Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Algunas aplicaciones de la técnica de forcing

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
David Alvarado Cortés

DIRECTORES DE TESIS
Iván Martínez Ruiz
Alejandro Ramirez Páramo

PUEBLA, PUE. Diciembre, 2019

A mis padres.

Agradecimientos

Tengo la suerte del que escribe por placer
del que sabe que la vida es perdonar y agradecer.

-Sharif Hernandez.

Habrán de disculparme, mi memoria se ha deteriorado lo suficiente como para que si intento hacer una lista de las personas con las que estoy agradecido, más de un nombre se me olvide en el tintero. Por esta razón seré tan breve y general como me sea posible.

En primer lugar a mi familia. Mis padres, David Alvarado Toxtle y Sandra Cortés Vazquez, que siempre me han apoyado, no solo durante mi licenciatura sino durante toda mi vida. Éste trabajo es por y para ustedes.
Mis hermanas, Carolina y Cecilia, pese a nuestras diferencias, siempre logran enseñarme algo nuevo.
Donde sea que me caiga la noche siempre los llevo conmigo. Gracias.

A mis amigos y compañeros. Quienes, ya sea que coincidiéramos por mucho o por poco tiempo, hicieron ameno el camino, tanto al estudiar como al momento de simplemente existir, que siempre me ha costado bastante. Viví en la FCFM por una cantidad considerable de tiempo y siempre fue grato tenerlos ahí. En particular a Erika, estoy convencido de que si he sobrevivido a la culminación de ésta licenciatura es gracias a ella.

A mis asesores: Iván Martinez y Alejandro Ramirez (a.k.a. el 7). Por acceder a apoyarme en este trabajo y confiar en mi. Mis sinodales: Manuel Ibarra, Agustín Contreras y David Meza. Por tomarse el tiempo e interés al leer ésta tesis. Y a mis profesores. Entre los cuales me permito remarcar a: el profesor Carrasco que me enseño a trabajar, pero a trabajar en serio, el profesor Iván con quien he tomado cursos desde cuarto semestre y me ha impulsado a mejorar como matemático, el profesor Ibarra, con quien tome mi primer curso de teoría de conjuntos. Los considero de los mejores profesores de ésta facultad.

Gracias.

Introducción

En 1962 Paul Joseph Cohen emplea por primera vez la técnica de forcing para encontrar un modelo de **ZFC** donde la negación de la hipótesis del continuo (HC) se satisfaga. Este resultado, aunado al modelo construido en 1940 por kurt Gödel donde se satisface HC, nos asegura que dicha hipótesis es independiente de los axiomas de **ZFC**.
El resultado en sí mismo fue de gran relevancia, al dar solución a un problema que David Hilbert enunciaría en su famosa lista de los problemas maś importantes de la matemáticas en el año de 1900. Sin embargo, el método utilizado por Cohen, para la construcción del ya mencionado modelo, causó un gran impacto dentro del mundo matemático y ha mostrado su valía en múltiples aplicaciones, siendo una recurrente herramienta para generar modelos y con ello pruebas de consistencia.

En este trabajo nos interesa mostrar diversas aplicaciones de la técnica de forcing. Para lograr este cometido comenzaremos recordando definiciones y resultados propios de la lógica y teoría de modelos, los cuales serán presentados en la primera sección del capítulo 1, en la segunda sección del mismo; presentamos tópicos de la teoría de conjuntos que es necesario conocer para el resto del trabajo.

En el capítulo 2 definimos lo que es una noción de forcing y definimos la extensión genérica de un modelo. Mientras en el capítulo 3 estudiamos las nociones de forcing Fn para, con ellas, presentar el modelo de Cohen para la negación de HC, después un modelo donde no se satisfaga la hipótesis del continuo generalizada (HCG) y por último un modelo para HC, al mismo tiempo estudiamos importantes resultados de acerca de la preservación de cardinales en las extensiones genéricas. En estos dos capítulos se encuentra la médula del trabajo y el buen entendimiento de los mismos conllevará a un buen entendimiento de la totalidad.

Para generar el modelo genérico debemos agregar reales al modelo base. En el capítulo 4 estudiamos las propiedades de estos reales agregados y vemos como intereactuan entre ellos por medio de las nociones de forcing de

Mathias, Silver y Miller.

A pesar de que en el capítulo 3 son presentadas las primeras aplicaciones de la técnica, es común encontrarlas en la literatura debido a su historia y a lo natural que es trabajar con ellas, en el capítulo 5 presentamos diversas aplicaciones; el colapso de Lévy, la consistencia de la propiedad Diamante, la consistencia de la negación de la hipótesis de Suslin y dos aplicaciones topológicas, la primera para ver la consistencia de la existencia de espacios c.c.c. cuyo producto tiene celularidad mayor o igual a un cardinal previsto, la segunda para mostrar la consistencia de la existencia de un espacio regular, hereditariamente separable de cardinalidad superior a 2^ω.

Índice general

Algunas aplicaciones de la técnica de Forcing

David Alvarado Cortés

2019

Capítulo 1

Preliminares

1.1. ZFC y Teoría de modelos

En este capítulo discutiremos definiciones y resultados de la lógica formal y la teoría de modelos. El propósito no es realizar un estudio detallado de las mismas ya que partimos de la base que el lector ha tenido interacción previa con la mayor parte de las nociones que aquí se presentan, por lo mismo no será empleado todo el formalismo detrás de ellas sino que optamos por realizar un estudio intuitivo.

La motivación para redactar esta sección se encuentra en lo indispensable de tener conocimientos del material presentado para trabajar con la técnica de forcing. Para ello partimos de modelos para fragmentos de **ZFC** para extenderlos a modelos con características que deseamos.

Para iniciar la discusión es importante señalar que se espera que el lector esté familiarizado con los conceptos de lenguaje, y con ello símbolos funcionales, símbolos predicativos, términos, fórmulas, axiomas, variables libres y sentencias. También con el concepto de teoría, basada en un lenguaje, axiomas y reglas de inferencia. Señalamos además que, como es común en la teoría de conjuntos, a lo largo del trabajo consideraremos a $\mathbf{V}$ como el universo de todos los conjuntos.

A partir de ahora consideraremos a $\mathcal{L}$ un lenguaje y a φ una fórmula de $\mathcal{L}$, a menos que se especifique lo contrario.

Es usual que $\mathcal{L}$ sea un conjunto finito, en nuestro caso nos interesa la teoría de conjuntos y consideramos $\mathcal{L} = \{\in\}$ donde $\in$ es un símbolo predicativo de aridad 2.

1.1.1. Axiomas de ZFC.

Uno de los sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos más aceptado actualmente es **ZFC** cuyas siglas provienen de los mátemáticos alemanes Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo y Abraham Halevi Adolf Fraenkel que son sus creadores y por el nombre en inglés del Axioma de Elección (Axiom of Choice).
A continuación enunciamos los axiomas que conforman **ZFC**.

Axioma 1 (Extensionalidad)**.**

$$\forall z : \; (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y.$$

Axioma 2 (Fundación)**.**

$$\exists y : \; (y \in x) \to \exists y : \; (y \in x \; \wedge \; \neg \exists z : \; (z \in x \; \wedge \; z \in y)).$$

Axioma 3 (Esquema de Comprensión)**.** *Para cada fórmula, φ, que no tenga a y como variable libre,*

$$\forall v : \; \exists y : \; \forall x : \; (x \in y \leftrightarrow x \in v \; \wedge \; \varphi(x)).$$

Axioma 4 (Par)**.**

$$\exists z : \; (x \in z \; \wedge \; y \in z).$$

Axioma 5 (Unión)**.**

$$\exists A : \; \forall Y : \; \forall x : \; (x \in Y \; \wedge \; Y \in \mathcal{F} \to x \in A).$$

Axioma 6 (Esquema de Reemplazo)**.** *Para cada fórmula, φ, que no tenga a B libre,*

$$\forall x \in A : \; \exists!\, y : \; \varphi(x, y) \to \exists B : \; \forall x \in A : \; \exists y \in B : \; \varphi(x, y).$$

Para los siguientes axiomas usaremos las nociones de $\varnothing$, $\subseteq$, $\cap$, S y $SING$, donde S es la función sucesor y $SING(x)$ expresa que x es singular.

Axioma 7 (Infinito)**.**

$$\exists x:\ (\varnothing \in x\ \wedge\ \forall y \in x:\ (S(y) \in x)).$$

Axioma 8 (Potencia)**.**

$$\exists y : \forall z:\ (z \subseteq x \to z \in y).$$

Axioma 9 (Elección)**.**

$$\varnothing \notin F \wedge \forall x \in F : \forall y \in F : (x \neq y \to x \cap y = \varnothing) \to \exists C : \forall x \in F : (SING(C \cap x)).$$

Notemos que tanto el Axioma 3 como el Axioma 6 son esquemas de axioma. Esto es, definen un axioma por cada fórmula φ, así, **ZFC** es un conjunto infinito de axiomas. Es usual utilizar fragmentos de la teoría en donde, con una sublista de estos axiomas, se enuncian resultados ya que estos resultados no dependen de todos los axiomas de **ZFC**, sin embargo en este trabajo usaremos los nueve axiomas a menos que se indique lo contrario.

1.1.2. Teoría de modelos

Nos interesa determinar cuándo una fórmula o un conjunto de ellas es verdadera. Tomemos como ejemplo la teoría de grupos, cuyo lenguaje consiste de $\mathcal{L} = \{\ \cdot\ ,\ e\}$, donde "$\cdot$"es la operación de grupo y "e"es el elemento neutro, tiene por axiomas las siguientes fórmulas:

- $\forall x, y, z:\ x\cdot (y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$,
- $\exists e:\ \forall y : e\cdot y = y = y\cdot e$ y
- $\forall x : \exists y:\ x\cdot y = y\cdot x = e$.

Cuando verificamos que un conjunto con una operación sea un grupo, por ejemplo $(\mathbb{Z}, +, 0)$ o $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot\ , Id_{n\times n})$, lo que estamos haciendo es ver que dichos conjuntos con sus respectivas operaciones son modelos para la teoría de grupos, dándole un significado a los símbolos de lenguaje, dependiendo del contexto.

En el caso de $(\mathbb{R}, \cdot\ )$ podemos darle un sentido a los símbolos del lenguaje, la operación de grupo es el producto en los reales, y con ello también podemos darle un sentido a las fórmulas del lenguaje y en particular a los axiomas, así, $(\mathbb{R}, \cdot\,)$ funciona como una estructura para el lenguaje de la teoría de grupos, sin embargo no funciona como un modelo ya que $0 \in \mathbb{R}$ no tiene inverso multiplicativo.

Para formalizar esta idea debemos hablar de estructuras.

Definición 1.1. *Una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una pareja $\mathfrak{U} = (A, I)$ con A un conjunto no vacío (llamado el universo de $\mathfrak{U}$) e I una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que para cada $s \in dom(I)$, $I(s)$ se denota por $s_{\mathfrak{U}}$ y satisface lo siguiente:*

1. *Si f es un símbolo funcional de aridad $n > 0$, entonces $f_{\mathfrak{U}} : A^n \to A$.*
2. *Si p es un símbolo predicativo de aridad $n > 0$, entonces $p_{\mathfrak{U}} \subseteq A^n$.*
3. *Si c es un símbolo constante, entonces $c_{\mathfrak{U}} \in A$.*
4. *Si p es una letra proposicional, entonces $p_{\mathfrak{U}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$.*

A partir de ahora escribiremos $\mathfrak{U}$ para referirnos a una estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$ y A para referirnos al universo de $\mathfrak{U}$. Notemos que la función que cumple I es la de asignarle a los elementos del lenguaje un elemento dentro del universo A, de modo que podemos referirnos a ellos en dicho contexto.

Ahora necesitamos establecer lo que significa que una sentencia φ es verdadera en $\mathfrak{U}$ o que $\mathfrak{U}$ es un modelo para φ, lo cual se denotará por: $\mathfrak{U} \models \varphi$. En 1930 Tarski publicó el estudio de la noción de verdad, encontrando que puede definirse de manera rigurosa "$\mathfrak{U} \models \varphi$"cuando trabajamos con conjuntos.
Para realizar la definición de "$\mathfrak{U} \models \varphi$"resulta útil utilizar asignaciones. Recordemos que una asignación σ es una función que, como su nombre lo indica, le asigna a cada fórmula del lenguaje un elemento en el universo A.

En esencia, la noción "$\mathfrak{U} \models \varphi$"significa que en $\mathfrak{U}$ la fórmula φ es verdadera. Si $\mathfrak{M}$ modela todo aquello que es verdad en una teoría $\mathcal{T}$, entonces diremos que $\mathfrak{M}$ es un modelo para la teoría $\mathcal{T}$.

A partir de ahora, en lo que resta de este capítulo, $\mathfrak{M}$ será un modelo para la teoría $\mathcal{T}$, a menos que se indique lo contrario.

Notación 1.2. *Si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, entonces las siguientes denotan $\mathfrak{U} \models \varphi$:*

- $A \models \varphi$
- $(\varphi)^{\mathfrak{A}}$
- $(\varphi)^{A}$.

Resulta de gran interés para la teoría de modelos el concepto de subestructura y con el concepto de subestructura elemental, teniendo amplias aplicaciones en otras áreas de la matemática. A continuación enunciaremos ambos conceptos.

Definición 1.3. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras para $\mathcal{L}$. $\mathfrak{A}$ es una subsestructura (submodelo) de $\mathfrak{B}$, lo cual se denota $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si y solo si $A \subseteq B$ y*

- *Si f es un símbolo funcional de aridad $n > 0$, entonces $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}}\restriction_{A^n}$.*
- *Si p es un símbolo predicativo de aridad $n > 0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \cap A^n$.*
- *Si c es un símbolo constante, entonces $c_{\mathfrak{A}} = c_{\mathfrak{B}}$.*
- *Si p es una letra proposicional, entonces $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \in 2$.*

Definición 1.4. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras para $\mathcal{L}$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$*

1. *Sea φ una fórmula de $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$ significa que para todas las asignaciones σ de φ en A, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$.*
2. *$\mathfrak{A}$ es subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, lo cual se denota $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, si y solo si para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$.*

El siguiente teorema es de gran importancia y a lo largo de este trabajo se hará uso constante del mismo de manera implícita. Aunque no es la versión más fuerte que hay del mismo hemos decidido enunciarlo de esta manera ya que en la siguiente presentación se abarca todo lo que vamos a requerir para este trabajo.
Omitimos la demostración de este teorema ya que sale del objetivo de este trabajo y esperamos que el lector tenga conocimiento del mismo.

Teorema 1.5 (Löwenheim-Skolem)**.** *Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje numerable y $\mathfrak{M}$ un modelo infinito para una teoría basada en $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{M}$ admite un submodelo elemental numerable.*

Definiremos la consistencia de un conjunto de sentencias de un lenguaje, para ello primero daremos una definición para la noción de $\vdash$.

Definición 1.6. *Sea Γ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$, una prueba formal en Γ es un sucesión finita no vacía de sentencias de $\mathcal{L}$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$:*

- *$\varphi_i \in \Gamma$, o*
- *φ_i es un axioma lógico, o*
- *para algunos $j, k < i$, φ_i se sigue de aplicar una regla de inferencia a φ_j y φ_k.*

Esta suceción es una prueba formal de la última sentencia φ_n.

Definición 1.7. *Sea Γ un conjunto de sentencias de una teoría basada en $\mathcal{L}$*

1. *Si φ es una sentencia de $\mathcal{L}$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$ si y solo si hay una prueba formal de φ en Γ.*
2. *$Incon(\Gamma)$ significa que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ para alguna sentencia φ de $\mathcal{L}$.*
3. *$Con(\Gamma)$ significa $\neg Incon(\Gamma)$.*

El concepto de modelo puede generalizarse de conjuntos en clases propias por medio de lo conocemos como interpretación relativa, las nociones son análogas, solo hay que cuidar detalles que surgen al no trabajar con conjuntos, no revisaremos tal detalle pues no es de nuestro interés, pero hacemos esta mención pues utilizaremos la noción de interpretación relativa a continuación.

El siguiente lema es la base de muchas de las pruebas de consistencia relativa y en particular será muy útil para este trabajo.

Lema 1.8. *Sea $\mathfrak{U}$ una interpretación relativa de $\mathcal{L}$ en Λ. Sea Γ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ y supongamos que para cada axioma θ de Γ podemos verificar $\Lambda \vdash \theta^{\mathfrak{U}}$. Entonces, en la metateoria, $Con(\Lambda) \to Con(\Gamma)$.*

1.1.3. Nociones Absolutas

Hemos visto que la relativización de una fórmula puede resultar en diferentes nociones según el contexto y por ende tener significados distintos en cada modelo. Nos interesa ver cuándo una fórmula no cambia su significado, para así trabajar esencialmente con el mismo concepto a pasear de realizar un estudio en diferentes modelos. Para ello definiremos el concepto de las fórmulas Δ_0 y con ellas el concepto de que una fórmula sea absoluta.

Definición 1.9. *Sea $\mathcal{L}$ que contiene al símbolo $\in$. Las fórmulas Δ_0 de $\mathcal{L}$ son aquellas construidas por las siguientes reglas:*

(I) *Todas las fórmulas atómicas son Δ_0.*

(II) *Si φ y ψ son fórmulas Δ_0, entonces también lo son:*

- $\neg\varphi$,
- $\varphi \vee \psi$ *y*
- $\varphi \rightarrow \psi$.

(III) *Si φ es una fórmula Δ_0, y es una variable y τ es un término que no contiene a y, entonces $\forall y\,[y \in \tau \rightarrow \varphi]$ y $\exists y\,[y \in \tau \wedge \varphi]$, (abreviadas $\forall y \in \tau : \varphi$ y $\exists y \in \tau : \varphi$) son Δ_0.*

Definición 1.10. *Sean A, B estructuras para $\mathcal{L}$ tales que $A \subseteq B$.*

1. *φ es absoluta para A, B si y solo si $A \preccurlyeq_\varphi B$.*
2. *φ es absoluta para A si y solo si $A \preccurlyeq_\varphi \boldsymbol{V}$.*

Lema 1.11. *Sean $\mathcal{L}$ que contiene al símbolo $\in$, $\mathfrak{A} = (A, \in_A)$ y $\mathfrak{B} = (B, \in_B)$ modelos para $\mathcal{L}$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, A transitivo. Entonces para todas las fórmulas φ de $\mathcal{L}$ que son Δ_0, $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$.*

La idea de que una fórmula sea absoluta para A, B es que la noción sea la misma tanto para A como para B. Por su parte, el lema 1.11 nos dice que si $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{V}$ es transitivo y φ es Δ_0, entonces φ es absoluta para $\mathfrak{M}$. Así, las fórmulas Δ_0 son absolutas para cada modelo transitivo $\mathfrak{M}$ de **ZFC**. Pensemos entonces que son fórmulas que no necesitan ser relativizadas.

A continuación colocamos una lista de nociones que son absolutas para cada modelo transitivo de **ZFC**.

Lema 1.12. *Las siguientes nociones son absolutas para modelos transitivos de **ZFC**.*

1. *x es un conjunto transitivo.*
2. *x es un ordinal.*
3. *x es un ordinal sucesor.*
4. *$x = 0$.*
5. *x es un ordinal límite.*
6. *x es un número natural.*
7. *$x \subseteq \omega$.*
8. *$x = \omega$.*
9. *La función de aridad 0 $\varnothing$.*
10. *La función de aridad 1, función sucesor S.*
11. *La función de aridad 2, función intersecsión $\cap$.*
12. *La función de aridad 2 unión $\cup$, las funciones de aridad 1 unión $\bigcup$ e intersección $\bigcap$, donde definimos $\bigcap \varnothing = \varnothing$.*
13. *La relación de aridad 3 $\{x, y\} = z$.*
14. *La relación de aridad 2 pareja no ordenada $\{x, y\}$, la función de aridad 1 singular $\{x\}$ y la funcipon de aridad dos, pareja ordenada (x, y).*
15. *Las propiedades: z es pareja ordenada y x es relación.*
16. *$dom(x)$ y $ran(x)$.*
17. *Las propiedades: f es una función, f es inyectiva, f es sobreyectiva y f es biyectiva.*
18. *La función de aridad 2 $f(x)$, definida como $\varnothing$ a menos que f sea una función y $x \in dom(f)$.*
19. *La función de aridad 2 producto cruz $\times$.*

20. *Si R es una relación sobre un conjunto A: R es transitiva, irreflexiva, reflexiva, satisface tricotomía, simétrica, ordena parcialmente, ordena estrictamente, ordena totalmente, es relación de equivalencia, es un pre-orden, es bien fundada en A y bien ordena a A.*

21. *Las funciones de aridad 2 producto $\cdot$ y suma $+$ de ordinales.*

22. *x es finito.*

23. *x es hereditariamente finito.*

A lo largo del trabajo será de gran utilidad tener un buen entendimiento del listado anterior ya que será requerido con regularidad sin embargo no será común referenciar el mismo explícitamente.
Cabe señalar que las nociones de ser cardinal y de conjunto potencia no son absolutas, hecho que debemos recordar para lidiar al momento extender modelos para **ZFC**.

1.1.4. Modelos para ZFC

En esta sección presentamos algunos resultados sobre pruebas de consistencia. En particular nos interesa enunciar clases que sirvan como modelos para fragmentos de **ZFC**, en búsqueda de dicho tópico definiremos la clase de los conjuntos bien fundados.
Y concluiremos enunciando el Teorema de Reflejo el cual es el objetivo principal de esta sección.

Definición 1.13. 1. *Se define por recursión sobre $\gamma \in Ord$, los conjuntos $R(\gamma)$ de la siguiente manera:*

   (I) $R(0) = 0$

   (II) *Si existe $\beta \in Ord$, $\gamma = \beta + 1$, $R(\gamma) = P(R(\beta))$*

   (III) *Si γ es un ordinal límite, $R(\gamma) = \bigcup_{\xi<\gamma} R(\xi)$*

2. *Se define la clase de los conjuntos bien fundados denotada por $\boldsymbol{BF}$ de la siguiente forma es $\boldsymbol{BF} = \bigcup\{R(\gamma) : \gamma \in Ord\}$.*

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para que una clase sea un modelo para un axioma de la teoría de conjuntos, esto nos será de gran utilidad para identificar clases adecuadas que nos servirán para modelar fragmentos de **ZFC**.

Lema 1.14. *Para cualquier clase $\boldsymbol{M}$:*

1. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva, el Axioma de Extensión es verdadero en $\boldsymbol{M}$.*
2. *Si $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{BF}$, entonces el Axioma de Fundación se cumple en $\boldsymbol{M}$.*
3. *Si para cada $z \in \boldsymbol{M}$ y cada $y \subseteq z$ se cumple que $y \in \boldsymbol{M}$, entonces el Axioma de Comprensión se cumple en $\boldsymbol{M}$.*
4. *Si para cada $x, y \in \boldsymbol{M}$, $\{x, y\} \in \boldsymbol{M}$, entonces el Axioma del Par se cumple en $\boldsymbol{M}$.*
5. *Si para cada $F \in \boldsymbol{M}$, $\bigcup F \in \boldsymbol{M}$, entonces el Axioma de la Unión se cumple en $\boldsymbol{M}$.*
6. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva y para cada función f cumple que, si $dom(f) \in \boldsymbol{M}$ y $ran(f) \subseteq \boldsymbol{M}$, entonces $ran(f) \in \boldsymbol{M}$. Entonces el Axioma de Reemplazo se verifica en $\boldsymbol{M}$.*
7. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva, entonces que para toda $x \in \boldsymbol{M}$, se cumpla que $\wp(x) \cap \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$ implica que el Axioma del Potencia se cumple en $\boldsymbol{M}$. Si $\boldsymbol{M}$ cumple el Axioma de Comprensión, el reciproco es verdadero.*
8. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva y de tal modo que los Axiomas de Extensión, Comprensión, Par y Unión se verifican en $\boldsymbol{M}$, entonces:*
   a) *Si $\omega \in \boldsymbol{M}$, el Axioma de Infinito se cumple en $\boldsymbol{M}$.*
   b) *El Axioma de Elección se verifica en $\boldsymbol{M}$ si y solo si cada familia disjunta de conjuntos no vacíos en $\boldsymbol{M}$, tiene un conjunto de elección en $\boldsymbol{M}$.*

La clase **BF** es una clase propia con propiedades muy interesantes, las cuales no analizaremos a detalle sin embargo ellas son muy útiles cuando trabajamos en $\mathbf{ZFC}^-$ (todos los axiomas de **ZFC** menos el Axioma de Fundación), ya que suponiendo Axioma de Fundación resulta ser que $\mathbf{BF} = \mathbf{V}$. Naturalmente **BF** resulta cumplir con todas las hipótesis del lema anterior, así, los axiomas de Extensión, Fundación, Comprensión, Par, Unión, Reemplazo, Potencia, Infinito y Elección se satisfacen en **BF**.

Lema 1.15. *Si $\boldsymbol{M}$ es una clase transitiva donde se verifica el Axioma de Comprensión y tal que para cada subconjunto $x \subseteq \boldsymbol{M}$, existe un $y \in \boldsymbol{M}$ tal que $x \subseteq y$, entonces todos los axiomas de $\boldsymbol{ZF}$ se verifican en $\boldsymbol{M}$.*

A pesar de lo fructífero que es saber que **BF** satisfacen los axiomas de **ZFC**, nuestro interés está en modelos, donde nuestro universo son conjuntos. El siguiente lema nos dice que los conjuntos $R(\gamma)$ son buenos candidatos para modelar fragmentos de **ZFC**.

Teorema 1.16. *Si γ es un cardinal límite mayor que ω, entonces*

$$R(\gamma) \models \textbf{\textit{ZFC-Reemplazo}}.$$

Nos interesa modelar la mayor parte de **ZFC** posible, sabemos por los teoremas de incompletitud de Gödel que **ZFC** $\nvdash \exists\gamma\,[R(\gamma) \models$ **ZFC**$]$, pero hemos visto que los conjuntos $R(\gamma)$ son buenos candidatos. A continuación enunciamos el Teorema de Reflejo que nos ayudará para ver hasta que limites podemos encontrar modelos para fragmentos de **ZFC**.

Teorema 1.17 (Teorema de Reflejo)**.** *Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ una lista de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$, $\boldsymbol{B}$ es una clase no vacía y para cada $\xi \in Ord$, sean $A(\xi)$ un conjunto tales que cumplen lo siguiente:*

i) *Si $\xi < \eta$, entonces $A(\xi) \subseteq A(\eta)$.*

ii) *Para η límite $A(\eta) = \bigcup_{\xi<\eta} A(\xi)$.*

iii) *$\boldsymbol{B} = \bigcup_{\xi\in Ord} A(\xi)$.*

Entonces $\forall\xi\,\exists\eta > \xi\,[\eta$ es un ordinal límite $\wedge A(\eta) \neq \varnothing \wedge \bigwedge_{i<n}(A(\eta) \preccurlyeq_{\varphi_i} \boldsymbol{B})]$.

Una de las aplicaciones más útiles de este teorema se presenta cuando $\mathbf{B} = \mathbf{V}$ y $A(\xi) = R(\xi)$, como se presenta en el siguiente resultado.

Corolario 1.18. *Si Λ es un conjunto finito de Axiomas de **ZFC**, entonces:*

1. ***ZFC*** $\vdash \exists\eta\,[R(\eta) \models$ ***ZFC-Reemplazo*** $\cup\,\Lambda]$.
2. ***ZFC*** $\vdash \exists\mathfrak{M} :\ [\mathfrak{M} \models$ ***ZFC-Reemplazo*** $\cup\,\Lambda\ \wedge\ |\mathfrak{M}| = \aleph_0\ \wedge\ \mathfrak{M}$ *es transitivo*$]$.

Recordemos que el Axioma de Reemplazo en realidad es un esquema de axioma por lo cual este conjunto finito de axiomas puede ser un conjunto finito de instancias de Reemplazo.

Sabemos que **ZFC** no puede asegurar su propia consistencia sin embargo, debido al corolario anterior si puede asegurar la consistencia de todo fragmento finito de la teoría de conjuntos, de hecho puede producir un modelo transitivo numerable para las mismas.

A partir de ahora cuando nos refiramos a un modelo de **ZFC**, nos estaremos refiriendo a un modelo para **ZFC-Reemplazo** adicionado con un conjunto finito de instancias de reemplazo. Escribiremos mtn para referimos a un modelo transitivo numerable.

1.2. Teoría de conjuntos.

Como ya se mencionó, partimos de la base que el lector está familiarizado con la teoría de conjuntos, por lo cuál los conceptos que revisaremos aquí serán aquellos que hablen de tópicos que resultan necesarios para este trajo.

Comenzamos con el siguiente lema que es una implicación clásica del Axioma de Elección.

Lema 1.19. *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Lo que este lema nos otorga es poder asociar a todo conjunto X un único ordinal α. A dicho ordinal lo llamamos el tipo de orden de X y lo denotamos por $type(X)$.

A continuación escribimos notaciones comunes y muy útiles tanto para este trabajo como para la teoría de conjuntos.

Notación 1.20. *Sean κ y λ cardinales y X un conjunto*

- $[X]^\lambda = \{Y \subseteq X : |Y| = \lambda\}$.
- $[X]^{<\lambda} = \{Y \subseteq X : |Y| \leq \lambda\}$.
- $fin(X) = [X]^\omega$.
- ${}^\lambda X = \{f : \lambda \longrightarrow X\}$.
- ${}^{<\lambda} X = \{f : \alpha \longrightarrow X : \alpha \in \lambda\}$.

Continuamos con la definición de cofinalidad y un lema que le involucra, escribimos ambos, nuevamente, a modo de recordatorio.

Definición 1.21. 1. *Sean α y β ordinales. $f : \alpha \longrightarrow \beta$ es una función cofinal si y solo si para todo $\gamma \in \beta$, existe $\lambda \in \alpha$ tal que $\gamma < f(\lambda)$, i.e., $ran(f)$ es no acotado en β.*

2. *La cofinalidad de β es el cardinal $cof(\beta) = \min\{\alpha : \exists f : \alpha \longrightarrow \beta$ función cofinal$\}$.*

Es facil notar con esta definición que para cualquier ordinal α, $cof(\alpha) \leq \alpha$. Resulta ser que solo es interesante estudiar la cofinalidad de ordinales límites, ya que los ordinales sucesores tienen cofinalidad 1.

Lema 1.22. *Si β es un ordinal, existe una función cofinal $f : cof(\beta) \longrightarrow \beta$ estrictamente creciente.*

Definición 1.23. *Sea α un ordinal, decimos que α es regular si y solo si $cof(\alpha) = \alpha$.*

Lema 1.24. *Si α es un ordinal regular entonces α es un cardinal.*

Es un tópico importante estudiar la cofinalidad de cardinales. Resulta que para κ un cardinal, κ^+ es regular, por su parte; si α es un ordinal límite, entonces $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$.

1.2.1. Lema del Δ-sistema.

Nuestro interés aquí es enunciar el lema del Δ-sistema, el cual es de bastante utilidad para la teoría de conjuntos. Para ello hablaremos del concepto de que dos conjuntos sean casi ajenos, en este espacio nuestro interés está en conjuntos que consideramos grandes y por ello es que despreciamos otros que en su sentido nos resultan pequeños. Para aclarar esto veamos la siguiente definición.

Definición 1.25. *Una familia $\mathcal{A}$ es llamada un Δ-sistema si y solo si existe un conjunto r tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$ con $x \neq y$ se cumple que $x \cap y = r$. A r se le llama la raíz del Δ-sistema.*

El siguiente lema es la versión general del lema del Δ-sistema. A lo largo del trabajo será muy usual utilizarlo y referenciarlo con el nombre de dicho lema.

Teorema 1.26 (Δ-sistema)**.** *Sean κ es un cardinal infinito y $\theta > \kappa$ regular tal que para todo $\alpha < \theta$, $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$. Si $\mathcal{A}$ es una familia tal que $|\mathcal{A}| \geq \theta$ y para todo $x \in \mathcal{A}$, $|x| < \kappa$, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \theta$ y $\mathcal{B}$ forma un Δ-sistema.*

Demostración. Podemos considerar $|\mathcal{A}| = \theta$. De este modo $|\bigcup \mathcal{A}| \leq \theta$ y como no estamos interesados en la individualidad de los elementos de $\mathcal{A}$ podemos asumir $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \theta$. Entonces cada $x \in \mathcal{A}$ tiene un orden $type(x) < \kappa$ como subconjunto de θ. Como θ es regular y $\theta > \kappa$, existe $\rho < \kappa$ tal que $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} : \ type(x) = \rho\}$ tiene cardinalidad θ.

Para cada $\alpha < \theta$, $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$ implica que menos de θ elementos de $\mathcal{A}_1$ son subconjuntos de α, por lo cual $\bigcup \mathcal{A}_1$ es no acotado en θ. Si $x \in \mathcal{A}_1$ y $\xi < \rho$, consideremos a $x(\xi)$ el ξ-ésimo elemento de x, considerando claro que x tiene su orden $type(x)$. Como θ es regular, existe un ξ tal que $\{x(\xi) : x \in \mathcal{A}_1\}$ es no acotado en θ. Fijemos ξ_0 como el menor de los ξ que cumplen lo anterior. Sea $\alpha_0 = sup\{x(\eta) + 1 : x \in \mathcal{A}_1 \ \wedge \ \eta < \xi_0\}$; entonces $\alpha_0 < \theta$ y para cada $x \in \mathcal{A}_1$ y cada $\eta < \xi_0$, $x(\eta) < \alpha_0$.

Por recursión transfinita en $\mu < \theta$, elegimos $x_\mu \in \mathcal{A}_1$ de tal modo que $x_\mu(\xi_0) > \alpha_0$ y $x_\mu(\xi_0) > \text{máx}(\alpha_0), sup\{x_\gamma(\eta) : \ \eta < \rho \ \wedge \ \gamma < \mu\})$.

Sea $\mathcal{A}_2 = \{x_\mu : \ \mu < \theta\}$. Tenemos que $|\mathcal{A}_2| = \theta$ y para cada $x, y \in \mathcal{A}_2$ distintos, $x \cap y \subseteq \alpha_0$. Como $|\alpha_0^{<\kappa}| < \theta$, existe $r \subseteq \alpha_0$ y $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}_2$ con $|\mathcal{B}| = \theta$ y para todo $x \in \mathcal{B}$, $x \cap \alpha_0 = r$, entonces $\mathcal{B}$ forma un Δ-sistema con raíz r. $\square$

Así, enunciamos la versión más popular del lema del Δ-sistema como caso particular del teorema anterior donde $\kappa = \aleph_0$ y $\theta = \aleph_1$.

Lema 1.27. *Si $\mathcal{A}$ es una familia tal que $|\mathcal{A}| \geq \aleph_1$ y para todo $x \in \mathcal{A}$, $|x| < \aleph_0$ entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \aleph_1$ y $\mathcal{B}$ forma un Δ sistema.*

1.2.2. Filtros

Los filtros son una herramienta importante para diversas disciplinas matemáticas. Podemos entender la noción de filtro como una noción de conjuntos grandes, donde los elementos de un filtro sobre un conjunto S son los conjuntos grandes de S. Más adelante escribiremos otra definición de filtros para ordenes parciales, a pesar de la similitud existente estas nociones tienen objetivos diferentes en este trabajo y no deben ser confundidas por lo cual haremos explicito cuando hablemos de filtros en su sentido conjuntista.

Definición 1.28. *Sean S un conjunto no vacío y $\mathscr{F} \subseteq \wp(S)$, $\mathscr{F}$ es un filtro si y solo si*

I) $S \in \mathscr{F}$ *y* $\varnothing \notin \mathscr{F}$,

II) *si* $X, Y \in \mathscr{F}$, *entonces* $X \cap Y \in \mathscr{F}$,

III) *si* $X, Y \subseteq S$, $X \in \mathscr{F}$ *y* $X \subseteq Y$, *entonces* $Y \in \mathscr{F}$.

Si S es un conjunto no vacío y $\varnothing \neq X_0 \subseteq S$, la familia $\mathscr{F} = \{X \subseteq S : X \supseteq X_0\}$ es un filtro y es llamado un filtro principal. Si S es infinito y $\mathscr{F} = \{X \subseteq S : |S \setminus X| < \aleph_0\}$ es un filtro y es llamado el filtro de Fréchet en S.

Definición 1.29. *Sean S un conjunto no vacío, $\mathscr{F}$ un filtro sobre S y $\varnothing \neq A \subseteq \wp(S)$.*

1. *$\mathscr{F}$ es un filtro libre si contiene al filtro de Fréchet en S.*
2. *El filtro generado por los elementos de A es el filtro*
$$fil(A) = \{x \subseteq S |\, \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in A : x \supseteq \bigcap_{i=0}^{n} a_i\}.$$
3. *$\mathscr{F}$ es un ultrafiltro si y solo si es un filtro maximal con respecto a la contención. Esto es, no existe $\mathscr{G}$ filtro sobre S tal que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$.*

Lema 1.30. *Un filtro $\mathscr{F}$ sobre S es un ultrafiltro si y solo si para todo $X \subseteq S$ sucede que o bien $X \in \mathscr{F}$ o $S \setminus X \in \mathscr{F}$.*

En particular el estudio de filtros sobre ω resulta de gran interés en la teoría de conjuntos y, más adelante, nos será de utilidad emplear dichos filtros.
Para facilitar la escritura consideraremos la siguiente notación, para $x \subseteq \omega$ definimos $x^c = \omega \setminus x$.

Definición 1.31. *Para un filtro $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$, $\mathscr{F}^+ = \{x \subseteq \omega : x^c \notin \mathscr{F}\}$.*

Lema 1.32. *Si $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es un filtro, $\mathscr{F}^+ = \{x \subseteq \omega |\, \forall z \in \mathscr{F} : x \cap z \neq \varnothing\}$.*

Demostración. Para la implicación hacia la derecha. Sea $z \in \mathscr{F}$, supongamos que $x \cap z = \varnothing$, entonces $z \subseteq x^c$ lo cual implica que $x^c \in \mathscr{F}$ por lo que $x \notin \mathscr{F}^+$ lo cual es una contradicción.
La implicación hacia la izquierda se sigue de que si $x \subseteq \omega$ es tal que $x \notin \mathscr{F}^+$, entonces $x^c \in \mathscr{F}$ y basta considerar $z = x^c$ para tener que $z \in \mathscr{F}$ y $x \cap z = \varnothing$. □

Sabemos que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, entonces el hecho de que $x \cup y \in \mathscr{U}$ implica que o bien $x \in \mathscr{U}$ o $y \in \mathscr{U}$. Sin embargo esto no tiene por que suceder para un filtro $\mathscr{F}$, pero el siguiente lema nos dice que si sucede para $\mathscr{F}^+$.

Lema 1.33. *Sea $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ un filtro. Si $x \cup y \in \mathscr{F}^+$ entonces o bien $x \in \mathscr{F}^+$ o $y \in \mathscr{F}^+$.*

Demostración. Supongamos que $x \notin \mathscr{F}^+$ y $y \notin \mathscr{F}^+$, entonces $x^c, y^c \in \mathscr{F}$, como $\mathscr{F}$ es filtro, $x^c \cap y^c = (x \cup y)^c \in \mathscr{F}$ por lo que $x \cup y \notin \mathscr{F}^+$ lo cual es una contradicción. □

1.2.3. Árboles

Lo árboles son ordenes parciales interesantes. Varios de ellos son ampliamente utilizadas en diversas aplicaciones de las matemáticas y dentro de la teoría de conjuntos resultan ser una herramienta útil. En este trabajo los emplearemos para definir nociones de forcing, el forcing de Miller y después para establecer resultados acerca de la hipótesis de Suslin.

Definición 1.34.

1. *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, < \rangle$ tal que para toda $x \in A$,el conjunto $A_x = \{a \in A : a < x\}$ está bien ordenado por $<$.*
2. *Para $x \in A$, la altura de x es $alt_A(x) = type(A_x)$.*
3. *$Niv_\alpha(A) = \{x \in A : \ alt_A(x) = \alpha\}$.*
4. *La altura del árbol es: $alt_A = \text{mín}\{\alpha : \ Niv_\alpha(A) \neq \varnothing\}$.*
5. *$A^* \subseteq A$ con el orden inducido es un subárbol si para todo $x \in A^*$, $A_x \subseteq A^*$.*
6. *$A(x) = \{a \in A : \ a \leq x \ \vee \ a \geq x\}$.*

A los elementos de A se les suele llamar nodos, convención común con la teoría de grafos.

En la siguiente definición definiremos lo que son las ramas de un árbol a las cuales también se les conoce como cadenas, concepto muy conocido dentro de la teoría de órdenes parciales.

Definición 1.35. *Sean A un árbol y $C \subseteq A$, C es una rama de A si y solo si es totalmente ordenada por $\leq$.*

Definición 1.36. *Sean κ un cardinal regular y A un árbol, A es un κ-árbol si y solo si $alt_A = \kappa$ y para todo $\alpha < \kappa$, $|Niv_\alpha(A)| < \kappa$.*

Finalizamos esta sección con el siguiente lema, el cual nos indica que si tenemos un árbol infinito pero de tal modo que ningún nodo tiene una cantidad infinita de sucesores inmediatos, entonces debe existir una cadena infinita.

Lema 1.37 (König)**.** *Si A es un ω-árbol, entonces A tiene una rama infinita.*

Demostración. Como A es infinito, para cada $n \in \omega$, $Niv_n(A)$ es finito y para cada $y \in A$ existe $x \in Niv_0(A)$ tal que $y \geq x$, podemos considerar $x_0 \in Niv_0(A)$ tal que $\{y \in A : \ y \geq x_0\}$ es infinito. Por argumentos similares y usando inducción podemos considerar una colección de elemento $x_n \in A$ de tal modo que para cada $n \in \omega$, $x_n \in Niv_n(A)$, $x_n + 1 > x_n$ y $\{y \in A : \ y \geq x_n + 1\}$ es infinito.

Entonces $\{x_n : \ n \in \omega\}$ es una rama infinita en A. $\square$

Capítulo 2

Forcing

En este capítulo discutiremos la técnica de forcing la cual fue introducida por Paul Cohen en 1962 en su demostración de la existencia de un modelo de **ZFC** que no verifica HC. Por medio de esta técnica partimos de un mtn de **ZFC** y lo extendemos a un nuevo mtn, al cual llamamos extensión genérica. En esta extensión se determina lo que verifica por medio de una aproximación de condiciones adecuadas.

2.1. Órdenes parciales y filtros genéricos

Comenzaremos enunciando el concepto de orden parcial y nociones al rededor del mismo que serán empleadas a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1. *1.* $(\mathbb{P}, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado, "copo", si* $\leq$ *es transitivo, reflexivo y para todo* $p, q \in \mathbb{P}$ *se cumple que: si* $p \leq q$ *y* $q \leq p$*, entonces* $p = q$*.*

2. Una noción de forcing, o simplemente forcing, es una terna $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$*, donde* $(\mathbb{P}, \leq)$ *es un copo con elemento máximo,* $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$*.*

3. Sea $\mathbb{P}$ *un forcing, a los elementos de* $\mathbb{P}$ *los llamaremos condiciones de forcing, o simplemente condiciones. Si* $p \leq q$ *diremos que* p *extiende a* q*.*

4. Sean $p, q \in \mathbb{P}$*,* p *y* q *son compatibles (denotado* $p \| q$*), si existe* $r \in \mathbb{P}$ *tal que* $r \leq p$ *y* $r \leq q$*,* r *es una extensión común de* p *y* q*. En caso* *contrario p y q son incompatibles (denotado $p \perp q$).*

5. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$, $\mathcal{A}$ es una anticadena si sus elementos son incompatibles dos a dos, i.e., si para todo $p, q \in \mathcal{A}$ con $p \neq q$, tenemos que $p \perp q$. $\mathbb{P}$ es ccc, si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.*

6. *Sean $p \in \mathbb{P}$ y $D \subseteq \mathbb{P}$, D es denso debajo de p si para todo $q \leq p$ existe $r \in D$ tal que $r \leq q$. Si D es denso debajo de $\mathbb{1}$ simplemente diremos que D es denso.*

En lo sucesivo $\mathfrak{M}$ denotará un modelo transitivo numerable de **ZFC** y $\mathbb{P}$ denotará una noción de forcing tal que $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, ésta es una convención que tendremos a lo largo del trabajo.

La idea intuitiva que mantendremos en el trabajo es que las condiciones de $\mathbb{P}$ nos aportan información, así que cuando $q \leq p$ podremos pensar que q nos aporta a lo menos toda la información que nos aporta p.

A continuación enunciaremos la definición de filtro que, pese a su natural parecido, no debe confundirse con la noción de homónima en Teoría de Conjuntos. Para evitar confusiones, cuando nos refiramos a un filtro será conforme a la siguiente definición, a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.2. *Un conjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro sobre $\mathbb{P}$ si satisface que:*

1. $\mathbb{1} \in G$.

2. $\forall p, q \in G \, \exists \, r \in G \, (r \leq p \wedge r \leq q)$.

3. $\forall p, q \in \mathbb{P} \, [(q \leq p \wedge \; q \in G) \Rightarrow \; p \in G]$.

Para poder extender $\mathfrak{M}$ a un nuevo mtn N será necesario agregarle un filtro que intersecte a una gran cantidad de densos, de ese modo nos aseguramos que G tenga una gran cantidad de información y que la misma no sea contradictoria.

Definición 2.3. *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing, G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ si y solo si G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ y para cada denso $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in \mathfrak{M}$, $G \cap D \neq \varnothing$.*

Lema 2.4. *Sean $E \subseteq \mathbb{P}$, $E \in \mathfrak{M}$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces:*

1. O bien $G \cap E \neq \varnothing$ o existe $q \in G$ tal que para toda $r \in E$, $(r \perp q)$.

2. Si $p \in G$ y E es denso debajo de p, entonces $G \cap E \neq \varnothing$.

Demostración. 1. Sean $A = \{p : \exists r \in E : p \leq r\}$, $B = \{q : \forall r \in E : r \perp q\}$ y $D = A \cup B$.
Veamos que D es denso. Sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \notin D$. Entonces como $q \notin B$ existe $r \in E$ tal que r y q son compatibles. Consideremos a p una extensión común de r y q, entonces p es una extensión de $r \in E$ y por tanto, $p \in A \subseteq D$, i.e., para q, hemos encontrado $p \in D$ tal que $p \leq q$. Como p es cualquier condición en $\mathbb{P}$ concluimos que D es denso y dado que $\mathfrak{M}$ conoce todo aquello que conforma a D tenemos que $D \in \mathfrak{M}$, por tanto $G \cap D \neq \varnothing$.

Sea $p \in G \cap D$, si p es tal que $p \in A$, entonces existe $r \in E$ con $p \leq r$, como, en particular, $p \in G$ se tiene que $r \in G$, por tanto $r \in G \cap E \neq \varnothing$. En otro caso, $p \in G \cap B$ por lo cual es tal que para cada $r \in E$, $r \perp p$.

2. Hagamos la prueba por contradicción, es decir, supongamos que $p \in G$, E es denso debajo de p y $G \cap E = \varnothing$. Entonces, por 1., podemos fijar $q \in G$ tal que para cada $r \in E$, $r \perp q$. Sea $q_0 \in G$ una extensión común de p y q. Como E es denso debajo de p y $q_0 \leq p$, consideramos $s \in E$ tal que $s \leq q_0$, como $q_0 \leq q$, se tiene que $s \leq q$, lo cual contradice que $s \perp q$. Por lo tanto, $G \cap E \neq \varnothing$. □

El siguiente teorema resulta de vital importancia, ya que nos asegura la existencia de un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, por lo cual siempre podremos hablar de los mismos

Lema 2.5 (Existencia de un filtro genérico)**.** *Si $\mathfrak{M}$ es un mtn de **ZFC** y $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ una noción de forcing, entonces para cada $p \in \mathbb{P}$ existe un filtro G sobre $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ y G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$. Como $\mathfrak{M}$ es numerable, tenemos una cantidad numerable de densos, denotemos por $\{D_n : n \in \omega\}$ al conjunto de densos $D \subseteq \mathbb{P}$ tales que $D \in \mathfrak{M}$. Elijamos para cada $n \in \omega$ un elemento $p_{n+1} \in D_n$ de modo que $p_0 = p$ y $p_{n+1} \leq p_n$. Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega : p_n \leq q\}$.

Como $p = p_0$ y $p_0 \leq p_0$, entonces $p \in G$.

Para ver que G es filtro, notemos que trivialmente $\mathbb{1} \in G$. Sean $q, r \in G$, entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $p_n \leq q$ y $p_m \leq r$. Considerando

$k = max\{n, m\}$, entonces $p_k \leq q$, $p_k \leq r$ y $p_k \in G$. Supongamos que $q \in G$, $r \in \mathbb{P}$ y $q \leq r$, como $q \in G$, existe $n \in \omega$ tal que $p_n \leq q$, y como $q \leq r$, se tiene que $p_n \leq r$, con lo cual $r \in G$. Con lo cual G es un filtro sobre $\mathbb{P}$

Resta probar que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, para esto notemos que para cada $n \in \omega$, $p_{n+1} \leq p_n$ con lo cual $p_n \in G$ y por tanto, $G \cap D_n \neq \varnothing$. $\square$

Como hemos mencionado, nos interesa extender nuestro modelo $\mathfrak{M}$ y comenzamos agregando un filtro genérico G; a partir de este filtro será que agregaremos diversos elementos al modelo $\mathfrak{M}$. Sin embargo, para poder asegurar que agregamos elementos nuevos al modelo $\mathfrak{M}$ es necesario que el filtro G no sea un elemento de $\mathfrak{M}$ y en busca de este acontecimiento es que enunciamos la siguiente definición y el lema que le sucede.

Definición 2.6. *Sea $r \in \mathbb{P}$, r es un átomo de $\mathbb{P}$ si y solo si no existen $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq r$, $q \leq r$ y $p \perp q$.*

Lema 2.7. *Si $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ no tiene átomos y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces $G \notin \mathfrak{M}$.*

Demostración. Supongamos que $G \in \mathfrak{M}$. Sea $D = \mathbb{P} - G$, por la absolutez de la diferencia de conjuntos, $D \in \mathfrak{M}$. Ahora veamos que D es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$, p no es un átomo, con lo cual, existen $q, r \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq p$, $r \leq p$ y $q \perp r$. No puede ocurrir que tanto q como r estén en G, pues de ser así, como G es un filtro, serían compatibles. Por lo tanto, $q \in D$ o $r \in D$; con lo cual, D es denso y entonces, $G \cap D \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $G \notin \mathfrak{M}$. $\square$

2.2. Extensión genérica

Recordemos que nuestro objetivo se centra en partir de un modelo de la teoría de conjuntos $\mathfrak{M}$, al cual nos referiremos como modelo base, y de extenderlo de manera adecuada a un modelo $\mathfrak{M}[G]$, al cual nos referiremos como la extensión genérica de $\mathfrak{M}$, de tal modo que se verifique una proposición deseada.
Enseguida veremos a qué nos referimos con extender el modelo $\mathfrak{M}$.

Definición 2.8. *1. τ es un $\mathbb{P}$-nombre si y solo si τ es una relación y $\forall(\sigma, p) \in \tau\ [\sigma$ es un $\mathbb{P}$-nombre $\wedge\ p \in \mathbb{P}]$.*

2. $\boldsymbol{V}^{\mathbb{P}}$ *es la clase de todos los* $\mathbb{P}$*-nombres.*

3. *Si* $\mathfrak{M}$ *es un modelo transitivo de* ***ZF*** *y* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$*, entonces* $\mathfrak{M}^{\mathbb{P}} = \boldsymbol{V}^{\mathbb{P}} \cap \mathfrak{M}$*.*

Definición 2.9. *Sea* τ *es un* $\mathbb{P}$*-nombre y* $G \subseteq \mathbb{P}$*, por recursión definimos* $\tau_G = \{\sigma_G : \exists p \in G : \ (\sigma, p) \in \tau\}$ *la valuación de* τ *bajo* G*.*

Definición 2.10. *Si* $\mathfrak{M}$ *es un modelo transitivo de* ***ZF*** *y* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$*, la extensión genérica de* $\mathfrak{M}$ *respecto de* G*, es:* $\mathfrak{M}[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$*.*

Notemos que la definición de nombre es recursiva y cada nombre es una manera de referirnos a alguien, donde ese alguien será un elemento de nuestra extensión $\mathfrak{M}[G]$. Veremos así que podemos referirnos a los elementos de $\mathfrak{M}[G]$ -que no necesariamente son elementos de $\mathfrak{M}$- por medio de nombres en $\mathfrak{M}$, podemos pensar esto como que en el universo $\mathfrak{M}$ puede hablarse sobre aquello que pasa en el universo $\mathfrak{M}[G]$ por medio de los nombres. Notemos que los nombres pueden tener una gran cantidad de información, misma que puede llegar a ser contradictoria, nosotros queremos capturar la mayor cantidad de esta información, pero sin considerar aquella que nos produce problemas. Aquí es donde G nos demuestra el por qué es llamado filtro, y que valuar un nombre bajo G no es más que "filtrar"la información que dicho nombre posee utilizando las propiedades del filtro.

Definición 2.11. *Sean* $\mathbb{P}$ *un orden parcial y* x *cualquier conjunto. El nombre canónico de* x *es el conjunto*

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, \mathbb{1}) : y \in x\}.$$

Lema 2.12. *Sean* $\mathfrak{M}$ *y* N *modelos transitivos de* ***ZF-P*** *tal que* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ *y* G *es un filtro sobre* $\mathbb{P}$*. Entonces:*

1. *Para toda* $x \in \mathfrak{M}$*,* $\hat{x} \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}} \wedge \hat{x}_G = x$*.*

2. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$*.*

3. $\mathfrak{M}[G]$ *es transitivo.*

4. $G \in \mathfrak{M}[G]$

5. *Si* $\mathfrak{M} \subseteq N$ *y* $G \in N$*, entonces* $\mathfrak{M}[G] \subseteq N$*.*

Demostración. 1. Probemos primero por inducción que para cada $x \in \mathfrak{M}$, $\hat{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre. $\hat{\varnothing} = \varnothing$ el cual es un $\mathbb{P}$-nombre. Ahora supongamos que para cada $y \in x$, $\hat{y}$ es un $\mathbb{P}$-nombre. Por definición $\hat{x} = \{(\hat{y}, \mathbb{1}) : y \in x\}$, así, $\hat{x}$ es una relación y para cada $(\sigma, p) \in \hat{x}$, $\sigma \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$. Por lo tanto, $\hat{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre.
Ahora probemos por inducción que $\hat{x}_G = x$.
$\hat{\varnothing}_G = \varnothing_G = \varnothing$. Ahora supongamos que para cada $y \in x$, $\hat{y}_G = y$. Así, $\hat{x}_G = \{\hat{y}_G : y \in x\} = \{y : y \in x\} = x$.

2. Se sigue de 1. ya que si $x \in \mathfrak{M}$, entonces $x = \hat{x}_G \in \mathfrak{M}[G]$.

3. Sea $x \in \mathfrak{M}[G]$, entonces existe $y \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$ tal que

$$x = y_G = \{\sigma_G | \, \exists p \in G : \ (\sigma, p) \in y\}.$$

Como $\mathfrak{M}$ es transitivo, para cada $p \in G$ tal que $(\sigma, p) \in y$, $\sigma \in \mathfrak{M}$. Entonces, para cada $p \in G$ tal que $(\sigma, p) \in y$, $\sigma_G \in \mathfrak{M}[G]$. Así, $x = y_G \subseteq M[G]$. Por lo tanto, $M[G]$ es transitivo.

4. Consideremos $\Gamma = \{(\hat{p}, p) : \ p \in \mathbb{P}\}$, Γ es un $\mathbb{P}$-nombre y

$$\Gamma_G = \{\hat{p}_G : \ p \in G\} = \{p : p \in G\} = G.$$

Con lo cual también se concluye que $G \in \mathfrak{M}[G]$.

5. Sea $a \in \mathfrak{M}[G]$, entonces existe $\tau \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = a$. Como $\mathfrak{M}[G] \subseteq N$ y $G \in N$, se tiene que $\tau \in N$ y $G \in N$, entonces

$$\tau_G = \{\sigma_G : \ \exists p \in G \, (\sigma, p) \in \tau\} \in N,$$

es decir, $a \in N$. Por lo tanto, $\mathfrak{M}[G] \subseteq N$. $\square$

2.3. Noción de forzar

Definición 2.13. *Sea $\mathfrak{M}$ un mtn de **ZFC**, $\mathbb{P}$ una noción de forcing y φ una sentencia de $\mathfrak{M}$. Si $p \in \mathbb{P}$, diremos que "p fuerza a φ", lo cual se denotará $p \Vdash$ "φ", si ocurre que: para cada $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ tal que $p \in G$ se cumple que $\mathfrak{M}[G] \models \varphi$.*

Por comodidad, cuando una condición $p \in \mathbb{P}$ fuerce a una sentencia φ, el uso de las comillas será indistinto para así denotar $p \Vdash \varphi$ o $p \Vdash$ "φ"a discreción.

Lema 2.14. *Si $p, q \in \mathbb{P}$ y φ, ψ son sentencias, entonces:*

1. *Si $p \Vdash$ "φ"y $q \leq p$ entonces $q \Vdash$ "φ".*
2. *$p \Vdash$ "$\varphi \wedge \psi$"si y solo si $p \Vdash$ "φ"y $p \Vdash$ "ψ".*

Demostración. 1. Supongamos que $p \Vdash$"φ"y $q \leq p$. Veamos que $q \Vdash$"φ". Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ tal que $q \in G$. Como $q \leq p$ y $q \in G$, entonces $p \in G$. Luego, dado que $p \Vdash$"φ", se tiene que $\mathfrak{M}[G] \models \varphi$, así, se concluye que $q \Vdash$"φ".

2. Se sigue del hecho de que $N \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $N \models \varphi$ y $N \models \psi$. □

Definición 2.15. *Sean $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ una fórmula con sus variables libres enlistadas, $p \in \mathbb{P}$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \boldsymbol{V}^{\mathbb{P}}$ y a, b $\mathbb{P}$-nombres. Los siguientes incisos definen la noción $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*

1. *$p \Vdash^*$ "$a = b$"si y solo si*

   a) *Para toda $(c, r) \in a$ se cumple que:*

   $$\big\{q \leq p : q \leq r \Rightarrow \big(\exists (d, r) \in b : \ (q \leq r \ \wedge \ q \Vdash^* c = d)\big)\big\}$$

   es denso debajo de p

   b) *análogamente para b, para toda $(c, r) \in b$ se cumple que*

   $$\big\{q \leq p : \ q \leq r \Rightarrow \big(\ \exists (d, r) \in a : \ (q \leq r \ \wedge \ q \Vdash^* c = d)\big)\big\}$$

   es denso debajo de p.

2. *$p \Vdash^*$ "$a \in b$"si y solo si $\{q : \exists (c, r) \in b : \ q \leq r \ \wedge \ q \Vdash^*$ "$a = c$"$\}$ es denso debajo de p.*
3. *$p \Vdash^*$ "$\psi \wedge \gamma$"si y solo si $p \Vdash^*$ "ψ"y $p \Vdash^*$ "γ".*
4. *$p \Vdash^*$ "$\neg\psi$"si y solo si para toda $q \leq p$, $\neg(q \Vdash^* \psi)$.*
5. *$p \Vdash^*$ "$(\exists x)(\psi(x))$"si y solo si $\{q : \exists \sigma : \ q \Vdash^*$ "$\psi(\sigma)$"$\}$ es denso debajo de p.*

El concepto de $\Vdash^*$ fue definido de tal forma que no nos salimos de $\mathfrak{M}$ para hablar del mismo. Una situación contraria ocurre con $\Vdash$, donde requerimos de una extensión genérica. El siguiente teorema es importante, ya que establece cuando una condición p y una fórmula φ se encuentran relacionados bajo $\Vdash$. La demostración es técnica y extensa, y la herramienta usada, inducción sobre la complejidad de la fórmula, escapa del propósito de este trabajo, es por ello que será mejor omitirla.

Teorema 2.16. *Sea $\mathfrak{M}$ un modelo transitivo de **ZFC**, $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ una noción de forcing, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces:*

1. *Si $p \in G$ y $\mathfrak{M} \models p \Vdash^*$ "$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$", entonces $\mathfrak{M}[G] \models \varphi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)$,*
2. *Si $\mathfrak{M}[G] \models \varphi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)$, entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^*$ "$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$".*

Lema 2.17 (Definibilidad)**.** *Sea $\mathfrak{M}$ un mtn de **ZFC**, $\mathbb{P}$ una noción de forcing en $\mathfrak{M}$ y φ una fórmula. Entonces para todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple:*

$$p \Vdash \varphi \leftrightarrow \mathfrak{M} \models p \Vdash^* \varphi.$$

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{M} \models p \Vdash^*$ "φ"y probemos que $p \Vdash$"φ". Si $p \nVdash$"φ", entonces por la definición del concepto $\Vdash$, existe $G \subseteq \mathbb{P}$, filtro $\mathbb{P}$-genérico tal que $p \in G$ y $\mathfrak{M}[G] \not\models \varphi$. Así, $\mathfrak{M}[G] \models \neg\varphi$, luego por 2. del teorema 2.16, existe $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \neg\varphi$. Como $p, q \in G$ podemos considerar $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, se sigue que $r \Vdash^* \varphi$ y $r \Vdash^* \neg\varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \Vdash$"φ".

Supongamos ahora que $p \Vdash$"φ". Probemos que $D = \{r : \ M \models r \Vdash^* \varphi\}$ es denso debajo de p.
Supongamos lo contrario y sea $q \leq p$ tal que para cada $r \leq q$, $r \nVdash^* \varphi$. Luego, por como se define el concepto $\Vdash^*$, se tiene que $q \Vdash^* \neg\varphi$, lo cual implica que $q \Vdash \neg\varphi$. Pero por otra parte $q \leq p$ y $p \Vdash \varphi$, entonces $q \Vdash \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D es denso debajo de p, es decir, $p \Vdash^* \varphi$. $\square$

El lema de Definibilidad nos permite hablar del la relación de forzar, $\Vdash$, por medio de $\Vdash^*$, con esto podemos hablar del concepto de forzar sin salirnos de nuestro modelo base $\mathfrak{M}$.

Lema 2.18 (De Verdad)**.** *Sea $\mathfrak{M}$ un mtn para **ZFC**, $\mathbb{P}$ un copo en $\mathfrak{M}$ y φ una fórmula. Entonces para cada filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$:*

$$\mathfrak{M}[G] \models \varphi \leftrightarrow \exists p \in G : p \Vdash \varphi.$$

Demostración. La implicación hacia la izquierda sigue de la definición de $\Vdash$ y la implicación hacia la derecha se sigue del lema 2.17 y el teorema 2.16 $\square$

El lema de Verdad nos asegura que toda verdad en $\mathfrak{M}[G]$ está forzada, así que, combinando los lemas 2.17 y 2.18, tenemos que podemos hablar de toda verdad en $\mathfrak{M}[G]$ sin salirnos de $\mathfrak{M}$. Ambos lemas son muy utilizados a lo largo del trabajo, en especial para elegir cierto tipo de densos y mostrar que son elementos de $\mathfrak{M}$, y son importantes para ver que $\mathfrak{M}[G] \models$ **ZFC**.

Corolario 2.19. *Sea $\mathfrak{M}$ un mtn para **ZFC**, $\mathbb{P}$ un copo en $\mathfrak{M}$ y φ una fórmula. Entonces:*

1. *$\{p : p \Vdash$ "φ" $\vee$ $p \Vdash$ "$\neg\varphi$"$\}$ es denso,*
2. *$p \Vdash$ "$\neg\varphi$"si y solo si $\neg(\exists q \leq p : q \Vdash$ "φ"$)$,*
3. *$p \Vdash$ "$(\exists x)\, \varphi(x)$"si y solo si $\{r : \exists \sigma \in \mathfrak{M} : r \Vdash$ "$\varphi(\sigma)$"$\}$ es denso debajo de p,*
4. *Si $p \Vdash$ "$\exists x : (x \in \sigma \ \wedge\ \varphi(x))$", entonces existen $q \leq p$ y $\pi \in dom(\sigma)$ tales que $q \Vdash$ "$\varphi(\pi)$".*

Demostración. Por definición 1., 2. y 3. se cumplen para $\Vdash^*$, así, por el lema de Definibilidad, (2.17), son ciertas para $\Vdash$.
Para 4., fijemos G filtro $\mathbb{P}$-genérico tal que $p \in G$. Por la definición de $\Vdash$, existe $\pi_G \in \sigma_G$ tal que $\mathfrak{M}[G] \models \varphi(\pi_G)$. Entonces $\pi \in dom(\sigma)$ y, por el lema de Verdad, (2.18), existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \varphi(\pi)$. Si q es una extensión común de p y r, entonces $q \leq p$ y $q \Vdash \varphi(\pi)$. $\square$

Por 1. del corolario 2.19, si φ es una fórmula, para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$ y $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \neg\varphi$. diremos que una condición $q \in \mathbb{P}$ decide a una fórmula φ si ocurre que o bien $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \neg\varphi$.

Concluimos esta sección con el siguiente teorema que nos asegura que si partimos de un modelo para la teoría de conjuntos, al realizar una extensión genérica, obtenemos nuevamente un modelo para la teoría de conjuntos. La demostración es tan técnica como extensa, además de no aproximarse al objetivo de este trabajo por lo que será omitida.

Teorema 2.20. *Sea* $\mathfrak{M}$ *un mtn de* $\boldsymbol{ZFC}$*,* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ *una noción de forcing y* G *un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$*, entonces* $\mathfrak{M}[G] \models \boldsymbol{ZFC}$*.*

Capítulo 3

Hipótesis del continuo

Habiendo ya explicado en qué consiste la técnica de forcing, lo consecuente será utilizarla. En esta sección se presenta el forcing de Cohen para construir un modelo de ZFC donde no se satisfaga la HC, al mismo tiempo se presenta la construcción de un modelo donde se admite HC pero no HCG y por último un modelo donde se satisface HC.
Los forcings aquí empleados son muy similares entre sí y la teoría necesaria para poder asegurar que las mencionadas proposiciones son válidas también lo son, por ello se presentan las definiciones y resultados generales e inmediatamente después algunas particulares, ambas se emplean no solo en esta sección sino a lo largo de todo el trabajo.

3.1. Forcings Fn

Definición 3.1. *1. Para λ un cardinal infinito y cualesquiera I, J:*
$F_n(I, J, \lambda) = \{p : p \text{ es función} \wedge |p| < \lambda \wedge dom(p) \subseteq I \wedge ran(p) \subseteq J\}$.
Ordenamos a $p, q \in F_n(I, J, \lambda)$ como: $p \leq q$ si y solo si $q \subseteq p$.

2. $F_n(I, J) = F_n(I, J, \aleph_0) = \{p : p \text{ es función} \wedge |p| < \omega \wedge dom(p) \subseteq I \wedge ran(p) \subseteq J\}$

A $F_n(I, J, \lambda)$ se le conoce como el copo de las funciones parciales de tamaño menor que λ de I en J y a su vez a $F_n(I, J)$ se le conoce como el copo de las funciones parciales finitas de I en J. Resulta que $F_n(I, J)$ cumple con 1. de la definición 2.1

Ahora, p extiende a q, en nuestra noción de orden parcial, si y solo si lo extiende como función, i.e., $dom(q) \subseteq dom(p)$ y para toda $\alpha \in dom(q)$ se cumple que $p(\alpha) = q(\alpha)$.
Por su parte, p y q son compatibles, $p \| q$, si y solo si son compatibles como funciones, i.e., existe otra función r tal que $dom(p), dom(q) \subseteq dom(r)$, para toda $\alpha \in dom(p)$ se cumple que $r(\alpha) = p(\alpha)$ y por su parte toda $\alpha \in dom(q)$ cumple que $r(\alpha) = q(\alpha)$. Notemos que: si p y q coinciden en la intersección de sus dominios, entonces $p \cup q$ es una extención común de p y q.

Puede ayudarnos pensar que las funciones $p \in F_n(I, J)$ son aproximaciones finitas de una función $f : I \longrightarrow J$, es decir que cada p nos mostraría una condición que queremos que f cumpla, esto diciendo que "$p \subseteq f$", siguiendo esa idea podemos decir que todo lo que p hace como función es algo que f también hace, es decir, todo lo que p sabe, f lo va a saber.
Resulta que $F_n(I, J, \lambda)$ con el orden de la contención inversa (el orden del que lo hemos dotado) tiene elemento máximo, $\mathbb{1} = \varnothing$, con lo cual, es una noción de forcing.

Lema 3.2. *Si $I, J, \lambda \in \mathfrak{M}$, ($\lambda$ es un cardinal)$^{\mathfrak{M}}$, $|J| \geq 2$, $(|I| \geq \lambda)^{\mathfrak{M}}$, consideramos $\mathbb{P} = F_n(I, J, \lambda)$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces:*

1. *$\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$,*

2. *$\mathbb{P}$ no tiene átomos.*

3. *$\bigcup G$ es una función sobreyectiva de I en J.*

4. *$\bigcup G \in \mathfrak{M}[G] \setminus \mathfrak{M}$.*

Demostración. 1. Como $\mathfrak{M}$ modela **ZFC**, $\mathfrak{M}$ conoce todo lo que interviene en la definición de $\mathbb{P}$, por tanto $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$.

2. Sea $f \in \mathbb{P}$, como $dom(f) < \lambda$ mientras que $\lambda \leq |I|$, podemos considerar $n \in (I \setminus dom(f))$. Para $j_0, j_1 \in J$ distintos, sean $g = f \cup \{(n, j_0)\}$ y $h = f \cup \{(n, j_1)\}$, ocurre que $g \leq f$, $h \leq f$ y $g \perp h$.

3. Veamos primero que $\bigcup G$ está bien definida.
Para ver que $\bigcup G$ es función, supongamos lo contrario, i.e., que existen $n \in I$ y $j_0, j_1 \in J$ tales que $j_0 \neq j_1$ y $(n, j_0), (n, j_1) \in \bigcup G$, entonces existen $f, g \in G$

tales que $(n, j_0) \in f$ y $(n, j_1) \in g$, pero, como G es un filtro, existe una extensión común de f y g, digamos $r \in G$, así, $(n, j_0), (n, j_1) \in r$ lo cual es una contradicción ya que r es una función. Por lo tanto, $\bigcup G$ está bien definida.

Para ver que $dom(\bigcup G) = I$, definamos para cada $n \in I$,

$$D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in dom(f)\}.$$

Notemos que para cada $n \in I$, $D_n \in \mathfrak{M}$. Ahora verifiquemos que cada uno de estos conjuntos D_n es denso en $\mathbb{P}$. Sean $n \in I$ y $f \in \mathbb{P}$, si $n \in dom(f)$, entonces $f \in D_n$. En caso contrario, si $n \notin dom(f)$, para algún $j \in J$ consideremos $g = f \cup \{(n, j)\}$. Entonces $g \leq f$ y $g \in D_n$. Por lo tanto, D_n es denso en $\mathbb{P}$. Ahora, como G es filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ y para cada $n \in I$, $D_n \in \mathfrak{M}$, se tiene que para cada $n \in I$, $G \cap D_n \neq \varnothing$. Para cada $n \in I$, sea $f_n \in G \cap D_n$. Entonces, como $\bigcup G = \bigcup_{f \in G} f$, en particular, $f_n \subseteq \bigcup G$ lo cual implica que $n \in dom(\bigcup G)$. Por lo tanto, $dom(\bigcup G) = I$.

Por otra parte, cada elemento en G es una función con rango algún subconjunto de J, por lo tanto, $ran(\bigcup G) \subseteq J$. Ahora, sean $j \in J$ y $f \in G$, si existe $n \in I$ tal que $(n, j) \in f$ entonces $(n, j) \in \bigcup G$ y por tanto $j \in ran(\bigcup G)$, en caso contrario elegimos, como antes, $n_0 \in (I \setminus dom(f))$ y consideramos $g = f \cup \{(n_0, j)\}$, por como definimos g, $g \leq f$ y como G es filtro y $f \in G$ se cumple que $g \in G$, lo cual implica que $j \in ran(\bigcup G)$, i.e., $\bigcup G$ es sobreyectiva.

Con todo lo anterior, se tiene que $\bigcup G : I \longrightarrow J$ es una función sobreyectiva.

4. $\bigcup G \in \mathfrak{M}[G]$, así que resta ver que $\bigcup G \notin \mathfrak{M}$.
Para cada función $f : I \longrightarrow J$ tal que $f \in \mathfrak{M}$, definamos

$$D_f = \{g \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(g) : \ f(n) \neq g(n)\}.$$

Fijemos $f : I \longrightarrow J$ con $f \in \mathfrak{M}$. Notemos que $D_f \in \mathfrak{M}$.

Afirmamos que D_f es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, sean $g \in \mathbb{P}$, $n \in (I \setminus dom(g))$, $j \in J \setminus \{f(n)\}$ y $h = g \cup \{(n, j)\}$. Entonces $h \leq g$ y $h \in D_f$. Por lo tanto, D_f es denso. Consideremos $f^* \in G \cap D_f$, entonces existe $n \in dom(f^*)$ tal que $f^*(n) \neq f(n)$. Además, como $f^* \in G$, se tiene que $f^*(n) = (\bigcup G)(n)$, lo cual implica que $\bigcup G \neq f$. Como tomamos una $f : I \longrightarrow J$ arbitraria en $\mathfrak{M}$, concluimos que $\bigcup G \notin \mathfrak{M}$. $\square$

Notemos que en la demostración anterior el hecho de que $|J| \geq 2$ sólo es utilizado en 2. y 4., fue agregado únicamente para dotar de interés a nuestro forcing ya que de no ser así solo existiría una función de I en J; la función constante que pertenece a $\mathfrak{M}$, por lo que este caso es descartado. Precisamente haciendo alusión a este hecho es que 2. tiene tanta importancia, ya que con él afirmamos que $\mathbb{P}$ no tiene átomos.
Procedemos ahora a enunciar un par de casos particulares del lema 3.2, sin realizar sus demostraciones pues son implicaciones directas de lo ya enunciado.

Lema 3.3. *Si $\mathbb{P} = F_n(\omega, 2)$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces:*

1. $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$,
2. $\mathbb{P}$ *no tiene átomos.*
3. $\bigcup G$ *es una función tal que* $ran(\bigcup G) \subseteq 2$ *y* $dom(\bigcup G) = \omega$,
4. $\bigcup G \in \mathfrak{M}[G] \setminus \mathfrak{M}$.

Con la ayuda de nuestro forcing hemos conseguido agregar una nueva función de ω en 2 a la cual se le denominará real de Cohen, así, la noción de forcing $F_n(\omega, 2)$ es el forcing que agrega un real de Cohen.

Lema 3.4. *Sea κ un cardinal infinito, $\mathfrak{M}$ un mtn de **ZFC**. Si $\mathbb{P} = F_n(\kappa \times \omega, 2)$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces:*

1. $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$,
2. $\bigcup G : \kappa \times \omega \longrightarrow 2$ *es una función,*
3. $\bigcup G \in \mathfrak{M}[G] \setminus \mathfrak{M}$.
4. *Si para cada $\alpha < \kappa$ definimos $f_{G,\alpha} : \omega \longrightarrow 2$ como $f_{G,\alpha}(n) = \bigcup G(\alpha, n)$, entonces si tomamos $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$, se tiene que $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$.*

Demostración. Escribimos ahora la demostración de 4. ya que vale la pena para expresar mejor el uso de los conjuntos densos y visualizar lo que expresa el resultado.

4. Consideremos $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$ y veamos que $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$. Definamos

$$D_{\alpha,\beta} = \left\{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega : \big((\alpha, n), (\beta, n) \in dom(p) \ \wedge \ p(\alpha, n) = 1 - p(\beta, n)\big)\right\}.$$

Primero, notemos que $D_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{M}$, ya que $\mathfrak{M}$ conoce cada conjunto mediante los cuales le definimos.

Verifiquemos que $D_{\alpha,\beta}$ es denso. Sean $p \in \mathbb{P}$ y como $dom(p)$ es finito podemos considerar $n \in \omega$ tal que no existe $\gamma \in \kappa$ tal que $(\gamma, n) \in dom(p)$. Sea $q = p \cup \left\{\big((\alpha, n), 0\big), \big((\beta, n), 1\big)\right\}$. Entonces $q \leq p$ y $q \in D_{\alpha,\beta}$. Por lo tanto $D_{\alpha,\beta}$ es denso.

Fijemos ahora $\alpha < \beta < \kappa$ y sea $p \in D_{\alpha,\beta} \cap G$. Entonces para algún $n \in \omega$, $p\big((\alpha, n)\big) \neq p\big((\beta, n)\big)$ lo cual implica que $\bigcup G\big((\alpha, n)\big) \neq \bigcup G\big((\beta, n)\big)$, con lo cual, para algún $n \in \omega$ se tiene que $f_{G,\alpha}(n) \neq f_{G,\beta}(n)$. Por lo tanto, $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$. □

Corolario 3.5. *Si* (λ *es un cardinal*)$^{\mathfrak{M}}$, $\kappa \in \mathfrak{M}$ *y* G *es* $F_n(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$, *entonces* $(2^{|\lambda|} \geq |\kappa|)^{\mathfrak{M}[G]}$.

Este corolario nos dicen que podemos hacer crecer la potencia de un cardinal tanto como nosotros queramos, acotándolo por debajo por el cardinal del modelo base en el modelo genérico, en particular acotamos a 2^{ω} con κ. Sin embargo, nada nos asegura -hasta el momento-, que los cardinales del modelo base sigan siendo cardinales en la extensión: pensemos que en $\mathfrak{M}[G]$ hemos agregado objetos, con ello cabe la posibilidad de tener nuevas funciones (de hecho en el forcing que consideramos tenemos funciones nuevas de I en J) así que teniendo κ un cardinal en $\mathfrak{M}$ esto significa que no existe ninguna función en $\mathfrak{M}$ de un ordinal menor en κ, nosotros deseamos que en $\mathfrak{M}[G]$ no se hallan agregado funciones de ese tipo.

3.2. Preservación de cardinales

Definición 3.6. *Sea* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ *y* θ *un cardinal infinito en* $\mathfrak{M}$.

1. *$\mathbb{P}$ preserva cardinales si para todo $\beta \in Ord \cap \mathfrak{M}$ se cumple que (β es cardinal)$^{\mathfrak{M}}$ si y solo si (β es cardinal)$^{\mathfrak{M}[G]}$*

2. *$\mathbb{P}$ preserva cofinalidades si para todo ordinal límite $\gamma \in \mathfrak{M}$, $cof(\gamma)^{\mathfrak{M}} = cof(\gamma)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

3. *$\mathbb{P}$ preserva cardinales mayores o iguales a θ (menores o iguales a θ), si y solo si siempre que G sea un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{M} \cap Ord$ y $\beta \geq \theta$ (respectivamente $\beta \leq \theta$), se cumple que: (β es un cardinal)$^{\mathfrak{M}}$ si y sólo si (β es un cardinal)$^{\mathfrak{M}[G]}$.*

4. *$\mathbb{P}$ preserva cofinalidades mayores o iguales a θ (menores o iguales a θ), si y sólo si siempre que G sea $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, γ un cardinal límite en $\mathfrak{M}$ y $cof(\gamma)^{M} \geq \theta$ (respectivamente $cof(\gamma)^{M} \leq \theta$), entonces $cof(\gamma)^{\mathfrak{M}} = cof(\gamma)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Observación 3.7. *Resulta inmediato que si $\mathbb{P}$ cumple con 1. o con 2. entonces para cualquier cardinal θ en $\mathfrak{M}$, $\mathbb{P}$ cumple 3. y 4. respectivamente.*

Proposición 3.8. *Si (κ es un cardinal)$^{\mathfrak{M}[G]}$, entonces (κ es un cardinal)$^{\mathfrak{M}}$.*

Demostración. Supongamos que κ no es cardinal en $\mathfrak{M}$, entonces podemos considerar un ordinal y una función, $\alpha, f \in \mathfrak{M}$, tales que $(\alpha < \kappa)^{\mathfrak{M}}$ y ($f : \alpha \longrightarrow \kappa$ es una biyección)$^{\mathfrak{M}}$. Entonces $\alpha, f \in \mathfrak{M}[G]$ y por absolutez, $(\alpha < \kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$ y ($f : \alpha \longrightarrow \kappa$ es una biyección)$^{\mathfrak{M}[G]}$, lo cual implica que κ no es un cardinal en $\mathfrak{M}[G]$. □

Lema 3.9. *Sea $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ y θ un cardinal infinito en $\mathfrak{M}$. Si $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \theta$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\leq \theta$. Si $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$ y (θ es regular)$^{\mathfrak{M}}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\geq \theta$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \theta$.

Por la proposición 3.8, basta preocuparnos de los cardinales en $\mathfrak{M}$. Excepto por el 0, los cardinales menores que θ son sucesores o límites. Si $\alpha \in \mathfrak{M}$ con $\alpha \leq \theta$ cardinal sucesor, entonces α es regular, entonces $(cof(\alpha) = \alpha)^{\mathfrak{M}}$, y como $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \theta$ se tiene que $(cof(\alpha) = \alpha)^{\mathfrak{M}[G]}$, es decir, ($\alpha$ es regular)$^{\mathfrak{M}[G]}$, se tiene que (α es un cardinal regular)$^{\mathfrak{M}[G]}$. Por tanto α sigue siendo un cardinal en $\mathfrak{M}[G]$.

Sea $\beta \leq \theta$ es un cardinal límite en $\mathfrak{M}$. Entonces el conjunto de cardinales regulares en $\mathfrak{M}$ es no acotado en β, los cuales son cardinales regulares en $\mathfrak{M}[G]$, por lo tanto, β es un cardinal límite en $\mathfrak{M}[G]$. Así, podemos concluir que $\mathbb{P}$ preserva cardinales.

Para el caso en que $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$ y $(\theta \text{ es regular})^{\mathfrak{M}}$ notemos que podemos realizar la misma demostración valiéndonos de la hipótesis de que $(\theta \text{ es regular})^{\mathfrak{M}}$. $\square$

Corolario 3.10. *Si $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales.*

Demostración. Basta considerar $\theta = \aleph_0$ en el lema 3.9. $\square$

3.3. Consistencia de ¬HC

Ahora nos enfocaremos en los forcings particulares antes mencionados para poder concluir con la consistencia relativa de HC, en el caso de los F_n de cardinales mayores tendremos que enunciar algunas definiciones y resultados más para poder asegurar que se preserven cardinales.

Los siguientes dos resultados son una implicación directa de dos generalizaciones de los mismos cuyas demostraciones pueden encontrarse más adelante, por esto mismo los aceptaremos por el momento.

Por su parte el siguiente lema es un caso particular del lema 3.17.

Lema 3.11. *Sea $\mathfrak{M}$ un mtn de **ZFC**, $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ una noción de forcing y $A, B \in \mathfrak{M}$. Si y $f : A \longrightarrow B$ es una función tal que $f \in \mathfrak{M}[G]$, entonces existe $F : A \longrightarrow \wp(B)$ tal que $F \in \mathfrak{M}$ y para cada $a \in A$, $f(a) \in F(a)$ y $|F(a)| \leq \omega$.*

Mientras, el siquiente teorema es un caso particular del lema 3.18.

Teorema 3.12. *Si $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ y $(\mathbb{P} \text{ es ccc})^{\mathfrak{M}}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades.*

Proposición 3.13. *$F_n(\omega, 2)$ es ccc y si κ es un cardinal, entonces $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ es ccc.*

Demostración. $F_n(\omega, 2)$ es ccc puesto que $F_n(\omega, 2)$ es un conjunto numerable, así, si tomamos una anticadena, ésta debe ser a lo más numerable.

Supongamos que κ es un cardinal y sea $\mathcal{A} \subseteq F_n(\kappa\times\omega, 2)$ tal que $|\mathcal{A}| = \omega_1$. Veamos que $\mathcal{A}$ no es una anticadena. Sea $B = \{dom(p) : p \in \mathcal{A}\}$. Entonces $B \subseteq [\kappa \times \omega]^{<\omega}$ y $|B| = \omega_1$. Por el Lema del Δ-sistema, existe $C \subseteq B$ tal que $|C| = \omega_1$ y C forma un Δ-sistema con raíz r para alguna $r \in [\kappa\times\omega]^{<\omega}$.

Así, si $p, q \in \mathcal{A}$ son tales que $dom(p), dom(q) \in C$, entonces se cumple que $dom(p) \cap dom(q) = r$. Como r es finito, existe una cantidad finita de funciones de r en 2, entonces existe $D \subseteq C$ tal que $|D| = \omega_1$ y para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ se tiene que, si $dom(p), dom(q) \in D$ entonces $p \restriction_r = q \restriction_r$. Entonces para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ tales que $dom(p), dom(q) \in D$ se tiene que $p \| q$. Por lo tanto, A no es una anticadena. Así, $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ es ccc. □

Corolario 3.14. $Con(\boldsymbol{ZFC}) \longrightarrow Con(\boldsymbol{ZFC} + \neg\, \boldsymbol{HC})$

Demostración. Sea $\kappa > \aleph_1$ un cardinal en $\mathfrak{M}$, consideremos $\mathbb{P} = Fn(\kappa\times\omega, 2)$, por el corolario 3.5, $(2^{\aleph_0} \geq |\kappa|)^{\mathfrak{M}[G]}$. Además, sabemos que $\mathbb{P}$ es ccc y por tanto preserva cardinales, con lo cual $(2^{\aleph_0} > \aleph_1)^{\mathfrak{M}[G]}$ □

3.4. Consistencia de ¬HCG

Lema 3.15. *Sea $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ y (θ cardinal infinito)$^{\mathfrak{M}}$. Si siempre que κ sea un cardinal regular de $\mathfrak{M}$, $\kappa \geq \theta$ y G sea $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, ocurre que (κ es regular)$^{\mathfrak{M}[G]}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$. Análogamente, si escribimos $\leq \theta$ en vez de $\geq \theta$.*

Demostración. Sabemos que ser ordinal sucesor o ser ordinal límite son nociones absolutas. Además, los ordinales sucesores tienen cofinalidad 1. Por lo tanto, resta verificar que los ordinales límite mayores iguales que θ en $\mathfrak{M}$ preservan su cofinalidad.

Sea $\gamma \geq \theta$ un ordinal límite en $\mathfrak{M}$ y sea $(\kappa = cof(\gamma))^{\mathfrak{M}}$. Entonces existe una función $f : \kappa \longrightarrow \gamma$ estrictamente creciente y cuyo rango es cofinal en γ. Ahora, se tiene que ($\kappa = cof(\gamma)$ es regular)$^{\mathfrak{M}}$, usando nuestra hipótesis, (κ es regular)$^{\mathfrak{M}[G]}$, de donde $(cof(\kappa) = \kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$. Finalmente, notemos que $f \in M[G]$, así, $(cof(\kappa) = cof(\gamma))^{\mathfrak{M}[G]}$, entonces $(\kappa = cof(\gamma))^{\mathfrak{M}[G]}$. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$.

Procedemos de manera análoga para $\leq \theta$. $\square$

Definición 3.16. *Sean $\mathbb{P}$ es un copo de forcing y κ es un cardinal, $\mathbb{P}$ cumple la κ-cc (o simplemente que $\mathbb{P}$ es κ-cc), si para toda anticadena $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$, se cumple que $|\mathcal{A}| < \kappa$.*

Lema 3.17. *Sean $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, $A, B \in \mathfrak{M}$, $(\theta$ es un cardinal$)^{\mathfrak{M}}$ y supongamos que $\mathbb{P}$ es θ-cc. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ y $f \in \mathfrak{M}[G]$ es una función tal que $f : A \longrightarrow B$, entonces existe una función $F : A \longrightarrow \wp(B)$ con $F \in \mathfrak{M}$, tal que para cada $a \in A$, $f(a) \in F(a)$ y $(|F(a)| < \theta)^{\mathfrak{M}}$.*

Demostración. Sea $\tau \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$. Entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash$ "τ es función de $\hat{A}$ en $\hat{B}$".

Para cada $a \in A$, definimos $F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p : \;\; q \Vdash \text{ "}\tau(\hat{a}) = \hat{b}\text{"}\}$. Haciendo uso del Lema de Definibilidad (2.17), $\mathfrak{M}$ conoce todo lo que involucra F por lo cual $F \in \mathfrak{M}$. Sea $a \in A$, probemos que $f(a) \in F(a)$. Sea $b = f(a)$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \Vdash$ "$\tau(\hat{a}) = \hat{b}$". Consideramos $q \in G$ extensión común de p y r, así, $q \leq p$ y $q \Vdash$ "$\tau(\hat{a}) = \hat{b}$", entonces $f(a) = b \in F(a)$.

Resta probar que $(|F(a)| \leq \theta)^{\mathfrak{M}}$. Usando el AE en $\mathfrak{M}$, elegimos una función $\theta \in \mathfrak{M}$, tal que $\theta : F(a) \longrightarrow \mathbb{P}$, $\theta(b) \Vdash$ "$\tau(\hat{a}) = \hat{b}$"y $\theta(b) \leq p$.

Ahora probaremos que el conjunto $\{\theta(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Supongamos lo contrario. Sean $b_0, b_1 \in F(a)$ tales que $b_0 \neq b_1$ y de tal modo que $\theta(b_0)$ y $\theta(b_1)$ tienen una extensión común, digamos $r \in \mathbb{P}$. Por el Lema 2.5, podemos considerar $H \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico de tal modo que $r \in H$, entonces $\theta(b_0), \theta(b_1) \in H$. Como $r \leq \theta(b_0) \leq p$ y $p \Vdash$"τ es función de $\hat{A}$ en $\hat{B}$", en $\mathfrak{M}[H]$ ocurre que $\tau_H : A \longrightarrow B$ es una función, además $\tau_H(a) = b_0$ y $\tau_H(a) = b_1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{\theta(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Además, como $\mathbb{P}$ es θ-cc, se tiene que $|\{\theta(b) : b \in F(a)\}| \leq \theta$, lo cual implica que $(|F(a)| \leq \theta)^M$. $\square$

Lema 3.18. *Si $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, $(\theta$ es un cardinal$)^{\mathfrak{M}}$ y $(\mathbb{P}$ es θ-cc$)^{\mathfrak{M}}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$. Además, si $(\theta$ es regular$)^{\mathfrak{M}}$, $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\geq \theta$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}$ no preserva cofinalidades. Entonces existen G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ y un ordinal $\kappa \in \mathfrak{M}$ tales que , $(\kappa$ es regular y $\kappa \geq \theta)^{\mathfrak{M}}$ y $(\kappa$ no es regular$)^{\mathfrak{M}[G]}$. Entonces existen un ordinal y una función, $\alpha, f \in \mathfrak{M}[G]$, tales que $\alpha < \kappa$ y $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ es tiene rango cofinal en κ. Como $(\mathbb{P}$ es θ-cc$)^{\mathfrak{M}}$, haciendo uso del Lema 3.18, podemos considerar $F : \alpha \longrightarrow \wp(\kappa)$ tal que $F \in \mathfrak{M}$ y para cada $\xi < \alpha$, $f(\xi) \in F(\xi)$ y $(|F(\xi)| < \theta)^{\mathfrak{M}}$.

Definimos $S = \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi)$, notemos que $S \in \mathfrak{M}$ y, dado que $ran(f)$ es cofinal en κ, S es un conjunto cofinal en κ. Pero S es una unión de longitud α de conjuntos más pequeños que θ, por lo tanto $(|S| = |\alpha|)^{\mathfrak{M}}$, con lo cual $(cof(\kappa) \leq |S| = |\alpha| < \kappa)^{\mathfrak{M}}$. Esto nos dice que κ no es regular en $\mathfrak{M}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \theta$. $\square$

Lema 3.19. $F_n(I, J, \lambda)$ *es* $(|J|^{<\lambda})^+$*-cc.*

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que el conjunto $\{p_\xi : \xi < (|J|^{<\lambda})^+\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$.

Si λ es regular, sabemos que $(|J|^{<\lambda})^{<\lambda} = |J|^\lambda$, entonces siempre que $\alpha < (|J|^{<\lambda})^+$ se cumple que: $|\alpha^{<\lambda}| < (|J|^{<\lambda})^+$. Por el lema del Δ-sistema (1.26), existe $X \subseteq (|J|^{<\lambda})^+$ con $|X| = (|J|^{<\lambda})^+$ tal que $\{dom(p_\xi) : \xi \in X\}$ forma un Δ-sistema con raíz r.

Como r es finito, hay menos de $(|J|^{<\lambda})^+$ posibilidades para elegir diferentes $p_\xi\restriction_r$. Así, podemos consideramos $Y \subseteq X$ donde para cada $\xi_0, \xi_1 \in Y$ se satisfaga que $p_{\xi_0} \restriction_r = p_{\xi_1} \restriction_r$ y $|Y| = (|J|^{<\lambda})^+$. Por como consideramos a Y, para cada $\xi_0, \xi_1 \in Y$, $p_{\xi_0} \cup p_{\xi_1}$ es una función de I en J de tamaño menor que λ por lo cual $p_{\xi_0} \| p_{\xi_1}$. Lo cual es una contradicción.

Si λ es singular. Como $(|J|^{<\lambda})^+$ es regular y mayor que λ, entonces existe $\lambda' < \lambda$ tal que si consideramos $Z = \{\xi : |p_\xi| < \lambda'\}$, $|Z| = (|J|^{<\lambda})^+$ pero de tal modo que $\{p_\xi : \xi \in Z\}$ es anticadena. Lo cual contradice que el ser $(|J|^{<\lambda'})^+$. $\square$

Corolario 3.20. *Si* $I, J \in \mathfrak{M}$, $(\lambda$ *es regular*$)^{\mathfrak{M}}$, $(|J| \leq 2^{<\lambda})^{\mathfrak{M}}$ *y* $(\theta = (2^{<\lambda})^+)^{\mathfrak{M}}$, *entonces,* $F_n(I, J, \lambda)^{\mathfrak{M}}$ *preserva cofinalidades y cardinales* $\geq \theta$*.*

Demostración. $Fn(I, J, \lambda)$ es θ-cc en $\mathfrak{M}$ ya que $(|J|^{<\lambda} = 2^{<\lambda})^{\mathfrak{M}}$, con lo cual se tiene el resultado. $\square$

Definición 3.21. *Un copo* $\mathbb{P}$ *es* λ*-cerrado si y sólo si siempre que* $\gamma < \lambda$ *y* $\{p_\xi : \xi < \gamma\}$ *sea una sucesión decreciente de elementos de* $\mathbb{P}$ *(i.e.,* $\xi < \eta$ *implica que* $p_\eta < p_\xi$*), entonces existe* $q \in \mathbb{P}$ *tal que para cada* $\xi < \gamma$ *,* $q \leq p_\xi$*.*

Teorema 3.22. *Sean* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$*,* $A, B \in \mathfrak{M}$*,* $(\lambda \text{ es un cardinal})^{\mathfrak{M}}$*,* $(\mathbb{P} \text{ es } \lambda\text{-cerrado})^{\mathfrak{M}}$ *y* $(|A| < \lambda)^{\mathfrak{M}}$*. Si* G *es* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$ *y* $f \in \mathfrak{M}[G]$ *es tal que* $f : A \longrightarrow B$*, entonces* $f \in \mathfrak{M}$*.*

Demostración. Basta mostrar el resultado para $A = \alpha \in ORD$ (si $A \notin ORD$ consideramos a $type(A)$).

Sea $\kappa = ({}^{\alpha}B)^{\mathfrak{M}}$ y $f \in ({}^{\alpha}B)^{\mathfrak{M}[G]}$.
Procederemos por contradicción. Supongamos que $f \notin \kappa$, consideremos $\tau \in \mathfrak{M}^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$ y fijemos $p \in G$ tal que $p \Vdash (\tau : \hat{\alpha} \longrightarrow \hat{B}) \wedge \tau \notin \hat{\kappa}$
Trabajando en $\mathfrak{M}$, usamos recursión transfinita y AC para elegir sucesiones $\{p_\eta : \eta \leq \alpha\}$ de $\mathbb{P}$ y $\{z_\eta : \eta < \alpha\}$ de B tales que:

1. $p_0 = p$
2. Si $\xi \leq \eta$, entonces $p_\eta \leq p_\xi$
3. $p_{\eta+1} \Vdash \tau(\hat{\eta}) = z_\eta$.

Para el caso sucesor supongamos que hemos construido p_η y procedemos con $p_{\eta+1}$ y z_η como sigue: $p_\eta \leq p$ entonces, $p_\eta \Vdash \tau : \hat{\alpha} \longrightarrow \hat{B}$, con lo cual, dado que toda verdad en $\mathfrak{M}[G]$ está forzada, $p_\eta \Vdash \exists x \in \hat{B} : \tau(\hat{\eta}) = x$, así, por 3. del corolario 2.19, $\exists z_\eta \in B$ y $p_{\eta+1} \leq p_\eta$ tal que $p_{\eta+1} \Vdash \tau(\hat{\eta}) = z_\eta$. Para el caso límite usamos la definición de λ-cerrado. Sea $g : \alpha \longrightarrow B$ tal que $g(\eta) = z_\eta$, tenemos que $g \in \kappa$. Sea H $\mathbb{P}$ genérico sobre $\mathfrak{M}$ con $p_\alpha \in H$, $p_\eta \in H$. Entonces para cada $\eta < \alpha$: $\tau_H(\eta) = z_\eta$, entonces $\tau_H = g \in \kappa$ lo cual es una contradicción ya que $p_0 \Vdash \tau \notin \hat{\kappa}$. □

Corolario 3.23. *Si* $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$*,* $(\lambda \text{ es un cardinal})^{\mathfrak{M}}$ *y* $(\mathbb{P} \text{ es } \lambda \text{ cerrado})^{\mathfrak{M}}$*, entonces* $\mathbb{P}$ *preserva cofinalidades* $\leq \lambda$ *y, por tanto, cardinales* $\leq \lambda$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}$ no preserva cofinalidades, entonces existe un $\kappa < \lambda$ tal que $(\kappa \text{ es regular})^{\mathfrak{M}}$ y $(\kappa \text{ es singular})^{\mathfrak{M}[G]}$.
Así, existe $\alpha < \kappa$ y una $f \in \mathfrak{M}[G]$, donde $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ tal que $ran(f)$ es cofinal en κ. Por el teorema 3.22, $f \in \mathfrak{M}$, lo cual contradice que $(\kappa \text{ es regular})^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \lambda$ y por el lema 3.9, $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\leq \lambda$. □

Corolario 3.24. *Si $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, $(\lambda$ es un cardinal$)^{\mathfrak{M}}$ y $(\mathbb{P}$ es λ cerrado$)^{\mathfrak{M}}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva λ^+.*

Demostración. Supongamos que $(\lambda^+)^{\mathfrak{M}} < (\lambda^+)^{\mathfrak{M}[G]}$. Entonces en $\mathfrak{M}$ existe $f : \lambda \longrightarrow (\lambda^+)^{\mathfrak{M}}$ función biyectiva, por el teorema 3.22, tenemos que $f \in \mathfrak{M}$, lo cual es una contradicción. $\square$

En particular, el corolario anterior nos asegura que si $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado entonces $\aleph_1$ se preserva. Este hecho será de gran utilidad para resultados posteriores.

Lema 3.25. *Si λ es regular, entonces $F_n(I, J, \lambda)$ es λ-cerrado.*

Demostración. Sea $\gamma < \lambda$ y $\{p_\xi : \xi < \gamma\}$ una sucesión decreciente de elementos de $\mathbb{P}$. consideramos $q = \bigcup\{p_\xi : \ \xi < \gamma\}$, como $\gamma < \lambda$ y para cada $\xi < \gamma$, $|p_\xi| < \lambda$, tenemos que $|q| < \lambda$ con lo cual q es una función parcial menor que λ de I en J que extiende a todas las p_ξ. $\square$

Teorema 3.26. *Si $\lambda, I, J \in \mathfrak{M}$, $(\lambda$ es regular$)^{\mathfrak{M}}$, $(2^{<\lambda} = \lambda)^{\mathfrak{M}}$ y $(|J| \leq \lambda)^{\mathfrak{M}}$, entonces $F_n(I, J, \lambda)^{\mathfrak{M}}$ preserva cofinalidades (y por tanto, cardinales).*

Demostración. Por el lema 3.26, como λ es regular, $F_n(I, J, \lambda)^{\mathfrak{M}}$ es λ-cerrado en $\mathfrak{M}$ y, por el corolario 3.23, preserva cofinalidades $\leq \lambda$. Como $2^{<\lambda} = \lambda$, y $(|J| \leq \lambda)^{\mathfrak{M}}$, se tiene que $|J| \leq 2^{<\lambda}$, usando el corolario 3.20, se tiene que $F_n(I, J, \lambda)^{\mathfrak{M}}$ preserva cofinalidades $\geq (2^{<\lambda})^+ = \lambda^+$. Con todo lo anterior, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 3.27. *Supongamos que $(\lambda < \kappa)^{\mathfrak{M}}$, $(\lambda$ es regular$)^{\mathfrak{M}}$, $(2^{<\lambda} = \lambda)^{\mathfrak{M}}$ y $(\kappa^\lambda = \kappa)$. Si $\mathbb{P} = F_n(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)^{\mathfrak{M}}$, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinales y si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces $(2^\lambda = \kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Con lo anterior y eligiendo a λ y a κ de manera adecuada, tenemos que: $Con(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow Con(\mathbf{ZFC + HC +\neg\ HCG})$, de hecho podemos invalidar HCG para cualquier cardinal regular.

3.5. Consistencia de HC

Ahora usaremos la teoría para ver la consistencia de HC con una demostración sencilla que además nos ayudará a consolidar los conocimientos adquiridos y la manera de emplearlos.

Teorema 3.28. *Con(**ZFC**)* $\longrightarrow$ *Con(**ZFC**+ **HC**).*

Demostración. Sea $\mathfrak{M}$ un mtn de **ZFE** y definamos en $\mathfrak{M}$ a la noción de forcing $\mathbb{P} = F_n(\omega_1, \wp(\omega), \omega_1)$. Los elementos de $\mathbb{P}$ son aproximaciones numerables a funciones de $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ en $\wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$. Deseamos encontrar en $\mathfrak{M}[G]$ una función sobreyectiva $f : \omega_1^{\mathfrak{M}[G]} \longrightarrow \wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega)$.

Veamos que $\bigcup G : \omega_1^M \longrightarrow \wp^M(\omega)$, es una función sobreyectiva

Sean $A, B \in \wp(\omega)$, si $(\alpha, A), (\alpha, B) \in \bigcup G$, entonces existen $p_0, p_1 \in G$ tales que $(\alpha, A) \in p_0$ y $(\alpha, B) \in p_1$. Como G es filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq p_0$ y $r \leq p_1$. Así, $(\alpha, A), (\alpha, B) \in r$ y, como r es función, esto implica que $A = B$. Por tanto $\bigcup G$ es función.

Para cada $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$, sea $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \subseteq dom(p)\}$.
Sea $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$, veamos que D_α es denso. Sea $p_0 \in \mathbb{P}$ consideremos $p \leq p_0$ tal que $p : \beta \longrightarrow \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$, con β un ordinal y $\beta < \omega_1^{\mathfrak{M}}$. Si $\beta \geq \alpha$ entonces $p \in D_\alpha$. Si $\beta \leq \alpha$, consideremos $q : \alpha \longrightarrow \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$, tal que

$$q(\xi) = \begin{cases} p(\xi) & \text{si } \xi \in \beta \\ \varnothing & \text{si } \xi \geq \beta \end{cases}$$

entonces $q \in D_\alpha$ y $q \leq p_0$.
Como para cada $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$, D_α es denso y G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ se tiene que $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$. Así, para cada $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$ existe $p \in G$ tal que $\alpha \subseteq dom(p)$ y por tanto $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \bigcup\limits_{\alpha < \omega^{\mathfrak{M}}} \alpha \subseteq \bigcup\limits_{p \in G} dom(p) \subseteq \omega_1^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto $dom(\bigcup G) = \bigcup\limits_{p \in G} dom(p) = \omega_1^{\mathfrak{M}}$.

Para cada $x \in \wp^M(\omega)$, sea $E_x = \{p \in \mathbb{P} : \ x \in ran(p)\}$.
Sea $x \in \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$, veamos que E_x es denso. Sea $p \in \mathbb{P}$, si $x \in ran(p)$, entonces $p \in E_x$. Si $x \notin ran(p)$, sea $\beta > dom(p)$ tal que $\beta \in \omega_1^{\mathfrak{M}}$, definimos $q = p \cup \{(\beta, x)\}$. Entonces $q \leq p$ y $q \in E_x$.

Sea $A \in \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$. Como E_A es denso en $\mathbb{P}$, $G \cap E_A \neq \varnothing$. Así, podemos considerar $p \in G \cap E_A$, por ende $A \in ran(p)$. De aquí, se tiene que existe $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$ tal que $p(\alpha) = A$ y por tanto $\bigcup G(\alpha) = A$. Como A fue un elemento arbitrario de $\wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$ tenemos que $\bigcup G$ es sobreyectiva.

Hemos visto así que $\bigcup G : \omega_1^{\mathfrak{M}} \longrightarrow \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$ es una función sobreyectiva. Ahora vamos a verificar que $\wp^{\mathfrak{M}}(\omega) = \wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega)$ y $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$ para poder concluir el resultado.

Sabemos que $\wp^{\mathfrak{M}}(\omega) \subseteq \wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega)$. A un elemento en $\wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega)$ lo podemos ver como una función $f : \omega \longrightarrow 2$. Además por el lema 3.25, $\mathbb{P}$ es ω_1-cerrado, y por el teorema 3.22, $f \in \mathfrak{M}$, con lo cual $\wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega) \subseteq \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$. Por lo tanto, tenemos la igualdad entre estos dos conjuntos.

Veamos que $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$. Como $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}[G]$, debe de cumplirse que $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1 \cap \mathfrak{M} \subseteq \omega_1 \cap \mathfrak{M}[G] = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$. Por lo tanto, $\omega_1^{\mathfrak{M}} \leq \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$. Veamos ahora que $\omega_1^{\mathfrak{M}} \leq \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$. Para esto, procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $\omega_1^{\mathfrak{M}} < \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$. Entonces $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ es un ordinal numerable en $\mathfrak{M}[G]$, pero en $\mathfrak{M}[G]$ tenemos que la función $\bigcup G : \omega_1^{\mathfrak{M}} \longrightarrow \wp^{\mathfrak{M}}(\omega)$ es sobreyectiva, además $\wp^{\mathfrak{M}}(\omega) = \wp^{\mathfrak{M}[G]}(\omega)$, lo cual implica que $\mathfrak{M}[G]$ modela que $\wp(\omega)$ es numerable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\omega_1^{\mathfrak{M}} \geq \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$.
Juntando las dos desigualdades, hemos probado que $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$.

Entonces en $\mathfrak{M}[G]$ se satisface que existe una función sobreyectiva de ω_1 en $\wp(\omega)$,lo cual nos dice que $\omega_1 \geq |\wp(\omega)|$. Además, es un resultado conocido de la teoría de conjuntos que $\omega < |\wp(\omega)|$, con lo cual $\omega_1 \leq |\wp(\omega)|$. Entonces $\mathfrak{M}[G] \models \omega_1 = |\wp(\omega)| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Capítulo 4

Tipos de reales

En la sección anterior hemos agregado reales a nuestro modelo base y con ello surge el interés de conocer sus propiedades y estudiar otros tipos de reales que pueden ser agregados. En esta sección hablaremos de tres tipos de reales (dominantes, no acotados y divisores), revisando la forma en que se relacionan entre ellos y proporcionando ejemplos de como forzarlos.

4.1. Tipos de reales

Antes de definir los tipos de reales que nos interesa estudiar, definiremos lo que entendemos por que una función de ω en ω domine a otra.

Definición 4.1. *Sean $f, g \in^{\omega} \omega$ diremos que f domina a g, lo cual denotamos $q \leq^* f$, si y solo si existe $m \in \omega$ tal que para toda $n > m$, $g(n) < f(n)$.*

Definición 4.2. *Sean $f \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}[G]$ y $x \in [\omega]^{\omega} \cap \mathfrak{M}[G]$.*

1. *f es un real dominante si para toda $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$, $g <^* f$.*
2. *f es real no acotado si no es dominado por ningún $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$, i.e., no existe $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$ tal que $f <^* g$.*
3. *x es real divisor si para toda $y \in [\omega]^{\omega} \cap \mathfrak{M}$, se cumple que x divide a y, i.e., $|y \cap x| = |y - x| = \omega$.*

Definición 4.3. *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing, diremos que:*

1. *$\mathbb{P}$ añade reales dominantes si y solo si $\mathbb{1} \Vdash \exists f \in {}^{\omega}\omega : \forall g \in {}^{\omega}\omega : g <^* f$,*

2. *$\mathbb{P}$ añade reales no acotados si y solo si $\mathbb{1} \Vdash \exists f \in {}^\omega\omega : \forall g \in {}^\omega\omega : f \not<^* g$,*

3. *$\mathbb{P}$ añade reales divisores si y solo si*
   $\mathbb{1} \Vdash \exists x \subseteq \omega : \forall y \in [\omega]^\omega : |y \cap x| = |y - x| = \omega$ y

4. *$\mathbb{P}$ es ${}^\omega\omega$-acotado si en ninguna extensión $\mathbb{P}$-genérica hay reales no acotados.*

Es fácil notar que si $\mathbb{P}$ añade reales dominantes entonces también añade reales no acotados. Ya que por definición todo real dominante es no acotado. A continuación exploraremos otras relaciones entre estos tres tipos de reales.

Proposición 4.4. *Si $\mathfrak{M}[G]$ tiene un real dominante, entonces también tiene un real divisor.*

Demostración. Para cada función $f \in {}^\omega\omega \cap \mathfrak{M}[G]$, si $f^0(0) = 0$ y $f^{n+1}(0) = f(f^n(0))$, consideremos el conjunto

$$\sigma_f = \bigcup \left\{ \left[f^{2n}(0), f^{2n+1}(0) \right) : n \in \omega \right\}.$$

Ahora consideremos $f \in {}^\omega\omega$ un real dominante. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es estrictamente creciente y que $f(0) > 0$.

Sea $x \in [\omega]^\omega \cap \mathfrak{M}$ y $g_x : \omega \longrightarrow x$ la única biyección estrictamente creciente entre ω y x.
Como f es dominante, $g_x <^* f$, lo cual implica que existe $n_0 \in \omega$ tal que para cada $k \geq n_0$ tenemos que $g_x(k) < f(k)$. Para cada $k \in \omega$, si $k \leq g_x(k)$, entonces $k \leq f^k(0)$. Más aún, para $k \geq n_0$ se cumple que

$$f^k(0) \leq g_x(f^k(0)) < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0)$$

con lo cual $g_x(f^k(0)) \in \left[f^k(0), f^{k+1}(0) \right)$. Así, $g_x(f^k(0)) \in \sigma_f$ si y solo si k es par, lo cual muestra que $x \cap \sigma_f$ y $x - \sigma_f$ son infinitos. Así, como $x \in [\omega]^\omega$ fue arbitrario, σ_f es un real divisor. $\square$

Con esto hemos visto que añadir reales dominantes implica añadir reales no acotados y reales divisores. Nuestro interés en lo que resta de esta sección será ver cómo se comportan las recíprocas de estos dos hechos y para ello haremos uso de diferentes forcings.

4.2. Los reales que agrega el forcing de Cohen

Comenzaremos con el ya conocido Forcing de Cohen, sin embargo necesitamos hacer uso de versiones equivalentes del mismo para facilitar el trabajo. Para poder hablar de nociones de forcing equivalentes es imperativo mencionar encajes sobre las mismas, éstas son funciones especiales entre nociones de forcing; su estudio es extenso y sale de los límites de este trabajo por lo cual nos remitimos a enunciar un resultado que nos será de gran utilidad sin redactar su demostración.

Definición 4.5. *Sean* $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ *y* $(\mathbb{Q}, \leq Q)$ *nociones de forcing.*

1. *Diremos que* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *son equivalentes, en notación* $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$ *si y solo si para cada* G *filtro*
   $\mathbb{P}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$*, existe* H *filtro* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[H]$ *y para cada* H *filtro* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$*, existe* G *filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\mathfrak{M}[H] = \mathfrak{M}[G]$.

2. *Una función* $e : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un encaje denso si satisface que:*

   - $\forall p_0, p_1 \in \mathbb{P} : p_0 \leq_{\mathbb{P}} p_1 \leftrightarrow e(p_0) \leq_{\mathbb{Q}} e(p_1)$ *y*
   - $\forall q \in \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{P} : \ e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q$.

Proposición 4.6. *Sean* $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ *y* $(\mathbb{Q}, \leq Q)$ *nociones de forcing. Si existe un encaje denso entre* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *entonces* $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$.

Así, veremos las ya anticipadas versiones equivalentes. Consideremos el forcing de Cohen $\mathbb{C} = Fn(\omega, 2)$ y las nociones $\overline{\mathbb{C}} = \left(\bigcup_{n \in \omega} {}^{n}2, \supseteq \right)$, $\mathbb{C}(\omega) = (Fn(\omega, \omega), \supseteq)$, y $\overline{\mathbb{C}}(\omega) = \left(\bigcup_{n \in \omega} {}^{n}\omega, \supseteq \right)$. Veremos que son todas equivalentes.

Proposición 4.7. $\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}(\omega) \approx \overline{\mathbb{C}}(\omega)$

Demostración. Para ver que $\mathbb{C} \approx \overline{\mathbb{C}}$ basta con considerar la función inclusión $i : \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}2 \longrightarrow Fn(\omega, 2)$, mientras para ver que $\mathbb{C}(\omega) \approx \overline{\mathbb{C}}(\omega)$ análogamente consideramos la función inclusión $i_\omega : \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}\omega \longrightarrow Fn(\omega, \omega)$.

Por último veamos que $\overline{\mathbb{C}} \approx \overline{\mathbb{C}}(\omega)$. Queremos encontrar un encaje denso $e : \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} {}^n2$. Para ello sea $p : n_0 \longrightarrow \omega$ una función. Si $n_0 = 0$, entonces $e(p) = \varnothing$. En otro caso, por inducción sobre n_0 definimos enteros b_k de tal modo que para cada $k \in n_0$ se cumple que

$$b_k = \begin{cases} p(0) & \text{si } k = 0 \\ b_{k-1} + p(k) + 1 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Sea $x_p = \{b_k : k \in n_0\}$ y definamos la función $h(p) : b_{n_0-1} + 1 \longrightarrow 2$ de tal modo que

$$h(p)(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in x_p, \\ 0 & \text{si } j \notin x_p. \end{cases}$$

Notemos que $h(p)(b_{n_0-1}) = 1$. Por otro lado si la función $q : k_0 + 1 \longrightarrow 2$ es tal que $q(k_0) = 1$, entonces, considerando $l = |\{m \in k_0 + 1 : q(m) = 1\}|$, existe $p : l \longrightarrow \omega$ tal que $h(p) = q$. En efecto, $h(p)$ es la sucesión de $p(0)$ ceros, un 1, $p(1)$ ceros, un 1, etc. □

Propiedad de Laver: Sea $\mathcal{F} = \{S : \omega \longrightarrow fin(\omega) : \forall n \in \omega : |S(n)| \leq 2^n\}$. Una noción de forcing $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de Laver si y solo si para cada función $f \in {}^\omega\omega \cap \mathfrak{M}$ y cada $\mathbb{P}$-nombre τ para alguna función de ${}^\omega\omega$ tales que $\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega : \tau(n) \leq f(n)$ se cumple que:

$$\mathbb{1} \Vdash \exists S \in \mathcal{F} \cap M : \forall n \in \omega : \tau(n) \in S(n).$$

Proposición 4.8. *Si $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de Laver, entonces no añade reales de Cohen.*

Demostración. Sean $\{I_n : n \in \omega\}$ una partición de ω (en $\mathfrak{M}$), tal que para cada $n \in \omega$, $|I_n| = 2n$ y $\text{máx}(I_n) < \text{mín}(I_{n+1})$, y τ un $\mathbb{P}$-nombre para un elemento de ${}^\omega 2$, i.e., $\mathbb{1} \Vdash \tau \in {}^\omega 2$.
Veamos que τ no es nombre para un real que corresponda a un filtro $\mathbb{C}$-genérico, considerando $\mathbb{C} = \left(\bigcup_{n\in\omega} {}^n2, \supseteq\right)$.

Para cada $n \in \omega$, sea $H(n) = \tau \restriction_{I_n}$, tenemos que $H(n) : I_n \longrightarrow^n 2$, como $|I_n| = 2n$, $H(n)$ corresponde a un elemento de ${}^{2n}2$, así que podemos asociar $H(n)$ a un $\mathbb{P}$-nombre de algún elemento de 2^{2n}, digamos $\eta(H(n))$ y consideremos $g(n) = \eta(H(n))$. Así,

$$\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega : \ g(n) \leq 2^{2n}.$$

Como $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de Laver,

$$\mathbb{1} \Vdash \exists S \in \mathcal{F} \cap M : \ \forall n \in \omega : \ g(n) \in S(n).$$

Trabajando en $\mathfrak{M}$: sea $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que para algún $S \in \mathcal{F} \cap \mathfrak{M}$,

$$p_0 \Vdash \forall n \in \omega : \ g(n) \in S(n).$$

Sea $D = \left\{ s \in \bigcup_{n\in\omega} {}^{n}2 \;\middle|\; \exists k \in \omega : \ \Big(I_k \subseteq dom(s) \ \wedge \ \eta(s \restriction_{I_k}) \notin S(k) \Big) \right\}$.

Veamos que D es denso. Sean $m \in \omega$ y $t \in {}^{m}2$, existe $k > \mathfrak{M}$ tal que $I_k \cap dom(t) = \varnothing$, podemos encontrar $s \in \bigcup_{n\in\omega} {}^{n}2$ tal que $t \subseteq s$, $I_k \subseteq dom(s)$ y, como $|S(k)| \leq 2^k < 2^{2k} = \left|{}^{I_k}2\right|$, $\eta(s \restriction_{I_k}) \notin S(k)$.

Ahora para cada $n \in \omega$ definamos $A_n = \{x \in {}^{\omega}2 : \ \eta(x \restriction_{I_n}) \in S(n)\}$ y sea $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Como $p_0 \Vdash \forall n \in \omega : \ g(n) \in S(n)$, tenemos que $p_0 \Vdash \tau \in A$ y en consecuencia $p_0 \Vdash \forall k \in \omega : \ \tau \restriction_k \notin D$. Por lo tanto τ no puede ser $\mathbb{P}$-nombre para un real de Cohen sobre $\mathfrak{M}$. $\square$

En los siguientes tres resultados veremos cómo se comporta el forcing de Cohen con respecto a los tipos de reales de la definición 4.2, consiguiendo así obtener nueva información sobre los mismos.

Lema 4.9. *El forcing de Cohen no añade reales dominantes.*

Demostración. Sea $f \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}[G]$ y τ un $\mathbb{C}$-nombre para f. Queremos mostrar que f no es dominante.
Sea $\{p_k : \ k \in \omega\}$ una enumeración de $Fn(\omega, 2)$, para cada $k \in \omega$ definimos:

$$g(k) = \text{mín}\, \{n \in \omega : \ \exists q \leq p_k : \ q \Vdash f(k) = n\}.$$

Para cada $n \in \omega$ consideremos $D_n = \{q \in \mathbb{C} : \ q \Vdash \exists k \geq n : \ f(k) = g(k)\}$. Veamos que cada D_n es denso en $\mathbb{C}$. Sean $p \in \mathbb{C}$ y $n \in \omega$, existe $k \geq n$ tal que $p_k \leq p$ y podemos encontrar una $q \leq p_k$ tal que $q \Vdash f(k) = g(k)$. Por tanto $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$ no es dominado por f. $\square$

Lema 4.10. *El forcing de Cohen añade reales no acotados.*

Demostración. Consideremos el forcing de Cohen, $\mathbb{C} = (\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}\omega, \supseteq)$. Sea $c \in {}^{\omega}\omega$ el real agregado por $\mathbb{C}$.

Notemos que para cada condición $p \in \mathbb{C}$, se cumple que $p \Vdash c \restriction_{dom(p)} = p$. Para cada $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$ y cada $n \in \omega$ consideremos el conjunto

$$D_{g,n} = \{q \in \mathbb{C} : \ q \Vdash \exists k \geq n \ (g(k) < c(k))\}.$$

Veamos que cada $D_{g,n}$ es denso en $\mathbb{C}$. Sea $p \in \mathbb{C}$, existe $k \geq n$ y $q \in \mathbb{C}$, con $q \leq p$, tales que $k \in dom(q)$ y $q(k) > g(k)$.

Con esto tenemos que ninguna $p \in \mathbb{C}$ fuerza que c sea dominada por algún real en $\mathfrak{M}$. Con lo cual c es no acotado. $\square$

Lema 4.11. *El forcing de Cohen añade reales divisores.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{C} = \left(\bigcup\limits_{n\in\omega} {}^{n}2, \supseteq\right)$. Sean c el real añadido por $\mathbb{C}$, $\sigma_c = \{k \in \omega : \ c(k) = 1\}$ y sea $\hat{\sigma_c}$ su nombre canónico.

Para cada $x \in [\omega]^{\omega} \cap \mathfrak{M}$ y cada $n \in \omega$ consideremos el conjunto

$$D_{x,n} = \{p \in \mathbb{C} : \ p \Vdash |x \cap \hat{\sigma_c}| > n \ \wedge \ |x - \hat{\sigma_c}| > n\}.$$

Veamos que cada $D_{x,n}$ es denso en $\mathbb{C}$. Sea $p \in \mathbb{C}$, consideremos

$$x_0 = \{k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}\} \subseteq x^{-1}[0] \qquad \text{y}$$

$$x_1 = \{k_{n+2}, k_{n+3}, \ldots, k_{2n+1}\} \subseteq x^{-1}[1],$$

si $q = p \cup x_1 \cup x_2$, entonces $q \leq p$ y $q \Vdash |x \cap \hat{\sigma_c}| > n \ \wedge \ |x - \hat{\sigma_c}| > n$. Con esto σ_c es un real divisor. $\square$

De este modo, por medio del forcing de Cohen, hemos logrado ver que añadir reales divisores y añadir reales no acotados no es suficiente para asegurar que se añaden reales dominantes.

4.3. Familias libres.

Seguimos interesados en las interacciones que existen entre los reales que hemos definido, sin embargo, para continuar y enunciar nuevas nociones de forcing que nos ayuden en dicho objetivo, necesitamos implementar el concepto de "Familias libres", haremos esto por medio de ultrafiltros de teoría de conjuntos y definiciones propias de la misma.

Comenzamos con notación que nos será de especial utilidad a lo largo del capítulo.

Notación 4.12. *Sea* $s \in fin(\omega)$, $\overline{s} = \bigcup s$.

Definición 4.13. *Una familia* $\mathscr{E}$ *es una familia libre, si existe un filtro libre* $\mathscr{F}$ *tal que* $\mathscr{E} = \mathscr{F}^+$.

Podemos notar que las familias libres son cerradas bajo superconjuntos, no contienen conjuntos finitos y son cerradas bajo intersecciones finitas si y solo si son ultrafiltros.

Definición 4.14. *Un conjunto* $x \subseteq \omega$ *diagonaliza a* $\{x_s : s \in fin(\omega)\} \subseteq [\omega]^\omega$ *si se cumplen la siguientes condiciones:*

- $x \subseteq x_\varnothing$
- *Para toda* $s \in fin(\omega)$, *si* $\overline{s} \in x$, *entonces* $x \setminus \overline{s}^+ \subseteq x_s$.

Para la siguiente definición debemos recordar la definición 1.29.

Definición 4.15. $\mathscr{E}$ *es una familia feliz si es una familia libre y siempre que* $fil\big(\{x_s : s \in fin(\omega)\}\big) \subseteq \mathscr{E}$, *existe una* $x \in \mathscr{E}$ *que diagonaliza al cunjunto* $\{x_s : s \in fin(\omega)\}$.

La siguiente proposición es una caracterización de las familias felices y nos dice que una familia feliz es aquella donde para las sucesiones decrecientes numerables existe un elemento de la familia que selecciona elementos de cada integrante de la sucesión. Por este motivo a estas familias también se les conoce como coideales selectivos. A pesar de su relevancia no realizaremos la demostración de éste resultado.

Proposición 4.16. *Si es* $\mathscr{E}$ *una familia libre, entonces es familia feliz si y solo si siempre que* $y_0 \supseteq y_1 \supseteq y_2 \dots$ *sea una sucesión decreciente de elementos de* $\mathscr{E}$, *entonces existe una función* $f \in {}^\omega\omega$ *tal que* $f[\omega] \in \mathscr{E}$, $f(0) \in y_0$ *y para cada* $n \in \omega$ *tenemos que* $f(n+1) \in y_{f(n)}$.

4.3.1. Juegos infinitos

Ahora introduciremos el concepto de juego infinito y de estrategia ganadora, que de nueva cuenta son nociones combinatorias que usaremos fuertemente en el resto del capítulo.

Una partida de un **juego infinito** de dos jugadores es una sucesión de la forma $\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots \rangle$. Su nombre es claro pensando que cada elemento x_n es el movimiento que realiza el primer jugador en su n-ésimo turno, análogamente para los y_n como movimientos del segundo jugador.

Consideramos $\mathscr{E}$ una familia libre y definimos dos juegos, $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$ y $\mathcal{G}^*_{\mathscr{E}}$, entre dos jugadores, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Las reglas para $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$ son: Para cada $n \in \omega$, $x_n \in \mathscr{E}$ y $y_n \in x_n$, además, $x_{n+1} \subseteq x_n$ y $y_n < y_{n+1}$. El jugador $\mathcal{B}$ gana el juego si y solo si $\{y_n : n \in \omega\}$ pertenece a $\mathscr{E}$.

Las reglas para $\mathcal{G}^*_{\mathscr{E}}$ son: Para cada $n \in \omega$, $x_n \in \mathscr{E}$ y cada $y_n \subset x_n$ es un conjunto finito, además, $x_{n+1} \subseteq \left(x_n \setminus \bigcup_{m \leq n} y_m \right)$. El jugador $\mathcal{B}$ gana el juego si y solo si $\bigcup\{y_n : n \in \omega\} \in \mathscr{E}$.

Una **estrategia** para $\mathcal{A}$ es una regla de como debe jugar $\mathcal{A}$ su n-ésimo movimiento dados los movimientos anteriores movimientos de $\mathcal{B}$. En el caso de $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$ una estrategia para $\mathcal{A}$ sería una función $\sigma : seq(\mathscr{E} \cup \omega) \longrightarrow \mathscr{E}$, que funcionaria de la siguiente manera: $x_0 = \sigma(\varnothing)$, $\mathcal{B}$ responde con $y_0 \in x_0$, entonces $\mathcal{A}$ juega $x_1 = \sigma(x_0, y_0)$, que siga las reglas del juego, y así sucesivamente.

Una estrategia σ para $\mathcal{A}$ es una **estrategia ganadora** si siempre que $\mathcal{A}$ siga la estrategia resulta ganador del juego. En nuestro caso, σ es una estrategia ganadora para $\mathcal{A}$ si siempre que $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ sea tal que $y_0 \in \sigma(x_0)$ y para cada $n \in \omega$, $y_n < y_{n+1}$ y $y_{n+1} \in \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_{n+1})$, entonces $\{y_n : n \in \omega\} \notin \mathscr{E}$.

Las siguientes dos definiciones son el punto de destino de las nociones que hemos definido y será con ellas que definiremos el forcing de Silver y el forcing de Mathias.

Definición 4.17. 1. *Una familia libre $\mathscr{E}$, es llamada una familia Ramsey si no hay una estrategia ganadora para $\mathcal{A}$ en el juego $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$.*

2. *Una familia libre, $\mathscr{E}$, es llamada P-familia si no hay una estrategia ganadora para $\mathcal{A}$ en el juego $\mathcal{G}^*_{\mathscr{E}}$.*

4.4. Forcing de Mathias.

Definición 4.18. *Para $\mathscr{E}$ una familia Ramsey, consideramos el conjunto $\mathbb{M}_{\mathscr{E}} = \{(s,x) : s \in fin(\omega) \wedge x \in \mathscr{E} \wedge max(s) < min(x)\}$.*
Ordenamos a $(s,x),(t,y) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ como: $(s,x) \leq (t,y)$ si y solo si $s \subseteq t \wedge y \subseteq x \wedge t \setminus s \subseteq x$

Así, el forcing de Mathias es la noción $(\mathbb{M}_{\mathscr{E}}, \leq)$. Si $\mathscr{E} = [\omega]^\omega$ escribimos solamente $\mathbb{M}$.
El conjunto s de una condición de Mathias (s,x), es llamado el tallo de la condición. Para G un filtro $\mathbb{M}_{\mathscr{E}}$-genérico corresponde un real $m \in [\omega]^\omega$, al cual llamamos real de Mathias dado por $m = \bigcup\{s \in fin(\omega) | \exists x \in \mathscr{E} : (s,x) \in G\}$.

Lema 4.19. *El forcing de Mathias añade reales dominantes.*

Demostración. Sean m un real de Mathias y $g \in {}^\omega\omega \cap \mathfrak{M}$. Queremos mostrar que $D_g = \{p \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}} | \, p \Vdash \hat{m}$ domina a $g\}$ es denso en $\mathbb{M}_{\mathscr{E}}$.
Sea $p = (s,x) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$, construiremos una condición $q \leq p$ en D_g realizando una partida del juego $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$ donde el jugador $\mathcal{A}$ sigue la estrategia:
Si $|s| = n_0$, el primer movimiento de $\mathcal{A}$ es

$$x_0 = x \setminus (g(n_0)^+),$$

y para cada $i \in \omega$, si a_i es el i-ésimo movimiento de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ juega

$$x_{i+1} = x_i \setminus max\{g(n_0+i)^+, a_i^+\}.$$

Como $\mathscr{E}$ es una familia Ramsey, la estrategia no es ganadora para $\mathcal{A}$ por lo cual $\mathcal{B}$ puede jugar de tal modo que $y = \{a_i : i \in \omega\} \in \mathscr{E}$. Si $q = (s,y)$, por construcción $q \leq p$ y $q \Vdash \forall k \geq n_0 : \; m(k) > g(k)$, lo cual demuestra que m es un real dominante. $\square$

El siguiente teorema debe remitirnos a 1 del corolario 2.19 y nos ayudará a mostrar que $\mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ tiene la propiedad de Laver, sin embargo su demostración requiere introducir teoría que por el momento es innecesaria y para motivos de este trabajo será mejor omitirla.

Teorema 4.20. *Sea $(s,x) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ y φ una sentencia en lenguaje de forcing. Entonces existe $(s,y) \leq (s,x)$ tal que $(s,y) \Vdash \varphi$ ó $(s,y) \Vdash \neg\varphi$ (decimos que (s,y) decide φ).*

Corolario 4.21. *$\mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ tiene la propiedad de Laver.*

Demostración. Sea $f \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$ y τ un $\mathbb{M}_{\mathscr{E}}$-nombre para una función en ${}^{\omega}\omega$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \forall n \in \omega : \ \tau(n) \leq f(n)$. Consideremos

$$\mathcal{F} = \left\{ S : \omega \longrightarrow fin(\omega) \middle| \, \forall n \in \omega : \ |S(n)| \leq 2^n \right\}.$$

Queremos mostrar que $\mathbb{1} \Vdash \exists S \in \mathcal{F} \cap \mathfrak{M} : \quad \forall n \in \omega : \ \tau(n) \in S(n)$. En otras palabras queremos que para cada $(s,x) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ existan $(s,y) \leq (s,x)$ y $S \in \mathcal{F} \cap \mathfrak{M}$ tales que $(s,y) \Vdash \forall n \in \omega : \ \tau(n) \in S(n)$.

Como τ es acotado por f, por el teorema 4.20, para cada $(t,z) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$ y cada $n \in \omega$ existe una condición $(t,z') \leq (t,z)$ que decide $\tau(n)$, i.e., para algún $k \leq f(n)$, $(t,z') \Vdash \tau(n) = k$. Sea $(s,x) \in \mathbb{M}_{\mathscr{E}}$. Vamos a realizar un juego de $\mathcal{G}_{\mathscr{E}}$ donde $\mathcal{A}$ juega de acuerdo a la siguiente estrategia:
Comienza jugando $x_0 \subseteq x$ tal que (s,x_0) decide $\tau(0)$, definimos

$$S(0) = \{k \leq f(0) : \ (s,x_0) \Vdash \tau(0) = k\}.$$

Notemos que $|S(0)| = 1 = 2^0$. Ahora, para $n \in \omega$, si $a_0, \ldots, a_n$ son los movimientos de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ juega $x_{n+1} \subseteq (x_n \setminus a_n^+)$ tal que para cada $\overline{a} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$, $(s \cup \overline{a}, x_{n+1})$ decide $\tau(n+1)$, y definimos:

$$S(n{+}1) = \left\{ k \leq f(n+1) \middle| \, \exists \, \overline{a} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\} : (s \cup \overline{a}, x_{n+1}) \Vdash \tau(n+1) = k \right\}.$$

Notemos que $|S(n+1)| \leq |\wp(\{a_0, \ldots, a_n\})| = 2^{n+1}$. Como esta estrategia no es ganadora para $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ puede jugar de tal modo que $y = \{a_n : \ n \in \omega\} \in \mathscr{E}$. Por construcción sabemos que $S \in \mathcal{F} \cap \mathfrak{M}$ y para cada $n \in \omega$ tenemos que $(s,y) \Vdash \tau(n) \in S(n)$. Éstas son las propiedades buscadas, así concluimos el resultado. $\square$

De este modo tenemos un ejemplo de una noción de forcing que añade reales dominantes.

4.5. Forcing de Silver.

Definición 4.22. *Para $\mathscr{E}$ una P-familia consideramos el conjunto* $\mathbb{S}_{\mathscr{E}} = \bigcup\{{}^{x}2 : \ x^c \in \mathscr{E}\}$.
Ordenamos a $p, q \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}}$ como: $q \leq p$ si y solo si $dom(p) \subseteq dom(q)$ y $q \restriction_{dom(p)} = p$.

Así, el forcing de Silver-like es la noción $(\mathbb{S}_{\mathscr{E}}, \leq)$. Si $\mathscr{E} = [\omega]^{\omega}$ lo llamaremos solo forcing de Silver. Por otra parte si G es $\mathbb{S}_{\mathscr{E}}$-genérico, $\bigcup G$ es un real de Silver.

Lema 4.23. *El forcing de Silver-like añade reales divisores.*

Demostración. Sea $E \subseteq \omega$. Para cada $f \in {}^{E}2$, definimos el conjunto:

$$\sigma_f = \left\{ n \in \omega : \sum_{j \in n^+} f(j) \equiv 1 \mod 2 \right\}.$$

Sea $g \in {}^{\omega}2$ un real de Silver. Veamos que σ_g divide a cada real de $\mathfrak{M}$. Para verificar esto basta ver que para cada $x \in [\omega]^{\omega} \cap \mathfrak{M}$ y cada $n \in \omega$, el conjunto

$$D_{x,n} = \left\{ p \in S_{\mathscr{E}} : \ p \Vdash \left(|x \cap \hat{\sigma_g}| > n \ \wedge \ |x \setminus \hat{\sigma_g}| > n \right) \right\}$$

es denso en $\mathbb{S}_{\mathscr{E}}$. Sean $p \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}}$, $\omega \setminus dom(p) \in \mathscr{E}$ y con $\mathscr{E}$ familia libre, $\omega \setminus dom(p)$ es infinito. Consideremos $A = \{a_i : \ i \in 2n\} \subseteq \omega \setminus dom(p) \in \mathscr{E}$ y $B = \{b_i : \ i \in 2n\} \subseteq x$ tales que $a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < a_{2n-1} < b_{2n-1}$.
Sea $E = dom(p) \cup b^+_{2n-1}$. Por recursión en $2n$: Sea $q_0 \in S_{\mathscr{E}}$ de tal modo que $dom(q_0) = E \setminus A$, $q_0 \restriction_{dom(p)} = p$ y para cada $m \in dom(q_0) \setminus dom(p)$, $q_0(m) = 0$. En particular $B \subseteq dom(q_0)$ y para cada $k \in 2n$, $q_0(b_k) = 0$. Si para $k \in 2n$, q_k ya ha sido definida, sea $q_{k+1} \in S_{\mathscr{E}}$ de tal modo que $dom(q_{k+1}) = dom(q_k) \cup \{a_k\}$, $q_{k+1} \restriction_{dom(q_k)} = q_k$ y

$$q_{k+1}(a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \in n \ \ y \ \ b_k \in \sigma_{q_{k+1}} \cap b_k^+ \\ 0 & \text{si} \quad k \notin n \ \ y \ \ b_k \notin \sigma_{q_{k+1}} \cap b_k^+ \\ 1 & \text{si} \quad o.c. \end{cases}$$

Sea $q = q_{2n}$, por construcción, tenemos que

$$q \Vdash \{b_0, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq \hat{\sigma_g} \ \wedge \ \{b_n, \ldots, b_{2n-1}\} \cap \hat{\sigma_g} = \varnothing$$

y como $\{b_0, \ldots, b_{2n-1}\} \subseteq x$, se cumple que $q \in D_{x,n}$. □

Para ayudarnos a no volver engorrosa la siguiente demostración introduciremos la siguiente notación.

Notación 4.24. *Para $p \in S_{\mathscr{E}}$ y $t \subseteq dom(p)$ finito,*
$\overline{p \sim t} = \{q \in S_{\mathscr{E}} \mid dom(q) = dom(p) \wedge q \restriction_{dom(q)\setminus t} = p \restriction_{dom(p)\setminus t}\}$.

Lema 4.25. *El forcing $\mathbb{S}$ es ${}^{\omega}\omega$-acotado.*

Demostración. Sean G un filtro $\mathbb{S}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, $f \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}[G]$ y τ un $\mathbb{S}_{\mathscr{E}}$ nombre para f. Queremos mostrar que para cada $g \in {}^{\omega}\omega \cap \mathfrak{M}$, $D_g = \{q \in S_{\mathscr{E}} : q \Vdash g$ domina a $f\}$ es denso en $\mathbb{S}$.

Primero consideremos un buen orden "$\prec$"en $\mathbb{S}_{\mathscr{E}}$ y fijemos $p \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}}$.
Construiremos una condición $q_0 \leq p$ en D_g realizando una partida del juego $\mathcal{G}^{*}_{\mathscr{E}}$ donde el jugador $\mathcal{A}$ procede con la siguiente estrategia:
Sean

$$m_0 = \min\{n \in \omega : \exists r \leq p : r \Vdash \tau(0) < n\} \text{ y}$$
$$p_0 = \min_{\prec}\{r \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}} : r \Vdash \tau(0) < m_0\}.$$

Entonces el jugador $\mathcal{A}$ juega $x_0 = dom(p_0)^c$. Para $i \in \omega$, si $s_0, s_1, \ldots, s_{i-1}$ son los movimientos del jugador $\mathcal{B}$, nombramos $t_i = \bigcup_{k\in i} s_k$. Suponiendo que hemos construido una sucesión decreciente $p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_{i-1}$ de condiciones en $\mathbb{S}_{\mathscr{E}}$ tales que $t_i \setminus s_{i-1} \subseteq dom(p_{i-1})$. Más aún, sean

$$\begin{aligned} m_i = \min\{n \in \omega \mid \exists r \leq p_{i-1} :\ & dom(r) \supseteq dom(p_{i-1}) \cup s_{i-1} \\ & \wedge\ \forall q \in \overline{r \sim t_i},\ q \Vdash \tau(i) < n\} \text{ y} \\ p_i = \min_{\prec}\{r \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}} \mid dom(r) \supseteq dom(p_{i-1}) & \cup s_{i-1} \wedge \forall q \in \overline{r \sim t_i},\ q \Vdash \tau(i) < m_i\} \end{aligned}$$

Hace falta ver que existe alguna r de las que hablamos para que los conjuntos sean no vacíos y tanto m_i como p_i estén bien definidas. Consideremos $r_0 \leq p_{i-1}$ tal que $dom(r_0) \supseteq dom(p_{i-1}) \cup s_{i-1}$ y $r_0 \Vdash \tau(i) < n_0$ para algún $n_0 \in \omega$. Ahora, sea $r_{(0)} \in \overline{r_0 \sim t_i}$ incompatible con r_0 (i.e., $r_{(0)} \restriction_{t_i} \neq r_0 \restriction_{t_i}$), extendemos $r_{(0)}$ con $r_1 \leq r_{(0)}$ tal que $r_1 \Vdash \tau(i) < n_1$ para algún $n_1 \in \omega$. Similarmente, sea $r_{(1)} \in \overline{r_1 \sim t_i}$ incompatible con r_0 y r_1 (i.e., $r_0 \restriction_{t_i} \neq r_{(1)} \restriction_{t_i} \neq r_1 \restriction_{t_i}$). Procedemos de esta forma, agotando todas las posibles combinaciones dentro de t_i, esto es: hasta abarcar todos los subconjuntos de t_i, el cual es finito, por tanto, conseguimos el conjunto finito $I = \{n_k | k \in 2^{|t_i|}\}$, podemos considerar a $r = \text{mín}\{r_k : k \in 2^{|t_i|}\}$, de este modo para cada $q \in \overline{r \sim t_i}$, $q \Vdash \tau(i) \in I$. Así, r cumple lo deseado para que los conjuntos con los cuales definimos a m_i y a p_i no sean vacíos, y siendo estos últimos, por ende, bien definidos.

Ahora, sea $h = \bigcup_{i\in\omega} p_i$, para algún $x \subseteq \omega$, $h \in {}^{x}\omega$. Como $\mathscr{E}$ es una P-familia, la estrategia no es ganadora para $\mathcal{A}$ por lo cual el jugador $\mathcal{B}$ puede jugar de tal modo que $\bigcup_{i\in\omega} s_i \in \mathscr{E}$. Sean $q_0 \in \mathbb{S}_{\mathscr{E}}$ y $g \in {}^{\omega}\omega$ de tal modo que; $dom(q_0) = dom(h)\setminus\bigcup_{i\in\omega} s_i$ y $q_0 = h \restriction_d om(q_0)$, y para cada $i \in \omega,\ g(i) = m(i)$, entonces $g \in \mathfrak{M}$. Por construcción $q_0 \leq p$ y $q_0 \Vdash \forall i \in \omega :\ \tau(i) < g(i)$.

Así, ninguna condición p puede forzar que τ sea no acotada. $\square$

De este modo, por medio del forcing de Silver-Like hemos logrado añadir reales divisores sin agregar reales no acotados por tanto los primeros no implican los segundos.

4.6. Forcing de Miller.

Comencemos hablando de un par de términos que nos ayudarán a definir el forcing de Miller. Denotamos al conjunto de sucesiones finitas de ω como $seq(\omega)$ al cual podemos identificar con $\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}\omega$. De este modo, para $s \in seq(\omega)$ con $|s| = n+1$ podemos escribir $s = \langle s(0), \ldots, s(n)\rangle$. Más aún para $s, t \in seq(\omega)$ con $|s| \leq |t|$ escribimos $s \preccurlyeq t$ si $t \restriction_{|s|} = s$.

Ahora trabajaremos con conjuntos $T \subseteq seq(\omega)$ árboles con el orden $\preccurlyeq$. A continuación, definiremos un par de conceptos que nos serán útiles para estos árboles. Antes de ello recordemos que para $s \in seq(\omega)$ tal que $|s| = m+1$, la concatenación de n en s es $s^\frown n = \langle s(0), \ldots, s(m), n\rangle$.

Definición 4.26. *Sea $T \subseteq seq(\omega)$ un árbol y $s \in T$*

1. $T(s) = \{t \in T :\ t \preccurlyeq s\ \vee\ s \preccurlyeq t\}$.
2. $next_T(s) = \{n \in \omega :\ s^\frown n \in T\}$.

3. *Un árbol* $T \subseteq seq(\omega)$ *es superperfecto si para cada* $t \in T$ *existe un* $s \in T$ *tal que* $t \preccurlyeq s$ *y* $|succ_T(s)| = \omega$*, i.e., para cada nodo* t *hay un nodo* s *con una infinidad de sucesores inmediatos.*

4. $split(T) = \{s \in T : |succ_T(s)| = \omega\}$.

5. $split_k(T) = \big\{s \in split(T) : |\{t \in split(T) : t \preccurlyeq s\}| = k+1\big\}$,
i.e., un nodo $s \in split(T)$ *pertenece a* $split_k(T)$ *si y solo si hay exactamente* k *nodos divisores antes de* s.

Notemos que las definicines de $split(T)$ y $split_k(T)$ tienen relevancia cuando T es un árbol superperfecto, además podemos caracterizar a dichos árboles notando que un árbol T es superperfecto si y solo si hay exactamente k nodos divisores antes de s.

Definición 4.27. $\mathbb{M}^* = \{T \subseteq seq(\omega) : T$ *es un árbol superperfecto*$\}$.
Ordenamos a $T, T' \in \mathbb{M}^*$ *como:* $T' \leq T$ *si y solo si* $T' \subseteq T$

Así, el forcing de Miller es la noción $(\mathbb{M}^*, \leq)$.
Sin perder generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathbb{M}$ tienen la propiedad que para cada $s \in T$ tenemos que o bien $s \in split(T)$ ó $|succ_T(s)| = 1$, i.e., cada nodo en T que no es nodo divisor tiene un único sucesor inmediato.

Para ver esto, sean $T \in \mathbb{M}^*$, $s_0 \in split_0(T)$ y $T_0 = T_{s_0}$. Para cada $n \in next_{T_0}(s_0)$ elegimos un $s_{0,n} \in T_{s_0}$ tal que $s_0^\frown n \preccurlyeq s_{0,n}$ y $s_{0,n} \in split_1(T_0)$, y consideramos

$$T_1 = \bigcup \{T_{s_{0,n}} : n \in succ_{T_0}(s_0)\}.$$

$n \in next_{T_1}(s_j)$, escogemos un $s_{j,n} \in T_{s_j}$ tal que $s_j^\frown n \preccurlyeq s_{j,n}$ y $s_{j,n} \in split_2(T_1)$ y consideramos

$$T_2 = \bigcup \{T_{s_{j,n}} : s_j \in split_1(T_1) \wedge n \in succ_{T_1}(s_j)\}.$$

Podemos seguir con este proceso para construir una sucesión infinita de la forma $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \ldots$ de árboles superperfectos. Por construcción $\overline{T} = \bigcap_{i \in \omega} T_i$ es un árbol superperfecto con la propiedad que para cada nodo $t \in \overline{T}$ que no sea divisor, $|succ_T(t)| = 1$. Como $\overline{T} \subseteq T$, tenemos que

$$\overline{\mathbb{M}} = \big\{\overline{T} \in \mathbb{M}^* : \forall t \in \overline{T} : \big(|succ_{\overline{T}}| = 1 \vee |succ_{\overline{T}}| = \omega\big)\big\}$$

es denso. Así, podemos considerar a $\overline{\mathbb{M}}$ en vez de $\mathbb{M}^*$.

Para cada G filtro $\overline{\mathbb{M}}$-genérico podemos asociar un real $g \in {}^{\omega}\omega$, al que llamamos real de Miller, con la propiedad que para cada $n \in \omega$ tenemos $g \restriction_n \in \bigcap\{T \in \overline{\mathbb{M}} :\ T \in G\}$.

Lema 4.28. *El forcing de Miller añade reales no acotados.*

Demostración. Sean $g \in {}^{\omega}\omega$ un real de Miller y $f \in {}^{\omega}\omega$ una función en $\mathfrak{M}$. Queremos mostrar que g es no acotado, para ello mostraremos que

$$D_f = \{T \in \overline{\mathbb{M}} |\ \forall s \in split(T) :\ \forall n \in next_T(s) :\ f(|s|) < n\}$$

es denso en $\overline{\mathbb{M}}$. Sea $T \in \mathbb{M}^*$, para cada $i \in \omega$ definimos

$$S_i = \{s \in split(t) : |s| = i + 1\}$$

y para $s \in S_i$

$$N_{i,s} = \{t \in succ_T(s) :\ r(i+1) \leq f(i+1)\}.$$

Así, consideramos $T' = T \setminus \bigcup_{i\in\omega} \bigcup_{s\in S_i} T_{N_{i,s}}$. De este modo; $T' \subseteq T$, para todo $t \in T'$ se cumple que o bien $|succ_{T'}| = 1$ o $|succ_{T'}| = \omega$ y T' es superperfecto, i.e., $T' \in \overline{\mathbb{M}}$ es tal que $T' \preccurlyeq T$ con $T' \in D_f$.

Así, $g \not\leq^* f$. Con lo cual g no es dominada por f y por tanto es un real no acotado. □

Lema 4.29. *El forcing de Miller no añade reales divisores.*

Demostración. Sea G un filtro $\overline{\mathbb{M}}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ y sea γ un $\overline{\mathbb{M}}$-nombre para un conjunto $Y \subseteq \omega$ en $\overline{\mathbb{M}}[G]$, i.e., existe $S \in \overline{\mathbb{M}}$ tal que $S \Vdash \gamma \subseteq \omega$. Deseamos construir una condición $S' \in \overline{\mathbb{M}}$ y un $X \in [\omega]^{\omega}$ de tal modo que $S' \subseteq S$ y $S' \Vdash (X \subseteq \gamma) \vee (X \cap \gamma = \varnothing)$ con lo cual Y no sería un real divisor.
Realizaremos la demostración en tres partes.

Afirmación 1. Existen $T \in \overline{\mathbb{M}}$ y $\{Y_s :\ s \in \mathsf{split}(T)\}$ una sucesión de subconjuntos de ω tal que $T \subseteq S$ y para cada $s \in \mathsf{split}(T)$, cada $k \in \omega$ y para casi todos los $n \in next_T(s)$ se cumple que

$$T(s^\frown n) \Vdash \gamma \cap k = Y_s \cap k.$$

En efecto. Construiremos a T de manera recursiva, en realidad usaremos recursividad para construir dos familias de condiciones.

$$T^0 = \overline{T}^0 = S.$$

Suponiendo que hemos construido T^i. Sea $s \in split_i(T^i)$, para cada $n \in next_{T^i}(s)$ consideremos una condición $\overline{T}^i(s^\frown n) \supseteq T^i(s^\frown n)$ y para algún $b_n \in fin(\omega)$ se cumpla que

$$\overline{T}^i(s^\frown n) \Vdash \gamma \cap n = b_n.$$

Para cada $k \in \omega$, sea $F_k = \{b_n \cap k : \ n \in next_{T^i}(s)\}$. Notemos que $F_k \subseteq \wp(k)$.
Consideremos $\mathcal{A}$ el árbol compuesto por el conjunto infinito de vértices $\{(b,k) : \ k \in \omega \ \wedge \ b \in F_k\}$, donde dos vértices (b,k), (b',k') se unen con una arista si y solo si $b \subseteq b' \cap k$ y $k' = k+1$. $\mathcal{A}$ es un árbol infinito de ramificación finita , así, por el lema de König (1.37), $\mathcal{A}$ contiene una rama infinita, digamos $\{(\varnothing,0),(a_1,1),\dots\}$.
Sea $Y_s = \bigcup_{k\in\omega} a_k$ y definimos una sucesión estrictamente creciente $\{n_j : \ j \in \omega\}$ de elementos de $next_{T^i}(s)$, tal que para cada $k \in \omega$ y cada $n_j \neq k$ se cumple que

$$\overline{T}^i(s^\frown n_j) \Vdash \gamma \cap k = a_k.$$

Por tanto, para cada $k \in \omega$ y casi toda $j \in \omega$ tenemos que

$$\overline{T}^i(s^\frown n_j) \Vdash \gamma \cap k = Y_s \cap k.$$

Ahora, sea $\overline{T}^i(s) = \bigcup_{j\in\omega} \overline{T}^i(s^\frown n)$. Entonces, para cada $k \in \omega$ y casi todo $n \in next_{\overline{T}^i(s)}(s)$ se cumple que

$$\overline{T}^i(s^\frown n) \Vdash \gamma \cap k = Y_s \cap k.$$

Finalmente, definimos $T^{i+1} = \bigcup\{\overline{T}^i(s) : \ s \in split_i(T^i)\}$. Notemos que para cada $j \leq i$, $split_j(T^{i+1}) = split_j(T^i)$, así, $T = \bigcap_{i\in\omega} T^i$ es un árbol superperfecto. Por construcción para cada $s \in split(T)$, cada $k \in \omega$ y casi todo $n \in next_T(s)$ se cumple que

$$T(s^\frown n) \Vdash \gamma \cap k = Y_s \cap k.$$

$\square$

Afirmación 2. Existe $T' \in \overline{\mathbb{M}}$ tal que $T' \subseteq T$ y

(I) $\{Y_s : s \in split(T')\}$ tiene la PIFF, o

(II) $\{\omega \setminus Y_s : s \in split(T)\}$ tiene la PIFF.

En efecto. Sean $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ un ultrafiltro sobre ω,

$$U = \{s \in split(T) : T(s) \in \mathscr{U}\} \text{ y}$$

$$V = \{s \in split(T) : (\omega \setminus T(s)) \in \mathscr{U}\}.$$

U y V forman una partición para $split(T)$. Notemos que eso nos remite a dos casos posibles:

(1) Existe $s \in split(T)$ tal que $split(T(s)) \subseteq U$.

(2) Para cada $s \in split(T)$, existe $t \in split(T(s)) \cap V$.

Para el caso (1), nombramos $T' = T(s)$ y para el caso (2) primero para $s \in T$ definamos $V_r = \{t \in V : s \preccurlyeq t\}$ y si $B \subseteq T$ generalicemos $succ_T(B) = \bigcup\{T(t) : t \in B\}$. Ahora, como T es superperfecto podemos considerar $t \in split(T)$ de tal modo que $T \in V$, sean $B_0 = \{t\}$ y $T(B_0) \subseteq T$. Sea B_1 un conjunto de elección para $\{V_r : r \in succ_T(t)\}$ y con ello $T(B_1) \subseteq T(B_0)$. Sea B_2 un conjunto de elección para $\{V_r : r \in succ_T(B_1)\}$ y así consideramos $T(B_2) \subseteq T(B_1)$. Podemos seguir con este proceso de manera recursiva y así definir $T' = \bigcap_{i\in\omega} T(B_i)$. Por construcción $T' \subseteq T$ y es tal que $split(T') \subseteq T$.

Si $split(T') \subseteq U$, entonces, como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, se satisface que $\{Y_s : s \in split(T')\}$ tiene la PIFF. Por otro lado, si $split(T') \subseteq V$, entonces $\{\omega \setminus Y_s : s \in split(T)\}$ tiene la PIFF.

Afirmación 3. Sea $T' \subseteq T$ un árbol superperfecto tal que

$$\mathscr{Y}_0 = \{Y_s : s \in split(T')\} \qquad \text{o} \qquad \mathscr{Y}_1 = \{\omega \setminus Y_s : s \in split(T)\}$$

tiene la PIFF. Entonces, existe una sucesión de árboles superperfectos $\{T^i : i \in \omega\}$, de tal modo que $T^0 \subseteq T'$ y para cada $i \in \omega$, $T^{i+1} \subseteq T^i$, y una sucesión de naturales $\{m_i : i \in \omega\}$, donde para cada $i \in \omega$, $m_i < m_{i+1}$ tales que $\bigcap_{i\in\omega} T^i$ es un árbol superperfecto y se cumple alguna de las siguientes

$$\forall i \in \omega : T^i \Vdash m_i \in \gamma \qquad \text{o} \qquad \forall i \in \omega : T^i \Vdash m_i \notin \gamma.$$

En efecto. Realizaremos la demostración cuando $\mathscr{Y}_1$ tiene la PIFF. Para conseguir que $\bigcap_{i\in\omega} T^i \in \overline{\mathbb{M}}$, construiremos una sucesión creciente de conjuntos finitos de $split(T^i)$, $\{F_i : i \in \omega\}$. Más aún de tal modo que $\bigcup_{i\in\omega} F_i = split\left(\bigcap_{i\in\omega} T^i\right)$.

Sean $T^{-1} = T'$, $m_{-1} = 0$ y para algún $s \in split(T')$, $F_{-1} = \{s\}$. Supongamos que ya hemos construido el árbol $T^{i-1} \in \overline{\mathbb{M}}$, el natural $m_{i-1} \in \omega$ y el conjunto $F_{i-1} \in fin(split(T^{i-1}))$. Como $\mathscr{Y}_1$ tiene la PIFF, podemos consideremos $m_i > m_{i-1}$ tal que $m_i \in \bigcap_{s\in F_{i-1}} (\omega \setminus Y_s)$. Ahora definamos

$$[F_{i-1}] = \{t \in seq(\omega) : \exists s \in F_{i-1} : t \preccurlyeq s\}.$$

Entonces $[F_{i-1}]$ es un subárbol de T^{i-1}. Supongamos que $s_0 \in [F_{i-1}]$ es un nodo terminal de $[F_{i-1}]$, i.e., para cada $n \in \omega$, $s_0^\frown n \in [F_{i-1}]$. Por construcción de Y_{s_0}, para casi todo $n \in next_{T^{i-1}}(s_0)$ tenemos que

$$T^{i-1}_{s_0 \preccurlyeq n} \Vdash \gamma \cap (m_i + 1) = Y_{s_0} \cap (m_i + 1).$$

Así, como $m_i \notin Y_{s_0}$, para casi toda $n \in next_{Ti-1}(s_0)$ se cumple que $T^{i+1}_{s_0 \preccurlyeq n} \Vdash m_i \notin \gamma$. Ahora eliminamos de T^{i-1} aquellos subárboles $T^{i+1}_{s_0^\frown n}$ que no cumplan lo anterior.
Procedemos de la misma manera para todos los nodos finales del árbol $[F_{i-1}]$. Entonces hacemos lo mismo con los nodos interiores de $[F_{i-1}]$ a

menos que conservemos todos los subárboles $T^{i+1}_{s_0^\frown n}$ con $s^\frown n \in [F_{i-1}]$. El árbol resultante T^i es superperfecto y cumple que

$$T^i \Vdash m_i \notin \gamma.$$

Notemos que por construcción, si $s \in [F_{i-1}]$ es un nodo interior de $[F_{i-1}]$ y para algún $n \in \omega$ $s^\frown n \in [F_{i-1}]$, entonces $s^\frown n \in T^i$. Ahora, consideremos un conjunto finito F_i tal que $F_{i-1} \supseteq F_i \in fin(split(T^i))$ con la siguiente propiedad: Para cada $s \in F_{i-1}$ para la cual existe un $n_s \in \omega$ tal que $s^\frown n_s \in T^i \setminus [F_{i-1}]$, existe $t \in F_i \setminus F_{i-1}$ tal que $s^\frown n_s \preccurlyeq t$. El árbol $\bigcap_{i\in\omega} T^i$ es superperfecto.

Ahora, sea $X = \{m_i : \imath \in \omega\}$ y $S' = \bigcap_{i\in\omega} T^i$. entonces, cuando $\mathscr{Y}_1$ tiene la PIFF

$$S' \Vdash X \cap \gamma = \varnothing,$$

en el otro caso

$$S' \Vdash X \subseteq \gamma.$$

Con esto obtenemos que ningún real de Miller Y es real divisor sobre $\mathfrak{M}$. Por tanto $\overline{\mathbb{M}}$ no añade reales divisores. $\square$

Sabemos entonces que $\overline{\mathbb{M}}$ no añade reales dominantes. De este modo, hemos encontrado que sí podemos agregar reales no acotados y no agregar reales divisores, así que el primero no implica el segundo.

Concluimos este capítulo rememorando las relaciones que hemos encontrado con ayuda de las nociones de forcing presentadas. Si $\mathbb{P}$ añade reales dominantes entonces $\mathbb{P}$ añade reales no acotados y añade reales divisores. Por otro lado el hecho que $\mathbb{P}$ añada reales no acotados y añada reales divisores no implica que añada reales dominantes. Por su parte es posible que $\mathbb{P}$ añada reales divisores pero no reales no acotados, así como es posible que $\mathbb{P}$ añada reales no acodados pero no añada reales divisores.

Capítulo 5

Otros ejemplos de forcing

Ya hemos estudiado nociones de forcing enfocadas en lo números reales, ahora en esta sección nos enfocaremos en distintas aplicaciones de la técnica de forcing, desde aplica ciones a la teoría de conjuntos hasta aplicaciones topológicas.

5.1. Colapso de Lévy

Comenzaremos con el Colapso de Lévy, un forcing que, como su nombre indica, fuerza a cardinales que en el modelo base son de cierto tamaño a ser de un tamaño menor en la extensión genérica.

Lema 5.1. *Sea λ es cardinal infinito en $\mathfrak{M}$ y $\kappa = \lambda^+$. Considerando $\mathbb{P} = F_n(\omega, \lambda, \aleph_0)$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $(\omega_1 = \kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Demostración. Si $\alpha < \kappa$, existe una función sobreyectiva de λ en α. Si G es filtro $\mathbb{P}$-genérico, $\bigcup G : \omega \longrightarrow \lambda$ es sobreyectiva, entonces $(\alpha \text{ es numerable})^{\mathfrak{M}[G]}$. Así, $(\kappa \leq \omega_1)^{\mathfrak{M}[G]}$.

Por otra parte $(|\mathbb{P}| = \lambda)^{\mathfrak{M}}$ con lo cual toda anticadena es a lo más de tamaño λ, i.e., $\mathbb{P}$ es λ^+-cc, como $\kappa = \lambda^+$, $\mathbb{P}$ es κ-cc lo cual implica que $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\geq \kappa$. Entonces $(\kappa \text{ es cardinal})^{\mathfrak{M}[G]}$ por tanto $(\omega_1 \leq \kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$.

Entonces $(\kappa = \omega_1)^{\mathfrak{M}[G]}$. □

Con este resultado hemos conseguido elegir un cardinal sucesor κ, y obtener un modelo genérico donde ω_1 coincide con el cardinal considerado, es decir, que en este nuevo modelo todos los ordinales menores que κ resultan ser numerables. Es fácil con esto notar el origen del nombre de "colapso". En lo sucesivo veremos la manera de colapsar cardinales límite.

Definición 5.2. *Para κ cardinal, consideramos el conjunto:*

$$\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa) = \{p : \ p \text{ es función} \wedge |p| < \omega \ \wedge dom(p) \subseteq \kappa \times \omega \\ \wedge \ \forall(\alpha, n) \in dom(p) : \ p(\alpha, n) \in \alpha\}.$$

Ordenamos a $p, q \in \mathbb{L}\mathrm{v}$ como: $q \leq p$ si y solo si $q \subseteq p$.

Así, el forcing del colapso de Lévy para un cardinal κ es $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$.

Lema 5.3. *Si κ es cardinal límite regular y mayor que ω, entonces $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$ es κ-cc.*

Demostración. Sea $\{p_\mu \in \mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa) : \ \mu < \kappa\}$ una familia en $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$. Como $\{dom(p_\mu) : \mu < \kappa\}$ es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad κ, por el lema del Δ-Sistema (1.27), existe $D \subseteq \{dom(p_\mu) : \mu < \kappa\}$ tal que $|D| = \kappa$ y D es un Δ-Sistema con raíz r.

Sea $B \subseteq \kappa$ tal que $D = \{dom(p_\mu) : \mu \in B\}$, tenemos que $|B| = \kappa$.
Por como se definieron los elementos de $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$, $p_\mu \restriction_r \subseteq r \times dom(r)$. Así, como κ es regular y hay pocas posibilidades para los $p_\mu \restriction_r$, tenemos que existe $C \subseteq B$ tal que $|C| = \kappa$ y para cada $\mu_0, \mu_1 \in C$: $p_{\mu_0} = p_{\mu_1}$.

Si $\delta, \gamma \in C$, como D es Δ-Sistema $dom(p_\delta) \cap dom(p_\gamma) = r$, con lo cual todos los p_μ con $\mu \in C$ son compatibles, entonces $\{p_\mu \in Lv(\kappa) : \ \mu < \kappa\}$ no es una anticadena. $\square$

Teorema 5.4. *Si (κ es límite regular no numerable)$^{\mathfrak{M}}$ y G es un filtro $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces $(\kappa = \omega_1)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Demostración. Como $\mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$ es κ-cc tenemos que (κ es cardinal)$^{\mathfrak{M}[G]}$. Se puede demostrar que $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de $\kappa \times \omega$ en κ, de manera análoga que se hizo para los forcings $Fn(I, j, \lambda)$ en el lema 3.2.

Dado $0 < \alpha < \kappa$ definimos $(\bigcup G)_\alpha = \big\{(n, \xi) : \ \big((\alpha, n), \xi\big) \in \bigcup G\big\}$. Veamos que $(\bigcup G)_\alpha$ es una función sobreyectiva de ω en α:

Supongamos que existe $n \in \omega$ y $\xi_0, \xi_1 \in \alpha$ tal que $(n, \xi_0) = (n, \xi_1)$, entonces $\big((\alpha, n), \xi_0\big), \big((\alpha, n\big), \xi_1) \in \bigcup G$ y como $\bigcup G$ es función, entonces $\xi_0 = \xi_1$, con lo cual $(\bigcup G)_\alpha$ está bien definida.

Como $dom(\bigcup G) = \kappa \times \omega$, entonces $dom\big((\bigcup G)_\alpha\big) = \omega$.

Dado $\xi < \alpha$, definimos $D_\xi = \{p \in \mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa) : \exists n \in \omega : ((\alpha, n), \xi) \in p\}$. Veamos que D_ξ es denso en $Lv(\kappa)$. Sea $p \in \mathbb{L}\mathrm{v}(\kappa)$ consideremos

$$q = p \cup \left\{ \Big(\big(\alpha, \text{máx}\{n \in \omega : (\alpha, n) \in dom(q)\}\big), \xi \Big) \right\},$$

con lo cual $q \leq p$ y $q \in D_\xi$ lo cual concluye que D_ξ es denso.

Así, $\big((\alpha, n), \xi\big) \in \bigcup G$, lo que implica que $\xi \in ran\big((\bigcup G)_\alpha\big)$.

Entonces, en efecto, $(\bigcup G)_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ es sobreyectiva, entonces (α es numerable)$^{\mathfrak{M}[G]}$, por lo tanto $\kappa = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$ □

Notemos que hemos conseguido algo interesante; para κ un cardinal sucesor o un cardinal límite regular no numerable del modelo base podemos hacer que coincida con ω_1 en la extensión genérica, pero combinando este hecho con las ideas propuestas en el capítulo anterior, con el forcing de Cohen y forcing iterado podríamos crear una sucesión de modelos de tal modo que en el primero de ellos la hipótesis del continuo sea falsa (agregando $\aleph_2$ reales de Cohen), en el segundo sea válida al colapsar $\aleph_2$ y seguir de esta manera infinitamente.

5.2. Diamante

Ahora veremos la consistencia relativa del principio combinatorio de Jensen, la propiedad Diamante ($\diamondsuit$), viendo además lo sencillo que resulta implicar con ella HC. La propiedad Diamante surge cuando el matemático Björn Jensen realiza su demostración de que si el universo de todos los conjuntos es igual al universo de los conjuntos construibles, entonces existe un árbol de Suslin.

Definición 5.5. *1. Sea $\mu \in ORD$ y $A \subseteq \mu$. Diremos que A es no acotado en μ si para todo $\alpha < \mu$ existe $a \in A$ tal que $\alpha < a$.*

2. Si $A \subseteq ORD$ y μ un ordinal límite. μ se dice cerrado en A si para todo $\delta < \mu$ ordinal límite si $A \cap \delta$ es no acotado en δ, entonces $\delta \in A$.

3. *Si μ es un ordinal límite. Un conjunto $A \subseteq \mu$ se denomina club si A es no acotado y μ es cerrado en A.*

4. *Si μ es un ordinal límite. Un conjunto $S \subseteq \mu$ se denomina estacionario si para todo club $C \subseteq \mu$, $C \cap S \neq \varnothing$.*

Definición 5.6. *$\diamondsuit$ es el siguiente enunciado:*
Existe una sucesión $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de conjuntos tal que para todo $\alpha < \omega_1$ se satisface que $A_\alpha \subseteq \alpha$ y si $X \subseteq \omega_1$ entonces $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es un conjunto estacionario.
A la sucesión $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ se le denomina $\diamondsuit$-sucesión o sucesión adivinadora.

En la siguiente proposición vemos lo sencillo que resulta demostrar que la propiedad $\diamondsuit$ implica HC, así que en todo modelo que ésta sea válida, también lo será dicha hipótesis.

Proposición 5.7. $\diamondsuit \Rightarrow HC$.

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una $\diamondsuit$-sucesión, definamos una función $\Phi : \wp(\omega) \longrightarrow \omega_1$ como sigue:
para $x \subseteq \omega$, por la propiedad diamante podemos considerar

$$\alpha_x = \text{mín}\{\beta > \omega : \ \beta \cap x = A_\beta\}$$

$$\text{Así, } \Phi(x) = \alpha_x.$$

Como $x \subseteq \omega$, $\omega < \alpha_x$ y $\alpha_x \cap x = A_{\alpha_x}$, se cumple que Φ es inyectiva, entonces $|\wp(\omega)| \leq \omega_1$. □

Teorema 5.8. $Con(\boldsymbol{ZFC}) \longrightarrow Con(\boldsymbol{ZFC}+\diamondsuit)$

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \{p : \ p$ es una función $\wedge\ dom(p) \in \omega_1 \wedge ran(p) \subseteq 2\}$, ordenado de manera que $p \leq q$ si y sólo si $p \supseteq q$.

Veamos que $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado. Sea $\{p_n : \ n \in \omega\}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{P}$ tal que para toda $n \in \omega$, $p_{n+1} \leq p_n$, sea $p = \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} p_n$ como ω_1 es regular se tiene que $p \in \mathbb{P}$ y además para toda $n \in \omega$, $p_n \geq p$. Entonces $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado y por lo tanto, en virtud del corolario 3.24, $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$.

Si G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, consideremos $\bigcup G$ y para cada $\alpha < \omega_1$ definimos $S_\alpha = \{\xi < \alpha : \bigcup G(\alpha+\xi) = 1\}$, veamos que $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión diamante en $\mathfrak{M}[G]$. Para esto, en $\mathfrak{M}[G]$, sean $X \subseteq \omega_1$ y C un club, consideremos; $p_0 \in G$ tal que

$$p_0 \Vdash (\hat{X} \subseteq \hat{\omega}_1 \text{ y } \hat{C} \text{ es un club}) \text{ y}$$

$$S = \{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\},$$

para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $D_\alpha = \{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \alpha \in \hat{C} \wedge \hat{X} \cap \alpha = \hat{S_\alpha}\}$ y veamos que es denso debajo de p_0. Si así fuera ya habríamos acabado, pues existiría $q \in G \cap D$ y como está en G tendríamos que $(S \cap C \neq \varnothing)^{\mathfrak{M}[G]}$, obteniendo que S es estacionario.

Para ver que D_α es denso debajo de p_0 sean $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 \dots$ y $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \dots$ sucesiones tales que

1. $dom(p_n) = \alpha_n$
2. $\forall \xi < \alpha_n \, (p_{n+1} \Vdash \xi \in \hat{X} \vee p_{n+1} \Vdash \xi \notin \hat{X})$
3. $p_{n+1} \Vdash \beta_n \in \hat{C}$

Sean $\alpha = sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ y $p = \bigcup_{n\in\omega} p_n$, se cumple que; $dom(p) = \alpha$, para toda $n \in \omega$, $p \leq p_n$, para toda $\xi < \alpha$, $p \Vdash \xi \in \hat{X}$ o $p \Vdash \xi \notin \hat{X}$ y $p \Vdash \{\beta_n : n \in \omega\} \subseteq \hat{C}$. Como $p \Vdash \hat{C}$ es un club, se tiene que $p \Vdash \alpha \in \hat{C}$. Sea $q \leq p$ tal que $dom(q) = \alpha + \alpha$ y $q(\alpha + \xi) = 1$ si y sólo si $p \Vdash \xi \in \hat{X}$, entonces por la naturaleza de q y la proposición tenemos que $q \Vdash \hat{X} \cap \hat{\alpha} = \hat{S_\alpha}$.

Con esto sólo hace falta ver la existencia de sucesiones como las que necesitamos, para esto definimos $\alpha_0 = dom(p_0)$ y $\beta_0 \in C$ tal que $\alpha_0 < \beta_0$. Luego supongamos que ya tenemos definidos α_n y p_n que cumplen lo que queremos, β_n lo enunciaremos más adelante pero dado a que son sucesiones distintas no representa un problema. Como $p_0 \Vdash C$ es no acotado , $p_n \leq p_0$ y $\alpha_n < \omega_1$ tenemos que $p_n \Vdash \exists \beta_n \in C : \alpha_n < \beta_n$, definimos recursivamente; $q_0 \leq p_n$ de tal modo que decide $0 \in X$, i.e., $q_0 \Vdash \hat{0} \in \hat{X}$ o $q_0 \Vdash 0 \notin \hat{X}$, para toda $\xi < \alpha_n$ tal que $\xi + 1 < \alpha_n$ consideramos $q_{\xi+1} \leq q_\xi$ que decida $\xi + 1 \in X$ y si ξ es límite, apoyados en el hecho de que $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado, consideramos q' de tal modo que para todo $\beta < \xi$, $q' \leq q_\beta$, de este modo elegimos $q_\xi \leq q'$

que decida $\xi \in X$.
Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado podemos considerar a $q \in \mathbb{P}$ tal que para toda $\xi < \alpha_n$, $p \leq q_\xi$ y con ello definimos

$$\alpha_{n+1} = dom(p_{n+1}) = dom(p) \cup \beta_n + 1,$$

$$p_{n+1}(\chi) = \begin{cases} p(\chi) & \text{si } \chi \in dom(p) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por construcción, α_{n+1}, β_n y p_{n+1} cumplen lo deseado. □

5.3. Hipótesis de Suslin

En lo consecuente veremos la consistencia relativa de la negación de la hipótesis de Suslin, para cumplir con esto, necesitamos recordar algunas definiciones y resultados que nos permitan obtener contexto y herramientas.

Definición 5.9. *1. Si X es conjunto línealmente ordenado que tiene un denso a lo más numerable, X es denominado separable.*

2. Si toda familia de abiertos ajenos dos a dos de X es a lo más numerable, X es c.c.c.

El siguiente teorema es una motivación para la hipótesis de Sulslin que por sí mismo resulta interesante, pues desde un contexto lógico nos dice que cierta teoría de órdenes lineales es completa.
A pesar de su relevancia omitiremos la demostración, al igual que con el lema que le sucede ya que sus demostraciones, aunque no son laboriosas, no son de utilidad para este trabajo en donde nos interesan dichos resultados por el contexto que conseguimos con ellos.

Teorema 5.10. *Cualquier orden lineal denso en sí mismo, sin extremos, completo y separable es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.*

Lema 5.11. *Si X es separable, entonces es c.c.c.*

Problema de Suslin: Si S es un conjunto linealmente ordenado, denso en si mismo, sin extremos, completo y c.c.c. ¿S es isomorfo a $\mathbb{R}$?

Definición 5.12. *Una línea de Suslin es un conjunto S denso en sí mismo y c.c.c pero no separable.*

Hipótesis de Suslin. No existen líneas de Suslin.

La pregunta de Sulsin surge del interés de intercambiar la hipótesis de separable por la de *c.c.c.* en el teorema 5.10. Su hipótesis es que, en efecto, basta con dicha hipótesis para asegurar el isomorfismo con $\mathbb{R}$.

Para poder exhibir un modelo en donde existan líneas de Suslin requerimos hablar de árboles con particularidades que nos impliquen lo deseado, de hecho, el teorema 5.14 caracteriza las líneas de Suslin con los árboles de Suslin.

Definición 5.13. 1. *Un árbol de Aronszajn es un árbol de altura $\aleph_1$ con todos sus niveles numerables y cuyas cadenas son a lo más numerables.*

2. *Un árbol de Suslin es uno de Aronszajn ccc (anticadenas).*

Hacemos notar que $(\omega^{<\omega_1}, \leq)$ es un árbol de altura $\aleph_1$ y para $\alpha < \omega_1$, $Niv_\alpha(\omega^{<\omega_1}) = \omega^\alpha$, por esto mismo no es de Aronszajn.

El siguiente teorema será de gran utilidad ya que procederemos a encontrar un árbol de Suslin en el modelo genérico para asegurar la existencia de líneas de Suslin, sin embargo su demostración puede ofuscar al resto de contenido de esta sección, además de que las herramientas necesarias se alejan de nuestro propósito principal, por ello será mejor omitir dicha demostración.

Teorema 5.14. *Existe una línea de Suslin si y solo si existe un árbol de Suslin.*

A partir de este punto comenzaremos a construir el árbol que vamos a requerir.

Lema 5.15. *Existe una sucesión $\{e_\alpha :\ \alpha < \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$*

1. *$e_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$ es inyectiva,*

2. *para cada $\beta < \alpha$, $|\{\xi < \beta :\ e_\alpha(\xi) \neq e_\beta(\xi)\}| < \aleph_0$,*

3. *$|\omega \setminus ran(e_\alpha)| = \aleph_0$*

Demostración. Para $s, t \in\ {}^{<\omega_1}\omega_1$ definimos la relación de equivalencia:

$$s \sim t \text{ si y solo si } dom(s) = dom(t)$$
$$\text{y } |\{\xi < dom(s) : \ s(\xi) \neq t(\xi)\}| < \aleph_0.$$

Construiremos la sucesión por recursión. Sea $e_0 = \varnothing$. Suponiendo que para α ordinal sucesor tenemos e_α, consideramos $n \in \omega \setminus ran(e_\alpha)$ y definimos $e_{\alpha+1} = e_\alpha \cup \{(\alpha, n)\}$. Para γ límite, supongamos que para toda $\alpha < \gamma$ tenemos definida e_α. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ sucesión cofinal en γ. Queremos construir una sucesión $\{t_n : n \in \omega\}$ donde para cada $n \in \omega$: $t_n : \alpha_n \to \gamma$ sea inyectiva, $t_n \sim e_{\alpha_n}$ y $t_{n+1} \restriction_{\alpha_n} = t_n$. Sea $t_0 = e_0$. Supongamos que para todo $i < n$ tenemos definido t_i, consideramos para $\beta < \alpha_{n+1}$

$$t_{n+1}(\beta) = \begin{cases} t_n(\beta) & \text{si} \quad \beta < \alpha_n \\ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) & \text{si} \quad \alpha_n \leq \beta \ \ y \ \ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) \notin ran(t_n) \\ min\Big(\omega \setminus \big(ran(t_n) \cup ran(e_{\alpha_{n+1}})\big)\Big) & \text{si} \quad \alpha_n \leq \beta \ \ y \ \ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) \in ran(t_n) \end{cases}$$

t_{n+1} cumple con todo lo que deseamos.
Sea $t = \bigcup_{n\in\omega} t_n : \gamma \longrightarrow \omega$ inyectiva. Definimos $e_\gamma : \gamma \longrightarrow \omega$ como:

$$e_\gamma(\beta) = \begin{cases} t(\alpha_{2n}) & \text{si} \quad \beta = \alpha_n \\ t(\beta) & \text{si} \quad \beta \neq \alpha_n \end{cases}$$

Como t es inyectiva, e_γ también es inyectiva. Sea $\alpha < \gamma$, existe $n \in \omega$ tal que $\alpha < \alpha_n$, con esto $e_\gamma \restriction_\alpha \sim t_n \restriction_\alpha$ entonces $e_\gamma \restriction_\alpha \sim e_{\alpha_{n+1}} \restriction_\alpha \sim e_\alpha$, entonces

$$|\{\xi < \alpha : \ e_\alpha(\xi) \neq e_\gamma(\xi)\}| < \aleph_0.$$

Además $\{t(\alpha_{2n+1}) : n \in \omega\} \subseteq \omega - ran(e_\gamma)$. Así, se cumplen las tres propiedades deseadas. □

De este modo, usando la sucesión $\{e_\alpha : \ \alpha < \omega_1\}$, definimos

$$T = \bigcup \{f \mid \exists \alpha < \omega_1 : \big(f : \alpha \longrightarrow \omega \ \wedge \ f \sim e_\alpha\big) \ \wedge \ f \text{ es inyectiva}\}.$$

Ordenado por la contención.

Lema 5.16. *T es un árbol de Aronszajn.*

Demostración. Realizaremos la demostración en tres partes:
Afirmación 1 $alt_T = \aleph_1$.

Para esto, primero notemos que T es un subárbol de ${}^{\omega_1}\omega$. Claramente $T \subseteq {}^{\omega_1}\omega$, dados $x \in T$ y $y \in ({}^{\omega_1}\omega)_x$ se cumple que $y \subseteq x$ y para algún $\beta < \alpha$, $y : \beta \longrightarrow \omega$, por tanto $x \restriction_\beta = y$, además $x \sim e_\alpha$ y $e_\alpha \restriction_\beta \sim e_\beta$ con lo cual $y \sim e_\beta$ y como x es inyectiva y también lo es, por lo tanto $y \in T$.

Por otro lado, para cada $\alpha < \omega_1$

$$Niv_\alpha(T) = \{f : \alpha \longrightarrow \omega |\ f \sim e_\alpha \ \wedge \text{ f es inyectiva}\} \neq \varnothing$$

Por tanto $alt_T = \aleph_1$.

Afirmación 2. Los niveles de T son numerables.

$$\begin{aligned} |Niv_\alpha(T)| &= |\{f : \alpha \longrightarrow \omega |\ f \sim e_\alpha \ \wedge \text{ f es inyectiva}\}| \\ &= \left| \bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} \{t \in {}^{\alpha}\omega :\ t \restriction_{\alpha \setminus x} = e_\alpha \restriction_{\alpha \setminus x}\} \right| \end{aligned}$$

Pero éste último es unión numerable de conjuntos numerables por tanto es de cardinalidad $\aleph_0$

Afirmación 3. T no tiene cadenas no numerables.

Supongamos que $\mathcal{C} \subseteq T$ es una cadena no numerable, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es una función inyectiva tal que $dom\left(\bigcup \mathcal{C}\right) = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} dom(c) = \omega_1$, por tanto $\bigcup \mathcal{C} : \omega_1 \longrightarrow \omega$ es inyectiva, lo cual es una contradicción.

De este modo vemos que T es un árbol de Aronszajn. $\square$

Lema 5.17. *T no es un árbol de Suslin.*

Demostración. Para $n \in \omega$ definimos

$$E_n = \{s \in T : \exists \alpha < \omega_1 : dom(s) = \alpha + 1 \wedge s(\alpha) = n\}.$$

Veamos que E_n es una anticadena. Supongamos que existen $s, t \in E_n$ tales que $s \subseteq t$, entonces existen $\beta, \alpha \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$ tales que $dom(s) = \beta + 1$ y $dom(t) = \alpha + 1$, pero $s(\beta) = t(\beta) = n = t(\alpha)$ lo cual es una contradicción ya que t es inyectiva.

Ahora, no es difícil ver que $\bigcup_{\alpha<\omega_1} Niv_{\alpha+1}(T) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Pero como para cada $\alpha < \omega_1$, $Niv_\alpha(T) \neq \varnothing$, entonces

$$\aleph_0 < |\bigcup_{\alpha<\omega_1} Niv_{\alpha+1}(T)| \leq |\bigcup_{n\in\omega} E_n|.$$

Así, existe $n \in \omega$ tal que $\aleph_0 < |E_n|$. $\square$

Dado un real $r \in \omega^\omega$, definimos

$$T_r = r \circ T = \{r \circ f : f \in T\}.$$

T_r continua siendo un árbol de Aronszajn.

Lema 5.18. *Si $\mathbb{C}$ es el forcing de Cohen, $A \in \mathfrak{M}$, $X \subseteq A$, $X \in \mathfrak{M}[G]$ y $(X$ es no numerable$)^{\mathfrak{M}[G]}$, entonces existe $Y \in \mathfrak{M}$ tal que $Y \subseteq X$ y $(Y$ es no numerable$)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Demostración. Sea $\sigma \in M^{\mathbb{C}}$ tal que $X = \sigma_G$, para cada $a \in X$ existe $p_a \in G$ que cumple que $p_a \Vdash \hat{a} \in \sigma$.
Como ($\mathbb{C}$ es numerable$)^{\mathfrak{M}[G]}$ existe $p \in G$ tal que $Y_0 = \{a \in A : p_a = p\}$ es no numerable. Considerando $Y = \{a \in A : p \Vdash \hat{a} \in \sigma\} \in \mathfrak{M}$ tenemos que $Y \subseteq X$ y (Y es no numerable$)^{\mathfrak{M}[G]}$. $\square$

Teorema 5.19. *Si $\mathbb{C}$ es el forcing de Cohen, G es $\mathbb{C}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$ y $r = \bigcup G$, entonces $\mathfrak{M}[G] \models T_r$ es un árbol de Suslin.*

Demostración. Resta mostrar que T_r tiene la c.c.c.

Sean $\mathcal{A} \subseteq \omega_1$ no numerable, por el lema 5.18 podemos asumirlo en $\mathfrak{M}$, y $S = \{f_\xi \in T : \xi \in \mathcal{A}\}$ tal que para cada $\xi \in \mathcal{A}$, $dom(f_\xi) = \alpha_\xi$ y si $\xi_0 < \xi_1$

entonces $\alpha_{\xi_0} \leq \alpha_{\xi_1}$.

Veamos que $\{r \circ f_\xi : \xi \in \mathcal{A}\}$ no es una anticadena, para ello veamos que el conjunto

$$D_{\mathcal{A}} = \{q \in \mathbb{P} | \ \exists \xi_0, \xi_1 \in \mathcal{A} : \ q \Vdash r \circ f_{\xi_0} \subseteq r \circ f_{\xi_1}\}$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Supongamos que $dom(p) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y para cada $\xi \in \mathcal{A}$ consideremos el conjunto

$$\varepsilon_\xi = f_\xi^{-1}[n] = \{\gamma \in \alpha_\xi : \ f_\xi(\gamma) < n\},$$

como f_ξ es inyectiva, este conjunto es finito.

Notemos que $\{\varepsilon_\xi : \ \xi \in \mathcal{A}\}$ es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad $\aleph_1$. Por el lema del Δ-sistema, existen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $B \in [\omega_1]^{\aleph_0}$ tales que $|\mathcal{B}| = \aleph_1$ y $\{\varepsilon_\xi : \ \xi \in \mathcal{B}\}$ forma un Δ-sistema con raíz B.

Notemos que para cada $x \in B$, $|\{f_\xi(x) : \ \xi \in \mathcal{B}\}| < \aleph_0$, por tanto existe $m \in \{f_\xi(x) : \ \xi \in \mathcal{B}\}$ tal que $|\{\xi \in \mathcal{B} : \ f_\xi(x) = m\}| = \aleph_1$. Por ello, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada $x \in B$ y cualesquiera $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{B}$ con $\xi_0 < \xi_1$, se tiene que $f_{\xi_0}(x) = f_{\xi_1}(x)$.

Por otra parte, podemos construir una sucesión creciente $\{\alpha_\delta : \ \delta \in \omega_1\}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que para cualesquiera $\gamma, \delta \in \omega_1$ con $\gamma < \delta$ tenemos que

$$\forall \xi \in dom(f_{\alpha_\gamma}) : (f_{\alpha_\delta}(\xi) < n \Rightarrow \xi \in B).$$

> Realizaremos esta demostración por recursión sobre ω_1. Sean $\alpha_0 = \bigcap \mathcal{B}$ y $B_0 = \mathcal{B}$. Supongamos que para todo $\gamma < \delta$ con $\delta \in \omega_1$ hemos definido $\alpha_\gamma \in \omega_1$ y conjuntos no numerables $B_\gamma \subset \mathcal{B}$. Si $\delta = \eta + 1$, entonces definimos
>
> $$B_\delta = \{\beta \in (B_\eta \setminus \{\alpha_\eta\}) : \ \forall \xi \in dom(f_{\alpha_\eta}) : \ (f_\beta(\xi) < n \Rightarrow \xi \in B)\}$$
>
> veamos que es no numerable, para ello consideremos $(B_\eta \setminus \{\alpha_\eta\}) \setminus B_\delta$, que consiste de todas las $\beta \in (B_\eta \setminus \{\alpha_\eta\})$ tales que para algún $\xi \in dom(f_{\alpha_\eta})$, $f_\beta(\xi) \in n \setminus B$. Ahora, como para $\beta, \beta' \in \mathcal{B}$ distintos se cumple que

$(\varepsilon_\beta \cap \varepsilon_{\beta'}) \setminus B = \varnothing$ y $dom(f_{\alpha_\eta})$ es numerable, el conjunto $(B_\eta \setminus \{\alpha_\eta\}) \setminus B_\delta$ es numerable, como B_η es no numerable, entonces también lo es B_δ.
Si δ es límite, definimos $B_\delta = \bigcap_{\gamma<\delta} B_\gamma$, como para $\eta < \delta$ cada $B_\eta \setminus B_{\eta+1}$ es numerable y $\delta < \omega_1$ tenemos que B_δ es no numerable.
En cualquier caso definimos $\alpha_\delta = \bigcap B_\delta$.

Con esto podemos suponer que para cualesquiera $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{B}$ con $\xi_0 < \xi_1$, $(\varepsilon_{\xi_1} \setminus B) \cap dom(f_{\xi_0}) = \varnothing$.

Fijando $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{B}$ con $\xi_0 < \xi_1$, consideremos

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \alpha_{\xi_0} :\ f_{\xi_0}(\gamma) \neq f_{\xi_1}(\gamma)\},$$

como $f_{\xi_0} \sim e_{\alpha_{\xi_0}}$, $f_{\xi_1} \sim e_{\alpha_{\xi_1}}$ y $e_{\alpha_{\xi_0}} \sim e_{\alpha_{\xi_1}}$, entonces $\mathcal{F}$ es finito.
Sea $q \subseteq p$ definido como $q = p \cup \Big\{ \Big(f_{\xi_1}(\gamma), p\big(f_{\xi_0}(\gamma)\big)\Big) :\ \gamma \in \mathcal{F} \Big\}$.

Resta probar que q está bien definida, sabemos que p es función por lo cual nuestro punto de interés está en las parejas que le hemos agregado para definir a q, es decir, nos interesa lo que sucede en cada $\gamma \in \mathcal{F}$. Sea $\gamma \in F$. Consideremos los siguientes casos

- Si $\gamma \in B$, tenemos que $f_{\xi_0}(\gamma) = f_{\xi_1}(\gamma)$ y por tanto $q(f_{\xi_0}(\gamma)) = q(f_{\xi_1}(\gamma))$.
- Si $\gamma \notin B$, supongamos que $f_{\xi_1}(\gamma) < n$ entonces $\gamma \in \varepsilon_{\xi_1}$, con lo cual $\gamma \in (\varepsilon_{\xi_1} \setminus B) \cap dom(f_{\xi_0})$, lo cual hemos dicho que no puede ocurrir y por tanto $f_{\xi_1}(\gamma) \geq n$. Por tanto $f_{\xi_1}(\gamma) \notin dom(p)$

Ahora, dado $\varepsilon < \xi_0$, si $f_{\xi_0}(\varepsilon) \neq f_{\xi_1}(\varepsilon)$ y $f_{\xi_0}(\varepsilon), f_{\xi_1}(\varepsilon) \in dom(q)$, entonces $\varepsilon \in \mathcal{F}$ y por como definimos a q se cumple que $q(f_{\xi_1}(\varepsilon)) = p(f_{\xi_0}(\varepsilon))$, por otra parte como $f_{\xi_0}(\varepsilon) \in dom(p)$, $q(f_{\xi_0}(\varepsilon)) = p(f_{\xi_0}(\varepsilon))$, con lo cual $q(f_{\xi_0}(\varepsilon)) = q(f_{\xi_1}(\varepsilon))$.

Por lo tanto, para toda $\varepsilon < \xi_0$ tal que $f_{\xi_0}(\varepsilon), f_{\xi_1}(\varepsilon) \in dom(q)$, $q \Vdash f_{\xi_0}(\epsilon) = f_{\xi_1}(\epsilon)$, así, $q \Vdash r \circ f_{\xi_0}(\epsilon) = r \circ f_{\xi_1}(\epsilon)$ y por tanto

$$q \Vdash r \circ f_{\xi_0} \subseteq r \circ f_{\xi_1}.$$

De este modo T_r tiene la c.c.c y por tanto es un árbol de Suslin

$\square$

Corolario 5.20. $Con(\boldsymbol{ZFC}) \longrightarrow Con(\boldsymbol{ZFC}+\neg\, \boldsymbol{HS})$

Notamos que este resultado nos da información sobre el modelo de Cohen, ya que en éste mismo la hipótesis de Suslin es falsa, con lo cual podemos dilucidar más de las consecuencias de añadir reales.
La Hipótesis de Suslin resulta ser un resultado independiente, es conocido que $MA(\omega_1)$ implica su veracidad, mientras que otra manera de encontrar un modelo donde su negación sea válida es por medio de la propiedad $\diamondsuit$, ya que la presencia de una sucesión $\diamondsuit$ implica la existencia de una línea de Suslin.

5.4. Producto de CCC.

Es un problema muy conocido saber si el producto de espacios c.c.c. es también c.c.c., o bien saber qué tamaño tendrá la celularidad de dicho producto. Por un lado, si se asume $MA + \neg HC$ la afirmación es cierta. Y si se asume HC es posible encontrar un contraejemplo. También se sabe, por ejemplo, que el producto de dos líneas de Suslin tiene celularidad $\aleph_1$ mientras que el producto de cualquier familia numerable de espacios c.c.c. tiene celularidad a lo más 2^ω.
En esta sección nos enfocaremos en mostrar que añadiendo los suficientes reales de Cohen podemos hacer que el producto de espacios c.c.c. no solo no sea c.c.c. sino que tenga celularidad acotada inferiormente como nosotros deseemos.

Comenzaremos con una definición necesaria para entender el resultado.

Definición 5.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico*

1. *La celularidad de X es el cardinal*

$$c(X) = \aleph_0 \cdot sup\{|U| : \ U \subseteq \tau \ \wedge \ U \ \textit{es familia ajena}\}.$$

Notemos que un espacio X es c.c.c., como en la definición 5.9, si y solo si $c(X) = \aleph_0$.

Lema 5.22. *Si κ es un cardinal, existe un forcing $\mathbb{P}$ tal que si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{M}[G] \models$ Existen X, Y espacios c.c.c. tales que $c(X \times Y) \geq \kappa$.*

Demostración. Sea $P : [\kappa]^2 \to 2$ una función.
Sean $H_0 = \{h \subseteq \kappa : \; P([h]^2) = \{0\}\}$, $H_1 = \{h \subseteq \kappa : \; P([h]^2) = \{1\}\}$, definimos

$$\begin{aligned} X =&\{h \subseteq \kappa : \; h \text{ es maximal en } H_0 \text{ respecto a la contención}\} \text{ y} \\ Y =&\{h \subseteq \kappa : \; h \text{ es maximal en } H_1 \text{ respecto a la contención}\}, \end{aligned}$$

i.e., para cada $h \in H_0$ la imagen bajo P de los pares no ordenados de h es 0 y en X se encuentran los conjuntos que resultan ser maximales con esta particularidad, análogamente para Y.

Para todo $a \in [\kappa]^{<\aleph_0}$ consideramos

$$B_X(a) = \{h \in X : a \subseteq h\} \qquad \text{y} \qquad B_Y(a) = \{h \in Y : a \subseteq h\}.$$

Dotamos a X y a Y con la topología generada por la familia

$$\{B_X(a) : \; a \in [\kappa]^{<\aleph_0}\} \qquad \text{y} \qquad \{B_Y(a) : a \in [\kappa]^{<\aleph_0}\}.$$

respectivamente.

Afirmación $\big\{B_X\big(\{\alpha\}\big) \times B_Y\big(\{\alpha\}\big) : \alpha \in \kappa\big\}$ es una familia en el espacio producto $X \times Y$, que es ajena, de cardinalidad κ y consiste en conjuntos abiertos no vacíos.

> Por cada $\alpha \in \kappa$, como $[\{\alpha\}]^2 = \varnothing$, tenemos que $P\Big(\big[\{\alpha\}\big]^2\Big) \subseteq \{0\}$ y $P\Big(\big[\{\alpha\}\big]^2\Big) \subseteq \{1\}$, es decir, $\{\alpha\} \in B_X\big(\{\alpha\}\big)$ y $\{\alpha\} \in B_Y\big(\{a\}\big)$. Por lo tanto, cada conjunto $B_X\big(\{\alpha\}\big) \times B_Y\big(\{\alpha\}\big)$ es no vacío y abierto.
>
> Para $\alpha, \gamma \in \kappa$ con $\alpha \neq \gamma$, tenemos que $P\big(\{\alpha, \gamma\}\big) = 0$ o $P\big(\{\alpha, \gamma\}\big) = 1$. En el primer caso $B_Y\big(\{\alpha\}\big) \cap B_Y\big(\{\gamma\}\big) = \varnothing$ y en el segundo $B_X\big(\{\alpha\}\big) \cap B_X\big(\{\gamma\}\big) = \varnothing$. En ambos casos,
>
> $$\Big(B_X\big(\{\alpha\}\big) \times B_Y\big(\{\alpha\}\big)\Big) \cap \Big(B_X\big(\{\gamma\}\big) \times B_Y\big(\{\gamma\}\big)\Big) = \varnothing.$$

Notemos que la construcción que hemos realizado es válida sin importar la función P. El problema ahora se reduce a encontrar una P de tal modo que X e Y sean espacios c.c.c.

Consideremos el forcing $\mathbb{P} = Fn\big([\kappa]^2,\ 2,\ \aleph_0\big)$.
Para cada condición $p \in \mathbb{P}$ denotamos al soporte de la misma p por:

$$supp(p) = \text{mín}\{d \subset \kappa :\ dom(p) \subseteq [d]^2\}.$$

Procediendo análogamente como en el lema 3.13 obtenemos que $\mathbb{P}$ es *ccc*.
Sea G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$. Consideramos a $\bigcup G = P : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$.
Ahora, veamos que X e Y definidos como antes son ambos c.c.c. en $\mathfrak{M}[G]$.

Supongamos que en X hay una familia ajena $\mathcal{A} = \{B_X(a_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$.
Usando el lema del $\Delta - sistema$ (1.27) para $\{a \in [\kappa]^{<\aleph_0} :\ B_X(a) \in \mathcal{A}\}$ podemos restringirnos al caso en que ésta última familia es ajena, i.e., en X hay una familia ajena $\mathcal{A} = \{B_X(a_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ donde si $\alpha \neq \beta$, entonces $a_\alpha \neq a_\beta$.
Sea $p_0 \in \mathbb{P}$ que fuerza lo que acabamos de mencionar, i.e.,

$$\begin{aligned} p_0 \Vdash \hat{\mathcal{A}} = \{\widehat{B_X(a_\alpha)} : \alpha \in \omega_1\} \\ \wedge\ \alpha \neq \beta \Rightarrow \hat{a_\alpha} \cap \hat{a_\beta} = \varnothing\ \wedge\ \widehat{B_X(a_\alpha)} \cap \widehat{B_X(a_\beta)} = \varnothing. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahora, para cada $n \in \omega$, sea $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P}$, tal que

- $p \in \mathbb{P}_n$ implica que existe $e(p,n) \in \mathfrak{M}$ de tal modo que $p \Vdash \widehat{e(p,n)} = \hat{a_n}$
- $\mathbb{P}_n$ es una anticadena en $\mathbb{P}$.

Dado que $\mathbb{P}$ es c.c.c. sabemos que $\mathbb{P}_n$ numerable.

Sea $F = \bigcup\{e(p,n) \cup supp(p) :\ p \in \mathbb{P}_n,\ n \in \omega\}$. F es unión numerable de conjuntos numerables por lo cual es numerable, además $F \in \mathfrak{M}$.

Por 5.1, existen $p_1 \in \mathbb{P}$ con $p_1 \leq p_0$, $\gamma \in \omega_1$ y $e_1 \in [\kappa]^{\aleph_0} \cap \mathfrak{M}$, tales que

$$p_1 \Vdash \hat{e_1} = \hat{a_\gamma}\ \wedge\ \hat{a_\gamma} \cap \hat{F} = \varnothing.$$

Como $|supp(p_1)| \leq \aleph_0$, podemos extender p_1, a saber $|sup(p_1)|+1$ veces, para obtener una condición $p_2 \leq p_1$, un $n \in \omega$, y $e_2 \in [\kappa]^{\aleph_0} \cap$ tales que

$$p_2 \Vdash \hat{a_n} = \hat{e_2}\ \wedge\ \hat{a_n} \cap \widehat{supp(p_1)} = \varnothing.$$

Ahora definimos una condición p_3 como sigue:

$$dom(p_3) = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in e_1,\ \beta \in e_2\} \text{ y } rango(p_3) = \{1\}.$$

Entonces $p_4 = p_2 \cup p_3$ es una condición que fuerza todo lo que fuerzan p_0, p_1 y p_2. Más aún, $p_4 \Vdash a_\gamma\hat{,} a_n \in \hat{h} \Rightarrow P\big([\hat{h}]^2\big) = 0$ por tanto

$$p_4 \Vdash \hat{B_X}(a_\gamma) \cap \hat{B_X}(a_n) \neq \varnothing.$$

Lo cual contradice 5.1, por tanto X es c.c.c. y análogamente se verifica que Y también lo es. $\square$

5.5. El teorema de Hajnal y Juhasz

Otro resultado interesante en topología es el teorema 5.24, que, además, en su demostración podemos observar una noción de forcing con matices combinatorios.

Antes de enunciar el resultado, mencionaremos un corolario del teorema 3.22

Corolario 5.23. *Si $\mathbb{P}$ es κ-cerrado, entonces $\wp(\kappa)^{\mathfrak{M}} = \wp(\kappa)^{\mathfrak{M}[G]}$.*

Teorema 5.24. *(Hajnal y Juhasz) La existencia de un espacio regular hereditariamente separable, de cardinalidad superior a 2^ω es compatible con **ZFC**.*

Demostración. Sean $\mathfrak{M}$ cualquier modelo en el que se satisface HC y κ un cardinal fijo. Definimos un forcing $\mathbb{P}$, donde una condición p es una tripleta $p = \langle {}^{\gamma(p)}2,\ A_p\ , \mathscr{F}_p\rangle$ donde:

- $\gamma(p) \in \omega_1$
- $2 = \{0, 1\}$ espacio discreto.
- $A_p \in Fn(\kappa,\ {}^{\gamma(p)}2,\ \aleph_1)$
- $\mathscr{F}_p$ es una familia numerable de subconjuntos de $dom(A_p)$.

Para aclarar esta definición notemos que para algún $n \in [\kappa]^{\leq\aleph_0}$ tenemos que $dom(A_p) = n$. Así, $A_p :\ n \longrightarrow\ {}^{\gamma(p)}2$ y para cada $\alpha \in n$, $A_p(\alpha) \in\ {}^{\gamma(p)}2$, i.e., $A_p(\alpha) : \gamma(p) \longrightarrow \{0, 1\}$. Mientras $\mathscr{F}_p \in \big[\wp\big(dom(A_p)\big)\big]^{\leq\aleph_0}$.

Ordenamos a $p, q \in \mathbb{P}$ como: $p \leq q$ si y solo si:

1. $\gamma(q) \leq \gamma(p)$,
2. $dom(A_q) \subseteq dom(A_p)$,
3. Para cada $\beta \in dom(A_q)$, $A_q(\beta) \subseteq A_p(\beta)$,
4. $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_p$ y
5. Si $\gamma(p) \setminus \gamma(q) \neq \varnothing$, entonces si f es una función parcial numerable de $\gamma(p) \setminus \gamma(q)$ a $\{0,1\}$, entonces para cada $E \in \mathscr{F}_q$ existe $\beta(E)$ tal que $f \subseteq A_p\big(\beta(E)\big)$.

Sea G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathfrak{M}$. En $\mathfrak{M}[G]$ definimos para cada $\alpha \in \kappa$, $x_\alpha = \bigcup\{A_p(\alpha) :\ p \in G\}$ y con ello $X = \{x_\alpha :\ \alpha \in \kappa\}$.

Afirmación 1. $X \subseteq {}^{\omega_1}2$ y para $\alpha, \beta \in \kappa$ con $\alpha \neq \beta$, $x_\alpha \neq x_\beta$.

En efecto. Sea $\alpha \in \kappa$, veamos que $x_\alpha \in {}^{\omega_1}2$, para $\gamma < \omega_1$ definimos

$$D_\gamma = \big\{p \in \mathbb{P} :\ \gamma \in dom\big(A_p(\alpha)\big)\big\}.$$

Veamos que D_γ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Si $\gamma < \gamma(p)$ consideremos $q \in \mathbb{P}$ tal que $\gamma(p) = \gamma(q)$, $dom(A_q) = dom(A_p) \cup \{\alpha\}$ y de modo que se cumplan 3. y 4. Si $\gamma(p) < \gamma$ consideramos $q \in \mathbb{P}$ tal que $\gamma(q) = \gamma + 1$, $dom(A_q) = dom(A_p) \cup \{\alpha\}$ y de modo que se cumplan 3., 4. y 5.
Así, $q \leq p$ y $q \in D_\gamma$, i.e., D_γ es denso en $\mathbb{P}$, además $D_\gamma \in \mathfrak{M}$.

Para cada $\gamma < \omega_1$ consideramos $p \in G \cap D_\gamma$, con lo cual $\gamma \in dom(A_p(\alpha))$, entonces $\gamma \in dom(x_\alpha)$. Como esto $dom(x_\alpha) = \omega_1$.

Supongamos que x_α no es función, entonces existe algún $\beta \in \omega_1$ tal que $(\beta, 0), (\beta, 1) \in x_\alpha$, entonces existen $p_0, p_1 \in G$ tales que $(\beta, 0) \in A_{p_0}(\alpha)$ y $(\beta, 1) \in A_{p_1}(\alpha)$. Consideramos $r \in G$ extensión común, entonces $A_{p_0}(\alpha), A_{p_1}(\alpha) \subseteq A_r(\alpha)$ con lo cual $(\beta, 0), (\beta, 1) \in A_r(\alpha)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_\alpha \in {}^{\omega_1}2$

Para $\alpha, \beta \in \kappa$ veamos que si $\alpha \neq \beta$ entonces $x_\alpha \neq x_\beta$. Definimos

$$D_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} :\ \exists \lambda \in \gamma(p) :\ A_p(\alpha)(\lambda) = 1 - A_p(\beta)(\lambda)\}.$$

Veamos que $D_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$, consideramos $q \in \mathbb{P}$ como $\gamma(q) = \gamma(p) + 1$, $dom(A_q) = dom(A_p) \cup \{\alpha, \beta\}$ y de modo que se cumplan 3., 4. y 5., pero tal que $A_q(\alpha)\big(\gamma(p)\big) = 1 - A_q(\beta)\big(\gamma(p)\big)$. Con esto $q \leq p$ y $p \in D_{\alpha,\beta}$.
Sea $p \in G \cap D_{\alpha,\beta}$, entonces existe $\lambda \in \gamma(p)$ tal que $A_p(\alpha)(\lambda) = 1 - A_p(\beta)(\lambda)$, entonces $x_\alpha(\lambda) = 1 - x_\beta(\lambda)$ con lo cual $x_\alpha \neq x_\beta$.

Afirmación 2. $\mathbb{P}$ no colapsa cardinales.

Sea $Q \subseteq \mathbb{P}$ tal que $|Q| > 2^\omega$. Como para cada $p \in \mathbb{P}$, $\gamma(p) \in \omega_1$, existe $Q' \subseteq Q$, tal que $|Q'| > 2^\omega$ y para cualesquiera $p, q \in Q'$, $\gamma(p) = \gamma(q) = \epsilon \in \omega_1$.
Definimos recursivamente para cada $\eta \in \omega_1$: $Q_\eta \subseteq Q'$ y $S_\eta \subset \kappa$

I. $Q_0 = \{p_0\}$ donde $p_0 \in Q'$.

II. $S_\eta = \bigcup\{dom(Ap) : p \in Q_\eta\}$.

III. Considerando la relación de equivalencia $p \sim_\eta q$ si y solo si $A_p \restriction_{S_\eta} = A_q \restriction_{S_\eta}$

$$Q_{\eta+1} = Q_\eta \cup \{ \text{ un elemento de cada clase de equivalencia bajo } \sim_\eta \text{ que también pertenezca a } Q'\}.$$

IV. Si η es límite, $Q_\eta = \bigcup\{Q_\beta : \beta < \eta\}$.

Se puede mostrar por inducción que $|Q_\eta|, |S_\eta| \leq 2^\omega$.

Sea $q \in Q'$. Como $|A_q| \leq \aleph_0$, existe $\eta \in \omega_1$ tal que $dom(A_q) \cap S_{\omega_1} = dom(A_q) \cap S_\eta$.
Sea $p \in [q]_{\sim\eta}$ tal que $p \in Q_{\eta+1}$. Veamos que p y q son compatibles. Definimos la condición r como sigue: $\gamma(r) = \epsilon$, $Ar = A_p \cup A_q$, $F_r = F_p \cup F_q$. Claramente, $r \leq p$ y $r \leq q$.
Así, concluimos que $c(\mathbb{P}) \leq 2^\omega$.

Además, por como está definido, $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado. Así, $\mathbb{P}$ preserva cardinales $\leq \aleph_0$, además de preservar a $\aleph_1$ y como $c(\mathbb{P}) \leq 2^\omega$ y en $\mathfrak{M}$ se verifica HC, $c(\mathbb{P}) \leq \aleph_1$, i.e., $\mathbb{P}$ es $\aleph_2$-c.c. lo cual implica que preserva cardinales $\geq \aleph_2$. Por tanto $\mathbb{P}$ preserva cardinales.

Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado, por el corolario 5.23, se satisface la igualdad: $\big(\wp(\aleph_0)\big)^{\mathfrak{M}} = \big(\wp(\aleph_0)\big)^{\mathfrak{M}[G]}$. Como en $\mathfrak{M}$ se satisface HC, entonces tenemos que $\big(\wp(\aleph_0)\big)^{\mathfrak{M}[G]} = \big(\wp(\aleph_0)\big)^{\mathfrak{M}} = (\aleph_1)^{\mathfrak{M}} = (\aleph_1)^{\mathfrak{M}[G]}$, i.e., $\mathfrak{M}[G]$ también verifica HC.
Considerando $\kappa > 2^{\omega}$ en $\mathfrak{M}$, esta desigualdad se conserva en $\mathfrak{M}[G]$ y tenemos que $|X| = \kappa$.

Ahora veamos que X como un subespacio de ${}^{\omega_1}2$ es hereditariamente separable.
En $\mathfrak{M}[G]$ definimos $A = \bigcup\{A_p : p \in G\}$, que es una función uno a uno de κ en X.
Sea Y subespacio de X y p_0 una condición que fuerce esto. Podemos encontrar un subconjunto numerable $Z_0 \subseteq \kappa$ y una condición $p_1 \leq p_0$ tal que $p_1 \Vdash \pi_0 A(Z_0)$ es denso en $\pi_0(Y)$, donde π_0 es la proyección de ${}^{\omega_1}2$ a la cara ${}^{\gamma(p_0)}2$.
A continuación, podemos encontrar un subconjunto numerable $Z_1 \subseteq \kappa$ con $Z_0 \subseteq Z_1$ y una condición $p_2 \leq p_1$ tal que $p_2 \Vdash$ "$\pi_1 A(Z_1)$ es denso en $\pi_1 Y$", donde π_1 es el proyección de ${}^{\omega_1}2$ en la cara ${}^{\gamma(p_1)}2$, seguimos el mismo proceso para cada $n \in \omega$.

Sabiendo que $\mathbb{P}$ es $\aleph_0$-cerrado, definimos $p_\infty = inf\{p_n : n \in \omega\}$, entonces $\gamma(p_\infty) = sup\{\gamma(p_n) : n \in \omega\}$.
Sea $Z' = \bigcup\{Z_n : n \in \omega\}$, entonces $p_\infty \Vdash$"$\pi_{\gamma(p_\infty)} A(Z')$ es denso en $\pi_{\gamma(p_\infty)} Y$ ".
Sean B' una base numerable en ${}^{\gamma(p_\infty)}2$ y $F = \{A^{-1}_{p_\infty}(B) \cap Z' : B \subseteq B'\}$.
Consideramos p'_∞ para ser igual a p_∞ en todas partes, pero en $\mathscr{F}_{p_\infty}$ agregamos la familia F. Notamos que si r es una condición y $E \in \mathscr{F}_r$, entonces $r \Vdash$ "$A(E)$ es densa en ${}^{\omega_1 - \gamma(r)}2$". Por lo tanto, p'_∞ fuerza a cada subconjunto $A(E)$, con $E \in \mathscr{F}_{p_\infty}$ a ser denso en ${}^{\omega_1 - \gamma(p_\infty)}2$ y fuerza a $A(Z')$ a ser denso en Y, es decir, p'_∞ fuerza que Y sea separable. $\square$

Conclusión

En los capítulos segundo y tercero se presentaron: la noción de forcing, la existencia de filtros genéricos, la extensión genérica de modelos de **ZFC** y la construcción de modelos que satisfacen HC, la negación de HC o la negación de la HCG. Al tiempo que se demuestra que un forcing c.c.c. preserva cardinales y se generaliza este resultado.

En el capítulo cuarto definimos los reales dominantes, no acotados y divisores para después estudiar como se relacionan entre sí por medio de nociones de forcing. Requerimos hacer un estudio de juegos infinitos para el forcing de Silver y el de Mathias y por otra parte de árboles para el forcing de Miller.

En el último capítulo revisamos diversas nociones de forcing donde hicimos uso de los forcings Fn para el colapso de Lévy y una noción muy parecida para la consistencia de la propiedad Diamante, volvemos a hacer uso de árboles para la consistencia de la negación de la hipótesis de Suslin. Mientras tanto, en la última aplicación que exhibimos encontramos un forcing donde las condiciones son tripletas formadas por espacios topológicos, funciones numerables con imagen el espacio topológico y una familia numerable de subconjuntos del dominio de la función.

La técnica de forcing es una útil e importante herramienta para la cual es necesario emplear múltiples conocimientos matemáticos. Desde su primer uso por parte de Cohen, ha logrado consolidarse debido a su versatilidad para generar modelos.

Bibliografía

[1] R. Cepeda: Consecuencias de agregar reales de Cohen. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México. (2013)

[2] W. G. Fleissner: Some spaces related to topological inequalities proven by the Erdös-Rado theorem. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 71, Num. 2 (1978)

[3] S. A. García: La técnica de forcing y algunas aplicaciones. Tesis de maestría. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2014)

[4] Hajnal, Juhasz: On hereditarily α-Lindelof and hereditarily α-separable spaces. Ann. Univ. Sci. BudapestEotvos Sect. Math. (1968)

[5] L. J. Halbeisen: Combinatorial Set Theory, With a Gentle Introduction to Forcing. Springer Monographs in Mathematics. Springer, London (2012)

[6] T. Jech: Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (2003)

[7] K. Kunen: Set Theory, an Introduction to Independence Proofs. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102. North-Holland, Amsterdam (1983)

[8] K. Kunen: Set Theory. Studies in Logic, vol. 34. College Publications, UK (2011)

[9] Malykhin,V I: Topology and forcing. Russian Mathematical Surveys, 38(1):77 (1983)

[10] L. J. Turcio: Introducción a Forcing y Algunas de sus Aplicaciones. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México. (2011)

Índice alfabético