - 2(2\partial^\alpha (R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A^\alpha) \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\alpha] d^4x \\ &\quad + \xi \int_{\mathcal{M}} [F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta - F_{\mu\nu} \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha)] \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[-\frac{\kappa}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \partial_\alpha (R^\rho A_\rho) \partial^\alpha (R^\tau A_\tau) - \xi F_{\mu\nu} \partial_\beta (R^\alpha A_\alpha) \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} (2\partial^\alpha (R^\rho A_\rho) - \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A^\alpha) \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\alpha + \xi F_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\beta \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\beta} \right] d^4x, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

por lo tanto, el principio de acción de ED+P proyectado estará dado por,

$$\begin{aligned} S_{ED+P}[A_\mu] &= \int_{\mathcal{M}} \left[-\frac{\kappa}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \partial_\alpha (R^\rho A_\rho) \partial^\alpha (R^\tau A_\tau) - \xi F_{\mu\nu} \partial_\alpha (R^\beta A_\beta) \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \left(\kappa \partial^\alpha (R^\rho A_\rho) - \frac{\kappa}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A^\alpha + \xi F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} \right) \mathcal{L}_{\mathbf{R}} A_\alpha \right] d^4x. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

²En esta teoría, las conexiones A_μ corresponden al cuadripotencial, esto es, $A_\mu = (-\Phi, \vec{A})$, con Φ el potencial escalar eléctrico y \vec{A} el potencial vectorial magnético.

³Región del espacio-tiempo de 4 dimensiones con fronteras donde es aplicable el método propuesto en [2].

Este sigue siendo un principio de acción en el bulto, pero que ya sabe sobre la foliación de la región del espacio-tiempo \mathcal{M} mediante una familia de hipersuperficies temporaloides.

4.4. Construcción del principio de acción en la frontera

Ahora que se tiene el principio de acción de la ED+P proyectado, (4.3.2), nótese que el término que tiene la derivada de Lie, $(\kappa\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \frac{\kappa}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha + \xi F_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha})\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha$, contiene la información de cómo se propagan los grados de libertad a lo largo de \mathbf{R} y como se comentó anteriormente, para restringir que estos grados de libertad no se propaguen de una hipersuperficie temporaloide a la siguiente, es necesario imponer ese término como una restricción de la teoría e introducirlo al principio de acción (4.3.2) por medio del método de los multiplicadores de Lagrange. La razón de este paso, como se discutió en el capítulo 1, se debe a que cuando se vaya a estudiar la dinámica de la teoría en la frontera (una hipersuperficie particular elegida de la foliación), lo que se desea es que esta dinámica permanezca en la frontera elegida, es decir, que las conexiones A_μ no se propaguen de una frontera a otra de un momento a otro, por lo cual es necesario introducir una restricción que corresponda al término que contiene esta información.

De esta manera, se define el principio de acción de ED+P en la familia de fronteras (hipersuperficies) temporaloides como,

$$S_{ED+P|B}[A_\mu, \Upsilon] = \int_{\mathcal{M}} \left[-\frac{\kappa}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2}\partial_\alpha(R^\rho A_\rho)\partial^\alpha(R^\tau A_\tau) - \xi F_{\mu\nu}\partial_\alpha(R^\beta A_\beta)\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} \right. \\ \left. + (1 + \Upsilon) \left(\kappa\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \frac{\kappa}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha + \xi F_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} \right) \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha \right] d^4x. \quad (4.4.1)$$

siendo Υ el multiplicador de Lagrange y una variable dinámica, que permite introducir la restricción $(\kappa\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \frac{\kappa}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha + \xi F_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha})\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha = 0$ a la acción, que debe cumplirse para cada frontera (hipersuperficie) temporaloide. En este caso, esta restricción corresponde a la *condición de restricción a la frontera*:

$$\left(\kappa\partial^\alpha(R^\rho A_\rho) - \frac{\kappa}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{R}}A^\alpha + \xi F_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\alpha} \right) \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_\alpha = 0. \quad (4.4.2)$$

El principio de acción (4.4.1) sigue siendo uno en el interior, por ello se está considerando a \mathcal{M} como región de integración. Pero, a diferencia de (4.1.1), este principio de acción, (4.4.1), ya contiene la información de la familia de hipersuperficie temporaloides, que folian \mathcal{M} , y donde la dinámica en cada una será independiente de las demás.

4.5. Análisis lagrangiano

Teniendo el principio de acción en la frontera, el último paso es realizar el análisis de la dinámica de esta teoría. Para ello, lo primero que se hará es usar coordenadas adaptadas a la foliación⁴, de manera que, $\partial_R A_i = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}A_i$ y $A_R := A_\rho R^\rho$, donde los índices latinos, $i = 0, 1, 2$, etiquetan coordenadas espacio-temporales arbitrarias en cada una de las hipersuperficies temporaloides. De esta manera, el principio de acción de ED+P en la frontera, (4.4.1), pasa a ser:

$$S_{ED+P|B}[A_R, A_i, \Upsilon] = \int_{\mathcal{M}} \left[-\frac{\kappa}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{\kappa}{2}\partial_i A_R \partial^i A_R - \xi F_{ij}\partial_k A_R \tilde{\varepsilon}^{ijk} \right. \\ \left. + (1 + \Upsilon) \left(\kappa\partial^k A_R - \frac{\kappa}{2}\partial_R A^k + \xi F_{ij}\tilde{\varepsilon}^{ijk} \right) \partial_R A_k \right] dR d^3x. \quad (4.5.1)$$

y con esta acción se va a trabajar a continuación.

⁴Usar coordenadas adaptadas a la foliación quiere decir que, se está eligiendo trabajar en un sistema de referencia con base coordenada (x^0, x^1, x^2, R) donde ahora uno de los ejes espaciales tiene la misma dirección que la del vector normal a las hipersuperficies temporaloides, \mathbf{R} .

4.5.1. Ecuaciones de movimiento

En principio, para calcular las ecuaciones de movimiento habría que realizar la variación de la acción 4.5.1 e igualar a cero,

$$\delta S_{ED+P|B}[A_R, A_i, \Upsilon] = 0, \quad (4.5.2)$$

no obstante, se van a emplear los resultados obtenidos anteriormente. Nótese que el principio de acción de ED+P en la frontera, (4.5.1), es la suma de los principios de acción de ED y P en la frontera construidos separadamente, es decir (2.5.1) más (3.5.1). De esta manera, la variación de la acción $\delta S_{ED+P|B}$, (4.5.2), será la suma de las variaciones de las acciones δS_{EDB} y δS_{PB} que ya se han calculado con anterioridad, (2.5.3) y (3.5.3) respectivamente, obteniendo así:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_{ED+P|B} = \int_{\mathcal{M}} & \left[\kappa (\partial_i F^{ik} - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^k A_R - \partial_R A^k))) \delta A_k \right. \\ & + \kappa \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R + \kappa \left(\partial^k A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^k \right) \partial_R A_k \delta \Upsilon \\ & + \kappa \partial_i (-F^{ij} \delta A_j - \kappa (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R) \\ & + \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^k A_R - \partial_R A^k) \delta A_k) \\ & + \xi (2\partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A_j - \partial_j A_R) - \partial_R (F_{ij}(1 + \Upsilon))) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \delta A_k \\ & + \xi \partial_k F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk} \delta A_R + \xi F_{ij} \partial_R A_k \tilde{\varepsilon}^{ijk} \delta \Upsilon \\ & + \xi \partial_i (2((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) \delta A_j - F_{jk} \delta A_R) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \\ & \left. + \xi \partial_R (F_{ij}(1 + \Upsilon) \delta A_k) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \right] dR d^3 x, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

de donde se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} \delta A_R : 0 &= \kappa \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) + \xi \partial_k F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk}, \\ \delta A_k : 0 &= \kappa \partial_i F^{ik} - \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^k A_R - \partial_R A^k)) + 2\xi \partial_i ((1 + \Upsilon) \partial_R A_j - \partial_j A_R) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \\ &\quad - \xi \partial_R (F_{ij}(1 + \Upsilon)) \tilde{\varepsilon}^{ijk}, \\ \delta \Upsilon : 0 &= \kappa \left(\partial^k A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^k \right) \partial_R A_k + \xi F_{ij} \partial_R A_k \tilde{\varepsilon}^{ijk}, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

que se pueden reescribir como,

$$\delta A_R : 0 = \kappa \partial_i (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i), \quad (4.5.5)$$

$$\delta A_k : 0 = \partial_i (\kappa F^{ik} + 2\xi (1 + \Upsilon) \partial_R A_j \tilde{\varepsilon}^{ijk}) - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\kappa (\partial^k A_R - \partial_R A^k) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk})), \quad (4.5.6)$$

$$\delta \Upsilon : 0 = \left(\kappa \left(\partial^k A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^k \right) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk} \right) \partial_R A_k, \quad (4.5.7)$$

tales ecuaciones se obtienen siempre y cuando el término de frontera,

$$\begin{aligned} \delta S_{EDB|boundary\ term} = \int_{\mathcal{M}} & \left[\kappa \partial_i (-F^{ij} \delta A_j - \kappa (\partial^i A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^i) \delta A_R) \right. \\ & + \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) (\partial^k A_R - \partial_R A^k) \delta A_k) \\ & + \xi \partial_i (2((1 + \Upsilon) \partial_R A_k - \partial_k A_R) \delta A_j - F_{jk} \delta A_R) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \\ & \left. + \xi \partial_R (F_{ij}(1 + \Upsilon) \delta A_k) \tilde{\varepsilon}^{ijk} \right] dR d^3 x, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

se haga cero bajo condiciones de frontera apropiadas. Cabe mencionar que, las condiciones asintóticamente planas propuestas en el capítulo 2 para la ED en la frontera, (2.5.21), (2.5.27) y (2.5.30), también hacen bien definido el principio de acción de ED+P en la frontera, (4.5.1), siendo la frontera la región asintótica, $\lim_{r \rightarrow \infty}$, que también se conoce como el infinito espacial.

Ahora que se tienen las ecuaciones de movimiento, se procede a reescribirlas en términos de los campos eléctrico y magnético, para lo cual, será necesario recordar lo siguiente,

$$E^{\bar{i}} = F^{0\bar{i}}, \quad F^{\bar{i}\bar{j}} = \varepsilon^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} B_{\bar{k}} \quad \text{y} \quad A^0 = \Phi, \quad (4.5.9)$$

donde los índices latinos con una barra encima se usan para etiquetar coordenadas espaciales en 3 dimensiones, esto es, $\bar{i} = R, 1, 2$.

Entonces, de la ecuación (4.5.5),

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \partial_{\bar{i}} (\partial^{\bar{i}} A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^{\bar{i}}) \\ &= \partial_0 (\partial^0 A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^0) + \partial_b (\partial^b A_R - (1 + \Upsilon) \partial_R A^b) \\ &= \partial_0 (F^{0R} - \Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (F^{bR} - \Upsilon \partial_R A^b) \\ &= \partial_0 (E^R - \Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (\varepsilon^{bRa} B_a - \Upsilon \partial_R A^b) \\ &= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \varepsilon^{Rba} \partial_b B_a - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b) \\ &= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - (\nabla \times \mathbf{B})^R - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b) \\ \Rightarrow \quad \dot{E}^R &= (\nabla \times \mathbf{B})^R + \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) + \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

se tiene una ecuación de movimiento para la componente E^R del campo eléctrico, que es similar a la ley de Ampere-Maxwell más términos extra.

De la ecuación (4.5.6), para $k = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\bar{i}} (\kappa F^{i0} + 2\xi(1 + \Upsilon) \partial_R A_j \tilde{\varepsilon}^{ij0}) - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\kappa (\partial^0 A_R - \partial_R A^0) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ij0})) \\ &= \partial_a (\kappa F^{a0} + 2\xi(1 + \Upsilon) \partial_R A_b \tilde{\varepsilon}^{ab0}) - \partial_R ((1 + \Upsilon) (\kappa F^{0R} + \xi F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab0})) \\ &= -\kappa \partial_a E^a + 2\xi \partial_a \partial_R A_b \varepsilon^{abR} + 2\xi \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b \varepsilon^{abR}) - \kappa \partial_R ((1 + \Upsilon) E^R) \\ &\quad - 2\xi \partial_R \partial_a A_b \varepsilon^{abR} - \xi \partial_R (\Upsilon \varepsilon_{abR} B^R \varepsilon^{abR}) \\ &= -\kappa \partial_a E^a - \kappa \partial_R E^R - \kappa \partial_R (\Upsilon E^R) - 2\xi \partial_R (\Upsilon B^R) + 2\xi \varepsilon^{abR} \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b) \\ &= -\kappa \nabla \cdot \mathbf{E} - \partial_R (\Upsilon (\kappa E^R + 2\xi B^R)) + 2\xi \varepsilon^{abR} \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b) \\ \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_R \left(\Upsilon \left(E^R + 2 \frac{\xi}{\kappa} B^R \right) \right) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{abR} \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b), \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

se tiene una ecuación de movimiento para el campo eléctrico, que es similar a la ley de Gauss más términos extra.

De la ecuación (4.5.6), para $k = b$,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i \left(\kappa F^{ib} + 2\xi(1 + \Upsilon) \partial_R A_j \tilde{\varepsilon}^{ijb} \right) - \partial_R \left((1 + \Upsilon) \left(\kappa (\partial^b A_R - \partial_R A^b) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijb} \right) \right) \\
&= \kappa \partial_0 F^{0b} + \kappa \partial_a F^{ab} + 2\xi \partial_0 \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_a \tilde{\varepsilon}^{0ab} \right) + 2\xi \partial_a \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_0 \tilde{\varepsilon}^{a0b} \right) \\
&\quad - \kappa \partial_R \left((1 + \Upsilon) F^{bR} \right) - 2\xi \partial_R \left((1 + \Upsilon) F_{0a} \tilde{\varepsilon}^{0ab} \right) \\
&= \kappa \partial_0 E^b + \kappa \partial_a (\varepsilon^{abR} B_R) + 2\xi \partial_0 \partial_R A_a \varepsilon^{Rab} + 2\xi \partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a \varepsilon^{Rab}) + 2\xi \partial_a \partial_R A_0 \varepsilon^{aRb} \\
&\quad + 2\xi \partial_a (\Upsilon \partial_R A_0 \varepsilon^{aRb}) - \kappa \partial_R \left((1 + \Upsilon) \varepsilon^{bRa} B_a \right) + 2\xi \partial_R \left((1 + \Upsilon) E_a \varepsilon^{Rab} \right) \\
&= \kappa \dot{E}^b - \kappa \varepsilon^{baR} \partial_a B_R - \kappa \varepsilon^{bRa} \partial_R B_a + 2\xi \partial_R E_a \varepsilon^{Rab} + 2\xi \partial_R F_{0a} \varepsilon^{Rab} + 2\xi \partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a \varepsilon^{Rab}) \\
&\quad - 2\xi \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi \varepsilon^{aRb}) - \kappa \partial_R (\Upsilon \varepsilon^{bRa} B_a) + 2\xi \partial_R (\Upsilon E_a \varepsilon^{Rab}) \\
&= \kappa \dot{E}^b - \kappa \varepsilon^{b\bar{i}\bar{j}} \partial_{\bar{i}} B_{\bar{j}} + \varepsilon^{Rab} \partial_R (\Upsilon (2\xi E_a - \kappa B_a)) + 2\xi \varepsilon^{Rab} (\partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a) + \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi)) \\
&= \kappa \dot{E}^b - \kappa (\nabla \times \mathbf{B})^b + \varepsilon^{Rab} \partial_R (\Upsilon (2\xi E_a - \kappa B_a)) + 2\xi \varepsilon^{Rab} (\partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a) + \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi)) \\
\Rightarrow \quad \dot{E}^b &= (\nabla \times \mathbf{B})^b - \varepsilon^{Rab} \partial_R \left(\Upsilon \left(2 \frac{\xi}{\kappa} E_a - B_a \right) \right) - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{Rab} (\partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a) + \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi)),
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

se tienen dos ecuaciones de movimiento para las componentes E^b del campo eléctrico, que son similares a la ley de Ampere-Maxwell más términos extra.

Cabe notar que, las ecuaciones de movimiento para el campo magnético se pueden obtener directamente de las identidades de Bianchi,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.5.13}$$

llegando a ser iguales a la ley de Gauss magnética,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{para } \mu = 0;$$

y a la ley de Faraday-Lenz,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \text{para } \mu = \bar{i} = R, 1, 2;$$

como sucede con la electrodinámica en el interior.

Finalmente, la ecuación (4.5.7), que corresponde a la condición de restricción a la frontera, se verá como,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\kappa \left(\partial^k A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^k \right) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijk} \right) \partial_R A_k \\
&= \left(\kappa \left(\partial^0 A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ij0} \right) \partial_R A_0 + \left(\kappa \left(\partial^b A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) + \xi F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{ijb} \right) \partial_R A_b \\
&= \left(\kappa \left(\partial^0 A_R - \partial_R A^0 + \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) + \xi F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab0} \right) \partial_R A_0 \\
&\quad + \left(\kappa \left(\partial^b A_R - \partial_R A^b + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) + 2\xi F_{0a} \tilde{\varepsilon}^{0ab} \right) \partial_R A_b \\
&= \left(\kappa \left(F^{0R} + \frac{1}{2} \partial_R A^0 \right) + \xi \varepsilon_{abR} B^R \varepsilon^{abR} \right) \partial_R A_0 + \left(\kappa \left(F^{bR} + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) - 2\xi E_a \varepsilon^{Rab} \right) \partial_R A_b \\
&= \left(\kappa \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) + 2\xi B^R \right) \partial_R (-\Phi) + \left(\kappa \left(\varepsilon^{bRa} B_a + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) - 2\xi \varepsilon^{Rab} E_a \right) \partial_R A_b \\
\Rightarrow \quad 0 &= \left(\kappa \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) + 2\xi B^R \right) \partial_R \Phi - \left(\kappa \left(\varepsilon^{Rab} B_a + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) - 2\xi \varepsilon^{Rab} E_a \right) \partial_R A_b.
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Por tanto, el conjunto de ecuaciones de movimiento reescrito en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{B})^R &= \dot{E}^R - \partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \\
 (\nabla \times \mathbf{B})^b &= \dot{E}^b + \varepsilon^{Rab} \partial_R \left(\Upsilon \left(2 \frac{\xi}{\kappa} E_a - B_a \right) \right) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{Rab} (\partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a) + \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi)), \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\partial_R \left(\Upsilon \left(E^R + 2 \frac{\xi}{\kappa} B^R \right) \right) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{abR} \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b), \\
 0 &= \left(\kappa \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) + 2 \xi B^R \right) \partial_R \Phi - \left(\kappa \left(\varepsilon^{Rab} B_a + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) - 2 \xi \varepsilon^{Rab} E_a \right) \partial_R A_b.
 \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

Nótese que si uno define las siguientes cantidades,

$$\begin{aligned}
 J^R &:= -\partial_0 (\Upsilon \partial_R \Phi) - \partial_b (\Upsilon \partial_R A^b), \\
 J^b &:= \varepsilon^{Rab} \partial_R \left(\Upsilon \left(2 \frac{\xi}{\kappa} E_a - B_a \right) \right) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{Rab} (\partial_0 (\Upsilon \partial_R A_a) + \partial_a (\Upsilon \partial_R \Phi)), \\
 \rho &:= -\partial_R \left(\Upsilon \left(E^R + 2 \frac{\xi}{\kappa} B^R \right) \right) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{abR} \partial_a (\Upsilon \partial_R A_b),
 \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

donde las J^R y J^b se podrían interpretar como las componentes de una densidad de corriente \mathbf{J} , mientras que ρ se podría interpretar como una densidad de carga; entonces las ecuaciones de movimiento anteriores pasan a ser,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{B})^R &= \dot{\mathbf{E}}^R + J^R, \\
 (\nabla \times \mathbf{B})^b &= \dot{\mathbf{E}}^b + J^b, \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\
 0 &= \left(\kappa \left(E^R + \frac{1}{2} \partial_R \Phi \right) + 2 \xi B^R \right) \partial_R \Phi - \left(\kappa \left(\varepsilon^{Rab} B_a + \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) - 2 \xi \varepsilon^{Rab} E_a \right) \partial_R A_b,
 \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

que junto con,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

se llega a que el conjunto de ecuaciones de movimiento (4.5.17) y (4.5.18) es similar al conjunto de ecuaciones de Maxwell con fuentes, pero acompañadas de la condición de restricción a la frontera. Cabe mencionar que, la dinámica del acoplamiento de la electrodinámica sin fuentes más Pontryagin, en el interior, es simplemente la dinámica de la electrodinámica sin fuentes, y lo que se está obteniendo en la frontera para la misma teoría acoplada, ED+P, es la dinámica de la electrodinámica con fuentes más la condición de restricción a la frontera.

Ahora bien, los términos que corresponderían a las fuentes, J^R , J^b y ρ , no son cualesquiera, sino que dependen funcionalmente de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , de forma directa e indirecta (por medio de los potenciales Φ y \mathbf{A}), pero también tienen dependencia de Υ , siendo esta una variable auxiliar que se emplea para introducir la condición de restricción a la frontera. Entonces, de lo ya comentado se puede inferir que los términos de fuente son inducidos por los campos eléctrico y magnético que están siendo restringidos a la frontera.

Nótese que entonces se tiene una dinámica similar a la que se obtuvo en la electrodinámica sin fuentes en la frontera, no obstante, esta dinámica no es la misma. Los términos de fuente se han modificado, excepto J^R , por lo cual la teoría de ED en la frontera y ED+P en la frontera no son las mismas, es decir, en la frontera la teoría de Pontryagin sí modifica a la electrodinámica sin fuentes, algo que no sucede en el bulto.

De lo anterior, se tiene el siguiente razonamiento: a pesar de que se partió de la electrodinámica sin fuentes más Pontryagin (en el interior), lo cual al final se reduce solo a la electrodinámica sin fuentes, al introducir la condición de restricción a la frontera para construir la teoría en la frontera, esta condición lo que hizo fue restringir la dinámica de los campos eléctrico y magnético a la frontera, lo cual modificó el comportamiento de los campos de tal modo que estos indujeron una densidad de corriente \mathbf{J} y una densidad de carga ρ , como si los propios \mathbf{E} y \mathbf{B} actuaran como fuentes. Por otra parte, esta condición también modificó al término de Pontryagin de manera que ahora contribuye a la dinámica, en los términos de fuente, por ende se deja de tratar como un término topológico en la frontera. Es por ello que los términos de fuente, (4.5.16), son dependientes de \mathbf{E} , \mathbf{B} e Υ , y diferentes a los obtenidos en el capítulo 2, (2.5.15). Es decir, son consecuencia de haber restringido a los campos a moverse en la frontera y al término de Pontryagin a la frontera, de hecho, si tal restricción no existiera, teniendo que ser $\Upsilon = 0$, uno recupera de (4.5.17) y (4.5.18) nuevamente 4 ecuaciones, que serían las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, que son las mismas que uno obtiene del acomplamiento ED+P en el bulto.

4.6. Análisis hamiltoniano

En esta sección se va a realizar un análisis hamiltoniano del principio de acción (4.5.1), esto es, se aplicará el algoritmo de Dirac-Bergmann al principio de acción acoplado de la electrodinámica más Pontryagin en la frontera. Pero para esto, será necesario proyectar nuevamente el principio de acción, (4.5.1), solo que ahora será en una familia de superficies espacialoides, siendo el vector normal a estas temporaloides. Pero, el cálculo no se hará de manera directa, sino que se van a emplear los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Como el principio de acción en la frontera acoplado es la suma de los principios de la electrodinámica y Pontryagin en la frontera, entonces la proyección del principio de acción en la frontera acoplado será la suma de sus correspondientes principios de acción en la frontera proyectados separadamente, (2.6.6) más (3.6.5), esto es:

$$\begin{aligned}
 S_{ED+P|B2}[A_t, A_R, A_a, \Upsilon] = \int_{\mathcal{M}} & \left[-\frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{\kappa}{2} (\partial_a A_t - \partial_t A_a) (\partial^a A_t - \partial_t A^a) \right. \\
 & - \frac{\kappa}{2} \partial_a A_R \partial^a A_R + \frac{\kappa}{2} \partial_t A_R \partial_t A_R \\
 & + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial^a A_R - \partial_R A^a) \partial_R A_a \\
 & - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) (2\partial_t A_R - \partial_R A_t) \partial_R A_t \\
 & - 2\xi (\partial_t A_a - \partial_a A_t) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \\
 & \left. - \xi F_{ab} ((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \partial_t A_R) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] dt dR d^2x,
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

donde ya se están usando coordenadas adaptadas a la foliación y los índices latinos, $a = 1, 2$, van a etiquetar coordenadas espaciales arbitrarias en cada una de las superficies espacialoides.

Así, se identifica la densidad lagrangiana de la teoría,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ED+P|B} &= -\frac{\kappa}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{\kappa}{2}(\partial_a A_t - \partial_t A_a)(\partial^a A_t - \partial_t A^a) - \frac{\kappa}{2}\partial_a A_R \partial^a A_R + \frac{\kappa}{2}\partial_t A_R \partial_t A_R \\
&\quad + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2}\partial_R A^a \right) \partial_R A_a - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial_t A_R - \frac{1}{2}\partial_R A_t \right) \partial_R A_t \\
&\quad - 2\xi(\partial_t A_a - \partial_a A_t)((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R)\tilde{\varepsilon}^{ab} - \xi((1 + \Upsilon)\partial_R A_t - \partial_t A_R)F_{ab}\tilde{\varepsilon}^{ab} \\
&= -\frac{\kappa}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{\kappa}{2}(\partial_a A_t - \dot{A}_a)(\partial^a A_t - \dot{A}^a) - \frac{\kappa}{2}\partial_a A_R \partial^a A_R + \frac{\kappa}{2}\dot{A}_R \dot{A}_R \\
&\quad + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2}\partial_R A^a \right) \partial_R A_a - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\dot{A}_R - \frac{1}{2}\partial_R A_t \right) \partial_R A_t \\
&\quad - 2\xi(\dot{A}_a - \partial_a A_t)((1 + \Upsilon)\partial_R A_b - \partial_b A_R)\tilde{\varepsilon}^{ab} - \xi((1 + \Upsilon)\partial_R A_t - \dot{A}_R)F_{ab}\tilde{\varepsilon}^{ab}.
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

4.6.1. Matriz Hessiana

Una vez que se cuenta con la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{ED+P|B}$, se procede a revisar si la teoría es singular o no, para ello se calcula la matriz hessiana,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a \partial \dot{\Upsilon}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_t} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}_R} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{A}^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon} \partial \dot{\Upsilon}} \end{pmatrix}, \tag{4.6.3}$$

cuyas componentes están dadas por⁵,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}_t} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R} = \kappa \dot{A}_R - \kappa(1 + \Upsilon)\partial_R A_t + \xi F_{ab}\tilde{\varepsilon}^{ab} &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}_R} = \kappa \delta_{\Xi R}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a} = -\kappa(\partial_a A_t - \dot{A}_a) - 2\xi((1 + \Upsilon)\partial_R A^b - \partial^b A_R)\tilde{\varepsilon}_{ab} &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{A}^a} = \kappa \delta_{\Xi a}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_\Xi \partial \dot{\Upsilon}} = 0,
\end{aligned}$$

de manera que, la matriz hessiana \mathbf{H} es,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{H} = 0, \tag{4.6.4}$$

por lo cual, se concluye que la teoría es singular, así que se procede a emplear el algoritmo de Dirac-Bergmann para estudiar esta teoría en la formulación hamiltoniana.

⁵Por simplicidad, se van a denotar al conjunto de campos y de momentos como: $A_\Xi = (A_t, A_R, A_b, \Upsilon)$ y $\Pi_\Xi = (\Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)$ respectivamente.

4.6.2. Momentos canónicos y restricciones primarias

Dada la forma de la matriz hessiana, (4.6.4), se tiene que el $\text{Rango}(\mathbb{H}) = 3$ y la $\text{Nulidad}(\mathbb{H}) = 2$, lo cual nos garantiza que se van a poder despejar 3 \dot{A}_Ξ y que además se esperan 2 restricciones primarias.

Calculando los momentos canónicos,

$$\Pi_R := \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_R} = \kappa \dot{A}_R - \kappa(1 + \Upsilon) \partial_R A_t + \xi F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \quad (4.6.5)$$

$$\Rightarrow \dot{A}_R = \frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \frac{\xi}{\kappa} F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab},$$

$$\Pi_a := \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}^a} = -\kappa (\partial_a A_t - \dot{A}_a) - 2\xi ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab} \quad (4.6.6)$$

$$\Rightarrow \dot{A}_a = \frac{\Pi_a}{\kappa} + \partial_a A_t + 2 \frac{\xi}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R) \tilde{\varepsilon}_{ab},$$

$$\Pi_t := \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{A}_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_t := \Pi_t \approx 0, \quad (4.6.7)$$

$$\Pi_\Upsilon := \frac{\partial \mathcal{L}_{ED+P|B}}{\partial \dot{\Upsilon}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_\Upsilon := \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (4.6.8)$$

se comprueban entonces los resultados comentados anteriormente, ya que se pudieron despejar 3 \dot{A}_Ξ y se obtuvieron 2 restricciones primarias, ϕ_t y ϕ_Υ .

4.6.3. Condiciones de regularidad

Ahora que se cuenta con las restricciones primarias, que presenta esta teoría, ϕ_t y ϕ_Υ , se requiere que cumplan con las condiciones de regularidad. Fijándose en la matriz jacobiana,

$$\left(\frac{\partial(\phi_t, \phi_\Upsilon)}{\partial(A_t, A_R, A^b, \Upsilon, \Pi_t, \Pi_R, \Pi_b, \Pi_\Upsilon)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6.9)$$

se puede ver que esta tiene rango constante e igual a 2, la misma cantidad de restricciones primarias independientes encontradas. Así, se concluye que ϕ_t y ϕ_Υ , dadas por (4.6.7) y (4.6.8) respectivamente, van a definir una subvariedad de dimensión 8 en el espacio fase (A_Ξ, Π_Ξ) .

4.6.4. Hamiltonianas canónica y primaria

Se procede a definir la hamiltoniana canónica, H_C , la cual solo está bien definida en la superficie de restricciones primarias. Cabe notar que, para calcular esta hamiltoniana se van a emplear los resultados obtenidos en la definición de los momentos canónicos y a la densidad lagrangiana

$\mathcal{L}_{ED+P|B}$, de esta manera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
H_C &:= \int \mathcal{H}_C d^3y \\
&= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_a \dot{A}^a + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{L}_{ED+P|B} \right] d^3y \\
&= \int \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_a \dot{A}^a + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{\kappa}{2} \left(\partial_a A_t - \dot{A}_a \right) \left(\partial^a A_t - \dot{A}^a \right) \right. \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \partial_a A_R \partial^a A_R - \frac{\kappa}{2} \dot{A}_R \dot{A}_R - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \\
&\quad + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\dot{A}_R - \frac{1}{2} \partial_R A_t \right) \partial_R A_t + 2\xi \left(\dot{A}_a - \partial_a A_t \right) \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} \\
&\quad \left. + \xi \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \dot{A}_R \right) F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] d^3y \\
&= \int \left[\Pi_R \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \frac{\xi}{\kappa} F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \right) \right. \\
&\quad + \Pi_a \left(\frac{\Pi_a}{\kappa} + \partial^a A_t + 2 \frac{\xi}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ab} \right) + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Pi_a}{\kappa} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R \right) \tilde{\varepsilon}_{ab} \right) \left(\frac{\Pi^a}{\kappa} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_d - \partial_d A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ad} \right) \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \partial_a A_R \partial^a A_R - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \\
&\quad - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \frac{\xi}{\kappa} F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \right) \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \frac{\xi}{\kappa} F_{cd} \tilde{\varepsilon}^{cd} \right) \\
&\quad + \kappa(1 + \Upsilon) \left(\frac{\Pi_R}{\kappa} + (1 + \Upsilon) \partial_R A_t - \frac{\xi}{\kappa} F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} - \frac{1}{2} \partial_R A_t \right) \partial_R A_t \\
&\quad + 2\xi \left(\frac{\Pi_a}{\kappa} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^b - \partial^b A_R \right) \tilde{\varepsilon}_{ab} - \partial_a A_t \right) \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_d - \partial_d A_R \right) \tilde{\varepsilon}^{ad} \\
&\quad \left. + \xi \left(-\frac{\Pi_R}{\kappa} + \frac{\xi}{\kappa} F_{cd} \tilde{\varepsilon}^{cd} \right) F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \right] d^3y
\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

de donde uno finalmente obtiene que,

$$\begin{aligned}
H_C &= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_a \Pi^a + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_a \partial^a A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} \right. \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \partial_a A_R \partial^a A_R + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \\
&\quad - \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R \right) + \frac{\xi^2}{\kappa} F_{ab} F^{ab} \\
&\quad \left. + 2 \frac{\xi^2}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R \right) \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R \right) \right] d^3y,
\end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Ahora bien, una vez que se ha calculado H_C , se define la hamiltoniana primaria,

$$\begin{aligned}
H_1 &:= H_C + \int [\lambda_t \phi_t + \lambda_\Upsilon \phi_\Upsilon] d^3y \\
&= \int \left[\frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R + \frac{1}{2\kappa} \Pi_a \Pi^a + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_a \partial^a A_t + \frac{\kappa}{4} F_{ab} F^{ab} \right. \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \partial_a A_R \partial^a A_R + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t - \kappa (1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \\
&\quad - \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \varepsilon^{ab} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_b - \partial_b A_R) + \frac{\xi^2}{\kappa} F_{ab} F^{ab} \\
&\quad \left. + 2 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R) + \lambda_t \Pi_t + \lambda_\Upsilon \Pi_\Upsilon \right] d^3y,
\end{aligned} \tag{4.6.12}$$

con $(\lambda_t, \lambda_\Upsilon)$ los multiplicadores de Lagrange y (ϕ_t, ϕ_Υ) las restricciones primarias.

4.6.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Ahora que se cuenta con la hamiltoniana primaria, lo que sigue es comprobar que las restricciones primarias, (4.6.7) y (4.6.8), cumplan con las condiciones de consistencia, es decir, que no cambien con el tiempo,

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_1\} \approx 0. \tag{4.6.13}$$

Un resultado directo que proporcionan las condiciones de consistencia es que se pueden identificar explícitamente las restricciones secundarias, en caso de que las haya.

Por simplicidad, en los cálculos posteriores se hace uso de los paréntesis de Poisson fundamentales, siendo los únicos distintos de cero ⁶,

$$\{A_t(x^0, \vec{x}), \Pi_t(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \tag{4.6.14}$$

$$\{A_R(x^0, \vec{x}), \Pi_R(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y), \tag{4.6.15}$$

$$\{A_a(x^0, \vec{x}), \Pi^b(x^0, \vec{y})\} = \delta_a^b \delta^3(x - y), \tag{4.6.16}$$

$$\{\Upsilon(x^0, \vec{x}), \Pi_\Upsilon(x^0, \vec{y})\} = \delta^3(x - y). \tag{4.6.17}$$

Entonces, las condiciones de consistencia para cada restricción están dadas como sigue.

Para la restricción primaria ϕ_t ,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_t(x) &= \{\phi_t(x), H_1\} = \int \{\phi_t(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3y \\
&= \int \{\Pi_t, (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \Pi_a \partial^a A_t + \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t\} d^3y \\
&= \int [(1 + \Upsilon) \Pi_R \{\Pi_t, \partial_R A_t\} + \Pi_a \{\Pi_t, \partial^a A_t\} + \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \{\Pi_t, \partial_R A_t\}] d^3y \\
&= - \int [(1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R \delta^3(x - y) + \Pi_a \partial^a \delta^3(x - y) + \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R \delta^3(x - y)] d^3y \\
&= \partial_R ((1 + \Upsilon) \Pi_R) + \partial^a \Pi_a + \kappa \partial_R (\Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t) \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

⁶Los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales son iguales a cero:

$$\{A_\Xi(x^0, \vec{x}), A_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0 = \{\Pi_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\},$$

$$\{A_\Xi(x^0, \vec{x}), \Pi_\Theta(x^0, \vec{y})\} = 0, \text{ si los índices } \Xi \neq \Theta,$$

donde $\Xi, \Theta = t, R, b, \Upsilon$, no olvidando también que $b = 1, 2$.

se encuentra una restricción secundaria,

$$\psi_t := \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^a \Pi_a + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t) \approx 0. \quad (4.6.19)$$

Para la restricción primaria ϕ_Υ ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\Upsilon(x) &= \{\phi_\Upsilon(x), H_1\} = \int \{\phi_\Upsilon(x), \mathcal{H}_1(y)\} d^3 y \\ &= \int \left\{ \Pi_\Upsilon, (1 + \Upsilon)\Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} \Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \right. \\ &\quad \left. - \kappa(1 + \Upsilon) \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a (1 + \Upsilon) \partial_R A_b \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) ((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R) \right\} d^3 y \\ &= \int \left[\Pi_R \partial_R A_t \{ \Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon \} + \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \{ \Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon \} + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \{ \Pi_\Upsilon, \Upsilon \} \right. \\ &\quad \left. - \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \{ \Pi_\Upsilon, 1 + \Upsilon \} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b \{ 1 + \Upsilon, \Pi_\Upsilon \} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) \partial_R A_a \{ 1 + \Upsilon, \Pi_\Upsilon \} \right] d^3 y \\ &= - \int \left[\Pi_R \partial_R A_t \delta^3(x - y) + \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t \delta^3(x - y) + \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \delta^3(x - y) \right. \\ &\quad \left. - \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \delta^3(x - y) + 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b \delta^3(x - y) \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) \partial_R A_a \delta^3(x - y) \right] d^3 y \\ &= - \Pi_R \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} \Upsilon \partial_R A_t \partial_R A_t - \frac{\kappa}{2} (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a \\ &\quad - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) \partial_R A_a \\ &= - \Pi_R \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) \partial_R A_a - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} ((1 + \Upsilon) \partial_R A^a - \partial^a A_R) \partial_R A_a, \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

se encuentra otra restricción secundaria,

$$\begin{aligned} \psi_\Upsilon &:= - \Pi_R \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \partial_R A^a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R) \approx 0. \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Dados los resultados anteriores, como se encontraron dos restricciones secundarias, (4.6.19) y (4.6.21), va a ser necesario definir la hamiltoniana secundaria,

$$H_2 := H_1 + \int \left[\tilde{\lambda}_t \psi_t + \tilde{\lambda}_\Upsilon \psi_\Upsilon \right] d^3 y, \quad (4.6.22)$$

y verificar que estas restricciones (ψ_t, ψ_Υ) cumplan con las condiciones de consistencia,

$$\dot{\Psi} = \{\Psi, H_2\} \approx 0, \quad (4.6.23)$$

donde $(\tilde{\lambda}_t, \tilde{\lambda}_\Upsilon)$ son multiplicadores de Lagrange.

Entonces, para la restricción ψ_t ,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_t(x) &= \{\psi_t(x), H_2\} = \int \{\psi_t(x), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\ &= \int \{\partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^a \Pi_a + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\ &= f(A_t, A_R, A_b, \Upsilon, \Pi_R, \Pi_b, \lambda_t, \lambda_\Upsilon, \tilde{\lambda}_\Upsilon) \\ &\approx 0, \end{aligned} \tag{4.6.24}$$

se obtiene una función de algunas variables dinámicas y multiplicadores de Lagrange, pudiendo así considerar una ecuación a partir de la cual se podrá determinar algún multiplicador de Lagrange, de manera que ya no habrá restricciones secundarias.

Para la restricción ψ_Υ ,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\Upsilon(x) &= \{\psi_\Upsilon(x), H_2\} = \int \{\psi_\Upsilon(x), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\ &= \int \{-\Pi_R \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad - 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \partial_R A^a \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R \right), \mathcal{H}_2(y)\} d^3y \\ &= f(A_t, A_R, A_b, \Upsilon, \Pi_R, \Pi_b, \lambda_t, \lambda_\Upsilon, \tilde{\lambda}_t, \tilde{\lambda}_\Upsilon) \\ &\approx 0, \end{aligned} \tag{4.6.25}$$

se obtiene una función de algunas variables dinámicas y multiplicadores de Lagrange, pudiendo así considerar una ecuación a partir de la cual se podrá determinar algún multiplicador de Lagrange, de manera que ya no habrá restricciones secundarias.

Finalmente, de los dos resultados anteriores se concluye que ya no hay más restricciones secundarias, por lo tanto, esta teoría presenta 4 restricciones, $(\phi_t, \phi_\Upsilon, \psi_t, \psi_\Upsilon)$.

4.6.6. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez que se han encontrado todas las restricciones que presenta la teoría, (4.6.7), (4.6.8), (4.6.19) y (4.6.21); el siguiente paso es separarlas en restricciones de primera y segunda clase, para lo cual será necesario calcular los paréntesis de Poisson de cada una de las restricciones con todas las demás. Haciendo uso nuevamente de los paréntesis de Poisson fundamentales, uno obtiene lo siguiente:

- (I) $\{\phi_t, \phi_t\} = \{\Pi_t, \Pi_t\} = 0$; $\{\phi_\Upsilon, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_\Upsilon, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (II) $\{\phi_t, \phi_\Upsilon\} = \{\Pi_t, \Pi_\Upsilon\} = 0$
- (III) $\{\psi_t, \phi_t\} = \kappa \partial_R [\Upsilon(1 + \Upsilon) \partial_R \delta^3(x - y)]$
- (IV) $\{\psi_t, \phi_\Upsilon\} = \partial_R [(\Pi_R + \kappa(1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \delta^3(x - y)]$
- (V) $\{\psi_\Upsilon, \phi_t\} = -(\Pi_R + \kappa(1 + 2\Upsilon) \partial_R A_t) \partial_R \delta^3(x - y)$
- (VI) $\{\psi_\Upsilon, \phi_\Upsilon\} = -\kappa \left(\partial_R A_t \partial_R A_t + \left(\frac{2\xi}{\kappa} \right)^2 \partial_R A^a \partial_R A_a \right) \delta^3(x - y)$
- (VII) $\{\psi_t, \psi_t\} = 0$; $\{\psi_\Upsilon, \psi_\Upsilon\} = 0$

$$(VIII) \quad \begin{aligned} \{\psi_t, \psi_\Upsilon\} = & \kappa \left(1 + \left(\frac{2\xi}{\kappa} \right)^2 \right) \partial_R A_a \partial^a \Upsilon \partial_R \delta^3(x-y) - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_b \partial_R \delta^3(x-y) \\ & + \kappa \left[\left(1 + \left(\frac{2\xi}{\kappa} \right)^2 \right) \partial^b A_R + \left(\Upsilon - \left(\frac{2\xi}{\kappa} \right)^2 (1 + \Upsilon) \right) \partial_R A^b \right] \partial_b \partial_R \delta^3(x-y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, de los resultados anteriores se concluye que todas las restricciones, (4.6.7), (4.6.8), (4.6.19) y (4.6.21), son de segunda clase, de modo que uno las puede redefinir como,

$$\chi_t := \phi_t = \Pi_t \approx 0, \quad (4.6.26)$$

$$\chi_\Upsilon := \phi_\Upsilon = \Pi_\Upsilon \approx 0, \quad (4.6.27)$$

$$\tilde{\chi}_t := \psi_t = \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^a \Pi_a + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t) \approx 0, \quad (4.6.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\Upsilon := \psi_\Upsilon = & -\Pi_R \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ & - 2 \frac{\xi}{\kappa} \varepsilon^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \partial_R A^a ((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R) \approx 0. \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

Nótese que, la teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes más Pontryagin no presenta simetría de norma, algo que sí ocurre en el bulto para el mismo acomplamiento, ya que presenta 2 restricciones de primera clase y ninguna de segunda clase.

4.6.7. Grados de libertad

Separadas las restricciones entre de primera y segunda clase, se procede a realizar el conteo de grados de libertad, el cual se calcula como sigue:

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) \right]. \quad (4.6.30)$$

Así, para la teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes más Pontryagin, que tiene 4 restricciones de segunda clase, se tiene que:

$$GL = \frac{1}{2} [10 - 2(0) - 4] = 3. \quad (4.6.31)$$

Este resultado hace evidente la diferencia entre la dinámica del acomplamiento de ED+P en la frontera y el interior. Puesto que, la primera presenta un grado de libertad extra comparada con la segunda, que solo tiene dos grados de libertad. Más adelante se abordará el análisis sobre a qué corresponden estos tres grados de libertad.

4.6.8. Acción y hamiltoniana extendidas

Se define la acción extendida como,

$$\begin{aligned} S_E [A_R, A_t, A^b, \Upsilon, \Pi_R, \Pi_t, \Pi_b, \Pi_\Upsilon, u_t, u_\Upsilon, \tilde{u}_t, \tilde{u}_\Upsilon] \\ := \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{H}_C - u_t \chi_t - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t - \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon \right] dt dR d^2x, \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

donde se puede identificar a la hamiltoniana extendida, dada por,

$$H_E := \int [\mathcal{H}_C + u_t \chi_t + u_\Upsilon \chi_\Upsilon + \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t + \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon] d^3y. \quad (4.6.33)$$

siendo $u_t, u_\Upsilon, \tilde{u}_t$ y \tilde{u}_Υ multiplicadores de Lagrange.

Cabe notar que, tanto la acción extendida S_E como la hamiltoniana extendida H_E contienen toda la información de esta teoría. Entonces, las ecuaciones de movimiento generales se pueden obtener empleando tanto la acción extendida, mediante la variación de la acción $\delta S_E = 0$, como la hamiltoniana extendida, por medio de las ecuaciones de Hamilton.

4.6.9. Acción reducida

Al igual que se hizo en el capítulo 2, en vez de analizar directamente las ecuaciones de movimiento que resultan de la acción extendida S_E , (4.6.32), en esta sección lo que se hará es construir la acción reducida para determinar cuáles son los 3 grados de libertad de esta teoría, su evolución temporal y caracterizarlos. Es decir, lo que se hará es resolver las cuatro restricciones de segunda clase⁷ (que pueden tratarse como simples relaciones entre campos y momentos, pudiendo cambiar \approx por $=$), para así encontrar aquellas variables del espacio fase que son dependientes y después usar esta información en la acción extendida S_E , de manera que se simplifique y que ya solo dependa de variables del espacio fase independientes. Cabe mencionar que, para resolver tales restricciones se harán algunas suposiciones para los campos o momentos, de manera que estas se simplifiquen. Esto implica que no se va a determinar la dinámica de la teoría de manera general, sino un caso particular que permita ver los 3 grados de libertad de forma simple.

Ahora bien, las restricciones de segunda clase χ_t y χ_Υ , (4.6.26) y (4.6.27) respectivamente, ya están resueltas, de modo que solo hace falta resolver las otras dos, $\tilde{\chi}_t$ y $\tilde{\chi}_\Upsilon$, dadas por (4.6.28) y (4.6.29) respectivamente,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_t &= \psi_t = \partial_R((1 + \Upsilon)\Pi_R) + \partial^a \Pi_a + \kappa \partial_R(\Upsilon(1 + \Upsilon)\partial_R A_t) \approx 0, \\ \tilde{\chi}_\Upsilon &= \psi_\Upsilon = -\Pi_R \partial_R A_t + \kappa \left(\partial^a A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^a \right) - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad - 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_R A_b - 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \partial_R A^a \left((1 + \Upsilon) \partial_R A_a - \partial_a A_R \right) \approx 0,\end{aligned}$$

pero para esto se van a imponer algunas condiciones a las variables dinámicas,

$$\partial_R A_b = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \Upsilon = 0, \quad (4.6.34)$$

por lo que las dos restricciones anteriores se reducen a,

$$\tilde{\chi}_t = (1 + \Upsilon) \partial_R \Pi_R + \partial^b \Pi_b + \kappa \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R \partial_R A_t = 0, \quad (4.6.35)$$

$$\tilde{\chi}_\Upsilon = -\Pi_R \partial_R A_t - \kappa \left(\frac{1}{2} + \Upsilon \right) \partial_R A_t \partial_R A_t = 0. \quad (4.6.36)$$

Despejando $\partial_R A_t$ de (4.6.36),

$$\partial_R A_t = -\frac{2\Pi_R}{\kappa(1 + 2\Upsilon)}, \quad (4.6.37)$$

donde se ha supuesto que $\partial_R A_t \neq 0$. Sustituyendo este resultado en (4.6.35) y despejando Υ ,

$$\Upsilon = -\frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b}, \quad (4.6.38)$$

⁷Con resolver las restricciones de segunda clase uno quiere decir que, se van a maniobrar algebraicamente las restricciones para así poder despejar las variables del espacio fase que son dependientes de las otras. También puede ocurrir que, de las restricciones, uno encuentre que algunas variables del espacio fase simplemente van a ser iguales a escalares constantes.

y finalmente, al emplear este último resultado en (4.6.37),

$$\partial_R A_t = \frac{2}{\kappa} \frac{\Pi_R}{\partial_R \Pi_R} (\partial_R \Pi_R + 2\partial^b \Pi_b). \quad (4.6.39)$$

De esta manera, se ha despejado Υ y $\partial_R A_t$ en términos de algunas otras variables del espacio fase. Cabe notar que, estrictamente, no se ha despejado A_t , pero como se verá a continuación, no será necesario y bastará con tener $\partial_R A_t$. Por otra parte, dada la forma que tiene Υ , (4.6.38), y la condición que se le está exigiendo, (4.6.34), uno puede suponer lo siguiente para que se cumpla tal condición,

$$\partial_R \partial_R \Pi_R = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \partial^b \Pi_b = 0. \quad (4.6.40)$$

Con base en lo propuesto y obtenido anteriormente, empleando las condiciones (4.6.34) y el hecho de que las restricciones de segunda clase se pueden tomar como fuertemente igual a cero, la acción extendida pasa a verse como,

$$\begin{aligned} S'_E &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_t \dot{A}_t + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon} - \mathcal{H}_C - u_t \chi_t - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t - \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\cancel{\Pi_t \dot{A}_t} + \Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b + \cancel{\Pi_\Upsilon \dot{\Upsilon}} - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) F_{ab} F^{ab} \right. \\ &\quad - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t - \Pi_b \partial^b A_t - \frac{\kappa}{2} \partial_b A_R \partial^b A_R - \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad + \kappa (1 + \Upsilon) \left(\partial^b A_R - \frac{1}{2} \partial_R A^b \right) \cancel{\partial_R A_b} + \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} \\ &\quad - 2 \frac{\xi^2}{\kappa} \left((1 + \Upsilon) \cancel{\partial_R A^b} - \partial^b A_R \right) \left((1 + \Upsilon) \cancel{\partial_R A_b} - \partial_b A_R \right) \\ &\quad \left. - 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \left((1 + \Upsilon) \cancel{\partial_R A_b} - \partial_b A_R \right) - u_t \chi_t - u_\Upsilon \chi_\Upsilon - \tilde{u}_t \tilde{\chi}_t - \tilde{u}_\Upsilon \tilde{\chi}_\Upsilon \right] dt dR d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) F_{ab} F^{ab} \right. \\ &\quad - (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t - \Pi_b \partial^b A_t - 2 \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial_b A_R \partial^b A_R - \frac{\kappa}{2} \Upsilon (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_b A_R \right] dt dR d^2x, \end{aligned}$$

si ahora usan de manera conveniente las expresiones reducidas de las restricciones $\tilde{\chi}_t$ y $\tilde{\chi}_\Upsilon$, (4.6.35) y (4.6.36) respectivamente, además de realizar integración por partes varias veces, entonces uno llega a la siguiente:

$$\begin{aligned} S'_E &= \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi^b - \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) F_{ab} F^{ab} \right. \\ &\quad - 2 \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial_b A_R \partial^b A_R + (1 + \Upsilon) \Pi_R \partial_R A_t + \frac{\kappa}{2} (1 + 3\Upsilon) (1 + \Upsilon) \partial_R A_t \partial_R A_t \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_b A_R \right] dt dR d^2x \\ &\quad - \int_{\mathcal{M}} \left[\partial_R \left((1 + \Upsilon) (\kappa \Upsilon \partial_R A_t + \Pi_R) A_t \right) + \partial^a (\Pi_a A_t) \right] dt dR d^2x, \end{aligned}$$

finalmente, sustituyendo las expresiones obtenidas para Υ y $\partial_R A_t$, (4.6.38) y (4.6.39) respectivamente, además de suponer que el término de frontera se hace cero bajo las condiciones de frontera apropiadas, entonces, después de algunos cálculos se llega a la correspondiente acción reducida,

$$\begin{aligned}
 S_{E-Reducida}[A_R, A^b, \Pi_R, \Pi_b] = \int_{\mathcal{M}} \left[\Pi_R \dot{A}_R + \Pi_b \dot{A}^b - \frac{1}{2\kappa} \Pi_R \Pi_R - \frac{1}{2\kappa} \Pi_b \Pi_b \right. \\
 - \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) F_{ab} F^{ab} - 2 \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial_b A_R \partial^b A_R \\
 - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \\
 \left. + \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R F_{ab} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_b A_R \right] dt dR d^2 x. \tag{4.6.41}
 \end{aligned}$$

Nótese que esta acción ya solo depende funcionalmente de 6 variables del espacio fase. Al desarrollar su variación e igualar a cero,

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_{E-Reducida} = \int_{\mathcal{M}} \left[\dot{A}_R \delta \Pi_R + \Pi_R \delta \dot{A}_R + \dot{A}^b \delta \Pi_b + \Pi_b \delta \dot{A}^b - \frac{1}{\kappa} \Pi_R \delta \Pi_R - \frac{1}{\kappa} \Pi_b \delta \Pi_b \right. \\
 - 4 \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) F_{ab} \partial^a \delta A^b - 4 \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial_b A_R \partial^b \delta A_R \\
 + \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} \delta \Pi_R + 2 \frac{\xi}{\kappa} \Pi_R \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \delta A_b + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_b A_R \delta \Pi_a \\
 + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \Pi_a \partial_b A_R - \frac{4}{\kappa} \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \delta \Pi_R \\
 - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \partial^b \delta \Pi_b - \frac{2}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^c \Pi_c \frac{\partial_R \delta \Pi_R + \partial^b \delta \Pi_b}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \\
 \left. + \frac{4}{\kappa} \Pi_R \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{\partial_R \Pi_R + \partial^c \Pi_c}{(\partial_R \Pi_R)^3} \partial_R \delta \Pi_R \right] dt dR d^2 x,
 \end{aligned}$$

después de realizar los cálculos correspondientes se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\delta A_R : \dot{\Pi}_R = \left(\kappa + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial^b \partial_b A_R + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \Pi_b, \tag{4.6.42}$$

$$\delta A^b : \dot{\Pi}_b = \left(\kappa + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial^a F_{ab} - 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}_{ab} \partial^a \Pi_R, \tag{4.6.43}$$

$$\delta \Pi_R : \dot{A}_R = \frac{1}{\kappa} \Pi_R - \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} F_{ab} + \frac{4}{\kappa} \Pi_R \partial^b \Pi_b \frac{2\partial_R \Pi_R + 3\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R}, \tag{4.6.44}$$

$$\delta \Pi_b : \dot{A}^b = \frac{1}{\kappa} \Pi^b + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a A_R - \frac{2}{\kappa} \partial^b \left(\Pi_R \Pi_R \frac{\partial_R \Pi_R + 2\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R \partial_R \Pi_R} \right). \tag{4.6.45}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.6.42),

$$\ddot{\Pi}_R = \left(\kappa + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \partial^b \partial_b \dot{A}_R + 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}^{ab} \partial_a \dot{\Pi}_b, \tag{4.6.46}$$

empleando ahora las ecuaciones (4.6.43) y (4.6.44), luego de realizar los cálculos correspondientes uno obtiene que,

$$\ddot{\Pi}_R = \partial^b \partial_b \left[\Pi_R \left(1 + \left(1 + 4 \frac{\xi^2}{\kappa^2} \right) \left(8 \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} + 12 \frac{(\partial^c \Pi_c)^2}{(\partial_R \Pi_R)^2} \right) \right) \right].$$

Por otra parte, derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.6.43),

$$\ddot{\Pi}_b = \left(\kappa + 4 \frac{\xi^2}{\kappa} \right) \left(\partial^a \partial_a \dot{A}_b - \partial^a \partial_b \dot{A}_a \right) - 2 \frac{\xi}{\kappa} \tilde{\varepsilon}_{ab} \partial^a \dot{\Pi}_R, \quad (4.6.47)$$

empleando ahora las ecuaciones (4.6.42) y (4.6.45), luego de realizar los cálculos correspondientes uno obtiene que,

$$\ddot{\Pi}_b = \partial^a \partial_a \Pi_b - \partial_b \partial^a \Pi_a. \quad (4.6.48)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para Π_R y Π_b son las siguientes:

$$\ddot{\Pi}_R = \partial^b \partial_b \left[\Pi_R \left(1 + \left(1 + 4 \frac{\xi^2}{\kappa^2} \right) \left(8 \frac{\partial^c \Pi_c}{\partial_R \Pi_R} + 12 \frac{(\partial^c \Pi_c)^2}{(\partial_R \Pi_R)^2} \right) \right) \right], \quad (4.6.49)$$

$$\ddot{\Pi}_b = \partial^a \partial_a \Pi_b - \partial_b \partial^a \Pi_a, \quad (4.6.50)$$

nótese que estas son 3 ecuaciones de movimiento acopladas para 3 variables dinámicas, Π_R y Π_b , entonces, uno puede identificar a estas variables como los 3 grados de libertad de la teoría. Además, estas ecuaciones tienen forma de ecuación de onda inhomogénea en 2 dimensiones, por lo cual se puede inferir que el comportamiento será ondulatorio. De hecho, si uno recuerda lo discutido anteriormente en la descripción lagrangiana y también las ecuaciones de onda que se obtienen en la electrodinámica con fuentes, entonces se puede inferir que los términos inhomogéneos que aparecen están asociados a las fuentes. Por otra parte, observe que la primera ecuación tiene expresiones de la forma $\partial_R \Pi_R$, de manera que la dinámica de la teoría en la frontera va a depender de la frontera, es decir, dependerá de la hipersuperficie que se elija de toda la foliación para ser la frontera.

Por otra parte, las dos ecuaciones de movimiento obtenidas son similares a las que se encontraron en el capítulo 2 para la teoría en la frontera de la electrodinámica sin fuentes, (2.6.71) y (2.6.72), se diferencian únicamente por la constante $\left(1 + 4 \frac{\xi^2}{\kappa^2} \right)$. Debido a esto, pareciera que en la frontera Pontryagin no modifica la dinámica de la electrodinámica sin fuentes, no obstante, este es simplemente un ejemplo que se empleó para mostrar que la dinámica de la teoría en la frontera de electrodinámica acoplada a Pontryagin efectivamente se puede describir por medio de 3 variables dinámicas independientes, es decir, no es el caso general. Entonces, en este ejemplo la dinámica en la frontera de electrodinámica más Pontryagin se reduce a la dinámica de la electrodinámica en la frontera.

Sin embargo, eso no siempre será así, como se verá más adelante. El hecho de que aquí suceda esto se debe a que en el capítulo 3 se encontró que la teoría en la frontera de Pontryagin tiene dos sectores, uno topológico (sin grados de libertad) y otro dinámico (un comportamiento quiral tridimensional). Así, lo que se puede inferir es que en este ejemplo se tiene el sector topológico de Pontryagin, esto es, las condiciones que se propusieron para construir la acción reducida son tales que los términos correspondientes a Pontryagin no contribuyeron a la dinámica de la electrodinámica en la frontera, es decir, en esta situación Pontryagin en la frontera se vuelve topológico. Este caso y el sector quiral se revisarán a continuación para otros dos ejemplos.

4.7. Dinámica de electrodinámica+Pontryagin en la frontera

Anteriormente, en el capítulo 3 se mostró que la teoría de Pontryagin en la frontera tiene más de un sector, esto es, un sector topológico y otro dinámico (quiral). De manera que, como

se verá a continuación, dependiendo de en cuál de los sectores de Pontryagin en la frontera se encuentre uno, esto influirá de diferente manera en la dinámica que se obtenga de la teoría acoplada, electrodinámica más Pontryagin, en la frontera.

4.7.1. Sector quiral de Pontryagin

Proponiendo las siguientes condiciones para las variables dinámicas,

$$A_R = \partial_R \Upsilon \quad \text{y} \quad A_j = \partial_j \Upsilon, \quad (4.7.1)$$

las cuales están motivadas en las condiciones (3.7.1) que se propusieron en la sección 3.7.1 para mostrar el sector quiral de Pontryagin en la frontera. Entonces, las ecuaciones de movimiento en la frontera de la electrodinámica más Pontryagin, (4.5.5), (4.5.6) y (4.5.7), se reducen a,

$$\kappa \left[\frac{1}{2} \partial_R (\partial^i \Psi \partial_i \Psi) + \Psi \partial_R (\partial^i \partial_i \Psi) \right] = 0, \quad (4.7.2)$$

$$2\xi \partial_i \Psi \partial_R \partial_j \Psi \varepsilon^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k=0 : \partial_2 \Psi = f(t, x^b) \partial_1 \Psi, \\ k=1 : \partial_0 \Psi = g(t, x^b) \partial_2 \Psi, \\ k=2 : \partial_0 \Psi = h(t, x^b) \partial_1 \Psi, \end{cases} \quad (4.7.3)$$

$$\frac{\kappa}{2} \partial_R \partial^k \Psi \partial_R \partial_k \Psi = 0. \quad (4.7.4)$$

Nótese que, por una parte se tienen las tres ecuaciones de movimiento (4.7.3), que dan información sobre Ψ . De hecho, de estas ecuaciones se interpreta que Ψ se va a comportar de forma análoga a un bosón quiral. Además, estas tres ecuaciones son la contribución del término de Pontryagin a la dinámica del acoplamiento en la frontera y corresponden al sector quiral. Es decir, en este caso Pontryagin no se comporta como una teoría topológica, sino dinámica.

Por otra parte, se tienen otras dos ecuaciones de movimiento, (4.7.3) y (4.7.4), que son la contribución del término de la electrodinámica al acoplamiento en la frontera.

Por lo tanto, bajo las condiciones (4.7.1), se tiene un grado de libertad en la frontera de la teoría de electrodinámica más Pontryagin, que por una parte, tendrá comportamiento quiral, debido a Pontryagin, pero además, también tiene que satisfacer las ecuaciones (4.7.2) y (4.7.4).

Ahora bien, si uno impone las condiciones (4.7.5) en la teoría de electrodinámica más Pontryagin en el bulto, lo que se obtiene es $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, por ende las ecuaciones de movimiento del acoplamiento en el interior se satisfacen de manera trivial, es decir, no hay dinámica.

Por lo tanto, se puede concluir que con estas condiciones (4.7.5), electrodinámica más Pontryagin en el bulto es topológica y en la frontera es dinámica (quiral), algo similar a lo que ocurre en Pontryagin en la frontera, 3.7.1. Entonces, por analogía, se puede interpretar que en este ejemplo particular, esta teoría podría modelar un asilante topológico.

4.7.2. Sector topológico de Pontryagin

Proponiendo las siguientes condiciones para las variables dinámicas,

$$\partial_R A_j = 0 \quad \text{y} \quad \partial_R \Upsilon \neq 0, \quad (4.7.5)$$

las cuales están motivadas en las condiciones (3.5.10) que se propusieron en la sección 3.5.2 para mostrar el sector topológico de Pontryagin en la frontera. Entonces, las ecuaciones de movimiento en la frontera de la electrodinámica más Pontryagin, (4.5.5) y (4.5.6), se reducen a,

$$\kappa \partial^i \partial_i A_R = 0, \quad (4.7.6)$$

$$\kappa [\partial_i F^{ik} - \partial_R ((1 + \Upsilon) \partial^k A_R)] = 0, \quad (4.7.7)$$

cabe destacar que la condición de restricción a la frontera, (4.5.7) se satisface de manera trivial bajo tales condiciones.

Ahora bien, si uno se fija en las ecuaciones de movimiento que se obtuvieron en la electrodinámica en la frontera, (2.5.4) y (2.5.5), y se imponen las mismas condiciones, (4.7.5), lo que se obtiene son nuevamente las ecuaciones (4.7.6) y (4.7.7).

Así, se puede concluir que, bajo las condiciones (4.7.5) la dinámica de la electrodinámica en la frontera y la dinámica de la electrodinámica más Pontryagin en la frontera es la misma. Por lo cual, en esta situación el acoplamiento de Pontryagin a la electrodinámica, en la frontera, no contribuye. Por tanto, en este ejemplo particular Pontryagin en la frontera se comporta como una teoría topológica, es decir, se está en el sector topológico de Pontryagin en la frontera.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se construyeron las correspondientes teorías en la frontera de tres teorías de norma en 4 dimensiones: la electrodinámica sin fuentes, Pontryagin y el acoplamiento entre las dos anteriores. Al analizar la dinámica de cada una de las tres teorías en la frontera, mediante las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, algoritmo de Dirac-Bergmann, se puede concluir que hay diferencias entre las dinámicas de la teoría en la frontera y en el bulto.

La diferencia resultó notoria desde el cálculo de las ecuaciones de movimiento a nivel lagrangiano, puesto que, mientras que en el bulto las ecuaciones de movimiento para la electrodinámica y electrodinámica+Pontryagin corresponden a las de Maxwell sin fuentes, en la frontera las ecuaciones de movimiento que se obtuvieron para estas dos teorías fueron análogas a las de Maxwell con fuentes, más una ecuación extra que corresponde a la denominada condición de restricción a la frontera. Cabe destacar que, los términos de fuente que aparecieron en tales ecuaciones son consecuencia directa de haber restringido a las variables dinámicas a propagarse en la frontera y por ende son dependientes de tales variables, así que estas fuentes se consideran como inducidas. Además, al comparar las ecuaciones de movimiento obtenidas en electrodinámica y electrodinámica+Pontryagin en la frontera se observa que estas son diferentes, siendo así este resultado una prueba de que en la frontera Pontryagin sí contribuye a la dinámica de la electrodinámica cuando se acoplan, algo que no sucede en el bulto. Por otro lado, mientras que en el bulto las ecuaciones de movimiento de Pontryagin corresponden a las identidades de Bianchi, no hay dinámica, en la frontera las ecuaciones de movimiento no son identidades ni se satisfacen trivialmente, por lo cual la teoría en la frontera de Pontryagin sí presenta dinámica. Cabe destacar que, más adelante en la descripción hamiltoniana se obtuvo que Pontryagin en la frontera en realidad tendrá más de un sector, uno dinámico y otro topológico, mostrando incluso que Chern-Simons, una teoría topológica, esta contenida en la frontera de Pontryagin.

Ahora bien, con respecto a lo obtenido en el algoritmo de Dirac-Bergmann, además de haber hecho más notoria la diferencia entre la dinámica de las tres teorías en el bulto vs frontera, también se han podido destacar ciertas similitudes que presentan todas estas teorías en la frontera. En primera, las tres teorías pierden cierta libertad de norma en la frontera. En electrodinámica y electrodinámica+Pontryagin en la frontera se mostró que las teorías no van a tener simetrías de norma, cabe recordar que esta es una cualidad bastante distintiva en electrodinámica en el bulto. Por otro lado, en Pontryagin en la frontera lo que se mostró fue que, aunque la teoría en la frontera sí tiene transformaciones de norma, estas no son las mismas que se obtienen en su correspondiente teoría en el bulto, de hecho, en la frontera se ven reducidas, por lo cual, a pesar de haber simetrías de norma, no hay tanta libertad de norma como sí la hay en el bulto. La segunda característica que comparten las tres teorías en la frontera es el hecho de que en cada una de ellas hay un grado de libertad emergente en la frontera. Mientras que la electrodinámica y la electrodinámica+Pontryagin en el bulto tienen 2 grados de libertad locales, sus correspondientes teorías en la frontera presentan 3 grados de libertad locales. De forma similar, mientras que Pontryagin en el bulto es una teoría topológica, no tiene grados de libertad locales, su correspondiente teoría en la frontera presenta 1 grado de libertad local, pudiendo así considerar a Pontryagin en la frontera como una teoría dinámica. Nótese que, estas dos similitudes también se presentan en la teoría analizada en [2], Chern-Simons, siendo así dos características recurrentes en la dinámica de las teorías en la frontera

que hasta el momento se han analizado, lo cual podría resultar en un primer indicio de que al construir y estudiar las teorías en la frontera, en estas siempre habrá un grado de libertad emergente y además se perderá cierta simetría de norma, aunque tal indicio por el momento no sería más que una conjetura.

Otro resultado a destacar es que, para Pontryagin en la frontera, a pesar de que esta teoría presenta 1 grado de libertad local, también se ha mostrado que tiene un sector topológico. De hecho, partiendo de diferentes soluciones a la correspondiente condición de restricción a la frontera, se ha mostrado que una solución lleva a un sector dinámico (quiral), donde el grado de libertad se puede caracterizar y tiene un comportamiento quiral bidimensional. Más aún, en este sector, dado el comportamiento de la teoría de Pontryagin, interior más frontera, lo que uno podría hacer es intentar modelar sistemas de materia condensada, en particular aislantes topológicos tridimensionales, ya que estos corresponden a materiales que tienen la característica de que en el volumen son aislantes (no hay grados de libertad en el bulto), mientras que en la superficie son conductores (hay grados de libertad en la frontera con comportamiento quiral). Por otro lado, una segunda solución lleva a un sector topológico, en el cual, como caso de interés se ha mostrado que la teoría de Chern-Simons está contenida en tal sector. De esta manera, si se resuelve de manera general la condición de restricción a la frontera de Pontryagin en la frontera, uno podrá obtener todos los sectores dinámicos o topológicos de esta teoría.

Finalmente, también es necesario recalcar el hecho de que la dinámica de la teoría en la frontera acoplada, electrodinámica+Pontryagin, no resultó ser más que una combinación de las características que presentan las dos teorías en la frontera de manera separada, es decir, esta teoría acoplada en la frontera no tiene resultados nuevos comparados con los obtenidos ya en la electrodinámica y Pontryagin en la frontera. No obstante, el que Pontryagin en la frontera tenga más de dos sectores influye de manera significativa en el acoplamiento en la frontera. Puesto que, para el sector topológico, electrodinámica+Pontryagin en la frontera se reduce simplemente a electrodinámica en la frontera. Mientras que, para el sector dinámico (quiral), la teoría acoplada se reduce a una teoría topológica en el bulto y a una teoría dinámica (quiral) en la frontera, algo similar a lo que ocurre en Pontryagin en la frontera. De esta manera, también se podría emplear esta teoría acoplada en la frontera bajo el sector dinámico (quiral) para intentar modelar aislantes topológicos, así como se ha comentado anteriormente para Pontryagin en la frontera.

Bibliografía

- [1] A.P. BALACHANDRAN, L. CHANDAR AND E. ERCOLESSI, *Edge states in gauge theories: theory, interpretations and predictions*, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1969-1993 (1995).
- [2] I. RUBALCAVA, *Constructing the theory at the boundary, its dynamics and degrees of freedom*, (2020). arXiv: <https://arxiv.org/abs/2003.06241>.
- [3] M. HENNEAUX AND C. TROESSAERT, *BMS group at spatial infinity: the Hamiltonian (ADM) approach*, JHEP **2018**, 147 (2018).
- [4] M. HENNEAUX AND C. TROESSAERT, *The Asymptotic Structure of Gravity at Spatial Infinity in Four Spacetime Dimensions*, Proc. Steklov Inst. Math. **309**, 127–149 (2020).
- [5] M. HENNEAUX AND C. TROESSAERT, *Asymptotic symmetries of electromagnetism at spatial infinity*, JHEP **2018**, 137 (2018).
- [6] M. HENNEAUX AND C. TROESSAERT, *Asymptotic structure of electromagnetism in higher spacetime dimensions*, Phys. Rev. D **99**, 125006 (2019).
- [7] M. AMMON AND J. ERDMENGER, *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*, Cambridge University Press, (2015).
- [8] J.M. MALDACENA, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113–1133 (1999).
- [9] E. PAPANTONOPOULOS, ed. *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The Ads/CFT Correspondence*, Lecture Notes in Physics **828**, Springer, (2011).
- [10] D. BIGATTI AND L. SUSSKIND, *The Holographic Principle*. In L. Thorlacius and T. Jons-son (eds), *M-Theory and Quantum Geometry*. NATO Science Series, Vol. **556**. Springer, Dordrecht, (2000).
- [11] A. CORICHI AND T. VUKASINAC, *Hamiltonian analysis of a topological theory in the presence of boundaries*, Int. J. Mod. Phys. D **28**, 1950075 (2019).
- [12] A. CORICHI AND T. VUKASINAC, *Canonical analysis of field theories in the presence of boundaries: Maxwell + Pontryagin*, Class. Quantum Grav. **37**, 085018 (2020).
- [13] M. ZAHID-HASAN AND J.E. MOORE, *Three-Dimensional Topological Insulators*, Annu. Rev. Condens. Matter Phys., Vol. **2**, 55–78 (2011).
- [14] D. TONG, *Lectures on the Quantum Hall Effect*, (2016). arXiv: <https://arxiv.org/abs/1606.06687>.
- [15] G.V. DUNNE, *Aspects of Chern-Simons theory*, (1999). arXiv: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9902115>.

- [16] Y. TOKURA, K. YASUDA AND A. TSUKAZAKI, *Magnetic topological insulators*, Nat. Rev. Phys. **1**, 126–143 (2019).
- [17] G. ROSENBERG AND M. FRANZ, *Witten effect in a crystalline topological insulator*, Phys. Rev. B **82**, 035105 (2010).
- [18] F. CANFORA, L. ROSA AND J. ZANELLI, *Theta term in a bounded region*, Phys. Rev. D **84**, 105008 (2011).
- [19] A. VISHWANATH AND T. SENTHIL, *Physics of Three-Dimensional Bosonic Topological Insulators: Surface-Deconfined Criticality and Quantized Magnetoelectric Effect*, Phys. Rev. X **3**, 011016 (2013).
- [20] H. GOLDSTEIN, C.P. POOLE AND J.L. SAFKO, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Pearson, (2011).
- [21] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*, 4th rev. ed., Butterworth-Heinemann, (1987).
- [22] G.F. TORRES DEL CASTILLO, *Estructuras hamiltonianas para campos clásicos*, Rev. Mex. Fís. **37**, 165-185 (1991).
- [23] G.F. TORRES DEL CASTILLO, *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, 2nd ed., Birkhäuser, (2020).
- [24] M. HENNEAUX AND C. TEITELBOIM, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, (1991).
- [25] K. SUNDERMEYER, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics **169**, Springer, (1982).
- [26] J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley and Sons, (1998).
- [27] D.J. GRIFFITHS, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Cambridge University Press, (2017).
- [28] R.P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON AND M. SANDS, *Lecciones de física de Feynman II. Electromagnetismo y materia*, 1st ed., Fondo de Cultura Económica, (2020).
- [29] A. ESCALANTE AND L. CARBAJAL, *Hamiltonian study for Chern-Simons and Pontryagin theories*, Annals of Physics, **326**, 323-339 (2011).
- [30] L. CASTELLANI, *Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems*, Annals of Physics, **143**, 357-371 (1982).