

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.



SUBGRUPOS DE UN FIN DE GRAFOS DE GRUPOS.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CATALINA VACA VACA.

DIRECTOR DE TESIS: DR. JESÚS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ.
DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEXANDER BYKOV.

MÉXICO, PUEBLA

JUNIO, 2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

CATALINA VACA VACA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 3 de junio de 2022, con la tesis titulada:

Subgrupos de un fin de grafos de grupos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 7 de abril de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Introducción

La teoría geométrica de grupos surge como una continuación del programa de Erlangen. Esta, tiene como objetivo estudiar las interacciones algebraicas y geométricas de los grupos. Un pionero de esta área es Max Dehn quien durante el siglo XX utiliza ideas geométricas y topológicas para estudiar grupos discretos. Usualmente la teoría geométrica de grupos toma un objeto algebraico, un grupo, y lo relaciona con objeto geométrico a partir de sus acciones, para posteriormente estudiar las propiedades tanto algebraicas como geométricas del objeto y las relaciones entre ellas.

Entre 1943 y 1944 Heinz Hopf, demostró que si G es un grupo finitamente generado, entonces tiene 0, 1, 2 o una infinidad de fines. A partir de este teorema se tienen los siguientes casos. Si un grupo tiene 0 fines este es finito, si tiene 2 fines es virtualmente $\mathbb{Z}$, es decir, estos grupos contienen un subgrupo de índice finito isomorfo a $\mathbb{Z}$. En 1971 John Robert Stallings demostró que si un grupo finitamente generado tiene una cantidad infinita de fines, entonces este puede ser expresado como un producto amalgamado o bien como una extensión HNN sobre grupos finitos. Así, resta estudiar y caracterizar el caso de los grupos finitamente generados con un fin; conseguir una clasificación completa de estos es un problema abierto. Sin embargo para atacarlo se ha intentado o bien estudiar nuevos invariantes o estudiar familias restringidas. La intención de esta tesis es la de profundizar en el estudio de los grupos con un fin y estudiar a una familia particular de estos.

Con el fin de comprender las ideas de la teoría de Bass-Serre el Capítulo 2 de este trabajo presenta el Teorema de la Estructura para Amalgamas que da información sobre los productos amalgamados, también se dan las nociones básicas de teoría de grafos al estilo Bass-Serre y se introduce el concepto de grafo de grupos (un grafo con una estructura algebraica asociada determinada por los estabilizadores de vértices y aristas de la acción de un grupo sobre un árbol). La Sección 1.3 ofrece un repaso rápido sobre grupos hiperbólicos y la noción de fines de un grupo, conceptos fundamentales para entender el teorema central de esta tesis.

En el Capítulo 2 se presentan una introducción a la teoría de Bass-Serre: se comienza por introducir la noción de grupo fundamental de un grafo de grupos y también se estudian los cubrientes de estos grafos. En particular se desarrolla la teoría necesaria para entender el Teorema de la Estructura de Grafos de Grupos, éste permite relacionar las descomposiciones de un grupo como un producto amalgamado y las acciones del grupo mismo sobre árboles, permitiendo ver a cada descomposición de un grupo como el grupo fundamental de un grafo de grupos y a la inversa cada acción de un grupo dado sobre un árbol determinará una descomposición del grupo como producto amalgamado. Para estudiar a las descomposiciones de un grupo a partir de sus acciones en árboles, en el Capítulo 3 se estudia a los $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol en el sentido de Guirardel y Levitt, es decir a los árboles cuyos estabilizadores aristas pertenecen a algún conjunto $\mathcal{A}$ y tales que los subgrupos pertenecientes al conjunto $\mathcal{H}$ son elípticos (fijan un vértice) en el árbol asociado a alguna descomposición dada del grupo, después se estudian las relaciones entre estos árboles y se definen las descomposiciones JSJ, árboles máxima-

les respecto de la elipticidad de sus estabilizadores arista y vértice. En este trabajo serán de especial interés las descomposiciones JSJ para grupos hiperbólicos libres de torsión dada por Bowditch.

Para el Capítulo 4 se realiza un estudio de los grafos de espacios análogo, pero desde un punto de vista topológico, al del Capítulo 2 que se realizó para grafos de grupos.

En la Sección 5.1 se presenta una caracterización para los grupos con un fin que son finitamente generados y tienen una descomposición cíclica en términos de la descomponibilidad de los grupos vértice del grupo dado relativa a los grupos arista incidentes, para demostrar esta proposición se utiliza la herramienta aprendida en los Capítulos 2 y 4, se construye el árbol de Bass-Serre de las descomposiciones cíclicas de un grupo. Lo anterior permite determinar cuando un grupo con grupos arista cíclicos es libremente indescomponible.

Por un lado, es de interés estudiar a los subgrupos de un fin de grupos hiperbólicos y por otro, un problema de interés para la topología es el de estudiar a los grupos de superficie, es decir a los grupos que son isomorfos al grupo fundamental de una superficie, de modo que se tiene la siguiente pregunta atribuida a Gromov, ¿todo grupo hiperbólico con un fin es un grupo de superficie?, para el caso de grupos fundamentales de 3-variedades cerradas e hiperbólicas Kahn and Markovic determinaron que esta pregunta es equivalente a preguntarse, si todo grupo hiperbólico con un fin que no es virtualmente un grupo de superficie contiene un subgrupo finitamente generado con un fin de índice finito. Para este trabajo se estudia la respuesta de Henry Wilton a estas preguntas para grupos con una descomposición en la que los grupos vértice son libres y los grupos arista son cíclicos dada en el Teorema 5.3.7. La demostración de este teorema tiene como piezas las descomposiciones JSJ de Bowditch para grupos hiperbólicos, el criterio de descomposiciones libres de grafos de grupos con grupos vértice cíclicos relativo a los grupos arista incidentes dado por el Teorema 5.1.9 de la Sección 5.1 y el Teorema 5.2.34 sobre descomposiciones cíclicas de grupos vértice en una descomposición JSJ de la Sección 5.2

El teorema central de este trabajo es el siguiente:

Teorema 5.3.7 Sea G el grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos vértice libres y con grupos arista cíclicos. Si G es hiperbólico y tiene un fin, entonces o bien G es el grupo fundamental de una superficie cerrada o G tiene un subgrupo finitamente generado con un fin de índice infinito.

Para entender la demostración en la Sección 5.2 se trabaja a los grupos libres y se les asocia una estructura periférica que consta de una colección de grupos cíclicos, maximales y no conjugados a pares del generado de algún subconjunto del grupo dado, se observa la relación de estas estructuras con las clases de conjugación de grupos fundamentales de cuerpos con asas. Luego se estudia la relación entre la descomponibilidad de particiones cíclicas de un grupo relativas a alguna estructura periférica asociada y las aristas separadoras en grafos de Whitehead. Finalmente partiendo de las descomposiciones JSJ de Bowditch se obtiene el Teorema 5.3.7 que dice que un grupo hiperbólico con un fin con una descomposición a un grafo de grupos con grupos vértice libres de rango finito y grupos arista cíclicos es o un grupo de superficie o tiene un subgrupo finitamente generado con un fin de índice finito.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Teorema de la Estructura para Amalgamas.	1
1.2. Grafos.	3
1.2.1. Grafos y su realización geométrica.	3
1.2.2. Árboles y colapsos.	8
1.3. Geometría a gran escala.	9
1.3.1. Grupos hiperbólicos	9
1.3.2. Espacio de fines	12
2. Teoría de Bass-Serre	15
2.1. Grafos de grupos.	15
2.2. Grupo Fundamental de un Grafo de Grupos.	17
2.3. Cubrientes de Grafos de Grupos.	21
2.4. Teorema de la Estructura de Grafos de Grupos.	26
3. Descomposiciones JSJ	29
3.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles.	29
3.2. Funciones entre árboles y dominación.	30
3.3. Espacios de deformación.	31
3.4. Espacio de deformación JSJ.	31
4. Grafos de espacios.	33
4.1. Grafos de espacios.	33
4.2. Grupo Fundamental de un Grafo de Espacios.	37
4.3. Cubrientes de Grafos de Espacios.	37
4.4. Precubrientes.	42
5. Grafos de grupos con grupos arista cíclicos.	51
5.1. Una variante de un teorema de Shenitzer.	51
5.2. Grafos de Whitehead.	59
5.3. Subgrupos de un fin de grafos de grupos libres con grupos arista cíclicos.	77
Conclusión	83

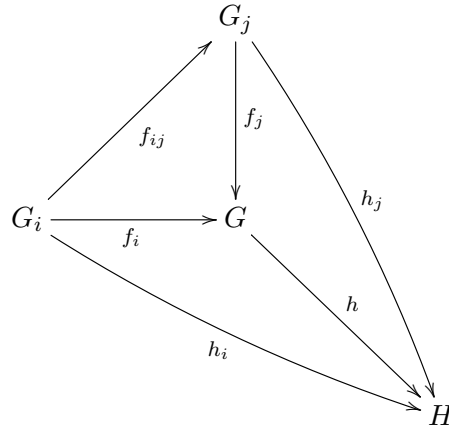
Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se comienza por dar el Teorema de la Estructura para Amalgamas que es de suma importancia para entender los productos amalgamados. Posteriormente se definen los grafos al estilo de Bass-Serre con los que se trabajará a lo largo del texto. Y se presentan dos invariantes cuasiisométricos para grupos: la hiperbolicidad y el espacio de fines.

1.1. Teorema de la Estructura para Amalgamas.

Considérense una familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$ y para cada (i, j) a F_{ij} un conjunto de homomorfismos de G_i a G_j . Se desea construir un grupo $G = \lim G_i$ y una familia de homomorfismos $f_i : G_i \rightarrow G$ tal que para toda $f_{ij} \in F_{ij}$ suceda que $f_j \circ f_{ij} = f_i$ y que cumpla la siguiente propiedad universal: dados H un grupo y una familia de homomorfismos $h_i : G_i \rightarrow H$ tal que para toda $f_{ij} \in F_{ij}$ se tiene que $h_j \circ f_{ij} = h_i$, entonces existe un único $h : G \rightarrow H$ tal que $h_i = h \circ f_i$.



Al grupo G con la propiedad universal anterior lo llamaremos el límite directo de $\{G_i\}_{i \in I}$ relativo a F_{ij} .

Propiedad 1.1.1. *El par $(G, \{f_i\}_{i \in I})$ existe y es único salvo isomorfismo.*

Sean un grupo dado A , una familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$ y para cada $i \in I$ un homomorfismo inyectivo $f_i : A \rightarrow G_i$. Se identifica a A con su imagen $f_i(A)$ bajo f_i en G_i . Al límite directo de la familia (A, G_i) con respecto a la familia de homomorfismos $\{f_i\}_{i \in I}$ se lo denota como $*_A G_i$ y se le llama **amalgama, producto amalgamado, o suma amalgamada**.

Si $A = \{1\}$ el límite directo anterior $*G_i$ se le llama **producto amalgamado libre o producto libre** de G_i .

Para cada $i \in I$ tómese S_i un conjunto de representantes de clases (derechas) de G_i módulo A (en el sentido $G_i/f_i(A) = \{f_i(A)g : g \in G_i\}$). Considérese el morfismo siguiente:

$$\begin{aligned} A \times S_i &\longrightarrow G_i \\ (a, s) &\longmapsto as, \end{aligned}$$

éste es una biyección entre $A \times (G_i - \{1\})$ y $G_i - A$.

Definición 1.1.2. Sea $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ una sucesión de elementos $i_j \in I$ que satisfacen que para $n \geq 0$ y para $1 \leq m \leq n-1$ se tiene que $i_m \neq i_{m+1}$. Una **palabra reducida de tipo $\mathbf{i}$** es una secuencia:

$$m = (a; s_1, \dots, s_n),$$

donde $a \in A$ y S_{i_j} son representantes de las clases $G_i/f_i(A)$ de modo que para toda j , $s_j \in S_{i_j}$ con $j \neq 1$.

Notación 1.1.3. Se denotará por f (respectivamente a f_i) el homomorfismo canónico de A (respectivamente a G_i) en el grupo $G = *_A G_i$.

Ejemplo 1.1.4. Dados los grupos $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A &\longrightarrow G_1 & \varphi_2 : A &\longrightarrow G_2 \\ [1]_2 &\longmapsto [2]_4 & [1]_2 &\longmapsto [3]_6 \end{aligned}$$

Luego, $S_1 = \{[0]_{s_1}, [1]_{s_1}\}$ y $S_2 = \{[0]_{s_2}, [1]_{s_2}, [2]_{s_2}\}$. Dada $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$, obsérvese que estos son elementos consecutivos distintos en $\{1, 2\}$, algunas palabras reducidas de tipo $\mathbf{i}$ son:

$$\begin{aligned} m &= ([0]_2; [1]_{s_1}, [1]_{s_2}, [1]_{s_1}) \\ m' &= ([1]_2; [1]_{s_1}, [2]_{s_2}, [1]_{s_1}) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.5. Para los grupos $A = \{1\}$, $G_1 = G_2 = G_3 = \mathbb{Z}$ y los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A &\longrightarrow G_1 & \varphi_2 : A &\longrightarrow G_2 & \varphi_3 : A &\longrightarrow G_3 \\ 1 &\longmapsto 0 & 1 &\longmapsto 0 & 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Se tiene que $S_1 = S_2 = S_3 = \mathbb{Z}$, si $\mathbf{i} = (2, 1, 3, 1)$, algunas palabras de tipo $\mathbf{i}$ son:

$$\begin{aligned} m &= (1; 1, 1, 1, 1) \\ m' &= (1; 7, 9, 56, 1) \\ m'' &= (1; 2, 1, 3, 1) \end{aligned}$$

Con todo lo anterior se está listo para entender el Teorema de la Estructura de Amalgamas.

Teorema 1.1.6. Teorema de Estructura de Amalgamas.

Para toda $g \in G$ existe una única secuencia $\mathbf{i}$ y una única palabra reducida $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ de tipo $\mathbf{i}$ tal que:

$$g = f(a)f_{i_1}(s_1) \cdots f_{i_n}(s_n)$$

1.2. Grafos.

1.2.1. Grafos y su realización geométrica.

En esta sección se dan las definiciones necesarias para entender el lenguaje de grafos que se usará más tarde. También se presenta la definición de grafos de grupos y grafos de espacios.

Definición 1.2.1. Un **grafo** $\Xi = (V(\Xi), E(\Xi), \partial_0, -)$ consta de un par de conjuntos $V(\Xi)$, $A(\Xi)$ y un par de morfismos:

$$\partial_0: A(\Xi) \longrightarrow V(\Xi)$$

$$a \longmapsto \partial_0(a)$$

$$-: A(\Xi) \longrightarrow A(\Xi)$$

$$a \longmapsto \bar{a}$$

que satisfacen que $\bar{\bar{a}} \neq a$ y $\bar{\bar{a}} = a$. Los elementos de $V(\Xi)$ se llaman **vértices** y los elementos de $A(\Xi)$ se llaman **aristas**. Dada una arista $a \in A(\Xi)$, la arista $\bar{a}$ es la **arista inversa** de a y $\partial_0(a)$ es el **vértice inicial** de a . Además se define el morfismo $\partial_1: A(\Xi) \longrightarrow V(\Xi)$ como $\partial_1(a) := \partial_0(\bar{a})$ y $\partial_1(a)$ es el **vértice final** de a .

Definición 1.2.2. Dado un grafo Ξ una **orientación** de Ξ es un subconjunto $A_+ \subseteq A(\Xi)$ tal que $A(\Xi) = A_+ \sqcup \bar{A}_+$, donde $\bar{A}_+$ es el conjunto de aristas inversas de las aristas en A_+ .

Ejemplo 1.2.3. El grafo Ξ con conjunto de vértices $V(\Xi) = \{v_1, v_2\}$, conjunto de aristas $A(\Xi) = \{a, \bar{a}\}$ y en el que:

$$\partial_0: A(\Xi) \longrightarrow V(\Xi)$$

$$a \longmapsto v_1$$

$$\bar{a} \longmapsto v_2$$

$$-: A(\Xi) \longrightarrow A(\Xi)$$

$$a \longmapsto \bar{a}$$

$$\bar{a} \longmapsto a$$

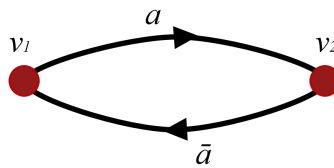


Figura 1.1: Grafo Ξ

El vértice inicial de la arista a es $\partial_0(a) = v_1$, el vértice final es $\partial_1(a) = v_2$ y la arista inversa es $\bar{a}$.

Con esta definición de grafos se tienen grafos con una orientación y tales que para cada par de vértices entre los cuales hay una arista hay también una arista inversa como se muestra en el ejemplo anterior. Estos grafos pueden tener lazos y aristas múltiples.

Ejemplo 1.2.4. El Ξ grafo tal que $V(\Xi) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es el conjunto de vértices, $A(\Xi) = \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, a_4, \bar{a}_4, a_5, \bar{a}_5, a_6, \bar{a}_6\}$ es el conjunto de aristas, $\partial_0: A(\Xi) \rightarrow V(\Xi)$ se define como $\partial_0(a_1) = v_2, \partial_0(a_2) = v_3, \partial_0(a_3) = v_2, \partial_0(a_4) = v_4, \partial_0(a_5) = v_3, \partial_0(a_6) = v_2, \partial_0(\bar{a}_1) = v_1, \partial_0(\bar{a}_2) = v_1, \partial_0(\bar{a}_3) = v_3, \partial_0(\bar{a}_4) = v_3, \partial_0(\bar{a}_5) = v_4, \partial_0(\bar{a}_6) = v_2$, y para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$-: A(\Xi) \rightarrow A(\Xi)$$

$$a_i \mapsto \bar{a}_i$$

$$\bar{a}_i \mapsto a_i$$

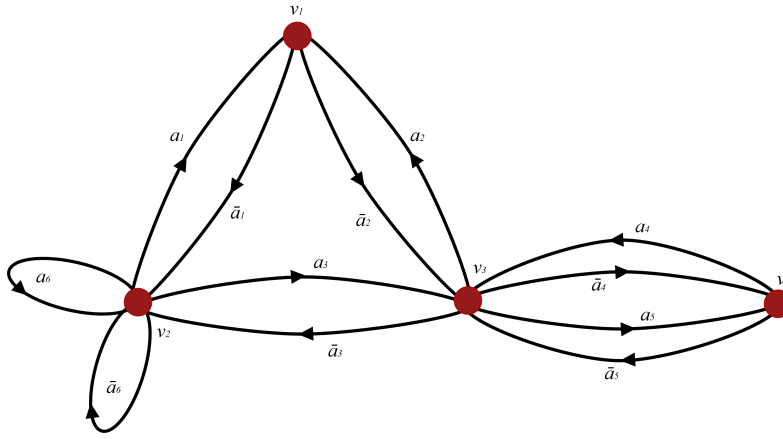


Figura 1.2: Grafo Ξ

Definición 1.2.5. Dado un grafo $\Xi = (V(\Xi), E(\Xi), \partial_0, -)$ un **subgrafo** $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma), \partial'_0, -')$ de Ξ es un grafo tal que $V(\Gamma) \subset V(\Xi)$, $A(\Gamma) \subset A(\Xi)$ y los morfismos son:

$$\partial'_0: A(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$$

$$a \mapsto \partial'_0(a)$$

$$-': A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma)$$

$$a \mapsto \bar{a}$$

Definición 1.2.6. Un grafo Ξ es **simplicial** si para toda arista $a \in A(\Xi)$ se tiene que $\partial_0(a) \neq \partial_1(a)$ y si para cualesquiera $v, v' \in V(\Xi)$ se tiene que $|\{a \in A(\Xi) : \partial_0(a) = v, \partial_1(a) = v'\}| \leq 1$.

Definición 1.2.7. La **realización geométrica de un grafo** Ξ se define como:

$$|\Xi| = \frac{V(\Xi) \sqcup (A(\Xi) \times [0, 1])}{\sim}$$

Donde $\sim$ está definida por las siguientes identificaciones:

$$A(\Xi) \times [0, 1] \longrightarrow A(\Xi) \times [0, 1]$$

$$(a, t) \longmapsto (\bar{a}, 1 - t)$$

$$A(\Xi) \times 0 \longrightarrow V(\Xi)$$

$$(a, 0) \longmapsto \partial_0(a)$$

Un grafo simplicial es aquel que no tiene lazos, ni aristas múltiples en su realización geométrica, sin embargo el grafo como objeto abstracto tiene para cada arista una arista inversa, en este sentido las realizaciones geométricas de grafos identifican en caso de existir, una arista a entre dos vértices v, v' a las aristas a y $\bar{a}$.

Ejemplo 1.2.8. La realización geométrica $|\Xi|$ del grafo Ξ del Ejemplo 1.2.3 es la que se muestra en la Figura 1.3

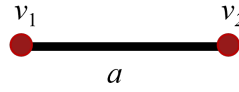


Figura 1.3: Realización geométrica del grafo Ξ del Ejemplo 1.2.3.

Ejemplo 1.2.9. La realización geométrica $|\Xi|$ del grafo Ξ del Ejemplo 1.2.4 es la que muestra en la siguiente Figura 1.4

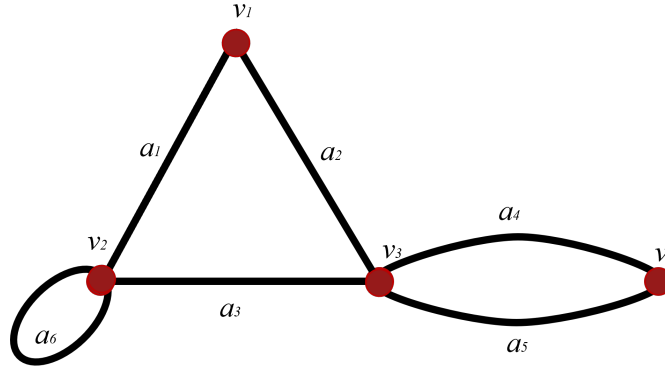


Figura 1.4: Realización geométrica del grafo Ξ el Ejemplo 1.2.4.

Definición 1.2.10. Dado un grafo Ξ y $v, v' \in V(\Xi)$ un **camino** de v a v' es una secuencia finita (posiblemente vacía) de aristas $c = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que $\partial_0(a_1) = v$, $\partial_1(a_n) = v'$, y tal que para toda a_i con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que $\partial_1(a_i) = \partial_0(a_{i+1})$. Si la secuencia es vacía se le llama **camino constante**. Un camino que va de algún $v \in V(\Xi)$ en sí mismo es un **camino cerrado**.

Definición 1.2.11. La **longitud de un camino** $c = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la cardinalidad del conjunto de aristas que lo determina $|\{a_1, a_2, \dots, a_n\}|$. La **longitud de un camino constante** es 0.

Definición 1.2.12. Un grafo Ξ es **conexo** si para cualesquiera $v, v' \in V(\Xi)$ existe un camino de v a v' . Y es **disconexo** si existen $v, v' \in V(\Xi)$ tales que no existe un camino de v a v' .

Definición 1.2.13. La *valencia de un vértice* $v \in V(\Xi)$ de un grafo es:

$$val(v) := |\{a \in A(\Xi) : \partial_0(a) = v\}|$$

Definición 1.2.14. Dado un grafo Ξ un *ciclo* es un camino cerrado no constante $c = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\bar{a}_i \neq a_{i+1}$.

Ejemplo 1.2.15. Sea Ξ el grafo cuya realización geométrica es el grafo que se muestra en la Figura 1.5.

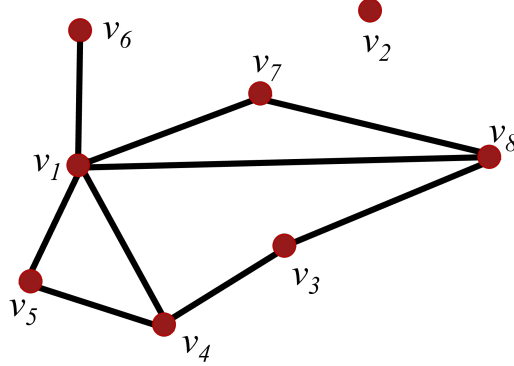


Figura 1.5: Realización geométrica del grafo Ξ .

Aquí se tiene que $val(v_1) = 5$, $val(v_2) = 0$ y $val(v_3) = 2$. El grafo Ξ está dotado con un orientación en las aristas determinada por el morfismo ∂_0 asociado al grafo. En la Figura 1.6 para representar esta orientación el inicio de la flecha sobre alguna arista a representa a $\partial_0(a)$ el vértice inicial de la arista a y el final de la flecha representa a ∂_1 el final de la arista a . Luego $c = (a_5, \bar{a}_6, a_8, a_9, a_1)$ es un camino de v_8 a v_6 .

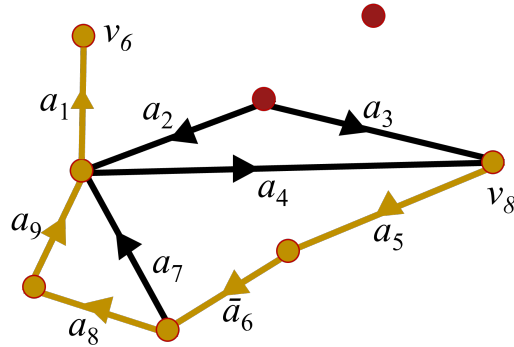
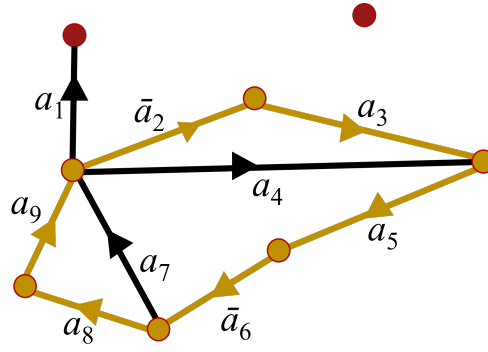
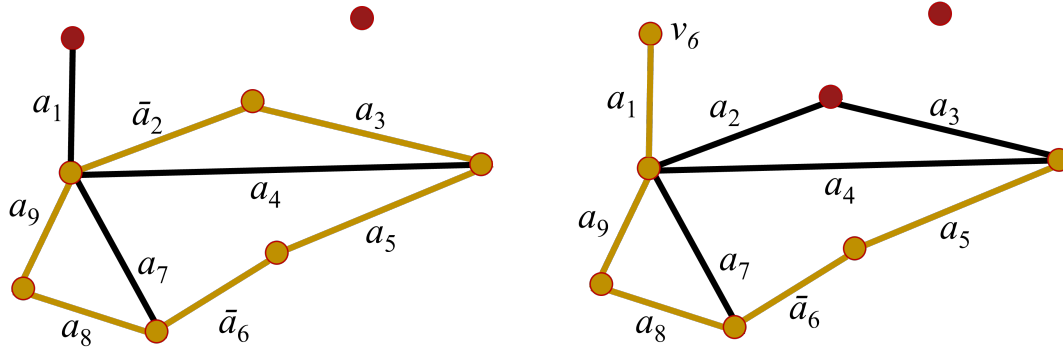


Figura 1.6: Realización geométrica del grafo Ξ .

En la Figura 1.7 se muestra un camino $c' = (\bar{a}_2, a_3, a_5, \bar{a}_6, a_8, a_9)$ de longitud 6 que es un ciclo. Además el grafo Ξ es un grafo disconexo puesto que tiene un vértice de valencia 0 y no existe ningún camino de éste a cualquier otro vértice.

Figura 1.7: Camino c' .

En la Figura 1.8 se muestran los caminos c y c' en la realización geométrica del grafo Ξ .

Figura 1.8: Caminos c y c' en la realización geométrica del grafo Ξ .

Los siguientes conceptos serán de utilidad en el Capítulo 5 Sección 5.2.

Definición 1.2.16. Dado un grafo Ξ . Una arista $a \in A(\Xi)$ es una **arista incidente al vértice** $v \in V(\Xi)$ si $\partial_0(a) = v$ o bien $\partial_1(a) = v$

Notación 1.2.17. Dado un grafo Ξ y un vértice $v \in V(\Xi)$ denotaremos al conjunto de aristas incidentes en v por:

$$I(v) := \{a \in A(\Xi) : \partial_0(a) = v \vee \partial_1(a) = v\}$$

Definición 1.2.18. Dado Ξ un grafo un vértice $v \in V(\Xi)$ es un **vértice corte** si $\Xi \setminus (I(v) \cup \{v\})$ tiene más componentes conexas que Ξ .

Ejemplo 1.2.19. Si se considera al grafo Ξ de la Figura 1.9 el vértice v es un vértice de corte puesto que Ξ es conexo y $\Xi \setminus (I(v) \cup \{v\})$ tiene dos componentes conexas.

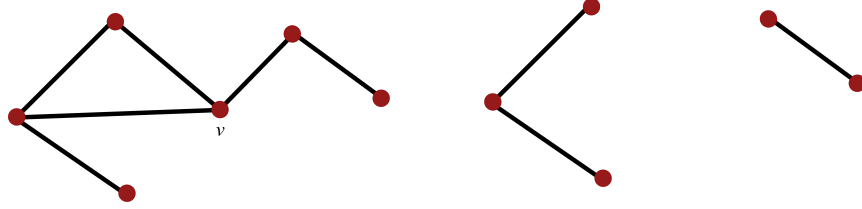


Figura 1.9: Grafo Ξ con un vértice de corte v y $\Xi \setminus (I(v) \cup \{v\})$.

1.2.2. Árboles y colapsos.

Para el estudio de las particiones de un grupo como producto amalgamado dado por la Teoría de Bass-Serre el concepto de árbol es fundamental.

Definición 1.2.20. Un grafo T es un **árbol** si es no vacío, simplicial, conexo y no tiene ciclos. Dado un árbol T un **subárbol** T' de T es un subgrafo de T que es un árbol.

Definición 1.2.21. Sea T un árbol y $\mathcal{C} := \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ una colección de subárboles de T tal que para toda $\lambda, \nu \in \Delta$ distintos $V(T_\lambda) \cap V(T_\nu) = \emptyset$. Se define al $T_\mathcal{C}$ **colapso de T por $\mathcal{C}$** como el grafo simplicial con vértices $V(T_\mathcal{C}) = V(T)/\sim$, donde $\sim$ está definida por la relación: para $v, v' \in V(T)$ se tiene que $v \sim v$ y que $v \sim v'$ si existe $\lambda \in \Delta$ tal que $v, v' \in T_\lambda$. Y las aristas $A(T_\mathcal{C})$ se definen como: dados $[v_1], [v_2] \in V(T_\mathcal{C})$ distintos, $([v_1], [v_2]) \in A(T_\mathcal{C})$ si existen $v'_1 \in [v_1]$ y $v'_2 \in [v_2]$ tal que $(v'_1, v'_2) \in A(T)$.

Ejemplo 1.2.22. Si se tiene el grafo T cuya realización geométrica se muestra en la Figura 1.10 éste es un árbol, los subgrafos T_1, T_2, T_3 y T_4 son una familia de subárboles de T .

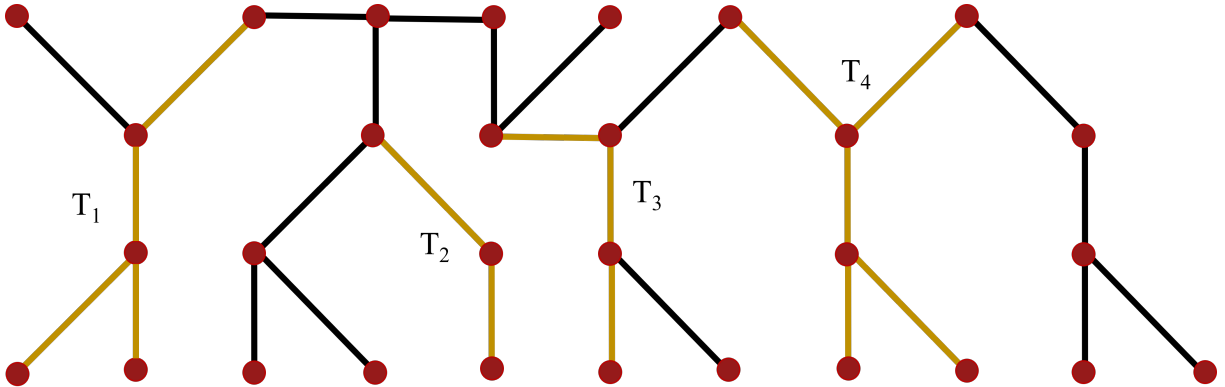
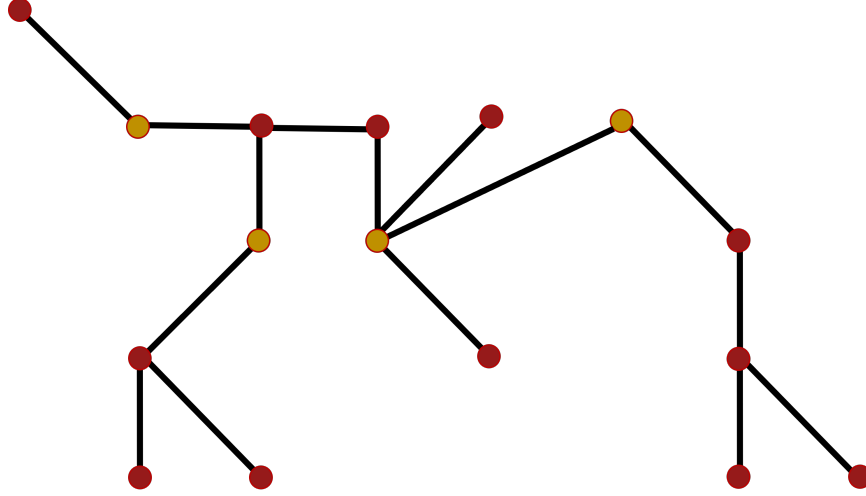


Figura 1.10: Árbol T y sus subárboles T_1, T_2, T_3 y T_4 .

La Figura 1.11 muestra el colapso de T por la familia de subárboles .

Figura 1.11: Colapso de T por $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$.

Lema 1.2.23. Dado T un árbol, el colapso de T por alguna familia $\mathcal{C}$ es un árbol.

1.3. Geometría a gran escala.

En esta sección se estudiará la geometría a gran escala de los grupos. Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, una función $f : X \rightarrow Y$ está a **distancia finita** de otra función $g : X \rightarrow Y$, si existe $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq c.$$

Una función $f : X \rightarrow Y$ es un **encaje cuasiisométrico**, si existen $c \geq 1$ y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b.$$

Se dice que f es una **cuasiisometría** si es un encaje cuasiisométrico para el cual existe una **cuasiinversa**, es decir, si existe un encaje cuasiisométrico $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ está a distancia finita de id_Y y $f \circ g$ está a distancia finita de id_X . Luego dos espacios métricos serán **cuasiisométricos** si existe una cuasi-isometría entre ellos. Este capítulo se estudiarán dos invariantes cuasiisométricos para grupos, los fines y la hiperbolicidad.

Dado que el problema de caracterización de los grupos con un fin es un problema abierto, será de interés estudiar grupos con un fin y algunas otras propiedades adicionales, en particular a los grupos hiperbólicos con un fin.

1.3.1. Grupos hiperbólicos

En esta subsección se hará un breve recordatorio de cómo se define la noción de hiperbolicidad para grupos y de algunas propiedades interesantes de estos grupos.

La noción de hiperbolicidad surge como consecuencia del estudio de las geometrías no euclidianas, en especial está íntimamente ligada con los espacios de curvatura negativa en la que los triángulos son δ -delgados. Para estudiar a los espacios hiperbólicos es esencial considerar un espacio métrico geodésico y definir a los triángulos delgados.

Definición 1.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $L \in \mathbb{R}^+$. Un **segmento geodésico** en X es un encaje isométrico $\gamma: [0, L] \rightarrow X$, donde $[0, L]$ está dotado con la métrica euclideana. Se dirá que $\gamma(0)$ es el **punto inicial** y $\gamma(L)$ es el **punto final del segmento geodésico**.

Un espacio métrico (X, d) será un **espacio geodésico**, si para cualesquiera dos puntos $x, x' \in X$ existe un segmento geodésico entre ellos tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(L) = x'$. Con esto podemos definir a los triángulos dentro de nuestro espacio.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio métrico. Un **triángulo geodésico** es una terna $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ donde $\varphi_1: [0, L_1] \rightarrow X$, $\varphi_2: [0, L_2] \rightarrow X$ y $\varphi_3: [0, L_3] \rightarrow X$ son segmentos geodésicos y tales que $\varphi_1(L_1) = \varphi_2(0)$, $\varphi_2(L_2) = \varphi_3(0)$ y $\varphi_3(L_3) = \varphi_1(0)$.

De la geometría euclideana se sabe que en los espacios hiperbólicos la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a 180 grados, esto puede enunciarse en terminos de triángulos δ -delgados.

Definición 1.3.3. Dado $\delta \geq 0$, un triángulo geodésico $\Delta = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es un **triángulo δ -delgado** si:

$$\begin{aligned} \text{im}(\varphi_1) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\varphi_2) \cup \text{im}(\varphi_3)), \\ \text{im}(\varphi_2) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\varphi_1) \cup \text{im}(\varphi_3)), \\ \text{im}(\varphi_3) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\varphi_1) \cup \text{im}(\varphi_2)). \end{aligned}$$

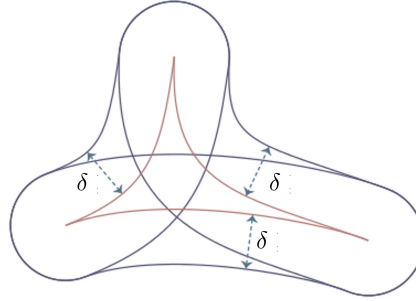


Figura 1.12: Triángulo δ -delgado.

Con esta noción de triángulos se define a los espacios hiperbólicos como sigue.

Definición 1.3.4. Dado $\delta \geq 0$. Un espacio geodésico X es un **espacio δ -hiperbólico** si todo triángulo geodésico es un triángulo δ -delgado.

Un espacio geodésico X es un **espacio hiperbólico** si existe un $\delta \geq 0$ tal que X es δ -hiperbólico y a δ se le llama **constante de hiperbolicidad**.

Ejemplo 1.3.5. La línea real $\mathbb{R}$ con la métrica euclideana es un espacio 0-hiperbólico, el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es hiperbólico. La realización geométrica del grafo de un árbol T es 0-hiperbólico. Y $\mathbb{R}^2$ no es hiperbólico.

Para llevar la noción de hiperbolicidad al terreno de los grupos es necesario dotarlos de una métrica, esto se hace usando a los grafos de Cayley de un grupo dotados de la métrica de caminos.

Definición 1.3.6. Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto generador de G . El **grafo de Cayley de G con respecto al conjunto generador S** es la realización geométrica del grafo simplicial $\text{Cay}(G, S)$ donde el conjunto de vértices es $V(\text{Cay}(G, S)) = G$ y el conjunto de aristas es:

$$A(\text{Cay}(G, S)) = \{(g, g \cdot s) \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) - \{1\}\}.$$

y donde:

$$\partial_0: A(\text{Cay}(G, S)) \longrightarrow V(\text{Cay}(G, S))$$

$$(g, g \cdot s) \longmapsto g$$

$$-: A(\text{Cay}(G, S)) \longrightarrow A(\text{Cay}(G, S))$$

$$(g, g \cdot s) \longmapsto (g \cdot s, g)$$

A estos grupos se los dotará de la métrica de las palabras.

Definición 1.3.7. Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto generador de G . **La métrica de las palabras d_s en G con respecto a S** es la métrica en G asociada con el grafo $\text{Cay}(G, S)$, en otras palabras para cualesquiera $g, h \in G$ se tiene que:

$$d_s(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}, g^{-1} \cdot h = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n\}$$

Obsérvese que d_s coincide con la métrica en $\text{Cay}(G, S)$. Todo lo anterior permite definir cuando un grupo es hiperbólico.

Definición 1.3.8. Un grupo G finitamente generado por un conjunto S es un **grupo hiperbólico** si $\text{Cay}(G, S)$ es hiperbólico. Donde $\text{Cay}(G, S)$ tiene la métrica inducida de identificar las realizaciones geométricas de las aristas con el intervalo $[0, 1]$.

Dado un grupo finitamente generado cada conjunto generador determina un grafo de Cayley; puede suceder que los grafos de Cayley con respecto a dos conjuntos generadores S y S' distintos no sean isomorfos, sin embargo estos serán cuasiisométricos. Que la noción de hiperbolicidad para grupos es un invariante cuasiisométrico se puede consultar en [7], de modo que la noción de hiperbolicidad para grupos finitamente generados queda bien definida.

A continuación se enunciarán una serie de teoremas interesantes sobre grupos hiperbólicos que pueden consultarse en [7], [2] y [6]. Estos grupos son finitamente presentados y pueden estudiarse a través de sus presentaciones de Dehn.

Teorema 1.3.9. Sea G un grupo hiperbólico, entonces G tiene una presentación de Dehn, en particular es finitamente presentado.

Teorema 1.3.10. Sea G un grupo finitamente generado, entonces G es hiperbólico si y sólo si G admite una presentación de Dehn.

Estos grupos tienen problema de la palabra soluble como consecuencia de tener una presentación de Dehn, más aún los grupos hiperbólicos tienen problema del isomorfismo y problema de conjugación solubles.

Teorema 1.3.11. Si G es hiperbólico, entonces tiene problema de la palabra soluble.

Teorema 1.3.12. Si G es un grupo hiperbólico, entonces tiene problema de conjugación e isomorfismos solubles.

Algunas otras propiedades inherentes a la estructura algebraica de estos grupos puede verse en los siguientes teoremas.

Teorema 1.3.13. *Sea G un grupo hiperbólico y $g \in G$ de orden infinito, entonces $C_G(g)$ el centralizador de g tiene a $\langle g \rangle$ como subgrupo de índice finito.*

Teorema 1.3.14. *Sea G un grupo hiperbólico. Luego, tiene únicamente una cantidad finita de clases de conjugación de subgrupos finitos.*

Teorema 1.3.15. *Sea G un grupo hiperbólico y H un subgrupo de G . Luego H cumple una de las siguientes:*

- *El subgrupo H es finito.*
- *El subgrupo H es virtualmente $\mathbb{Z}$.*
- *Existe F un subgrupo de H tal que F es isomorfo a un grupo libre en dos generadores.*

Otras propiedades interesantes de estos grupos son que los grupos fundamentales de variedades cerradas con curvatura seccional constante negativa son hiperbólicos y que los grupos hiperbólicos no contienen subgrupos de Baumslag–Solitar. En especial el Teorema 5.3.7 principal de este trabajo nos da información sobre los grupos hiperbólicos con un fin.

1.3.2. Espacio de fines

La noción de espacio de fines, es un concepto que en un sentido topológico captura y formaliza la idea de las “direcciones para ir al infinito”. El espacio de fines permite asociar a un espacio métrico un espacio topológico, de tal manera que todos los objetos cuasiisométricos pertenecientes a un espacio métrico tengan espacios de fines asociados homeomorfos. En el caso de los grupos el espacio de fines de un grupo queda inducido por el grafo de Cayley de un grupo dotado de la métrica de las palabras. Heinz Hopf demostró que los grupos tienen 0, 1, 2 o una infinidad de fines. Si tienen 0 son grupos finitos, si tienen 2 son virtualmente $\mathbb{Z}$. Como resultado del Teorema de Stallings 5.1.1 se tiene que si un grupo tiene una infinidad de fines este se parte sobre un finito. Sin embargo no hay una clasificación completa de los grupos con un fin de modo que su estudio da pie a muchas preguntas abiertas.

Para definir el espacio de fines asociado a un espacio métrico, es esencial definir clases de equivalencia de rayos que van al infinito.

Definición 1.3.16. *Dado X un espacio topológico. Un **rayo propio** en X es una función continua $r: [0, \infty) \rightarrow X$ tal que para cualquier $K \subset X$ compacto la preimagen $r^{-1}(K) \subset [0, \infty)$ es un conjunto compacto.*

Definición 1.3.17. *Dados dos rayos propios $r, r': [0, \infty) \rightarrow X$, estos **representan el mismo fin** de X si para todo conjunto compacto $K \subset X$ existe un $t \in [0, \infty)$ tal que $r([t, \infty))$ y $r'([t, \infty))$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus K$.*

Es un ejercicio técnico usual constatar que representar el mismo fin es una relación de equivalencia.

Definición 1.3.18. *Sea X un espacio topológico. Si $r: [0, \infty) \rightarrow X$ es un rayo propio, entonces $\text{end}(r)$ denotará **el conjunto de todos los rayos propios que representan el mismo fin** que r .*

El espacio de fines de X se define como:

$$\text{Ends}(X) := \{\text{end}(r) : r: [0, \infty) \rightarrow X \text{ es un rayo propio en } X\}.$$

Usando la Definición 1.3.6 de grafo de Cayley puede definirse la noción de espacio de fines para un grupo.

Definición 1.3.19. Si G es un grupo finitamente generado. El **espacio** $Ends(G)$ **de fines un grupo** G , (o bien los **fines del grupo** G), se define como $Ends(|Cay(G, S)|)$, donde S es algún subconjunto generador de G .

Ejemplo 1.3.20. El grupo libre en $n > 1$ generadores F_n tiene una infinidad de fines. El grupo de los números enteros $\mathbb{Z}$ tiene dos fines. Para toda $n > 1$ el grupo $\mathbb{Z}^n$ tiene un fin. El grupo de permutaciones en 3 elementos S^3 tiene 0 fines. Y los grupos de superficies cerradas de con característica de Euler menor o igual a 0 tienen un fin.

Capítulo 2

Teoría de Bass-Serre

En este Capítulo se estudia la Teoría de Bass-Serre que estudia las propiedades algebraicas de los grupos que actúan por automorfismos sobre árboles simpliciales. Esta teoría relaciona las acciones de grupos sobre árboles con particiones de grupos como productos amalgamados a través del concepto de grupo fundamental de un grafo de grupos.

2.1. Grafos de grupos.

En esta sección se presenta el concepto de grafo de grupos.

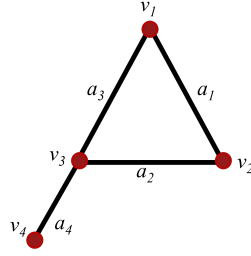
Definición 2.1.1. *Un grafo de grupos es una cuarteta:*

$$(\Xi, \{G_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{G_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}).$$

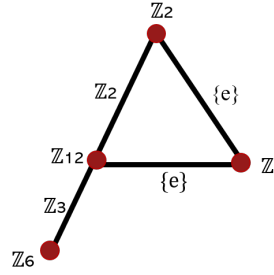
Donde Ξ es un grafo, $\{G_v\}_{v \in V(\Xi)}$ es una familia de grupos indexada por el conjunto de vértices del grafo dado, $\{G_a\}_{a \in A(\Xi)}$ es una familia de grupos indexada por el conjunto de aristas de Ξ , $\{\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}$ una familia de monomorfismos indexada por el conjunto de aristas de Ξ , y donde además se cumple que para toda $a \in A(\Xi)$ se tiene que $G_a = G_{\bar{a}}$.

La idea intuitiva de un grafo de grupos, es tomar la realización geométrica de un grafo cualquiera y asignar grupos a los vértices y aristas, de tal manera que se tenga un monomorfismo de los grupos arista a los grupos correspondientes al vértice terminal de la misma. Esta condición nos dirá que los grupos arista deben ser subgrupos de los grupos vértice que determinan la arista. Más aún está asignación es tal que los grupos arista G_a y $G_{\bar{a}}$ son el mismo, sin embargo los morfismos γ_a y $\gamma_{\bar{a}}$ no necesariamente son los mismos.

Ejemplo 2.1.2. Considérese el siguiente grafo $\Xi = (V(\Xi), A(\Xi), \partial_0, \bar{\cdot})$ donde $V(\Xi) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A(\Xi) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ tales que $\partial_0(a_1) = \partial_0(a_2) = v_2$, $\partial_0(a_3) = \partial_0(a_4) = v_3$, $\partial_1(a_1) = \partial_1(a_3) = v_1$, $\partial_1(a_2) = v_3$ y $\partial_1(a_4) = v_4$, cuya realización geométrica es la que se muestra en la Figura 2.1:

Figura 2.1: Grafo Ξ

A partir de éste se puede construir un grafo de grupos, asignando como se muestra en la Figura 2.2 grupos a los vértices y aristas.

Figura 2.2: Grupos vértice y grupos arista asociados al grafo Ξ

De modo que los grupos vértices son $G_{v_1} = \mathbb{Z}_2$, $G_{v_2} = \mathbb{Z}$, $G_{v_3} = \mathbb{Z}_{12}$, $G_{v_4} = \mathbb{Z}_6$, los grupos arista son $G_{a_1} = \{e\}$, $G_{a_2} = \{e\}$, $G_{a_3} = \mathbb{Z}_2$, $G_{a_4} = \mathbb{Z}_3$ y la familia de monomorfismos asociada a este grafo es:

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{a}_1} : G_{\bar{a}_1} = \{e\} &\longrightarrow G_{\partial_1(\bar{a}_1)} = \mathbb{Z} \\ e &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{a_1} : G_{a_1} = \{e\} &\longrightarrow G_{\partial_1(a_1)} = \mathbb{Z}_2 \\ e &\longmapsto [0]_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{a}_2} : G_{\bar{a}_2} = \{e\} &\longrightarrow G_{\partial_1(\bar{a}_2)} = \mathbb{Z} \\ e &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{a_2} : G_{a_2} = \{e\} &\longrightarrow G_{\partial_1(a_2)} = \mathbb{Z}_{12} \\ e &\longmapsto [0]_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{a}_3} : G_{\bar{a}_3} = \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow G_{\partial_1(\bar{a}_3)} = \mathbb{Z}_{12} \\ [1]_2 &\longmapsto [6]_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{a_3} : G_{a_3} = \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow G_{\partial_1(a_3)} = \mathbb{Z}_2 \\ [1]_2 &\longmapsto [1]_2 \end{aligned}$$

$$\gamma_{\bar{a}_4} : G_{\bar{a}_4} = \mathbb{Z}_3 \longrightarrow G_{\partial_1(\bar{a}_4)} = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[1]_3 \longmapsto [4]_{12}$$

$$\gamma_{a_4} : G_{a_4} = \mathbb{Z}_3 \longrightarrow G_{\partial_1(a_4)} = \mathbb{Z}_6$$

$$[1]_3 \longmapsto [2]_6$$

Ejemplo 2.1.3. Otro ejemplo es asociar al grafo de la Figura 2.3:

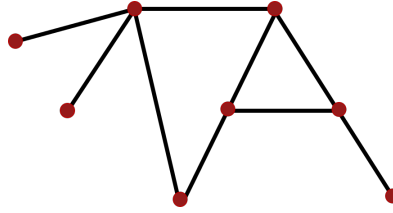


Figura 2.3: Grafo Ξ

El grafo de grupos de la Figura 2.4, donde todos los monomorfismos son triviales.

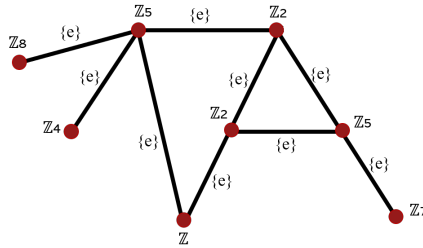


Figura 2.4: Grafo de grupos asociado a Ξ

2.2. Grupo Fundamental de un Grafo de Grupos.

Se define el grupo fundamental de un grafo de grupos de dos maneras distintas pero equivalentes, en términos de caminos de tipo c o respecto a un árbol maximal, ambas definiciones corresponden al límite directo de la colección de los grupos vértice y arista respecto de la familia de monomorfismos asociada al grafo de grupos.

Considérese a Ξ un grafo conexo y no vacío. Y sea

$$\mathcal{G} = (\Xi, \{G_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{G_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}),$$

el grafo de grupos asociado a éste. Donde:

$$\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}$$

$$g \longmapsto \gamma_a(g)$$

Definición 2.2.1. El grupo $F(\mathcal{G}, \Xi)$ se define como el grupo generado por los grupos G_v y las aristas $a \in A(\Xi)$, sujeto a las relaciones:

$$\bar{a} = a^{-1} \quad a\gamma_a(g)a^{-1} = \gamma_{\bar{a}}(g)$$

con $a \in A(\Xi)$ y $g \in G_a$.

Observación 2.2.2. Si se tiene un grafo de grupos con grupos vértice $G_{v_1}, \dots, G_{v_n}$ y m arista entonces, el grupo Γ es el producto libre de los grupos vértice y el grupo libre con base $A(\Xi)$, es decir $\Gamma := G_{v_1} * \dots * G_{v_n} * F_m$, el grupo $F(\mathcal{G}, \Xi)$ se define como:

$$F(\mathcal{G}, \Xi) = \frac{\Gamma}{\langle\langle a\bar{a}, a\gamma_a(g)a^{-1}(\gamma_{\bar{a}}(g))^{-1} : a \in A(\Xi), g \in G_a \rangle\rangle}$$

Definición 2.2.3. Sea T un árbol maximal de Γ . El **grupo fundamental** $\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)$ de Ξ en T es:

$$\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) = \frac{F(\mathcal{G}, \Xi)}{\langle\langle a : a \in A(T) \rangle\rangle}$$

Ejemplo 2.2.4. Dado el grafo Ξ de la Figura 2.5:

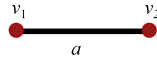


Figura 2.5: Grafo Ξ

Considérese el grafo de grupos $\mathcal{G}$ cuya realización geométrica es la Figura 2.6, con morfismos

$$\begin{aligned} \gamma_a : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 & \gamma_{\bar{a}} : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_4 \\ [1]_2 &\longmapsto [3]_6 & [1]_2 &\longmapsto [2]_4 \end{aligned}$$

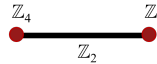


Figura 2.6: Grafo de grupos

A continuación se realizan los cálculos para obtener el grupo fundamental del grafo $\mathcal{G}$. Nótese que en este ejemplo $T = \Xi$.

$$\begin{aligned} F(\mathcal{G}, \Xi) &= \frac{\mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_4 * \langle a, \bar{a} \rangle}{\langle\langle a\bar{a}, a\gamma_a(g)a^{-1}(\gamma_{\bar{a}}(g))^{-1} \mid a \in A(\Xi), g \in \mathbb{Z}_2 \rangle\rangle} \\ &= \frac{\langle x, y, a, \bar{a} \mid x^6, y^4 \rangle}{\langle\langle a\bar{a}, ax^3a^{-1}y^{-2} \rangle\rangle} = \langle x, y, a \mid x^6, y^4, ax^3a^{-1}y^{-2} \rangle \\ \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, \Xi) &= \frac{\langle x, y, a \mid x^6, y^4, ax^3a^{-1}y^{-2} \rangle}{\langle a \mid a \in A(\Xi) \rangle} \\ &= \langle x, y \mid x^6, y^4, x^3y^{-2} \rangle \cong \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5. Dado el grafo de grupos $\mathcal{G}$ de la Figura 2.7 con grafo asociado Ξ y con familia de morfismos triviales.

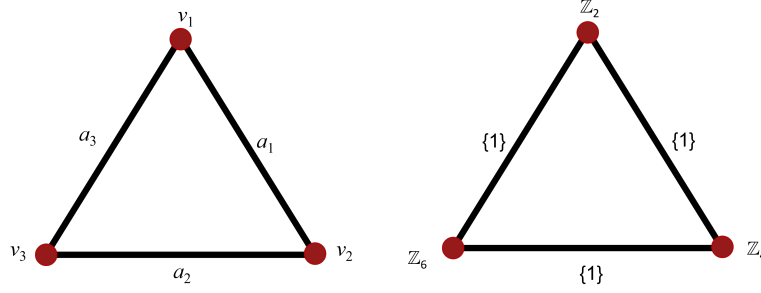


Figura 2.7: Grafo de grupos Ξ y grafo de grupos $\mathcal{G}$.

Los cálculos correspondientes al grupo fundamental de éste son:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{G}, \Xi) &= \frac{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \langle a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3 \rangle}{\langle \langle a\bar{a}, a\gamma_a(g)a^{-1}(\gamma_{\bar{a}}(g))^{-1} \mid a \in A(\Xi), g \in \{1\} \rangle \rangle} \\ &= \langle x, y, z \mid x^2, y^4, z^6 \rangle * \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \end{aligned}$$

Y si T es el subárbol de Ξ con aristas a_1, a_2 , entonces:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) &= \frac{\langle x, y, z \mid x^2, y^4, z^6 \rangle * \langle a_1, a_2, a_3 \rangle}{\langle a \mid a \in A(T) \rangle} \\ &= \frac{\langle x, y, z \mid x^2, y^4, z^6 \rangle * \langle a_1, a_2, a_3 \rangle}{\langle a_1, a_2 \rangle} \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.6. Dado el grafo de grupos $\mathcal{G}$ de la Figura 2.8 con grafo asociado Ξ y con morfismos:

$$\begin{aligned} \gamma_{a_2} : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_4 & \gamma_{\bar{a}_2} : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \\ [1]_2 &\longmapsto [2]_4 & [1]_2 &\longmapsto [3]_6 \end{aligned}$$

Y el resto morfismos triviales.

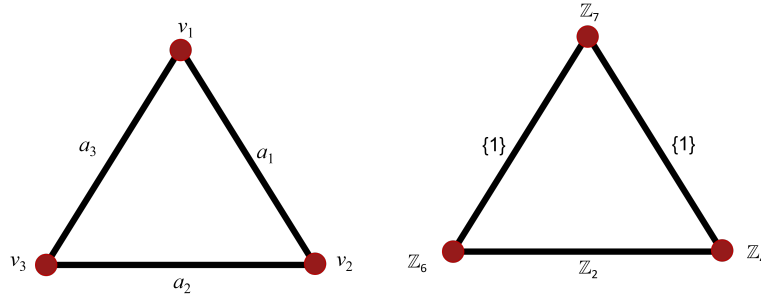


Figura 2.8: Grafo de grupos Ξ y grafo de grupos $\mathcal{G}$.

Los cálculos correspondientes al grupo fundamental de éste son:

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{G}, \Xi) &= \frac{\mathbb{Z}_7 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_4 * \langle a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3 \rangle}{\langle \langle a\bar{a}, a\gamma_a(g)a^{-1}(\gamma_{\bar{a}}(g))^{-1} \mid a \in A(\Xi), g \in G_a \rangle \rangle} \\
&= \frac{\langle x, y, z \mid x^7, y^4, z^6 \rangle * \langle a_1, a_2, a_3 \rangle}{\langle \langle a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle \rangle} \\
&= \langle x, y, z, a_1, a_2, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle
\end{aligned}$$

Si T es el subárbol de Ξ con aristas a_1, a_2 , entonces:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) &= \frac{\langle x, y, z, a_1, a_2, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle}{\langle a \mid a \in A(T) \rangle} \\
&= \frac{\langle x, y, z, a_1, a_2, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle}{\langle a_1, a_2 \rangle} \\
&= \langle x, y, z, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, y^2 z^{-3} \rangle
\end{aligned}$$

Y si se considera al árbol T' con aristas a_2, a_3 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T') &= \frac{\langle x, y, z, a_1, a_2, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle}{\langle a \mid a \in A(T') \rangle} \\
&= \frac{\langle x, y, z, a_1, a_2, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, a_2 y^2 a_2^{-1} z^{-3} \rangle}{\langle a_2, a_3 \rangle} \\
&= \langle x, y, z, a_1 \mid x^7, y^4, z^6, y^2 z^{-3} \rangle
\end{aligned}$$

A continuación se presenta la definición del grupo fundamental de grafo de grupos en terminos de caminos. Sea c un camino en Ξ un grafo con origen en el vértice v_0 y sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ las aristas que determinan el camino c , se denotará por:

$$v_i = \partial_0(a_{i+1}) = \partial_1(a_i)$$

Definición 2.2.7. Una *palabra de tipo c en $F(\mathcal{G}, \Xi)$* es un par (c, μ) donde $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ es una secuencia de elementos $r_i \in G_{v_i}$. El elemento:

$$|c, \mu| = r_0 a_1 r_1 a_2 \dots a_n r_n$$

de $F(\mathcal{G}, \Xi)$ se dice estar asociado con la palabra (c, μ) .

Definición 2.2.8. Sean $\mathcal{G}$ un grafo de grupos y $v_0 \in V(\Xi)$ un vértice de Ξ . Se define a $\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, v_0)$ el grupo fundamental de $(\mathcal{G}, \Xi)$ como:

$$\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, v_0) = \{|c, \mu| \in F(\mathcal{G}, \Xi) : \partial_0(a_1) = v_0 \wedge \partial_1(a_n) = v_0\}$$

Observación 2.2.9. Si g_a denota la imagen de a en $\pi_1(G, Y, T)$, el grupo $\pi_1(G, Y, T)$ está generado por los grupos G_v y los elementos g_a sujetos a las relaciones:

$$g_a \gamma_a(g) g_a^{-1} = \gamma_{\bar{a}}(g), \quad g_{\bar{a}} = g_a^{-1}$$

si $a \in A(\Xi)$ y $g \in G_a$ y:

$$g_a = 1,$$

si $a \in A(T)$. En particular se tiene que $\gamma_a(g) = \gamma_{\bar{a}}(g)$ si $a \in A(T)$ y $g \in G_a$.

2.3. Cubrientes de Grafos de Grupos.

Dado un grafo de grupos:

$$\mathcal{G} = (\Xi, \{G_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{G_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}),$$

con Ξ conexo, T un árbol maximal en Ξ y a A_+ una orientación en Ξ .

En esta sección se va a construir el cubriente universal del grafo de grupos $\mathcal{G}$, este objeto será un grafo que se denotará como $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}(\Xi, T)$. Deseamos que $\pi = \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)$ el grupo fundamental de $\mathcal{G}$ respecto de T actúe en $\tilde{\mathcal{G}}$, que exista un morfismo $p : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \Xi$ tal que induzca un isomorfismo $\pi \backslash \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \Xi$ y un par de secciones:

$$\begin{aligned} V(\Xi) &\longrightarrow V(\tilde{\mathcal{G}}) & A(\Xi) &\longrightarrow A(\tilde{\mathcal{G}}) \\ v &\longmapsto \tilde{v} & a &\longmapsto \tilde{a} \end{aligned}$$

Para comenzar con la construcción del objeto deseado se define para cada $a \in A(\Xi)$ la siguiente función:

$$e(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in A_+, \\ 1 & \text{si } a \notin A_+. \end{cases}$$

Por $|a|$ se denotará una de las aristas $a, \bar{a}$ que pertenece a A_+ .

Además, se denotará como $\pi_{\tilde{v}}$ al estabilizador de $\tilde{v}$ respecto de π y como $\pi_{\tilde{a}}$ al estabilizador de $\tilde{a}$ respecto de π .

Si $v \in V(\Xi)$, es deseable que $G_v = \pi_{\tilde{v}}$. Análogamente, si $a \in A(\Xi)$, se desea que:

$$\pi_{\tilde{a}} = \gamma_w(G_w) \leq G_{\partial_0(w)}$$

Donde $w = \overline{|a|}$ y $\gamma_w(G_w)$ es la imagen de G_w bajo el morfismo asociado al grafo de grupos $\gamma_w : G_w \longrightarrow G_{\partial_0(w)}$.

Es preciso notar que dada la acción de π en el grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ esta acción induce un grafo cociente tal que:

$$\begin{aligned} V(\pi \backslash \tilde{\mathcal{G}}) &= \{\pi \cdot \tilde{v} \mid \tilde{v} \in V(\tilde{\mathcal{G}})\}, \\ A(\pi \backslash \tilde{\mathcal{G}}) &= \{\pi \cdot \tilde{a} \mid \tilde{a} \in A(\tilde{\mathcal{G}})\}. \end{aligned}$$

Y recordar que si $\{v_1, v_2\}$ es una arista de Ξ , entonces $\{\pi \cdot \tilde{v}_1, \pi \cdot \tilde{v}_2\}$ es una arista del grafo cociente.

Obsérvese que $\pi/\pi_{\tilde{v}}$ y $\pi/\pi_{\tilde{a}}$ son:

$$\begin{aligned} \pi/\pi_{\tilde{v}} &= \{g \cdot \pi_{\tilde{v}} \mid g \in \pi\} \\ \pi/\pi_{\tilde{a}} &= \{g \cdot \pi_{\tilde{a}} \mid g \in \pi\} \end{aligned}$$

Las condiciones anteriores forzan a $V(\tilde{\mathcal{G}})$ a ser la unión disjunta de las orbitas $\pi \cdot \tilde{v} \simeq \pi/\pi_{\tilde{v}}$ y a $A(\tilde{\mathcal{G}})$ a ser la unión disjunta de $\pi \cdot \tilde{a} \simeq \pi/\pi_{\tilde{a}}$. Por lo tanto los vértices y aristas del grafo cubriente serán:

$$V(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi/\pi_{\tilde{v}} = \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)/G_v \simeq \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi \cdot \tilde{v},$$

$$A(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi / \pi_{\tilde{a}} = \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) / \gamma_w(G_w) \simeq \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi \cdot \tilde{a},$$

donde:

$$\pi_{\tilde{v}} = G_v \quad \pi_{\tilde{a}} = \gamma_w(G_w),$$

Resta definir $\overline{g\tilde{a}}$, $\partial_0(g\tilde{a})$ y $\partial_1(g\tilde{a})$, para $g \in \pi$ y $a \in A(\tilde{\mathcal{G}})$, es decir, darle una orientación al grafo cubriente. Defínase:

$$\begin{aligned} \overline{g\tilde{a}} &:= g\tilde{a}, \\ \partial_0(g\tilde{a}) &:= gg_a^{-e(a)}\widetilde{\partial_0(a)}, \\ \partial_1(g\tilde{a}) &:= gg_a^{1-e(a)}\widetilde{\partial_1(a)}. \end{aligned}$$

Aquí g_a denota la imagen de a en π .

Se verá que estas fórmulas tienen sentido. Primero note que $\overline{|a|} = \overline{|\tilde{a}|} = w$, por lo que:

$$\pi_{\widetilde{|\tilde{a}|}} = \gamma_{\overline{|\tilde{a}|}}(G_{\overline{|\tilde{a}|}}) = \gamma_{|a|}(G_{|a|}) = \pi_{\tilde{a}}.$$

Y además que: $\tilde{a} = 1 \cdot \pi_{\tilde{a}}$ y $\tilde{\tilde{a}} = 1 \cdot \pi_{\tilde{\tilde{a}}}$; ahora si $g \in \pi$

$$\overline{g\tilde{a}} = g\tilde{a} = g\tilde{\tilde{a}}.$$

Esto le da sentido a la primera igualdad.

Para la segunda hay que considerar $h \in \pi_{\tilde{a}}$ y a

$$hg_a^{-e(a)}\widetilde{\partial_0(a)} = g_a^{-e(a)}\widetilde{\partial_0(a)}$$

■ Si $e(a) = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} hg_a^0\widetilde{\partial_0(a)} &= g_a^0\widetilde{\partial_0(a)} \\ h\widetilde{\partial_0(a)} &= \widetilde{\partial_0(a)} \end{aligned}$$

$h \in \pi_{\partial_0(\tilde{a})}$, por lo que $g_a^{e(a)}\pi_{\tilde{a}}g_a^{-e(a)} \subset \pi_{\partial_0(\tilde{a})} = G_{\partial_0(a)}$

■ Si $e(a) = 1$:

Entonces $\pi_{\tilde{a}} = \gamma_a(G_a)$ y se tiene la relación $g_a\gamma_a(g)g_a^{-1} = \gamma_{\tilde{a}}(g)$ (para $g \in G_a$), por lo que $g_a\pi_{\tilde{a}}g_a^{-1} = \gamma_a(G_a) \subset G_{\partial_0(a)}$ y así $g_a^{e(a)}\pi_{\tilde{a}}g_a^{-e(a)} \subset \pi_{\partial_0(\tilde{a})} = G_{\partial_0(a)}$

Observe que sea cómo sea $e(a)$ se cumple que:

$$\pi_{\tilde{a}} = g_a^{e(a)}\gamma_a(G_a)g_a^{1-e(a)},$$

De manera análoga sustituyendo a por $\tilde{a}$ se obtiene que:

$$g_a^{e(a)-1}\pi_{\tilde{a}}g_a^{1-e(a)} \subset \pi_{\partial_1(\tilde{a})} = G_{\partial_1(a)}.$$

Con lo anterior se ha definido el grafo $\tilde{\mathcal{G}}$, así como la acción de π en $\tilde{\mathcal{G}}$, de modo que $\pi \backslash \tilde{\mathcal{G}} = \Xi$. Más aún, si $a \in A(T)$ se tiene que $g_a = 1$, de donde $\partial_0(\tilde{a}) = \widetilde{\partial_0(a)}$, $\partial_1(\tilde{a}) = \widetilde{\partial_1(a)}$ y además $v \mapsto \tilde{v}$, $a \mapsto \tilde{a}$, definen un levantamiento de $T \xrightarrow{\sim} \tilde{T} \subset \tilde{\mathcal{G}}$ de T en $\tilde{\mathcal{G}}$. A continuación se verá que el grafo construido $\tilde{\mathcal{G}}$ es un árbol.

Teorema 2.3.1. *Sea $\mathcal{G} = (\Xi, \{G_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{G_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : G_a \longrightarrow G_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)})$ un grafo de grupos conexo y no vacío, sea T un árbol maximal de Ξ y A_+ una orientación de Ξ , entonces el grafo $\tilde{\mathcal{G}}$ construido anteriormente es un árbol.*

Demostración. A continuación se verá que $\tilde{\mathcal{G}}$ es conexo.

Sea $a \in A(\Xi)$, entonces:

- Si $e(a) = 0$, entonces $\partial_0(\tilde{a}) = \widetilde{\partial_0(a)}$
- Si $e(a) = 1$, entonces $\partial_1(\tilde{a}) = \widetilde{\partial_1(a)}$

Entonces uno de los extremos de $\tilde{a}$ pertenece a $\tilde{T}$.

El menor subgrafo Ω de $\tilde{\mathcal{G}}$ que contiene a todas las aristas de Ξ es conexo (dado que Ξ es conexo). Más aún (como $\pi \setminus \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \Xi$ es un isomorfismo) $\pi \cdot \Omega = \tilde{\mathcal{G}}$.

Es suficiente probar que existe un subconjunto S de π , que genera a π y tal que para cada $s \in S$ suceda que $\Omega \cup s\Omega$ es conexo.

Esto implicará por inducción sobre n que:

$$\Omega \cup s_1\Omega \cup s_1s_2\Omega \cup \cdots \cup s_1 \cdots s_n\Omega,$$

es conexo.

Considérese a:

$$S = \left(\bigcup_{v \in V(\Xi)} G_{\tilde{v}} \right) \cup \left(\bigcup_{a \in A(\Xi)} \{g_a\} \right).$$

Donde $g_a \in \pi$ tal que $g_a\partial_1(\tilde{a}) \in V(\tilde{T})$

Si $s \in G_{\tilde{v}}$, entonces $\Omega \cup s\Omega$ tienen un vértice en común $\tilde{v}$ y por tanto $\Omega \cup s\Omega$ es conexo.

Si $g_a \in \pi$ como antes, entonces $\Omega \cup g_a\Omega$ tienen un vértice en común, obsérvese que:

- Si $e(a) = 1$, entonces $\partial_0(\tilde{a}) = \partial_0(g_a\tilde{a})$.
- Si $e(a) = 0$, entonces $\partial_1(\tilde{a}) = \partial_1(g_a\tilde{a})$.

Por lo tanto $\tilde{\mathcal{G}}$ es conexo.

Ahora se verá que $\tilde{\mathcal{G}}$ es un árbol. Para esto es suficiente ver que $\tilde{\mathcal{G}}$ no contiene ningún camino cerrado de longitud $n > 0$ sin retroceso.

Sea $\tilde{c}$ un camino cerrado sin retroceso de largo n en $\tilde{\mathcal{G}}$, sea $(s_1\tilde{a}_1, \dots, s_n\tilde{a}_n)$ la sucesión de aristas que determinan ese camino y sean $(v_0, \dots, v_n)$ una sucesión de vértices de la proyección c de un camino $\tilde{c}$ en Ξ . Se tiene que $v_0 = v_n$.

Si $e_i = e(a_i)$ y $g_i = g_{a_i}$ se tiene que:

$$\partial_1(s_n\tilde{a}_n) = s_n g_n^{1-e_n} \tilde{v}_0 = s_1 g_1^{-e_n} \tilde{v}_0 = \partial_0(s_1\tilde{a}_1),$$

$$\begin{aligned}
\partial_1(s_1\tilde{a}_1) &= s_1g_1^{1-e_1}\tilde{v}_1 = s_2g_2^{-e_2}\tilde{v}_1 = \partial_0(s_2\tilde{a}_2), \\
&\vdots \\
\partial_1(s_{n-1}\tilde{a}_{n-1}) &= s_{n-1}g_{n-1}^{1-e_{n-1}}\tilde{v}_{n-1} = s_ng_n^{-e_n}\tilde{v}_n = \partial_0(s_n\tilde{a}_n).
\end{aligned}$$

Poniendo $q_i = s_i g_i^{-e_i}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
s_n g_n^{1-e_n} \tilde{v}_0 &= s_1 g_1^{-e_1} \tilde{v}_0, \\
q_n g_n r_n &= q_1, \\
q_1 g_1 r_1 &= q_2, \\
&\vdots \\
q_{n-1} g_{n-1} r_{n-1} &= q_n.
\end{aligned}$$

Con $r_i \in G_{v_i} = \pi_{\tilde{v}_i}$. De esto se tiene $g_1 r_1 = q_1^{-1} q_1 g_1 r_1 = q_1^{-1} q_2$ y análogamente:

$$g_1 r_1 = q_1^{-1} q_2, \quad g_2 r_2 = q_2^{-1} q_3, \dots, \quad g_n r_n = q_n^{-1} q_1.$$

Luego, multiplicando cada:

$$g_1 r_1 = q_1^{-1} q_2, \quad g_2 r_2 = q_2^{-1} q_3, \dots, \quad g_n r_n = q_n^{-1} q_1.$$

Se tiene que:

$$g_1 r_1 g_2 r_2 \cdots g_n r_n = q_1^{-1} q_2 q_2^{-1} q_3 \cdots q_n^{-1} q_1 = 1.$$

Ahora, considérese a (c, μ) la palabra de tipo c definida por la sucesión $\mu = (1, r_1, r_2, \dots)$. Se va a mostrar que (c, μ) es reducida.

En efecto, supongamos que $a_{i+1} = \bar{a}_i$, de donde $g_{i+1} = g_i^{-1}$ y $e_{i+1} = 1 - e_i$. Entonces se tiene la fórmulas:

$$(s_i g_i^{-e_i}) \cdot g_i r_i = s_{i+1} g_{i+1}^{e_{i+1}},$$

de donde se sigue que $r_i = g_i^{e_i-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_i^{1-e_i}$. Se tiene que demostrar que $r_i \notin \gamma_{a_i}(G_{a_i})$, es decir que:

$$s_i^{-1} s_{i+1} \notin g_i^{1-e_i} \gamma_{a_i}(G_{a_i}) g_i^{e_i-1}.$$

Note que $g_i^{1-e_i} \gamma_{a_i}(G_{a_i}) g_i^{e_i-1} = \pi_{\tilde{y}}$, como $\tilde{c}$ es un camino sin retroceso por lo que $s_i \tilde{a}_i$ difiere de $s_{i+1} \tilde{a}_{i+1} = s_{i+1} \tilde{a}_i$.

Como c es cerrada y (c, μ) es reducida, entonces $|c, \mu|$ en $\pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)$ es distinta de 1.

Por lo que $g_1 r_1 g_2 r_2 \cdots g_n r_n \neq 1$, y esto es una contradicción (pues se tenía que $g_1 r_1 g_2 r_2 \cdots g_n r_n = 1$). Esto prueba el teorema y por lo tanto $\tilde{\mathcal{G}}$ es un árbol.

□

Definición 2.3.2. A $\tilde{\mathcal{G}}$ el cubriente universal de un grafo de grupos $\mathcal{G}$ se le llama **árbol de Bass-Serre**.

Ejemplo 2.3.3. Dado el grafo de grupos Ξ del Ejemplo 2.2.4 que se muestra en la Figura 2.9.

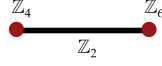


Figura 2.9: Grafo de grupos.

Los vértices del cubriente universal están dados como:

$$V(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)/G_v = \frac{\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_6}{\mathbb{Z}_4} \sqcup \frac{\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_6}{\mathbb{Z}_6}.$$

Y si se considera la orientación $A_+ = \{a\}$ tal que $\partial_0(a) = v_1$, entonces $w = |\bar{a}| = \bar{a}$ y por tanto las aristas del cubriente universal del grafo de grupos $\mathcal{G}$ antes dado son:

$$A(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)/\gamma_w(G_w) = \frac{\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_6}{\{[0]_4, [2]_4\}} \cong \frac{\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_6}{\mathbb{Z}_2}$$

La Figura 2.10 (obtenida de [10]) muestra el cubriente universal de $\tilde{\mathcal{G}}$

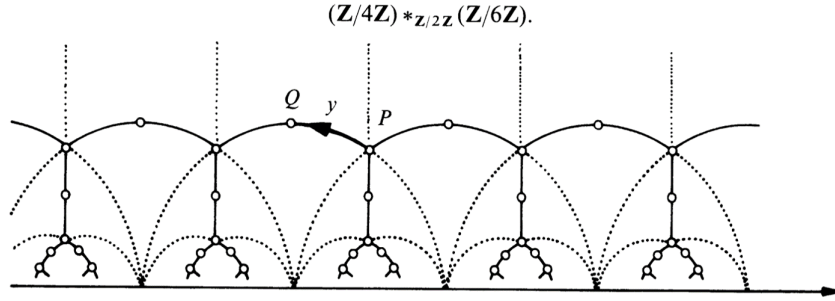


Figura 2.10: Cubriente universal $\tilde{\mathcal{G}}$.

Ejemplo 2.3.4. Para el grafo de grupos del Ejemplo 2.2.5 que se muestra en la Figura 2.11 :

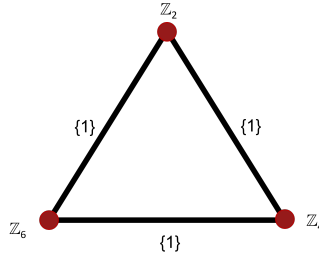


Figura 2.11: Grafo de grupos $\mathcal{G}$.

Los vértices y aristas del cubriente universal están dados de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)/G_v = \frac{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_2} \sqcup \frac{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_4} \sqcup \frac{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_6}.$$

$$A(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) / \gamma_w(G_w) = (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}) \sqcup (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}) \sqcup (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z})$$

Ejemplo 2.3.5. Para el grafo de grupos del Ejemplo 2.2.6 que se muestra en la Figura 2.12 :

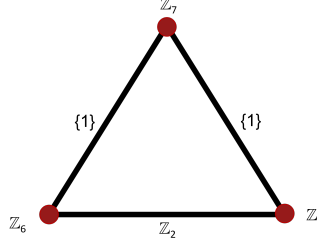


Figura 2.12: Grafo de grupos $\mathcal{G}$.

Se denotará por $\pi := \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) = \langle x, y, z, a_3 \mid x^7, y^4, z^6, y^2 z^{-3} \rangle$ al grupo fundamental del grafo de grupos, luego los vértices y aristas del cubriente universal están dados de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{v \in V(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) / G_v = \frac{\pi}{\mathbb{Z}_4} \sqcup \frac{\pi}{\mathbb{Z}_6} \sqcup \frac{\pi}{\mathbb{Z}_7}.$$

$$A(\tilde{\mathcal{G}}) = \bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) / \gamma_w(G_w) = \frac{\pi}{\{[0]_7\}} \sqcup \frac{\pi}{\{[0]_4\}} \sqcup \frac{\pi}{\{[0]_6, [3]_6\}} \cong (\pi) \sqcup (\pi) \sqcup \frac{\pi}{\mathbb{Z}_2}$$

2.4. Teorema de la Estructura de Grafos de Grupos.

Definición 2.4.1. Un grupo G actúa **sin inversión** en un grafo Ξ si no existe ninguna arista $a \in A(\Xi)$ y no existe $g \in G$ tal que $\partial_0(a) = g \cdot \partial_1(a)$ y $\partial_1(a) = g \cdot \partial_0(a)$.

Sea G un grupo que actúa sin inversión en un grafo conexo y no vacío Γ . En esta sección se verá que si Γ es un árbol, entonces G puede identificarse con el grupo fundamental de algún grafo de grupos $\mathcal{G}$ con grafo asociado Ξ , donde $\Xi = G \setminus \Gamma$, en especial se construirá a $\mathcal{G}$.

Sea T un árbol maximal de Ξ , sea $j: T \longrightarrow \Gamma$ un levantamiento de T y A_+ una orientación de Ξ , defínase a:

$$e(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in A_+, \\ 1 & \text{si } a \notin A_+ \text{ es decir si } \bar{a} \in A. \end{cases}$$

También es deseable extender al levantamiento $j: T \longrightarrow \Gamma$, a una sección $j: A(\Xi) \longrightarrow A(\Gamma)$ tal que $j(\bar{a}) = \overline{j(a)}$.

Para esto es suficiente definir a $j(a)$ para $a \in A_+ - \text{edge}(T)$, en este caso se elige a $j(a)$ tal que $\partial_0(j(a)) \in V(j(T))$. Por lo que $\partial_0(j(a)) = j(\partial_0(a))$. También se elige a $\varrho_a \in G$ tal que

$\partial_1(j(a)) = \varrho_a j(\partial_1(a))$, esto es posible dado que $\partial_1(j(a))$ y $j(\partial_1(a))$ tienen la misma proyección $\partial_1(a) \in V(\Xi)$. Entonces extendemos $a \mapsto \varrho_a$ a todas las aristas de Ξ con las fórmulas:

$$\varrho_{\bar{a}} = \varrho_a^{-1} \quad \text{y} \quad \varrho_a = 1 \quad \text{si } a \in A(T)$$

Para cada $a \in A(\Xi)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_0(j(a)) &= \varrho_a^{-e(a)} j(\partial_0(a)), \\ \partial_1(j(a)) &= \varrho_a^{1-e(a)} j(\partial_1(a)). \end{aligned}$$

El grafo de grupos $\mathcal{G}$ queda definido por las fórmulas:

$$\begin{aligned} G_v &= G_{j(v)} \quad \text{para } v \in V(\Xi), \\ G_a &= G_{j(a)} \quad \text{para } a \in A(\Xi). \end{aligned}$$

Donde $G_{j(v)}$ y $G_{j(a)}$ denotan respectivamente los estabilizadores de $j(v) \in V(\Gamma)$ y $j(a) \in A(\Gamma)$ bajo la acción de G .

Y el homomorfismo $\gamma_a : G_a \rightarrow G_{\partial_1(a)}$ donde $g \mapsto \varrho_a^{e(a)-1} g \varrho_a^{1-e(a)}$

Sea $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) \rightarrow G$ el homomorfismo definido por las inclusiones $G_v \rightarrow G$ y por $\phi(g_a) = \varrho_a$.

Definamos a:

$$\psi : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \Gamma,$$

como:

$$\psi(g\tilde{v}) = \phi(g)j(v) \quad \text{y} \quad \phi(g\tilde{a}) = \phi(g)j(a).$$

Aquí note que $g \in \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T)$, así $g\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{G}}$, además $\phi(g) \in G$ y $j(v) \in V(\Gamma)$ (pues $j : V(\Xi) \rightarrow V(\Gamma)$).

Se puede ver que ψ es un morfismo de grafos y que ψ es ϕ -equivariante.

Sea Ω el menor subgrafo de Γ que contiene a $j(a)$ para cada $a \in V(\Xi)$. Cada arista de Ω tiene extremos en $j(T)$ y tenemos que $G \cdot \Omega = \Gamma$. Más aún, Ω está contenido en $\psi(\tilde{\mathcal{G}})$ y ϕ induce un isomorfismo entre los estabilizadores de los vértices y aristas correspondientes de $\tilde{\mathcal{G}}$ y Γ . Aplicando el siguiente lema a ϕ (y por tanto a ψ).

Definición 2.4.2. *Un árbol de representantes $\Gamma \bmod G$ es cualquier subárbol T de Γ que es unlevantamiento de un árbol maximal en $G \setminus \Gamma$.*

Lema 2.4.3. *Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo Γ y sea T un árbol de representantes de $\Gamma \bmod G$. Sea Ω un subgrafo de Γ que contiene a T , en el que cada arista tiene un extremo en T y es tal que $G \cdot \Omega = \Gamma$. Para cada arista a de Ω con origen en T , sea g_a un elemento de G tal que $g_a \partial_1(a) \in V(T)$. El grupo H generado por los elementos g_a y los estabilizadores G_v (con $v \in V(T)$) es igual a G .*

Se tiene que ϕ es suprayectiva (y ψ también) y que ϕ induce un isomorfismo entre los estabilizadores de los vértices y las aristas y esto nos dice que ψ es localmente inyectivo.

Teorema 2.4.4. *Con las hipótesis y notación anteriores, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- 1) Γ es un árbol.
- 2) $\psi : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \Gamma$ es un isomorfismo.

3) $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, \Xi, T) \longrightarrow G$ es un isomorfismo.

Demostración. Para (1) $\Rightarrow$ (2) se sigue de que ya se tenía que era suprayectiva y de:

Lema 2.4.5. *Sea $f : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \Gamma$ un morfismo localmente inyectivo, de un grafo conexo $\tilde{\mathcal{G}}$ a un árbol, entonces f es inyectiva.*

Para (2) $\Rightarrow$ (1) se sigue del Teorema 2.3.1.

Para (2) $\Rightarrow$ (3), considérese a:

$$N = \text{kernel } \phi$$

Y a $v \in V(\Xi)$, como ϕ es un isomorfismo entre $G_{\tilde{v}}$ y $G_{j(v)}$, entonces $N \cap G_{\tilde{v}} = \{1\}$.

Si n es un elemento no trivial N , entonces $\tilde{v}$ y $n\tilde{v}$ son distintos en $\tilde{\mathcal{G}}$ pues $N \cap G_{\tilde{v}} = \{1\}$ y tienen la misma imagen $j(v)$ en Γ lo cual es una contradicción.

Para (3) $\Rightarrow$ (2) obsérvese que $\Xi \simeq \pi \setminus \Gamma = G \setminus \Gamma$.

□

Corolario 2.4.6. *Supongamos que Γ es un árbol. Sea R un subgrupo de G generado por G_v , $v \in V(\Gamma)$. Entonces R es un subgrupo normal de G , y G/R puede ser identificada con el grupo fundamental del grafo $\Xi = G \setminus \Gamma$.*

Corolario 2.4.7. *Supongamos que Γ es un árbol y que $\Xi = G \setminus \Gamma$ es un lazo. Entonces G es una extensión HNN.*

Ejemplo 2.4.8. Consideremos al grafo Γ (Figura 2.13) cuyo conjunto de vértices es $V(\Gamma) = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, cuyo conjunto de aristas es $A(\Gamma) = \{a_n^+, a_n^- \mid n \in \mathbb{Z}\}$, donde $\partial_0(a_n^+) = n+1$, $\partial_0(a_n^-) = n$ y $\overline{a_n^+} = a_n^-$. La acción de $\mathbb{Z}$ en la realización geométrica de este grafo tiene una única órbita vértice y una única órbita arista por lo que $|\Xi| = |\mathbb{Z} \setminus \Gamma|$ consta de un único vértice y una única arista, por tanto es un lazo, además note que los estabilizadores vértice y arista de Γ son todos triviales de modo que el grafo de grupos inducido por esta acción tiene grupo vértice y grupo arista triviales. De esto se tiene que $\pi_1(\Xi) = \{0\} *_{\{0\}} = \mathbb{Z}$, por lo que en efecto $\mathbb{Z}$ es una extensión HNN.

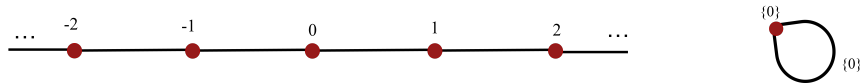


Figura 2.13: Realizaciones geométricas del árbol Γ y grafo de grupos inducido por la acción de $\mathbb{Z}$ en Γ con grafo subyacente Ξ .

Capítulo 3

Descomposiciones JSJ

En este capítulo se estudiará a las descomposiciones JSJ para grupos, la idea de dichas descomposiciones aparece por primera vez en topología para el estudio de 3-variedades con la teoría de subvariedades características desarrollada por Jaco, Shalen y Johansson a quienes deben su nombre. En el caso de los grupos como resultado de la teoría de Bass-Serre se tiene que a cada descomposición de un grupo como un producto amalgamado le corresponde un árbol de Bass-Serre tal que la acción de este grupo induce un grafo de grupos con un grupo fundamental determinado por la descomposición dada, la intención de las descomposiciones JSJ es la de estudiar a estos árboles de Bass-Serre, establecer relaciones entre ellos y estudiar descomposiciones maximales en cierto sentido. Para estudiar a estos árboles se verá a que familia pertenecen sus estabilizadores arista y la elipticidad de sus grupos vértice. Se definirá una relación de dominación entre estos árboles y a partir de esta se definirán los espacios de deformación, luego las descomposiciones JSJ serán elementos en algún sentido maximales de estos espacios de deformación.

3.1. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles.

Para estudiar las relaciones entre los árboles de Bass-Serre será de interés estudiar a los árboles cuyos estabilizadores de aristas pertenecen a una familia cerrada bajo conjugación y subgrupos. Note que si los estabilizadores de aristas pertenecen a una familia con una cierta propiedad por ejemplo la familia de grupos cíclicos, finitos, abelianos o con alguna otra propiedad propia de los grupos, entonces la partición asociada al árbol es una descomposición cíclica, finita, abeliana, etc.

Definición 3.1.1. Una familia de subgrupos $\mathcal{A}$ de un grupo G es una **familia plena** si:

- 1) Para toda $g \in G$ y para toda $H \in \mathcal{A}$ sucede que $gHg^{-1} \in \mathcal{A}$
- 2) Para todo $H \in \mathcal{A}$ y todo $K \leq H$ se tiene que $K \in \mathcal{A}$

Dada $\mathcal{H}$ una colección finita de subgrupos de G y $\mathcal{A}$ una familia plena, si $H \in \mathcal{H}$ es tal que $H \in \mathcal{A}$, entonces para todo $g \in G$ se tiene que $gHg^{-1} \in \mathcal{A}$ y todo subgrupo de H pertenece a $\mathcal{A}$.

Definición 3.1.2. Dados G un grupo, una familia plena $\mathcal{A}$ de G y T un árbol tal que $G \curvearrowright T$ sin inversión y sin vértices redundantes. El árbol T es un **$\mathcal{A}$ -árbol** si para todo $a \in A(T)$ se tiene que G_a el estabilizador de a pertenece a $\mathcal{A}$

Una vez que se tiene una familia de $\mathcal{A}$ -árboles será de interés estudiar a los elementos de esta familia para los que los grupos pertenecientes a $\mathcal{H}$ una colección finita de subgrupos de G fijan un punto. Esto será útil para determinar cuando los grupos vértice de una partición son subgrupos vértice de otra salvo conjugación.

Definición 3.1.3. Dada una colección finita $\mathcal{H}$ de subgrupos de G y T un árbol, este es un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol si T es un $\mathcal{A}$ -árbol y para todo $H \in \mathcal{H}$ existe un vértice $v \in V(T)$ tal que G_v el estabilizador v cumple que $H \leq G_v$.

Si se tiene a T un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol, todo $H \in \mathcal{H}$ fija algún vértice en T por lo que H está contenido en el conjugado de algún grupo vértice del grafo de grupos asociado al cociente T/G . Además notemos que los $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles son invariantes bajo conjugación de los elementos de $\mathcal{H}$.

Las particiones o descomposiciones de un grupo visto como un producto amalgamado pueden estudiarse en terminos de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles.

Definición 3.1.4. Un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol también se llama **árbol sobre $\mathcal{A}$ relativo a $\mathcal{H}$** .

Si un grupo G actúa de manera no trivial sobre un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol se dirá que G **se parte (descompone) sobre $\mathcal{A}$ relativo a $\mathcal{H}$**

Note que un grupo con una partición de la forma $G_1 *_{A_1} G_2 *_{A_2} \cdots *_{A_{n-1}} G_n$ tiene asociado un $\mathcal{A}$ -árbol donde $\mathcal{A}$ es una familia plena tal que $\{A_1, \dots, A_{n-1}\} \subseteq \mathcal{A}$. Más aún éste es un $(\mathcal{A}, \{G_1, \dots, G_n\})$ -árbol.

3.2. Funciones entre árboles y dominación.

A continuación se definirá la noción de elípticidad. En terminos de acciones en árboles un grupo será elíptico si fija un vértice en el árbol donde actúa, lo que en terminos de grafos de grupos inducidos dejará que el grupo es un subgrupo de un conjugado de un grupo vértice.

Definición 3.2.1. Dado T un árbol sobre el que actúa un grupo G . Un elemento $g \in G$ es un **elemento elíptico** si existe $v \in V(T)$ tal que $g \cdot v = v$ y un subgrupo H es un **subgrupo elíptico** si existe $v \in V(T)$ tal que $H \cdot v = v$.

Un elemento $g \in G$ es un **elemento hiperbólico** si no es elíptico y un subgrupo H es un **subgrupo hiperbólico** si no es elíptico.

Cuando se estudia la relación entre dos árboles se tiene que un árbol es elíptico respecto de otros si sus estabilizadores arista fijan un vértice en el otro, es decir si sus estabilizadores arista son subgrupos de los estabilizadores vértice del otro.

Definición 3.2.2. Dados dos árboles T_1 y T_2 sobre los que actúa un grupo G . El árbol T_1 es **elíptico respecto del árbol T_2** si para toda $a \in A(T_1)$ se tiene que G_a el estabilizador de a es elíptico al actuar en T_2 .

Recuerde que si se tiene una función $f : A \rightarrow B$ esta es G -equivariante si para toda $g \in G$ y para todo $a \in A$ se cumple que $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$.

Definición 3.2.3. Una **función entre árboles** $f : T_1 \rightarrow T_2$ es una función G -equivariante tal que manda vértices en vértices y aristas en caminos (posiblemente constantes).

Definición 3.2.4. Un árbol T_1 **domina** a T_2 si existe una función entre árboles $f : T_1 \rightarrow T_2$. A f se le llama **función de dominación**.

Observe que si T_1 domina a T_2 esto es equivalente a que para todo $v \in V(T_1)$ existe $v' \in V(T_2)$ tal que G_v fija a v' , es decir todo subgrupo elíptico de T_1 es elíptico en T_2 . En este sentido la dominación permite comparar a los distintos árboles de Bass-Serre de un grupo, más aún permite ver como es que se comportan los grupos elípticos de una partición respecto de otra. La dominación nos permite saber cuando los grupo vértice de una partición están contenidos en subgrupos vértice de otra.

3.3. Espacios de deformación.

Una vez definida la relación de dominación es posible definir a los espacios de dominación. Estos quedarán definidos de la siguiente manera.

Definición 3.3.1. *Dados dos árboles T_1, T_2 sobre los que actúa G sin inversiones, éstos **pertenecen al mismo espacio de deformación $\mathcal{D}$** si T_1 domina a T_2 y T_2 domina a T_1 .*

Nótese que dos árboles pertenecen al mismo espacio de deformación si tienen exactamente los mismos subgrupos elípticos.

Definición 3.3.2. *El conjunto de $\mathcal{A}$ -árboles que pertenecen al mismo espacio de deformación es un **espacio de deformación $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{A}$** .*

Aquí un espacio de deformación $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{A}$ consta de todos los árboles cuyos estabilizadores arista pertenecen a $\mathcal{A}$ y tales que se dominan entre si, es decir que tienen los mismos subgrupos elípticos.

Definición 3.3.3. *El conjunto de $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árboles que pertenecen al mismo espacio de deformación es un **espacio de deformación $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{A}$ relativo a $\mathcal{H}$** .*

La relación de dominación en árboles induce una relación de dominación en espacios de deformación.

Definición 3.3.4. *Dados $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos espacios de deformación, $\mathcal{D}_1$ **domina a $\mathcal{D}_2$** si para todo $T_1 \in \mathcal{D}_1$ y para todo $T_2 \in \mathcal{D}_2$ se tiene que T_1 domina a T_2 .*

Observe que un espacio de deformación $\mathcal{D}_1$ domina a otro $\mathcal{D}_2$ si para todo árbol $T_1 \in \mathcal{D}_1$ y para todo árbol T_2 se tiene que para todo $v_1 \in V(T_1)$, existe $v_2 \in V(T_2)$ tal que G_{v_1} fija a v_2 .

3.4. Espacio de deformación JSJ.

En esta sección se comenzará por definir la noción de elipticidad universal, posteriormente se definirá el espacio de deformación JSJ sobre $\mathcal{A}$ relativo a $\mathcal{H}$ que es un espacio de deformación de árboles que se parten sobre grupos universalmente elípticos relativos a $\mathcal{H}$.

Definición 3.4.1. *Un subgrupo $H \leq G$ es **universalmente elíptico** si es elíptico en todo $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol. Es decir, si para todo $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol T , existe $v \in V(T)$ tal que $H \cdot v = v$.*

Esto nos dice H es universalmente elíptico si para todo árbol T con estabilizadores arista en $\mathcal{A}$ y tal que los grupos $H \in \mathcal{H}$ son elípticos en T , existe $v \in V(T)$ tal que $H \cdot v = v$, es decir H fija un punto en todo $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol.

Definición 3.4.2. *Un árbol T es un **árbol universalmente elíptico** si sus estabilizadores arista son universalmente elípticos. Es decir, si T es elíptico respecto a todo $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol.*

Un árbol T es universalmente elíptico si para toda $a \in A(T)$ y para todo T' un $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -árbol, existe $v' \in V(T')$ tal que $G_a \cdot v' = v'$.

Definición 3.4.3. *Dada una familia plena $\mathcal{A}$, se define como $\mathcal{A}_{ell}$ al subconjunto de subgrupos universalmente elípticos de $\mathcal{A}$, es decir:*

$$\mathcal{A}_{ell} := \{H \in \mathcal{A} \mid \forall (\mathcal{A}, \mathcal{H}) - \text{árbol } T \quad \exists v \in V(T) \quad H \cdot v = v\}$$

El conjunto $\mathcal{A}_{ell}$ es cerrado bajo conjugación y bajo subgrupos. Note que un árbol es universalmente elíptico si y sólo si es un $\mathcal{A}_{ell}$ -árbol. Con todo lo anterior se está listo para definir a los árboles JSJ a los que haciendo un abuso de lenguaje también se les llama descomposiciones JSJ puesto que cada uno de estos árboles está asociado al grupo fundamental de un grafo de grupos dado por la acción de G en T que determina una partición del grupo G .

Definición 3.4.4. *Un árbol JSJ (o descomposición JSJ) de G sobre $\mathcal{A}$ es un $\mathcal{A}$ -árbol T tal que:*

- *El árbol T es universalmente elíptico.*
- *El árbol T domina a cualquier otro árbol T' universalmente elíptico.*

Al grafo de grupos del cociente $\mathcal{G} = T \setminus G$ se le llama una descomposición JSJ.

Observe que una descomposición JSJ de un grupo G , es la partición que es el grupo fundamental de un grafo de grupos $\mathcal{G} = T \setminus G$, donde T es un $\mathcal{A}_{ell}$ -árbol y la segunda condición es una condición de maximalidad que dice que los estabilizadores vértice de T son tan pequeños como es posible bajo la condición de que los subgrupos arista sigan estando en $\mathcal{A}$ (son elípticos en todo árbol universalmente elíptico en $\mathcal{A}$ -árboles). En este sentido las descomposiciones JSJ son maximales respecto a la dominación. Si los elementos de $\mathcal{A}$ cumplen alguna propiedad de grupos (finitos, abelianos, cíclicos, etc.) entonces se dice que la descomposición JSJ es una descomposición JSJ sobre finitos, abelianos, cíclicos, etc.

Las descomposiciones JSJ no siempre existen y si existen no siempre son no triviales, sin embargo el siguiente Teorema que puede consultarse en [4] establece condiciones suficientes para su existencia.

Teorema 3.4.5. *Dado $\mathcal{A}$ una familia plena arbitraria de subgrupos de un grupo dado G . Si G es finitamente presentado, entonces tiene una descomposición JSJ sobre $\mathcal{A}$. Más aún, existe un árbol JSJ cuyos estabilizadores arista y vértice son finitamente generados.*

Como se observó en la Sección 1.3.1 los grupos hiperbólicos son finitamente presentados por lo que existe una descomposición JSJ de ellos respecto de cualquier familia plena $\mathcal{A}$. En este trabajo se estudiarán a las descomposiciones JSJ de grupos hiperbólicos donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de subgrupos cíclicos de G .

Capítulo 4

Grafos de espacios.

En este capítulo se presenta una forma topológica de obtener las ideas de los Capítulos 2 y 3. La construcción de grafos de espacios será una herramienta importante para tratar a los grupos hiperbólicos con un fin, pues dará información sobre sus descomposiciones y permitirá relacionarla con propiedades de objetos topológicos.

4.1. Grafos de espacios.

De manera análoga a los grafos de grupos es posible construir un grafo de espacios a partir de la realización geométrica de un grafo dado asociando espacios topológicos a los vértices y aristas. Más aún dado un grafo de espacios a éste se le puede hacer corresponder una realización geométrica.

Definición 4.1.1. *Un grafo de espacios es una cuarteta:*

$$\mathcal{X} = (\Xi, \{X_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{X_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}).$$

Donde Ξ es un grafo, $\{X_v\}_{v \in V(\Xi)}$ es una familia de espacios topológicos indexada por el conjunto de vértices del grafo Ξ , $\{X_a\}_{a \in A(\Xi)}$ es una familia de espacios topológicos indexada por el conjunto de aristas del grafo Ξ , $\{\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}$ es una familia de funciones continuas π_1 -inyectivas y donde además para toda $a \in A(\Xi)$ se tiene que $X_a = X_{\bar{a}}$. A las funciones continuas γ_a de la familia de morfismos asociada al grafo de espacios que van de espacios arista a espacios vértice se los llamará **morfismos de pegado**.

Dado un grafo de grupos a éste se le puede asociar la realización geométrica de un grafo de espacios, haciendo corresponder a cada grupo vértice un espacio vértice, a cada grupo arista un espacio arista y a cada monomorfismo del grafo de grupos una función continua de la familia de morfismos de pegado del grafo de espacios, tal que el grupo fundamental de X_v es G_v , el grupo fundamental de X_a es G_a , y el morfismo de pegado del grafo de espacios induce el monomorfismo del grafo de grupos bajo el funtor π_1 .

Definición 4.1.2. *Dado $\mathcal{X}$ un grafo de espacios asociado al grafo Ξ , el espacio total $|\mathcal{X}|$ de $\mathcal{X}$ es:*

$$|\mathcal{X}| = \frac{\left(\bigsqcup_{v \in V(\Xi)} X_v \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{a \in A(\Xi)} X_a \times [0, 1] \right)}{\sim}$$

Donde $\sim$ está definida por las siguiente identificaciones:

$$X_a \times [0, 1] \longrightarrow X_{\bar{a}} \times [0, 1]$$

$$(x, t) \mapsto (x, 1 - t)$$

$$X_a \times \{1\} \longrightarrow X_{\partial_1(a)}$$

$$(x, 1) \mapsto \gamma_a(x)$$

Si $\mathcal{X}$ es un grafo de espacios su espacio total asociado es también llamado **realización geométrica del grafo de espacios $\mathcal{X}$** .

En especial será conveniente estudiar grafos de espacios en los que los espacios arista y vértice son CW-complejos.

Ejemplo 4.1.3. A continuación se construirá un grafo de espacios con espacios CW-complejos, asociado a un grafo Ξ y se construirá el grafo total $|\mathcal{X}|$ de dicho grafo de espacios.

Considérese el grafo de la Figura 4.1:

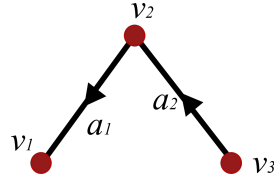


Figura 4.1: Grafo Ξ

Y considérense a los CW-complejos asociados a los vértices y aristas que se muestran en la Figura 4.2:

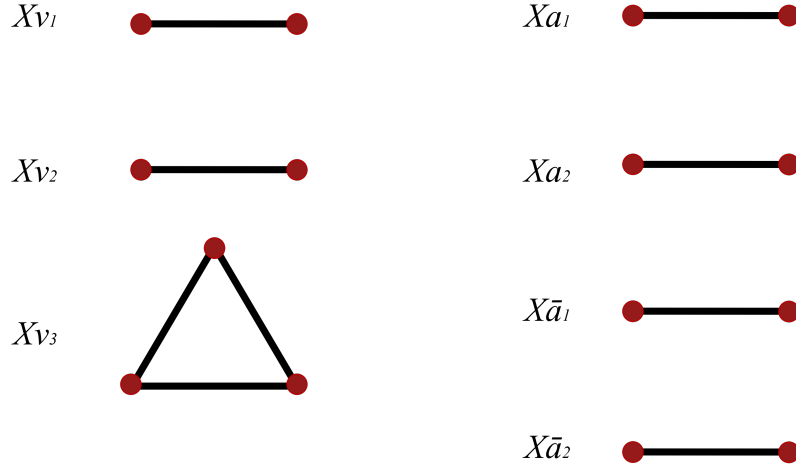


Figura 4.2: Espacios vértice y espacios aristas.

De esto se tiene una familia de espacios vértice $\{X_{v_1}, X_{v_2}, X_{v_3}\}$ y una familia de espacios arista $\{X_{a_1}, X_{a_2}, X_{\bar{a}_1}, X_{\bar{a}_2}\}$. Para poder definir un grafo de espacios hace falta definir una familia de morfismos π_1 -inyectivos de las aristas a los vértices. Considérese a los morfismos de pegado como se muestran en la Figura 4.3:

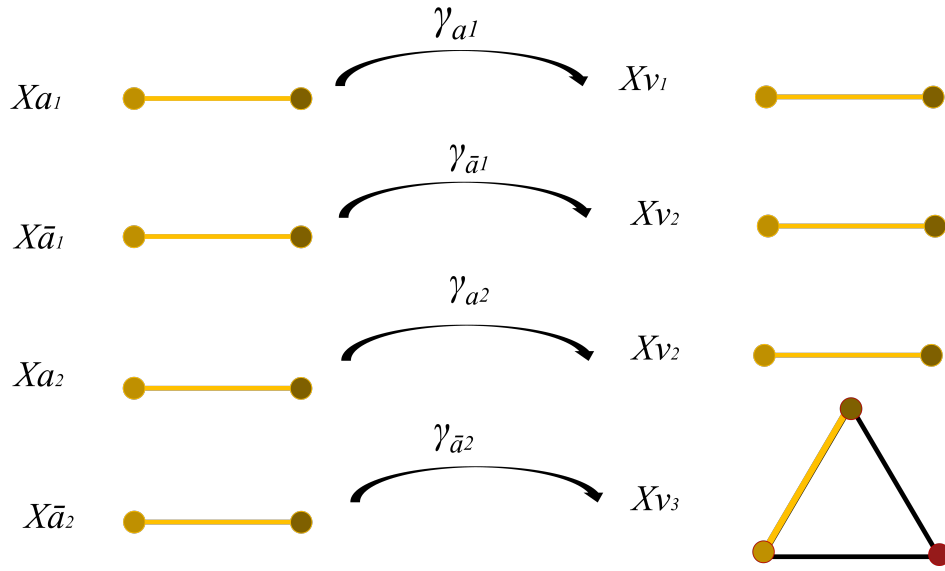


Figura 4.3: Morfismos de pegado

Obsérvese que estos morfismos son π_1 -inyectivos dado que el grupo fundamental de los espacios arista es trivial. Así se tiene un grafo de espacios:

$$(\Xi, \{X_{v_1}, X_{v_2}, X_{v_3}\}, \{X_{a_1}, X_{a_2}, X_{\bar{a}_1}, X_{\bar{a}_2}\}, \{\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}) = \mathcal{X}$$

Luego, considérese la unión disjunta de los espacios vértice y los espacios arista; véase la Figura 4.4:

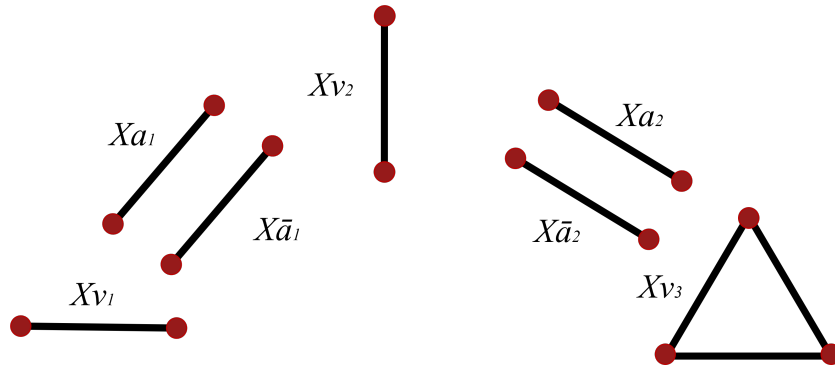


Figura 4.4: Unión disjunta de los espacios arista y espacios vértice.

A continuación se obtendrá el espacio total.

$$|\mathcal{X}| = \frac{\left(\bigsqcup_{v \in V(\Xi)} X_v \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{a \in A(\Xi)} X_a \times I \right)}{\sim}$$

Para esto se debe identificar a los espacios arista X_{a_1} y X_{a_2} respectivamente con sus espacios arista idénticos de las aristas inversas $X_{\bar{a}_1}$ y $X_{\bar{a}_2}$, y también a las tapas de los cilindros de los espacios arista

con los espacios vértice respecto de los morfismos $\{\gamma_a\}_{a \in A(\Xi)}$. Esta identificación se corresponde a la Figura 4.5:

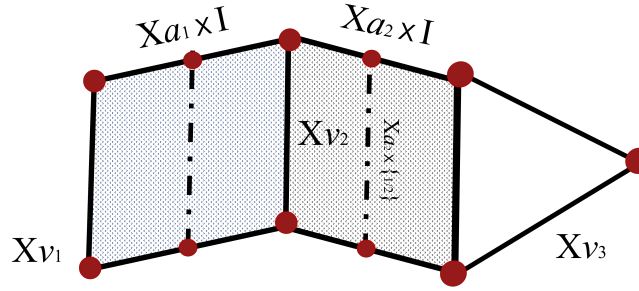


Figura 4.5: Espacio total $|\mathcal{X}|$.

Ejemplo 4.1.4. Dado el grafo Ξ con realización geométrica la Figura 4.6:

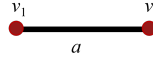


Figura 4.6: Grafo Ξ .

Se considerarán dos grafos de espacios $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ con espacios vértice y arista como se muestra en la Figura 4.7 respectivamente y cuyas familias de morfismos son $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{v_2}$ y $\gamma_{\bar{a}} : X_{\bar{a}} \rightarrow X_{v_1}$ para $\mathcal{X}$ tales que envían al punto $X_a = X_{\bar{a}}$ a un punto en las respectivas circunferencias X_{v_1}, X_{v_2} y a $\gamma'_a : X_a \rightarrow X_{v_2}$ y $\gamma'_{\bar{a}} : X_{\bar{a}} \rightarrow X_{v_1}$ para $\mathcal{X}'$ como morfismos identidad.

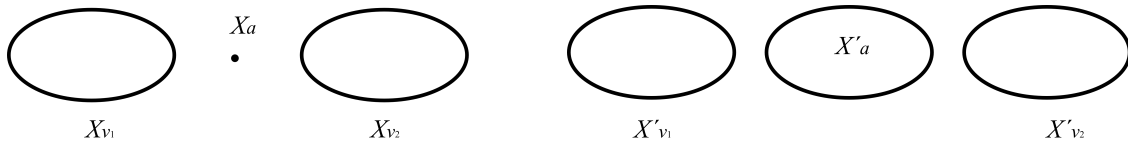


Figura 4.7: Espacios vértice y aristas de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$.

Los espacios totales (o realizaciones geométricas) $|\mathcal{X}|$ y $|\mathcal{X}'|$ se muestran en la Figura 4.8

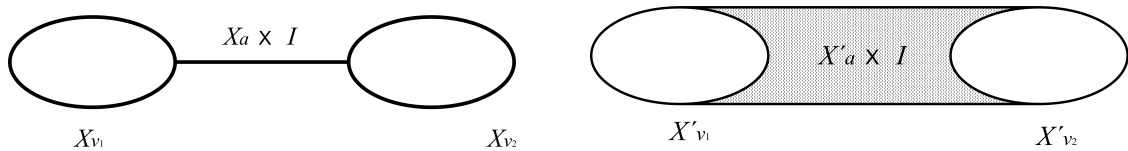


Figura 4.8: Espacios totales $|\mathcal{X}|$ y $|\mathcal{X}'|$.

Definición 4.1.5. Sea $\mathcal{X}$ un grafo de espacios con grafo asociado Ξ y sea $\eta : |\mathcal{X}| \rightarrow \Xi$ el morfismo que asocia a los espacios vértice y arista con los correspondientes vértices y aristas. Si Ξ' es un

subgrafo de Ξ , entonces $\eta^{-1}(\Xi')$ tiene una estructura de grafo de espacios $\mathcal{X}'$ con grafo asociado Ξ' , el grafo de espacios $\mathcal{X}'$ es un **subgrafo de espacios** de $\mathcal{X}$.

A continuación definiremos los morfismos entre grafos de espacios.

Definición 4.1.6. *Dados dos grafos de espacios:*

$$\mathcal{X} = (\Xi, \{X_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{X_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}),$$

$$\mathcal{Y} = (\Gamma, \{Y_v\}_{v \in V(\Gamma)}, \{Y_a\}_{a \in A(\Gamma)}, \{\zeta_a : Y_a \longrightarrow Y_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Gamma)}).$$

Un **morfismo entre grafos de espacios** $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ consta de dos familias de funciones $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi)}$ y una función $\eta : \Xi \longrightarrow \Gamma$ entre los grafos dados determinada por dos funciones, $\eta_V : V(\Xi) \longrightarrow V(\Gamma)$ y $\eta_A : A(\Xi) \longrightarrow A(\Gamma)$ tal que para toda $a \in A(\Xi)$ se tiene que:

$$\eta_V(\partial_0(a)) = \partial_0(\eta_A(a)) \quad \eta_V(\partial_1(a)) = \partial_1(\eta_A(a)).$$

Y donde las familias de funciones $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi)}$ son tales que para toda $v \in V(\Xi)$ se tiene que $\varphi_v : X_v \longrightarrow X_{\eta_V(v)}$ es una función continua y para toda $a \in A(\Xi)$ se tiene que $\varphi_a : X_a \longrightarrow X_{\eta_A(a)}$ es una función continua.

Más aún un **morfismo entre grafos localmente inyectivo** es un morfismo entre grafos de espacios tal que las familias de las funciones $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi)}$ y $\{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi)}$ son localmente inyectivas.

4.2. Grupo Fundamental de un Grafo de Espacios.

La realización geométrica de un grafo de espacios nos permite asociarle a éste un grupo fundamental del grafo de espacios dado.

Definición 4.2.1. *El grupo fundamental G del grafo de espacios $\mathcal{X}$ se define como el grupo fundamental del espacio total $|\mathcal{X}|$, dado $\mathcal{X}$ un grafo de espacios se tiene que $\pi_1(\mathcal{X}) := \pi_1(|\mathcal{X}|)$.*

Ejemplo 4.2.2. Si considera el grafo de espacios del Ejemplo 4.1.3 este tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$

Ejemplo 4.2.3. Si se considera a los grafos de espacios del Ejemplo 4.1.4 se tiene que $\pi_1(\mathcal{X}) = \pi_1(|\mathcal{X}|) = F_2$ es el grupo libre en dos elementos y $\pi_1(\mathcal{X}') = \pi_1(|\mathcal{X}'|) = \mathbb{Z}$.

Si se tiene un grafo de grupos $\mathcal{G}$ y a este se le asocia un grafo de espacios $\mathcal{X}$ en el que los grupos vértice y grupos arista sean grupos fundamentales de los espacios vértice y espacios arista respectivamente, entonces $\pi_1(\mathcal{G}) = \pi_1(\mathcal{X})$.

4.3. Cubrientes de Grafos de Espacios.

Dado un espacio topológico X una **descomposición a un grafo de espacios** es un grafo de espacios $\mathcal{X}$ tal que el $X = |\mathcal{X}|$.

En esta sección se estudiarán los cubrientes de grafos de espacios. Se considerarán grafos de espacios:

$$(\Xi, \{X_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{X_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}) = \mathcal{X},$$

donde Ξ es conexo y las familias $\{X_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{X_a\}_{a \in A(\Xi)}$ están conformadas por espacios vértice y espacios arista conexos por trayectorias.

Si $(\tilde{X}, p)$ es un cubriente de un espacio total $|\mathcal{X}|$ a éste se le puede dotar de una descomposición a un grafo de espacios. Los espacios vértice de dicha descomposición $\tilde{\mathcal{X}}$ son las componentes conexas de $p^{-1}(X_v)$ con $v \in V(\Xi)$ y se denotan como $\tilde{X}_{\tilde{v}}$; los cilindros de los espacios arista son las componentes conexas de $p^{-1}(X_a \times I)$ con $a \in A(\Xi)$ y se denotan como $\tilde{X}_{\tilde{a}} \times I$.

El grafo subyacente a $\tilde{X}$ denotado como $\tilde{\Xi}$ se obtiene de colapsar a los espacios vértice a puntos y a los cilindros de espacios arista a arcos.

La aplicación cubriente $\tilde{X} \rightarrow X$ induce un morfismo entre grafos de espacios $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ que consta de un morfismo de grafos $\tilde{\Xi} \rightarrow \Xi$ que envía vértices en vértices y aristas en aristas.

Finalmente resta definir la familia de morfismos $\{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}} : \tilde{X}_{\tilde{a}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}}\}$; esta familia será el conjunto de elevaciones de los morfismos de pegado del grafo de espacios que se define a continuación.

Definición 4.3.1. Dado un grafo de espacios $\mathcal{X}$ con grafo subyacente Ξ . Sea $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_1(a)}$ un morfismo de pegado y sea $\tilde{X}_{\tilde{v}}$ un cubriente para un espacio vértice X_v con $v \in V(\Xi)$. Una **elevación de γ_a a $\tilde{X}_{\tilde{v}}$** consta de un cubriente conexo $p_a : \tilde{X}_{\tilde{a}} \rightarrow X_a$ y un levantamiento $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}} : \tilde{X}_{\tilde{a}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}}$ de $\gamma_a \circ p_a$ tal que para cualquier otro cubriente intermedio $\hat{X}_{\hat{a}}$:

$$\tilde{X}_{\tilde{a}} \rightarrow \hat{X}_{\hat{a}} \xrightarrow{q_a} X_a,$$

no existe un levantamiento $\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ de $\gamma_a \circ q_a$.

Dados un morfismo de pegado $\gamma_a : X_a \rightarrow X_v$ y un cubriente de un espacio vértice $\tilde{X}_{\tilde{v}}$, entonces la unión disjunta de los espacios arista $\{\tilde{X}_{\tilde{a}}\}$ de $\tilde{X}$ que están sobre X_a junto con el coproducto de sus morfismos de pegado forman el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{X}_{\tilde{a}} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{\gamma}_{\tilde{a}}} & \tilde{X}_{\tilde{v}} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X_a & \xrightarrow{\gamma_a} & X_v \end{array}$$

Donde $S = \{\tilde{a} \in \tilde{\Xi} : \tilde{a} \in p^{-1}(a)\}$. Obsérvese que este diagrama es un pullback. Es decir, para cualquier espacio X y cualesquiera par de morfismos $g : X \rightarrow X_a$ y $g' : X \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}}$ tales que $p \circ g' = \gamma_a \circ g$, existe un único morfismo $\varphi : X \rightarrow \bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{X}_{\tilde{a}}$ tal que $g = p \circ \varphi$ y $g' = \bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{\gamma}_{\tilde{a}} \circ \varphi$.

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \varphi & & \searrow g' & \\ & & \bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{X}_{\tilde{a}} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \tilde{\gamma}_{\tilde{a}}} & \tilde{X}_{\tilde{v}} \\ & \searrow g & \downarrow p & & \downarrow p \\ & & X_a & \xrightarrow{\gamma_a} & X_v \end{array}$$

Observación 4.3.2. La restricción del pullback de una aplicación continua y una aplicación cubriente a una componente conexa es una **elevación**.

Observación 4.3.3. Una elevación es la restricción de p y $\bigsqcup_{\tilde{a} \in S} \gamma_{\tilde{a}}$ a un espacio arista y un espacio vértice conexos en el cubriente.

Ejemplo 4.3.4. Considérese el grafo de grupos del Ejemplo 4.1.3 y a $\tilde{X}$ el cubriente que se muestra en la Figura 4.9:

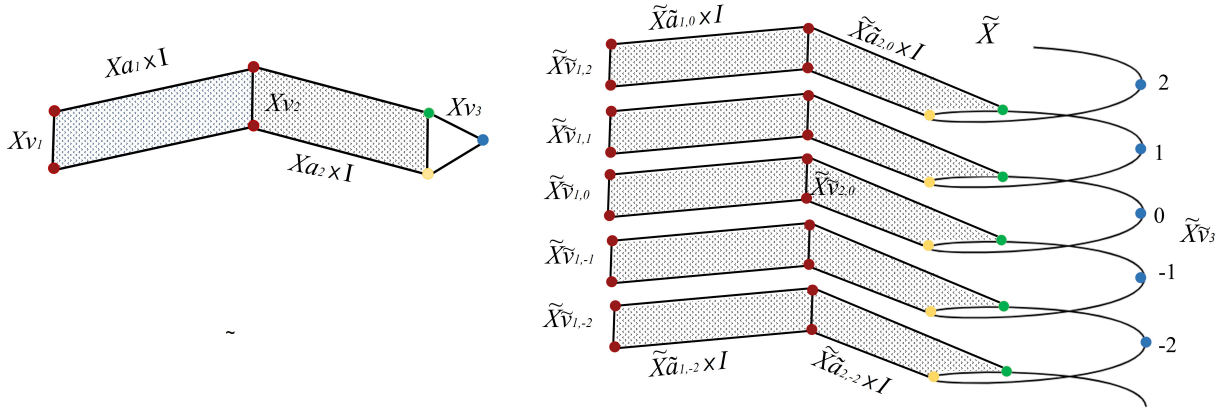


Figura 4.9: Realización geométrica del grafo de grupos $\mathcal{X}$ y cubriente de dicha realización geométrica.

En este ejemplo el espacio vértice X_{v_3} está asociado a $\tilde{X}_{\tilde{v}_3}$ el espiral en la imagen, que es la única componente conexa de $p^{-1}(X_{v_3})$. El espacio vértice X_{v_1} tiene asociados una colección de espacios vértice en el espacio cubriente $\tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$ con $i \in \mathbb{Z}$, que son componentes conexas de $p^{-1}(X_{v_1})$, de manera análoga los espacios vértice en el cubriente asociados a X_{v_2} son una colección de espacios $\tilde{X}_{\tilde{v}_{2,i}}$ con $i \in \mathbb{Z}$.

El cilindro de la arista $X_{a_1} \times I$ tiene asociada una colección de cilindros $\tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}} \times I$ con $i \in \mathbb{Z}$ que son componentes conexas de $p^{-1}(X_{a_1} \times I)$ y de manera similar $X_{a_2} \times I$ tiene asociada una colección de cilindros $\tilde{X}_{\tilde{a}_{2,i}} \times I$ con $i \in \mathbb{Z}$.

Para recuperar el grafo de espacios $\tilde{\Xi}$ basta colapsar los espacios vértice a un punto y los cilindros de espacios arista a arcos. Es decir, colapsar al espiral $\tilde{X}_{\tilde{v}_3}$ a un punto $\tilde{v}_3$, cada $\tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$ y $\tilde{X}_{\tilde{v}_{2,i}}$ a un punto $\tilde{v}_{1,i}$ y $\tilde{v}_{2,i}$ respectivamente y colapsar a cada $\tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}} \times I$ y $\tilde{X}_{\tilde{a}_{2,i}} \times I$ a aristas $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ (ver la Figura 4.10).

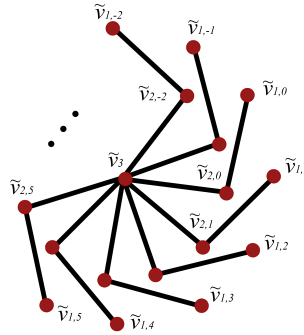


Figura 4.10: Grafo $\tilde{\Xi}$ asociado al cubriente $\tilde{X}$ del grafo de espacios $\mathcal{X}$

Si se considera al morfismo de pegado $\gamma_{a_1} : X_{a_1} \rightarrow X_{v_1}$ las elevaciones de este son los morfismos de pegado $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{1,i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ que identifican a cada espacio arista $\tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}}$ con un espacio vértice $\tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$ (en este ejemplo estas elevaciones son la identidad de $\tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}}$ a $\tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$). Si se considera al morfismo de pegado $\gamma_{\tilde{a}_2} : X_{\tilde{a}_2} \rightarrow X_{v_3}$ las elevaciones de este son los morfismos $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2,i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2,i}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_3}$ que envían para cada $i \in \mathbb{Z}$ al 2-complejo $\tilde{X}_{\tilde{a}_{2,i}}$ a un segmento del espiral $\tilde{X}_{\tilde{v}_3}$, en este sentido es que las elevaciones son restricciones a las componentes conexas tanto de espacios vértices como de espacios aristas en el cubriente.

Ejemplo 4.3.5. Para el grafo de espacios $\mathcal{X}$ construido en el Ejemplo 4.1.4 la siguiente Figura 4.11 muestra un cubriente de esta:

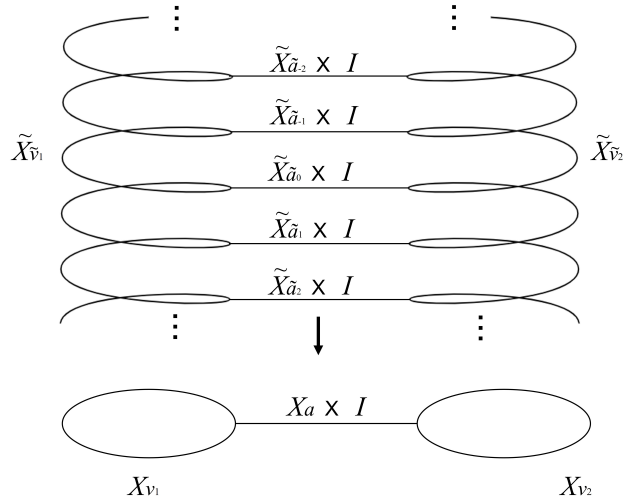


Figura 4.11: El cubriente $\tilde{X}$ de la realización geométrica $|\mathcal{X}|$ del grafo de espacios $\mathcal{X}$.

Aquí el espacio vértice asociado a X_{v_1} en el cubriente es el espiral $\tilde{X}_{\tilde{v}_1}$ puesto que es la única componente conexa de $p^{-1}(X_{v_1})$, de manera análoga sucede para X_{v_2} y $\tilde{X}_{\tilde{v}_2}$, de modo que cuando se le da estructura de grafo de espacios a este cubriente éste consta de dos espacios vértice $\tilde{X}_{\tilde{v}_1}$ y $\tilde{X}_{\tilde{v}_2}$. Para los cilindros de los espacios arista se tiene que $p^{-1}(X_a \times I)$ la preimagen del cilindro $X_a \times I$ consta de $\tilde{X}_{\tilde{a}_i} \times I$ con $i \in \mathbb{Z}$ componetes conexas por tanto el grafo de espacios asociado al cubriente tiene una cantidad numerable $\tilde{X}_{\tilde{a}_i}$ de espacios arista que constan de un punto. De manera análoga se tiene una colección de espacios arista $\tilde{X}_{\tilde{a}_i}$ para las aristas $\tilde{a}$ inversas de cada arista a de modo que $\tilde{X}_{\tilde{a}_i} = \tilde{X}_{\tilde{a}_i}$. La realización geométrica del grafo $\tilde{\Xi}$ (ver Figura 4.12) asociado a $\tilde{\mathcal{X}}$ la estructura de grafo de espacios del cubriente $\tilde{X}$ del grafo de espacios $\mathcal{X}$ consta de dos vértices $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ y de una cantidad numerable de aristas a_i que los unen.

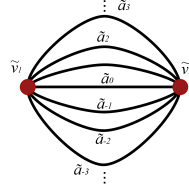


Figura 4.12: Realización geométrica del grafo $\tilde{\Xi}$ asociado al cubriente $\tilde{X}$.

Dado el morfismo de pegado $\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{v_2}$ el conjunto de elevaciones de este es una familia de morfismos $\{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_2}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ donde para toda $i \in \mathbb{Z}$ el morfismo de pegado $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i}$ envía a cada punto $\tilde{X}_{\tilde{a}_i}$ a un punto sobre el espiral $\tilde{X}_{\tilde{v}_2}$ de forma conveniente. De manera análoga para el morfismo de pegado $\gamma_{\tilde{a}} : X_{\tilde{a}} \longrightarrow X_{v_3}$ el conjunto de elevaciones asociada a éste es una familia $\{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_3}\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Es importante notar que se puede dotar a cualquier cubriente de la realización geométrica de un grafo de espacios de una estructura de grafo de espacios. Por ejemplo si se considera el cubriente $\tilde{X}'$ que se muestra en la Figura 4.13 éste como grafo de espacios tiene dos espacios vértice $\tilde{X}'_{\tilde{v}_1}$ y $\tilde{X}'_{\tilde{v}_2}$ y seis espacios arista $\tilde{X}'_{\tilde{a}_1}$, $\tilde{X}'_{\tilde{a}_2}$, $\tilde{X}'_{\tilde{a}_3}$, $\tilde{X}'_{\tilde{a}_1}$, $\tilde{X}'_{\tilde{a}_2}$ y $\tilde{X}'_{\tilde{a}_3}$ tales que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ sucede que $\tilde{X}'_{\tilde{a}_i} = \tilde{X}'_{\tilde{a}_i}$.

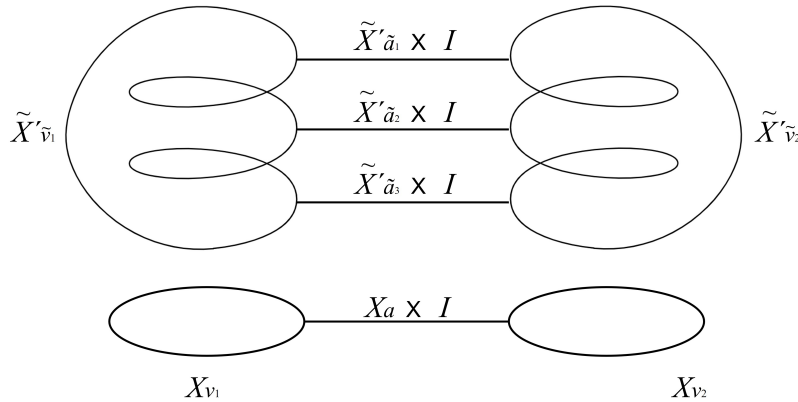


Figura 4.13: Cubriente $\tilde{X}'$ del espacio total $|\mathcal{X}|$.

El grafo asociado al grafo de espacios correspondiente al cubriente $\tilde{X}'$ puede verse en la Figura 4.14. En este caso el conjunto de elevaciones del morfismo de pegado $\gamma_a : X_a \longrightarrow X_{v_2}$ está determinado por $\{\tilde{\gamma}'_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_2}\}_{i \in \{1,2,3\}}$ y el conjunto de elevaciones de $\gamma_{\tilde{a}} : X_{\tilde{a}} \longrightarrow X_{v_3}$ es una familia de morfismos de pegado $\{\tilde{\gamma}'_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_3}\}_{i \in \{1,2,3\}}$.

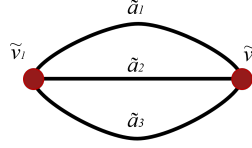


Figura 4.14: Realización geométrica del grafo $\tilde{\Xi}'$ asociado al cubriente $\tilde{X}'$.

4.4. Precubrientes.

En la Sección 4.3 se dotó de una estructura de grafo de espacios al cubriente de un grafo de espacios dado. En esta sección la intención es ver qué sucede si sólo se conoce una familia de cubrientes asociada a los espacios vértice, si es posible extender esta familia a un cubriente de tal manera que los espacios vértice de éste coincidan con los espacios de la familia dada y qué condiciones deben cumplirse para que esto suceda.

Definición 4.4.1. *El grado de una elevación son las clases de conjugación de $\pi_1(\tilde{X}_{\tilde{a}})$ como subgrupo de $\pi_1(X_a)$.*

Notación 4.4.2. *Se denotará por $\mathcal{E}(\gamma_a)$ al conjunto de elevaciones de un morfismo de pegado γ_a a $\coprod_{\tilde{v}} \tilde{X}_{\tilde{v}}$ donde $\{\tilde{X}_{\tilde{v}}\}$ es una familia de espacios cubriente de los espacios vértices del grafo de grupos al que pertenece γ_a y de manera análoga para el morfismo de pegado correspondiente a la arista inversa $\gamma_{\tilde{a}}$ se denotará como $\mathcal{E}(\gamma_{\tilde{a}})$ al conjunto de elevaciones de $\gamma_{\tilde{a}}$ a $\coprod_{\tilde{v}} \tilde{X}_{\tilde{v}}$.*

Ejemplo 4.4.3. Si se considera el Ejemplo 4.3.4 el conjunto de elevaciones del morfismo de pegado γ_a a $\coprod_{\tilde{v}_{1,i}} \tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}}$ es $\mathcal{E}(\gamma_{a_1}) = \{\hat{\gamma}_{\tilde{a}_{1,i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_{1,i}} \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Además dado $\pi_1(\tilde{X}_{\tilde{a}_{1,i}}) = \{1\}$ y $\pi_1(X_a) = \{1\}$ el grado de cada elevación en $\mathcal{E}(\gamma_{a_1})$ es uno.

Proposición 4.4.4. *Sea $\{\tilde{X}_{\tilde{v}} \rightarrow X_v\}_{v \in V(\Xi)}$ un conjunto de aplicaciones cubrientes de los espacios vértice $\{X_v\}_{v \in V(\Xi)}$ de un grafo de espacios $\mathcal{X}$ con $\tilde{X}_{\tilde{v}}$ conexo por trayectorias para cada $v \in V(\Xi)$. Estas aplicaciones pueden extenderse a una aplicación cubriente $\tilde{X} \rightarrow |\mathcal{X}|$ donde $\{\tilde{X}_{\tilde{v}}\}$ son los vértices de la descomposición a un grafo de espacios de $\tilde{X}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones. Para cada arista $a \in A(\Xi)$ con morfismos de pegado $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_1(a)}$ y $\gamma_{\tilde{a}} : X_{\tilde{a}} \rightarrow X_{\partial_1(\tilde{a})}$, existe una biyección que preserva grado entre sus respectivos conjuntos de elevaciones $\mathcal{E}(\gamma_a)$ y $\mathcal{E}(\gamma_{\tilde{a}})$*

Demostración. Considérese el grafo de espacios:

$$\mathcal{X} = (\Xi, \{X_v\}_{v \in V(\Xi)}, \{X_a\}_{a \in A(\Xi)}, \{\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_1(a)}\}_{a \in A(\Xi)}).$$

$\Rightarrow$] Si $\{\tilde{X}_{\tilde{v}} \rightarrow X_v\}_{v \in V(\Xi)}$ puede extenderse a un cubriente un cubriente $p : \tilde{X} \rightarrow |\mathcal{X}|$ donde $\{\tilde{X}_{\tilde{v}}\}$ son los espacios vértice de $\tilde{X}$. Entonces puede dotarse a $\tilde{X}$ de una descomposición a un grafo de espacios donde para cada $a \in V(\Xi)$ las componentes conexas de $p^{-1}(X_a)$ determinan los espacios arista $\tilde{X}_{\tilde{a}_i}$. Además dado que $\mathcal{X}$ es un grafo de espacios para toda $a \in V(\Xi)$ se tiene que $X_a = X_{\tilde{a}}$ por lo que $\tilde{X}_{\tilde{a}_i} = \tilde{X}_{\tilde{a}_i}$. Luego podemos definir una biyección:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E}(\gamma_a) &\rightarrow \mathcal{E}(\gamma_{\tilde{a}}) \\ \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} &\rightarrow \tilde{X}_{\partial_1(\tilde{a}_i)} \mapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} : \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \rightarrow \tilde{X}_{\partial_1(\tilde{a}_i)} \end{aligned}$$

y ésta preserva grado puesto que $\tilde{X}_{\tilde{a}_i} = \tilde{X}_{\tilde{a}_i}$.

$\Leftarrow$] Si para cada $a \in V(\Xi)$ existe $\phi : \mathcal{E}(\gamma_a) \rightarrow \mathcal{E}(\gamma_{\bar{a}})$ una biyección que preserva grado entre los conjuntos de elevaciones tal que $\phi(\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i}) = \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_j}$, entonces esta induce una biyección $\psi(\tilde{a}_i) = \tilde{a}_j$.

Luego es posible definir el grafo $\tilde{\Xi}$ de manera que $V(\tilde{\Xi}) = \{\tilde{v} \mid \exists \tilde{X}_{\tilde{v}}\}$ y:

$$A(\tilde{\Xi}) = \left(\bigsqcup_{a \in A(\Xi)} \{\tilde{a}_i \mid \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} \in \mathcal{E}(\gamma_a)\} \right) \cup \left(\bigsqcup_{\bar{a} \in A(\Xi)} \{\tilde{\bar{a}}_i \mid \tilde{\gamma}_{\tilde{\bar{a}}_i} \in \mathcal{E}(\gamma_{\bar{a}})\} \right),$$

y tal que el morfismo que determina las aristas inversas queda determinado por ψ de modo que para cada arista $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$.

Se tendrá que $\{\tilde{X}_{\tilde{v}}\}_{V(\tilde{\Xi})}$ es la colección de espacios vértice y $\{\tilde{X}_{\tilde{a}_i}\}_{A(\tilde{\Xi})}$ es la colección de espacios arista. Así, es posible definir un grafo de espacios $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\Xi}, \{\tilde{X}_{\tilde{v}}\}_{V(\tilde{\Xi})}, \{\tilde{X}_{\tilde{a}_i}\}_{A(\tilde{\Xi})}, \mathcal{E}(\gamma_a) \cup \mathcal{E}(\gamma_{\bar{a}}))$ cuya realización geométrica es un cubriente $\tilde{X}$ para $|\mathcal{X}|$. □

Si los espacios de la colección de espacios cubrientes de los espacios vértice $\{\tilde{X}_{\tilde{v}} \rightarrow X_v\}_{v \in V(\Xi)}$ no son conexos por trayectorias, entonces se tendrá que en la descomposición a un grafo de espacios de $\tilde{X}$ los espacios vértice están conformados por uniones de espacios cubrientes.

Observación 4.4.5. Observe que cualquier biyección que preserve grado entre los conjuntos de elevaciones de los morfismos arista γ_a y $\gamma_{\bar{a}}$ de X a $\coprod_{v'} \tilde{X}_{v'}$ puede usarse para construir un grafo de espacios X' con espacios vértice $\{X'_{v'}\}$ y un morfismo $X' \rightarrow X$. Este espacio resultante X' es un **precubriente** de X . Las elevaciones a X' de los morfismos de pegado de X que no son morfismos de pegado de X' se llaman **elevaciones colgantes**, las definiciones formales de estos conceptos se muestran a continuación. Note que no todo precubriente es un cubriente.

Definición 4.4.6. Dados $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ grafos de espacios. Un **precubriente** es un morfismo entre grafos de espacios localmente inyectivo $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ tal que las familias de funciones $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi)}$ y $\{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi)}$ que lo determinan son restricciones a un cubriente y además tal que para cada $a' \in A(\Xi')$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X'_a & \xrightarrow{\gamma'_a} & X'_v \\ \downarrow \varphi_a & & \downarrow \varphi_v \\ X_a & \xrightarrow{\gamma_a} & X_v \end{array}$$

A X' se le llama **precubriente**.

Todos los morfismos de pegado de X' son elevaciones de morfismos de pegado de X

Definición 4.4.7. Una elevación de un morfismo de pegado de $\mathcal{X}$ a un espacio vértice de $\mathcal{X}$ que no es un morfismo de pegado de $\mathcal{X}'$ es llamada una **elevación colgante**.

Note que si un precubriente tiene elevaciones colgantes o las elevaciones asociadas a un arista son de un grado distinto al de su arista inversa, entonces este precubriente no será un cubriente. También observe que en un precubriente no siempre es posible encontrar levantamientos.

Ejemplo 4.4.8. Considérense los grafos de espacios $\mathcal{X}$ y $\tilde{X}$ construidos en los Ejemplos 4.1.4 y 4.3.5 respectivamente. Luego, considérense a los subconjuntos de los conjuntos de elevaciones siguientes:

$$\mathcal{E}'(\gamma_a) := \{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_2} \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{E}(\gamma_a)$$

$$\mathcal{E}'(\gamma_{\bar{a}}) := \{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_1} \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{E}(\gamma_{\bar{a}})$$

Además defínase a $\varphi : \mathcal{E}'(\gamma_a) \longrightarrow \mathcal{E}'(\gamma_{\bar{a}})$ una biyección tal que $\varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}}) = \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}}$.

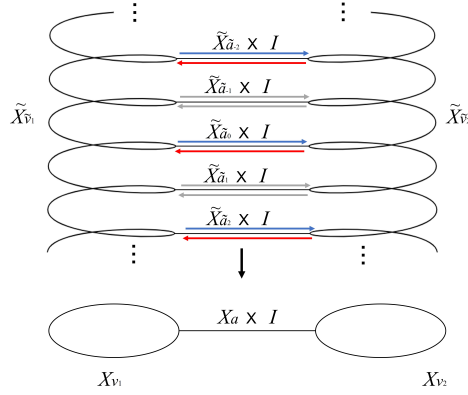


Figura 4.15: Conjunto de elevaciones $\mathcal{E}'(\gamma_a)$ en representados por las flechas rojas, $\mathcal{E}'(\gamma_{\bar{a}})$ representado por las flechas azules. Note que φ relaciona cada flecha roja con su flecha inversa azul.

Con lo anterior se puede definir un grafo de espacios $\mathcal{X}'$ cuyo grafo asociado es un grafo Ξ' con $V(\Xi') = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ y $A(\Xi') = \{\tilde{a}_{2i} \mid i \in \mathbb{Z}, \tilde{a}_{2i} \in A(\tilde{X})\} \cup \{\tilde{a}_{2i} \mid i \in \mathbb{Z}, \tilde{a}_{2i} \in A(\tilde{X})\}$ donde para cada $i \in \mathbb{Z}$ la arista inversa de $\tilde{a}_{2i}$ es $\tilde{a}_{2i}$, cuyas colecciones de espacios vértice y arista son respectivamente, $\{\tilde{X}_{\tilde{v}_1}, \tilde{X}_{\tilde{v}_2}\}$, $\{\tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}}, \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y tal que sus morfismos de pegado son $\mathcal{E}'(\gamma_a) \cup \mathcal{E}'(\gamma_{\bar{a}})$.

Luego es posible definir un precubriente $\mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$ de la siguiente manera: el morfismo entre los grafos asociados $\eta : \Xi' \longrightarrow \Xi$ queda definido por:

$$\begin{array}{ll} \eta_V : \Xi' \longrightarrow \Xi & \eta_A : \Xi' \longrightarrow \Xi \\ \tilde{v}_1 \longmapsto v_1 & \tilde{a}_{2i} \longmapsto a \\ \tilde{v}_2 \longmapsto v_2 & \tilde{a}_{2i} \longmapsto \bar{a} \end{array}$$

Note que para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \eta_V(\partial_0(\tilde{a}_{2i})) &= \eta_V(\tilde{v}_1) = v_1 = \partial_0(a) = \partial_0(\eta_A(\tilde{a}_{2i})) \\ \eta_V(\partial_1(\tilde{a}_{2i})) &= \eta_V(\tilde{v}_2) = v_2 = \partial_1(a) = \partial_1(\eta_A(\tilde{a}_{2i})) \\ \eta_V(\partial_0(\tilde{\tilde{a}}_{2i})) &= \eta_V(\tilde{v}_2) = v_2 = \partial_0(\bar{a}) = \partial_0(\eta_A(\tilde{\tilde{a}}_{2i})) \\ \eta_V(\partial_1(\tilde{\tilde{a}}_{2i})) &= \eta_V(\tilde{v}_1) = v_1 = \partial_1(\bar{a}) = \partial_1(\eta_A(\tilde{\tilde{a}}_{2i})) \end{aligned}$$

La familias de funciones continuas $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi')}$, asociada al precubriente está conformada por un par de funciones (localmente inyectivas) $\varphi_{\tilde{v}_1} : \tilde{X}_{\tilde{v}_1} \longrightarrow X_{\eta_V(\tilde{v}_1)}$, $\varphi_{\tilde{v}_2} : \tilde{X}_{\tilde{v}_2} \longrightarrow X_{\eta_V(\tilde{v}_2)}$, cuya imagen enrollan a los espirales $\tilde{X}_{\tilde{v}_1}$ y $\tilde{X}_{\tilde{v}_2}$ en los círculos X_{v_1} y X_{v_2} respectivamente. Y la familia de funciones continuas $\{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi')}$ asociadas al precubriente consta para cada $i \in \mathbb{Z}$ de funciones

identidad $\varphi_{\tilde{a}_{2i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} \longrightarrow X_{\eta_A(\tilde{a}_{2i})} = X_a$ y $\varphi_{\tilde{a}_{2i}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} \longrightarrow X_{\eta_A(\tilde{a}_{2i})} = X_{\tilde{a}}$. Observe que las funciones de las familias $\{\varphi_v\}_{v \in V(\Xi')}$ y $\{\varphi_a\}_{a \in A(\Xi')}$ son restricciones del cubriente $|\tilde{\mathcal{X}}|$ y además que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}}} & \tilde{X}_{\tilde{v}_2} \\ \downarrow \varphi_{\tilde{a}_{2i}} & & \downarrow \varphi_{\tilde{v}_2} \\ X_a & \xrightarrow{\gamma_a} & X_{v_2} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i}} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i}}} & \tilde{X}_{\tilde{v}_1} \\ \downarrow \varphi_{\tilde{a}_{2i}} & & \downarrow \varphi_{\tilde{v}_1} \\ X_a & \xrightarrow{\gamma_{\tilde{a}}} & X_{v_1} \end{array}$$

En este ejemplo para cada $i \in \mathbb{Z}$ las elevaciones de la forma $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i+1}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i+1}} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_2}$ y $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_{2i+1}} : \tilde{X}_{\tilde{a}_{2i+1}} \longrightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}_1}$, son elevaciones colgantes (ver la Figura 4.15 estas corresponden a las flecha grises).

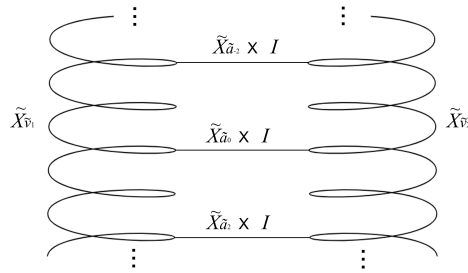


Figura 4.16: Precubriente $\mathcal{X}'$.

Si se tiene una biyección $\psi : \{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_0}\} \longrightarrow \{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_4}\}$ entre subconjuntos de elevaciones de γ_a y $\gamma_{\tilde{a}}$ a $\tilde{X}$.

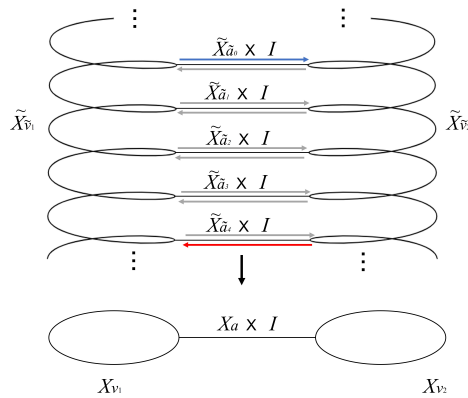


Figura 4.17: La biyección ψ relaciona a los morfismos de pegado representados por la flecha azul y la flecha roja.

De manera similar a como se hizo anteriormente a partir de esta biyección puede definirse un grafo de espacios $\mathcal{Y}$ con grafo asociado Γ tal que $V(\Gamma) = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ y $A(\Gamma) = \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_4\}$ donde $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_4$. Los

espacios vértice son $\{\tilde{X}_{\tilde{v}_1}, \tilde{X}_{\tilde{v}_2}\}$, los espacios arista $\{\tilde{X}_{\tilde{a}_0}, \tilde{X}_{\tilde{a}_4}\}$ y morfismos de pegado $\{\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_0}, \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_4}\}$. También de manera similar puede definirse un morfismos entre grafos de espacios $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ que determina un precubriente. Donde $\eta' : \Gamma \rightarrow \Xi$ queda definido por:

$$\begin{array}{ll} \eta'_V : \Gamma \rightarrow \Xi & \eta'_A : \Gamma \rightarrow \Xi \\ \tilde{v}_1 \mapsto v_1 & \tilde{a}_0 \mapsto a \\ \tilde{v}_2 \mapsto v_2 & \tilde{a}_4 \mapsto \bar{a} \end{array}$$

Y con familias de funciones continuas $\{\varphi'_{\tilde{v}_1} : \tilde{X}_{\tilde{v}_1} \rightarrow X_{v_1}, \varphi'_{\tilde{v}_2} : \tilde{X}_{\tilde{v}_2} \rightarrow X_{v_2}\}$ que enrollan a los espirales en sus respectivos círculos y $\{\varphi'_{\tilde{a}_0} : \tilde{X}_{\tilde{a}_0} \rightarrow X_a, \varphi'_{\tilde{a}_4} : \tilde{X}_{\tilde{a}_4} \rightarrow X_{\bar{a}}\}$ funciones identidad. Observe que $\mathcal{Y}$ es un precubriente pero no es un cubriente.

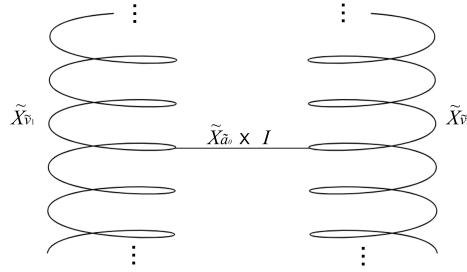


Figura 4.18: Precubriente $\mathcal{Y}$.

Proposición 4.4.9. *Dado $\mathcal{X}'$ una precubierta de un grafo de espacios $\mathcal{X}$, el precubriente $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ puede extenderse a una aplicación cubriente $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow |\mathcal{X}|$ donde cada espacio vértice de $\tilde{\mathcal{X}}$ es un espacio vértice de $\mathcal{X}'$ si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen, para cada arista $a \in A(\Xi)$ con morfismos de pegado $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_1(a)}$ y $\gamma_{\bar{a}} : X_{\bar{a}} \rightarrow X_{\partial_1(\bar{a})}$, existe una biyección que preserva grado entre el conjunto de elevaciones colgantes de γ_a a $\mathcal{X}'$ y el conjunto de elevaciones colgantes de $\gamma_{\bar{a}}$ a $\mathcal{X}'$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si el precubriente $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ puede extenderse a una aplicación cubriente $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow |\mathcal{X}|$ donde cada espacio vértice de $\tilde{\mathcal{X}}$ es un espacio vértice de $\mathcal{X}'$, entonces la descomposición a un grafo de espacios de $\tilde{\mathcal{X}}$ tiene la misma familia de espacios vértice que $\mathcal{X}'$ por lo que se puede definir una biyección de manera análoga a la definida en la Proposición 4.4.4.

$\Leftarrow$ Para cada $a \in A(\Xi)$ consideremos a $\mathcal{H}an(\gamma_a)$ y $\mathcal{H}an(\gamma_{\bar{a}})$ los conjuntos de elevaciones colgantes de los morfismos de pegado $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_1(a)}$ y $\gamma_{\bar{a}} : X_{\bar{a}} \rightarrow X_{\partial_1(\bar{a})}$ a $\sqcup_{v \in V(\Xi')} X'_v$ respectivamente. Si se supone que existe una biyección que preserva grado $\varphi : \mathcal{H}an(\gamma_a) \rightarrow \mathcal{H}an(\gamma_{\bar{a}})$ tal que $\varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i}) = \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_j}$, se puede definir un grafo de espacios $\tilde{\mathcal{X}}$ cuyo grafo tiene conjunto de vértices $V(\tilde{\Xi}) = V(\Xi')$ y conjunto de aristas:

$$A(\tilde{\Xi}) = A(\Xi') \cup \left(\bigcup_{a \in A(\Xi)} \{ \tilde{a}_i \mid \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} \in \mathcal{H}an(\gamma_a) \} \right) \cup \left(\bigcup_{\bar{a} \in A(\Xi)} \{ \tilde{a}_i \mid \tilde{\gamma}_{\tilde{a}_i} \in \mathcal{H}an(\gamma_{\bar{a}}) \} \right),$$

y tal que $\tilde{a}_i = \tilde{a}_j$ determina las aristas inversas respecto de la biyección entre elevaciones colgantes antes dada. Con esto se tiene que:

$$\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\Xi}, \{ \tilde{X}_{\tilde{v}} \}_{V(\tilde{\Xi})}, \{ \tilde{X}_{\tilde{a}_i} \}_{A(\tilde{\Xi})}, \zeta)$$

donde $\zeta = \left(\{ \gamma'_{a'} : X'_{a'} \rightarrow X'_{\partial_1(a')} \}_{a' \in A(\Xi')} \right) \cup \left(\bigcup_{a \in A(\Xi)} (\text{Han}(\gamma_a) \cup \text{Han}(\gamma_{\bar{a}})) \right)$ cuya realización geométrica es un cubriente $\tilde{X}$ para $|\mathcal{X}|$. $\square$

De lo anterior se sigue que un precubriente siempre puede extenderse a un cubriente.

Lema 4.4.10. *Si $\mathcal{X}'$ es un precubriente de un grafo de espacios $\mathcal{X}$, entonces el morfismo $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ puede extenderse a una aplicación cubriente $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow |\mathcal{X}|$, donde $\mathcal{X}'$ es un subgrafo de espacios de $\tilde{\mathcal{X}}$ y la inclusión $\mathcal{X}' \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}'$ un precubriente de un grafo de espacios $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}'$ no tiene elevaciones colgantes, entonces es un cubriente. Si $\mathcal{X}'$ tiene elevaciones colgantes, para cada elevación colgante $\tilde{\gamma}_{\bar{a}} : \tilde{X}_{\bar{a}} \rightarrow \tilde{X}_{\partial_0(\bar{a})}$ a $\mathcal{X}'$ de cualquier morfismo de pegado $\gamma_a : X_a \rightarrow X_{\partial_0(a)}$ considérese a $\mathcal{Y}_{\bar{a}}$ el cubriente de $|\mathcal{X}|$ cuyo grupo fundamental es $\pi_1(\tilde{X}_{\bar{a}})$.

Luego, se tiene que existe $Y_{\bar{a}, a_0}$ un espacio arista de $\mathcal{Y}_{\bar{a}}$ tal que su grupo fundamental es $\pi_1(\tilde{X}_{\bar{a}})$. Sea $\mathcal{Z}_{\bar{a}}$ una componenete conexa de $\mathcal{Y}_{\bar{a}}$ sin (el cilindro de) $Y_{\bar{a}, a_0}$. Entonces $\mathcal{Z}_{\bar{a}}$ es un precubriente de $\mathcal{X}$ con una única elevación colgante $\tilde{\gamma}_{\bar{a}} : \tilde{X}_{\bar{a}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\bar{a}}$. El precubriente $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ que consta de $\mathcal{X}'$ y la unión disjunta de los $\mathcal{Z}_{\bar{a}}$ con $\bar{a}$ variando sobre el conjunto de elevaciones colgantes satisface las condiciones de la Proposición 4.4.9, por lo que es el cubriente que se busca. $\square$

Ejemplo 4.4.11. Considérese al grafo de espacios $\mathcal{X}$ cuya realización geométrica se muestra en la Figura 4.19:

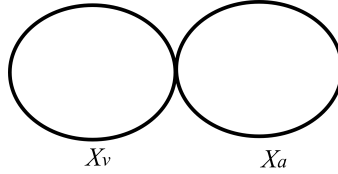


Figura 4.19: Realización geométrica del grafo $\mathcal{X}$.

Y al precubriente $\mathcal{X}'$ de éste que se muestra en la Figura 4.20, tal que $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ envía a todo segmento vertical a X_a y a cada segmento horizontal a X_v .

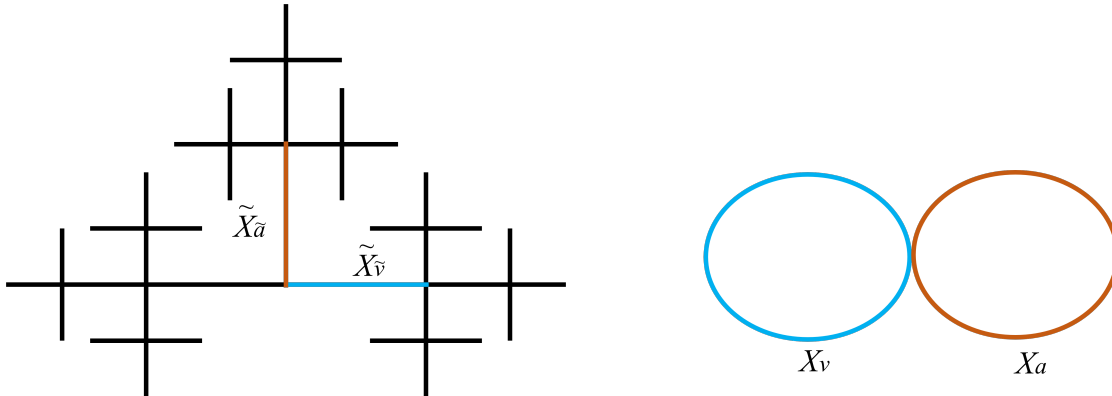


Figura 4.20: Realización geométrica del precubriente $\mathcal{X}'$ de la realización geométrica del grafo $\mathcal{X}$.

Más aún note que este precubriente tiene una única elevación colgante $\tilde{\gamma}_{\tilde{a}} : \tilde{X}_{\tilde{a}} \rightarrow \tilde{X}_{\tilde{v}}$ de $\gamma_a : X_a \rightarrow X_v$ tal que identifica los extremos de los segmentos de colores como se muestra en la Figura 4.20. Se verá como extender este precubriente a un cubriente usando la técnica dada por el Lema 4.4.10. Sea $\mathcal{Y}_{\tilde{a}}$ un espacio cubriente para $|\mathcal{X}|$ tal que $\pi_1(\tilde{X}_{\tilde{a}}) = \pi_1(\mathcal{Y}_{\tilde{a}})$, vea la Figura 4.21, sea $Y_{\tilde{a},a_0}$ un espacio arista de $\mathcal{Y}_{\tilde{a}}$ tal que $\pi_1(\tilde{X}_{\tilde{a}}) = \pi_1(Y_{\tilde{a},a_0})$ y sea $\mathcal{Z}_a$ una componente conexa de $\mathcal{Y}_{\tilde{a}}$ sin $Y_{\tilde{a},a_0}$.

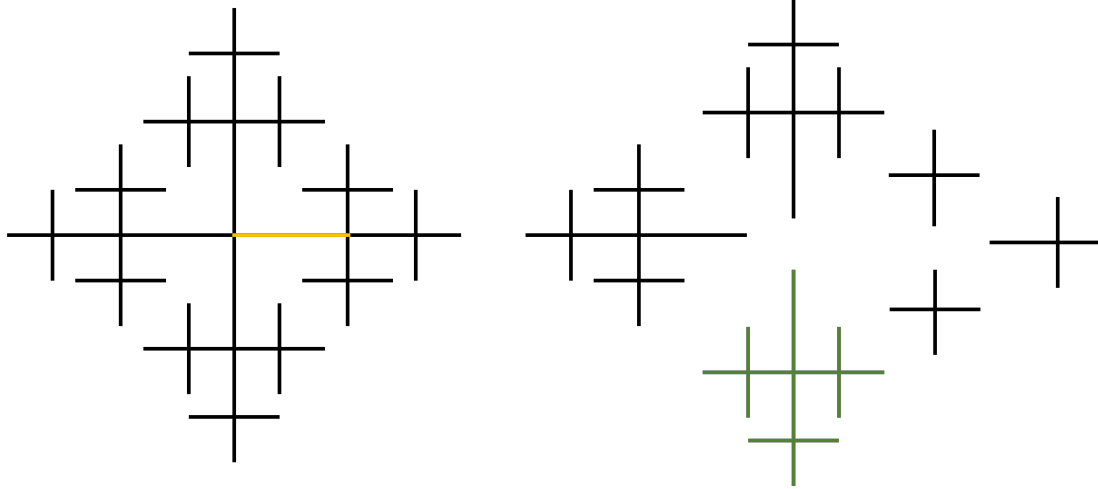


Figura 4.21: Espacio cubriente $|\mathcal{Y}_{\tilde{a}}|$ (a la izquierda) con $Y_{\tilde{a},a_0}$ (en amarillo), las componentes conexas de $|\mathcal{Y}_{\tilde{a}} - Y_{\tilde{a},a_0}|$ (a la derecha) y $|\mathcal{Z}_{\tilde{a}}|$ (en verde).

Luego se define a $\tilde{\mathcal{X}}$ un cubriente para $\mathcal{X}$ como la unión disjunta de $\mathcal{X}'$ y $\mathcal{Z}_a$ módulo el pegado necesario.

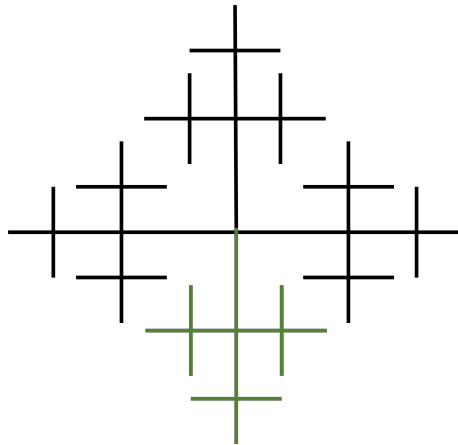


Figura 4.22: Espacio cubriente $|\tilde{\mathcal{X}}|$.

Lema 4.4.12. Si X' es un precubriente conexo de un grafo de espacios $\mathcal{X}$, entonces el morfismo $X' \rightarrow \mathcal{X}$ induce un monomorfismo a nivel de grupos fundamentales.

La demostración de Lema 4.4.12 y los detalles técnicos del Lema 4.4.10 pueden consultarse en [13]

Definición 4.4.13. *Un grafo de espacios X es **reducido** si ningún morfismo de pegado es π_1 -suprayectivo.*

Lema 4.4.14. *Supóngase que X es un grafo de espacios reducido. Si X' es un precubriente pero no un cubriente, entonces $\pi_1(X')$ tiene índice infinito en $\pi_1(X)$.*

Demostración. Dado que X' es un precubriente pero no un cubriente existen elevaciones colgantes. Considere el espacio $\mathcal{Y}_a$ construido en el Lema 4.4.10 y sea Γ su grafo asociado. Dado que $\pi_1(\mathcal{Y}_a)$ es igual al grupo fundamental de algunos de los espacios arista $\mathcal{X}$, entonces Γ es un árbol. Dado que $\mathcal{X}$ es reducido, todo espacio vértice de Γ tiene valencia mayor que uno. Por lo tanto Γ es infinito. De donde se sigue que hay puntos de $\mathcal{X}$ con una cantidad infinita de preimágenes en $\tilde{\mathcal{Z}}_a$ y por lo tanto $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ tiene grado infinito. $\square$

Capítulo 5

Grafos de grupos con grupos arista cíclicos.

5.1. Una variante de un teorema de Shenitzer.

En esta sección se estudia cuando el grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos arista cíclicos infinitos se parte libremente. En especial se probará el Teorema 5.1.9 que caracteriza cuándo un grupo finitamente generado que es el grupo fundamental de un grafo de grupos con grupo arista cíclicos infinitos tiene un fin. Para lograr tal caracterización se estudiarán las descomposiciones libres del grupo, es decir se estudiarán las particiones del grupo como un producto libremente amalgamado y también las familias de subgrupos hiperbólicos que actúan sobre dicha descomposición. Una primera motivación para este estudio es el Teorema de Descomposición de Stallings, éste caracteriza a los grupos finitamente generados con más de un fin en términos de su descomponibilidad en productos libres amalgamados o extensiones HNN.

Teorema 5.1.1. (*Teorema de Descomposición de Stallings*) Dado G un grupo finitamente generado, entonces $|Ends(G)| > 1$ si y sólo si una de las siguientes se cumple:

- 1) El grupo G se parte como $G = H *_C K$, donde $C \neq H$, $C \neq K$.
- 2) El grupo G es una extensión HNN.

Como consecuencia de este teorema resta y es deseable obtener una caracterización para los grupos de un fin en términos de productos amalgamados o extensiones HNN. Dada la dificultad del estudio de los grupos con un fin en esta sección se estudiará particularmente a los grupos que tienen una descomposición como productos libremente amalgamados o extensiones HNN con amalgama $\mathbb{Z}$.

A continuación se presentan las definiciones de descomponibilidad libre.

Definición 5.1.2. Un grupo G es **libremente descomponible** si existe $\mathcal{G}$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = G$.

Note que un grupo G es libremente descomponible si puede verse como $G_1 * G_2$ con G_1, G_2 no triviales.

Definición 5.1.3. Un grupo G es **libremente descomponible relativo a un subgrupo** $H \leq G$ si existe $\mathcal{G}$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = G$ y H es elíptico.

Observe que G puede verse como $G_1 * G_2$ por tanto existe un árbol T sobre el que G actúa tal que determina esta descomposición y si H es elíptico se tiene que existe un vértice en $v \in V(T)$ tal que $H \cdot v = v$, es decir existe T un $(\{1\}, \mathcal{H})$ -árbol.

Definición 5.1.4. Dado $\mathcal{G}$ un grafo de grupos y G_v un grupo vértice de $\mathcal{G}$ asociado a un vértice v del grafo Ξ en el que inciden las aristas $a_1, a_2, \dots, a_n$ con grupos arista asociados G_{a_i} con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, G_v es un **grupo vértice libremente descomponible relativo a los grupos arista incidentes** si existe $\mathcal{G}'$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $G_v = \pi_1(\mathcal{G}')$ y tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ los grupos arista G_{a_i} son elípticos en el árbol de Bass-Serre de $\mathcal{G}'$.

Un grupo vértice G_v es descomponible si existe un árbol T' tal que la acción de G_v en T' determina un grafo de grupos $\mathcal{G}'$ cuyo grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}')$ es de la forma $G_1 * G_2$ y tal que para cada grupo arista G_{a_i} con a_i incidente a v existe $v_i \in v(T')$ tal que $G_{a_i} \cdot v_i = v_i$.

Observación 5.1.5. Un grupo G es **libremente indescomponible** si no existe $\mathcal{G}$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = G$.

Un grupo G es **libremente indescomponible relativo a H** si no existe $\mathcal{G}$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = G$ y H es elíptico.

Dado $\mathcal{G}$ un grafo de grupos y G_v un grupo vértice de $\mathcal{G}$ asociado a un vértice v del grafo Ξ en el que inciden las aristas $a_1, a_2, \dots, a_n$ con grupos arista asociados G_{a_i} con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, G_v es un **grupo vértice libremente indescomponible relativo a los grupos arista incidentes** si no existe $\mathcal{G}'$ un grafo de grupos con grupos arista triviales tal que $G_v = \pi_1(\mathcal{G}')$ y tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ los grupos arista G_{a_i} son elípticos.

Una pregunta natural es si todo grupo finitamente generado es libremente descomponible, la respuesta la da el Teorema de Descomposición de Grushko enunciado a continuación.

Teorema 5.1.6. (Teorema de Descomposición de Grushko.) Sea G un grupo finitamente generado, éste se parte como un producto libre amalgamado $G = G_1 * G_2 * \dots * G_p * F_q$ con $p, q > 0$ y donde para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ G_i es no trivial, libremente indescomponible y no es cíclico infinito, y donde F_q es un grupo libre de rango q . Más aún los grupos G_i son únicos salvo permutación y conjugación.

Dado G finitamente generado, y grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos arista cíclicos para demostrar el Teorema 5.1.9 será necesario construir el árbol de Bass-Serre asociado a este grupo fundamental visto como una $\{\mathbb{Z}\}$ -partición. Se considerará por hipótesis una *Cyc*-partición de G (*Cyc* denota el conjunto de los grupos libres de torsión), donde G es el grupo fundamental de un grafo de grupo $\mathcal{G}$ con grafo subyacente Ξ con grupos vértice G_{v_i} con $i \in \{1, \dots, n\}$ finitamente generados y grupos arista G_{a_j} cíclicos con $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Por otro lado dado que G es finitamente generado por el teorema de Grushko se tiene una partición de éste de la forma $G = H_1 * H_2 * \dots * H_p * F_q$ con cada H_k indescomponible y $k \in \{1, \dots, p\}$. Sea T el árbol de Bass-Serre asociado a esta partición de G , es decir el árbol asociado a una $\{1\}$ -partición de G . Dado que los estabilizadores de arista de T son triviales, para todo subgrupo H de G , existe un único subárbol minimal invariante de T en el que H actúa de manera cocompacta.

Se denotará por T_{v_i} a los subárboles minimales invariantes de T respecto de los grupos vértice G_{v_i} y por T_{a_j} a los subárboles minimales invariantes de T respecto de los grupos arista G_{a_j} . Dado que todo G_{a_j} es un grupo cíclico libres de torsión note que T_{a_j} es un punto o una línea.

Obsérvese que los subárboles T_{v_i} y T_{a_j} son subárboles de T el árbol asociado a una $\{1\}$ -partición de G que quedan invariantes bajo subgrupos asociados a una *Cyc*-partición de G .

Se llamará X_{v_i} al grafo de grupos cociente T_{v_i}/G_{v_i} y X_{a_j} al grafo de grupos cociente T_{a_j}/G_{a_j} , observe que este último es un círculo o un punto. Además note que X_{v_i} y X_{a_j} son finitos.

Puesto que hay un morfismo inyectivo de G_{a_i} a G_{v_i} y de G_{a_i} a $G_{v_{i+1}}$, es decir $G_{a_i} \leq G_{v_i}$ y $G_{a_i} \leq G_{v_{i+1}}$, se tiene que T_{v_i} y $T_{v_{i+1}}$ son G_{a_i} -invariantes por lo que $T_{a_i} \hookrightarrow T_{v_i}$ y $T_{a_i} \hookrightarrow T_{v_{i+1}}$. De esto se tienen morfismos inyectivos $T_{a_i} \rightarrow T_{v_i}$ y $T_{a_i} \rightarrow T_{v_{i+1}}$ que descienden por lo que se tienen los siguiente diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} T_{a_i} & \longrightarrow & T_{v_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{a_i} & \longrightarrow & X_{v_i} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_{a_i} & \longrightarrow & T_{v_{i+1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{a_i} & \longrightarrow & X_{v_{i+1}} \end{array}$$

Usando estos morfismos $X_{a_i} \rightarrow X_{v_i}$ y $X_{a_i} \rightarrow X_{v_{i+1}}$ con $i \in \{1, \dots, n-1\}$ como morfismos de pegado es posible construir un grafos de espacios, $\mathcal{X}$ con grupo fundamental G . En esta construcción los espacios vértice de $\mathcal{X}$ son los grafos de grupos X_{v_i} y los espacios arista son los cilindros de los grafos de grupos X_{a_j} , es decir los espacios arista son $X_{a_j} \times [-1, 1]$, los morfismos de pegado están dados por los morfismos $X_{a_i} \rightarrow X_{v_i}, X_{a_i} \rightarrow X_{v_{i+1}}$ y el grafo subyacente a $\mathcal{X}$ es Ξ (observe que éste es el mismo grafo subyacente a $\mathcal{G}$ el grafo de grupos asociado a la *Cyc*-partición del que G es grupo fundamental).

El cubriente universal de $\mathcal{X}$ que se denotará como $\tilde{\mathcal{X}}$, es un árbol conformado por copias $\tilde{T}_{v_i}$ de los árboles T_{v_i} pegados lo largo de franjas o arcos de la forma $\tilde{T}_{a_j} \times I$ donde $\tilde{T}_{a_j}$ es una copia de T_{a_j} . A la función cubriente asociada a $\tilde{\mathcal{X}}$ se la denotará como p . El árbol adyacente a $\tilde{\mathcal{X}}$ es el árbol de Bass-Serre asociado a la *Cyc*-partición de G y se denotará por $\tilde{T}$.

Hay un morfismo $f : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow T$ que es G -equivariante definido de la siguiente manera:

- El morfismo f restringido cada T_{v_i} está dado por la inclusión $\tilde{T}_{v_i} \hookrightarrow T_{v_i} \subseteq T$
- En $\tilde{T}_{a_j} \times I$ el morfismo f está dado por $\tilde{T}_{a_j} \times I \rightarrow T_{a_j} \hookrightarrow T$, la composición de la proyección a T_{a_j} con la inclusión a T .

Dado t el punto medio de una arista del árbol T , se definirá a $\tilde{Y}_t = f^{-1}(t)$ y a $Y_t = p(\tilde{Y}_t) \subset \mathcal{X}$.

Aquí si t es el punto medio de una arista en algún T_{v_i} , entonces $\tilde{Y}_t$ es una colección de puntos medios en las copias $\tilde{T}_{v_i}$ de T_{v_i} que conforman a $\tilde{\mathcal{X}}$ y si t es una arista en algún T_{a_j} , entonces $\tilde{Y}_t$ es una colección de cilindros de puntos (segmentos) en las copias $\tilde{T}_{a_j}$ de T_{a_j} . Luego si t es el punto medio de una arista en algún T_{v_i} , se tiene que Y_t es un punto en algún X_{v_i} y si t es el punto medio de una arista en algún T_{a_j} , pasa que Y_t es el cilindro de un punto en X_{a_j} .

Por construcción para cualquier v_i se tiene que:

- $Y_t \cap X_{v_i}$ es una unión finita de puntos.
- $Y_t \cap X_{a_j} \times I$ es una unión finita de arcos.

Por lo que Y_t es topológicamente un grafo finito con vértices en los grafos de grupos vértices de $\mathcal{X}$ y aristas en los cilindros de los grafos de grupos arista de $\mathcal{X}$.

Ejemplo 5.1.7. Considérese el grafo de Cayley del grupo libre $F_3 = \langle a, b, c \rangle$ y llamesélo T y la acción por translación izquierda de F_3 en este grafo T . Se tiene que para todo $v \in V(T)$ la órbita

es $F_3 \cdot v = \{x \cdot v \mid x \in F_3\} = F_3$ y además se tienen las siguientes órbitas para aristas $F_3 \cdot (1, a)$, $F_3 \cdot (1, b)$ y $F_3 \cdot (1, c)$, por lo que el grafo cociente $F_3 \setminus T$ es una rosa de tres pétalos. Además note que los estabilizadores de cualquier arista y cualquier vértice son triviales de modo que el grafo de grupos $\mathcal{G}$ inducido por la acción de F_3 en T es una rosa de tres pétalos con grupos vértice y arista triviales.

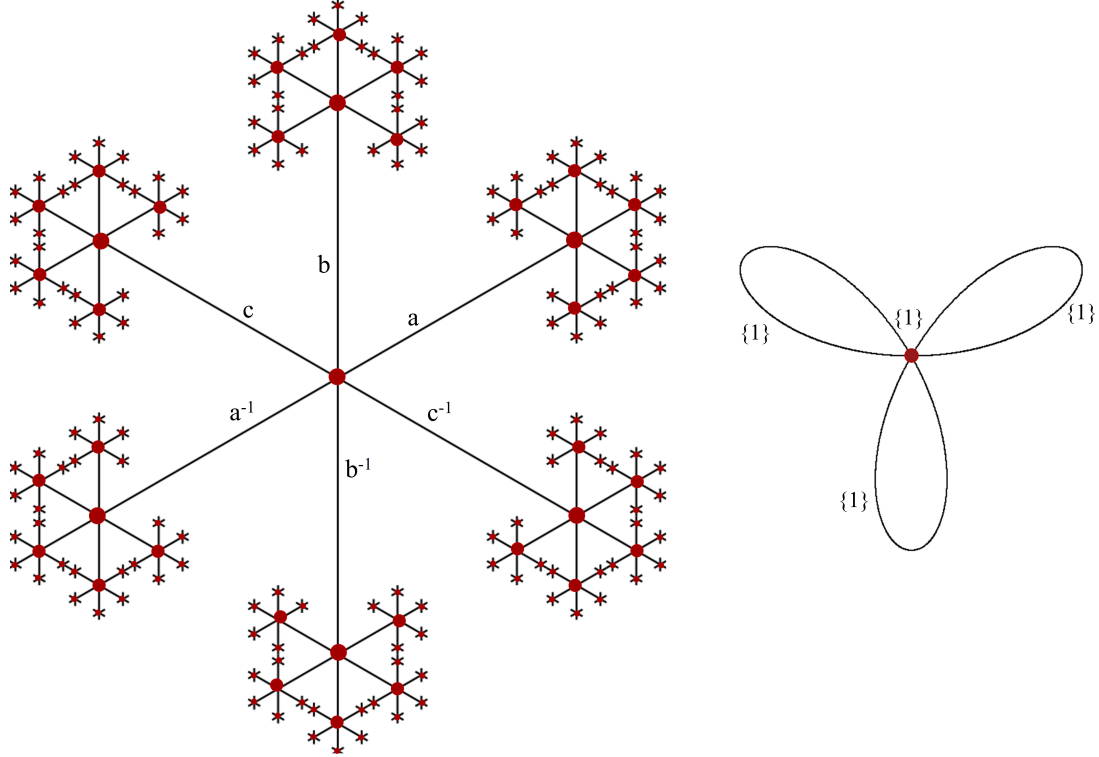


Figura 5.1: Árboles T_a , T_{v_1} y T_{v_2} .

Por otro lado se tiene una $\mathbb{Z}$ -partición de F_3 que es $F_2 *_{\mathbb{Z}} F_2 = \langle a, b \rangle *_{\langle b \rangle} \langle b, c \rangle$, llámense $G_{v_1} = \langle a, b \rangle$, $G_{v_2} = \langle b, c \rangle$ y $G_a = \langle b \rangle$. Sean T_a , T_{v_1} y T_{v_2} los árboles minimales invariantes respectivamente de las acciones de G_a , G_{v_1} y G_{v_2} (Figura 5.2)

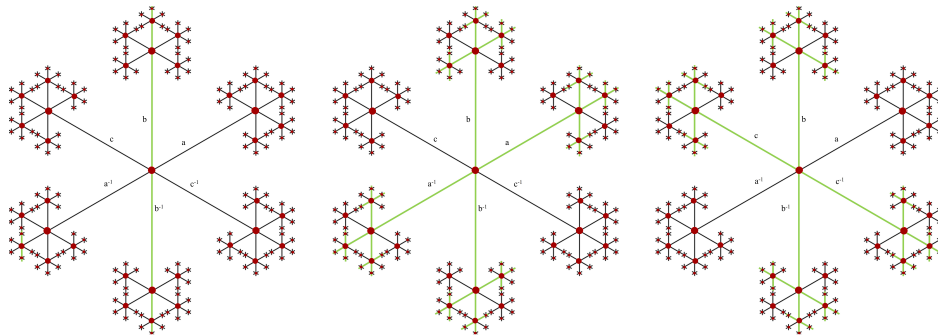
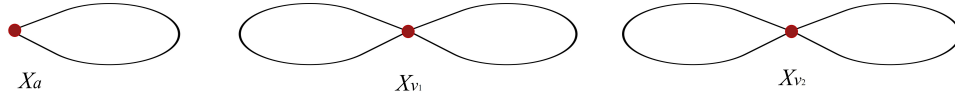
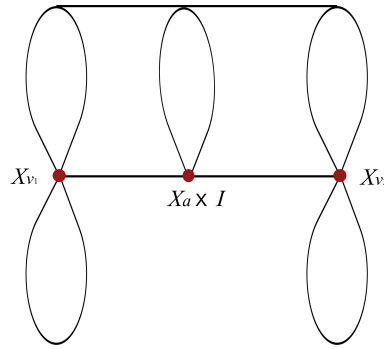


Figura 5.2: Árboles T_a , T_{v_1} y T_{v_2} .

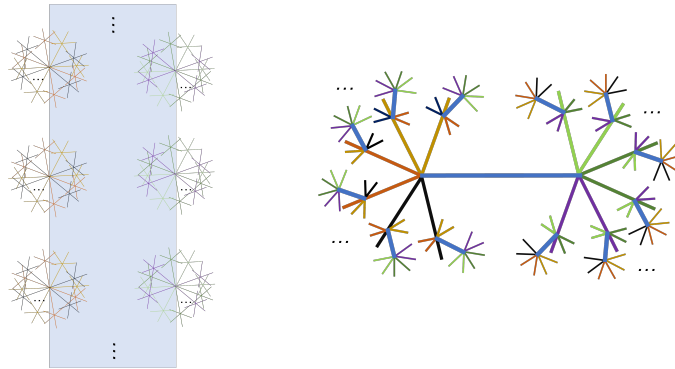
Luego se tienen los grafos cocientes $X_a = T_a/G_a$, $X_{v_1} = T_{v_1}/G_{v_1}$ y $X_{v_2} = T_{v_2}/G_{v_2}$ que son un vértice y una arista y dos rosas de dos pétalos respectivamente como se muestra en la Figura 5.3.

Figura 5.3: Grafos X_a , X_{v_1} y X_{v_2} .

Luego se puede construir un grafo de espacios $\mathcal{X}$ como en la Figura 5.4 a partir de los grafos cocientes antes contruidos tal que $\pi_1(\mathcal{X}) = F_3$. En $\mathcal{X}$ se tiene un grafo arista X_a , dos grafos vértice X_{v_1} , X_{v_2} , el grafo asociado a $\mathcal{X}$ consta de dos vértices y una arista al igual que el asociado al grafo de grupos con grupo fundamental $\langle a, b \rangle *_{\langle b \rangle} \langle b, c \rangle$ y un par de morfismo de pegado inyectivos $X_a \rightarrow X_{v_1}$ y $X_a \rightarrow X_{v_2}$ que envían el lazo y vértice de X_a a un vértice y lazo en el respectivo espacio vértice.

Figura 5.4: Grafos X_a , X_{v_1} y X_{v_2} .

El cubriente universal $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ consta de franjas $\tilde{T}_a \times I$, en la Figura 5.5 se muestran como franjas azules, que tienen pegadas copias $\tilde{T}_{v_1}$ y $\tilde{T}_{v_2}$ de T_{v_1} y T_{v_2} , que en la Figura 5.5 se ven en color negro, naranja y amarillo respecto de v_1 y color verde claro, verde oscuro y morado respecto de v_2 .

Figura 5.5: El cubriente $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ visto de frente y visto desde arriba.

A continuación se ilustra como son $\tilde{Y}_t = f^{-1}(t)$ y $Y_t = p(Y_t)$. En la Figura 5.6 se muestra a t como el punto medio de una arista de T_{v_2} y a $\tilde{Y}_t$ la colección de puntos en las copias de $\tilde{T}_{v_2}$ que se encuentran en $\tilde{\mathcal{X}}$.

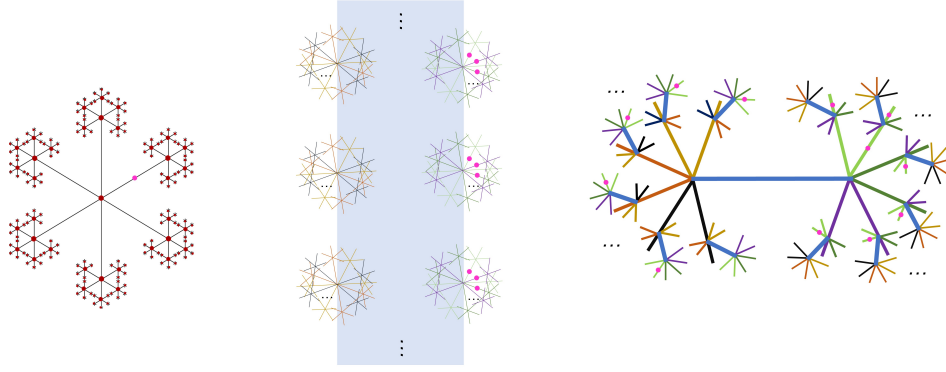


Figura 5.6: $\tilde{Y}_t$ para t el punto medio de una arista en un árbol grupo vértice invariante.

La Figura 5.7 muestra a Y_t para t el punto medio de una arista de T_{v_2} como un punto sobre X_{v_2} .

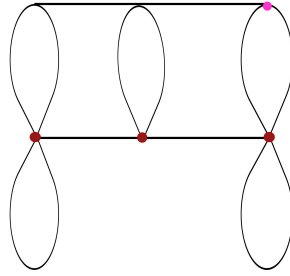


Figura 5.7: Y_t para t el punto medio de una arista en un árbol grupo vértice invariante.

La Figura 5.8 muestra a t como el punto medio de una arista en T_a y a $\tilde{Y}_t$ como una colección de cilindros de puntos en los $\tilde{T}_a \times I$ donde los $\tilde{T}_a$ son copias de T_a .

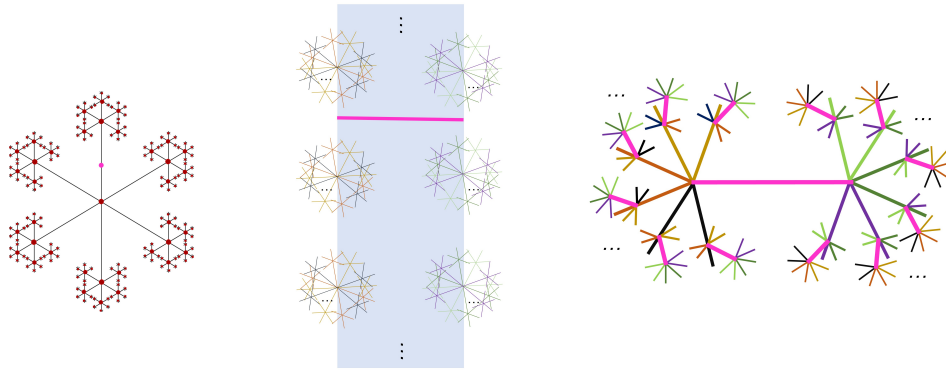


Figura 5.8: $\tilde{Y}_t$ para t el punto medio de una arista en un árbol grupo arista invariante.

Para t el punto medio de una arista en T_a la Figura 5.9 muestra que Y_t es el cilindro de un punto en X_a .

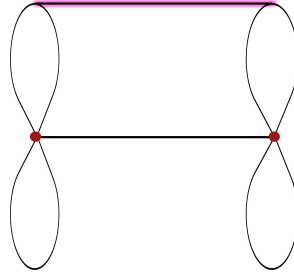


Figura 5.9: Y_t para t el punto medio de una arista en un árbol grupo arista invariante.

La Figura 5.10 muestra a la órbita $F_3 \cdot \{1, b\}$ que coincide con T_a y a $\tilde{Y}_{T_a}$.

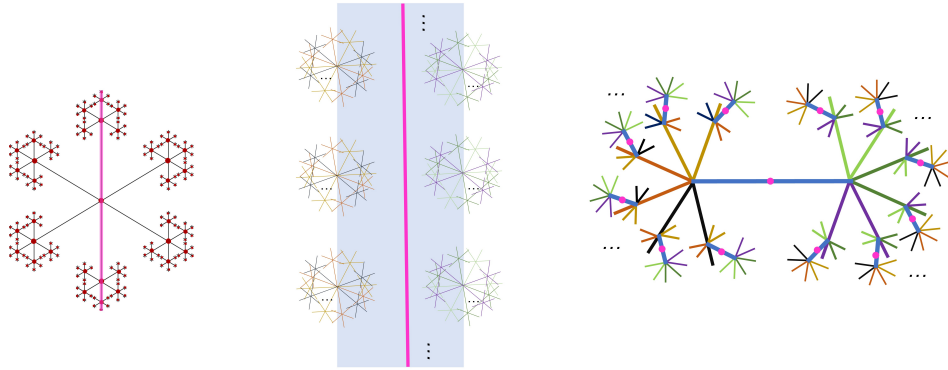


Figura 5.10: T_a y $\tilde{Y}_{T_a}$

La Figura 5.11 muestra que $\tilde{Y}_{T_a}$ es el cilindro de un punto en X_a .

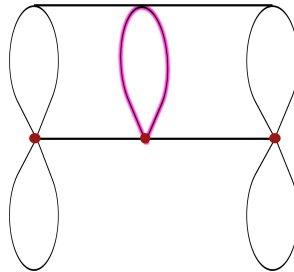


Figura 5.11: Y_{T_a} .

Lema 5.1.8. *La inclusión de $Y_t \hookrightarrow \tilde{X}$, restringida a una componente, induce una inyección en los grupos fundamentales.*

Demostración. Sea Z una componente conexa de Y_t y sea $\tilde{Z}$ una componente de la preimagen de Z en $\tilde{X}$. Se verá que la composición $\tilde{Z} \hookrightarrow \tilde{X} \rightarrow \tilde{T}$ es inyectiva. Supongamos que no lo es, entonces dado que $\tilde{T}$ es un árbol existe un par de aristas adyacentes $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ en $\tilde{Z}$ que van a la misma arista en $\tilde{T}$. Por lo que este par de aristas $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ en $\tilde{Z}$ están contenidas en una misma franja $T_a \times I$ de $\tilde{X}$, pero

los morfismos de pegado $T_a \rightarrow T_v$ son inyectivos, por lo que no existen dos aristas de $\tilde{Z}$ contenidas en $T_a \times I$ que sean adyacentes. □

Teorema 5.1.9. *Sea G finitamente generado, y grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos arista cíclicos libres de torsión. Entonces G tiene un fin si y sólo si cada grupo vértice es libremente indescomponible relativo a los grupos arista incidentes.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea que $\mathcal{G}$ el grafo del cual G es grupo fundamental, supongamos que existe un grupo vértice G_v de éste que es descomponible respecto a los vértices incidentes, es decir existe $\mathcal{G}'$ un grafo de grupos con grupos arista no triviales tal que $G_v = \pi_1(\mathcal{G}')$ y tal que para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ los grupos arista G_{a_i} son elípticos. Por lo que G_v es un producto amalagamado libre o una extensión HNN, luego por el Teorema de Stallings G_v tiene al menos dos fines. Se tiene $\mathcal{G}'$ determina una descomposición de G_v relativa a las aristas incidentes, por lo que se puede sustituir a G_v por la partición determinada por $\mathcal{G}'$ en G obteniendo así una descomposición que induce una partición de G sobre un finito, luego por el Teorema de Stallings 5.1.1 G tiene más de un fin.

$\Leftarrow$] Supongáse que G tiene más de un fin, entonces por el Teorema de Descomposición de Grushko existe una partición libre (no trivial) de G asociada a un árbol T y a un grafo de grupos $\mathcal{H}$. Dado que T es un $\{1\}$ -árbol y $\mathcal{H}$ es no trivial, existe T_{a_j} un subárbol de T que es minimal invariante respecto de $G_{a_j} \cong \mathbb{Z}$ un grupo arista en la *Cyc*-partición de G dada por hipótesis tal que $X_{a_j} = T_{a_j}/G_{a_j} \cong T_{a_j}/\mathbb{Z}$. De esto se tiene que $f|_{T_a \times I} = T_a$, por lo que hay una arista de T en la imagen de $\tilde{\mathcal{X}}$ bajo f . Sea t el punto medio de dicha arista.

Note que $f : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow T$ es G -equivariante y que $\tilde{Y}_t = f^{-1}(t) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ por lo que $f : \tilde{Y}_t \rightarrow T$ es G -equivariante y además que $f(\tilde{Y}_t) = f(f^{-1}(t)) = t$ es un punto.

Obsérvese que si l es un lazo en Y_t , entonces viene de aristas en $\tilde{Y}_t$ que están en la misma órbita. Es decir, para alguna arista $\tilde{a}$ en $\tilde{Y}_t$ se tiene que existe $g \in G \setminus \{1\}$ tal que $g \cdot \partial_0(\tilde{a}) = \partial_1(\tilde{a})$. De esto se tiene que g deja invariante una componente conexa de $\tilde{Y}_t$, luego por la equivarianza del morfismo f , el elemento g deja invariante una componente de T .

Si t es el punto medio de una arista en T . Como G actúa sin inversiones en T , entonces si $g \in G$ fija a t , se tiene que g estabiliza a toda la arista.

Si $\tilde{Y}_t$ tiene un lazo, entonces existe $g \in G$ que estabiliza la arista, luego como T es un $\{1\}$ -árbol $g = 1$, lo cual es una contradicción por lo que $\tilde{Y}_t$ no tiene lazos. De lo anterior se tiene que Y_t no tiene ciclos y por lo tanto es un bosque finito.

Luego se tiene que existe un grafo de grupos vértice X_{v_i} con una arista a_t cuyo punto medio es un vértice aislado en Y_t o un vértice de valencia uno Y_t .

Si el punto medio de a_t es un vértice aislado en Y_t , entonces al borrar el punto medio de a_t se tiene que X_{v_i} se parte relativo a los vértices arista incidentes y por tanto G es libremente descomponible.

En el caso en el que el punto medio de $a_t \in X_{v_i}$ es una hoja, hay una única arista $a \in A(X_{v_i})$ que incide a $v_i \in V(X_{v_i})$ con a_t en la imagen de X_a y solo una arista de X_a va a a_t . De esto se tiene que a_t es no separadora en X_{v_i} , pues si fuera separadora, entonces todo lazo en X_{v_i} cruzaría a a_t un número par de veces. por lo que a_t corresponde a un elemento en la base de G_{v_i} dado que a_t atravesado sólo una vez por X_a y no es atravesado por ningún otro espacio arista incidente, se tiene que hay una partición de G_{v_i} relativa a los grupos arista incidentes, por tanto G es libremente descomponible. □

5.2. Grafos de Whitehead.

Con la intención de estudiar la descomponibilidad de los grupos vértices en la descomposición JSJ de grupo hiperbólicos con un fin, en esta sección se presenta la teoría necesaria para anilizar a los grupos rígidos, y las herramientas para esto serán los grafos de Whitehead. Posteriormente para entender a la estructura de pullback en los grafos Whitehead se presenta el concepto de entrelazamiento de grafos. Con lo anterior se estará listo para introducir la noción de *grupo limpio* que será vital para construir cubrientes en la demostración del Teorema 5.3.7.

La intención en esta sección es probar el Teorema 5.2.34. Este es un teorema local en el sentido de que da condiciones para decir cuando un subgrupo limpio de índice finito con la estructura periférica inducida de un grupo libre dado es libremente descomponible (en el sentido de Wilton).

Como posteriormente estudiaremos grafos de grupos con grupos vértice libres, introduciremos una serie de nociones importantes para el estudio de estos.

Definición 5.2.1. Sea F un grupo libre. Una **múltipalabra** es un subconjunto $\underline{w}$ de $F \setminus \{1\}$.

Definición 5.2.2. Sea F un grupo libre y una múltipalabra $\underline{w}$, una **estructura periférica** $[\underline{w}]$ de F es un conjunto de subgrupos cíclicos, maximales, no conjugados a pares de $\langle \underline{w} \rangle$.

Ejemplo 5.2.3. Considere al grupo libre en dos generadores $F_2 = \langle a, b \rangle$,

Múltipalabra $\underline{w}$	Estructura periférica asociada $[\underline{w}]$
$F^2 \setminus \{1\}$	$\{\langle a^n b^m a^k \rangle, \langle b^n a^m b^k \rangle \mid n, m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
$\{a\}$	$\{\langle a \rangle\}$
$\{a, ab\}$	$\{\langle a \rangle, \langle ab \rangle\}$
$\{a, aba^{-1}\}$	$\{\langle a \rangle, \langle b \rangle\}$
$\{x \mid x \in \langle a \rangle \setminus \{1\}\} \cup \{ab, ba, a^4 b^7 a\}$	$\{\langle a \rangle, \langle ba \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^5 b^7 \rangle\}$
$\{x \mid x \in \langle ab \rangle \setminus \{1\}\} \cup \{a^5, ab^3 a, ba^2 b^6 a\}$	$\{\langle a \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^2 b^3 \rangle, \langle ba^2 b^6 a \rangle\}$

Considérese al par $(F, [\underline{w}])$, donde F es un grupo libre y $[\underline{w}]$ una estructura periférica. Observe que todo grupo vértice de un grafo de grupos con grupos arista cíclicos está naturalmente dotado con una estructura periférica inducida por las aristas incidentes. Es decir, si consideramos a G_v un grupo vértice en un grafo de grupos asociado al vértice v que incide con un conjunto de aristas a_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, cuyos grupos asociados G_{a_i} son cíclicos entonces dado que hay una inyección de los grupos arista en los grupos vértice, la múltipalabra $\underline{w} = \{x \in G_v \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} \ x \in G_{a_i} \setminus \{1\}\}$, tiene asociada la estructura periférica $[\underline{w}] = \{C_1, \dots, C_n\}$ tal que $G_{a_i} \leq C_i$.

Si se considera $\hat{F}$ un subgrupo de F , entonces la estructura periférica $[\underline{w}]$ de F asociada a la múltipalabra $\underline{w}$ induce de manera natural una estructura periférica $[\hat{\underline{w}}]$ de $\hat{F}$, donde $\hat{\underline{w}} = \underline{w} \cap \hat{F}$ y $[\hat{\underline{w}}] = \{H \cap \hat{F} \mid H \in [\underline{w}]\}$. Por lo que una estructura periférica $[\underline{w}]$ de F induce una estructura periférica natural pullback $[\hat{\underline{w}}]$ en cualquier subgrupo $\hat{F}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{F} & \longrightarrow & F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\hat{\underline{w}}] & \longrightarrow & [\underline{w}]
 \end{array}$$

Ejemplo 5.2.4. Si se considera a $\langle a \rangle$ un subgrupo de $\langle a, b \rangle$ y a $\underline{w} = \{a, ab^5\}$ tal que $[\underline{w}] = \{\langle a \rangle, \langle ab^5 \rangle\}$, entonces $\hat{w} = \{a\}$ donde $[\hat{w}] = \{\langle a \rangle\}$.

A continuación se presentan una serie de definiciones importantes para estudiar la descomponibilidad de un grupo. En su artículo Henry Wilton [5] da una noción de descomponibilidad libre sin embargo está es distinta y más fuerte que la noción de descomponibilidad libre dada por Vincent Guirardel y Gilbert Levitt en [4]. También en [5] se define la noción de grupo rígido, sin embargo está no coincide con otras definiciones en la literatura.

En el sentido de Henry Wilton se tiene que:

Definición 5.2.5. Un par $(F, [\underline{w}])$ es **Wilton libremente descomponible relativo a $[\underline{w}]$** si existe un grafo de grupos $\mathcal{G}$ con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = F$ y existe $H \in [\underline{w}]$ es elíptico (en T el árbol asociado a $\mathcal{G}$).

Por lo que un par $(F, [\underline{w}])$ es **Wilton libremente indescomponible relativo a $[\underline{w}]$** si para todo grafo de grupos $\mathcal{G}$ con grupos arista triviales tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = F$, todo $H \in [\underline{w}]$ es hiperbólico (en T el árbol asociado a $\mathcal{G}$).

Observe que todo grupo Wilton libremente indescomponible relativo a $[\underline{w}]$ es libremente indescomponible relativo a $[\underline{w}]$ en el sentido de Guirardel y Levitt, pero no a la inversa pues puede suceder que no todo $H \in [\underline{w}]$ fuera hiperbólico en una descomposición libre.

Algo análogo se tiene con los conceptos rígido y cíclicamente descomponible relativo a una familia plena. En el sentido de Henry Wilton se tiene que:

Definición 5.2.6. Un par $(F, [\underline{w}])$ es **rígido** si existe un grafo de grupos $\mathcal{G}$ con grupos arista cíclicos tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = F$ y existe $H \in [\underline{w}]$ es elíptico (en T el árbol asociado a $\mathcal{G}$).

Por lo que un par $(F, [\underline{w}])$ es **no rígido** si para todo grafo de grupos $\mathcal{G}$ con grupos arista cíclicos tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = F$, todo $H \in [\underline{w}]$ es hiperbólico (en T el árbol asociado a $\mathcal{G}$).

Observe que rígido (en el sentido de Wilton) es una condición más fuerte que ser cíclicamente indescomponible relativo a $[\underline{w}]$.

Ejemplo 5.2.7. El grupo $\mathbb{Z}$ tiene una única partición libre dada como $\{0\} *_{\{0\}}$ asociada al grafo que se muestra en el Ejemplo 2.4.8, además el grafo de grupos asociado a la acción por translación izquierda de $\mathbb{Z}$ en Ξ consta de un lazo y un único vértice cuyos, con grupo arista y grupo vértice asociados triviales. Si $\underline{w} = \{a^3, a^7\}$ se tiene que la estructura periférica inducida por esta multipalabra es $[\underline{w}] = \{\langle a \rangle\}$. Luego note que ni la acción de $\langle a \rangle$ no deja puntos fijos en el árbol Γ , por lo que $(F, [\underline{w}]) = (\mathbb{Z}, \{\langle a \rangle\})$ es libremente indescomponible.

Como es usual en la teoría geométrica de grupos se asociará un objeto geométrico a los grupos estudiados, en este caso relacionaremos a los grupos libres con cuerpos con asas a través de su grupo fundamental.

Definición 5.2.8. Una **asa m -dimensional de índice λ** o bien una **λ -asa** es un objeto difeomorfo al producto directo:

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

donde D^λ y $D^{m-\lambda}$ son discos de dimensión λ y $m - \lambda$ respectivamente.

Definición 5.2.9. Un **cuerpo con asas** es una variedad con frontera obtenida de pegar a D^m un disco m -dimensional asas de varios índices:

$$D^m \bigcup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_2} \bigcup_{\varphi_2} D^{\lambda_2} \times D^{m-\lambda_2} \bigcup_{\varphi_3} \dots \bigcup_{\varphi_n} D^{\lambda_n} \times D^{m-\lambda_n}$$

donde los morfismos de pegado son de la forma:

$$\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \longrightarrow \partial D^m$$

con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 5.2.10. Considérese a D^3 una esfera. Aquí una 1-asa o bien una asa 3-dimensional de índice 1 es un objeto difeomorfo a $D^1 \times D^2$, véase la Figura 5.12.

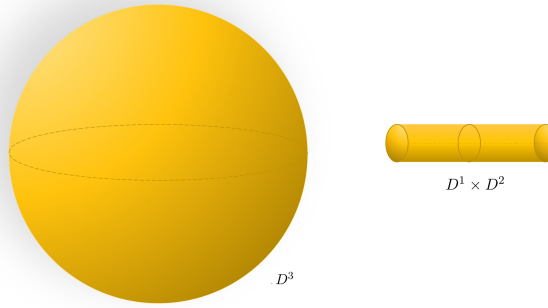


Figura 5.12: D^3 y una 1-asa.

Luego si se consideran los morfismos de pegado $\varphi_i : \partial D^1 \times D^2 \longrightarrow \partial D^3$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ que identifican las tapas de la 1-asa con D^3 , Figura 5.13.

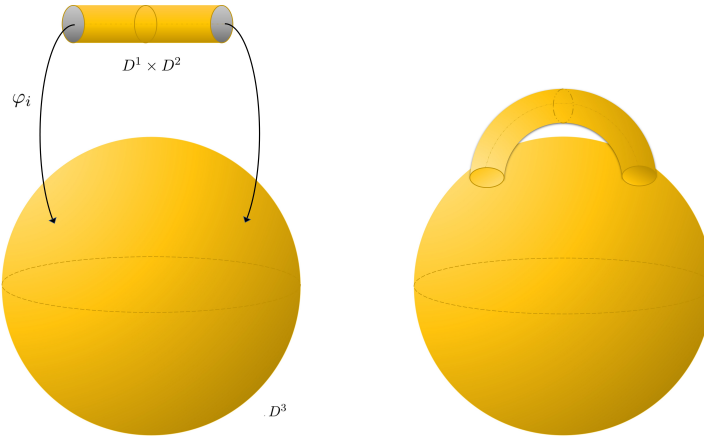


Figura 5.13: Morfismos de pegado $\varphi_i : \partial D^1 \times D^2 \longrightarrow \partial D^3$.

Es posible contruir un cuerpo con tres 1-asas como:

$$D^3 \bigcup_{\varphi_1} (D^{\lambda_1} \times D^2) \bigcup_{\varphi_2} (D^1 \times D^2) \bigcup_{\varphi_2} (D^1 \times D^2)$$

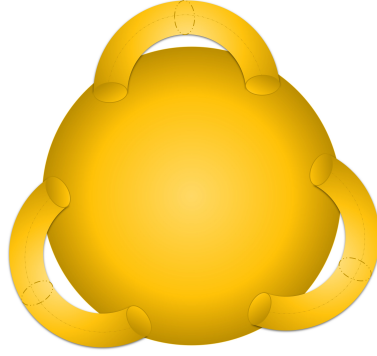


Figura 5.14: Cuerpo con tres 1-asas.

Sea U un cuerpo con asas y F su grupo fundamental. A cada multipalabra $\underline{w}$ se le puede asociar una subvariedad inmersa 1-dimensional N (un conjunto de curvas) en X . Más aún hay una correspondencia natural entre las clases de conjugación de cada elemento de una multipalabra $\underline{w}$ y una subvariedad 1-dimensional (una clase de equivalencia homotópica de una curva inmersa en el cuerpo con asas) $N \subset U$ determinada salvo homotopía en la que cada componente es esencial (no homotópica a un punto) y frontera la frontera tiene dimensión 2.

Si $\hat{F}$ un subgrupo de F y $\hat{X}$ es el espacio cubriente de U con grupo fundamental $\hat{F}$, se denotará como $\hat{N}$ la preimagen de N en $\hat{X}$.

El pullback de $[\underline{w}]$ a F denotado como $[\hat{w}]$, está determinado por las clases de conjugación no triviales de $\hat{F}$ determinadas por las componentes de $\hat{N}$.

Observación 5.2.11. Si $\underline{w}$ es finita y $\hat{F}$ es finitamente generado y de índice finito, entonces $\hat{w}$ es finita. Note que si N tiene una cantidad finita de componentes y $\hat{F}$ es de índice finito, entonces $\hat{N}$ tiene una cantidad finita de componentes.

Ejemplo 5.2.12. Note que el grupo fundamental de una esfera con tres ponchaduras Σ es $\pi_1(\Sigma) = \langle a, b \rangle = F_2$, más aún si $\underline{w} = \{a, b, ab\}$, entonces la estructura periférica asociada $[\underline{w}] = \{\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle ab \rangle\}$, aquí N la subvariedad 1-dimensional inmersa en Σ asociada a la multipalabra $\underline{w}$ es el conjunto de curvas que muestran en la Figura 5.15, de modo que se indentifica a los elementos de $[\underline{w}]$, con las clases de conjugación de subgrupos cíclicos correspondientes $\partial\Sigma$, es decir se indentifica a las clases de conjugación de los grupos cíclicos pertenecientes a la estructura periférica $[\underline{w}]$ con clases de equivalencia homotópica asociadas a curvas en $\partial\Sigma$.

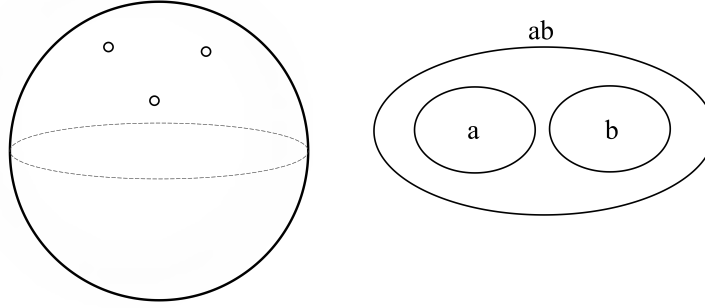


Figura 5.15: Esfera con tres ponchaduras y N asociada a la multipalabra $[w]$.

A continuación consideremos a U un cuerpo con asas de genero g conveniente y a $F = \pi_1(U)$. Recordemos que hay una correspondencia natural entre las clases de conjugación de todo elemento $w \in \underline{w}$ y una 1-subvariedad $N_w \subseteq U$ determinada salvo homotopía en la que cada componente es esencial. También recordemos que el grupo fundamental de un cuerpo con asas de genero g es un grupo libre de rango g , por lo que es posible elegir una base cualquiera B para F a la que de manera natural le corresponde una familia maximal de discos no separadores $\mathcal{D} \subseteq U$; tal que al cortar a lo largo de dichos discos se obtiene una 3-bola; la preimagen de la cada disco es un par de discos en la frontera de la bola y la preimagen de $N_{[w]}$ es una unión de arcos en la bola con puntos finales en los discos.

Ejemplo 5.2.13. Considérese a U un cuerpo con asas de genero 3 y a $F_3 = \langle a, b, c \rangle$ su grupo fundamental. También considérese a la multipalabra $\underline{w} = \{a, b, c, ac\}$ se tiene que la estructura periférica asociada es $[w] = \{\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \langle ac \rangle\}$. Si se considera a $w = ac \in \underline{w}$ esta tiene asociada una subvariedad N_w como se muestra en la Figura 5.16 y también para las palabras a, b, c se muestran las correspondientes N_a, N_b, N_c .

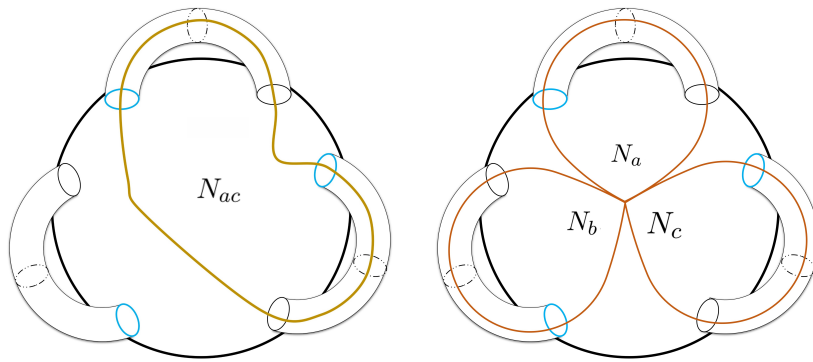


Figura 5.16: Subvariedad 1-dimensional N_{ac} asociada a la palabra $w = ac$ y subvariedades N_a, N_b, N_c .

El conjunto $B = \{a, b, c\}$ es una base para F_3 y esta está asociada con una familia de discos no separadores $\mathcal{D}$, el conjunto de discos azules en la Figura 5.17, tal que al cortar a lo largo de ellos se

obtiene una 3-bola; la preimagen de cada disco es un par de discos en la frontera de la bola, véase la Figura 5.17.

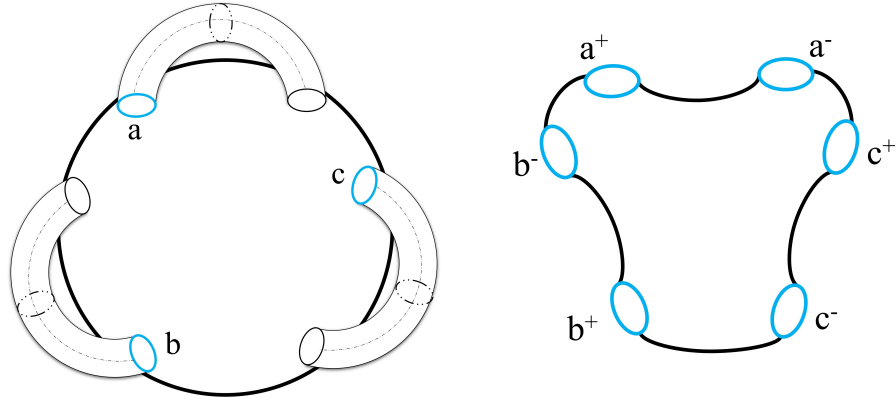


Figura 5.17: Conjunto de discos $\mathcal{D}$ y bola obtenida de cortar a través de los discos en $\mathcal{D}$.

Si se considera la curva N_{abc} entonces la preimagen de esta en la 3-bola es un conjunto de tres arcos que cuyos extremos están en los discos, vea la Figura 5.18

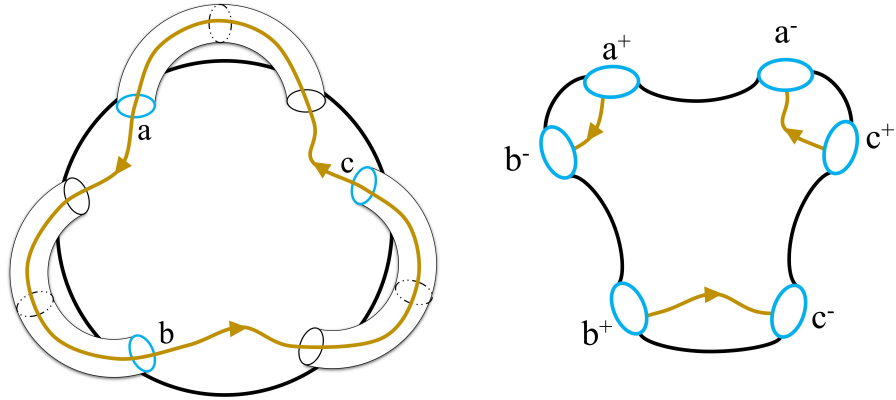


Figura 5.18: Conjunto de discos $\mathcal{D}$ y bola obtenida de cortar a través de los discos en $\mathcal{D}$.

Observación 5.2.14. Dada una base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ para un grupo fundamental de un cuerpo con asas F , se denotará por b_i^+ y b_i^- a los pares de discos en la preimagen de cortar a lo largo del respectivo $\mathcal{D}_i$.

Una herramienta útil para encontrar particiones libres y cíclicas de pares $(F, [\underline{w}])$ serán los grafos de Whitehead. Posteriormente estos serán de ayuda para encontrar $(F, [\underline{w}])$ rígidos.

Definición 5.2.15. Dado U un cuerpo con asas con grupo fundamental F que tiene base B a la que corresponde una familia maximal de discos no separadores $\mathcal{D}$ y una multipalabra $\underline{w}$ el **grafo de**

Whitehead de $\underline{w}$ respecto de B es el 1-complejo cuyos vértices son el resultante de colapsar a un punto los discos en la frontera de la bola obtenida de cortar a lo largo de los discos de $\mathcal{D}$ y cuyas aristas son los arcos con puntos finales en los discos de la bola cortada. Al grafo de Whitehead asociado a una palabra $w \in \underline{w}$ respecto de la base B se le denota como $W_B(w)$ y el grafo de Whitehead de una multipalabra $\underline{w}$ es un grafo con vértices los colapsos de los discos $\mathcal{D}$ y aristas la unión de las aristas de cada grafo $W_B(w)$ con $w \in \underline{w}$, a este se le denota como $W_B(\underline{w})$

Ejemplo 5.2.16. Sea U como en el Ejemplo 5.2.13, el grafo de Whitehead asociado a N_{abc} tiene por vértices a $\{a^+, a^-, b^+, b^-, c^+, c^-\}$ asociados a los discos de los tres pares de discos de la esfera cortada y tiene tres aristas a_1, a_2, a_3 tales que $\partial_0(a_1) = a^+, \partial_1(a_1) = b^-$, $\partial_0(a_2) = a^-, \partial_1(a_2) = c^+$, $\partial_0(a_3) = b^+, \partial_1(a_3) = c^-$

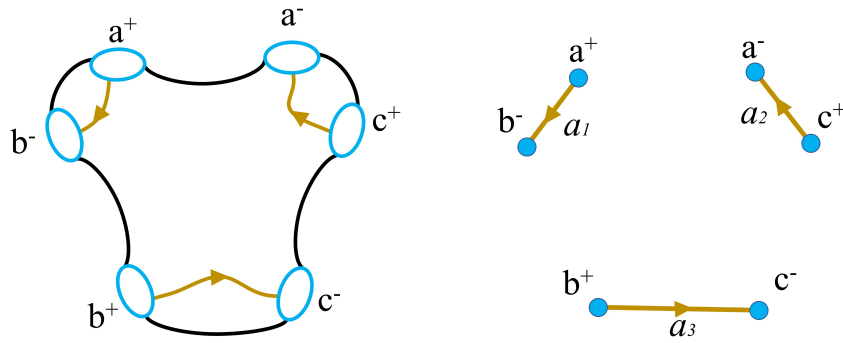


Figura 5.19: Grafo de Whitehead asociado a N_{abc}

La Figura 5.20 muestra la curva $N_{cba^{-1}b^{-1}}$ y el grafo de Whitehead asociado a esta.

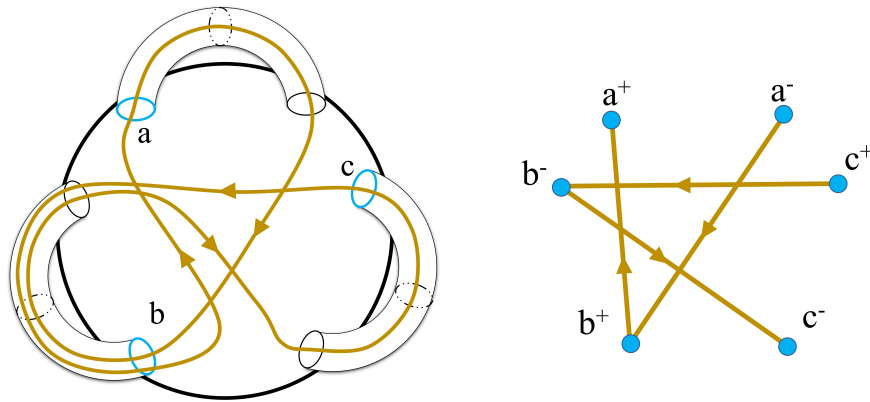


Figura 5.20: Curva $N_{cba^{-1}b^{-1}}$ y grafo de Whitehead asociado a $N_{cba^{-1}b^{-1}}$.

Observe que el grafo de Whitehead de la Figura 5.20 puede representarse como un grafo en el que

las aristas no se intersectan.

Ejemplo 5.2.17. Si se considera a $\underline{w} = \{cba^{-1}, ab^2, bc^{-1}a^2, ba^{-1}\}$, se tienen a $N_{cba^{-1}}$, N_{ab^2} , $N_{bc^{-1}a^2}$ y $N_{ba^{-1}}$ como se muestra en la Figura 5.21

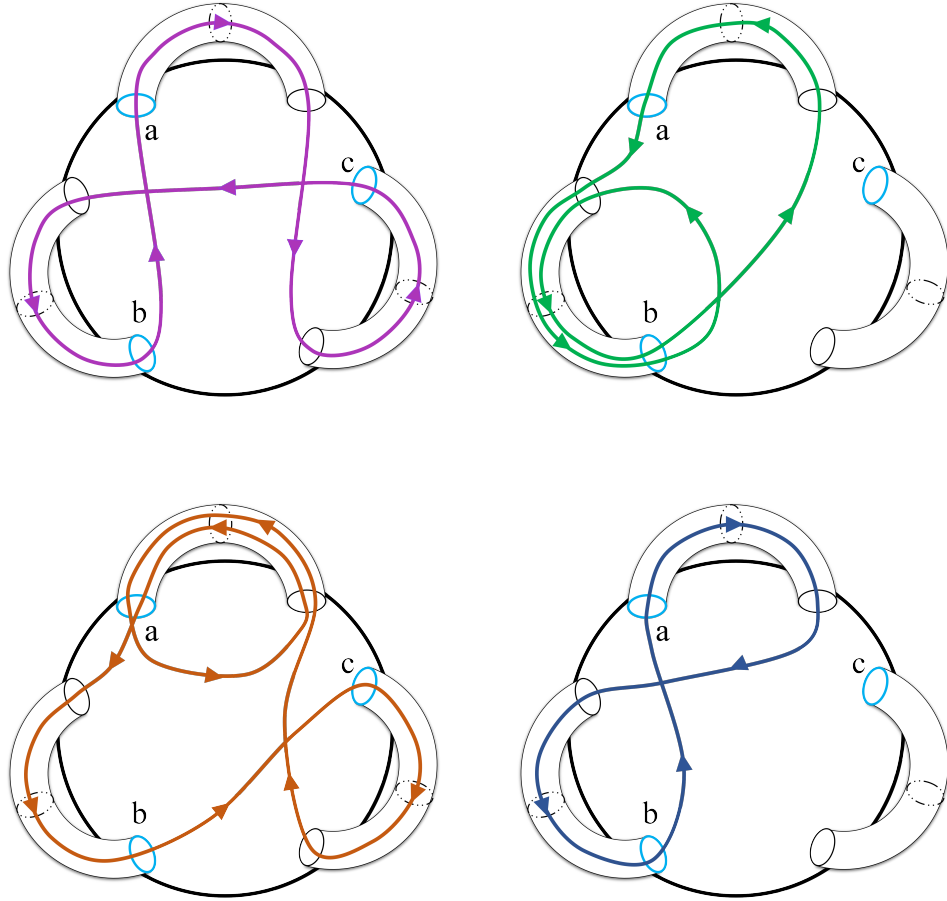


Figura 5.21: Curvas $N_{cba^{-1}}$, N_{ab^2} , $N_{bc^{-1}a^2}$ y $N_{ba^{-1}}$

Más aún $W(\underline{w})$ el grafo de Whitehead de $\underline{w}$ es el grafo que se muestra en la Figura 5.22

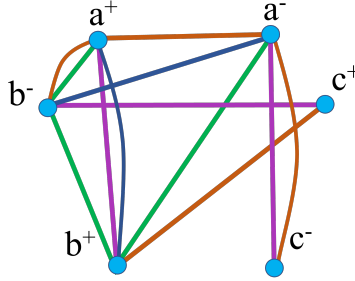


Figura 5.22: Grafo de Whitehead asociado a la multipalabra $\underline{w} = \{cba^{-1}, ab^2, bc^{-1}a^2, ba^{-1}\}$.

En los ejemplos anteriores se observó como se relacionan las curvas sobre cuerpos con asas con las múltipalabras, sin embargo en general la longitud de las palabras depende de la base que se tome para generar al grupo.

Definición 5.2.18. Una multipalabra $\underline{w}$ de un grupo F es una **multipalabra minimal** si la base B para F minimiza su longitud.

Si hay un par de vértices $\{v^+, v^-\}$ de $W_B(\underline{w})$ separados por un conjunto de aristas ε de $W(\underline{w})$ y la cardinalidad de ε estrictamente menor que la valencia de v^+ (y la de v^-), entonces puede aplicarse un movimiento de Whitehead que produce una nueva base B' tal que $W_{B'}(\underline{w})$ tiene menos aristas que $W_B(\underline{w})$. El siguiente Teorema 5.2.19 nos ofrece información sobre la relación entre la descomponibilidad libre de F y la conexidad de los grafos de Whitehead, su demostración puede encontrarse en [9].

Teorema 5.2.19. Si F es un grupo libre, para cualquiera $w \in F \setminus \{1\}$ las siguientes propociones son equivalentes:

- a) El elemento w está contenido en un factor propio libre de F .
- b) Cualquier grafo de Whitehead de $\underline{w}$ sin vértices de corte es desconexo.
- c) Existe un grafo de Whitehead de $\underline{w}$ que es desconexo.

El Lema 5.2.20 es una consecuencia del Teorema 5.2.19.

Lema 5.2.20. Si $W_B(\underline{w})$ es desconexo, entonces $(F, [\underline{w}])$ es Wilton libremente descomponible relativo a $[\underline{w}]$. Al converso si $(F, [\underline{w}])$ es Wilton libremente descomponible relativo a $[\underline{w}]$, entonces $W_B(\underline{w})$ es desconexo o contiene un vértice separador.

Demostración. Sea $W_B(\underline{w})$ desconexo, entonces por el Teorema 5.2.19 esto es equivalente a que cualquier $w \in \underline{w}$ esté contenido en un factor propio libre de F . De esto se tiene que existen A, B subconjuntos propios y no triviales de F tal que $F = A * B$ y $w \in A$. Por tanto existe un grafo de grupos con grupos arista triviales $\mathcal{G}$ tal que $\pi_1(\mathcal{G}) = A * B$, más aún dado que $w \in A$ un estabilizador vértice existe un vértice v en el árbol T asociado a $\mathcal{G}$ que queda fijo bajo la acción de w , así $\langle w \rangle$ es elíptico en T , de esto se que concluye $(F, [\underline{w}])$ es Wilton libremente descomponible relativo a $[\underline{w}]$.

Para el converso, si $(F, [\underline{w}])$ es Wilton libremente descomponible relativo a $[\underline{w}]$, entonces existe una partición libre $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ de F tal que para todo $w \in \underline{w}$ existe un vértice v en el árbol T asociado al grafo de grupos que determina la partición libre antes dada que cumple que la acción de

w en v lo deja fijo. De esto se tiene que $w \in G_i$ está contenido en algún estabilizador vértice que es también un factor propio de F , luego por el Teorema 5.2.19 esto es equivalente a que cualquier grafo de Whitehead de $\underline{w}$ sin vértices de corte sea disconexo y a que exista un grafo de Whitehead de $\underline{w}$ que es diconexo, de donde se sigue que $W_B(\underline{w})$ es disconexo o tiene vértices de corte.

□

Un caso especial $(F, [\underline{w}])$ es en el que es de la siguiente forma:

Definición 5.2.21. *Dados un grupo libre F y una multipalabra $\underline{w}$, diremos que el par $(F, [\underline{w}])$ es una esfera con tres ponchaduras si F es isomorfo a un grupo libre en dos generadores $F_2 = \langle a, b \rangle$ y la estructura periférica de $[\underline{w}]$ está la inducida por la multipalabra $\underline{w} = \{a, b, ab\}$. Es decir si F es el grupo fundamental de una esfera con tres ponchaduras y la multipalabra $\underline{w}$ está asociada a curvas correspondientes a cada ponchadura.*

El siguiente Teorema 5.2.22 da condiciones para encontrar pares $(F, [\underline{w}])$ rígidos a partir de aristas separadoras en grafos de Whitehead.

Lema 5.2.22. *Si $W(\underline{w})$ tiene un par de aristas separadoras, entonces $(F, [\underline{w}])$ es una esfera con tres ponchaduras o es no rígido.*

Demostración. Sea $\underline{w}$ una multipalabra asociada a un subvariedad 1-dimensional de un cuerpo con asas U .

Se denotará por N_{w_i} a las componentes de la subvariedad (curvas) correspondiente a las multipalabras $w_i \in \underline{w}$. Sean $N_{w_i}, N_{w_j} \in N_{\underline{w}}$ (no necesariamente distintos) las componentes de $N_{\underline{w}}$ que asociadas al par de aristas separadoras de $W(\underline{w})$ que existen por hipótesis.

Dado que $W(\underline{w})$ tiene un par de aristas separadoras a_i, a_j asociadas a w_i, w_j respectivamente, existe un par de vértices $v^+, v^- \in W(\underline{w})$ de valencia a lo más dos, tales que las aristas separadoras o bien inciden ambas en uno de estos vértices de valencia dos o bien cada arista separadora incide a uno de estos vértices de valencia uno. Por lo que para toda otra $w_k \in \underline{w}$ distinta de w_i, w_j , las aristas asociadas en $W_B(\underline{w})$ de esta componente no inciden a los vértices v^+, v^- . De esto se tiene existe un disco D propiamente encajado en U tal que ∂D está propiamente encajada en ∂U , la unión $N_{w_i} \cup N_{w_j}$ intersecta a ∂D en exactamente dos puntos, que corresponden a las aristas separadoras en el grafo $W(\underline{w})$ y además para toda $w_k \in \underline{w}$ distinta de w_i y w_j se tiene que N_{w_k} es disjunta de D .

Sea V una vecindad cerrada y pequeña de $D \cup N_{w_i} \cup N_{w_j}$, sea $\Sigma = V \cap \partial U$ la frontera de V en U y sea $V' = U \setminus \text{int}(V)$ el complemento del interior de V .

Fijemos un punto base en Σ . Se tienen distintos caso dependiendo de si w_i, w_j son iguales o distintos o de si Σ es conexo o no.

Considérese el caso en el que $w_i \neq w_j$ y Σ es conexo. Observe que en este caso V es homotópicamente equivalente a una rosa de 2 pétalos, además la frontera de ∂V encajada en ∂U es un bitoro, ver la Figura 5.23

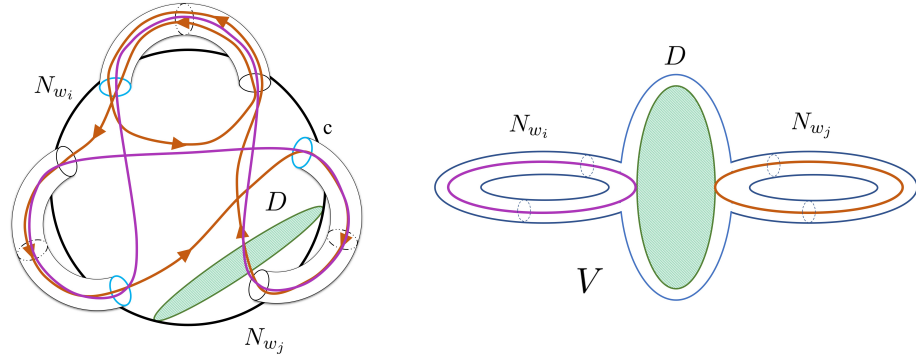


Figura 5.23: Ejemplo de curvas N_{w_i} , N_{w_j} y disco D encajado en U (izquierda). Ejemplo de vecindad V a la donde ∂V es un bitoro (derecha).

Observe también que $\Sigma = \overline{B}_\epsilon(D \cup N_{w_i} \cup N_{w_j}) \cap \partial U$ consta de dos vecindades cerradas y pequeñas de las curvas cerradas N_{w_i}, N_{w_j} tangentes a la circunferencia correspondiente a la frontera del disco D en U , por lo que Σ es homeomorfo a un toro con dos ponchaduras, véase la Figura 5.24 .

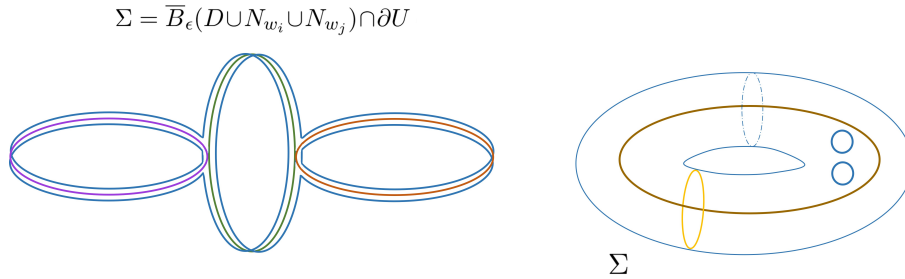
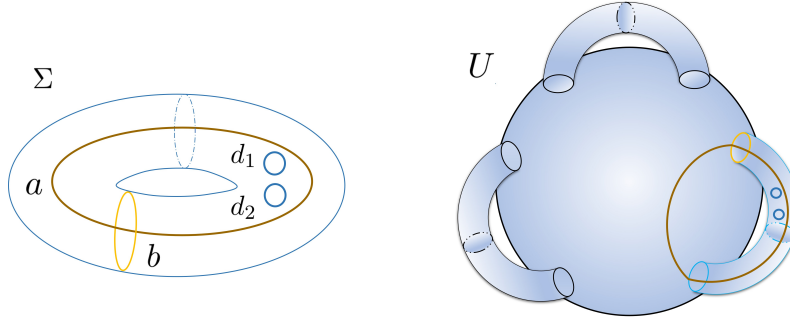


Figura 5.24: Anillos correspondientes a $\Sigma = \overline{B}_\epsilon(D \cup N_{w_i} \cup N_{w_j}) \cap \partial U$ homeomorfa a un toro con 2 ponchaduras.

Por construcción se tiene que $\pi_1(V) \cong \langle w_i \rangle * \langle w_j \rangle$ y dado que Σ es homeomorfo a un toro con 2 ponchaduras sucede que $\pi_1(\Sigma) = \langle a, b, d_2, d_2 \mid [a, b]d_1d_2 \rangle$. Luego por el Teorema de Seifert van Kampen $F \cong \pi_1(U)$ se tiene el siguiente pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\Sigma) & \xrightarrow{i_v^*} & \pi_1(V) \\
 i_{v'}^* \downarrow & & \downarrow j_v^* \\
 \pi_1(V') & \xrightarrow{j_{v'}^*} & \pi_1(U)
 \end{array}$$

Factorizando los kernels de los morfismos a $\pi_1(U)$ se obtiene una descomposición de $\pi_1(U)$ como un producto amalgamado. Por la forma en que la que hasta homeomorfismo se encaja Σ en V , se tiene que Σ está en la frontera de un toro sólido por lo que b, d_1, d_2 son nulhomotópicos en U (véase la Figura 5.25) mientras que $a = w_i w_j$ no lo es, por lo que el grupo arista asociado a a es cíclico.

Figura 5.25: Ejemplo de como se encaja Σ en U .

Con todo lo anterior se ha logrado obtener una descomposición cíclica de F de la forma $G_1 *_A G_2$ con A cíclico donde $G_1 = \langle w_i \rangle * \langle w_i \rangle / \ker(j_v^*)$ y sólo resta ver que esta es una esfera con tres ponchaduras o no es rígida, es decir que existe algún grupo en $[w]$ que es elíptico en dicha descomposición.

Supongáse que F es rígido, se tiene que la descomposición cíclica $G_1 *_A G_2$ es trivial (pues si no lo fuera entonces toda $\langle w_k \rangle \in [w]$ debería ser hipérbolico en la descomposición pero $\langle w_i \rangle$ y $\langle w_j \rangle$ no lo son puesto que están contenidos en G_1). Además note que $w_i \neq w_j$, $\langle w_i \rangle \not\leq \langle w_j \rangle$ y $\langle w_j \rangle \not\leq \langle w_i \rangle$. Como $\langle w_j \rangle$ y $\langle w_i \rangle$ son subgrupos cíclicos maximales de F , entonces G_1 no puede ser cíclico, dado que la descomposición es trivial $G_2 = \langle a \rangle$ es cíclico, por lo tanto $F = \langle w_i, w_j \rangle$ está generado por w_i y w_j . Si sucediera que $\ker(j_v^*) = \{1\}$, entonces $F = G_1 = \langle w_i \rangle * \langle w_j \rangle$, por lo que $\langle w_i \rangle$ sería elíptico en F , de modo que F sería no rígido, pero como se supuso que F es rígido pasa que $\ker(j_v^*) \neq \{1\}$.

Se tiene que $\pi_1(j_v^*(V)) = \langle w_i, w_j \rangle$, así que para toda $w_k \notin \pi_1(j_v^*(V))$ sucede que $w_k \cap j_v^*(V) = \emptyset$ (puesto que si $w_k \in \underline{w} \setminus \{w_i, w_j\}$, entonces $N_{w_k} \cap (\overline{B}_\epsilon(D \cup N_{w_i} \cup N_{w_j})) = \emptyset$) pero $F = \langle w_i, w_j \rangle$ por lo que $w_k = 1$ lo que implica que $[w] = [\{w_i, w_j, w_i w_j\}]$ por lo tanto $(F, [w])$ es una esfera con tres ponchaduras.

Si se tiene el caso en el que $w_i = w_j$ y Σ es conexo. Se tiene una única curva N_{w_i} en ∂U tal que intersecta dos veces a ∂D , luego V es homeomorfa a una rosa de 2-petalos tal que $\pi_1(V) = \langle w_i^+ \rangle * \langle w_i^- \rangle$ y Σ es homeomorfa a $S_{0,4}$ y se puede proceder de manera análoga. El resto de los casos serán análogos a esto si se toma una componente conexa de Σ .

□

Lema 5.2.23. Si $(F, [w])$ rígido y $W(\underline{w})$ contiene un vértice v y una arista a tal que $W(\underline{w}) \setminus \{a\}$ y $W(\underline{w}) \setminus \{v\}$ son conexos, pero $W(\underline{w}) \setminus \{v, a\}$ es desconexo, entonces $[w]$ no es minimal o $(F, [w])$ es una esfera con tres ponchaduras.

Demostración. Sea $(F, [w])$ rígido y $W(\underline{w})$ tal que contiene un vértice v y una arista a tal que $W(\underline{w}) \setminus \{a\}$ y $W(\underline{w}) \setminus \{v\}$ son conexos pero $W(\underline{w}) \setminus \{v, a\}$ es desconexo. Sean A, B componentes conexas de $W(\underline{w}) \setminus \{v, a\}$, supóngase sin pérdida de generalidad que $v = v^+$ está en A y denotemos a su par por v^- . Sean C_A y C_B los conjuntos de aristas tales que unen a A y B respectivamente con v , entonces $C_A \cup \{a\}$ es un conjunto de aristas que separa a v^+ de v^- . Si la cardinalidad de $C_A \cup \{a\}$ es menor que la valencia de v es posible realizar un movimiento de Whitehead por lo que $\underline{w}$ no es minimal y si la cardinalidad de $C_A \cup \{a\}$ es igual a la valencia de v , se tiene que esto sucede si y sólo si C_B es una

única arista a' , caso en el que $\{a, a'\}$ es un par separador de $W(\underline{w})$, luego por el Lema 5.2.22 $(F, [\underline{w}])$ será una esfera con tres ponchaduras.

□

Un concepto necesario para entender la estructura de pullback de los grafos de Whitehead será la de entrelazamiento de grafos dada por Manning en [8].

Definición 5.2.24. Sean Ξ y Γ grafos finitos. Sea $u \in V(\Xi)$ y $v \in V(\Gamma)$ donde $\text{val}(u) = \text{val}(v)$. Y sea f una biyección entre los conjuntos:

$$I(u) := \{a \in A(\Xi) : (\partial_0(a) = u \wedge \partial_1(a) = x_i) \vee (\partial_0(a) = x_i \wedge \partial_1(a) = u),$$

$$x_i \in V(\Xi), i \in \{1, \dots, n\}, n = \text{val}(u)\},$$

$$I(v) := \{a' \in A(\Gamma) : (\partial_0(a') = v \wedge \partial_1(a') = y_i) \vee (\partial_0(a') = y_i \wedge \partial_1(a') = v),$$

$$y_i \in \text{vert}(\Gamma), i \in \{1, \dots, n\}, n = \text{val}(v)\}.$$

Donde si a es tal que $\partial_0(a) = u$ y $\partial_1(a) = x_i$ o bien $\partial_0(a) = x_i$ y $\partial_1(a) = u$, entonces $f(a) = a'$ donde $\partial_0(a') = v$ y $\partial_1(a') = y_i$ o bien $\partial_0(a') = y_i$ y $\partial_1(a') = v$.

Un **entrelazamiento de dos grafos** Ξ y Γ es un nuevo grafo Λ cuyo conjunto de vértices es:

$$V(\Lambda) := (V(\Xi) \cup V(\Gamma)) \setminus \{u, v\}$$

Y sean:

$$(x_i, y_i) = \{a : \partial_0(a) = x_i \wedge \partial_1(a) = y_i\}$$

$$E = \{a_i = (x_i, y_i)\}$$

Y donde el conjunto de aristas de Λ es:

$$A(\Lambda) := ((A(\Xi) \cup A(\Gamma)) \setminus (I(u) \cup I(v))) \cup E$$

Para construir un entrelazamiento de dos grafos finitos Ξ y Γ . Hay que fijar $u \in V(\Xi)$ y $v \in V(\Gamma)$ donde $\text{val}(u) = \text{val}(v)$ y elegir una biyección entre las aristas incidentes a u y las aristas incidentes a v . Después hay que borrar los vértices u y v , y dejar colgantes las aristas que inciden en ellos, para luego unir las aristas colgantes de Ξ y Γ de acuerdo a la biyección f considerada anteriormente. Observe que los entrelazamientos no son únicos; dados dos grafos se pueden obtener entrelazamientos distintos al elegir vértices o biyecciones entre los vértices incidentes distintas.

Ejemplo 5.2.25. Si se considera el par de grafos Ξ y Γ que se muestran en la Figura 5.26, los vértices u y v tienen valencia 4 por lo que se puede considerar una biyección entre los respectivos conjuntos de aristas incidentes definida como $f(a_i) = a'_i$

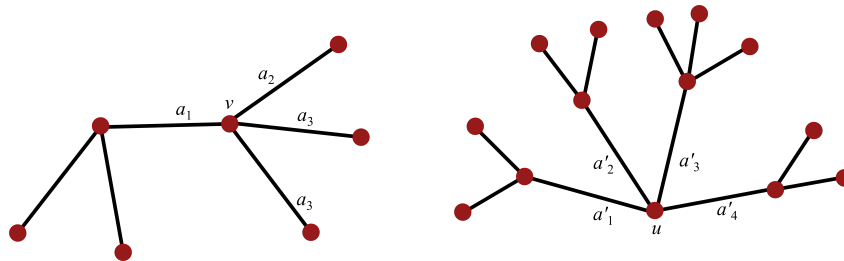


Figura 5.26: Grafos Ξ y Γ con vértices u y v respectivamente.

La Figura 5.27 muestra los Ξ y Γ a los que se les borraron los vértices u y v ; además se muestran las aristas relacionadas por f , el entrelazamiento de estos dos grafos se obtendrá de unir cada par de aristas a las que se les quito un vértice de los correspondientes colores en una sola arista.

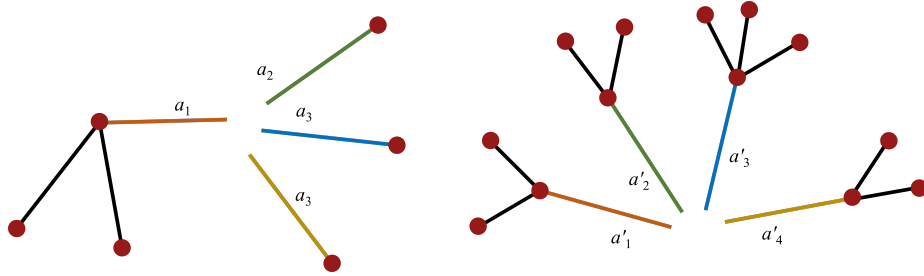


Figura 5.27: Grafos Ξ y Γ sin los vértices u y v respectivamente.

La Figura 5.28 muestra a Λ el entrelazamiento de los grafos Ξ y Γ .

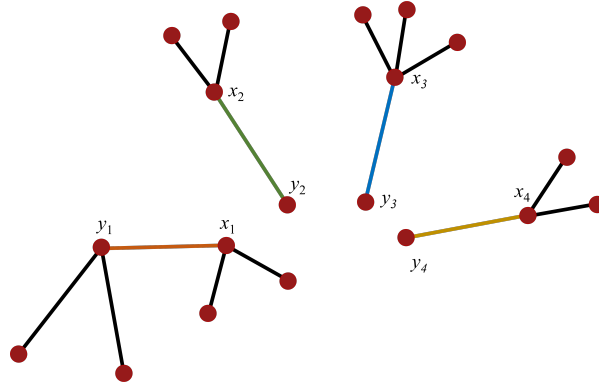


Figura 5.28: El entrelazamiento Λ de los grafos Ξ y Γ .

Lema 5.2.26. Si Ξ es un grafo finito, conexo y sin vértices de corte, entonces para cualesquiera vértices $i, j \in V(\Xi)$ y cualquier vértice $u \in V(\Xi)$ existe un camino que une a i con j y no pasa por u .

Demostración. Si Ξ es un grafo finito, conexo y sin vértices de corte, sean $i, j, u \in V(\Xi)$. Supongamos que todos los caminos que unen a i con j y pasen por u . Entonces $I(u) \setminus (I(u) \cup u)$ es desconexo, por lo que u es un vértice de corte pero esto es una contradicción pues Ξ no tiene vértices de corte. $\square$

Proposición 5.2.27. El resultado de entrelazar dos grafos (finitos) conexos y sin vértices de corte, es un grafo conexo y sin vértices de corte.

Observación 5.2.28. Nótese que si en un grafo se tiene un camino que no pasa por ninguno de los vértices respecto a los cuales se hace el entrelazamiento, entonces este es un camino idéntico en el entrelazamiento.

Demostración. Sea Ξ y Γ dos grafos (finitos) conexos, sin vértices de corte y sea Λ un entrelazamiento entre ellos respecto de los vértices $u \in V(\Xi)$ y $v \in V(\Gamma)$ cuyas valencias son n y respecto de

alguna biyección f .

A continuación se verá que Λ es conexo. Sean $i, j \in V(\Lambda)$, se tienen los casos:

1. Los vértices $i, j \in V(\Xi)$.
2. Los vértices $i, j \in V(\Gamma)$.
3. Los vértices $i \in V(\Xi)$ y $j \in V(\Gamma)$.

Si $i, j \in V(\Xi)$ por el Lema 5.2.26 se tiene que existe un camino en Ξ que los une y no pasa por u , luego por la Observación 5.2.28 se tiene que este es un camino en Λ .

Si $i, j \in V(\Gamma)$ de manera análoga al caso anterior se tiene que existe un camino en Λ que los une.

Si $i \in V(\Xi)$ y $j \in V(\Gamma)$. Sea $x \in V(\Xi)$ tal que $x = \partial_0(a)$ o bien $x = \partial_1(a)$ con $a \in I(u)$. Por el Lema 5.2.26 existe un camino P_Ξ en Ξ que une a i con x y no pasa por u , de modo que por la Observación 5.2.28, el camino P_Ξ es un camino en Λ . Por otro lado consideremos a $y \in V(\Gamma)$ tal que $f(x) = y$, por el Lema 5.2.26 existe un camino P_Γ en Γ que une a j con y y no pasa por v . Y dado que Λ es un entrelazamiento respecto de f existe una arista a' en Λ tal que $\partial_0(a') = x$ y $\partial_1(a') = y$. Por lo que la concatenación $P_\Xi \cdot a' \cdot P_\Gamma$ es un camino en Λ que une a i con j .

Por lo tanto Λ es conexo.

Ahora sólo resta ver que Λ no tiene vértices de corte. Sea $w \in V(\Lambda)$ se verá que $\Lambda \setminus (I(w) \cup \{w\})$ es conexo.

Sean $i, j \in V(\Lambda \setminus (I(w) \cup \{w\}))$ se tienen los siguientes casos con sus respectivos subcasos.

1. Los vértices $i, j \in V(\Xi)$.
 - a) El vértice $w \notin V(\Xi)$:

Si se tiene este caso por el Lema 5.2.26 existe un camino P_Ξ en Ξ que una a i con j y no pasa por u , por lo que este mismo es un camino en Λ .
 - b) El vértice $w \in V(\Xi)$ Por el Lema 5.2.26 se tiene que existe un camino que une a i con j y no pasa por w y se tiene los caso:
 - 1) El camino P_Ξ no pasa por el vértice u .
En este caso P_Ξ es un camino en Λ que une a i y j .
 - 2) El camino P_Ξ pasa por el vértice u .
En este caso el camino P_Ξ en Ξ está determinado por una colección de vértices de la forma $iv_1v_2 \cdots x_i u x_j \cdots v_n j$, donde x_i y x_j son extremos de aristas incidentes a u , por lo que existen dos caminos P_i y P_j determinados por los vértices $iv_1v_2 \cdots x_i$ y $x_j \cdots v_n j$ respectivamente que unen a i con x_i y a x_j con j . Por el Lema 5.2.26 existe P_y un camino en Γ que une a los vértices y_i con y_j , extremos en los vértices de Γ de la unión de las aristas colgantes correspondientes a x_i y x_j tal que no pasa por v , y por lo tanto es un camino en Λ . Luego, por construcción existen e_i con $\partial_0(e_i) = x_i$, $\partial_1(e_i) = y_i$ y e_j con $\partial_0(e_j) = x_j$, $\partial_1(e_j) = y_j$ aristas en Λ . Así, se tiene que la concatenación $P_i \cdot e_i \cdot P_y \cdot e_j \cdot P_j$ es un camino Λ que une a i con j .
2. Los vértices $i, j \in V(\Gamma)$.
 - a) El vértice $w \notin V(\Gamma)$

b) El vértice $w \in V(\Gamma)$

Este caso y sus subcasos son completamente análogo a los casos anteriores.

3. Los vértices $i \in V(\Xi)$ y $j \in V(\Gamma)$.

a) El vértice $w \in V(\Xi)$ Por el Lema 5.2.26 existe un camino P_Ξ en Ξ que une i con u y no pasa por w , más aún este camino está determinado por una colección de vértices de la forma $iv_1v_2 \cdots x_iu$ donde x_i es extremo de una arista incidente en u . Esto permite considerar al camino P_i en Λ determinado por los vértices $iv_1v_2 \cdots x_i$ un camino que une a i con x_i y que no pasa por ni por u , ni por w . Por otro lado, si se considera a y_i el extremo de la arista e en Λ tal que $\partial_0(a) = x_i$ y $\partial_1(a) = y_i$ resultante del entrelazamiento dado por la biyección f , se tiene que existe un camino P_j en Γ que une a j con y_i y no pasa por v , de modo este es un camino en Λ . Luego la concatenación de caminos $P_i \cdot e \cdot P_j$ es un camino en Λ que une a i con j .

b) El vértice $w \notin V(\Xi)$

Note que si $w \notin V(\Xi)$, entonces $w \in V(\Gamma)$ y se tiene que este caso es análogo al caso anterior.

Con los casos anteriores hemos visto que para cualquier $w \in V(\Lambda)$ se tiene que $\Lambda \setminus (I(w) \cup \{w\})$ es conexo por lo tanto Λ es un grafo conexo sin vértices de corte.

□

La construcción del grafo de Whitehead de un pullback puede resumirse en el siguiente Lema 5.2.29 cuya demostración puede encontrarse en [8].

Lema 5.2.29. Si $\hat{F} \subseteq F$ es un subgrupo de índice finito y $\hat{w}$ es el pullback de w en F entonces $W(\hat{w})$ se obtiene de entrelazar $|F : \hat{F}|$ copias de $W(w)$ respecto de la base elegida para $\hat{F}$.

Ejemplo 5.2.30. Considérese un cuerpo con asas de género 2 y a $F_2 = \langle a, b \rangle$ su grupo fundamental. Dada la palabra $ba^{-1}b^{-1}a^2$ ésta tiene asociada una curva $N_{ba^{-1}b^{-1}a^2}$ como se muestra en la Figura 5.29.

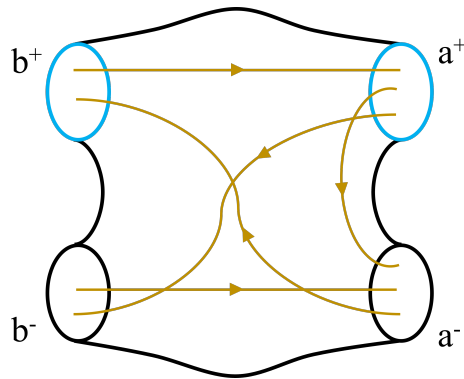


Figura 5.29: La curva $N_{ba^{-1}b^{-1}a^2}$ asociada a la palabra $ba^{-1}b^{-1}a^2$ vista como subvariedad de un cuerpo con asas cortado a lo largo de los discos que representan los generadores estándar.

La Figura 5.30 muestra dos copias del grafo de Whitehead asociado a $ba^{-1}b^{-1}a^2$ y un entrelazamiento entre ellas respecto de los vértices rojos.

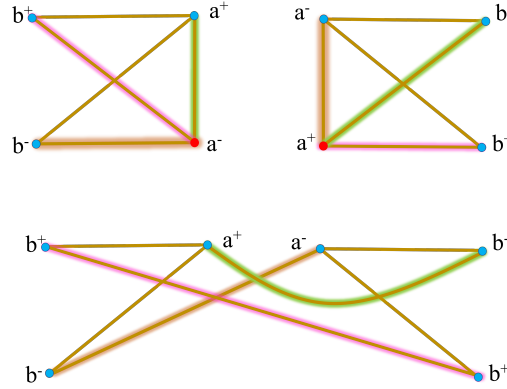


Figura 5.30: Entrelazamiento de dos copias del grafo de Whitehead de $ba^{-1}b-1a^2$.

La Figura 5.31 muestra un levantamiento de $N_{ba^{-1}b-1a^2}$ a un cubriente de grado 2, note que este levantamiento queda determinado por el entrelazamiento antes visto.

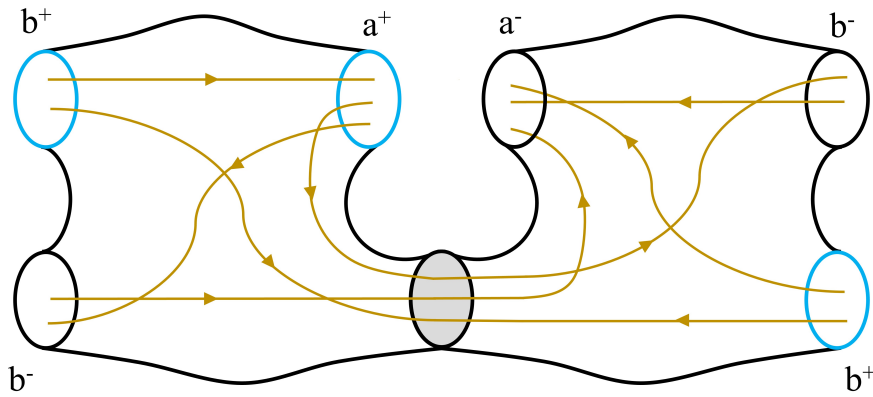


Figura 5.31: Levantamiento de la curva $N_{ba^{-1}b-1a^2}$ a un cubriente de grado dos vista como subvariedad de un cuerpo con asas cortado a lo largo de los discos que representan los generadores estándar.

Una pieza importante para la demostración del Teorema 5.3.7 será el concepto de grupo limpio que se enuncia a continuación.

Definición 5.2.31. *Dados una base B para F y un par $(F, [\underline{w}])$. Sea X el grafo orientado y etiquetado de una rosa de n -pétalos tal que se tiene la identificación $F \cong \pi_1(X)$ determinada por la elección de B . Considérese un subgrupo $\hat{F}$ de índice finito de F y a $\hat{X} \rightarrow X$ la función cubriente correspondiente. El subgrupo $\hat{F}$ es **limpio** si la función pullback:*

$$\underline{w} : \Pi_i S^1 \rightarrow \hat{X}$$

es inyectiva en cada componente conexa.

En el dibujo de un cuerpo con asas los subgrupos $\hat{F}$ son limpios si y sólo si toda componente de la preimagen de $\underline{w}$ intersecta cada bola en a lo mas un arco, véase la Figura 5.32

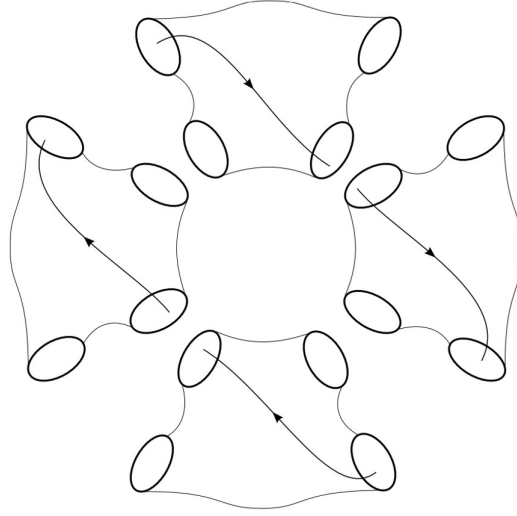


Figura 5.32: Una componente del pullback de una palabra a un cubriente limpio.

Una aplicación del Teorema de Marshall Hall (que puede consultarse en [1]) permite encontrar una cantidad abundante de subgrupos limpios.

Teorema 5.2.32. (Teorema de Marshall Hall) Sea H un subgrupo finitamente generado de un grupo libre. Entonces existe un subgrupo de índice finito $G \leq F$ tal que $G = H * K$.

Lema 5.2.33. Si $\bar{F}$ un subgrupo cualquiera de índice finito de F un grupo libre de rango n , entonces existe un subgrupo limpio $\hat{F}$ de F tal que $\hat{F} \subseteq \bar{F}$.

Demostración. Para cada $w_i \in \underline{w}$ considérese a $\langle w_i \rangle$. Por el Teorema 5.2.32 existe un subgrupo de índice finito F_i de F (tal que $F_i = \langle w_i \rangle * K$), el grupo F_i es tal que si $X_i \rightarrow X$ es la correspondiente función cubriente de un cubriente con un número finito de hojas, el morfismo $w_i : S^1 \rightarrow X$ se levanta a un encaje $S^1 \hookrightarrow X_1$. El grupo limpio buscado es:

$$\text{core}(\hat{F} \bigcap_i F_i) = \bigcap_{j \in 1, \dots, n} a_j^{-1} (\hat{F} \bigcap_i F_i) a_j$$

con $\{a_j : j \in \{1, \dots, n\}\}$ el conjunto generador de F . □

Teorema 5.2.34. Supongamos que $(F, [\underline{w}])$ rígido y no es una esfera con tres ponchaduras. Para cualquier subgrupo limpio de índice finito $\hat{F} \subseteq F$, para cualquier $\hat{w}_i \in \underline{\hat{w}}$, el par $(\hat{F}, [\underline{\hat{w}} \setminus \{\hat{w}_i\}])$ es Wilton libremente indescomonible relativo a $[\underline{\hat{w}} \setminus \{\hat{w}_i\}]$.

Demostración. Sea B una base para F tal que $\underline{w}$ es minimal. Por hipótesis $(F, [\underline{w}])$ es rígido y no es una esfera con tres ponchaduras, luego por el Lema 5.2.23 para cualesquiera arista $a \in A(W(\underline{w}))$ y vértice $v \in V(W(\underline{w}))$ el grafo $W(\underline{w}) \setminus \{a, v\}$ es conexo, y por lo tanto $W(\underline{w})$ no contiene ningún par constituido por una arista y un vértice que sea separador. Por el Lema 5.2.22 se sabe que $W(\underline{\hat{w}})$ se obtiene de entrelazar varias copias de W_j de $W(\underline{w})$ con $j \in \{1, \dots, m\}$ donde $m = |F : \hat{F}|$. Dado que $\hat{F}$ es limpio, $\hat{w}_i$ intersecta a cada W_j en a lo más una arista. Luego para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ se define a $W'_j := W_j \setminus \{\hat{w}_i\}$, dado que cada W_j no tiene un par que conste de una arista y un vértice separador, en especial $W_j \setminus \{\hat{w}_i\}$ es un grafo sin una arista por tanto es conexo por caminos y no contiene vértices de corte. El grafo de Whitehead $W(\underline{\hat{w}} \setminus \{\hat{w}_i\})$ se obtiene de entrelazar a las copias

W'_j , y por la Proposición 5.2.27 el entrelazamiento es conexo y no tiene vértices de corte. Luego por el Lema 5.2.20 dado que $W(\hat{u} \setminus \{\hat{w}_i\})$ es conexo se tiene que $(\hat{F}, [\hat{u} \setminus \{\hat{w}_i\}])$ es Wilton libremente indescomponible. Más aún por el Teorema de Stallings 5.1.1 $\hat{F}$ tiene un fin. $\square$

5.3. Subgrupos de un fin de grafos de grupos libres con grupos arista cíclicos.

En esta sección se demuestra el Teorema 5.3.7 que es el teorema principal de este trabajo, se demuestra que si un grupo hiperbólico con un fin se descompone en un grafo de grupos con grupos vértice libres y grupos arista cíclicos (en particular, es libre de torsión), entonces es un grupo de superficie o bien tiene un subgrupo finitamente generado con un fin de índice infinito. A partir de la descomposición JSJ sobre la familia de grupos cíclicos para grupos hiperbólicos con un fin y libres de torsión dada por Bowditch en [3] se estudian los casos en los que la descomposición tiene o no vértices rígidos, si está no los tiene el Lema 5.3.6 garantiza la veracidad del teorema, si los tiene es necesario construir un precubriente del grupo que no sea un cubriente.

Las descomposiciones JSJ de Bowditch para grupos hiperbólicos y sus propiedades de interés para este trabajo quedan dadas por el siguiente Teorema 5.2.19 cuya demostración puede consultarse en [3].

Teorema 5.3.1. *Sea G un grupo con un fin, libre de torsión e hiperbólico. Existe un grafo de grupos reducido, cuyo grupo fundamental es G , tal que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Todo grupo arista es cíclico.*
2. *Todo grupo vértice es de uno de los siguientes tipos:*
 - *Un grupo cíclico.*
 - *Un grupo de superficie que es isomorfo al grupo fundamental de una superficie compacta. Los grupos arista incidentes están identificados con (potencias de) componentes frontera.*
 - *Un grupo rígido (que en especial no se parte sobre ningún subgrupo cíclico relativo a las aristas incidentes).*

Más aún, un extremo de cada arista incide un grupo vértice cíclico.

Observe que por la maximalidad de las descomposiciones JSJ podemos asumir que sin importar de que tipo sean los grupos vértice en la descomposición dada por el Teorema 5.3.1 estos serán libremente indescomponibles. Además la descomposición dada queda determinada por un *Cyc*-árbol.

Una vez dada la descomposición JSJ de G un grupo con un fin, libre de torsión e hiperbólico, se tienen los casos en los que esta descomposición tiene o no vértices rígidos. Dos propiedades de grupos que serán de utilidad para construir cubrientes para estas descomposiciones son las que se dan a continuación.

Definición 5.3.2. *Un grupo G es **balanceado** si para cualquier elemento $g \in G \setminus \{1\}$ se tiene que si g^n es conjugado de g^m , entonces $n = \pm m$.*

Definición 5.3.3. *Un grupo G **separa subgrupos** si todo subgrupo finitamente generado es la intersección de subgrupos de índice finito de G .*

En [14] se observa que los grupos hiperbólicos son balanceados si son libres de torsión y se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.3.4. *Sea G un grupo que es grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos vértice libres y grupos arista cíclicos. El grupo G separa subgrupos si y sólo si es balanceado.*

Con esto tenemos que los grupos con los que trata el Teorema 5.3.7 son balanceados y separan subgrupos.

El caso en el que la descomposición no tiene vértices rígidos se tratará en el Lema 5.3.6. Para esto se construirá un cubriente finito del grafo de espacios asociado a la descomposición, la existencia de este quedará dada por el Teorema 5.3.5 cuya demostración puede consultarse en [14].

Teorema 5.3.5. *Sea $\mathcal{X}$ un grafo de espacios finito tal que cada espacio vértice es un grafo, cada grupo arista es un cilindro y cada morfismo de pegado correspondiente a un grupo arista es una inmersión. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\pi_1(|\mathcal{X}|)$ es balanceado.
- Existe un cubriente limpio finito $\hat{X}$ de $\mathcal{X}$

Lema 5.3.6. *Sea G un grupo hiperbólico, libre de torsión y con un fin. Si la descomposición JSJ de G no tiene vértices rígidos, entonces G tiene un subgrupo de superficie. En particular G o bien tiene un subgrupo de índice infinito con un fin o G es un grupo de superficie.*

Demostración. Considérese la descomposición JSJ de Bowditch sin vértices rígidos de G dada como grupo fundamental de un grafo de espacios X . Observe que si un grupo vértice G_v es trivial o un grupo cíclico libre de torsión, entonces el espacio vértice X_v asociado en la descomposición puede considerarse un disco D^2 o anillo $S^1 \times [0, 1]$ respectivamente, y note que esto se puede llevar a dimensión 3 sin alterar el grupo fundamental correspondiente considerando de manera respectiva una 1-asa o bien un toro solido. Si el grupo vértice G_v es un grupo de superficie, entonces por espacio vértice X_v asociado se considerará la superficie compacta del que este es grupo fundamental y se puede llevar a dimensión 3 tomando a $X_v \times [0, 1]$. Además dado que los grupos arista G_a son cíclicos se les puede asociar espacios arista X_a que serán un disco D^2 o un anillos $S^1 \times [0, 1]$ y de manera análoga se puede tomar en dimensión 3 una 1-asa o un toro solido. De modo que al espacio total asociado la descomposición JSJ se le puede dar estructura de 3-variedad.

Además, dado que esta descomposición JSJ de G no tiene vértices rígidos, entonces por el Teorema 5.3.4 el grupo G es balanceado, por el Teorema 5.3.5 existe un cubriente finito $\hat{X}$ de X al que de manera análoga a X se le puede dotar de una estructura de 3-variedad asférica con frontera a la que se denotará como M . Note que $G_0 := \pi_1(M)$ es índice finito en G y por tanto G_0 es hiperbólico con un fin.

De lo anterior por construcción se sigue que ∂M es una superficie orientable cerrada con característica de Euler menor o igual a cero, por lo que ∂M es una superficie cerrada de genero $g \geq 1$. Más aún se tiene que el encaje $\partial M \rightarrow M$ es π_1 -inyectivo, puesto que si no lo fuera por el Lema de Dehn y el Teorema del Lazo existiría un disco $\mathcal{D}$ encajado en M tal que $\partial \mathcal{D}$ no es null-homotópica en ∂M , por el Teorema de Sierfert-Van Kampen, entonces sería posible crear una partición de G_0 sobre el grupo trivial, de modo que G_0 tendría una cantidad infinita de fines, lo que contradice que G_0 tiene un fin. Así, como $\partial M \rightarrow M$ es π_1 -inyectivo sucede que $\pi_1(\partial M) \leq G_0 \leq G$, es decir que G tiene un subgrupo de superficie $\pi_1(\partial M)$.

□

Finalmente se demostrará el teorema principal de este trabajo en el que se desarrolla el caso para una descomposición JSJ sin vértices rígidos.

Teorema 5.3.7. *Sea G el grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos vértice libres y con grupos arista cíclicos. Si G es hiperbólico y tiene un fin, entonces o bien G es el grupo fundamental de una superficie cerrada o G tiene un subgrupo finitamente generado con un fin de índice infinito.*

Demostración. Consideremos la descomposición JSJ de Bowditch de G dada como grupo fundamental de un grafo de espacios X . Por el Teorema 5.3.1 se tienen los casos en que la descomposición JSJ tiene o no grupos vértice rígidos. Si la descomposición JSJ no tiene grupos vértice rígidos por el Lema 5.3.6 sucede que G tiene un subgrupo de índice infinito con un fin o G es un grupo de superficie.

A continuación estudiaremos el caso en el que G tiene al menos un grupo vértice G_v rígido (que es en particular cíclicamente indescomponible relativo a las aristas incidentes) y no es una esfera con tres ponchaduras. Se tiene que $G_v = \pi_1(X_v)$ y que $[w]$ es la estructura periférica inducida por las grupos aristas incidentes tal que $(G_v, [w])$ es cíclicamente indescomponible relativa a $[w]$. Note que dado que G tiene una descomposición con grupos vértice libres, entonces G_v es un subgrupo libre.

Como G_v es libre y por el Lema 5.2.33 existe un subgrupo limpio $\hat{F}$ de índice finito en G_v , equipado con la estructura periférica inducida por el pullback $[\hat{w}]$. Note que $\hat{F}$ es también finitamente generado.

Dado que G es hiperbólico y tiene una partición cíclica con grupos vértice libres este es separa subgrupos, además note que $\hat{F} \leq G_v \leq G$, por lo que existe $\hat{F} = \cap M_k$ donde M_k son subgrupos de índice finito en G , si $R_1, \dots, R_s$ es un conjunto de representantes de clases laterales de $\hat{F}$ en G , dado que G es separa subgrupos existe un subgrupo $\hat{G}$ de G de índice finito tal que $\hat{F} \leq \hat{G}$ pero $R_i \notin \hat{G}$. Luego, $\hat{G}$ induce a $\hat{X}$ un cubriente finito de X , con un espacio vértice $\hat{X}_{\hat{v}}$ que es un levantamiento de X_v tal que $\pi_1(\hat{X}_{\hat{v}}) = \hat{F}$. Así, se tiene que $\pi_1(\hat{X}) = \hat{G}$ y el grado de $\hat{X}$ es finito y tal que corresponde con el índice de $\hat{F}$ en G .

Puesto que X tiene una estructura de grafo de espacios, entonces éste induce una estructura de grafo de espacios en $\hat{X}$, de modo que en la preimagen de cada X_v existen una cantidad finita de componentes conexas en la preimagen de $\hat{X}_{\hat{v}}$. Se llamará $\hat{\Xi}$ al grafo asociado a la estructura de grafo de espacios de $\hat{X}$.

Sea X' el precubriente de X que consta de la unión todos los espacios vértice de $\hat{X}$ sin $\hat{X}_{\hat{v}}$ y de todo cilindro de un espacio arista de $\hat{X}$ que no están asociados a aristas incidentes a $\hat{v}$. Sean $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ las aristas de $\hat{\Xi}$ con un extremo en $\hat{v}$ y sean $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n$ las aristas de $\hat{\Xi}$ con dos extremos en $\hat{v}$. Se considerará la orientación en el grafo tal que $\partial_1(\hat{a}_i) = \hat{v}$ y $\partial_0(\hat{a}_i)$ es un vértice en X' de modo que los morfismos de pegado son de la forma $\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \rightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ y $\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \rightarrow X'$; para las aristas que son lazos se tiene que $\partial_0(\hat{b}_i) = \partial_1(\hat{b}_i)$, los morfismos de pegado son de la forma $\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \rightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ y $\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \rightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ donde $\hat{X}_{\hat{b}_j} = \hat{X}_{\hat{b}_j}$.

Se construirá un nuevo precubriente W de $\hat{X}$. Considérense m copias de $\hat{X}_{\hat{v}}$ denotadas como Y_p , además n copias de $\hat{X}_{\hat{v}}$ que denotadas por Y_q^+ y otras n copias de $\hat{X}_{\hat{v}}$ que se denotarán por Y_r^- . Luego, sea:

$$Y = \left(\coprod_{p \in \{1, \dots, m\}} Y_p \right) \sqcup \left(\coprod_{q \in \{1, \dots, n\}} Y_q^+ \right) \sqcup \left(\coprod_{r \in \{1, \dots, n\}} Y_r^- \right).$$

Observe que para cada $\hat{X}_{\hat{v}}$ el conjunto de elevaciones de los morfismos de pegado de X a $\hat{X}_{\hat{v}}$ está dado por la siguiente unión de dos conjuntos :

$$\{\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}} \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}} \mid j \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}} \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$$

Por lo que el conjunto de elevaciones de los morfismos de pegado de X a Y quedará determinada por la unión de los tres siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m^2+(2nm)} &:= \bigcup_{p \in \{1, \dots, m\}} \left(\{\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow Y_p\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_p\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_p\} \right) \\ \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+ &:= \bigcup_{q \in \{1, \dots, n\}} \left(\{\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow Y_q^+\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_q^+\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_q^+\} \right) \\ \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^- &:= \bigcup_{r \in \{1, \dots, n\}} \left(\{\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow Y_r^-\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_r^-\} \cup \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow Y_r^-\} \right) \end{aligned}$$

Note que la cardinalidad de $\mathcal{E}_{m^2+(2nm)}$ es $m^2+(2nm)$ y las de $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+$ y $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^-$ son $(nm)+2n^2$. Se procederá a definir un subconjunto conveniente $\mathcal{E}$ del conjunto de elevaciones $\mathcal{E}_{m^2+(2nm)} \cup \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+ \cup \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^-$ como sigue, sean:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &:= \bigcup_{p \in \{1, \dots, m\}} \{\hat{\gamma}_{\hat{a}_p} : \hat{X}_{\hat{a}_p} \longrightarrow Y_p\} \\ \mathcal{E}_n^+ &:= \bigcup_{q \in \{1, \dots, n\}} \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_q} : \hat{X}_{\hat{b}_q} \longrightarrow Y_q^+\} \\ \mathcal{E}_n^- &:= \bigcup_{r \in \{1, \dots, n\}} \{\hat{\gamma}_{\hat{b}_r} : \hat{X}_{\hat{b}_r} \longrightarrow Y_r^-\} \end{aligned}$$

El conjunto deseado se define como $\mathcal{E} := \left(\mathcal{E}_{m^2+(2nm)} \cup \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+ \cup \mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^- \right) \setminus (\mathcal{E}_m \cup \mathcal{E}_n^+ \cup \mathcal{E}_n^-)$

Observe que cada morfismo de pegado $\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ asociado a una arista incidente a $\hat{v}$ tiene $m+2n-1$ levantamientos en $\mathcal{E}$ puesto hay m levantamientos en $\mathcal{E}_{m^2+(2nm)}$, hay n levantamientos en $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+$ y otros n levantamientos en $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^-$, pero se resta un levantamiento en $\mathcal{E}_m$ cuando $i = p$; de manera análoga para los morfismos de pegado de la forma $\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ o $\hat{\gamma}_{\hat{b}_j} : \hat{X}_{\hat{b}_j} \longrightarrow \hat{X}_{\hat{v}}$ hay m levantamientos en $\mathcal{E}_{m^2+(2nm)}$ y hay n levantamientos en cada $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^+$ y $\mathcal{E}_{(nm)+2n^2}^-$, menos un levantamiento correspondiente al levantamiento en $\mathcal{E}_n^+$ o $\mathcal{E}_n^-$ respectivamente cuando $j = q$ o $j = r$. Además note que cada elevación de $\mathcal{E}$ será un levantamiento pues tendrá el máximo grado posible.

Ahora, considérense $m+2n-1$ copias de X' que se denotaran por Z_k con $k \in \{1, \dots, m+2n-1\}$ y sea $Z = \coprod_{k \in \{1, \dots, m+2n-1\}} Z_k$.

El conjunto de elevaciones de cada morfismo de pegado $\hat{\gamma}_{\hat{a}_i} : \hat{X}_{\hat{a}_i} \longrightarrow X'$ de $\hat{X}$ a Z tiene exactamente $m+2n-1$ elevaciones una por cada copia Z_k y estas elevaciones son en especial levantamientos. Además, dado que X' es un cubriente sin un espacio vértice y sin los cilindros de aristas incidentes a estos, para cualquier espacio arista en cada Z_k se tiene que cada morfismo de pegado tiene un morfismo de pegado inverso. Al conjunto de todas las elevaciones de todos los morfismos de pegado de $\hat{X}$ a Z lo denotaremos como $\mathcal{F}$. El conjunto $W = Y \sqcup Z$ junto con el conjunto de elevaciones $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$ satisface las condiciones de la Observación 4.4.5 por lo que W es un precubriente para $\hat{X}$. Si W es

disconexo bastará con tomar una de sus componentes conexas por caminos. Todos los grupos vértice de W son libremente indescomponibles relativos a los grupos aristas incidentes (en caso contrario se induciría una descomposición libre relativa a aristas incidentes en G), por lo que $\pi_1(W)$ tiene un fin. Las elevaciones de $\mathcal{E}_m$ son elevaciones colgantes puesto que son morfismo de pegado de las copias Y_p de $\hat{X}_v$ pero no son morfismos de pegado de W , de esto se tiene W no es un cubriente para $\hat{X}$, entonces $\pi_1(W)$ es un subgrupo de índice infinito en $\pi_1(\hat{X}) = \hat{F}$ y por tanto de índice infinito en $\pi_1(X) = G$. $\square$

Conclusión

Por un lado se tiene que el estudio de los subgrupos de un grupo es una pregunta clásica de la teoría de grupos, y por otro lado se tiene que una clasificación o caracterización de los grupos con un fin es una pregunta abierta. Esto da pie a preguntarse ¿cómo son los subgrupos de grupos con un fin?. Esta pregunta puede hacerse para los grupos hiperbólicos con un fin, y Gromov probó que todo grupo hiperbólico con un fin contiene un subgrupo libre de rango mayor o igual a 2.

Una pregunta sustancialmente más complicada es la de encontrar subgrupos con un fin en grupos hiperbólicos con un fin. Otro tipo interesante de subgrupos ligado a la topología es el de los subgrupos de superficie pues estos son hiperbólicos con un fin. Más aún si Σ es una superficie orientable cerrada de género al menos dos, el grupo fundamental de esta será un grupos hiperbólicos con un fin con una descomposición como producto amalgamado de grupos libres con amalgama grupos cíclicos y es de interés estudiar a los subgrupos de dichos grupos fundamentales.

Para estudiar a los subgrupos de grupos hiperbólicos con un fin en este trabajo se demostró el Teorema 5.3.7 que dice que si un grupo hiperbólico con un fin tiene una descomposición como producto amalgamado de grupos libres con amalgama grupos cíclicos, entonces tiene un subgrupo de superficie o un subgrupo con un fin.

Algunas otras preguntas interesantes en el sentido de las vistas anteriormente pueden obtenerse al considerar qué sucede si G el grupo hiperbólico con un fin dado tiene una descomposición distinta, por ejemplo que pasa si G es el grupo fundamental de un grafo de grupos con grupos vértice no libres o si los grupos arista pertenecen a alguna otra familia de grupos por ejemplo grupos delgados, virtualmente cíclicos, abelianos, pequeños, etc.

Bibliografía

- [1] G. Baumslag, O. Bogopolski, B. Fine, A. Gaglione, G. Rosenberger, D. Spellman *On Some Finiteness Properties in Infinite Groups* Algebra Colloquium, March 2008.
- [2] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [3] B. Bowditch, *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*. Acta Math, 1998.
- [4] V. Guirardel and G. Levitt, *JSJ decompositions: definition, existence, uniqueness*. I: The JSJ deformation space, November, 2009.
- [5] M. Hall, *Subgroups of finite index in free groups*. Canadian Journal of Mathematics, 1949.
- [6] P. de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*. The University of Chicago Press, 2000.
- [7] C. Löh, *An Introduction to Geometric Group Theory*. Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 2011.
- [8] J. F. Manning, *Virtually geometric words and Whitehead's algorithm*. Math. Res. Lett, 2010.
- [9] R. Martin, *Non Uniquely Ergodic Foliations of Thin Type, Measured Currents, and Automorphisms of Free Groups, Apendix B, Whitehead Graphs and Decomposition Spaces*. University of California, 1995.
- [10] J. P. Serre, *Trees*. Springer Verlag, 1980.
- [11] P. Scott, T. Wall, *Topological methods in group theory*. University of Liverpool, 1979.
- [12] H. Wilton, *One-ended subgroups of graph of free groups with cyclic edge groups*. September, 2018.
- [13] H. Wilton, *Elementarily free groups are subgroup separable*. November, 2005.
- [14] D. T. Wise, *Subgroup separability of graphs of free groups with cyclic edge groups*. The Quarterly Journal of Mathematics, 2000.