



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

# El axioma de elección y la existencia de funciones aditivas no lineales

TESIS

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias  
Matemáticas**

Presenta:

**José de Jesús Sáez Macegoza**

Directores de Tesis

**Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo**

**Dra. María de Jesús López Toriz**

Puebla, Puebla; Agosto de 2025





**BUAP**

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**JOSÉ DE JESÚS SÁEZ MACEGOZA**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 22 de mayo de 2025, con la tesis titulada:

***El axioma de elección y la existencia de funciones aditivas no lineales***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 26 de mayo de 2025

**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**





*Para mi papá José Jesús, hasta donde quiera que esté.*

*Para mi mamá Elizabeth, mi novia Anayeli, mis amigos y  
amigas, mis compañeros de clase y personas  
que me falte mencionar.*

*Para mis asesores de tesis: Dr. Vilchis Montalvo  
y Dra. López Toriz.*

*Para mis sinodales: Dr. Cejudo, Dr. López Andrade, Dr.  
Martínez Ruíz y Dr. Contreras Carreto.*

*Para mis profesores de la maestría: Dr. Mendoza,  
Dr. Guillén, Dr. Escamilla y Dra. Paty Domínguez.*

*Al Dr. Fernando Hernández Hernández.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que han participado conmigo directa o indirectamente durante el periodo de mis estudios de maestría.

Agradezco profundamente a mis padres por haberme dado la vida y por haberme dado el acompañamiento que me ha permitido llegar a este nivel y por consiguiente concluir esta tesis.

Quiero agradecer profundamente a mis directores de tesis, el Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo y la Dra. María de Jesús López Toriz, por haber tenido la paciencia de trabajar conmigo en el desarrollo de esta tesis a pesar de ser un tema que en ocasiones se nos salía de control por la cantidad de conceptos desconocidos que necesitábamos comprender.

Deseo agradecer a mis sinodales: Dr. César Cejudo Castilla, Dr. Carlos Alberto López Andrade, Dr. Iván Martínez Ruíz y Dr. Agustín Contreras Carreto, por haberse tomado el tiempo para leer esta tesis así como por sus observaciones que me ayudaron a mejorarla.

Agradezco al Dr. Fernando Hernández Hernández, por proporcionarnos la referencia que respondía a la pregunta principal de esta tesis. También agradezco a mis compañeros y profesores de la maestría, a la secretaria Tere y a todas las personas que tuvieron relación conmigo en este proceso.

Finalmente, agradezco al CONHACYT, hoy SECIHTI, por haberme proporcionado el apoyo económico que me permitió realizar mis estudios de maestría con la debida atención y motivación así como a los millones de mexicanos que con sus impuestos hacen que dicho apoyo sea posible.



# Introducción

El estudio de las funciones aditivas comenzó con Adrien Marie Legendre (1752-1833), quien intentó buscar soluciones a la ecuación funcional de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ , donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función. Sin embargo, fue hasta 1821, cuando Agustín Louis Cauchy (1789-1857), en su libro *Cours d'Analyse*, comenzó el estudio profundo de este problema, donde también estudió las ecuaciones funcionales

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(x) + f(y) \\ f(x + y) &= f(x)f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función.

A una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para cada  $x, y \in \mathbb{R}$  se le llama **función aditiva**.

Mediante álgebra elemental se puede demostrar que una función aditiva es una transformación lineal en el espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Además, Cauchy, en 1821, demostró que si la función  $f$  es aditiva y continua, entonces es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ . En 1875, Jean Gaston Darboux (1842-1917), demostró que para que una función aditiva sea lineal, es suficiente pedirle que sea continua en un punto. Otras condiciones que se le pueden pedir a una función aditiva para que sea lineal son las siguientes:

- Que la función sea monótona en cualquier intervalo.
- Que la función sea acotada en cualquier intervalo.

Sin embargo, si a la función no le pedimos alguna condición adicional más que ser aditiva, Georg Hamel (1877-1954), demostró en 1905, mediante bases de  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  (asumiendo el Axioma de Elección), que hay una infinidad de funciones que satisfacen la ecuación funcional de Cauchy, de las cuales no todas son lineales.

Sabiendo que se tiene la implicación

**Axioma de Elección**

↓

**Existencia de funciones aditivas no lineales**

en esta tesis se desea explorar que tan fuerte es la existencia de funciones aditivas no lineales con respecto al Axioma de Elección, en particular, deseamos investigar si la implicación

**Existencia de funciones aditivas no lineales**

↓

**Axioma de Elección**

es verdadera o no.

Al iniciar esta tesis, nuestra intuición nos dictaba que esta implicación era verdadera debido a la fuerte relación que hay entre el Axioma de Elección y la existencia de bases para los espacios vectoriales (ver [1]) y al hecho de que la existencia de las funciones aditivas no lineales es una consecuencia de la existencia de bases para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ . Sin embargo, en el *11 CIMA (2024)*, en la conferencia titulada *Los reales como espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$* , impartida por Fernando Hernández Hernández, este último comentó que esta implicación es falsa, debido a que en [22], para ser explícitos, Ralf Schlinder, Liuzhen Wu y Liang Yu, en su artículo *Hamel bases and the principle of dependent choice*, demostraron que existe un modelo de **ZF**, donde se cumple el Axioma de Elecciones Dependientes, existen bases de  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  pero no existe un buen orden para los reales de ese modelo y la existencia de bases de  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  es suficiente para la construcción de funciones aditivas no lineales.

Esta tesis está conformada por cuatro capítulos. El Capítulo 1 contiene los conceptos elementales de conjuntos, espacios vec-

toriales y análisis matemático. Este capítulo pudo omitirse, sin embargo, decidimos incluirlo para que la tesis sea autocontenida.

En el Capítulo 2, denotamos el conjunto de las funciones aditivas por  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , demostramos que  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R}) = \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$  (ver Teorema 2.7). Cabe señalar que la prueba de esta afirmación en la mayor parte de los textos la dejan como ejercicio.

La mayor parte de este capítulo la dedicamos a exponer las condiciones necesarias para que una función aditiva sea lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ . Estas condiciones son referentes a la continuidad, la integrabilidad y la acotación. Respecto a la continuidad, se da una prueba de que en  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , la continuidad es equivalente a la linealidad (ver Teorema 2.9). Cabe mencionar que esta prueba se realiza utilizando únicamente la definición de continuidad, lo que exhibe que esta condición se puede probar sin necesidad del Axioma de Elección. Posteriormente, se expone que en el caso de las funciones aditivas, la condición de continuidad global se puede debilitar a la continuidad en un solo punto (ver Teorema 2.10). Respecto a integrabilidad, inicialmente se muestra que si una función aditiva, que esta sea integrable en cada intervalo acotado es equivalente a la continuidad (ver Teorema 2.12). Después se demuestra que esta condición puede reducirse a pedir integrabilidad únicamente en algún intervalo acotado (ver Corolario 2.14), esto debido al Teorema 2.13.

En este capítulo, también se prueba que las gráficas de funciones aditivas que no son lineales son conjuntos densos en  $\mathbb{R}^2$ . Esta prueba también se realiza sin hacer uso del Axioma de Elección (ver Teorema 2.15). Además, se prueba que si una función aditiva es acotada en algún intervalo acotado, también es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  (ver Teorema 2.19). Finalmente, a consecuencia de los resultados mencionados anteriormente, se prueba que si una función aditiva es derivable en algún punto, creciente o decreciente, entonces es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  (ver Corolario 2.20).

En el Capítulo 3, se presentan algunas hipótesis que se deben satisfacer para asegurar la existencia funciones aditivas no lineales. Se sabe que en  $\mathbf{ZFC}$ , todos los espacios vectoriales tienen base, en particular  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Sin embargo, si nos remitimos a  $\mathbf{ZF}$ , no podemos asegurar la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , motivo por el cual

introducimos la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  como una hipótesis adicional, que llamamos **BRQ**. Se exponen algunas propiedades de interés del espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , dentro de éstas, se muestra que en **ZF+BRQ**, ninguna base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  es equipotente a algún número natural (ver Teorema 3.1), como consecuencia de este hecho, se muestra que en **ZF+BRQ**, es posible construir funciones aditivas no lineales, las cuales pueden o no ser isomorfismos de grupos abelianos (ver Teorema 3.11 y Teorema 3.12). También se demuestra que en **ZF+BRQ**, las bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  son Dedekind-infinitas (ver Teorema 3.5), a raíz de esto, se muestra que en **ZF+BRQ**,  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos (ver Teorema 3.6), existe un subespacio de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  isomorfo a  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^{(\omega)}$  (ver Teorema 3.7) y existen funciones reales cuya gráfica es densa en  $\mathbb{R}^2$  (ver Corolario 3.14). Con respecto al espacio  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , también se muestra que en **ZFC**, su dimensión es  $\mathfrak{c}$  (ver Teorema 3.9), lo cual nos permite concluir que en **ZFC**,  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$  como grupos abelianos, para cualquier  $n \in \omega$  (ver Corolario 3.10), hay  $\mathfrak{c}$  funciones aditivas lineales y  $2^{\mathfrak{c}}$  funciones aditivas no lineales (ver Teorema 3.13). Se prueba también que en **ZF**, existen funciones aditivas no lineales si  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  como grupos abelianos,  $\mathbb{R} \cong (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$  como grupos abelianos (ver Teorema 3.16) o existen automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$  (ver Teorema 3.19). Finalmente, se demuestra que en **ZF**, basta suponer la existencia de funciones aditivas no lineales para probar la existencia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles (ver Corolario 3.22). Esto último simplifica la prueba que usualmente se presenta en la literatura.

En el cuarto y último capítulo, se estudia la implicación

### Existencia de funciones aditivas no lineales

↓

### Axioma de Elección.

Se inicia por dar un pequeño preámbulo acerca de tópicos avanzados de lógica y conjuntos, tales como teoría de modelos, modelos de la teoría de conjuntos y forcing. Resaltamos que muchas demostraciones fueron omitidas debido a su complejidad y al objetivo de esta tesis, sin embargo, citamos en cada resultado necesario una referencia adecuada para consultar las pruebas de dichos resultados. Posteriormente, se exponen a grandes rasgos los resultados

de [22], donde se prueba que hay un modelo de **ZF** donde existen bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  pero no existe un buen orden para  $\mathbb{R}$  (ver Teorema 4.88), en consecuencia no se cumple el Axioma de Elección. Posteriormente, utilizando los resultados del Capítulo 3, escribiendo el concepto de “función aditiva no lineal” como una fórmula  $\Delta_0$  y utilizando la transitividad de dicho modelo, se establece que en éste, existen funciones aditivas no lineales, de esta manera se establece que la implicación planteada es falsa.

Finalmente se presentan comentarios adicionales, donde se menciona que existen modelos de **ZF** donde todas las funciones aditivas son lineales y también existen modelos de **ZF** donde existen funciones aditivas no lineales y falla el Axioma de Elecciones Numerables.

Este trabajo es una motivación para realizar una investigación más profunda sobre la relación de las funciones aditivas no lineales con el Axioma de Elección; es de resaltar que para lograr esto se necesitan conocimientos avanzados de lógica y teoría de conjuntos que nos permitan comprender los resultados que existen y posiblemente generar nuevos resultados al respecto.



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimientos  | VII       |
| Introducción   | IX        |
| <b>1. Preliminares</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Conjuntos . . . . .   | 1         |
| 1.1.1. Axiomas de la Teoría de Conjuntos . . . . .               | 1         |
| 1.1.2. Axiomas de Bernays-Gödel(BG) . . . . .                    | 3         |
| 1.1.3. Ordinales y cardinales . . . . .                          | 5         |
| 1.1.4. Equivalencias del Axioma de Elección . . . . .            | 7         |
| 1.2. Espacios Vectoriales . . . . .                              | 10        |
| 1.2.1. Espacios vectoriales de dimensión finita . . . . .        | 12        |
| 1.2.2. Espacios vectoriales arbitrarios . . . . .                | 14        |
| 1.3. Análisis matemático . . . . .                               | 25        |
| 1.3.1. $\sigma$ -álgebras y funciones medibles . . . . .         | 26        |
| 1.3.2. La medida de Lebesgue . . . . .                           | 27        |
| <b>2. Funciones aditivas lineales</b>                            | <b>33</b> |
| 2.1. Definición y ejemplos . . . . .                             | 33        |
| 2.2. Propiedades de las funciones aditivas . . . . .             | 34        |
| 2.3. Criterios de linealidad en $\mathbb{R}\mathbb{R}$ . . . . . | 39        |
| 2.3.1. Criterios de continuidad . . . . .                        | 39        |
| 2.3.2. Criterios de integrabilidad . . . . .                     | 42        |
| 2.3.3. Criterios de acotación . . . . .                          | 48        |
| <b>3. Funciones aditivas no lineales</b>                         | <b>55</b> |
| 3.1. El espacio vectorial $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ . . . . .       | 55        |
| 3.2. Condiciones de existencia de FANL . . . . .                 | 65        |
| 3.2.1. Existencia de bases para $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ . . . . . | 65        |

|  |            |
|--|------------|
| 3.2.2. Otras condiciones de existencia de FANL . . . . . | 69         |
| 3.3. Una aplicación a los Lebesgue-medibles . . . . .    | 74         |
| <b>4. ¿Existencia de FANL implica AC?</b>                | <b>81</b>  |
| 4.1. Tópicos avanzados de lógica y conjuntos . . . . .   | 81         |
| 4.1.1. Modelos de la teoría de conjuntos . . . . .       | 82         |
| 4.1.2. Constructibilidad . . . . .                       | 95         |
| 4.1.3. Forcing . . . . .                                 | 104        |
| 4.2. Un modelo de ZF donde falla AC y existen FANL .     | 124        |
| 4.3. Algunos comentarios . . . . .                       | 134        |
| <b>Conclusiones</b>                                      | <b>136</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                      | <b>143</b> |

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo lo dedicaremos a recordar los conceptos elementales que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Los tópicos que se abordarán en este capítulo son conjuntos, espacios vectoriales y análisis matemático.

### 1.1. Conjuntos

En esta sección expondremos los conceptos elementales de la Teoría de Conjuntos que consideramos necesarios para el desarrollo de esta tesis. Las demostraciones de los resultados que aquí enunciaremos se pueden encontrar en cualquier libro básico de Teoría de Conjuntos. En particular se pueden encontrar en [8], [11] y [23].

#### 1.1.1. Axiomas de la Teoría de Conjuntos

En este apartado enunciaremos los axiomas de la Teoría de Conjuntos.

**Axioma 1** (Axioma de Extensión (**Ext**)). *Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En símbolos:*

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$

**Axioma 2** (Esquema de Comprensión (**Comp**)). *Sea  $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$  una fórmula de la teoría de conjuntos con todas sus variables libres exhibidas. Para cada conjunto  $a$ , existe un conjunto  $b$  tal que*

$x \in b$ , si y solo si,  $x \in a$  y  $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ . En símbolos:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\forall a \exists b (\forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, x_1, \dots, x_n))))).$$

**Axioma 3** (Axioma del Par (**Par**)). Para cualesquiera conjuntos  $a$  y  $b$ , hay un conjunto  $c$  tal que  $x \in c$ , si y solo si,  $x = a$  o  $x = b$ . En símbolos:

$$\forall a \forall b (\exists c (\forall x (x \in c \Leftrightarrow x = a \vee x = b))).$$

**Axioma 4** (Axioma de la Unión (**Union**)). Para cualquier conjunto  $a$ , existe un conjunto  $u$  tal que  $x \in u$ , si y solo si,  $x \in w$  para algún  $w \in a$ . En símbolos:

$$\forall a \exists u (\forall x (x \in u \Leftrightarrow \exists w (w \in a \wedge x \in w))).$$

**Axioma 5** (Axioma del Conjunto Potencia (**Pot**)). Para cualquier conjunto  $a$ , existe un conjunto  $s$  tal que  $x \in s$ , si y solo si,  $x \subseteq a$ . En símbolos:

$$\forall a \exists s (\forall x (x \in s \Leftrightarrow x \subseteq a)).$$

**Notación 1.** Si  $x$  es un conjunto, denotaremos al conjunto potencia de  $x$  como  $\mathcal{P}(x)$ .

**Axioma 6** (Axioma de Fundación (**Fund**)). Para cada conjunto no vacío  $a$ , existe un conjunto  $u \in a$  tal que  $u \cap a = \emptyset$ . En símbolos:

$$\forall a (\exists y (y \in a) \Rightarrow \exists u (u \in a \wedge \neg \exists z (z \in u \wedge z \in a))).$$

**Definición 1.1.** Sea  $x$  un conjunto.

(1) Se define el sucesor de  $x$  como

$$S(x) = x \cup \{x\}.$$

(2) Se dice que  $x$  es un conjunto inductivo si cumple lo siguiente:

(a)  $\emptyset \in x$ .

(b) Para cada conjunto  $y$ ,  $y \in x$  implica  $S(y) \in x$ .

**Axioma 7** (Axioma del infinito (**Inf**)). *Existe algún conjunto inductivo. En símbolos:*

$$\exists a(\emptyset \in a \wedge \forall y(y \in a \Rightarrow S(y) \in a)).$$

**Axioma 8** (Esquema de Reemplazo (**Remp**)). *Sea*

$$\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$$

*una fórmula de la teoría de conjuntos con todas sus variables libres exhibidas tal que para cada conjunto  $x$ , existe un único conjunto  $y$  tal que  $\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ . Se cumple que para cada conjunto  $a$ , existe un conjunto  $b$  tal que, para cada  $x \in a$ , existe  $y \in b$  tal que  $\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ . En símbolos:*

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\forall x \exists y' \forall y (y = y' \Leftrightarrow \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n))))).$$

Para enunciar el Axioma de Elección es necesario introducir el concepto de “función de elección” como se hace a continuación.

**Definición 1.2.** *Sea  $x$  un conjunto no vacío. Una función de elección o función selectora, es una función*

$$f : \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow x$$

*tal que  $f(a) \in a$ , para cada  $a \in \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ .*

**Axioma 9** (Axioma de Elección (**AC**)). *Todo conjunto no vacío admite una función de elección.*

La teoría conformada por los axiomas 1-8, es conocida como la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel y se denota por **ZF**. La Teoría **ZFC** es la teoría conformada por los axiomas 1-9 y se conoce como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección.

### 1.1.2. Axiomas de Bernays-Gödel(BG)

En la axiomatización de Bernays-Gödel, se consideran dos tipos de objetos: conjuntos y clases. Para esta teoría, todo conjunto es una clase y una clase es un conjunto, si y solo si, pertenece a alguna clase (o a algún conjunto). Una clase que no es un conjunto es llamada clase propia. A continuación presentamos los axiomas de la teoría **BG**.

**Axioma 10** (Axioma de Extensión de clases). *Si todo elemento de  $X$  es elemento de  $Y$  y todo elemento de  $Y$  es elemento de  $X$ , entonces  $X = Y$ .*

**Axioma 11.** *Cualquier conjunto es una clase.*

**Axioma 12.** *Si  $X \in Y$ , entonces  $X$  es un conjunto.*

**Axioma 13** (Axioma del Par). *Para cualesquiera conjuntos  $x$  e  $y$ ,  $\{x, y\}$  es un conjunto.*

**Axioma 14** (Axioma de Comprensión). *Si  $\varphi(x, X_1, \dots, X_n)$  es una fórmula cuyos únicos parámetros cuantificados son conjuntos, entonces existe una clase  $Y$  tal que  $x \in Y$ , si y solo si,  $\varphi(x, X_1, \dots, X_n)$ .*

**Axioma 15** (Axioma del Infinito). *Existe un conjunto inductivo.*

**Axioma 16** (Axioma de la Unión). *Para cualquier conjunto  $X$ ,  $\bigcup X$  es un conjunto.*

**Axioma 17** (Axioma del Conjunto Potencia). *Para cualquier conjunto  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$  es un conjunto.*

**Axioma 18** (Axioma de Reemplazo). *Si una clase  $F$  es una función y  $X$  es un conjunto, entonces  $F(X)$  es un conjunto.*

**Axioma 19** (Axioma de Fundación). *Para cada conjunto  $X$  no vacío, existe  $u \in X$  tal que  $u \cap X = \emptyset$ .*

**Axioma 20** (Axioma de Elección **AC**). *Existe una función  $F$  tal que para cada conjunto  $X$  no vacío,  $F(X) \in X$ .*

La teoría conformada por los axiomas 10-18 es llamada la Teoría Bernays-Gödel y se denota por **BG**. La teoría **BGC** es la teoría conformada por los axiomas 10-19.

Se conoce que si una proposición se puede probar en **ZF**, se puede probar en **BG**. Análogamente para **ZFC** y **BGC**. Recíprocamente, un Teorema de Shoenfield, establece que si una proposición que involucra únicamente a conjuntos como variables se puede demostrar en **BG**, entonces se puede demostrar en **ZF**. El resultado se puede generalizar a **ZFC** y **BGC**.

### 1.1.3. Ordinales y cardinales

En esta parte escribimos los conceptos más importantes referentes a ordinales y cardinales. Los resultados aquí citados se pueden encontrar en [8], [11] o [23].

**Definición 1.3.** Sean  $(X, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $Y \subseteq X$ .

- (1) Un elemento  $m \in Y$  es llamado elemento menor (mayor), si  $m \leq y$  para cada  $y \in Y$  ( $y \leq m$  para cada  $y \in Y$ ).
- (2) Un elemento  $n \in Y$  es llamado elemento mínimo (máximo), si para cada  $y \in Y$ ,  $n \leq y$  implica  $y = n$  (para cada  $y \in Y$ ,  $y \leq n$  implica  $y = n$ ).
- (3) Se dice que  $Y$  es una cadena en  $X$ , si para cada  $y, z \in Y$ , se cumple que  $x \leq y$  o  $y \leq x$ .
- (4) Se dice que  $(X, \leq)$  es un conjunto bien ordenado, si todo subconjunto no vacío de  $X$  tiene un elemento menor.

**Definición 1.4.** Un conjunto  $x$  es llamado transitivo si para cada  $y \in x$ , se cumple que  $y \subseteq x$ .

**Definición 1.5.** Sean  $\alpha$  y  $n$  conjuntos.

- (1) Se dice que  $\alpha$  es un ordinal, si es un conjunto transitivo y bien ordenado por la relación  $\in$ .
- (2) Se dice que  $\alpha$  es un ordinal sucesor si existe un ordinal  $\beta$  tal que  $\alpha = \beta + 1$ . Si  $\alpha \neq 0$  y no es un ordinal sucesor se dice que es ordinal límite.
- (3) Se dice que  $n$  es un número natural, si es un ordinal y para cada  $m < n$ ,  $m = 0$  o  $m$  es un ordinal sucesor.
- (4) La clase de los ordinales se denota por **OR**.

**Observación 1.6.** Para efectos de este trabajo, consideraremos a los números naturales como el conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

y su ordinal es  $\omega$ . Para nosotros,  $\mathbb{N}$  y  $\omega$  significan lo mismo como conjuntos.

**Definición 1.7.** Sea  $\kappa$  un ordinal.

- (1) Se dice que  $\kappa$  es un cardinal, si para cada  $\alpha < \kappa$ , no existe una función inyectiva  $f : \alpha \rightarrow \kappa$ .
- (2) Si  $\kappa$  es un cardinal, el sucesor de  $\kappa$ , denotado por  $\kappa^+$ , es el menor cardinal mayor que  $\kappa$ .
- (3) Se dice que  $\kappa$  es un cardinal sucesor, si existe un cardinal  $\lambda$  tal que  $\kappa = \lambda^+$ . Si  $\kappa > \omega$  y no es cardinal sucesor, se dice que  $\kappa$  es un cardinal límite.
- (4) La clase de los cardinales se denota por **Card**.

**Definición 1.8.** Sean  $(X, \leq_X)$  y  $(Y, \leq_Y)$  conjuntos parcialmente ordenados y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $f$  es un isomorfismo de orden, si  $f$  es una función biyectiva y para cada  $x_1, x_2 \in X$ , se cumple que  $x_1 \leq_X x_2$ , si y solo si,  $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$ . En este caso se dice que  $(X, \leq_X)$  y  $(Y, \leq_Y)$  son isomorfos, lo cual se denota por  $(X, \leq_X) \cong (Y, \leq_Y)$ .

Una prueba del Teorema 1.9, se puede consultar en [8, Teorema 9.13, pág. 224].

**Teorema 1.9.** Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

**Definición 1.10.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto bien ordenado. Al único ordinal  $\alpha$  tal que  $(X, \leq) \cong (\alpha, \in)$  se le llama el tipo de orden de  $X$  y se denota por  $\|(X, \leq)\|$ , es decir,  $\|(X, \leq)\| = (\alpha, \in)$ .

A continuación se enuncia el Teorema de Recursión para los números naturales. Una prueba del mismo se puede encontrar en [8, Teorema 5.15, pág. 106].

**Teorema 1.11** (Teorema de recursión para  $\omega$ ). Sean  $A$  un conjunto,  $a \in A$  y  $g : A \times \omega \rightarrow A$  una función. Existe una única función  $f : \omega \rightarrow A$  tal que:

- (1)  $f(0) = a$ .
- (2) Para cada  $n \in \omega$ ,  $f(n+1) = g(f(n), n)$ .

Los principios de inducción y recursión transfinita son generalizaciones de los principios de inducción y recursión conocidos para  $\omega$ , extendiéndose a la clase de los ordinales. Una prueba para los Teoremas 1.12 y 1.13, se puede consultar en [8, Teorema 9.19, pág. 227] y [8, Teorema 9.19, pág. 227], respectivamente.

**Teorema 1.12** (Principio de Inducción Transfinita). *Sea  $p(x)$  una proposición abierta. Si para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ , se cumple que,  $p(\beta)$  es verdadera para todo  $\beta < \alpha$ , implica que  $p(\alpha)$  es verdadera, entonces  $p(\alpha)$  es verdadera para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ .*

**Teorema 1.13** (Principio de Recursión Transfinita). *Sea  $G$  una función (entre clases). Entonces existe una única función  $F$  (entre clases) tal que  $F(\alpha) = G(F|_{\alpha})$  para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ .*

El Teorema 1.14, garantiza que todo conjunto bien ordenado se puede biyectar con un único cardinal.

**Teorema 1.14.** *Todo conjunto bien ordenado es equipotente a un único cardinal.*

#### 1.1.4. Equivalencias del Axioma de Elección

Para concluir esta sección, daremos algunas equivalencias y consecuencias importantes del Axioma de Elección. El Teorema 1.15, nos ofrece equivalencias del Axioma de Elección relacionando conceptos conjuntistas básicos. Una prueba del mismo se puede encontrar en [8, Teorema 8.5, pág. 178].

**Teorema 1.15.** *En  $\mathbf{ZF}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *Axioma de Elección.*
- (2) *Para cada familia  $\mathcal{A}$  no vacía de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, existe un conjunto  $B$  tal que  $B \cap A$  es un conjunto unitario, para cada  $A \in \mathcal{A}$ , es decir,  $B \cap A = \{u_A\}$ , para cada  $A \in \mathcal{A}$ .*
- (3) *Para cada función suprayectiva  $f : X \rightarrow Y$ , existe una función  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g = id_Y$ .*

- (4) Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia indizada con  $I \neq \emptyset$ ,  $A_\alpha \neq \emptyset$  para cada  $\alpha \in I$  y  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$  si  $\alpha \neq \beta$  para cada  $\alpha, \beta \in I$ , entonces existe un conjunto  $B \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  tal que  $B \cap A_\alpha = \{a_\alpha\}$  para cada  $\alpha \in I$ .
- (5) Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  tal que  $f(\alpha) \in A_\alpha$  para cada  $\alpha \in I$ .
- (6) Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces  $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ .
- (7) Si  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$  es una función, existe una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x) \in F(x)$  para cada  $x \in X$ .

Ahora, enunciaremos otras equivalencias importantes del Axioma de Elección, referentes al orden. Las pruebas de los resultados citados a continuación se encuentran en [8, págs. 181-187].

**Definición 1.16.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos. Se dice que  $\mathcal{F}$  es una familia de carácter finito si para cada conjunto  $A$ , se tiene que  $A \in \mathcal{F}$  si y solo si cada subconjunto finito de  $A$  pertenece a  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 1.17.** [Lema de Tuckey-Teichmüller] Toda familia de conjuntos no vacía de carácter finito tiene un elemento máximo respecto a  $\subseteq$ .

**Teorema 1.18.** [Principio Maximal de Hausdorff] Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío contiene una cadena máxima respecto a  $\subseteq$ .

**Teorema 1.19.** [Lema de Zorn] Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene un elemento máximo.

**Teorema 1.20.** [Teorema del Buen Orden de Zermelo] Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Finalmente se establece la equivalencia entre los Teoremas 1.17-1.20.

**Teorema 1.21.** En **ZF** son equivalentes:

- (1) *Axioma de Elección.*
- (2) *Lema de Tuckey-Teichmüller.*
- (3) *Principio Maximal de Hausdorff.*
- (4) *Lema de Zorn.*
- (5) *Teorema del buen orden de Zermelo.*

Asumiendo el Axioma de Elección, todo conjunto puede ser bien ordenado, en consecuencia, todo conjunto es equipotente a un único ordinal. Más aún, todo conjunto es equipotente a un único cardinal.

**Definición 1.22 (ZFC).** *Sea  $X$  un conjunto. Al único cardinal  $\kappa$  equipotente a  $X$ , se le llama la cardinalidad de  $X$  y se denota por  $|X|$ , es decir,  $|X| = \kappa$ .*

**Definición 1.23.** *Sea  $X$  un conjunto. El número de Hartog de  $X$ , denotado por  $h(X)$  es el menor ordinal que no es equipotente a algún subconjunto de  $X$ .*

Se puede ver (consultar [8, Lema 9.57, pág. 247]) que para cualquier conjunto  $X$ ,  $h(X)$  es un cardinal.

Definimos por recursión transfinita los números “Aleph”.

**Definición 1.24.** *Definimos por recursión transfinita la siguiente sucesión de cardinales:*

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega. \\ \omega_{\alpha+1} &= h(\omega_\alpha), \text{ para cada } \alpha \in \mathbf{OR}. \\ \omega_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} h(\omega_\beta), \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}\end{aligned}$$

*Es común denotar  $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ , para hacer énfasis en que tales ordinales son cardinales.*

Finalmente, definimos el concepto de regularidad en cardinales.

**Definición 1.25.** *Sean  $\alpha$  un ordinal y  $c \subseteq \alpha$ .*

- (1) Se dice que  $c$  es cofinal en  $\alpha$ , si para cada  $\beta \in \alpha$ , existe  $\gamma \in c$  tal que  $\beta \leq \gamma$ .
- (2) Si  $\gamma$  es un ordinal y  $f : \gamma \rightarrow \alpha$  es una función, se dice que  $f$  es cofinal, si  $f(\gamma)$  es cofinal en  $\alpha$ .
- (3) La cofinalidad de  $\alpha$ , denotada por  $\text{cof}(\alpha)$ , es el menor ordinal  $\gamma$  de modo que existe una función  $f : \gamma \rightarrow \alpha$  cofinal.

Se puede notar fácilmente que  $\text{cof}(\alpha) \leq \alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$  y que  $\text{cof}(\alpha + 1) = 1$ , de modo que lo interesante de la cofinalidad se presenta cuando  $\alpha$  es un ordinal límite.

**Definición 1.26.** Sea  $\alpha$  un ordinal límite. Se dice que  $\alpha$  es regular, si  $\text{cof}(\alpha) = \alpha$ . Cuando  $\text{cof}(\alpha) < \alpha$  se dice que  $\alpha$  es un ordinal singular.

## 1.2. Espacios Vectoriales

En este apartado vamos a exponer los resultados de álgebra lineal que consideramos importantes para el desarrollo de este trabajo.

**Notación 2.** Si  $F$  es un campo y  $V$  es un espacio vectorial sobre  $F$ , escribiremos  ${}_F V$ .

**Notación 3.** Si  ${}_F V$  es un espacio vectorial y  $W \subseteq V$  es un subespacio vectorial de  ${}_F V$ , escribimos  $W \leq V$ .

**Notación 4.** Sean  $F$  un campo,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales. Denotamos al conjunto de las transformaciones lineales de  $V$  a  $W$  como  $\text{Hom}_F(V, W)$ , es decir,

$$\text{Hom}_F(V, W) = \{T \in W^V \mid T \text{ es lineal}\}.$$

No está de más recordar que  $\text{Hom}_F(V, W)$  tiene estructura de espacio vectorial sobre  $F$ , con las operaciones  $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$  y  $(cT)(v) = cT(v)$ , para cada  $T, S \in \text{Hom}_F(V, W)$ ,  $v \in V$  y  $c \in F$ .

Cuando  $V = W$ , denotamos

$$\text{Hom}_F(V, V) = \text{End}_F(V).$$

**Notación 5.** Si  ${}_FV$  es un espacio vectorial, denotamos

$$\mathcal{I}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) \mid L \text{ es linealmente independiente}\}$$

y

$$\mathcal{G}(V) = \{G \in \mathcal{P}(V) \mid G \text{ genera a } V\}.$$

Además, si  $S \subseteq V$ , denotaremos al subespacio de  ${}_FV$  generado por  $S$  como  $\langle S \rangle$ .

**Definición 1.27.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  un espacio vectorial y  $B \subseteq V$ . Se dice que  $B$  es una base de  $V$  si  $B \in \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{G}(V)$ .

El siguiente resultado es conocido en la literatura de Álgebra Lineal, omitimos su demostración, la cual se puede consultar en [17] ó en [19, Teorema 1.2.1, pág. 10].

**Teorema 1.28.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  un espacio vectorial y  $B \subseteq V$ . Las siguientes afirmaciones sobre  $B$  son equivalentes:

- (1)  $B$  es una base de  $V$ .
- (2)  $B$  es máximo en  $\mathcal{I}(V)$ .
- (3)  $B$  es mínimo en  $\mathcal{G}(V)$ .
- (4) Para cada  $v \in V$ , existen únicos  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq F$  y  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$  tales que

$$v = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

**Definición 1.29.** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $p(x)$  una proposición abierta en la variable  $x$ . Diremos que  $p$  se cumple para casi toda  $x \in X$ , si el conjunto  $\{x \in X \mid \neg p(x)\}$  es finito.

**Notación 6.** Si  $F$  es un campo,  ${}_FV$  es un espacio vectorial,  $B = (x_i)_{i \in I}$  es una base de  $V$ , entonces para  $v \in V$ , denotamos por

$$v = \sum_{i \in I} a_{i_v} x_{i_v}$$

donde  $a_{i_v} \in F$ , a la única representación posible de  $v$  como combinación lineal de elementos de  $B$ , entendiendo que  $a_{i_v} = 0$  para casi toda  $i \in I$ .

Debido a que en el desarrollo de este trabajo, utilizaremos resultados tanto para espacios vectoriales de dimensión finita como para espacios de dimensión arbitraria, es necesario enunciar por separado los resultados, pues en los resultados para espacios de dimensión finita no se requiere del Axioma de Elección y sus equivalencias, mientras que en los espacios que no son de dimensión finita sí.

### 1.2.1. Espacios vectoriales de dimensión finita

Los resultados que aquí enunciaremos se pueden obtener sin mayor problema en el modelo ZF y se pueden encontrar prácticamente en cualquier libro de Álgebra Lineal. Nosotros tomamos como referencia a [17] y a [6] para los resultados que enunciaremos a continuación.

**Definición 1.30.** Sean  $F$  un campo y  ${}_FV$  un espacio vectorial. Se dice que  $V$  es finitamente generado si existe  $G \in \mathcal{G}(V)$  finito.

**Teorema 1.31.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  un espacio vectorial y  $G \in \mathcal{G}(V)$  finito. Entonces existe  $B \subseteq V$  tal que  $B$  es base de  $V$  y  $B \subseteq G$ .

*Demostración.* Consultar en [17, Teorema 16, pág. 36]. □

**Teorema 1.32.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  un espacio vectorial finitamente generado,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $L = \{x_i \mid i < m\} \in \mathcal{I}(V)$  y  $G = \{y_j \mid j < n\} \in \mathcal{G}(V)$ , entonces  $m \leq n$ .

**Teorema 1.33.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  un espacio vectorial finitamente generado. Entonces, todas las bases de  $V$  son finitas y tienen el mismo número de elementos.

*Demostración.* Consultar [17, Teorema 18, pág. 40]. □

**Definición 1.34.** Sean  $F$  un campo y  ${}_FV$  un espacio vectorial finitamente generado. Se define la dimensión de  $V$  como  $n = |B| \in \mathbb{N}$ , donde  $B$  es una base de  $V$ . En este caso se dice que  ${}_FV$  es de dimensión finita.

**Teorema 1.35.** Sean  $F$  un campo,  ${}_FV$  de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  y  $B = \{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $V$ . Entonces, para cada espacio vectorial

${}_F W$  y  $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ , existe una única transformación lineal  $T: V \rightarrow W$  tal que  $T(x_i) = w_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Demostración.* Como para cada  $v \in V$ , existe único  $\{c_{1v}, \dots, c_{nv}\} \subseteq F$  tal que

$$v = \sum_{i=1}^n c_{iv} x_i,$$

la función

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^n c_{iv} w_i \end{aligned}$$

está bien definida. Es fácil ver que  $T$  es una transformación lineal con la propiedad buscada y la única posible.  $\square$

**Notación 7.** Si  $F$  es un campo,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  son espacios vectoriales isomorfos, escribiremos  $V \cong W$ .

**Teorema 1.36.** Sean  $F$  un campo,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $V \cong W$ .
- (2)  $\dim(V) = \dim(W)$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Si  $V \cong W$ , existe un isomorfismo  $T: V \rightarrow W$ . Sean  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$  y  $B = \{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $V$ . Debido que  $T$  es isomorfismo, se tiene que  $B_W = \{T(x_1), \dots, T(x_n)\}$  es una base de  $W$ , por consiguiente  $\dim(W) = n = \dim(V)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $n = \dim(V) = \dim(W)$  y tomemos bases  $B_V = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $B_W = \{y_1, \dots, y_n\}$  de  $V$  y  $W$ , respectivamente. Por el Teorema 1.35, existe una única transformación lineal

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow W \\ x_i &\mapsto y_i. \end{aligned}$$

Debido a que  $T$  manda una base de  $V$  en una base de  $W$ ,  $T$  es un isomorfismo y consecuentemente,  $V \cong W$ .  $\square$

**Corolario 1.37.** Sean  $F$  un campo y  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $V \cong F^n$ .

*Demostración.* Como  $\dim(F^n) = n = \dim(V)$ , por el Teorema 1.33, obtenemos que  $V \cong F^n$ .  $\square$

### 1.2.2. Espacios vectoriales arbitrarios

Para los resultados expuestos en este apartado, es necesario trabajar en el modelo  $ZFC$ , pues el Axioma de Elección es vital para establecer los mismos.

**Teorema 1.38.** *Sean  ${}_FV$  un espacio vectorial,  $L \in \mathcal{I}(V)$  y  $G \in \mathcal{G}(V)$  tales que  $L \subseteq G$ , entonces existe una base  $B$  tal que  $L \subseteq B \subseteq G$ .*

*Demostración.* Consideremos el conjunto parcialmente ordenado  $(\Gamma, \subseteq)$ , donde

$$\Gamma = \{X \in \mathcal{I}(V) \mid L \subseteq X \subseteq G\}.$$

Por hipótesis,  $L \in \Gamma$ , por tanto  $\Gamma \neq \emptyset$ . Sea  $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$  una cadena contenida en  $\Gamma$  y consideremos  $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ . Notemos que para cada  $i \in I$ ,  $C_i \subseteq C$ , así que  $C$  es una cota superior para  $\mathcal{C}$ . Falta exhibir que  $C \in \Gamma$ . Para esto, observemos que para cada  $i \in I$ ,  $L \subseteq C_i \subseteq G$ , por lo que  $L \subseteq C \subseteq G$ . Ahora mostraremos que  $C$  es linealmente independiente en  $V$ , para esto, tomemos un subconjunto finito  $H = \{x_1, \dots, x_n\}$  contenido en  $C$ , entonces para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , existe  $i_j \in I$  tal que  $x_j \in C_{i_j}$ . Dado que  $\mathcal{C}$  es una cadena, también lo es  $\{C_{i_j}\}_{j=1}^n$ , en consecuencia, existe  $N \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\bigcup_{j=1}^n C_{i_j} = C_{i_N}$ . Obsérvese que  $H \subseteq \bigcup_{j=1}^n C_{i_j} = C_{i_N}$ , por consiguiente,  $H \subseteq C_{i_N}$  y como  $C_{i_N}$  es linealmente independiente en  $V$ , también  $H$  es linealmente independiente en  $V$ , así,  $C$  es linealmente independiente en  $V$ , concluyendo que  $C \in \Gamma$ . Hemos mostrado que toda cadena contenida en  $\Gamma$  tiene una cota superior en  $\Gamma$ , por el Lema de Zorn,  $\Gamma$  tiene un elemento máximo, digamos  $B$ . De la definición de  $\Gamma$  se tiene que  $B$  es linealmente independiente y  $L \subseteq B \subseteq G$ . Para mostrar que  $B$  es base de  $V$  necesitamos exhibir que  $V = \langle B \rangle$ . En efecto, si  $\langle B \rangle \subsetneq V$ , como  $V = \langle G \rangle$ ,  $G \not\subseteq \langle B \rangle$ , de lo contrario,  $V = \langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$ , luego,  $V = \langle B \rangle$ , lo que contradice nuestra suposición. Por consiguiente, existe  $y \in G$  tal que  $y \notin \langle B \rangle$ , dado que  $B$  es linealmente independiente, se tiene que  $B \cup \{y\}$  es linealmente independiente en  $V$ , además,  $L \subseteq B \subseteq B \cup \{y\} \subseteq G$ . Así,  $B \cup \{y\} \in \Gamma$  con  $B \subsetneq B \cup \{y\}$ , lo cual contradice la maximalidad de  $B$  en  $\Gamma$ . Por lo tanto,  $V = \langle B \rangle$  y así  $B$  es una base de  $V$  con las condiciones deseadas.  $\square$

**Corolario 1.39.** *Todo espacio vectorial tiene base.*

*Demostración.* Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial. Aplicando el Teorema 1.38 a  $L = \emptyset$  y  $G = V$ , se obtiene la base deseada.  $\square$

Podemos notar que para establecer el Corolario 1.39, fue necesario el Axioma de Elección en su versión del Lema de Zorn. Sin embargo, se sabe que la existencia de bases para espacios vectoriales es equivalente al Axioma de Elección. Esto lo enunciamos en el Teorema 1.40. Una prueba de este resultado se puede encontrar en [1, Teorema 28, pág. 60] o [7, Theorem 4.44, pág. 67].

**Teorema 1.40.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *Axioma de Elección.*
- (2) *Todo espacio vectorial tiene base.*

A continuación, daremos una demostración del teorema de reemplazo generalizado, el cuál se encuentra como ejercicio en [4, Ejercicio 7, pág. 62].

**Teorema 1.41** (Teorema de reemplazo). *Sean  ${}_F V$  un espacio vectorial,  $B$  una base de  $V$  y  $L \in \mathcal{I}(V)$ . Entonces existe  $S \subseteq B$  tal que  $L \cup S$  es una base de  $V$ .*

*Demostración.* Consideremos la familia

$$\mathcal{A} = \{T \subseteq B \mid L \cup T \in \mathcal{I}(V)\}$$

ordenada por inclusión de conjuntos. Notemos que  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , así  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Consideremos  $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$  una cadena y  $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ . Notemos que  $C_i \subseteq C$  para cada  $i \in I$ , entonces  $C$  es una cota superior para  $\mathcal{C}$ . Mostremos que  $C \in \mathcal{A}$ , para eso tomemos un conjunto finito  $H = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \subseteq L \cup C$ , donde  $x_i \in L$ ,  $y_j \in C$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Luego, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , existe  $i_j \in I$  tal que  $y_j \in C_{i_j}$ . Como  $\mathcal{C}$  es una cadena, también lo es  $\{C_{i_j}\}_{j=1}^m$ , por consiguiente, existe  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\{y_j\}_{j=1}^m \subseteq C_k$ , así  $H \subseteq L \cup C_k$ . Dado que  $L \cup C_k$  es linealmente independiente,  $H$  es linealmente independiente y por tanto  $L \cup C$  es linealmente independiente, concluyendo que  $C \in \mathcal{A}$ . Por el Lema de Zorn,  $\mathcal{A}$  tiene un elemento máximo, digamos

$S$ . Luego,  $L \cup S$  es linealmente independiente en  $V$ . Para ver que es base nos resta ver que  $\langle L \cup S \rangle = V$ . Para probar esto último, supongamos que  $\langle L \cup S \rangle \subsetneq V$ , como  $V = \langle B \rangle$ , existe  $x \in B$  tal que  $x \notin \langle L \cup S \rangle$ , obteniendo que  $L \cup (S \cup \{x\})$  es linealmente independiente, por tanto,  $S \cup \{x\} \in \mathcal{A}$  con  $S \subsetneq S \cup \{x\}$ , lo que contradice la maximalidad de  $S$ . Por lo tanto,  $L \cup S$  genera a  $V$ , estableciendo así que  $L \cup S$  es base de  $V$ .  $\square$

**Observación 1.42.** *El Teorema de reemplazo nos permite concluir que si  $L \in \mathcal{I}(V)$ , existe  $S \subseteq V$  tal que  $L \cup S$  es base de  ${}_F V$  y  $L \cap S = \emptyset$ .*

**Definición 1.43.** *Sean  ${}_F V$  un espacio vectorial,  $W$  y  $K$  subespacios de  $V$ . Se dice que  $V$  es **suma directa de  $W$  y  $K$** , si  $V = W + K$  y  $W \cap K = \{0\}$ . En este caso, se dice que  $W$  es un **complemento de  $K$**  y que  $K$  es un **complemento de  $W$** . Se escribe  $V = W \oplus K$ .*

En la mayor parte de la literatura, el Teorema 1.44, se prueba para dimensión finita, aquí daremos una prueba para dimensión arbitraria.

**Teorema 1.44.** *Sean  ${}_F V$  un espacio vectorial y  $W \leq V$ . Entonces existe  $K \leq V$  tal que  $V = W \oplus K$ .*

*Demostración.* Por el Corolario 1.39,  $W$  tiene base, digamos  $B$ . Luego,  $B$  es linealmente independiente en  $V$ , por la Observación 1.42, existe  $S \subseteq V$  tal que  $B \cup S$  es base de  $V$  y  $B \cap S = \emptyset$ . Nótese que  $K = \langle S \rangle$  es un subespacio de  $V$ . Vamos a demostrar que  $V = W \oplus K$ , para esto observemos que

$$V = \langle B \cup S \rangle = \langle B \rangle + \langle S \rangle = W + K$$

es decir,  $V = W + K$ . Ahora, si  $v \in W \cap K$ , entonces

$$v = \sum_{x \in B} c_{x_v} x$$

con  $c_{x_v} \in F$  y  $c_{x_v} = 0$  para casi todo  $x \in B$  y

$$v = \sum_{y \in S} c_{y_v} y$$

con  $c_{y_v} \in F$  y  $c_{y_v} = 0$  para casi toda  $y \in S$ . Entonces se tiene que

$$\sum_{x \in B} c_{x_v} x - \sum_{y \in S} c_{y_v} y = 0$$

pero  $B \cup S$  es linealmente independiente, en consecuencia  $c_{x_v} = 0$  y  $c_{y_v} = 0$  para toda  $x \in B$  e  $y \in S$ , concluyendo que  $v = 0$ , consecuentemente,  $W \cap K = \{0\}$ . Por lo tanto,  $V = W \oplus K$ .  $\square$

El Teorema 1.45, cuya demostración se puede consultar en [17, Teorema 25, págs. 52-56], establece que el concepto de dimensión está bien definido para cualquier espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita.

**Teorema 1.45.** *Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial. Si  $A$  y  $B$  son bases de  ${}_F V$ , entonces  $|A| = |B|$ .*

**Definición 1.46.** *Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial. Definimos la **dimensión de  ${}_F V$** , denotada por  $\dim({}_F V)$  como  $|B|$ , donde  $B$  es una base de  ${}_F V$ , es decir,  $\dim({}_F V) = |B|$ .*

**Notación 8.** *Sean  $F$  un campo y  $X$  un conjunto no vacío. Denotamos*

$$F^X = \{f \in \mathcal{P}(X \times F) \mid f \text{ es función}\}$$

*el cual es un espacio vectorial sobre  $F$  con las operaciones  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  y  $(cf)(x) = cf(x)$  para cada  $f, g \in F^X$ ,  $c \in F$  y  $x \in X$  (ver [17, Ejemplo 14, pág. 20]).*

**Notación 9.** *Sean  $F$  un campo y  $X$  un conjunto no vacío. Denotamos*

$$F^{(X)} = \{f \in F^X \mid |\text{sop}(f)| < \omega\}$$

*donde  $\text{sop}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ . De hecho,  $F^{(X)} \leq F^X$  (ver [17, Ejemplo 17, pág. 22]).*

**Ejemplo 1.47.** *Sean  $F$  un campo y  $X$  un conjunto no vacío. Veamos que  $\dim({}_F F^{(X)}) = |X|$ .*

*En efecto, para cada  $x \in X$ , consideremos la función*

$$\begin{aligned} \delta_x : \quad X &\rightarrow F \\ &x \mapsto 1 \\ &y \neq x \mapsto 0. \end{aligned}$$

*Es claro que  $B = \{\delta_x\}_{x \in X} \subseteq F^{(X)}$ . Mostremos que  $B$  es una base de  $F^{(X)}$ . Para esto, mostraremos lo siguiente:*

- *B es linealmente independiente: Sean  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$ ,  $c_1, \dots, c_n \in F$  tales que  $\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} = \bar{0}$ . Ahora, sea  $j \in \{1, \dots, n\}$  arbitrario y fijo. Luego, se tienen las siguientes igualdades:*

$$c_j = 1 \cdot c_j = \delta_{x_j}(x_j)c_j = \left( \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} \right)(x_j) = \bar{0}(x_j) = 0$$

es decir,  $c_j = 0$ , lo cual sucede para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto,  $B$  es linealmente independiente.

- *B genera a  ${}_F F^{(X)}$ : Sea  $f \in F^{(X)}$ , si  $f = \bar{0}$ , entonces  $f \in \langle B \rangle$ , pues  $\langle B \rangle \leq_F F^{(X)}$ . Ahora, si  $f \neq \bar{0}$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $\text{sop}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Mostraremos que*

$$f = \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_{x_i}. \quad (1.1)$$

Si  $x \notin \text{sop}(f)$ , al evaluar ambos lados de la Ecuación (1.1), se tiene la igualdad.

Si  $x \in \text{sop}(f)$ , entonces  $x = x_j$  para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_j) = f(x_j) \cdot 1 = f(x_j) \delta_{x_j}(x_j) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_{x_i} \right)(x_j) = \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \delta_{x_i} \right)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad en la Ecuación (1.1) está probada. En consecuencia,  $f \in \langle B \rangle$ , obteniendo que  $F^{(X)} = \langle B \rangle$ .

Finalmente, mostraremos que  $|B| = |X|$ , para esto consideremos la función

$$\begin{aligned} \delta : X &\rightarrow B \\ x &\mapsto \delta_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Es claro que  $\delta$  está bien definida y es suprayectiva. Vamos a mostrar que es inyectiva, para esto, consideremos  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Si  $\delta_x = \delta_y$ , se tienen las siguientes igualdades

$$1 = \delta_x(x) = \delta_y(x) = 0$$

es decir,  $1 = 0$ , lo cual es absurdo debido a que  $F$  es campo, por tanto,  $\delta_x \neq \delta_y$ , concluyendo así que  $\delta$  es inyectiva. Por lo tanto,  $\delta$  es una biyección y consecuentemente,  $|B| = |X|$ , es decir,  $\dim({}_F F^{(X)}) = |X|$ .

**Observación 1.48.** Si definimos  $F^{(\emptyset)} = \{0_F\}$ , se tiene que

$$\dim({}_F F^{(\emptyset)}) = 0 = |\emptyset|.$$

De esta manera, tenemos definido  $F^{(X)}$  para cualquier conjunto  $X$ . Este hecho nos permite concluir que a cualquier conjunto  $X$  le podemos asignar un espacio vectorial sobre  $F$ , a saber,  $F^{(X)}$ . Más aún, cuando  $X$  es un conjunto finito,  $F^{(X)} = F^X$ .

Del Ejemplo 1.47, podemos decir que  $X$  es una base de  ${}_F F^{(X)}$ , a pesar de que  $X$  no es un subconjunto de  $F^{(X)}$ . Esto nos motiva a introducir una definición categórica de base y establecer que en cierto sentido es equivalente a la definición de base que se conoce.

**Definición 1.49.** Sean  ${}_F V$  un espacio vectorial,  $X$  un conjunto y  $\Lambda : X \rightarrow V$  una función. Diremos que el par  $(X, \Lambda)$  es una **base categórica de  ${}_F V$** , si satisface la siguiente propiedad universal:

- Para cada espacio vectorial  ${}_F W$  y cada función  $f : X \rightarrow W$ , existe una única transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T \circ \Lambda = f$ , lo cual podemos describir diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & W \\ \Lambda \downarrow & \nearrow T & \\ V & & \end{array}$$

es conmutativo.

**Observación 1.50.** Si  ${}_F V$  es un espacio vectorial y  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  $V$ , entonces  $\Lambda : X \rightarrow V$  es una función inyectiva.

En efecto, supongamos que no lo es, entonces existen  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  con  $\Lambda(x) = \Lambda(y)$ . Sabemos que  ${}_F F$  es un espacio vectorial, entonces definimos la función

$$\begin{aligned} f : \quad X & \rightarrow F \\ & x \mapsto 1 \\ X \setminus \{x\} \ni z & \mapsto 0. \end{aligned}$$

Al ser  $F$  un campo, se tiene que  $1 \neq 0$ . Es claro que  $f$  está bien definida. Luego, existe una única transformación lineal  $T : V \rightarrow F$  de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & F \\ \Lambda \downarrow & \nearrow T & \\ V & & \end{array}$$

conmuta, es decir,  $T \circ \Lambda = f$ . Así, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= f(x) = (T \circ \Lambda)(x) = T(\Lambda(x)) = T(\Lambda(y)) \\ &= (T \circ \Lambda)(y) = f(y) = 0 \end{aligned}$$

es decir,  $1 = 0$ , contradiciendo que  $F$  es campo. Por lo tanto,  $\Lambda$  es inyectiva.

**Teorema 1.51.** Sean  $F$  un campo,  $X$  un conjunto no vacío y  ${}_F V$  un espacio vectorial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  ${}_F V$ .
- (2)  $\Lambda(X)$  es una base de  ${}_F V$ .

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  $V$ . Probaremos primero que  $\Lambda(X)$  es linealmente independiente en  $V$ . Para esto, si  $\Lambda(X)$  es linealmente dependiente en  $V$ , entonces existe  $y \in X$  tal que  $\Lambda(y) \in \langle \Lambda(X \setminus \{y\}) \rangle$ . Definimos la función

$$\begin{aligned} f : \quad X &\rightarrow F \\ y &\mapsto 1 \\ X \setminus \{y\} \ni x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe una transformación lineal  $T : V \rightarrow F$  tal que  $T \circ \Lambda = f$ . Como  $\Lambda(y) \in \langle \Lambda(X \setminus \{y\}) \rangle$ , entonces  $\Lambda(y) = \sum_{x \in X} c_x \Lambda(x)$  con  $x \neq y$ ,  $c_x \in F$  y  $c_x = 0$  para casi todo  $x \in X \setminus \{y\}$ . De esta manera, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= f(y) = (T \circ \Lambda)(y) = T(\Lambda(y)) = T\left(\sum_{x \in X} c_x \Lambda(x)\right) \\ &= \sum_{x \in X} c_x T(\Lambda(x)) = \sum_{x \in X} c_x (T \circ \Lambda)(x) = \sum_{x \in X} c_x f(x) = 0 \end{aligned}$$

es decir,  $1 = 0$ , lo cual no es posible. Por lo tanto,  $\Lambda(X)$  es linealmente independiente en  $V$ .

Ahora mostraremos que  $\langle \Lambda(X) \rangle = V$ . Supongamos que  $\langle \Lambda(X) \rangle \subsetneq V$ . Por el Teorema 1.44, existe  $\{0\} \neq L \subsetneq V$  tal que  $V = \langle \Lambda(X) \rangle \oplus L$ . Entonces, la transformación lineal

$$P : \begin{array}{l} V = \langle \Lambda(X) \rangle \oplus L \rightarrow V \\ u + l = v \quad \mapsto u \end{array}$$

es tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & V \\ \Lambda \downarrow & \nearrow P & \\ V & & \end{array}$$

conmuta, pues  $(P \circ \Lambda)(x) = P(\Lambda(x)) = \Lambda(x)$  para cada  $x \in X$ , ya que  $\Lambda(X) \subseteq \langle \Lambda(X) \rangle$ . Por otro lado, es claro que la transformación lineal identidad

$$id_V : V \rightarrow V$$

hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & V \\ \Lambda \downarrow & \nearrow id_V & \\ V & & \end{array}$$

conmutativo. Ahora bien, como  $\langle \Lambda(X) \rangle \subsetneq V$ , existe  $v_0 \in V \setminus \langle \Lambda(X) \rangle$ , luego,  $v_0 = u_0 + l_0$ , con  $u_0 \in \langle \Lambda(X) \rangle$ ,  $l_0 \in L$ . Notemos que  $l_0 \neq 0$ , pues de lo contrario,  $v_0 = u_0 \in \langle \Lambda(X) \rangle$ , contradiciendo nuestra suposición. De esta manera

$$P(v_0) = P(u_0 + l_0) = u_0 \neq u_0 + l_0 = id_V(u_0 + l_0) = id_V(v_0)$$

es decir,  $P(v_0) \neq id_V(v_0)$ , en consecuencia,  $P \neq id_V$ , contradiciendo la unicidad de la transformación lineal con la propiedad. Por lo tanto,  $V = \langle \Lambda(X) \rangle$ . En consecuencia,  $\Lambda(X)$  es una base de  $V$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Supóngase que  $\Lambda(X)$  es una base de  $V$ . Vamos a mostrar que  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  $V$ . Sean  ${}_F W$  un espacio vectorial y  $f : X \rightarrow W$  una función. Por hipótesis, para cada  $v \in V$ , existe una única representación

$$v = \sum_{x \in X} c_{xv} \Lambda(x)$$

donde  $c_{x_v} \in F$  y  $c_{x_v} = 0$  para casi todo  $x \in X$ . Luego, la función

$$T : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & W \\ \sum_{x \in X} c_{x_v} \Lambda(x) = v & \mapsto & \sum_{x \in X} c_{x_v} f(x) \end{array}$$

está bien definida. Además, si  $x \in X$ , como  $\Lambda(X)$  es base de  $V$ , se tiene que  $\Lambda(x) = 1 \cdot \Lambda(x)$ , por consiguiente

$$(T \circ \Lambda)(x) = T(\Lambda(x)) = T(1 \cdot \Lambda(x)) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

en consecuencia,  $T \circ \Lambda = f$ . Ahora, veamos que  $T$  es lineal, para eso tomemos  $u, v \in V$  y  $c \in F$ , luego

$$u = \sum_{x \in X} c_{x_u} \Lambda(x)$$

y

$$v = \sum_{x \in X} c_{x_v} \Lambda(x)$$

con  $c_{x_u}, c_{x_v} \in F$ ,  $c_{x_u} = c_{x_v} = 0$  para casi toda  $x \in X$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} T(u + cv) &= T \left( \sum_{x \in X} c_{x_u} \Lambda(x) + c \sum_{x \in X} c_{x_v} \Lambda(x) \right) \\ &= T \left( \sum_{x \in X} (c_{x_u} + cc_{x_v}) \Lambda(x) \right) \\ &= \sum_{x \in X} (c_{x_u} + cc_{x_v}) f(x) \\ &= \sum_{x \in X} c_{x_u} f(x) + c \sum_{x \in X} c_{x_v} f(x) \\ &= T(u) + cT(v) \end{aligned}$$

mostrando así la linealidad de  $T$ .

Finalmente, probaremos la unicidad de  $T$ . Si  $S : V \rightarrow W$  es una transformación lineal tal que  $S \circ \Lambda = f$ , tenemos que

$$\begin{aligned} S(v) &= S \left( \sum_{x \in X} c_{x_v} \Lambda(x) \right) = \sum_{x \in X} c_{x_v} S(\Lambda(x)) = \sum_{x \in X} c_{x_v} (S \circ \Lambda)(x) \\ &= \sum_{x \in X} c_{x_v} f(x) = T(v) \end{aligned}$$

es decir,  $S(v) = T(v)$  para cada  $v \in V$ , concluyendo así que  $S = T$ .  $\square$

**Ejemplo 1.52.** Si  $F$  es un campo y  $X$  es un conjunto, entonces  $(X, \delta)$  es una base categórica de  $F^{(X)}$ , donde  $\delta$  está definida en (1.2) del Ejemplo 1.47.

**Ejemplo 1.53.** Si  ${}_F V$  es un espacio vectorial y  $B$  es una base de  $V$ , entonces  $(B, \iota)$  es una base categórica de  $V$ , donde

$$\begin{aligned} \iota : B &\rightarrow V \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

es la función inclusión. A este hecho, en algunos libros lo conocen como **Propiedad universal de las bases** (Ver [17, Teorema 34, págs. 73-75]), esto es, para definir una transformación lineal es suficiente definirla en la base.

**Observación 1.54.** Si  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de un espacio vectorial  ${}_F V$ , en virtud a la Observación 1.50,  $\Lambda : X \rightarrow V$  es una función inyectiva, en consecuencia,  $\Lambda : X \rightarrow \Lambda(X)$  es una biyección. Además, por el Teorema 1.51,  $\Lambda(X)$  es una base de  $V$ . Por tanto, tenemos que

$$\dim({}_F V) = |\Lambda(X)| = |X|$$

es decir,  $\dim({}_F V) = |X|$ .

El siguiente teorema es un resultado clásico para espacios de dimensión finita; aquí exponemos una demostración para espacios de dimensión arbitraria utilizando la herramienta de las bases categóricas.

**Teorema 1.55.** Sean  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $V \cong W$ .
- (2)  $\dim({}_F V) = \dim({}_F W)$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $V \cong W$ , luego existe un isomorfismo  $T : V \rightarrow W$ , en particular,  $T : V \rightarrow W$  es una

biyección. Ahora, si  $B$  es una base de  $V$ , entonces  $T(B)$  es una base de  $W$  y  $T|_B^{T(B)} : B \rightarrow T(B)$  es una biyección, en consecuencia

$$\dim({}_F V) = |B| = |T(B)| = \dim({}_F W)$$

es decir,  $\dim({}_F V) = \dim({}_F W)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Consideremos  $(X, \Lambda)$  y  $(Y, \Gamma)$  bases categóricas de  $V$  y  $W$ , respectivamente. Por hipótesis y la Observación 1.54, existe una biyección  $\sigma : X \rightarrow Y$ . Así, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \Lambda \downarrow & & \downarrow \Gamma \\ V & & W \end{array}$$

Por un lado, del diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma \circ \sigma} & W \\ \Lambda \downarrow & & \\ V & & \end{array}$$

al ser  $(X, \Lambda)$  una base categórica de  $V$ , existe una única transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma \circ \sigma} & W \\ \Lambda \downarrow & \nearrow T & \\ V & & \end{array}$$

conmutativo, es decir,  $T \circ \Lambda = \Gamma \circ \sigma$ . Por otro lado, del diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Lambda \circ \sigma^{-1}} & V \\ \Gamma \downarrow & & \\ W & & \end{array}$$

y por ser  $(Y, \Gamma)$  una base categórica de  $W$ , existe una única transformación lineal  $S : W \rightarrow V$  que hace al diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Lambda \circ \sigma^{-1}} & V \\ \Gamma \downarrow & \nearrow S & \\ W & & \end{array}$$

conmutativo, es decir,  $S \circ \Gamma = \Lambda \circ \sigma^{-1}$ . Obsérvese que

$$\begin{aligned} (S \circ T) \circ \Lambda &= S \circ (T \circ \Lambda) = S \circ (\Gamma \circ \sigma) = (S \circ \Gamma) \circ \sigma \\ &= (\Lambda \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma = \Lambda \circ (\sigma^{-1} \circ \sigma) \\ &= \Lambda \circ id_X = \Lambda \end{aligned}$$

de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & V \\ \Lambda \downarrow & \nearrow S \circ T & \\ V & & \end{array}$$

conmuta. Finalmente, observemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & V \\ \Lambda \downarrow & \nearrow id_V & \\ V & & \end{array}$$

también es conmutativo, en virtud de la unicidad de la transformación lineal con la propiedad, se sigue que  $S \circ T = id_V$ . De manera análoga se exhibe que  $T \circ S = id_W$ . Por lo tanto,  $T : V \rightarrow W$  es un isomorfismo y en consecuencia,  $V \cong W$ .  $\square$

**Corolario 1.56.** *Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial con base  $B$ . Entonces,  $V \cong F^{(B)}$ .*

*Demostración.* Puesto que  $\dim({}_F V) = |B| = \dim({}_F F^{(B)})$ , en virtud del Teorema 1.55,  $V \cong F^{(B)}$ .  $\square$

**Observación 1.57.** *Del Corolario 1.56, se sigue que si  $\dim({}_F V) = \kappa$ , donde  $\kappa$  es un cardinal, entonces  $V \cong F^{(\kappa)}$ .*

### 1.3. Análisis matemático

En esta sección escribimos los conceptos relativos al análisis matemático que consideramos importantes para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.58.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que  $f$  es localmente integrable, si para cada  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$ , se tiene que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .*

### 1.3.1. $\sigma$ -álgebras y funciones medibles

**Definición 1.59.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{M}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  si satisface lo siguiente:

- (1)  $X \in \mathcal{M}$ .
- (2) Si  $E \in \mathcal{M}$ , entonces  $E^c \in \mathcal{M}$ .
- (3) Si  $(E_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{M}$ , entonces  $\bigcup_{n \in \omega} E_n \in \mathcal{M}$ .

En este caso, se dice que el par  $(X, \mathcal{M})$  es un espacio medible y a los elementos de  $\mathcal{M}$  se les llama conjuntos medibles.

A continuación definimos la  $\sigma$ -álgebra generada por una familia de conjuntos.

**Definición 1.60.** Sean  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$ , denotada por  $\sigma(\mathcal{A})$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{A}$ , es decir,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{M} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \}.$$

Para el ejemplo que daremos de una  $\sigma$ -álgebra generada, se necesita la siguiente definición.

**Definición 1.61.** Sean  $X$  un conjunto y  $\tau$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\tau$  es una topología en  $X$  si satisface lo siguiente:

- (1)  $\emptyset, X \in \tau$ .
- (2) Si  $(G_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$ .
- (3) Para cada  $m \in \omega$ , si  $(G_k)_{k=1}^m \subseteq \tau$ , entonces  $\bigcap_{k=1}^m G_k \in \tau$ .

En este caso se dice que el par  $(X, \tau)$  es un espacio topológico. A los elementos de  $\tau$  se les llama conjuntos abiertos y a los elementos de  $X$  se les llama puntos.

Con la Definición 1.61, podemos definir la  $\sigma$ -álgebra de Borel en un espacio topológico.

**Definición 1.62.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $X$ , denotada por  $\mathcal{B}(X)$ , se define como  $\sigma(\tau)$ , es decir,  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$ . En palabras, la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $X$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos.

**Ejemplo 1.63.** La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}$  que contiene a todos los conjuntos abiertos respecto a la topología inducida por la métrica euclidiana (la métrica inducida por el valor absoluto).

Ahora definimos las funciones de interés entre espacios medibles.

**Definición 1.64.** Sean  $(X, \mathcal{M}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  espacios medibles y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Decimos que  $f$  es medible si para cada  $A \in \mathcal{M}_Y$ , se cumple que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X$ .

Finalmente definimos el concepto de medida.

**Definición 1.65.** Sean  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible y  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  una función. Se dice que  $\mu$  es una medida sobre  $M$  si se cumple lo siguiente:

$$(1) \mu(\emptyset) = 0.$$

(2) Para cada  $(E_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{M}$  tal que  $E_m \cap E_n = \emptyset$  para cada  $m, n \in \omega$  con  $m \neq n$ , se cumple que

$$\mu \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n).$$

En este caso se dice que la terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida.

### 1.3.2. La medida de Lebesgue

En este apartado vamos a escribir los conceptos importantes correspondientes a la Medida de Lebesgue. Los resultados aquí citados se pueden encontrar a detalle en [2] o [18].

**Notación 10.** Si  $I = (a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a \leq b$ , denotamos la longitud de  $I$  por

$$\ell(I) = b - a.$$

Se cumple que si  $I = (a, b)$ ,  $I = [a, b)$ ,  $I = (a, b]$  ó  $I = [a, b]$ , entonces  $\ell(I) = b - a$ .

Si en algunos de los casos anteriores,  $a = -\infty$  o  $b = \infty$ , entonces  $\ell(I) = \infty$ . Cuando  $a, b \in \mathbb{R}$ , se dice que  $I$  es un intervalo acotado.

**Notación 11.** Para  $E \subseteq \mathbb{R}$ , denotamos por  $\mathcal{C}_E$  al conjunto

$$\mathcal{C}_E = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) \mid (I_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ es una familia de intervalos abiertos acotados y } E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right\}.$$

**Definición 1.66.** Definimos la medida exterior de Lebesgue como la función

$$\begin{aligned} \lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\rightarrow [0, \infty] \\ E &\mapsto \inf \mathcal{C}_E. \end{aligned}$$

A continuación, listamos algunas propiedades importantes que satisface la medida exterior de Lebesgue. La prueba se puede consultar en [2, Lemma 9.5, pág. 99].

**Proposición 1.67.** La medida exterior de Lebesgue satisface las siguientes propiedades:

- (1) Para cada  $E \subseteq \mathbb{R}$ , se cumple que  $0 \leq \lambda^*(E) \leq \infty$ .
- (2) Para cada  $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ , si  $E_1 \subseteq E_2$ , entonces  $\lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_2)$ .
- (3) Si  $E \subseteq \mathbb{R}$  es numerable, entonces  $\lambda^*(E) = 0$ .
- (4) Si  $(E_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , entonces

$$\lambda^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

En particular, si  $(E_k)_{k=1}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , se cumple que

$$\lambda^* \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda^*(E_k).$$

**Definición 1.68.** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Definimos la traslación del conjunto  $E$  por  $x_0$ , como el conjunto

$$x_0 + E = \{x_0 + y \mid y \in E\}.$$

**Teorema 1.69.** La medida exterior de Lebesgue es invariante bajo traslaciones, es decir, para cada  $E \subseteq \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , se cumple que  $\lambda^*(x + E) = \lambda^*(E)$ .

**Teorema 1.70.** Si  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo, se cumple que  $\lambda^*(I) = \ell(I)$ .

Ahora, estamos en condiciones de definir a los conjuntos Lebesgue-medibles.

**Definición 1.71.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Se dice que  $E$  es Lebesgue-medible, si para cada  $A \subseteq \mathbb{R}$ , se cumple que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Notemos que si  $A \subseteq \mathbb{R}$ , entonces se tiene que

$$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

es decir,  $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ , utilizando (4) de la Proposición 1.67, se tiene que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

es decir,  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ . En consecuencia, para mostrar que  $E$  es Lebesgue-medible, es suficiente probar que para cada  $A \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \lambda^*(A).$$

Además, la desigualdad es clara cuando  $\lambda^*(A) = \infty$ , de modo que basta verificar cuando  $\lambda^*(A) < \infty$ .

El Teorema 1.72, cuya prueba se puede consultar en [2, Theorem 9.7, pág. 101], nos garantiza la existencia de la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles.

**Teorema 1.72.** *Consideremos la familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , dada por*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid E \text{ es Lebesgue-medible}\}.$$

*Se cumple que  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  y*

$$\lambda = \lambda^*_{|\mathcal{M}_{\mathcal{L}}} : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow [0, \infty]$$

*es una medida.*

**Definición 1.73.** *A la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  y a la medida  $\lambda$ , definidas en el Teorema 1.72, se les llama la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue y la medida de Lebesgue, respectivamente.*

A continuación, enunciamos algunas propiedades conocidas que satisface la medida de Lebesgue.

**Teorema 1.74.** *La medida de Lebesgue  $\lambda : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow [0, \infty]$ , satisface las siguientes propiedades:*

- (1) *Si  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo, entonces  $I$  es Lebesgue-medible y  $\lambda(I) = \ell(I)$ .*
- (2) *Si  $E \subseteq \mathbb{R}$  y  $\lambda^*(E) = 0$ , entonces  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ , es decir,  $E$  es Lebesgue-medible.*
- (3) *Si  $E \subseteq N \subseteq \mathbb{R}$  y  $\lambda(N) = 0$ , entonces  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ . Así, se concluye que  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \lambda)$  es un espacio de medida completo.*
- (4) *Todos los conjuntos abiertos y cerrados en  $\mathbb{R}$  son Lebesgue-medibles. Más aún,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  y la contención es propia.*

A continuación, presentamos algunas equivalencias para los conjuntos Lebesgue-medibles.

**Teorema 1.75.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  *$E$  es Lebesgue-medible.*
- (2) *Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $O \subseteq \mathbb{R}$  abierto tal que  $E \subseteq O$  y  $\lambda^*(O \setminus E) < \epsilon$ .*

(3) Para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $K \subseteq \mathbb{R}$  cerrado tal que  $K \subseteq E$  y  $\lambda^*(E \setminus K) < \epsilon$ .

En virtud de (2) del Teorema 1.75, se pueden obtener que si  $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ , se cumple que

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(O) \mid O \text{ es abierto y } E \subseteq O\}.$$

Esta propiedad se conoce como **regularidad exterior**.

Análogamente, debido a (3) del Teorema 1.75, se concluye que

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ es compacto y } K \subseteq E\}.$$

A esta propiedad se le conoce como **regularidad interior**.

Finalmente, concluimos con la Proposición 1.76, la cual es de mucha utilidad.

**Proposición 1.76.** Sea  $(E_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  una sucesión de conjuntos Lebesgue-medibles, tales que  $E_n \subseteq E_{n+1}$ , para cada  $n \in \omega$ . Se cumple que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n).$$



## Capítulo 2

# Funciones aditivas lineales

En este capítulo expondremos propiedades elementales de las funciones aditivas reales. Posteriormente discutiremos algunas condiciones que las funciones aditivas reales deben cumplir para satisfacer la linealidad. Las condiciones que se discutirán se enfocan en la continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, acotación y monotonía.

Es importante recordar que por funciones lineales nos referimos a transformaciones lineales en el espacio vectorial  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .

### 2.1. Definición y ejemplos

**Definición 2.1.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada **aditiva**, si para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ , se satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

**Ejemplo 2.2.** La función

$$\begin{aligned} \bar{0} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

es aditiva.

En efecto, si  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\bar{0}(x + y) = 0 = 0 + 0 = \bar{0}(x) + \bar{0}(y)$$

es decir,  $\bar{0}(x + y) = \bar{0}(x) + \bar{0}(y)$ . Por lo tanto,  $\bar{0}$  es aditiva.

**Ejemplo 2.3.** Si fijamos  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , la función

$$\begin{aligned} f_c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto cx \end{aligned}$$

es aditiva.

En efecto, si  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces se tiene que

$$f_c(x + y) = c(x + y) = cx + cy = f_c(x) + f_c(y)$$

es decir,  $f_c(x + y) = f_c(x) + f_c(y)$ . Por lo tanto,  $f_c$  es aditiva.

Notemos que  $\bar{0} = f_0$ .

## 2.2. Propiedades de las funciones aditivas

En este apartado, vamos a mencionar propiedades que satisfacen las funciones aditivas.

**Notación 12.** Denotamos el conjunto de las funciones aditivas en  $\mathbb{R}$  como  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , es decir

$$\mathbf{Ad}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ es aditiva} \right\}.$$

**Lema 2.4.** Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$(1) \quad f(0) = 0.$$

$$(2) \quad \text{Para cada } x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

*Demostración.*

1) Notemos que

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

es decir,  $f(0) = f(0) + f(0)$ , cancelando en ambos lados  $f(0)$ , tenemos que  $f(0) = 0$ .

- 2) Consideremos  $x \in \mathbb{R}$  arbitrario y fijo. Por (1) de este lema y la aditividad de  $f$ , tenemos que

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

es decir,  $f(x) + f(-x) = 0$ , por lo que  $f(-x)$  actúa como inverso aditivo de  $f(x)$ , sabiendo que el inverso es único, se concluye que  $f(-x) = -f(x)$ .

Por lo tanto, el lema queda demostrado.  $\square$

**Teorema 2.5.** *El conjunto  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  tiene estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , con las operaciones  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  y  $(cf)(x) = cf(x)$  para cada  $f, g \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ ,  $x, y, c \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Sabemos que  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  es un espacio vectorial, por tanto, basta demostrar que  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R}) \leq {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

- Si  $f, g \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , entonces para  $x, y \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) \\ &= (f(x) + g(y)) + (g(x) + g(y)) \\ &= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) \\ &= (f + g)(x) + (f + g)(y) \end{aligned}$$

concluyendo así que  $f + g \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  es cerrado bajo sumas.

- Por el Ejemplo 2.2,  $\bar{0} \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .
- Sean  $c \in \mathbb{R}$  y  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} (cf)(x + y) &= cf(x + y) \\ &= c(f(x) + f(y)) \\ &= cf(x) + cf(y) \\ &= (cf)(x) + (cf)(y) \end{aligned}$$

concluyendo que  $cf \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  es cerrado bajo producto por escalar.

Se concluye que  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R}) \leq {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  y consecuentemente,  ${}_{\mathbb{R}}\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial.  $\square$

En la Proposición 2.6, se exponen propiedades de la clase  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  con respecto a la composición de funciones.

**Proposición 2.6.** Sean  $f, g, h \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Entonces:

- (1)  $id_{\mathbb{R}} \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .
- (2)  $g \circ f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .
- (3)  $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ .
- (4)  $(f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$ .
- (5) Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1} \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .

*Demostración.*

- (1) Nótese que  $id_{\mathbb{R}} = f_c$  con  $c = 1 \in \mathbb{R}$ , donde  $f_c$  es como en el Ejemplo 2.3.
- (2) Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ , luego, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

es decir,  $(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$ . Por lo tanto,  $g \circ f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .

- (3) Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} (g \circ (f + h))(x) &= g((f + h)(x)) \\ &= g(f(x) + h(x)) \\ &= g(f(x)) + g(h(x)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ h)(x) \end{aligned}$$

es decir,  $(g \circ (f + h))(x) = (g \circ f)(x) + (g \circ h)(x)$ . Por lo tanto,  $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ .

- (4) Es similar a (3).

- (5) Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1} \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Vamos a demostrar que  $f^{-1}$  es aditiva, para eso tomemos  $x, y \in \mathbb{R}$ , luego  $f^{-1}(x), f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$ . Como  $f$  es aditiva, se tiene que

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) &= f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) \\ &= (f \circ f^{-1})(x) + (f \circ f^{-1})(y) \\ &= x + y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aplicando  $f^{-1}$  a la Ecuación (2.1), se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(x + y) &= f^{-1}(f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))) \\ &= (f^{-1} \circ f)(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{aligned}$$

es decir,  $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ , concluyendo así que  $f^{-1} \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .

De esta manera se concluye la prueba de nuestra proposición.  $\square$

Las propiedades anteriores nos permiten concluir que

$$(\mathbf{Ad}(\mathbb{R}), +, \bar{0}, \circ, id_{\mathbb{R}})$$

es un anillo con unidad. Más aún, podemos notar que si consideramos el monoide  $(\mathbf{Ad}(\mathbb{R}), \circ, id_{\mathbb{R}})$ , se cumple que

$$U(\mathbf{Ad}(\mathbb{R})) = \{f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es biyectiva}\}$$

de manera que  $(U(\mathbf{Ad}(\mathbb{R})), \circ, id_{\mathbb{R}})$  es un grupo.

Es fácil ver que  $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . De hecho, en el Capítulo 3, vamos a discutir bajo qué criterios esta contención es propia.

En el Teorema 2.7, vamos a establecer que el espacio de las funciones aditivas en  $\mathbb{R}$  coincide con el espacio de los endomorfismos en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.7.**  $End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Es claro que  $End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ .

Vamos a demostrar que  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R}) \subseteq End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ , para esto tomemos  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Debemos probar que  $f \in End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ , para esto,

consideremos  $x \in \mathbb{R}$  arbitrario y fijo. Vamos a probar primero que  $f(nx) = nf(x)$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual haremos por inducción. Si  $n = 0$ , usando (1) del Lema 2.4, se tiene que

$$f(nx) = f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x) = nf(x)$$

por lo que  $f(nx) = nf(x)$  cuando  $n = 0$ , con lo que tenemos nuestra base de inducción.

Ahora, si  $f(nx) = nf(x)$  para  $n > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) \\ &= (n+1)f(x). \end{aligned}$$

En otras palabras,  $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$  siempre que  $f(nx) = nf(x)$  para cada  $n > 0$ . Por lo tanto,  $f(nx) = nf(x)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora, si  $n \in \mathbb{Z}_-$ , entonces  $-n \in \mathbb{N}$ , por lo que utilizando (2) del Lema 2.4, tenemos lo siguiente:

$$f(nx) = f((-(-n))x) = -f((-n)x) = -(-nf(x)) = nf(x)$$

por lo que  $f(nx) = nf(x)$  cuando  $n \in \mathbb{Z}_-$ , en consecuencia  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para el caso de los racionales, notemos primero que si  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , se tiene que

$$f(x) = f(1 \cdot x) = f\left(n \frac{1}{n} x\right) = nf\left(\frac{1}{n} x\right)$$

de donde obtenemos que  $f\left(\frac{1}{n} x\right) = \frac{1}{n} f(x)$ , lo cual ocurre para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Finalmente, si  $q \in \mathbb{Q}$ , tenemos que  $q = \frac{m}{n}$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $n \neq 0$ . En consecuencia

$$f(qx) = f\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{1}{n} f(mx) = \frac{1}{n} (mf(x)) = \frac{m}{n} f(x) = qf(x)$$

es decir,  $f(qx) = qf(x)$ , lo cual sucede para todo  $q \in \mathbb{Q}$ . Así,  $f(qx) = qf(x)$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , concluyendo que  $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , como deseábamos.  $\square$

## 2.3. Criterios de linealidad en $\mathbb{R}\mathbb{R}$

En esta sección, vamos a discutir algunos criterios que las funciones aditivas deben cumplir para que sean lineales en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .

En el Teorema 2.8, se caracterizan a las funciones lineales en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.8.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(1) f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}).$$

$$(2) \text{ Existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = cx \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

$$(3) \text{ Para cada } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ se cumple que } \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supóngase que  $f$  es lineal en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ . Tomemos  $c = f(1) \in \mathbb{R}$  y mostremos que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Para esto, notemos que  $\{1\}$  es una base de  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ , en consecuencia, si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $x = x \cdot 1$ . Luego, para  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x = cx$$

es decir,  $f(x) = cx$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Supongamos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Tomemos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entonces  $f(x_1) = cx_1$  y  $f(x_2) = cx_2$ , entonces  $\frac{f(x_1)}{x_1} = c = \frac{f(x_2)}{x_2}$ , es decir,  $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Sean  $d, x \in \mathbb{R}$ . Si  $d = 0$ , por hipótesis se tiene que

$$f(dx) = f(0) = 0 = df(0) = df(x)$$

es decir,  $f(dx) = df(x)$  cuando  $d = 0$ . Si  $x = 0$ , de manera similar se exhibe que  $f(dx) = df(x)$ . Ahora, supongamos que  $d \neq 0$  y  $x \neq 0$ , luego  $dx \neq 0$ . Por hipótesis,  $\frac{f(dx)}{dx} = \frac{f(x)}{x}$ , multiplicando esta última igualdad por  $dx$  en ambos lados, se tiene que  $f(dx) = df(x)$ . Por lo tanto,  $f$  es lineal en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .  $\square$

### 2.3.1. Criterios de continuidad

En el Teorema 2.9, caracterizamos a las funciones aditivas lineales en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$  con respecto a la continuidad.

**Teorema 2.9.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .
- (2)  $f$  es continua.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Como  $f$  es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ , por el Teorema 2.8, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Por resultados conocidos del cálculo, se sigue que  $f$  es continua.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $c = f(1) \in \mathbb{R}$  y mostremos que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Por el Teorema 2.7, tenemos que  $f(q) = cq$  para cada  $q \in \mathbb{Q}$ .

Falta probar que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Para probar esto, consideremos  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $\epsilon > 0$ . Vamos a demostrar que  $|f(x) - cx| < \epsilon$ . Como  $f$  es continua en  $x$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que para cada  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$|y - x| < \delta_1, \text{ implica } |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Notemos que  $\frac{\epsilon}{2(|c|+1)} > 0$ , entonces  $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2(|c|+1)}\} > 0$ . Como  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $|x - q| < \delta$ , en consecuencia,  $|x - q| < \delta_1$  y  $|x - q| < \frac{\epsilon}{2(|c|+1)}$ . Así, usando la ecuación 2.2, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(x) - cx| &\leq |f(x) - f(q)| + |f(q) - cx| \\ &= |f(x) - f(q)| + |c| |q - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + |c| \frac{\epsilon}{2(|c|+1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

es decir,  $|f(x) - cx| < \epsilon$ . Puesto que  $\epsilon$  fue elegido de manera arbitraria, se tiene que  $f(x) = cx$ , para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Por lo tanto,  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Del Teorema 2.8, se concluye lo deseado.  $\square$

En el Teorema 2.10, vamos a exponer una caracterización para la continuidad de las funciones aditivas, lo cuál más adelante nos permitirá debilitar la hipótesis del Teorema 2.9.

**Teorema 2.10.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1)  $f$  es continua.

(2) Existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ .

(3)  $f$  es continua en 0.

*Demostración.* Recordemos que por (1) del Lema 2.4, se cumple que  $f(0) = 0$ . Ahora procederemos a realizar la prueba del teorema.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Es claro.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Supongamos que existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ . Vamos a demostrar que  $f$  es continua en 0, para lo cual consideramos  $\epsilon > 0$  arbitrario. Debido a la continuidad de  $f$  en  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon). \quad (2.3)$$

Consideremos  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < \delta$ , notemos que  $x + x_0 \in \mathbb{R}$  y

$$|(x + x_0) - x_0| = |x| < \delta$$

debido a (2.3), se tiene que

$$|f(x + x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Por la aditividad de  $f$ , se cumple que

$$f(x + x_0) - f(x_0) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) = f(x)$$

de manera que

$$|f(x)| < \epsilon$$

siempre que  $|x| < \delta$ . Por lo tanto,  $f$  es continua en 0.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Supongamos que  $f$  es continua en 0. Debemos demostrar que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , para probar esto consideremos  $y \in \mathbb{R}$  y probemos que  $f$  es continua en  $y$ . Sea  $\epsilon > 0$ , en virtud de que  $f$  es continua en 0, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon). \quad (2.4)$$

Consideremos  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x - y| < \delta$ , como  $x - y \in \mathbb{R}$ , por (2.4), se tiene que  $|f(x - y)| < \epsilon$ . Debido a la aditividad de  $f$ , se tiene que  $f(x - y) = f(x) - f(y)$ , en consecuencia,  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ , siempre que  $|x - y| < \delta$ , concluyendo así que  $f$  es continua en  $y$ . Por lo tanto,  $f$  es continua.  $\square$

Como mencionamos anteriormente, debido al Teorema 2.10, podemos debilitar la equivalencia del Teorema 2.9, como lo hacemos en el Corolario 2.11.

**Corolario 2.11.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .
- (2)  $f$  satisface alguna de las afirmaciones del Teorema 2.10.

*Demostración.* Es claro. □

### 2.3.2. Criterios de integrabilidad

En el Teorema 2.12, vamos a caracterizar la linealidad de las funciones aditivas a través de un criterio de integrabilidad.

**Teorema 2.12.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Son equivalentes:*

- (1)  $f$  es localmente integrable.
- (2)  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $f$  es localmente integrable. Vamos a probar que  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ , para eso tomemos  $x, y \in \mathbb{R}$  arbitrarios y fijos. Como  $f$  es localmente integrable, es integrable en un intervalo de longitud  $|y|$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y \geq 0$ , de modo que  $f$  es integrable en  $[0, y]$ . Luego, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} yf(x) &= \int_0^y f(x)dt = \int_0^y (f(x+t) - f(t))dt \\ &= \int_0^y f(x+t)dt - \int_0^y f(t)dt \\ &= \int_x^{x+y} f(s)ds - \int_0^y f(t)dt \end{aligned}$$

por propiedades de la integral, se tiene que

$$\int_x^{x+y} f(s)ds = \int_0^{x+y} f(s)ds - \int_0^x f(s)ds$$

en consecuencia, se tiene que

$$yf(x) = \int_0^{x+y} f(s)ds - \int_0^x f(s)ds - \int_0^y f(s)ds.$$

Cambiando los papeles de  $x$  e  $y$ , se tiene que

$$xf(y) = \int_0^{x+y} f(s)ds - \int_0^x f(s)ds - \int_0^y f(s)ds.$$

Por consiguiente  $yf(x) = xf(y)$ , para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ . En particular, cuando  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se tiene que  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ , además  $f$  es aditiva, así que por el Lema 2.4, se tiene que  $f(0) = 0$ . En virtud del Teorema 2.8,  $f$  es lineal en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Si  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ , entonces  $f$  es continua en cada intervalo  $[a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ , lo que implica que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  para cada  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Por lo tanto,  $f$  es localmente integrable.  $\square$

A continuación, vamos a mostrar que el criterio del Teorema 2.12 se puede debilitar y es suficiente pedir a la función aditiva que sea integrable en al menos un intervalo acotado, para mostrar esto necesitamos del Teorema 2.13, el cual es un ejercicio de [24, Ejercicio 31, pág. 386] y daremos aquí una prueba del mismo.

**Teorema 2.13.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  una función Riemann-integrable. Entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ . Más aún,  $f$  es continua en una infinidad de puntos de  $[a, b]$ .

*Demostración.* Como  $b - a > 0$  y  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ , existe una partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < b - a.$$

Denotamos

$$M_i(f) = \sup f([t_{i-1}, t_i])$$

y

$$m_i(f) = \inf f([t_{i-1}, t_i])$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Afirmamos que existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$M_j(f) - m_j(f) < 1$$

pues si para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se cumple que  $M_i(f) - m_i(f) \geq 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} b - a &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \\ &< b - a \end{aligned}$$

es decir,  $b - a < b - a$ , lo cual no es posible. Por lo tanto, existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $M_j(f) - m_j(f) < 1$ . Si  $j = 1$ , tomamos  $a_1 = \frac{t_0+t_1}{2} \in (a, t_1)$  y  $b_1 = t_1$ . Si  $j = n$ , tomamos  $a_1 = t_{n-1}$  y  $b_1 = \frac{t_{n-1}+b}{2} \in (t_{n-1}, b)$ . Finalmente, si  $j \neq 1$  y  $j \neq n$ , tomamos  $a_1 = t_{j-1}$  y  $b_1 = t_j$ . Notemos que en cualquier caso, se tiene que

$$a < a_1 < b_1 < b$$

además,  $[a_1, b_1] \subseteq [t_{j-1}, t_j]$ , por consiguiente,

$$f([a_1, b_1]) \subseteq f([t_{j-1}, t_j])$$

así que por propiedades del supremo y el ínfimo, se tiene que

$$\sup f([a_1, b_1]) - \inf f([a_1, b_1]) \leq M_j(f) - m_j(f) < 1$$

es decir,  $\sup f([a_1, b_1]) - \inf f([a_1, b_1]) < 1$ .

Puesto que  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  y  $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ ,  $f$  es Riemann-integrable en  $[a_1, b_1]$ . Luego, existe una partición  $P_1 = \{t_{1,0}, \dots, t_{1,n_1}\}$  de  $[a_1, b_1]$  tal que

$$\overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) < \frac{b-a}{2}.$$

Afirmamos que existe  $j_1 \in \{1, \dots, n_1\}$  tal que

$$M_{1,j_1}(f) - m_{1,j_1}(f) < \frac{1}{2}$$

pues en caso contrario, tendríamos que

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{2}(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} (M_{1,i} - m_{1,i})(t_i - t_{i-1}) \\ &= \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \\ &< \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Si  $j_1 = 1$ , tomamos  $a_2 = \frac{a_1+t_{1,1}}{2} \in (a_1, t_{1,1})$  y  $b_2 = t_{1,1}$ . Si  $j = n_1$ , tomamos  $a_2 = t_{1,n_1-1}$  y  $b_2 = \frac{t_{1,n_1-1}+b}{2} \in (t_{1,n_1-1}, b)$ . Finalmente, si  $j_1 \neq 1$  y  $j_1 \neq n_1$ , elegimos  $a_2 = t_{1,j_1-1}$  y  $b_2 = t_{1,j_1}$ . En cualquier caso, se cumple que

$$a < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < b.$$

Además se cumple que  $[a_2, b_2] \subseteq [t_{1,j_1-1}, t_{1,j_1}]$ , por tanto,  $f([a_2, b_2]) \subseteq f([t_{1,j_1-1}, t_{1,j_1}])$ , en consecuencia

$$\sup f([a_2, b_2]) - \inf f([a_2, b_2]) \leq M_{1,j_1}(f) - m_{1,j_1}(f) < \frac{1}{2}.$$

es decir,  $\sup f([a_2, b_2]) - \inf f([a_2, b_2]) < \frac{1}{2}$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 2$  y supongamos que hemos construido intervalos  $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^k$  tales que

- Para cada  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ,

$$a < a_j < a_{j+1} < b_{j+1} < b_j < b.$$

- Para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$\sup f([a_j, b_j]) - \inf f([a_j, b_j]) < \frac{1}{j}.$$

Como  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  y  $[a_k, b_k] \subseteq [a, b]$ ,  $f$  es integrable en  $[a_k, b_k]$ , de modo que existe una partición  $P_k = \{t_{k,0}, \dots, t_{k,n_k}\}$  de  $[a_k, b_k]$  tal que

$$\overline{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) < \frac{b-a}{k+1}.$$

Se afirma que existe  $j_k \in \{1, \dots, n_k\}$  tal que

$$M_{k,j_k}(f) - m_{k,j_k}(f) < \frac{1}{k+1}$$

pues de lo contrario, tendríamos que

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{k+1} &= \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{k+1} (t_{k,i} - t_{k,i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} (M_{k,i}(f) - m_{k,i}(f)) (t_{k,i} - t_{k,i-1}) \\ &= \overline{S}(f, P_k) - \underline{S}(f, P_k) \\ &< \frac{b-a}{k+1} \end{aligned}$$

lo que es imposible. Si  $j_k = 1$ , tomamos  $a_{k+1} = \frac{a_k + t_{k,1}}{2} \in (a_k, t_{k,1})$  y  $b_{k+1} = t_{k,1}$ . Si  $j_k = n_k$ , elegimos  $a_{k+1} = t_{k,n_k-1}$  y  $b_{k+1} = \frac{t_{k,n_k-1} + b_k}{2}$ . Finalmente, si  $j_m \neq 1$  y  $j_m \neq n_m$ , seleccionamos  $a_{k+1} = t_{k,j_k-1}$  y  $b_{k+1} = t_{k,j_k}$ . En cualquier caso, se tiene que

$$a < a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k < b.$$

Además,  $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [t_{k,j_k-1}, t_{k,j_k}]$ , así que  $f([a_{k+1}, b_{k+1}]) \subseteq f([t_{k,j_k-1}, t_{k,j_k}])$ , por consiguiente

$$\begin{aligned} \sup f([a_{k+1}, b_{k+1}]) - \inf f([a_{k+1}, b_{k+1}]) &\leq M_{k,j_k}(f) - m_{k,j_k}(f) \\ &< \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Así, hemos construido una sucesión de intervalos  $([a_k, b_k])_{k=1}^{\infty}$  tal que

- Para cada  $k \geq 1$ ,  $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ .
- Para cada  $k \geq 1$ , se cumple que

$$\sup f([a_k, b_k]) - \inf f([a_k, b_k]) < \frac{1}{k}.$$

Por el Teorema de los intervalos anidados de Cantor,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \emptyset$ , consideremos  $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ . Por construcción, se tiene para cada  $k \in \mathbb{N}$  que

$$a < a_k < x_0 < b_k < b$$

concluyendo así que  $x_0 \in (a, b)$ .

Vamos a exhibir que  $f$  es continua en  $x_0$ , para eso tomemos  $\epsilon > 0$  arbitrario y fijo. Por la Propiedad Arquimediana, existe  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $\frac{1}{N} < \epsilon$ . Se tiene que  $x_0 \in (a_N, b_N)$ , entonces se tiene que  $\delta = \text{menor}\{x_0 - a_N, b_N - x_0\} > 0$ . Si  $x \in [a, b]$  y  $|x - x_0| < \delta$ , se tiene que

$$a_N \leq x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \leq b_N$$

concluyendo así que  $x, x_0 \in [a_N, b_N]$ . Luego, se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup f([a_N, b_N]) - \inf f([a_N, b_N]) < \frac{1}{N} < \epsilon$$

mostrando así que  $f$  es continua en  $x_0$ .

Para mostrar que  $f$  tiene una infinidad de puntos de continuidad en  $[a, b]$ , vamos a construir una sucesión estrictamente creciente en  $(a, b)$ . Como  $a < b$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , existe  $q_1 \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < q_1 < b$ . Puesto que  $q_1 < b$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , existe  $q_2 \in \mathbb{Q}$  tal que  $q_1 < q_2 < b$ , así se tiene que  $a < q_1 < q_2 < b$ . Supongamos que para  $k > 2$ , tenemos  $(q_j)_{j=1}^k \subseteq \mathbb{Q} \cap (a, b)$  tales que

$$a < q_j < q_{j+1} < b$$

para cada  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ . Como  $q_k < b$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , existe  $q_{k+1} \in \mathbb{Q}$  tal que  $q_k < q_{k+1} < b$ . Luego, tenemos que

$$a < q_k < q_{k+1} < b.$$

Así, tenemos  $(q_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{Q} \cap (a, b)$  tal que  $q_k < q_{k+1}$ . Ahora bien, para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $[q_k, q_{k+1}] \subseteq [a, b]$  y  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable en  $[q_k, q_{k+1}]$ , entonces existe  $r_k \in (q_k, q_{k+1})$  tal que  $f$  es continua en  $r_k$ . Por construcción,  $r_k \neq r_l$ , si  $k \neq l$  para cada  $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Por tanto,  $(r_k)_{k=1}^\infty \subseteq [a, b]$  es una infinidad de puntos donde  $f$  es continua.  $\square$

**Corolario 2.14.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .
- (2) Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  tales que  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Si  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ , por el Teorema 2.19,  $f$  es continua. En particular  $f$  es continua en  $[0, 1]$ , por consiguiente Riemann-integrable en  $[0, 1]$ . De modo que  $a = 0$  y  $b = 1$  satisfacen lo deseado.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Supóngase que  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$  para algunos  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Por el Teorema 2.13, existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ . Por el Teorema 2.10,  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .  $\square$

### 2.3.3. Criterios de acotación

En este apartado, vamos a probar criterios que implican la linealidad en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  de una función aditiva a través de su acotación.

En el Teorema 2.15, se mostrará una propiedad interesante sobre la gráfica de una función aditiva no lineal.

**Teorema 2.15.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Si  $f$  no es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ , entonces el conjunto*

$$\text{Gr}f(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

*es denso en  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ . Tomemos  $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijo. Por el Teorema 2.8, existe  $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

Por consiguiente, tenemos que

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5)$$

Denotemos  $v_1 = (x_1, f(x_1))$  y  $v_2 = (x_2, f(x_2))$ . Debido a la ecuación (2.5), se tiene que  $B = \{v_1, v_2\}$  es una base para  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ . Consideremos  $u \in \mathbb{R}^2$  y  $\delta > 0$ . Vamos a probar que  $B_{\delta}(u) \cap \text{Gr}f(f) \neq \emptyset$ . Puesto que  $u \in \mathbb{R}^2$  y  $B$  es base de  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ , existen  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $u = c_1 v_1 + c_2 v_2$ . Como  $v_1 \neq 0$  y  $v_2 \neq 0$ , entonces  $\|v_1\| > 0$  y  $\|v_2\| > 0$ , así que  $\frac{\delta}{2\|v_1\|} > 0$  y  $\frac{\delta}{2\|v_2\|} > 0$ . Dado que  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , existen  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  tales que  $|q_1 - c_1| < \frac{\delta}{2\|v_1\|}$  y  $|q_2 - c_2| < \frac{\delta}{2\|v_2\|}$ .

Proponemos  $v = q_1v_1 + q_2v_2$  y probaremos que  $v \in B_\delta(u) \cap Grf(f)$ . Por un lado, notemos que

$$\begin{aligned}
 \|u - v\| &= \|(c_1v_1 + c_2v_2) - (q_1v_1 + q_2v_2)\| \\
 &= \|(c_1 - q_1)v_1 + (c_2 - q_2)v_2\| \\
 &\leq \|(c_1 - q_1)v_1\| + \|(c_2 - q_2)v_2\| \\
 &= |c_1 - q_1| \|v_1\| + |c_2 - q_2| \|v_2\| \\
 &< \frac{\delta}{2\|v_1\|} \|v_1\| + \frac{\delta}{2\|v_2\|} \|v_2\| \\
 &= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
 &= \delta
 \end{aligned}$$

es decir,  $\|u - v\| < \delta$ , concluyendo así que  $v \in B_\delta(u)$ . Por otro lado, de acuerdo con el Teorema 2.7, se tiene que

$$\begin{aligned}
 v = q_1v_1 + q_2v_2 &= q_1(x_1, f(x_1)) + q_2(x_2, f(x_2)) \\
 &= (q_1x_1 + q_2x_2, q_1f(x_1) + q_2f(x_2)) \\
 &= (q_1x_1 + q_2x_2, f(q_1x_1 + q_2x_2))
 \end{aligned}$$

es decir,  $v = (y, f(y))$ , con  $y = q_1x_1 + q_2x_2 \in \mathbb{R}$ , obteniendo así que  $v \in Grf(f)$ . De esta manera, concluimos que  $v \in B_\delta(u) \cap Grf(f)$  y consecuentemente  $B_\delta(u) \cap Grf(f) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $Grf(f)$  es un conjunto denso en  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

En el Teorema 2.16, se mostrará que para que una función aditiva sea lineal es suficiente que sea acotada superior o inferiormente.

**Teorema 2.16.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Si  $f$  es acotada inferior o superiormente, entonces  $f$  es lineal en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es acotada superiormente, así existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos a ver que  $Grf(f)$  no es denso en  $\mathbb{R}^2$ , para esto consideremos el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > M\}$$

y mostremos que  $A$  es abierto, para eso tomemos  $(x_0, y_0) \in A$ . Luego  $y_0 > M$ , por consiguiente,  $r = y_0 - M > 0$ . Si  $(x, y) \in$

$B_r(x_0, y_0)$ , entonces  $\|(x - x_0, y - y_0)\| < r$ . Por propiedades del valor absoluto y la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$y_0 - y \leq |y - y_0| \leq \|(x - x_0, y - y_0)\| < y_0 - M$$

de donde se sigue que  $y > M$ , en consecuencia  $(x, y) \in A$ . Así,  $A$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ , además  $A \cap \text{Gr}f(f) = \emptyset$ , concluyendo que  $\text{Gr}f(f)$  no es denso en  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $f$  es acotada inferiormente, se tiene que existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Similarmente como se hizo para el caso superior, se demuestra que el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < m\}$$

es abierto en  $\mathbb{R}^2$  y  $B \cap \text{Gr}f(f) = \emptyset$ , concluyendo que  $\text{Gr}f(f)$  no es denso en  $\mathbb{R}^2$ .

En cualquier caso, por el Teorema 2.15,  $f$  es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Lema 2.17.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Si  $f$  es acotada en  $\mathbb{R}$ , entonces  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Como  $f$  es acotada en  $\mathbb{R}$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ . Supóngase que existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $f(y) \neq 0$ . Por la Propiedad Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > \frac{M}{|f(y)|}$ . Dado que  $f$  es aditiva, por el Teorema 2.7,  $f$  es lineal en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , en consecuencia,  $|f(ny)| > M$ , donde  $ny \in \mathbb{R}$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lema 2.18.** *Sea  $c > 0$ . Entonces*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nc, (n+1)c].$$

*Demostración.* Es claro que  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nt, (n+1)t] \subseteq \mathbb{R}$ .

Ahora, si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x}{c} \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n \leq \frac{x}{c} < n+1$ , puesto que  $c > 0$ , se tiene que  $nc \leq x < (n+1)c$ , esto es,  $x \in [nc, (n+1)c)$ , pero  $[nc, (n+1)c) \subseteq [nc, (n+1)c]$ , así que  $x \in [nc, (n+1)c]$ , concluyendo que  $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nc, (n+1)c]$ . Por lo tanto,  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nc, (n+1)c]$ .  $\square$

**Teorema 2.19.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Si existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , de modo que  $f$  es acotada en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $M > 0$  tales que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Denotemos  $t = b - a$ ; obsérvese que  $t > 0$  y  $t + a = b$ . En primera instancia, vamos a demostrar que  $f$  es acotada en  $[0, t]$ . Para probar esto, notemos que si  $y \in [0, t]$ , entonces  $0 \leq y \leq t$ , luego,  $a \leq y + a \leq t + a$ , esto es,  $a \leq y + a \leq b$ , por consiguiente,  $|f(y + a)| \leq M$ . Como  $f$  es aditiva, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(y)| &= |f(y + a - a)| \\ &= |f(y + a) - f(a)| \\ &\leq |f(y + a)| + |f(a)| \\ &\leq M + |f(a)|. \end{aligned}$$

Denotando  $N = M + |f(a)| > 0$ , se sigue que  $|f(y)| \leq N$  para todo  $y \in [0, t]$ . En otras palabras,  $f$  está acotada en  $[0, t]$ .

Consideremos  $c = \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$  y definamos la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(x) = f(x) - cx$ . Como  $g$  es suma de funciones aditivas, por el Teorema 2.5,  $g$  es aditiva. También, obsérvese que

$$g(t) = f(t) - ct = f(t) - \frac{f(t)}{t}t = f(t) - f(t) = 0$$

es decir,  $g(t) = 0$ . Puesto que  $g$  es aditiva,  $g$  es lineal en  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ , así que para cada  $q \in \mathbb{Q}$ , se tiene que

$$g(x + qt) = g(x) + qg(t) = g(x)$$

es decir,  $g(x + qt) = g(x)$  para cada  $q \in \mathbb{Q}$ . Más aún, nótese que

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x) - c(-x) \\ &= -f(x) + cx \\ &= -(f(x) - cx) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

es decir,  $g(x) = -g(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , obteniendo así que  $g$  es una función impar.

Obsérvese que para  $x \in [0, t]$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |f(x) - cx| \\ &\leq |f(x)| + |cx| \\ &\leq N + |c|t \\ &\leq N + |f(t)| \end{aligned}$$

así, si hacemos  $K = N + |f(t)| > 0$ , se tiene que  $|g(x)| \leq K$  para cada  $x \in [0, t]$ .

Vamos a demostrar que  $|g(x)| \leq K$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Puesto que por el Lema 2.18,  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nt, (n+1)t]$ , es suficiente probar que  $|g(x)| \leq K$  para cada  $x \in [nt, (n+1)t]$  y cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Vamos a mostrar primero por inducción que lo anterior se cumple para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$ , ya está demostrado. Ahora, si  $|g(x)| \leq K$  para toda  $x \in [(n-1)t, nt]$ , tomemos  $y \in [nt, (n+1)t]$ , luego  $y - t \in [(n-1)t, nt]$ , por hipótesis de inducción,  $|g(y-t)| \leq K$ , pero  $g(y-t) = g(y)$ , así que  $|g(y)| \leq K$ , lo cual ocurre para cada  $y \in [nt, (n+1)t]$ . Por lo tanto,  $|g(y)| \leq K$  para todo  $y \in [nt, (n+1)t]$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, si  $x \in [nt, (n+1)t]$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n < 0$ , entonces  $-x \in [-(n+1)t, -nt]$  con  $-(n+1) \in \mathbb{N}$ , en consecuencia,  $|g(-x)| \leq K$ , pero  $g(-x) = -g(x)$ , ya que  $g$  es impar, entonces

$$|g(-x)| = |-g(x)| = |g(x)|$$

así que  $|g(x)| \leq K$ , lo que sucede para cada  $x \in [nt, (n+1)t]$  y para  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $|g(x)| \leq K$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por el Lema 2.17,  $g(x) = 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , es decir,  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $f$  es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ .  $\square$

**Corolario 2.20.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Si  $f$  satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(1) *Existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es derivable en  $x_0$ .*

(2)  *$f$  es monótona*

*entonces  $f$  es lineal.*

*Demostración.*

(1) Si existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es derivable en  $x_0$ , entonces  $f$  es continua en  $x_0$ . Por los Teoremas 2.9 y 2.10, se concluye que  $f$  es lineal.

(2) Si  $f$  es creciente, entonces  $f([0, 1]) \subseteq [f(0), f(1)]$  y si  $f$  es decreciente, entonces  $f([0, 1]) \subseteq [f(1), f(0)]$ . Así,  $f$  es acotada en el intervalo acotado  $[0, 1]$ . Por el Teorema 2.19, se sigue que  $f$  es lineal.

Así queda concluida la prueba.  $\square$

De acuerdo a los resultados expuestos en esta sección, podemos establecer el Teorema 2.21.

**Teorema 2.21.** *Sea  $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes para  $f$ :*

- 1)  $f \in \mathbf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .
- 2)  $f$  es continua.
- 3) Existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ .
- 4)  $f$  es derivable.
- 5) Existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es diferenciable en  $x_0$ .
- 6)  $f$  es localmente integrable.
- 7) Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  tal que  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ .
- 8) Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  tales que  $f$  es acotada en  $[a, b]$ .
- 9)  $f$  es monótona.
- 10) Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  tales que  $f$  es monótona en  $[a, b]$ .



## Capítulo 3

# Funciones aditivas no lineales

Este capítulo tiene como objetivo exponer material relacionado con las funciones aditivas que no son lineales. Se expondrán algunos resultados relacionados con el espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , pues este espacio es de utilidad para la construcción de las funciones aditivas no lineales. En la mayor parte de la literatura se menciona que la existencia de las funciones aditivas no lineales es una consecuencia del Axioma de Elección, lo cual es evidentemente cierto. Sin embargo, en este capítulo haremos notar que para asegurar la existencia de las funciones aditivas no lineales es suficiente suponer los axiomas de **ZF** y agregar condiciones particulares, que si bien pueden ser consecuencias del Axioma de Elección, éstas pueden ser más débiles que el axioma en sí. Finalmente mostraremos que en **ZF**, basta suponer la existencia de funciones aditivas no lineales para establecer la existencia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles.

En ocasiones, con el fin de abreviar, nos referiremos a las funciones aditivas no lineales por **FANL**, expresión que claramente está formada por las iniciales del concepto.

### 3.1. El espacio vectorial ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$

Debido a las propiedades conocidas para la suma de números reales, se tiene que  $(\mathbb{R}, +, 0)$  es un grupo abeliano. Si definimos la

función

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, x) &\mapsto qx \end{aligned}$$

sin mayor dificultad se puede ver que  $\cdot$  satisface las propiedades de producto por escalar. En consecuencia, dicho producto dota a  $\mathbb{R}$  de estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ , a este espacio lo denotaremos siempre por  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ .

De acuerdo con los resultados expuestos en la Sección 1.2, se sabe que en **ZFC** todos los espacios vectoriales tienen base y todas las bases de un espacio vectorial son equipotentes, bajo Axioma de Elección, se puede hablar de cardinalidad, en este contexto, todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad. Bajo tales hipótesis, el espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  no tendría por qué ser la excepción.

Sin embargo, si consideramos únicamente los axiomas de la teoría **ZF**, no podemos garantizar la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  ni podemos hablar de dimensión, entonces debemos agregar a los axiomas de **ZF** una hipótesis adicional, a saber, la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , hipótesis que llamaremos **BRQ** y que enunciamos a continuación.

**Hipótesis 1 (BRQ).** *Existen bases para el espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ .*

Si bien es cierto que en **ZF+BRQ** no podemos hablar de cardinalidad de conjuntos debido a que no tenemos el Axioma de Elección, si podemos hablar de biyecciones entre conjuntos y por consiguiente de conjuntos equipotentes. De esta manera, podemos probar en **ZF+BRQ**, ninguna base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  se puede biyectar con algún número natural. Esto lo establecemos en el Teorema 3.1.

**Teorema 3.1 (ZF+BRQ).** *Ninguna base para el espacio vectorial  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  es equipotente a algún número natural.*

*Demostración.* Sea  $B$  es una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Supongamos que  $B$  es equipotente a  $n$ , para algún  $n \in \omega$ . Si  $n = 0$ , entonces  $B = \emptyset$ , así que  $\mathbb{R} = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$ , lo cual no es posible. Se sigue que  $n > 0$ , luego  $B = (x_j)_{j < n}$  y  $x_j \neq x_k$  si  $k \neq j$  para cada  $k, j < n$ . Luego, por el Corolario 1.37, existe un isomorfismo  $\phi : {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \rightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^n$ . En particular,  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}^n$  es una biyección, concluyendo que  $\mathbb{R}$  es equipotente a  $\mathbb{Q}^n$ . Dado que  $\mathbb{Q}^n$  es equipotente a  $\omega$ , se concluye

que  $\mathbb{R}$  es equipotente a  $\omega$ , lo cual es absurdo (ver [8, Teorema 7.22, pág. 159]). Por lo tanto, ninguna base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  puede ser equipotente a algún número natural.  $\square$

Pese a que en **ZF+BRQ** no le podemos asignar a una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  un cardinal, si podemos ver que las bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  satisfacen una condición de infinitud, para esto introducimos la Definición 3.2.

**Definición 3.2.** *Sea  $X$  un conjunto. Decimos que  $X$  es Dedekind-infinito, si existe una función  $f : X \rightarrow X$  inyectiva pero no suprayectiva.*

Observemos que si un conjunto  $X$  es Dedekind-infinito, existe una función  $f : X \rightarrow X$  inyectiva y no suprayectiva, en consecuencia, se tiene que  $f|_{f(X)} : X \rightarrow f(X)$  es una biyección con  $f(X) \subsetneq X$ .

Ahora, si  $Y \subsetneq X$  y  $\sigma : X \rightarrow Y$  es una biyección, tenemos el diagrama

$$X \xrightarrow{\sigma} Y \xrightarrow{\iota} X$$

de modo que  $g = \iota \circ \sigma : X \rightarrow X$  es una función inyectiva y no suprayectiva. De esta manera, la Definición 3.2, se puede reformular diciendo que  $X$  es Dedekind-infinito, si y solo si existe una biyección  $f : X \rightarrow Y$ , con  $Y \subsetneq X$ .

En el Teorema 3.3, se presenta una caracterización de los conjuntos Dedekind-Infinito.

**Teorema 3.3.** *Sea  $X$  un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $X$  es Dedekind-infinito.
- (2) Existe una función inyectiva  $h : \omega \rightarrow X$ .

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $X$  es Dedekind-infinito. Luego, existe una función  $f : X \rightarrow X$  inyectiva y no suprayectiva. Luego, existe  $x_0 \in X \setminus f(X)$ . Por recursión, se define la función  $h : \omega \rightarrow X$ , dada por  $h(0) = x_0$  y  $h(n+1) = f(h(n))$  para cada  $n \in \omega$ . Observemos que para cada  $n \in \omega$ ,  $h(n) = f^n(x_0)$ , donde

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}$$

Es claro que  $h : \omega \rightarrow X$  es inyectiva.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Supongamos que existe  $h : \omega \rightarrow X$  inyectiva. Partimos a  $X$  como  $X = h(\omega) \cup (X \setminus h(\omega))$ . Es fácil ver que  $\omega$  es Dedekind-infinito, de manera que podemos considerar una biyección  $\sigma : \omega \rightarrow M$  con  $M \subsetneq \omega$ . Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \omega & \xrightarrow{\sigma} & M \subsetneq & \xrightarrow{\quad} & \omega \\ \downarrow h & & \downarrow h|_M & & \downarrow h \\ h(\omega) & \xrightarrow{h|_M \circ \sigma \circ h|_{h(\omega)}^{-1}} & h(M) \subsetneq & \xrightarrow{\quad} & h(\omega) \end{array}$$

obteniendo que  $k = \iota \circ h|_M \circ \sigma \circ h|_{h(\omega)}^{-1} : h(\omega) \rightarrow h(\omega)$  es una función inyectiva y no suprayectiva. De esta manera, definimos la función  $f : X \rightarrow X$ , dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(x) & \text{si } x \in h(\omega) \\ x & \text{si } x \in X \setminus h(\omega). \end{cases}$$

Es claro que  $f : X \rightarrow X$  es una función inyectiva. □

**Definición 3.4.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Decimos que  $\alpha$  es un número algebraico si existe  $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$  tal que  $p(\alpha) = 0$ . Si  $\alpha$  no es algebraico, decimos que es trascendente.

Ahora estamos en condiciones de demostrar que en **ZF+BRQ**, las bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  son Dedekind-infinitas.

**Teorema 3.5 (ZF+BRQ).** Sea  $B$  una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Entonces  $B$  es Dedekind-infinito.

*Demostración.* Sabemos que el conjunto de los números algebraicos es equipotente a  $\omega$  y que  $\omega$  no es equipotente a  $\mathbb{R}$ , en consecuencia existe al menos un número trascendente, digamos  $t \in \mathbb{R}$ . Consideremos  $T = (t^n)_{n \in \omega}$ . Mostraremos que  $T$  es linealmente independiente en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Para esto, observemos que si  $T$  es linealmente dependiente, existen  $m \in \omega \setminus \{0\}$ ,  $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{Q}$  no todos cero tales que

$$\sum_{j=0}^m q_j t^j = 0.$$

Luego, tenemos que  $p(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$  y  $q(t) = 0$ . Obteniendo así que  $t$  es un número algebraico, lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $T$  es linealmente independiente.

Ahora bien, como  $t^n \in \mathbb{R}$  para cada  $n \in \omega$  y  $B$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , se tiene que para cada  $n \in \omega$

$$t^n = \sum_{x \in B} c_{nx} x$$

donde  $c_{nx} \in \mathbb{Q}$  y  $c_{nx} = 0$  para casi toda  $x \in B$ . Si consideramos para cada  $n \in \omega$ , el conjunto

$$S_n = \{x \in B \mid c_{nx} \neq 0\}$$

se tiene que  $S_n$  es finito para cada  $n \in \omega$ . Además, se cumple que  $S_n \neq \emptyset$  para cada  $n \in \omega$ , en consecuencia, el conjunto  $\bigcup_{n \in \omega} S_n$  no es equipotente con algún número natural. Observemos que los  $t^n$  son todos distintos, en consecuencia, para cada  $n \in \omega$ , se cumple que existe  $m \in \omega$  tal que  $S_m \setminus \bigcup_{j < n} S_j \neq \emptyset$ . En virtud de que  $\omega$  es bien ordenado, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f: \omega &\rightarrow \omega \\ n &\mapsto \min \left\{ k \in \omega \mid S_k \setminus \bigcup_{j < n} S_j \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada  $n \in \omega$ , se tiene que  $S_{f(n)} \setminus \bigcup_{j < n} S_j$  es un subconjunto finito de  $B$  y  $B$  es un conjunto linealmente ordenado por el orden usual de  $\mathbb{R}$ , en consecuencia  $S_{f(n)} \setminus \bigcup_{j < n} S_j$  tiene un mínimo, así podemos definir la función

$$\begin{aligned} g: \omega &\rightarrow B \\ n &\mapsto \min \left( S_{f(n)} \setminus \bigcup_{j < n} S_j \right) \end{aligned}$$

que claramente es inyectiva. Por lo tanto,  $B$  es Dedekind-infinito.  $\square$

A continuación presentamos algunas consecuencias de la infinitud según Dedekind de las bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ .

**Corolario 3.6 (ZF+BRQ).**  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos.

*Demostración.* Sea  $B$  una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Por el Teorema 3.5, existe una función inyectiva  $f : \omega \rightarrow B$ . Consideremos la función  $s : \omega \rightarrow \omega \setminus \{0\}$ , dada por  $s(n) = n + 1$ . Es fácil ver que  $s$  es biyectiva. Consideremos  $b_0 = f(0)$ . Observemos que como  $f$  es inyectiva,  $f|_{f(\omega)} : \omega \rightarrow f(\omega)$  y  $f|_{\omega \setminus \{0\}} : \omega \setminus \{0\} \rightarrow f(\omega \setminus \{0\})$  son funciones biyectivas y  $f(\omega \setminus \{0\}) \subseteq B \setminus \{b_0\}$ . Consideremos  $h : f(\omega) \rightarrow \omega$  la función inversa de  $f|_{f(\omega)}$ . Tenemos el diagrama

$$f(\omega) \xrightarrow{h} \omega \xrightarrow{s} \omega \setminus \{0\} \xrightarrow{f|_{\omega \setminus \{0\}}} f(\omega \setminus \{0\})$$

de modo que la función  $k = f|_{\omega \setminus \{0\}} \circ s \circ h : f(\omega) \rightarrow f(\omega \setminus \{0\})$  es una biyección por ser composición de biyecciones. Por otro lado, tenemos que

$$B \setminus \{b_0\} = f(\omega \setminus \{0\}) \cup (B \setminus f(\omega)).$$

Es claro que la función

$$g : \begin{array}{lll} B \setminus \{b_0\} & \rightarrow & B \\ f(\omega \setminus \{0\}) \ni x & \mapsto & k^{-1}(x) \\ B \setminus f(\omega) \ni x & \mapsto & x \end{array}$$

está bien definida y es biyectiva.

Ahora estamos en condiciones de definir el isomorfismo  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  de grupos abelianos. Como  $B$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ , existe una única representación

$$x = \sum_{b \in B} q_{x_b} b$$

donde  $q_{x_b} \in \mathbb{Q}$  y  $q_{x_b} = 0$  para casi toda  $b \in B$ . De esta manera, proponemos la función

$$\phi : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left( q_{x_{b_0}}, \sum_{b \in B \setminus \{b_0\}} q_{x_{g(b)}} g(b) \right) \end{array}$$

que claramente está bien definida. Mostraremos que  $\phi$  es un morfismo biyectivo de grupos abelianos. Para probar esto, consideremos  $x, y \in \mathbb{R}$ , luego

$$x = \sum_{b \in B} q_{x_b} b$$

y

$$y = \sum_{b \in B} q_{y_b} b$$

donde  $q_{x_b}, q_{y_b} \in \mathbb{Q}$  y  $q_{x_b} = q_{y_b} = 0$  para casi toda  $b \in B$ . Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi(x + y) &= \phi\left(\sum_{b \in B} q_{x_b} b + \sum_{b \in B} q_{y_b} b\right) \\ &= \phi\left(\sum_{b \in B} (q_{x_b} + q_{y_b}) b\right) \\ &= \left(q_{x_{b_0}} + q_{y_{b_0}}, \sum_{b \in B \setminus \{b_0\}} (q_{x_b} + q_{y_b}) g(b)\right) \\ &= \left(q_{x_{b_0}}, \sum_{b \in B \setminus \{b_0\}} q_{x_{g(b)}} g(b)\right) + \left(q_{y_{b_0}}, \sum_{b \in B \setminus \{b_0\}} q_{y_{g(b)}} g(b)\right) \\ &= \phi(x) + \phi(y) \end{aligned}$$

es decir,  $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ , lo cual sucede para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $\phi$  es un morfismo de grupos abelianos.

Ahora mostraremos que  $\phi$  es inyectivo. Para esto sea  $x \in \text{Ker}(\phi)$ . De esta manera, si

$$x = \sum_{b \in B} q_{x_b} b$$

se cumple que  $q_{x_{b_0}} = 0$  y  $\sum_{b \in B \setminus \{b_0\}} q_{x_{g(b)}} g(b) = 0$ , puesto que  $B$  es linealmente independiente, se tiene que  $q_{x_{g(b)}} = 0$  para todo  $b \in B \setminus \{b_0\}$ , en consecuencia,  $q_{x_b} = 0$  para cada  $b \in B$ , obteniendo así que  $x = 0$ . Así,  $\text{Ker}(\phi) = 0$  y se establece que  $\phi$  es inyectivo.

Finalmente exhibiremos que  $\phi$  es suprayectivo. Para mostrar esto, consideremos  $(q, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ . Como  $y \in \mathbb{R}$ , existe una única representación

$$y = \sum_{b \in B} q_{y_b} b$$

con  $q_{y_b} \in \mathbb{Q}$  y  $q_{y_b} = 0$  para casi todo  $b \in B$ . Si proponemos

$$x = qb_0 + \sum_{b \in B} q_{y_{g^{-1}(b)}} g^{-1}(b) \in \mathbb{R}$$

se tiene que  $(q, y) = \phi(x)$ . Se sigue que  $\phi$  es morfismo suprayectivo de grupos. Por lo tanto,  $\phi$  es isomorfismo de grupos abelianos y  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos.  $\square$

**Corolario 3.7 (ZF+BRQ).** *Existe un subespacio vectorial  $W \leq_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  tal que  $W \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(\omega)}$ .*

*Demostración.* Consideremos un número trascendente  $t \in \mathbb{R}$  y  $T = (t^n)_{n \in \omega}$ . De la demostración del Teorema 3.5, se tiene que  $T$  es linealmente independiente. Además,  $T$  es equipotente a  $\omega$ , pues es fácil ver que

$$\begin{aligned} h: \omega &\rightarrow T \\ n &\mapsto t^n \end{aligned}$$

es una biyección. De esta manera,  $T$  es una base para  $W = \langle T \rangle \leq_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ , la cual es equipotente a  $\omega$ . Adecuando el Teorema 1.55 (si  $B$  es una base de  ${}_K V$ ,  $C$  es una base de  ${}_K W$  y  $B$  es equipotente a  $C$ , entonces  $V \cong W$ ), se tiene que  $W \cong \mathbb{Q}^{(\omega)}$ .  $\square$

Recordemos que en **ZFC** podemos definir la dimensión de cualquier espacio vectorial, en particular de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Antes de proceder a establecer la dimensión de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  probaremos el Lema 3.8, que nos será de ayuda.

**Lema 3.8. (ZFC)** *Sean  ${}_{\mathbb{Q}}V$  un espacio vectorial y  $S \subseteq V$  un conjunto no vacío. Entonces*

$$|\langle S \rangle| \leq |S| \cdot \omega.$$

*Demostración.* Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , cuando digamos que  $\bar{q} \in \mathbb{Q}^n$ , estaremos diciendo que  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$  con  $q_i \in \mathbb{Q}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Análogamente cuando digamos que  $\bar{s} \in S^n$ , estaremos diciendo que  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$  con  $s_i \in S$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Procederemos con la demostración del teorema. Definamos para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , la función

$$\begin{aligned} g_n: \mathbb{Q}^n \times S^n &\rightarrow \langle S \rangle \\ (\bar{q}, \bar{s}) &\mapsto \sum_{i=1}^n q_i s_i \end{aligned}$$

que claramente está bien definida. Se cumple que la familia

$$(g_n : \mathbb{Q}^n \times S^n \rightarrow \langle S \rangle)_{n=1}^{\infty}$$

es un sistema compatible de funciones, pues  $\omega$  es un conjunto linealmente ordenado y si  $m < n$  existe una función inyectiva  $f : \mathbb{Q}^m \times S^m \rightarrow \mathbb{Q}^n \times S^n$ , sustituyendo  $f(\mathbb{Q}^m \times S^m)$  por  $\mathbb{Q}^m \times S^m$ , podemos suponer que  $(\mathbb{Q}^m \times S^m) \cap (\mathbb{Q}^n \times S^n) = \mathbb{Q}^m \times S^m$ . Así, se tiene que

$$g = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n : \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q}^n \times S^n) \rightarrow \langle S \rangle$$

es una función, donde  $g(\bar{q}, \bar{s}) = g_n(\bar{q}, \bar{s})$ , siempre que  $(\bar{q}, \bar{s}) \in \mathbb{Q}^n \times S^n$ . Además, es claro que  $g$  es una función suprayectiva, por tanto, tiene inversa derecha  $h : \langle S \rangle \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q}^n \times S^n)$ , la cual es inyectiva, en consecuencia

$$\begin{aligned} |\langle S \rangle| &\leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q}^n \times S^n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{Q}^n \times S^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{Q}^n| |S^n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega |S|^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si  $S$  es finito, entonces  $|S| = u$ , para algún  $u \in \omega \setminus \{0\}$ , además, para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ ,  $|S|^n \in \omega \setminus \{0\}$ , por consiguiente,  $\omega |S|^n = \omega$  para cada  $n \in \omega$ . Debido a la aritmética cardinal, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega |S|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega = \omega \omega = \omega = u \omega = |S| \omega.$$

De aquí y la ecuación (3.1), se sigue que  $|\langle S \rangle| \leq |S| \omega$ .

Si  $S$  es infinito, entonces  $|S|^n = |S|$  para cada  $n \in \omega$ , de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega |S|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega |S| = \omega |S| \omega = |S| \omega.$$

De aquí y la ecuación (3.1), se obtiene que  $|\langle S \rangle| \leq |S| \omega$ . Por lo tanto, obtenemos lo deseado.  $\square$

Tenemos todo lo necesario para establecer la dimensión de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , trabajando desde luego en **ZFC**.

**Teorema 3.9 (ZFC).**  $\dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ .

*Demostración.* Sea  $B$  una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Por un lado, como  $B \subseteq \mathbb{R}$ , se cumple que

$$|B| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

es decir,  $|B| \leq \mathfrak{c}$ .

Por otro lado, como  $B$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , se tiene que  $\mathbb{R} = \langle B \rangle$ . Además, del Teorema 3.5, se sigue que  $\omega \leq |B|$ . Aplicando el Lema 3.8, tenemos lo siguiente:

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |\langle B \rangle| \leq |B| \omega = |B|$$

es decir,  $\mathfrak{c} \leq |B|$ . Por el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, se concluye que  $|B| = \mathfrak{c}$ . Por lo tanto,  $\dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ .  $\square$

Como consecuencia del Teorema 3.9, se puede garantizar que  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$  como grupos abelianos, para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , esto se establece en el Corolario 3.10.

**Corolario 3.10 (ZFC).** *Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$  como grupos abelianos. Más aún,  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  como grupos abelianos.*

*Demostración.* Sea  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . Notemos que  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^n$  satisface que

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^n \bar{\mathbb{R}}_i$$

donde

$$\bar{\mathbb{R}}_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_j = 0 \text{ si } j \neq i\}$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Además,  ${}_{\mathbb{Q}}\bar{\mathbb{R}}_i \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Aplicando propiedades de las sumas directas, el Teorema 1.55, el Teorema 3.9 y aritmética cardinal, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^n) &= \dim\left({}_{\mathbb{Q}}\bigoplus_{i=1}^n \bar{\mathbb{R}}_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim({}_{\mathbb{Q}}\bar{\mathbb{R}}_i) = \sum_{i=1}^n \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{c} = n\mathfrak{c} = \mathfrak{c} = \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) \end{aligned}$$

es decir,  $\dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^n) = \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ . Por el Teorema 1.55,  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^n$ .

Finalmente, por lo realizado anteriormente,  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$  y se sabe que  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}^2 \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ , en consecuencia,  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ . Por lo tanto, queda probado el resultado.  $\square$

## 3.2. Condiciones de existencia de FANL

En esta sección, nos enfocaremos en describir las condiciones que se requieren para garantizar la existencia de funciones aditivas no lineales. Dentro de las condiciones que destacan son la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , la existencia de isomorfismos entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  como grupos abelianos, la existencia de isomorfismos entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos y la existencia de automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$ . Si bien es cierto que las condiciones antes mencionadas son consecuencias del Axioma de Elección no necesariamente son equivalentes, por ejemplo, en la Sección 4.2, se describe un modelo donde existen bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  y no se cumple el Axioma de Elección. Sin embargo, tales condiciones que no llevan necesariamente la fuerza total del Axioma de Elección, son suficientes para la existencia de funciones aditivas no lineales.

### 3.2.1. Existencia de bases para ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$

En esta parte exhibiremos que es suficiente suponer la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  para obtener la existencia de funciones aditivas no lineales, hipótesis que le hemos llamado **BRQ** (Hipótesis 1).

**Teorema 3.11.** *(ZF+BRQ) Existen funciones aditivas no lineales.*

*Demostración.* Sea  $B$  una base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Consideremos  $x \in B$  fijo y la función

$$g : \begin{array}{lll} B & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \\ B \setminus \{x\} \ni y & \mapsto & 0 \end{array}$$

que claramente está bien definida. Por la propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal,  $\psi : {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \rightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} & & \end{array}$$

Si elegimos  $y \in B \setminus \{x\}$ , por un lado tenemos que

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \psi(y) = 0$$

es decir,  $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ . Por otro lado, se tiene que

$$\frac{y}{x}\psi(x) = \frac{y}{x}$$

es decir,  $\frac{y}{x}\psi(x) = \frac{y}{x}$ . Puesto que  $\frac{y}{x} \neq 0$ , concluimos que  $\psi\left(\frac{y}{x}\right) \neq \frac{y}{x}\psi(x)$ , concluyendo así que  $\psi$  es una función aditiva pero no lineal.  $\square$

Si bien podemos notar que la función  $\psi$  definida en el Teorema 3.11 no es isomorfismo de grupos abelianos, pues  $\psi(0) = 0 = \psi(y)$  con  $y \neq 0$ . Ahora, vamos a demostrar que bajo la hipótesis **BRQ**, también podemos construir isomorfismos de grupos abelianos en  $\mathbb{R}$  que no son lineales.

**Teorema 3.12 (ZF+BRQ).** *Existen isomorfismos de grupos abelianos en  $\mathbb{R}$  que no son lineales.*

*Demostración.* Consideremos  $B$  una base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Por el Teorema 3.1, podemos asegurar que  $B$  tiene más de dos elementos distintos. Sean  $x, y \in B$  fijos con  $x \neq y$ . Definamos la función

$$\begin{aligned} f : \quad B &\rightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto y \\ &y \mapsto x \\ B \setminus \{x, y\} \ni z &\mapsto z. \end{aligned}$$

Es claro que  $f$  está bien definida. Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal  $\varphi : {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \rightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} & & \end{array}$$

es decir,  $\varphi|_B = f$ . Es claro que  $\varphi$  es una función aditiva.

Vamos a probar que  $\varphi$  no es lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ . Para probar esto,

obsérvese que como  $x, y \in B$  y  $B$  es linealmente independiente en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , tenemos que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , luego  $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ . Notemos que

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(y) = x$$

y

$$\frac{y}{x}\varphi(x) = \frac{y}{x}y = \frac{y^2}{x}.$$

Ahora bien, si  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\varphi(x)$ , entonces  $x = \frac{y^2}{x}$ , luego  $x^2 = y^2$ , por lo que  $(x - y)(x + y) = 0$ . Por otro lado, dado que  $x \neq y$ ,  $x - y \neq 0$ , lo cual implica que  $x + y = 0$ . En consecuencia,  $\{x, y\}$  es un conjunto linealmente dependiente en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  contenido en  $B$ , de donde  $B$  es linealmente dependiente en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , lo que contradice el hecho de que  $B$  es una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \neq \frac{y}{x}\varphi(x)$ , concluyendo así que  $\varphi$  no es una transformación lineal en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ .

Notemos que por la construcción de  $\varphi$ , se tiene que  $\varphi(B) = B$ , de modo que  $\varphi$  mapea una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  en una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , por consiguiente,  $\varphi$  es un isomorfismo. Por lo tanto,  $\varphi$  satisface la propiedad deseada.  $\square$

De los Teoremas 3.11 y 3.12, podemos concluir que en **ZF**, bajo la hipótesis **BRQ**, hay funciones aditivas no lineales, las cuales pueden ser isomorfismos de grupos abelianos o no.

Dado que en **ZFC** podemos asignar cardinales a los conjuntos, en esta teoría, podemos contabilizar a las funciones aditivas, tanto a las lineales como a las no lineales.

**Teorema 3.13 (ZFC).** *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) *Existen  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$  funciones aditivas lineales.*
- (2) *Existen  $2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}$  funciones aditivas no lineales.*

*Demostración.*

- (1) Para cada  $c \in \mathbb{R}$ , denotemos  $f_c$  como en el Ejemplo 2.3. Por el Teorema 2.8, tenemos que

$$\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f_c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \\ c &\mapsto f_c. \end{aligned}$$

Es claro que  $\sigma$  es una función suprayectiva. Ahora, si  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  y  $c_1 \neq c_2$ , entonces  $f_{c_1}(1) \neq f_{c_2}(1)$ , en consecuencia,  $f_{c_1} \neq f_{c_2}$ , o sea,  $\sigma(c_1) \neq \sigma(c_2)$ . Así,  $\sigma$  es una biyección y consecuentemente

$$|\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

- (2) Consideremos  $B$  una base de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ . Por la Propiedad universal de las bases,  $|\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}^B|$ , además, por el Teorema 3.9, se tiene que  $|B| = \mathfrak{c}$ . Utilizando aritmética cardinal, tenemos que

$$\begin{aligned} |\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})| &= |\mathbb{R}^B| = |\mathbb{R}|^{|B|} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} \\ &= 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}} \end{aligned}$$

es decir,  $|\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$ . Aplicando aritmética cardinal y (1), se tiene que

$$\begin{aligned} 2^{\mathfrak{c}} &= |\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})| = |\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cup (\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \setminus \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}))| \\ &= |\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})| + |\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \setminus \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})| \\ &= \mathfrak{c} + |\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \setminus \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})| \end{aligned}$$

obteniendo así que  $|\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \setminus \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$ , como deseábamos.

De esta manera concluimos la prueba del teorema. □

**Corolario 3.14 (ZF+BRQ).** *Existen funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuya gráfica es densa en  $\mathbb{R}^2$ . Estas funciones pueden ser isomorfismos de grupos abelianos o no.*

*Demostración.* Se sigue de los Teoremas 2.15, 3.11 y 3.12. □

### 3.2.2. Otras condiciones de existencia de FANL

En este apartado vamos a exponer otras condiciones que son suficientes para la existencia de funciones aditivas no lineales.

Anteriormente probamos que la existencia de un isomorfismo entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  como grupos abelianos es consecuencia de asignarle una dimensión a  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , para lo cual es fundamental el Axioma de Elección. También probamos que en **ZF+BRQ**, las bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  son Dedekind-infinitas, a consecuencia de este hecho se estableció que  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos. En el Teorema 3.16, probaremos que en **ZF**, es suficiente suponer que  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  ó  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos para asegurar la existencia de funciones aditivas no lineales. Antes probamos un lema que nos será de ayuda.

**Lema 3.15.** *Sea  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ . Entonces  $f = \bar{0}$ , si y solo si,  $f$  no es inyectiva.*

*Demostración.* Si  $f = \bar{0}$ , es claro que  $f$  no es inyectiva.

Supongamos ahora que  $f$  no es inyectiva, luego existen  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x_1 \neq x_2$  pero  $f(x_1) = f(x_2)$ . Dado que  $f$  es lineal, por el Teorema 2.8, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f = f_c$ , así, tenemos que

$$cx_1 = f_c(x_1) = f_c(x_2) = cx_2$$

por consiguiente  $c(x_1 - x_2) = 0$ , como  $x_1 - x_2 \neq 0$ , se obtiene que  $c = 0$ . Por lo tanto,  $f = \bar{0}$ .  $\square$

Podemos notar que  $\bar{0} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$  y no es suprayectiva.

**Teorema 3.16 (ZF).** *Si  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  ó  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos, entonces existen funciones aditivas no lineales.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  como grupos abelianos. Vamos a construir una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditiva y no lineal. Para esto, consideremos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un isomorfismo de grupos abelianos y consideremos la función

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x + iy &\mapsto x \end{aligned}$$

que claramente está bien definida. Proponemos  $f = h \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Notemos que para  $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} h((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) &= h((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) \\ &= x_1 + x_2 \\ &= h(x_1 + iy_1) + h(x_2 + iy_2) \end{aligned}$$

concluyendo así que  $h$  es un morfismo de grupos. Además, notemos que si  $x \in \mathbb{R}$ , considerando  $z = x + i0$ , se cumple que  $x = h(z)$ , exhibiendo así que  $h$  es una función suprayectiva. Como  $f$  es composición de morfismos suprayectivos de grupos, es un morfismo suprayectivo de grupos, de modo que  $f$  es una función aditiva suprayectiva.

Mostraremos que  $f$  no es una función inyectiva. Notemos que  $h$  no es inyectiva, pues  $h(1) = h(1 + i) = 1$  con  $1 \neq 1 + i$ . Consideremos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq z_2$  tales que  $h(z_1) = h(z_2)$ . Como  $\varphi$  es biyectiva, existen  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_2$  de modo que  $z_1 = \varphi(x_1)$  y  $\varphi(x_2) = z_2$ . Observemos que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= (h \circ \varphi)(x_1) = h(\varphi(x_1)) = h(z_1) = h(z_2) = h(\varphi(x_2)) \\ &= (h \circ \varphi)(x_2) = f(x_2) \end{aligned}$$

es decir,  $f(x_1) = f(x_2)$  con  $x_1 \neq x_2$ . Por consiguiente,  $f$  no es inyectiva. Como  $f$  es una función suprayectiva y no inyectiva, por el Lema 3.15,  $f$  no puede ser lineal. Por lo tanto,  $f$  es una función aditiva no lineal.

Si  $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  como grupos abelianos, entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ . Consideramos la función

$$\begin{aligned} k : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, x) &\mapsto x \end{aligned}$$

y proponemos la función  $g = k \circ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Razonando como en el caso  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ , concluimos que  $g$  es una función aditiva no lineal.  $\square$

Finalmente mostraremos que también es posible construir funciones aditivas no lineales a partir de automorfismos no continuos en los complejos.

**Definición 3.17.** *Sea  $K$  un campo. Un endomorfismo en  $K$  es una función  $f : K \rightarrow K$  tal que*

- (1) Para cada  $a, b \in K$ ,  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ .
- (2)  $f(1) = 1$ .
- (3) Para cada  $a, b \in K$ ,  $f(ab) = f(a)f(b)$ .

Si  $f$  es biyectiva, decimos que  $f$  es un automorfismo en  $K$ .

En el Lema 3.18, mostraremos cuáles son los automorfismos en  $\mathbb{R}$  y los automorfismos continuos en  $\mathbb{C}$ .

**Lema 3.18 (ZF).** *Se cumple lo siguiente:*

- (1) El único automorfismo en  $\mathbb{R}$  es la función identidad.
- (2) Los únicos automorfismos en  $\mathbb{C}$  que fijan a los reales son la identidad y la conjugación compleja.
- (3) Los únicos automorfismos continuos en  $\mathbb{C}$  son la función identidad y la conjugación compleja.

*Demostración.*

- (1) Es claro que la función identidad es un automorfismo en  $\mathbb{R}$ .

Ahora consideremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un automorfismo. Debemos probar que  $f(x) = x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Notemos primero que por (1) de la Definición 3.17,  $f$  es una función aditiva. Por el Lema 2.4, se tiene que  $f(0) = 0$  y  $f(-x) = -f(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Además, por (2) de la Definición 3.17, se cumple que  $f(1) = 1$ .

Mostraremos que  $f(n) = n$  para cada  $n \in \omega$ , lo cual se hará por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$ ,  $f(n) = n$  por lo comentado anteriormente. Ahora, si  $f(n) = n$  para  $n > 1$ , se tiene que

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1$$

es decir,  $f(n + 1) = n + 1$ . Por lo tanto,  $f(n) = n$  para cada  $n \in \omega$ .

Si  $m \in \mathbb{Z}_-$ , entonces  $-m \in \omega$ , luego

$$f(m) = f(-(-m)) = f(-1)f(-m) = (-1)(-m) = m$$

es decir,  $f(m) = m$  cuando  $m \in \mathbb{Z}_-$ . Así,  $f(n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ahora, notemos que si  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , entonces

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{n}n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

es decir,  $nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ , en consecuencia,  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$  para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . De esta manera, si  $q \in \mathbb{Q}$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $q = \frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f(q) &= f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m\frac{1}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) = m\frac{1}{n} \\ &= \frac{m}{n} = q \end{aligned}$$

es decir,  $f(q) = q$ , lo cual sucede para cada  $q \in \mathbb{Q}$ .

Falta ver que  $f(x) = x$  cuando  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Para probar esto, mostraremos primero que  $f$  es estrictamente creciente. En efecto, si  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $x < y$ , entonces  $y - x > 0$ . Por propiedades de los números reales, existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $b > 0$  y  $y - x = b^2$ . Al ser  $f$  automorfismo, se tiene que  $f(y - x) = f(b^2) = f(b)^2$ . Se cumple que  $f(b)^2 \geq 0$ , pero si  $f(b)^2 = 0$ , entonces  $f(y - x) = 0$  con  $y - x \neq 0$ , lo cual es imposible debido a que  $f$  es inyectiva. En consecuencia,  $f(b)^2 > 0$ , o sea,  $f(y - x) > 0$ , pero  $f(y - x) = f(y) - f(x)$ , así que  $f(y) > f(x)$ , o bien,  $f(x) < f(y)$ . Se sigue que  $f$  es estrictamente creciente. Finalmente, si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $f(x) \neq x$ , por tricotomía,  $x < f(x)$  ó  $f(x) < x$ . Si  $x < f(x)$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , se tiene que existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < f(x)$ , entonces  $f(x) < f(r) = r < f(x)$ , es decir,  $f(x) < f(x)$ , lo cual es absurdo. Si  $f(x) < x$ , similarmente  $f(x) < f(x)$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $f(x) = x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

- (2) Es claro que la función identidad y la conjugación compleja son automorfismos que fijan a los reales. Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un automorfismo que fija a los reales, entonces

$$-1 = f(-1) = f(i^2) = f(i)^2$$

es decir,  $f(i)^2 = -1$ , de modo que  $f(i) = -i$  ó  $f(i) = i$ . Así que si  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , entonces

$$f(z) = f(x + yi) = f(x) + f(y)f(i) = x + yf(i)$$

de forma que  $f(z) = x + yi$  ó  $f(z) = x - yi$ , o sea,  $f(z) = z$  ó  $f(z) = \bar{z}$ , lo cual sucede para cada  $z \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto, se concluye lo deseado.

- (3) Es claro que la función identidad y la conjugación compleja son automorfismos continuos.

Consideremos ahora  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un automorfismo continuo. Basta demostrar que  $f$  fija a los reales. Recordemos que si  $x \in \mathbb{R}$ , se puede identificar en  $\mathbb{C}$  como  $x + 0i$ . Mutatis mutandis la prueba de (1), se exhibe que  $f(q) = q$  para cada  $q \in \mathbb{Q}$ . Tomemos ahora  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  arbitrario y fijo. Es suficiente demostrar que  $|f(x) - x| < \epsilon$  para cada  $\epsilon > 0$ . En efecto, consideremos  $\epsilon > 0$ . Como  $f$  es continua en  $x$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\forall z \in \mathbb{C} (|z - x| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon).$$

Luego,  $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2}\} > 0$ , por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $|x - r| < \delta$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &\leq |f(x) - f(r)| + |f(r) - x| \\ &= |f(x) - f(r)| + |r - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

es decir,  $|f(x) - x| < \epsilon$ , lo cual ocurre para cada  $\epsilon > 0$ , por lo tanto,  $f(x) = x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . De (2) se sigue lo deseado.

De esta manera se concluye la prueba del lema.  $\square$

Es conocido que en **ZFC**, se pueden construir automorfismos en  $\mathbb{C}$  que no son continuos. Para más detalles sobre este hecho se remite al lector interesado a [25].

Para concluir esta sección, en el Teorema 3.19, se mostrará que es suficiente asumir los axiomas de **ZF** más la existencia de automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$  para construir funciones aditivas no lineales.

**Teorema 3.19 (ZF).** *Si existen automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$ , existen funciones aditivas no lineales.*

*Demostración.* Sea  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un automorfismo no continuo. Proponemos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \text{Im}(g(x))$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Es claro que  $f$  es una función aditiva. Si  $f$  es lineal, por el Teorema 2.8, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = cx$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Luego, se tiene que

$$c = c \cdot 1 = f(1) = \text{Im}(g(1)) = \text{Im}(1) = 0$$

es decir,  $c = 0$ , así que  $\text{Im}(g(x)) = 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que  $g$  manda reales en reales. Además, de (2) de la Definición 3.17, se tiene que  $g(1) = 1$  y por (1) de la Definición 3.17,  $g$  es aditiva. Aplicando el Lema 2.4, se cumple que  $g(-1) = -g(1) = -1$ , es decir,  $g(-1) = -1$ , en consecuencia,  $-1 = g(-1) = g(i^2) = g(i)^2$ , por consiguiente  $g(i) = i$  ó  $g(i) = -i$ . De esta manera, para  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$g(z) = g(x + yi) = g(x) + g(y)g(i)$$

de modo que  $g(z) = g(x) + g(y)i$  ó  $g(z) = g(x) - g(y)i$ , con  $g(x), g(y) \in \mathbb{R}$ . Esto nos permite concluir que  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Por consiguiente,  $g|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un automorfismo. De (1) del Lema 3.18, se sigue que  $g|_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . Aplicando (2) del Lema 3.18, concluimos que  $g$  es la función identidad o es la conjugación compleja, en consecuencia,  $g$  es un automorfismo continuo, lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $f$  es una función aditiva no lineal.  $\square$

### 3.3. Una aplicación a los Lebesgue-medibles

Para concluir este capítulo, vamos a mostrar una aplicación de las funciones aditivas no lineales al análisis matemático, en particular, a la teoría referente a los conjuntos Lebesgue-medibles.

En el Corolario 2.14, se probó que la linelidad de una función aditiva es equivalente a su integrabilidad (en el sentido de Riemann) en algún intervalo acotado. En el Teorema 3.21, mostraremos algo parecido respecto a la medibilidad de Lebesgue. Antes de probar el Teorema 3.21, probaremos el Lema 3.20, que nos será de ayuda.

**Notación 13.** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Denotamos:

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

**Lema 3.20** (Propiedad de Steinhaus). Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  Lebesgue-medible tal que  $\lambda(E) > 0$ . Se cumple que existe  $\delta > 0$  tal que  $(-\delta, \delta) \subseteq E - E$ .

*Demostración.* Realizaremos la prueba primero para el caso en el que  $\lambda(E) < \infty$ . Por la regularidad interior de la medida de Lebesgue, se tiene que

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ es compacto y } K \subseteq E\}.$$

Puesto que  $\frac{\lambda(E)}{3} > 0$ , existe  $K \subseteq E$ ,  $K$  compacto tal que

$$\lambda(E) - \frac{\lambda(E)}{3} < \lambda(K)$$

esto es

$$\frac{2\lambda(E)}{3} < \lambda(K). \quad (3.2)$$

Luego, se tiene que  $\lambda(K) > 0$ , además  $\frac{4\lambda(K)}{3} - \frac{2\lambda(E)}{3} > 0$ . Por la regularidad exterior de la medida de Lebesgue, se cumple que

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(O) \mid O \text{ es abierto y } E \subseteq O\}$$

de modo que existe  $O \subseteq \mathbb{R}$ ,  $O$  abierto tal que  $E \subseteq O$  y

$$\lambda(O) < \lambda(E) + \frac{4\lambda(K)}{3} - \frac{2\lambda(E)}{3}$$

esto es

$$\lambda(O) < \frac{\lambda(E)}{3} + \frac{4\lambda(K)}{3}. \quad (3.3)$$

De las ecuaciones (3.2) y (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(O) &< \frac{\lambda(E)}{3} + \frac{4\lambda(K)}{3} \\ &< \frac{\lambda(K)}{2} + \frac{4\lambda(K)}{3} \\ &= \frac{11\lambda(K)}{6} \\ &< 2\lambda(K). \end{aligned}$$

De esta manera, hemos probado que existen  $K, O \subseteq \mathbb{R}$ ,  $K$  compacto,  $O$  abierto tales que

$$K \subseteq E \subseteq O \quad (3.4)$$

y

$$\frac{2\lambda(E)}{3} < \lambda(K) \leq \lambda(O) < 2\lambda(K). \quad (3.5)$$

Ahora bien, como  $K \subseteq O$ , se tiene que  $x \in O$  para cada  $x \in K$ . En virtud de que  $O$  es abierto, para cada  $x \in K$ , existe  $\delta_x > 0$  tal que  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq O$ . Así, se sigue que

$$\left\{ \left( x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right) \right\}_{x \in K}$$

es una cubierta abierta de  $K$ . Dado que  $K$  es compacto, existe  $m \in \omega \setminus \{0\}$  tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m \left( x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2}, x_j + \frac{\delta_{x_j}}{2} \right). \quad (3.6)$$

Consideremos

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_j}}{2} \mid j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

y  $U = (-\delta, \delta)$ . La idea es demostrar que  $U \subseteq E - E$ . Para esto, probaremos primero que  $U + K \subseteq O$ . Consideremos  $y \in U + K$ , luego existen  $u \in U$  y  $k \in K$  tales que  $y = u + k$ . Como  $k \in K$ , por la ecuación (3.6), existe  $t \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $k \in \left(x_t - \frac{\delta_{x_t}}{2}, x_t + \frac{\delta_{x_t}}{2}\right)$ . Además, tenemos que  $\delta \leq \frac{\delta_t}{2}$ , así que  $U \subseteq \left(-\frac{\delta_t}{2}, \frac{\delta_t}{2}\right)$ , entonces  $u \in \left(-\frac{\delta_t}{2}, \frac{\delta_t}{2}\right)$ . De esta manera, se tiene que

$$-\frac{\delta_t}{2} < u < \frac{\delta_t}{2} \quad (3.7)$$

y

$$x_t - \frac{\delta_t}{2} < k < x_t + \frac{\delta_t}{2}. \quad (3.8)$$

Sumando las desigualdades (3.7) y (3.8), se obtiene que

$$x_t - \delta_t < u + k < x_t + \delta_t$$

es decir

$$x_t - \delta_t < y < x_t + \delta_t$$

concluyendo que  $y \in (x_t - \delta_t, x_t + \delta_t)$ . Se sigue que

$$U + K \subseteq \bigcup_{j=1}^m (x_t - \delta_t, x_t + \delta_t) \subseteq O$$

es decir,  $U + K \subseteq O$ .

Ahora, vamos a demostrar que  $U \subseteq K - K$ . Consideremos  $u \in U$ , observemos primero que  $K \subseteq O$  y  $u + K \subseteq U + K \subseteq O$ , es decir,  $u + K \subseteq O$ , en consecuencia,

$$(u + K) \cup K \subseteq O. \quad (3.9)$$

Supongamos que  $(u + K) \cap K = \emptyset$ . Por un lado, de la aditividad y la invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue, se tiene que

$$\lambda((u + K) \cup K) = \lambda(u + K) + \lambda(K) = \lambda(K) + \lambda(K) = 2\lambda(K)$$

es decir,  $\lambda((u+K) \cup K) = 2\lambda(K)$ . Por otro lado, de las ecuaciones (3.5) y (3.9), se tiene que

$$2\lambda(K) = \lambda((u+K) \cup K) \leq \lambda(O) < 2\lambda(K)$$

es decir,  $2\lambda(K) < 2\lambda(K)$ , lo cual es absurdo. Por consiguiente,  $(u+K) \cap K \neq \emptyset$ , de modo que existen  $k_1, k_2 \in K$  tales que  $k_1 = u + k_2$ , obteniendo que  $u = k_1 - k_2 \in K - K$ , es decir,  $u \in K - K$ . En consecuencia, se establece que  $U \subseteq K - K$ , además, dado que  $K \subseteq E$ , se cumple que  $K - K \subseteq E - E$ , de manera que  $U \subseteq E - E$ .

Finalmente, si  $\lambda(E) = \infty$ , como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$$

se tiene que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap [-n, n]).$$

Es fácil ver que  $(E \cap [-n, n])_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de conjuntos, por la Proposición 1.76, se tiene que

$$\infty = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap [-n, n])\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E \cap [-n, n]).$$

Por consiguiente, existe  $n_0 \in \omega \setminus \{0\}$  tal que

$$0 < \lambda(E \cap [-n_0, n_0]) \leq 2n_0 < \infty.$$

Denotemos  $A = E \cap [-n_0, n_0]$ , como  $0 < \lambda(A) < \infty$ , usando el caso anterior, existe  $\delta > 0$  tal que

$$(-\delta, \delta) \subseteq A - A \subseteq E - E$$

es decir,  $(-\delta, \delta) \subseteq E - E$ . Por lo tanto, queda probado el lema.  $\square$

**Teorema 3.21.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $f$  es lineal.

(2)  $f$  es Lebesgue-medible.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $f$  es lineal. Por el Teorema 2.9,  $f$  es continua, por consiguiente,  $f$  es Lebesgue-medible.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Supongamos que  $f$  es Lebesgue-medible. Vamos a demostrar que  $f$  es acotada en algún intervalo acotado. Consideremos para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , el conjunto

$$A_n = f^{-1}([-n, n]) = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq n\}.$$

Como  $f$  es Lebesgue-medible, se cumple que  $A_n$  es Lebesgue-medible, para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . Mostraremos que  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de conjuntos. Para esto, consideremos  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . Si  $x \in A_n$ , entonces  $|f(x)| \leq n$ , dado que  $n < n + 1$ , por transitividad se tiene que  $|f(x)| \leq n + 1$ , es decir,  $x \in A_{n+1}$ . Así,  $A_n \subseteq A_{n+1}$ . Por tanto,  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de conjuntos.

Ahora mostraremos que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Es claro que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{R}$ . Para probar la otra contención, notemos que si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $|f(x)| \in \mathbb{R}$ . Por la Propiedad Arquimadiana, existe  $N \in \omega$  tal que  $|f(x)| < N$ . Podemos suponer que  $N \neq 0$ , así que  $x \in A_N$ . Luego,  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , concluyendo que  $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . De ambas contenciones se obtiene que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ahora bien, por la Proposición 1.76, se tiene que

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

En virtud de que  $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ , existe  $m \in \omega \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda(A_m) > 0$ . Por el Lema 3.20, existe  $\delta > 0$  tal que  $(-\delta, \delta) \subseteq A_m - A_m$ . Proponemos  $I = [-\delta, \delta]$  y  $K = \max\{|f(\delta)|, 2m\} > 0$ . Vamos a probar que  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in I$ . Para esto, notemos que

$|f(\delta)| \leq K$ . Ahora, como  $f$  es aditiva, por el Lema 2.4, se tiene que

$$|f(-\delta)| = |-f(\delta)| = |f(\delta)| \leq K$$

es decir,  $|f(-\delta)| \leq K$ . Así, tenemos probada la desigualdad propuesta para los extremos de  $I$ . Ahora bien, si  $x \in (-\delta, \delta)$ , como  $(-\delta, \delta) \subseteq A_m - A_m$ , se tiene que  $x \in A_m - A_m$ , en consecuencia, existen  $a, b \in A_m$  tales que  $x = a - b$ . De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(a - b)| = |f(a) - f(b)| \leq |f(a)| + |f(b)| \\ &\leq m + m = 2m \leq K \end{aligned}$$

es decir,  $|f(x)| \leq K$ , cuando  $x \in (-\delta, \delta)$ . De este modo, tenemos probado que  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in I$ . Aplicando el Teorema 2.19, se tiene que  $f$  es lineal.  $\square$

Finalmente, en el Corolario 3.22, se prueba que la existencia de funciones aditivas no lineales implica la existencia de subconjuntos de los reales que no son Lebesgue-medibles.

**Corolario 3.22.** (*ZF*) *Si existen funciones aditivas no lineales, entonces existen subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles.*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función aditiva no lineal. Por el Teorema 3.21,  $f$  no es Lebesgue-medible, entonces existe  $A \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $A$  es abierto y  $f^{-1}(A)$  no es Lebesgue-medible. Así,  $E = f^{-1}(A)$  es el conjunto buscado.  $\square$

En la mayor parte de la literatura, por ejemplo en [8, Ejemplo 8.18, pág. 189], se prueba en **ZFC** la existencia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  no Lebesgue-medibles construyendo los “Conjuntos de Vitali”. Sin embargo, mediante el Corolario 3.22, esta prueba se puede simplificar. Esto lo presentamos en el Corolario 3.23.

**Corolario 3.23.** *En ZFC, existen subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles.*

*Demostración.* Por el Teorema 3.11, en **ZFC**, existen funciones aditivas no lineales. Por el Corolario 3.22, existen subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles.  $\square$

## Capítulo 4

# ¿Existencia de FANL implica AC?

En este capítulo, se dará un argumento que responde si se cumple o no, que en **ZF**, la existencia de funciones aditivas no lineales implica el AC. Se expondrá brevemente material relacionado a tópicos avanzados de teoría de conjuntos y forcing. Finalmente se describirá de manera general el modelo construido en [22], donde existen bases de  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  pero no existe una buena ordenación para los reales, por consiguiente, en virtud del Teorema 1.21, falla el AC, además, por el Teorema 3.11, en este modelo existen funciones aditivas no lineales, obteniendo así una respuesta negativa a la implicación planteada. Cabe mencionar que en muchos resultados que se expondrán en este capítulo se omitirán sus demostraciones, ya que el material que se requiere para realizarlas se escapa de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, en todo el material que se exponga se proporcionarán algunas referencias donde el lector más interesado puede profundizar en el tema.

### 4.1. Tópicos avanzados de lógica y conjuntos

En este apartado expondremos de manera general los conceptos que se utilizan para describir el modelo de la Sección 6.2.

### 4.1.1. Modelos de la teoría de conjuntos

En este apartado nos enfocaremos a exponer los conceptos básicos referentes a los modelos de la teoría de conjuntos que consideramos que son necesarios para el modelo que se describe en la Sección 6.2.

#### Conceptos básicos de la teoría de modelos

La lógica de predicados se diseñó con el objetivo de construir teorías axiomáticas formales. Empezaremos por definir un lenguaje para la lógica de predicados.

**Definición 4.1.** *Un lenguaje para la lógica de predicados se describe de la siguiente manera:*

- (1) *Consiste de un conjunto  $\mathcal{L}$ , compuesto de símbolos no lógicos, el cuál está particionado en dos conjuntos ajenos, a saber,  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{P}$ .*
- (2) *Los elementos de  $\mathcal{F}$  se denominan símbolos funcionales y los de  $\mathcal{P}$  se denominan símbolos predicativos.*
- (3) *Los conjuntos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{P}$  están particionados por aridad, esto es:*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$$

y

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$$

con  $\mathcal{F}_m \cap \mathcal{F}_n = \emptyset$  y  $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_n = \emptyset$ , si  $m \neq n$ , para cada  $m, n \in \omega$ .

- (4) *Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , los símbolos de  $\mathcal{F}_n$  son llamados símbolos funcionales  $n$ -arios y los símbolos de  $\mathcal{P}_n$  son llamados símbolos predicativos  $n$ -arios.*
- (5) *Los símbolos de  $\mathcal{F}_0$  son llamados constantes y los de  $\mathcal{P}_0$  son llamados letras proposicionales.*

Una manera práctica de interpretar los símbolos predicativos y funcionales es la siguiente. Si  $A$  es un conjunto no vacío,  $n \in \omega \setminus \{0\}$  y  $R \subseteq A^n$ , entonces  $R$  es un símbolo predicativo  $n$ -ario. Si  $f : X \rightarrow A$  es una función y  $X \subseteq A^n$ , entonces  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario.

Para los modelos de la teoría de conjuntos que utilizaremos en este trabajo, se tiene que  $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2 = \{\in\}$ .

Una vez que tenemos definido nuestro lenguaje necesitamos una estructura que les de sentido a nuestras fórmulas del lenguaje.

**Definición 4.2.** *Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje para la lógica de predicados. Una estructura para  $\mathcal{L}$ , también llamada  $\mathcal{L}$ -estructura, es una pareja  $\mathfrak{A} = (A, I)$ , donde  $A$  es un conjunto no vacío llamado el universo de  $\mathfrak{A}$  e  $I$  es una función  $I : \mathcal{L} \rightarrow I(\mathcal{L})$  que satisface:*

1. Si  $c \in \mathcal{F}_0$ , entonces  $I(c) \in A$ .
2. Si  $p \in \mathcal{P}_0$ , entonces  $I(p) \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$ .
3. Si  $n \in \omega \setminus \{0\}$  y  $f \in \mathcal{F}_n$ , entonces  $I(f) : A^n \rightarrow A$ .
4. Si  $n \in \omega \setminus \{0\}$  y  $p \in \mathcal{P}_n$ , entonces  $I(p) \subseteq A^n$ .

**Notación 14.** *Si  $\mathfrak{A}$  es una  $\mathcal{L}$ -estructura, para cada  $s \in \mathcal{L}$  denotamos por  $I(s) = s_{\mathfrak{A}}$ .*

*En lo sucesivo, denotaremos por  $\mathfrak{A}$  a la  $\mathcal{L}$ -estructura y por  $A$  a su universo.*

Para trabajar con fórmulas con variables libres, se requiere del siguiente concepto.

**Definición 4.3.** *Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje de la lógica de predicados y  $\mathfrak{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura.*

- (1) *Si  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula con todas sus variables libres exhibidas. Una asignación de  $\varphi$  en  $A$  es una función  $\sigma$  tal que  $Im(\sigma) \subseteq A$  y  $dom(\sigma)$  es un conjunto finito de variables tal que  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq dom(\sigma)$ .*
- (2) *Un término  $t$  en  $\mathcal{L}$  se construye a partir de símbolos constantes, variables y símbolos funcionales en  $\mathcal{L}$ .*

Ahora, definimos la valuación de una asignación.

**Definición 4.4.** Sean  $\mathfrak{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura,  $t$  un término en  $\mathcal{L}$  y  $\sigma$  una asignación para  $t$  en  $A$ . Definimos la valuación de sigma para  $t$  en  $\mathfrak{A}$ , denotada por  $val_{\mathfrak{A}}(t)[\sigma]$  como sigue:

(1) Si  $x \in dom(\sigma)$ ,  $val_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$ .

(2) Si  $c \in \mathcal{F}_0$ , entonces  $val_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c$ .

(3) Si  $n \in \omega \setminus \{0\}$  y  $f \in \mathcal{F}_n$ , entonces

$$val_{\mathfrak{A}}(f(t_1, \dots, t_n))[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(val_{\mathfrak{A}}(t_1)[\sigma], \dots, val_{\mathfrak{A}}(t_n)[\sigma]).$$

Ahora, estamos en condiciones de definir el valor de verdad para las fórmulas atómicas.

**Definición 4.5.** Sean  $\mathfrak{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura,  $\varphi$  una fórmula atómica de  $\mathcal{L}$  y  $\sigma$  una asignación para  $\varphi$  en  $A$ . Definimos el valor de verdad para  $\varphi$  en  $A$  como sigue:

(1) Si  $p \in \mathcal{P}_0$ ,  $val_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$ .

(2) Si  $n \in \omega \setminus \{0\}$  y  $p \in \mathcal{P}_n$ , entonces  $val_{\mathfrak{A}}(p(t_1, \dots, t_n))[\sigma] = 1$ , si  $(val_{\mathfrak{A}}(t_1)[\sigma], \dots, val_{\mathfrak{A}}(t_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ .

(3)  $val_{\mathfrak{A}}(t_1 = t_2)[\sigma] = 1$ , si  $val_{\mathfrak{A}}(t_1)[\sigma] = val_{\mathfrak{A}}(t_2)[\sigma]$ .

Ahora, necesitamos una manera definir los valores de verdad para fórmulas no atómicas. Para esto necesitamos establecer la siguiente notación.

**Notación 15.** Sea  $\varphi$  una fórmula en  $\mathcal{L}$ ,  $\sigma$  una asignación en  $A$ ,  $y \in Dom(\sigma)$  y  $a \in A$ . Denotamos

$$\sigma(y/a) = \sigma|_{Dom(\sigma) \setminus \{y\}} \cup \{(y, a)\}.$$

Ahora sí estamos en condiciones de definir los valores de verdad para fórmulas no atómicas.

**Definición 4.6.** Sean  $\mathfrak{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura,  $\varphi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$  y  $\sigma$  una asignación para  $\varphi$  en  $A$ . Definimos:

(1)  $val_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ .

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 85

- (2) Si  $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ , entonces  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi \star \psi)[\sigma]$  se obtiene de  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$  y  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ , utilizando las reglas usuales de la lógica proposicional para  $\wedge, \vee, \Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$ .
- (3)  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\exists x\varphi)[\sigma] = 1$ , si existe  $a \in A$  tal que  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma(x/a)] = 1$ .
- (4)  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi)[\sigma] = 1$ , si para cada  $a \in A$ ,  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma(x/a)] = 1$ .

Cuando  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = 1$ , se denota  $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ . Si  $\varphi$  es una sentencia de  $\mathcal{L}$ , denotamos  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$  para indicar  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$  y  $\mathfrak{A} \models \varphi$  para indicar  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$ . Finalmente, si  $\Gamma$  es un conjunto de sentencias en  $\mathcal{L}$ , entonces denotamos  $\mathfrak{A} \models \Gamma$  para indicar que  $\mathfrak{A} \models \varphi$  para cada  $\varphi \in \Gamma$ .

**Notación 16.** Sea  $\mathfrak{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura y  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula en  $\mathcal{L}$  con todas sus variables libres exhibidas,  $a_1, \dots, a_n$  y  $\sigma = \{(x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)\}$ . Denotamos  $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$  por cualquiera de las siguientes expresiones:

- $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .
- $(\varphi(x_1, \dots, x_n))^{\mathfrak{A}}$ .
- $(\varphi(x_1, \dots, x_n))^A$ .

Ahora estamos en condiciones de definir los conceptos de estructura y subestructura elemental.

**Definición 4.7.** Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras.

- (1) Decimos que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura de  $\mathfrak{B}$ , lo cual se denota por  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  si se cumple lo siguiente:

- (a)  $A \subseteq B$ .
- (b) Si  $c$  es un símbolo constante, entonces  $c_{\mathfrak{A}} = c_{\mathfrak{B}}$ .
- (c) Si  $p$  es una letra proposicional, entonces  $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}}$ .
- (d) Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , si  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario, entonces  $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}|A^n}$ .
- (e) Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , si  $p$  es un símbolo predicativo  $n$ -ario, entonces  $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \cap A^n$ .

En este caso también se dice que  $\mathfrak{B}$  es una extensión de  $\mathfrak{A}$ .

- (2) Si  $\varphi$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$ , escribimos  $A \preceq_{\varphi} B$ , si para cada asignación  $\sigma$  de  $\varphi$  en  $A$ ,  $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$  si y solo si  $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$ .
- (3) Se dice que  $\mathfrak{A}$  es un submodelo elemental de  $\mathfrak{B}$ , lo cual se denota por  $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ , si  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$  para cada fórmula  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ .

La siguiente proposición se obtiene de aplicar las definiciones dadas anteriormente.

**Proposición 4.8.** Sean  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras tales que  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ,  $\varphi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Se cumple lo siguiente:

- Si  $\varphi$  está libre de cuantificadores, entonces  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ .
- Si  $t$  es un término de  $\mathcal{L}$  y  $\sigma$  es una asignación para  $t$  en  $A$ , entonces  $\text{val}_{\mathfrak{A}}(t)[\sigma] = \text{val}_{\mathfrak{B}}(t)[\sigma]$ .

## Modelos de la teoría de conjuntos

Una vez que hemos dado los conceptos elementales de la teoría de modelos, nos enfocaremos en dar los conceptos que consideramos necesarios referentes a la teoría de conjuntos.

**Definición 4.9.** El lenguaje de la teoría de conjuntos es  $\mathcal{L}_{\in} = P_2 = \{\in\}$ . Un modelo de la teoría de conjuntos es una estructura de la forma  $\mathfrak{M} = (M, E)$ , donde

$$E = \{(a, b) \in M \times M \mid a \in b\}.$$

Cuando  $M$  es transitivo, se dice que  $\mathfrak{M}$  es un modelo transitivo de la teoría de conjuntos.

A continuación, daremos la definición de fórmulas  $\Delta_0$ , las cuales son muy importantes dentro de los modelos de la teoría de conjuntos.

**Definición 4.10.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje que contiene al símbolo  $\in$  y posiblemente a otros símbolos. Las fórmulas  $\Delta_0$  de  $\mathcal{L}$  son las fórmulas de  $\mathcal{L}$  construidas a través de las siguientes reglas:

- (1) Las fórmulas atómicas son  $\Delta_0$ .

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 87

- (2) Si  $\varphi$  y  $\psi$  son fórmulas  $\Delta_0$ , entonces  $\neg\varphi$ ,  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\varphi \vee \psi$ ,  $\varphi \Rightarrow \psi$  y  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  son fórmulas  $\Delta_0$ .
- (3) Si  $\varphi$  una fórmula  $\Delta_0$ ,  $x$  es una variable y  $t$  es un término que no contiene a  $x$ , entonces  $\forall x(x \in t \Rightarrow \varphi)$  y  $\exists x(x \in T \wedge \varphi)$  son fórmulas  $\Delta_0$ .

**Notación 17.** Si  $\varphi$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$ , y es una variable y  $t$  es un término de  $\mathcal{L}$  que no contiene a  $y$ , denotamos

$$\begin{aligned}\forall x(x \in t \Rightarrow \varphi) &\equiv \forall x \in t\varphi \\ \exists x(x \in t \wedge \varphi) &\equiv \exists x \in t\varphi.\end{aligned}$$

El siguiente teorema nos da la razón de la importancia de las fórmulas  $\Delta_0$ .

**Teorema 4.11.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje que contiene a  $\in$  y posiblemente a otros símbolos. Sean  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras tales que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura de  $\mathfrak{B}$  y  $A$  es transitivo. Para cada fórmula  $\Delta_0$  de  $\mathcal{L}$ , se tiene que  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ .

*Demostración.* Realizaremos la prueba por inducción sobre el orden de construcción de  $\varphi$ . Si  $\varphi$  es una fórmula atómica, por la Proposición 4.8, se tiene que  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ .

Ahora, sea  $\varphi$  una fórmula  $\Delta_0$  y supongamos que  $\mathfrak{A} \preceq_{\gamma} \mathfrak{B}$  para todas las fórmulas  $\gamma$  de orden de construcción menor que el de  $\varphi$ . El argumento es sencillo cuando  $\varphi \equiv \neg\gamma$  ó  $\varphi \equiv \gamma \star \psi$ , con  $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ,  $\gamma$  y  $\psi$  fórmulas  $\Delta_0$  de  $\mathcal{L}$ . Vamos mostrar que el resultado se cumple cuando

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y(y \in t(x, x_1, \dots, x_n) \wedge \psi(x, y, x_1, \dots, x_n))$$

donde  $\psi$  es una fórmula  $\Delta_0$ . Por hipótesis de inducción,  $\mathfrak{A} \preceq_{\psi} \mathfrak{B}$ . Por simplicidad de notación, denotemos

$$t_{a, a_1, \dots, a_n} = \text{val}_{\mathfrak{A}}(t)[a, a_1, \dots, a_n] = \text{val}_{\mathfrak{B}}(t)[a, a_1, \dots, a_n]$$

para  $a, a_1, \dots, a_n \in A$ . Sean  $a, a_1, \dots, a_n \in A$  arbitrarios y fijos. Usando la hipótesis de inducción, la transitividad de  $A$  y el hecho de que  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}A \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n) &\Leftrightarrow \exists b(b \in t_{a, a_1, \dots, a_n} \wedge A \models \psi(a, b, a_1, \dots, a_n)) \\ &\Leftrightarrow \exists b(b \in t_{a, a_1, \dots, a_n} \wedge B \models \psi(a, b, a_1, \dots, a_n)) \\ &\Leftrightarrow B \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

es decir,  $A \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow B \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$ .

Finalmente, notemos que si

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \equiv \forall y(y \in t(x, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \psi(x, y, x_1, \dots, x_n))$$

entonces

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \equiv \neg \exists y(y \in t(x, x_1, \dots, x_n) \wedge \neg \psi(x, y, x_1, \dots, x_n))$$

lo cual se reduce al caso anterior. Por lo tanto,  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$  para cada fórmula  $\varphi$  que es  $\Delta_0$ .  $\square$

**Observación 4.12.** *Notemos que*

$$x \subseteq y \equiv \forall z \in x(z \in y).$$

$$x = \emptyset \equiv \forall y \in x(y \neq y).$$

$$y = S(x) \equiv x \in y \wedge x \subseteq y \wedge \forall z \in y(z \in x \vee z = x).$$

$$z = x \cap y \equiv z \subseteq x \wedge z \subseteq y \wedge \forall w \in x(\forall w \in y(w \in z))$$

$$.y = \{x\} \equiv x \in y \wedge \forall z \in y(z = x).$$

*En consecuencia, todos los conceptos arriba mencionados se pueden escribir como fórmulas  $\Delta_0$  de la teoría de conjuntos.*

La afirmación  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$  se puede redefinir utilizando el concepto de absolutiz, lo cual se plantea en la siguiente definición.

**Definición 4.13.** *Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje que contiene a  $\in$  y posiblemente a otros símbolos,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras y  $\varphi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ .*

- (1) *Decimos que  $\varphi$  es absoluta  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$  si  $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ .*
- (2) *Decimos que  $\varphi$  es absoluta para  $A$  si  $A \preceq_{\varphi} \mathbf{V}$ , donde  $\mathbf{V}$  es la clase de todos los conjuntos.*

**Observación 4.14.** *En términos de la definición anterior, utilizando el Teorema 4.11, si  $M \subseteq \mathbf{V}$  es transitiva, entonces  $\varphi$  es absoluta para  $M$  siempre que  $\varphi$  sea una fórmula  $\Delta_0$ .*

Ahora, se proporciona el concepto de interpretación relativa que abre la posibilidad de que el universo de alguna estructura pueda ser una clase propia.

**Definición 4.15.** Sean  $\Gamma$  un conjunto de axiomas en el lenguaje  $\{\in\}$  y  $\mathcal{L}$  un lenguaje finito. Diremos que  $\mathfrak{A}$  es una interpretación relativa de  $\mathcal{L}$  en  $\Gamma$  si  $\mathfrak{A}$  consiste de una clase no vacía  $A$  y una asignación de entidades semánticas  $s^{\mathfrak{A}}$  para cada símbolo  $s$  de  $\mathcal{L}$ . En otras palabras

- (1) Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , si  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario, entonces  $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ .
- (2) Para cada  $n \in \omega \setminus \{0\}$ , si  $p$  es un símbolo predicativo  $n$ -ario, entonces  $p^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ .
- (3) Si  $c$  es un símbolo funcional 0-ario, entonces  $c^{\mathfrak{A}} \in A$ .
- (4) Si  $p$  es un símbolo predicativo 0-ario, entonces  $p^{\mathfrak{A}} \in \{0, 1\} = \{V, F\}$ .

**Definición 4.16.** Sean  $\mathfrak{A}$  una interpretación relativa,  $t$  un término de  $\mathcal{L}$  y  $\varphi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Entonces,  $t^{\mathfrak{A}}$  y  $\varphi^{\mathfrak{A}}$  son el término y la fórmula, respectivamente, que se obtienen reemplazando los diversos símbolos ( $f, p, c$ ) de  $\mathcal{L}$  por sus formas relativizadas ( $f^{\mathfrak{A}}, p^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$ ). Además, relativizando todos los cuantificadores en  $A$ , es decir, reemplazando  $\forall x$  por  $\forall x \in A$  y  $\exists x$  por  $\exists x \in A$ .

A continuación, definimos la relativización de fórmulas de la teoría de conjuntos, lo cual se hace por recursión sobre la construcción de nuestras fórmulas.

**Definición 4.17.** Sea  $M$  una clase y  $\phi$  una fórmula de la teoría de conjuntos. Definimos la relativización de  $\phi$  a  $M$ , denotada por  $\phi^M$ , de la siguiente manera:

- (1)  $(x = y)^M \equiv x = y$ .
- (2)  $(x \in y)^M \equiv x \in y$ .
- (3)  $(\phi \wedge \psi)^M \equiv \phi^M \wedge \psi^M$ .
- (4)  $(\neg \phi)^M \equiv \neg \phi^M$ .
- (5)  $(\exists x \phi)^M \equiv \exists x(x \in M \wedge \phi^M) \equiv \exists x \in M \phi^M$ .

**Observación 4.18.** *Es importante tener presente que estrictamente no podemos hablar de clases. Entonces, al ser  $M$  una clase en realidad  $M$  es una fórmula, digamos  $M(v)$ . Al ser  $\phi$  también una fórmula, al hacer la relativización, en realidad estamos definiendo una tercera fórmula en la metateoría, a saber  $\phi^M$ . Por ejemplo, en el caso de la fórmula existencial (5) de la Definición 4.17, en realidad deberíamos escribir  $\exists x(M(x) \wedge \phi^M)$ . Sin embargo, por cuestiones prácticas es conveniente utilizar esos abusos de notación.*

En el siguiente teorema establecemos las condiciones que debe cumplir una clase transitiva para satisfacer los axiomas de **ZFC**.

**Teorema 4.19.** *Sea  $M$  una clase transitiva. Entonces:*

- (1)  $M$  es un modelo del axioma de extensión.
- (2)  $M$  es un modelo del axioma de fundación.
- (3) Si  $\omega \in M$ ,  $M$  es un modelo del axioma del infinito.
- (4) Si para cada  $a, b \in M$ , se cumple que  $\{a, b\} \in M$ , entonces  $M$  es un modelo del axioma del par.
- (5) Si para cada  $a \in M$ , se cumple que  $\bigcup a \in M$ , entonces  $M$  es modelo del axioma de la unión.
- (6) Si para cada  $z \in M$ , se cumple que  $y \in M$  para cada  $y \subseteq z$ , entonces  $M$  es un modelo del axioma de comprensión.
- (7) Si para cada función  $f$ , se tiene que  $\text{dom}(f) \in M$  y

$$\text{Im}(f) \subseteq M \text{ implica } \text{Im}(f) \in M$$

entonces  $M$  es modelo del axioma de reemplazo.

- (8) Si para cada  $x \in M$ ,  $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$ , entonces  $M$  modelo del axioma del conjunto potencia.
- (9) Si para cada familia de conjuntos  $\mathcal{A}$  tal que:
  - $\mathcal{A} \in M$ .
  - $\mathcal{A} \neq \emptyset$  y  $\emptyset \notin \mathcal{A}$ .

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 91

- $\mathcal{A}$  es ajena por pares

existe  $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{B} \cap A$  es un conjunto unitario para cada  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $M$  es modelo del axioma de elección.

*Demostración.*

- (1) El axioma de extensión relativizado a  $M$  es

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$

Para probar esto, sean  $a, b \in M$  y supongamos que para cada  $c \in M$ ,  $c \in a$  si y solo si  $c \in b$ . Vamos a demostrar que  $a = b$ . Primero tomemos  $u \in a$ , como  $a \in M$  y  $M$  es transitivo, entonces  $a \subseteq M$ , por tanto  $u \in M$ . Como  $u \in M$  y  $u \in a$ , por hipótesis,  $u \in b$ . Por lo tanto,  $a \subseteq b$ . Similarmente se demuestra que  $b \subseteq a$ . Por lo tanto,  $a = b$ . De esta manera se establece el axioma de extensión en  $M$ .

- (2) El axioma de fundación relativizado a  $M$  es

$$\forall x \in M (\exists y \in M (y \in x) \Rightarrow \exists y \in M (y \in x \wedge \neg \exists z \in M (z \in x \wedge z \in y))).$$

Para probarlo, sea  $a \in M$  tal que  $a \cap M \neq \emptyset$ . Por el axioma de fundación en  $\mathbf{V}$ , existe  $b \in a$  tal que  $b \cap a = \emptyset$ . Ahora, como  $a \in M$  y  $M$  es transitivo, entonces  $a \subseteq M$  y dado que  $b \in a$ , se tiene que  $b \in M$ . Así,  $b \in M$  y es tal que  $a \cap b = \emptyset$ . Por lo tanto,  $M$  satisface el axioma de fundación.

- (3) El axioma del infinito relativizado a  $M$  es:

$$\exists x \in M \phi(x)$$

donde

$$\phi(x) \equiv \emptyset \in x \wedge (\forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)).$$

Para probarlo, notemos que, como  $M$  es transitivo y las nociones  $\emptyset$  y  $x \cup \{x\}$  se pueden expresar mediante fórmulas  $\Delta_0$ , entonces son nociones absolutas en  $M$ . En virtud de que  $\omega \in M$  y  $\phi(\omega)$ , se concluye lo deseado.

- (4) El axioma del par relativizado a
- $M$
- es:

$$\forall x \in M \forall y \in M \exists z \in M z = \{x, y\}.$$

Para probar esto, primero observemos que  $z = \{x, y\}$  se puede escribir como

$$x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z (u = x \vee u = y).$$

En consecuencia,  $\{x, y\}$  es absoluta por poder ser escrito como una fórmula  $\Delta_0$ . Ahora, si  $a, b \in M$ , por hipótesis  $c = \{a, b\} \in M$ , de modo que  $c$  es el conjunto buscado.

- (5) El axioma de la unión relativizado a
- $M$
- es

$$\forall x \in M \exists y \in M y = \bigcup x.$$

Para probarlo, notemos primero que  $y = \bigcup x$  se puede escribir como

$$(\forall u \in x (u \subseteq y)) \wedge (\forall z \in y \exists w \in x (z \in w)).$$

En consecuencia, la noción  $\bigcup x$  se puede escribir como una fórmula  $\Delta_0$  y por tanto es absoluta en  $M$ . Por hipótesis, si  $a \in M$ , se tiene que  $\bigcup a \in M$ , concluyendo así la veracidad del axioma de la unión en  $M$ .

- (6) Consideremos una fórmula de la teoría de conjuntos

$$\phi(x, y, v_1, \dots, v_n)$$

con todas sus variables libres exhibidas. El axioma esquema de comprensión para  $\phi$  relativizado a  $M$  es

$$\forall y \in M \forall x_1 \in M \dots \forall x_n \in M \exists u \in M \forall x \in M \\ (x \in u \Leftrightarrow x \in y \wedge \phi^M(x, y, x_1, \dots, x_n)).$$

Consideremos  $a, b_1, \dots, b_n \in M$  arbitrarios y fijos. Por el axioma esquema de comprensión en  $\mathbf{V}$ , existe el conjunto

$$c = \{b \in a \mid \phi^M(a, b, b_1, \dots, b_n)\}.$$

Ahora bien, tenemos que  $c \subseteq a$ , por hipótesis se cumple que  $c \in M$ , obteniendo así que  $c$  cumple lo deseado.

- (7) Sea  $\phi(x, y, x_1, \dots, x_n)$  una fórmula de la teoría de conjuntos con todas sus variables libres exhibidas. El axioma esquema de reemplazo correspondiente a  $\phi$  relativizado a  $M$  está dado por

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \in M \dots \forall x_n \in M (\forall x \in M \exists y' \in M \forall y \in M (y = y' \\ & \Leftrightarrow \phi^M(x, y, x_1, \dots, x_n))) \Rightarrow \forall u \in M \exists w \in M \forall y \in M \\ & (y \in w \Leftrightarrow \exists x \in M (x \in u \wedge \phi^M(x, y, x_1, \dots, x_n))). \end{aligned}$$

Vamos a probar su veracidad. Sean  $m_1, \dots, m_n \in M$ ,  $a \in M$  tal que para cada  $x \in a$  existe un único  $y \in M$  tal que  $\phi^M(x, y, m_1, \dots, m_n)$ . Consideremos la fórmula

$$\psi(x, y, x_1, \dots, x_n) \equiv y \in M \wedge \phi^M(x, y, x_1, \dots, x_n).$$

Por el Axioma de Reemplazo en  $\mathbf{V}$  aplicado a  $a$ , existe un conjunto  $c$  tal que para cada  $x \in a$ , existe  $y \in c$  tal que  $\psi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ . Así, tenemos una función  $f : a \rightarrow Im(f)$  tal que para cada  $x \in a$ ,  $f(x) = y$  si y solo si  $y \in M$  y  $\phi^M(x, y, x_1, \dots, x_n)$ . Si hacemos  $b = Im(f)$ , dado que  $b \subseteq M$ , por hipótesis,  $b \in M$ . De esta manera,  $b$  es el conjunto que satisface la tesis del axioma de reemplazo relativizado a  $M$ .

- (8) El axioma del conjunto potencia relativizado a  $M$  es

$$\forall x \in M \exists y \in M (y = \mathcal{P}(x)).$$

Para probar esto, primero observemos que  $y = \mathcal{P}(x)$  se puede escribir mediante la fórmula

$$\forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

de modo que la sentencia  $y = \mathcal{P}(x)$  se puede escribir mediante una fórmula  $\Delta_0$ , al ser  $M$  transitivo, se tiene que la noción  $y = \mathcal{P}(x)$  es una noción absoluta en  $M$ . Ahora bien, sea  $a \in M$ , por el axioma del conjunto potencia en  $\mathcal{V}$ , se tiene que existe  $\mathcal{P}(a)$ . Por hipótesis,  $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ , haciendo  $b = \mathcal{P}(a) \cap M$  se cumple lo deseado.

(9) El axioma de elección relativizado a  $M$  es

$$\begin{aligned} & \forall x \in M (\forall y \in M (y \in x \Rightarrow y \neq \emptyset)) \wedge \forall y \in M \forall y' \in M \\ & (y \in x \wedge y' \in x \wedge y \neq y' \Rightarrow y \cap y' = \emptyset) \Rightarrow \exists z \in M \forall y \in M \\ & (y \in x \Rightarrow \exists u \in M \forall u' \in M (u' = u \Leftrightarrow u' \in z \cap y)). \end{aligned}$$

Para probar esto, consideremos  $a \in M$  una familia de conjuntos no vacíos y ajena por pares. Por hipótesis, existe  $b \in M$  tal que  $b \cap x = \{u\}$  para cada  $x \in M$ . En consecuencia,  $b \in M$  satisface la tesis del axioma de elección relativizado a  $M$ .

Por lo tanto, se cumplen todas las afirmaciones.  $\square$

### Nociones absolutas

En la Proposición 4.20, cuya demostración se puede consultar en [5, Lema 2.3.2 y Lema 2.3.3], damos muchas nociones de la teoría de conjuntos que son absolutas en modelos transitivos.

**Proposición 4.20.** *Las siguientes nociones son absolutas en cualquier modelo transitivo de ZFC:*

1.  $x$  es un conjunto transitivo.
2.  $x$  es un ordinal.
3.  $x$  es ordinal sucesor.
4.  $x = 0$ .
5.  $x$  es ordinal límite.
6.  $x$  es un número natural.
7.  $x \subseteq \omega$ .
8.  $x = \omega$ .
9.  $S(x) = x \cup \{x\}$ .
10. La unión e intersección arbitraria de conjuntos.
11. El par no ordenado  $\{x, y\}$ .

12. El conjunto unitario  $\{x\}$ .
13. La pareja ordenada  $(x, y)$ .
14. Las propiedades  $x$  es una pareja ordenada y  $R$  es una relación.
15. Los conceptos  $\text{dom}(f)$  y  $\text{Im}(f)$ .
16. Las propiedades  $f$  es una función,  $f$  es inyectiva,  $f$  es suprayectiva y  $f$  es biyectiva.
17. El producto cartesiano  $x \times y$ .
18. Los conceptos de relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de orden, de equivalencia y de buen orden.

**Definición 4.21.** Definimos la Jerarquía de Zermelo por recursión transfinita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \emptyset. \\
 V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha), \text{ para cada ordinal } \alpha. \\
 V_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}
 \end{aligned}$$

La clase

$$\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{OR}} V_\alpha$$

es llamada la clase de los conjuntos bien fundados.

Para conocer más propiedades de la clase  $\mathbf{WF}$  se puede consultar [5] o [11].

Para concluir este apartado, damos la definición de modelo interior.

**Definición 4.22.** Un modelo interior es un modelo transitivo  $M$  de  $\mathbf{ZFC}$  donde  $M$  es una clase propia.

#### 4.1.2. Constructibilidad

En esta sección expondremos de manera general la jerarquía construible que fue utilizada por Gödel para demostrar la consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis del Continuo Generalizada.

### Conjuntos definibles

Se desea que las partes definibles de un conjunto  $X$  sean sus subconjuntos definibles a través de una fórmula sin referirse a nada que no pertenezca a  $X$ .

Para introducir este concepto, consideramos un símbolo de relación 1-ario  $R$ , el lenguaje  $\mathcal{L}_\epsilon^+ = \mathcal{L}_\epsilon \cup \{R\}$ . En este caso, un modelo de  $\mathcal{L}_\epsilon^+$  consiste de un par de conjuntos  $(X, A)$ , siendo  $X$  el universo del modelo y la interpretación de  $R$  es la pertenencia a  $A$ . No se pide que  $A \subseteq X$ , sin embargo, se pide que  $(X, A)$  y  $(X, X \cap A)$  determinen el mismo modelo de  $\mathcal{L}_\epsilon^+$ . Además, en este caso la relación  $M \models \varphi[t]$  que empleamos anteriormente, se puede modificar a la relación  $(X, A) \models \varphi[t]$ , donde  $\varphi$  puede incorporar al símbolo relacional  $R$ .

Ahora podemos definir las relaciones definibles.

**Definición 4.23.** *Sean  $A$  y  $X$  conjuntos. Las relaciones definibles en  $X$  respecto de  $A$  son las relaciones  $n$ -arias, con  $n \in \omega$ , de la forma*

$$S(X, A, n, \phi) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid (X, A) \models \phi(x_1, \dots, x_n)\}$$

donde  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula de  $\mathcal{L}_\epsilon^+$  con todas sus variables libres exhibidas. Además, se define

$$Def_A(X, n) = \{S(X, A, n, \phi) : \phi \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}_\epsilon^+\}.$$

Cuando  $A = \emptyset$ , escribimos  $Def_A(X, n) = Def(X, n)$ .

Con la Definición 4.23, estamos en condiciones de definir las partes definibles de un conjunto dado.

**Definición 4.24.** *Sean  $A$  y  $X$  conjuntos.*

- Si  $n \in \omega$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n) \in X^n$  y  $S \in Def_A(X, n+1)$ , definimos

$$x(X, n, s, S) = \{u \in X \mid s \cup \{(n+1, u)\} \in S\}.$$

- El conjunto de las partes definibles de  $X$  respecto de  $A$  se define como

$$\mathcal{D}_A(X) = \{x(X, n, s, S) \mid n \in \omega, s \in X^n, S \in Def_A(X, n+1)\}.$$

Cuando  $A = \emptyset$ , denotamos  $\mathcal{D}_A(X) = \mathcal{D}(X)$ .

La demostración del Teorema 4.25 se puede consultar en [10, pág. 68].

**Teorema 4.25.** *Sean  $A$  y  $X$  conjuntos. Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1)  $[X]^{<\omega} \subseteq \mathcal{D}_A(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ .
- (2)  $X \in \mathcal{D}_A(X)$ .
- (3)  $X \cap A \in \mathcal{D}_A(X)$ .
- (4) *Si  $X$  es transitivo, entonces  $X \subseteq \mathcal{D}_A(X)$ . En consecuencia,  $\mathcal{D}_A(X)$  es transitivo.*
- (5) *Si  $X$  es finito, entonces  $\mathcal{D}_A(X) = \mathcal{P}(X)$ .*

### La jerarquía constructible

Estamos en perfectas condiciones de definir la jerarquía constructible.

**Definición 4.26.** *Sea  $A$  un conjunto. Definimos la jerarquía de los conjuntos constructibles respecto de  $A$ , por recursión transfinita como sigue:*

$$\begin{aligned} L_0[A] &= \emptyset. \\ L_{\alpha+1}[A] &= \mathcal{D}_A(L_\alpha[A]), \text{ para cada ordinal } \alpha. \\ L_\alpha[A] &= \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{D}_A(L_\beta[A]), \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{aligned}$$

La clase de los conjuntos constructibles respecto de  $A$  se define como

$$L[A] = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{OR}} L_\alpha[A].$$

Cuando  $A = \emptyset$ , denotamos  $L_\alpha[A] = L_\alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$  y  $L[A] = L$ .

En el Teorema 4.27, cuya prueba se puede consultar en [10, pág. 71], nos proporciona propiedades de interés para la jerarquía constructible respecto de un conjunto.

**Teorema 4.27.** *Sea  $A$  un conjunto. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (1) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ , se tiene que  $L_\alpha[A]$  es un conjunto transitivo.*
- (2)  *$L[A]$  es una clase transitiva.*
- (3) *Para cada  $\alpha, \beta \in \mathbf{OR}$ ,  $\alpha \leq \beta$  implica que  $L_\alpha[A] \subseteq L_\beta[A]$ .*
- (4) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ , se tiene que  $[L_\alpha[A]]^{<\omega} \subseteq L_{\alpha+1}[A] \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha[A])$ .*
- (5) *Para cada  $n \in \omega$ , se tiene que  $L_n[A] = V_n$ .*
- (6)  *$L_\omega[A] = V_\omega$ .*
- (7) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ , se tiene que  $L_\alpha[A] \cap \mathbf{OR} = \alpha$ .*
- (8)  *$\mathbf{OR} \subseteq L[A]$ .*
- (9) *Si  $\bar{A} = A \cap L[A]$ , entonces  $L_\alpha[\bar{A}] = L_\alpha[A]$ ,  $L[\bar{A}] = L[A]$  y  $\bar{\bar{A}} \in L[A]$ .*

Teniendo definida la jerarquía construible se puede plantear el Axioma de constructibilidad, que enunciamos a continuación.

**Axioma 21** (De constructibilidad).  $V = L$ , es decir

$$\forall x(\exists \alpha \in \mathbf{OR}(x \in L_\alpha)).$$

La prueba del Teorema 4.28 se puede consultar en [23, pág. 80].

**Teorema 4.28** (Gödel). *Sea  $E$  un conjunto o clase propia. Entonces  $L[E] \models \mathbf{ZFC}$ .*

**Observación 4.29.** *Si  $A$  es un conjunto o clase propia, una definición alternativa de  $L[A]$  es que  $L[A]$  es el menor modelo transitivo de  $\mathbf{ZFC}$  que contiene a  $A$ .*

### Constructibilidad relativa

En este apartado, presentaremos una variante de la jerarquía constructible, la cual también es utilizada en el modelo planteado en [22]. Antes de proceder a definir dicha jerarquía, es necesario definir la clausura transitiva de un conjunto como lo hacemos a continuación.

**Definición 4.30.** *Sea  $x$  un conjunto.*

(1) *Definimos por recursión sobre  $\omega$  los siguientes conjuntos:*

- $\cup^0 x = x$ .
- Para cada  $n \in \omega$ :

$$\cup^{n+1} x = \cup (\cup^n x).$$

(2) *La cerradura transitiva de  $x$ , denotada por  $ct(x)$ , se define por*

$$ct(x) = \bigcup_{n \in \omega} \cup^n x.$$

En la Proposición 4.31, se describen propiedades de interés que satisface la clausura transitiva de un conjunto.

**Proposición 4.31.** *Sea  $x$  un conjunto. Se tienen las siguientes propiedades:*

- (1)  *$ct(x)$  es un conjunto transitivo y  $x \subseteq ct(x)$ .*
- (2) *Si  $t$  es un conjunto transitivo y  $x \subseteq t$ , entonces  $ct(x) \subseteq t$ .*
- (3) *Si  $y$  es un conjunto tal que  $x \subseteq y$ , entonces  $ct(x) \subseteq ct(y)$ .*
- (4) *Para cada  $a \in x$ ,  $ct(a) \subseteq ct(x)$ .*
- (5)  *$ct(x) = x \cup \bigcup_{a \in x} ct(a)$ .*

*Demostración.*

- (1) Mostremos primero que  $ct(x)$  es un conjunto transitivo. Para esto, tomemos  $a \in ct(x)$ . Debemos mostrar que  $a \subseteq x$ , para hacerlo tomemos  $w \in a$ . Como  $a \in ct(x)$ , existe  $n \in \omega$  tal que  $a \in \cup^n x$ . Puesto que  $w \in a$  y  $a \in \cup^n x$ ,

entonces  $w \in \cup(\cup^n x) = \cup^{n+1}x$ , pero  $\cup^{n+1}x \subseteq ct(x)$ , en consecuencia,  $w \in ct(x)$ . Por lo tanto,  $a \subseteq ct(x)$  y así se exhibe que  $ct(x)$  es un conjunto transitivo.

Para ver que  $x \subseteq ct(x)$ , observemos que  $x = \cup^0 x$  con  $0 \in \omega$ , de modo que  $x \in \{\cup^n x \mid n \in \omega\}$ , por consiguiente,  $x \subseteq ct(x)$ .

- (2) Supongamos que  $t$  es un conjunto transitivo tal que  $x \subseteq t$ . Para mostrar que  $ct(x) \subseteq t$ , es suficiente mostrar que  $\cup^n x \subseteq t$  para cada  $n \in \omega$ , lo cual haremos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$ , se tiene que  $\cup^n x = x \subseteq t$ , así que  $\cup^n x \subseteq t$  cuando  $n = 0$ .

Para nuestra hipótesis de inducción, supongamos que

$$\cup^n x \subseteq t$$

para  $n > 0$ . Si  $y \in \cup^{n+1}x$ , existe  $w \in \cup^n x$  tal que  $y \in w$ . Por hipótesis de inducción,  $\cup^n x \subseteq t$ . Dado que  $w \in \cup^n x$ , se tiene que  $w \in t$ , pero  $t$  es transitivo, así que  $w \subseteq t$ . En virtud de que  $y \in w$ , se tiene que  $w \in t$ . Por lo tanto,  $\cup^{n+1}x \subseteq t$ . De esta manera se exhibe que  $\cup^n x \subseteq t$  para cada  $n \in \omega$ , en consecuencia,  $ct(x) \subseteq t$ .

- (3) Por (1) y nuestra hipótesis, tenemos que  $x \subseteq y \subseteq ct(y)$ , así que  $x \subseteq ct(y)$ . Luego,  $ct(y)$  es un conjunto transitivo tal que  $x \subseteq ct(y)$ , por (2), se tiene que  $ct(x) \subseteq ct(y)$ .
- (4) Sea  $a \in x$ , como  $x \subseteq ct(x)$  y  $a \in x$ , se tiene que  $a \in ct(x)$ , al ser  $ct(x)$  transitivo se tiene que  $a \subseteq ct(x)$ . Así,  $ct(x)$  es un conjunto transitivo tal que  $a \subseteq ct(x)$ , por (2), se concluye que  $ct(a) \subseteq ct(x)$ .
- (5) Por simplicidad de notación, denotemos  $b = x \cup \bigcup_{a \in x} ct(a)$ . Mostraremos primero que  $ct(x) \subseteq b$ . Es claro que  $x \subseteq b$ , de modo que basta mostrar que  $b$  es transitivo. Para probarlo, tomemos  $u \in b$ . Si  $u \in x$ , se tiene que

$$u \subseteq ct(u) \subseteq \bigcup_{a \in x} ct(a) \subseteq b$$

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 101

es decir,  $u \subseteq b$ . Si  $u \in \bigcup_{a \in x} ct(a)$ , existe  $w \in x$  tal que  $u \in ct(w)$ . Como  $ct(w)$  es transitivo y  $w \in ct(w)$ , se tiene que  $u \subseteq ct(w)$ . De esta manera, se tiene que

$$u \subseteq ct(w) \subseteq \bigcup_{a \in x} ct(a) \subseteq b$$

es decir,  $u \subseteq b$ . Por lo tanto,  $b$  es un conjunto transitivo que contiene a  $x$ , por (2), se tiene que  $ct(x) \subseteq b$ .

Para mostrar que  $b \subseteq ct(x)$ , notemos por un lado que  $x \subseteq ct(x)$ . Por otro lado, usando (4) se tiene que  $ct(a) \subseteq ct(x)$  para cada  $a \in x$ , en consecuencia,  $\bigcup_{a \in x} ct(a) \subseteq ct(x)$ . Por tanto,  $b \subseteq ct(x)$ . De ambas contenciones se concluye que  $ct(x) = b$ .

Así terminamos la prueba del teorema. □

Una vez que hemos definido la clausura transitiva de un conjunto estamos en condiciones de definir la jerarquía constructible sobre un conjunto.

**Definición 4.32.** *Sea  $A$  un conjunto.*

- *Definimos por recursión transfinita la siguiente sucesión de conjuntos:*

$$L_0(A) = ct(A) \cup \{A\}.$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \mathcal{D}(L_\alpha(A)), \text{ para cada ordinal } \alpha.$$

$$L_\alpha(A) = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta(A), \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}$$

- *Definimos la clase de los conjuntos construibles sobre  $A$  como*

$$L(A) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{OR}} L_\alpha(A).$$

Es importante mencionar que no debemos confundir las jerarquías  $L[A]$  y  $L(A)$ , pues estas son diferentes. La primera diferencia que podemos notar es que en  $L_0[A] = \emptyset$  mientras que  $L_0(A) = ct(A) \cup \{A\}$ . Anteriormente vimos que no necesariamente se cumple que  $A \in L[A]$  mientras que siempre ocurre que

$A \in L(A)$ . Podemos darnos cuenta de que en  $L[A]$ , el conjunto  $A$  es utilizado únicamente como referencia para construir conjuntos mientras que en  $L(A)$ , el conjunto  $A$  y los elementos de su clausura transitiva se admiten desde un inicio como constructibles.

A continuación se enuncian dos teoremas de interés análogos a los de la jerarquía  $L[A]$ . Los Teoremas 4.33 y 4.34 se encuentran en [10], en esta última referencia se omiten sus demostraciones comentando que sus respectivas pruebas son similares a las versiones análogas de la jerarquía  $L[A]$ . Cabe señalar que las pruebas de estos resultados se escapan de nuestra línea de estudio.

**Teorema 4.33.** *Sea  $A$  un conjunto. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ ,  $L_\alpha(A)$  es un conjunto transitivo.*
- (2) *La clase  $L(A)$  es transitiva.*
- (3) *Para cada  $\alpha, \beta \in \mathbf{OR}$ ,  $\alpha \leq \beta$  implica  $L_\alpha(A) \subseteq L_\beta(A)$ .*
- (4) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ ,  $L_\alpha(A) \in L_{\alpha+1}(A)$ .*
- (5) *Para cada  $\alpha \in \mathbf{OR}$ ,  $L_\alpha \subseteq L_\alpha(A)$ .*
- (6)  *$L \subseteq L(A)$ .*
- (7)  *$A \in L(A)$ .*

**Teorema 4.34.** *Sea  $A$  un conjunto. Entonces  $L(A) \models \mathbf{ZF}$ .*

El Teorema 4.35, cuya prueba se puede consultar en [10, pág. 107] nos dice bajo qué condiciones  $L(A)$  satisface el Axioma de elección.

**Teorema 4.35.** *Sea  $A$  un conjunto. La clase  $L(A)$  cumple el Axioma de Elección si y solo si  $ct(A)$  tiene un buen orden en  $L(A)$ .*

Es importante mencionar que si suponemos el Axioma de Elección, podemos garantizar que  $ct(A)$  tiene un buen orden. Sin embargo, esto no es suficiente para que  $L(A)$  satisfaga el Axioma de Elección, pues si este buen orden que se obtiene para  $ct(A)$  no se encuentra en  $L(A)$ ,  $L(A)$  lo desconocerá, pues  $L(A)$  únicamente conoce lo que se encuentra en ella.

**Corolario 4.36.** *Si  $A$  es un conjunto de ordinales, entonces  $L(A) \models ZFC$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es una clase de ordinales. Como  $A \subseteq \mathbf{OR}$ , entonces  $ct(A) \subseteq \mathbf{OR}$ . Sabemos que la clase  $\mathbf{OR}$  es bien ordenada, entonces  $\leq_{ct(A)} = \leq \cap ct(A)^2$  es un buen orden para  $ct(A)$ . En virtud del Teorema 4.34 y el Teorema 4.35, se tiene lo deseado.  $\square$

### Definibilidad por ordinales

En este apartado, se expondrán los conceptos básicos con respecto a los conjuntos definibles por ordinales.

**Definición 4.37.** *Sea  $E$  un conjunto o clase propia. Se dice que un conjunto  $x$  está hereditariamente en  $E$  si  $ct(x) \subseteq E$ .*

**Definición 4.38.** *Sea  $z$  un conjunto o clase propia.*

- (1) *Denotamos por  $\mathbf{OD}_z$  a la clase de los conjuntos que son definibles por ordinales a partir de elementos de  $z$ , es decir,  $x \in \mathbf{OD}_z$  si y solo si existen una fórmula  $\phi$  de la teoría de conjuntos,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{OR}$ ,  $y_1, \dots, y_m \in z$  tales que para cada  $u$ ,*

$$u \in x \Leftrightarrow \phi(u, \alpha_1, \dots, \alpha_n, y_1, \dots, y_m).$$

- (2) *Denotamos por  $\mathbf{HOD}_z$  a la clase de los conjuntos  $x$  que se encuentran hereditariamente en  $\mathbf{OD}_z$ , es decir*

$$\mathbf{HOD}_z = \{x \mid ct(x) \subseteq \mathbf{OD}_z\}.$$

*Cuando  $x \in \mathbf{OD}_z$ , se dice que  $x$  es hereditariamente definible por ordinales a partir de elementos de  $z$ . Cuando  $z = \emptyset$ , denotamos  $\mathbf{OD}_z = \mathbf{OD}$  y  $\mathbf{HOD}_z = \mathbf{HOD}$ .*

La demostración del Teorema 4.39 se puede consultar en [23, pág. 86].

**Teorema 4.39.** *Sea  $z$  un conjunto tal que  $z \in \mathbf{OD}_z$ . Se cumple que*

$$\mathbf{HOD}_z \models ZF.$$

La prueba del Teorema 4.40 se puede consultar en [23, pág. 87].

**Teorema 4.40.** *Sea  $z$  un conjunto tal que  $z \in \mathbf{OD}_z$ . Si existe un buen orden para  $z$  en  $\mathbf{OD}_z$ , entonces  $\mathbf{HOD}_z \models \mathbf{ZFC}$ . En particular,  $\mathbf{HOD} \models \mathbf{ZFC}$ .*

Para conocer más propiedades acerca de la jerarquía definible por ordinales se puede consultar [10], [13] o [23].

### 4.1.3. Forcing

La teoría de forcing o forzamiento fue introducida por Paul Cohen en 1962, para demostrar la existencia de un modelo de **ZFC** que no satisface la Hipótesis del Continuo.

En este apartado expondremos brevemente los conceptos básicos relacionados con la teoría de forcing.

Recordemos que  $(\mathbb{P}, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado si  $\leq$  es una relación en  $\mathbb{P}$  que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. También se dice que  $(\mathbb{P}, \leq)$  es un orden parcial. A lo largo de esta sección, siempre que nos refiramos a un orden parcial  $(\mathbb{P}, \leq)$  asumiremos que  $\mathbb{P} \neq \emptyset$  aunque no se mencione explícitamente.

**Definición 4.41.** *Sean  $(\mathbb{P}, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado con  $1 \in \mathbb{P}$  su elemento mayor,  $A$  y  $D$  subconjuntos de  $\mathbb{P}$ .*

- (1) *Se dice que la terna  $(\mathbb{P}, \leq, 1)$  es una noción de forcing.*
- (2) *A los elementos de  $\mathbb{P}$  se les llama condiciones de forcing.*
- (3) *Para  $p, q \in \mathbb{P}$ , si  $p \leq q$  se dice que  $p$  es más fuerte que  $q$  o que  $p$  extiende a  $q$ .*
- (4) *Para  $p, q \in \mathbb{P}$ , se dice que  $p$  y  $q$  son compatibles, lo cual se denota por  $p \parallel q$ , si existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . Cuando  $p$  y  $q$  no son compatibles, se dice que son incompatibles y se denota por  $p \perp q$ .*
- (5)  *$A$  es una anticadena si para cada  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p \neq q$  implica  $p \perp q$ .*
- (6) *Se dice que  $D$  es abierto en  $\mathbb{P}$ , si para cada  $p \in D$ ,  $q \leq p$  implica  $q \in D$ .*

(7) Se dice que  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$  si para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe  $r \in D$  tal que  $r \leq p$ .

(8) Si  $p \in \mathbb{P}$ , se dice que  $D$  es denso por debajo de  $p$  si para cada  $q \in \mathbb{P}$  con  $q \leq p$ , existe  $r \in D$  tal que  $r \leq q$ .

**Notación 18.** Cuando no haya lugar a confusión denotaremos a la noción de forcing  $(\mathbb{P}, \leq, 1)$  únicamente por  $\mathbb{P}$ , entendiendo que  $\leq$  es el orden parcial en  $\mathbb{P}$  y  $1$  es el elemento mayor en  $\mathbb{P}$ .

**Observación 4.42.** Si  $M$  es un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$  y  $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ , las sentencias “ $\mathbb{P}$  es un orden parcial”, “ $D \subseteq \mathbb{P}$  es denso en  $\mathbb{P}$ ” y “ $D \subseteq \mathbb{P}$  es denso por debajo de  $p \in \mathbb{P}$ ” son absolutas en  $M$  debido a que se pueden escribir como fórmulas  $\Delta_0$ .

Mediante la siguiente proposición se puede obtener una caracterización para las anticadenas máxima.

**Proposición 4.43.** Sea  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $A \subseteq \mathbb{P}$  una anticadena. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1)  $A$  es una anticadena máxima.

(2) Para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $A$  es una anticadena máxima y consideremos  $p \in \mathbb{P}$ . Si  $p \in A$ , consideremos  $q = p$ . Es claro que  $p \parallel q$ , pues  $q$  es una extensión común de  $p$  y  $q$ . Si  $p \notin A$ , se tiene que  $A \subsetneq A \cup \{p\}$ . Si  $p \perp q$  para cada  $q \in A$ , entonces  $A \cup \{p\}$  es una anticadena, lo cual es imposible debido a la maximalidad de  $A$ , por lo tanto, existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $B \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $A \subsetneq B$ . Mostraremos que  $B$  no puede ser una anticadena en  $\mathbb{P}$ . Dado que  $A \subsetneq B$ , existe  $p \in B \setminus A$ . Por hipótesis, existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ . Dado que  $A \subseteq B$ , se tiene que  $q \in B$ . Así, tenemos que  $p, q \in B$ ,  $p \neq q$  y  $\neg(p \perp q)$ , en consecuencia,  $B$  no es una anticadena. Por lo tanto,  $A$  es una anticadena máxima.  $\square$

En virtud de la Proposición 4.43, podemos definir una anticadena maximal como se hace a continuación.

**Definición 4.44.** Sea  $\mathbb{P}$  una noción de forcing. Decimos que una anticadena  $A \subseteq \mathbb{P}$  es máxima si para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ .

Si asumimos el Axioma de Elección, el cuál es equivalente al Lema de Zorn, se tiene que cualquier anticadena está contenida en alguna anticadena máxima.

Ahora, estamos en condiciones de definir el concepto de filtro en una noción de forcing.

**Definición 4.45.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $G \subseteq \mathbb{P}$ . Se dice que  $G$  es un filtro sobre  $\mathbb{P}$  si se cumple lo siguiente:

- (1)  $1 \in G$ .
- (2) Para cada  $p, q \in G$ , existe  $r \in G$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ .
- (3) Para cada  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $q \leq p$  y  $q \in G$  implica que  $p \in G$ .

### Filtros Genéricos

En este apartado daremos algunas propiedades interesantes de los filtros genéricos sobre nociones de forcing.

**Definición 4.46.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing,  $\mathcal{D}$  una familia de subconjuntos densos de  $\mathbb{P}$  y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro. Decimos que  $G$  es  $\mathcal{D}$ -genérico, si para cada  $D \in \mathcal{D}$ , se tiene que  $D \cap G \neq \emptyset$ .

Dado un modelo transitivo de **ZFC**, se desea extender a un nuevo modelo transitivo de **ZFC**, para esto se requiere agregarle un filtro que intersecte a una buena cantidad de conjuntos densos, de este modo garantizamos que el filtro, digamos  $G$ , tenga buena cantidad de información y que no sea contradictoria. Para esto necesitamos introducir la Definición 4.47.

Por simplicidad, podemos suponer que nuestros modelos transitivos de **ZFC** son numerables aunque no se especifique.

**Definición 4.47.** Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZFC**,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro. Decimos que  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ , si para cada conjunto  $D \subseteq \mathbb{P}$  denso tal que  $D \in M$ , se cumple que  $G \cap D \neq \emptyset$ .

La Proposición 4.48 nos brinda algunas propiedades interesantes para los filtros  $\mathbb{P}$  genéricos.

**Proposición 4.48.** Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZFC**,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $G$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico y  $D \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $D \in M$ . Se cumple lo siguiente:

- (1)  $G \cap D \neq \emptyset$  o existe  $p \in G$  tal que  $r \perp p$  para cada  $r \in D$ .
- (2) Si  $p \in G$  y  $D$  es denso por debajo de  $p$ , entonces  $G \cap D \neq \emptyset$ .

*Demostración.*

- (1) Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{p \in \mathbb{P} \mid \exists r \in D : p \leq r\}, \\ B &= \{p \in \mathbb{P} \mid \forall r \in D : r \perp p\}, \\ E &= A \cup B. \end{aligned}$$

Primero notemos que en virtud de que  $M$  conoce todo lo que interviene en  $E$ , se tiene que  $E \in M$ .

Vamos a probar que  $E$  es denso en  $\mathbb{P}$ , para esto consideremos  $p \in \mathbb{P}$ . Si  $p \in E$ , es claro que  $q = p \in E$  y  $q \leq p$ . Si  $p \notin E$ , en particular  $p \notin B$ , de modo que existe  $r \in D$  tal que  $r \parallel p$ . Así, existe  $s \in D$  tal que  $s \leq p$  y  $s \leq r$ . En consecuencia,  $s \in A \subseteq E$  y cumple  $s \leq p$ . Por lo tanto,  $E$  es denso en  $\mathbb{P}$  y puesto que  $E \in M$  y  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico, se tiene que  $G \cap E \neq \emptyset$ .

Consideremos  $q \in G \cap E$ . Si  $q \in A$ , existe  $t \in D$  tal que  $q \leq t$ , como  $G$  es filtro y  $q \in G$ , se tiene que  $t \in G$ , así  $t \in G \cap D$  y por tanto,  $G \cap D \neq \emptyset$ . Si  $q \in B$ , entonces  $q \in G \cap B$  y consecuentemente  $r \perp q$  para cada  $r \in D$ .

- (2) Procederemos por contradicción. Supongamos que  $p \in G$ ,  $D$  es denso por debajo de  $p$  y  $G \cap D = \emptyset$ . Por (1), existe  $q \in G$  tal que  $r \perp q$  para cada  $r \in D$ . Como  $p, q \in G$  y  $G$  es filtro, existe  $r_0 \in G$  tal que  $r_0 \leq p$  y  $r_0 \leq q$ . Puesto que  $r_0 \leq p$  y  $D$  es denso por debajo de  $p$ , existe  $s_0 \in D$  tal que  $s_0 \leq r_0$ . En virtud de que  $s_0 \leq r_0$  y  $r_0 \leq q$ , por transitividad se tiene que  $s_0 \leq q$ . En consecuencia,  $s_0 \parallel q$  con  $s_0 \in D$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $G \cap D \neq \emptyset$ .

De esta manera concluimos la prueba de nuestra proposición.  $\square$

A continuación se demostrará la existencia de filtros  $\mathbb{P}$ -genéricos donde  $\mathbb{P}$  es una noción de forcing. En el Teorema 4.49, se establece la existencia de filtros genéricos en un contexto más general de acuerdo a la Definición 4.46.

**Teorema 4.49.** *Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing,  $\mathcal{D}$  una familia numerable de subconjuntos densos de  $P$ . Entonces, para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico  $G$  tal que  $p \in G$ .*

*Demostración.* Como  $\mathcal{D}$  es numerable, podemos enumerar la familia  $\mathcal{D}$  respecto a  $\omega$ , digamos que

$$\mathcal{D} = (D_n)_{n < \omega}.$$

Sea  $p \in \mathbb{P}$  arbitrario y fijo. Vamos a construir una sucesión  $(p_n)_{n < \omega}$  tal que  $p_n \in D_n$  y  $p_{n+1} \leq p_n \leq p$  para cada  $n \in \omega$ . Como  $p \in \mathbb{P}$  y  $D_0$  es denso en  $P$ , existe  $p_0 \in D_0$  tal que  $p_0 \leq p$ . Como  $p_0 \in \mathbb{P}$  y  $D_1$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $p_1 \in D_1$  tal que  $p_1 \leq p_0 \leq p$ . Supongamos que para  $n \in \omega$  con  $n > 1$ , tenemos construidos  $(p_i)_{i \leq n}$  tales que  $p_{i+1} \leq p_i \leq p$  y  $p_i \in D_i$ , para cada  $i < n$ . Como  $p_n \in \mathbb{P}$  y  $D_{n+1}$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $p_{n+1} \in D_{n+1}$  tal que  $p_{n+1} \leq p_n \leq p$ . De esta manera terminamos con la construcción de  $(p_n)_{n \in \omega}$  con las condiciones descritas al inicio. Ahora, consideremos

$$G = \{r \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \omega : p_n \leq r\}.$$

Vamos a demostrar que  $G$  es un filtro y  $p \in G$ . En efecto, si  $r, s \in G$ , por la definición de  $G$ , existen  $m, n \in \omega$  tales que  $p_m \leq r$ ,  $p_n \leq s$  y sin pérdida de generalidad, supongamos que  $m \leq n$ . Por la construcción de la sucesión  $(p_n)_{n \in \omega}$ , se tiene que  $p_n \leq p_m \leq r$ , por transitividad,  $p_n \leq r$ , además,  $p_n \leq s$  y como  $p_n \leq p_n$ , se tiene que  $p_n \in G$ , mostrando así la primera condición de la definición de filtro..

Para la segunda condición, sean  $r \in G$ ,  $s \in P$  y supóngase que  $r \leq s$ . Como  $r \in G$ , existe  $n \in \omega$  tal que  $p_n \leq r$ , por transitividad,  $p_n \leq s$ , concluyendo que  $s \in G$ . Por lo tanto,  $G$  es un filtro.

Notemos que  $p_0 \leq p$  y  $0 \in \omega$ , por consiguiente,  $p \in G$ .

Finalmente, notemos que por la construcción de la sucesión  $(p_n)_{n \in \omega}$ , se tiene que para cada  $n \in \omega$ ,  $p_n \in D_n$  y como  $p_n \leq p_n$ ,  $p_n \in G$ , así que  $p_n \in G \cap D_n$ , exhibiendo así que  $G \cap D_n \neq \emptyset$  para cada  $n \in \omega$ . Por lo tanto,  $G$  es un filtro  $\mathcal{D}$ -genérico tal que  $p \in G$ .  $\square$

Sin gran dificultad, podemos notar que dados un modelo transitivo de **ZFC** y una noción de forcing  $\mathbb{P} \in M$ , se tiene que un filtro  $G$  es  $\mathcal{P}$ -genérico si y solo  $G$  es  $\mathcal{D}$ -genérico para cada familia de conjuntos densos  $\mathcal{D} \in M$ .

**Corolario 4.50.** *Sean  $M$  un modelo transitivo numerable de  $\mathbf{ZFC}$  y  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing. Para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$  tal que  $p \in G$ .*

*Demostración.* Como  $M$  es numerable, si  $\mathcal{D} \in M$  es una familia de conjuntos densos en  $\mathbb{P}$ , dado que  $\mathcal{D} \subseteq M$ , se tiene que  $\mathcal{D}$  es numerable ya que  $M$  es numerable. Por el Teorema 4.49, se obtiene lo deseado.  $\square$

El Teorema 4.51, nos da una relación entre filtros  $\mathbb{P}$ -genéricos, abiertos densos y anticadenas máximas.

**Teorema 4.51.** *Sea  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ .
- (2) Para cada anticadena máxima  $A \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $A \in M$ , se cumple que  $G \cap A \neq \emptyset$ .
- (3) Para cada abierto denso  $D \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $D \in M$ , se cumple que  $G \cap D \neq \emptyset$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Supongamos que  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ . Sea  $A \subseteq \mathbb{P}$  una anticadena máxima tal que  $A \in M$ . Consideremos el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in A : p \leq q\}.$$

Dado que  $M$  conoce todo lo que interviene en  $D$ , se cumple que  $D \in M$ . Mostraremos que  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Para esto, consideremos  $p \in \mathbb{P}$  arbitrario. Como  $A$  es una anticadena máxima, existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ , en consecuencia, existe  $r \in \mathbb{P}$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . Así,  $r \leq q$  con  $q \in A$ , además,  $r \leq p$ , lo que muestra que  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Ahora bien, por hipótesis,  $G \cap D \neq \emptyset$ , de modo que podemos considerar  $p_0 \in G \cap D$ . Como  $p_0 \in D$ , existe  $q \in A$  tal que  $p_0 \leq q$ . Por otro lado, como  $p_0 \in G$ ,  $p_0 \leq q$  y  $G$  es filtro, se cumple que  $q \in A$ , así,  $q \in G \cap A$ , exhibiendo así que  $G \cap A \neq \emptyset$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $D \subseteq \mathbb{P}$  un conjunto denso en  $\mathbb{P}$  con  $D \in M$ . Consideremos  $A \in M$  una anticadena tal que  $A \subseteq D$  y para cada  $p \in D$ , existe  $q \in A$  tal que  $p \parallel q$ . Mostremos que  $A$  es una

anticadena máxima, para esto consideremos  $p \in \mathbb{P}$ . Si  $p \in D$ , por la propiedad de  $A$ , existe  $r \in A$  tal que  $p \parallel r$  y hemos terminado. Si  $p \in \mathbb{P} \setminus D$ , como  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $s \in D$  tal que  $s \leq p$ , luego, existe  $t \in A$  tal que  $t \parallel s$ . Por consiguiente, existe  $u \in \mathbb{P}$  tal que  $u \leq t$  y  $u \leq s$ , como  $s \leq p$ , por transitividad,  $u \leq p$  y  $u \leq t$ , en consecuencia,  $p \parallel t$  con  $t \in A$ . Por lo tanto,  $A$  es una anticadena máxima.

Por hipótesis, se tiene que  $A \cap G \neq \emptyset$ , entonces podemos elegir  $p_0 \in A \cap G$ , dado que  $A \subseteq D$ , se tiene que  $p_0 \in G \cap D$ , concluyendo así que  $G \cap D \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3): Es claro.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $D \subseteq \mathbb{P}$ ,  $D \in M$  un conjunto denso en  $\mathbb{P}$ . Consideremos

$$E = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in D : p \leq q\}.$$

Debido a que  $M$  conoce todo lo que interviene en  $D$ , se tiene que  $E \in M$ . Mostremos primero que  $E$  es denso en  $\mathbb{P}$ , para esto consideremos  $p \in \mathbb{P}$  fijo. Como  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ , existe  $q \in D$  tal que  $q \leq p$ . Notemos que  $q \leq q$  y  $q \in E$ , de modo que  $q \in E$ . De aquí se sigue que  $E$  es denso en  $\mathbb{P}$ . Ahora mostremos que  $E$  es abierto, para esto observemos que si  $p \in E$  y  $q \leq p$ , existe  $r \in D$  tal que  $p \leq r$ , luego  $q \leq r$  con  $r \in D$ , en consecuencia,  $q \in E$ . Por lo tanto,  $E$  es abierto denso en  $\mathbb{P}$ . Por hipótesis,  $G \cap E \neq \emptyset$ , de modo que existe  $p_0 \in G \cap E$ . Como  $p_0 \in E$ , existe  $s \in D$  tal que  $p_0 \leq s$ , dado que  $p_0 \in G$  y  $G$  es filtro, se tiene que  $s \in G$ , consecuentemente,  $s \in G \cap D$ , de modo que  $G \cap D \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ .  $\square$

Como se mencionó anteriormente, al intentar extender un modelo transitivo de **ZFC**, se agrega un filtro genérico  $G$  al modelo y de esta manera se busca agregar nuevos elementos al modelo  $M$ . Para asegurar que se están agregando nuevos elementos al modelo  $M$ , se requiere que  $G \not\subseteq M$ . Con este fin, se da la Definición 4.52 y el Teorema 4.53.

**Definición 4.52.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $r \in \mathbb{P}$ . Decimos que  $r$  es un átomo en  $\mathbb{P}$  si no existen  $p, q \in \mathbb{P}$  tales que  $p \leq r$ ,  $q \leq r$  y  $p \perp q$ .

**Teorema 4.53.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing sin átomos y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ . Se cumple que  $G \notin M$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G \in M$  y consideremos  $D = \mathbb{P} \setminus G$ . Como la diferencia de conjuntos es una noción absoluta, se tiene que  $D \in M$ . Vamos a demostrar que  $D$  es denso en  $\mathbb{P}$ , para esto consideremos  $p \in \mathbb{P}$ . Por hipótesis,  $p$  no es un átomo, en consecuencia, existen  $r, s \in \mathbb{P}$  tales que  $r \leq p$ ,  $s \leq p$  y  $r \perp s$ . Observemos que si  $r \in G$  y  $s \in G$ , entonces  $r \parallel s$ , lo cual es imposible. Así, tenemos que  $r \in D$  ó  $s \in D$ . Por consiguiente,  $D$  es denso y por hipótesis  $G \cap D \neq \emptyset$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $G \notin M$ .  $\square$

### Extensiones genéricas

Seguimos con el objetivo de partir de un modelo de la teoría de conjuntos  $M$  y extenderlo convenientemente a un modelo  $M[G]$ , el cuál será justamente la extensión genérica de  $M$  que cumplirá alguna condición deseada.

Introducimos el concepto de los  $\mathbb{P}$ -nombres.

**Definición 4.54.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P}$  una noción de forcing.*

- (1) *Se dice que  $\tau$  es un  $\mathbb{P}$ -nombre, si  $\tau$  es una relación y para cada  $(\sigma, p) \in \tau$ , se cumple que  $\sigma$  es un  $\mathbb{P}$ -nombre y  $p \in \mathbb{P}$ .*
- (2) *La clase de todos los nombres es  $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ .*
- (3) *Si  $\mathbb{P} \in M$ , entonces  $M^{\mathbb{P}} = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap M$ .*

Teniendo la Definición 4.54, podemos definir la valuación de un  $\mathbb{P}$ -nombre respecto a un filtro genérico.

**Definición 4.55.** *Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing,  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico,  $\tau$  un  $\mathbb{P}$ -nombre y  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ .*

- (1) *Definimos recursivamente la valuación de  $\tau$  bajo  $G$  como*

$$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \tau\}.$$

(2) Si  $\mathbb{P} \in M$ , la extensión genérica de  $M$  respecto de  $G$  se define como

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Podemos darnos cuenta de que la definición de  $\mathbb{P}$ -nombre es recursiva. Cada  $\mathbb{P}$ -nombre es una forma de referirnos a algo, donde ese algo pertenece a la extensión genérica  $M[G]$ . De esta manera, podemos notar que nos podemos referir a los elementos de  $M[G]$  (que no necesariamente son elementos de  $M$ ) como  $\mathbb{P}$  nombres en  $M$ . Esto lo podemos entender como que en  $M$  podemos hablar de lo que sucede en  $M[G]$  a través de los  $\mathbb{P}$ -nombres. Los  $\mathbb{P}$ -nombres contienen gran cantidad de información que puede llegar a ser contradictoria. Se desea obtener la mayor cantidad de información pero eliminando aquella que nos pueda ocasionar conflicto, por esa razón,  $G$  es llamado filtro, además de que valuar un  $\mathbb{P}$ -nombre es “filtrar” información del  $\mathbb{P}$ -nombre en cuestión utilizando las propiedades del filtro  $G$ .

**Definición 4.56.** Sea  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $x$  un conjunto. Definimos al  $\mathbb{P}$ -nombre canónico de  $x$  como el conjunto

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in x\}.$$

**Lema 4.57.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing,  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro,  $M$  y  $N$  modelos transitivos de  $\mathbf{ZF}$  tal que  $\mathbb{P} \in M$ . Se cumple lo siguiente:

- (1) Para cada  $x \in M$ , se cumple que  $\hat{x} \in M^{\mathbb{P}}$  y  $\hat{x}_G = x$ .
- (2)  $M \subseteq M[G]$ .
- (3)  $M[G]$  es transitivo.
- (4)  $G \in M[G]$ .
- (5) Si  $M \subseteq N$  y  $G \in N$ , entonces  $M[G] \subseteq N$ .

*Demostración.*

- (1) Probaremos primero por  $\in$ -inducción que para cada  $x \in M$ ,  $\hat{x} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Observemos que

$$\hat{\emptyset} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in \emptyset\} = \emptyset$$

4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 113

así que  $\hat{\emptyset} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Sea  $x \in M$  y supóngase que  $\hat{y} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$  para cada  $y \in x$ . Ahora bien, tenemos que

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in x\}$$

de modo que  $\hat{x}$  es una relación. Notemos que si  $(\sigma, p) \in \hat{x}$ , entonces  $\sigma = \hat{y}$  con  $y \in x$  y  $p = 1 \in \mathbb{P}$ . Por hipótesis de inducción, se tiene que  $\hat{y} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Por consiguiente,  $\hat{x} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Se sigue que  $\hat{x} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$  para cada  $x \in M$ .

Ahora vamos a demostrar que  $\hat{x}_G = x$  para cada  $x \in M$ , lo cual también realizaremos por  $\in$ -inducción. Observemos que

$$\hat{\emptyset}_G = \emptyset_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \emptyset\} = \emptyset$$

obteniendo así que  $\hat{\emptyset}_G = \emptyset$ . Para nuestra hipótesis de inducción, sea  $x \in M$  y supongamos que para cada  $y \in x$ , se cumple que  $\hat{y}_G = y$ . Utilizando la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\hat{x}_G = \{\hat{y}_G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$$

es decir,  $\hat{x}_G = x$ . Por lo tanto,  $\hat{x}_G = x$  para cada  $x \in M$ .

- (2) Si  $x \in M$ , por (1), tenemos que  $x = \hat{x}_G \in M[G]$ , de modo que  $x \in M[G]$ . Por lo tanto,  $M \subseteq M[G]$ .
- (3) Sea  $x \in M[G]$ . Debemos mostrar que  $x \subseteq M[G]$ . Para probar esto, notemos que existe  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  tal que

$$x = \sigma_G = \{\tau_G \mid \exists p \in G : (\tau, p) \in \sigma\}.$$

Consideremos  $q \in G$  arbitrario y fijo tal que  $(\tau, q) \in \sigma$ . Como  $\sigma \in M$  y  $M$  es transitivo, se tiene que  $\sigma \subseteq M$ , en consecuencia,  $(\tau, p) \in M$ , en particular,  $\tau \in M$ . Así, hemos probado que para cada  $p \in G$  tal que  $(\tau, p) \in \sigma$ , se cumple que  $\tau_G \in M[G]$ . En consecuencia,  $x \subseteq M[G]$ , exhibiendo así que  $M[G]$  es transitivo.

- (4) Consideremos

$$\Gamma = \{(\hat{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}.$$

Es claro que  $\Gamma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Además, tenemos que

$$\Gamma_G = \{\hat{p}_G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$$

concluyendo así que  $G \in M[G]$ .

- (5) Supongamos que  $M \subseteq N$  y  $G \in N$ . Vamos a probar que  $M[G] \subseteq N$ . Para esto consideremos  $a \in M[G]$ . Luego,  $a = \tau_G$  para algún  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ . Dado que  $M \subseteq N$  y  $\tau \in M$ , entonces  $\tau \in N$ , además, por hipótesis  $G \in N$ , en consecuencia

$$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \tau\} \in N$$

o sea,  $a \in N$ . Por lo tanto,  $M[G] \subseteq N$ .

De esta manera se concluye la demostración de las propiedades citadas.  $\square$

### Noción de forzamiento

Con los conceptos que hemos expuestos con respecto al forcing, estamos en condiciones de presentar lo que significa la noción de “forzar”.

**Definición 4.58.** Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZF**,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $\varphi$  una sentencia de  $M$  y  $p \in \mathbb{P}$ . Se dice que “ $p$  fuerza a  $\varphi$ ” sobre  $M$ , lo cual se denota por  $p \Vdash_M^{\mathbb{P}} \varphi$ , si para cada filtro  $\mathbb{P}$ -genérico  $G \subseteq \mathbb{P}$  sobre  $M$  tal que  $p \in G$ , se cumple que  $M[G] \models \varphi$ .

### Notación 19.

- Por simplicidad de notación, cuando “ $p$  fuerza a una fórmula  $\varphi$ , podemos considerar indistinto el uso de las comillas, es decir, podemos suponer que  $p \Vdash_M^{\mathbb{P}} \varphi$  y  $p \Vdash_M \varphi$  significan lo mismo, a saber, que “ $p$  fuerza a  $\varphi$  sobre  $M$ ”. Más aún, cuando no haya posibilidad de confusión con el modelo  $M$  y la noción de forcing  $\mathbb{P}$ , podemos escribir simplemente  $p \Vdash \varphi$  o  $p \Vdash \varphi$ .
- Si  $1 \Vdash_M^{\mathbb{P}} \varphi$ , se puede escribir simplemente “ $1 \Vdash_M^{\mathbb{P}} \varphi$ ” o “ $1 \Vdash \varphi$ ”.

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 115

En la Proposición 4.59, se establecen algunas propiedades interesantes de la noción de forzamiento.

**Proposición 4.59.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $\varphi$  y  $\psi$  sentencias de  $M$ . Se cumple lo siguiente:*

- (1) Si  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p \Vdash \varphi$  y  $q \leq p$ , entonces  $q \Vdash \varphi$ .
- (2) Si  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)$  si y solo si  $p \Vdash \varphi$  y  $p \Vdash \psi$ .

*Demostración.* Sean  $p, q \in \mathbb{P}$ .

- (1) Supóngase que  $p \Vdash \varphi$  y  $q \leq p$ . Debemos mostrar que  $q \Vdash \varphi$ . Para probar esto, consideremos un filtro  $G \subseteq \mathbb{P}$   $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$  tal que  $q \in G$ . Dado que  $q \in G$ ,  $q \leq p$  y  $G$  es filtro, se tiene que  $p \in G$ , como  $p \Vdash \varphi$ , se tiene que  $M[G] \models \varphi$ , en consecuencia,  $q \Vdash \varphi$ .
- (2) Se sigue del hecho de que si  $N$  es un modelo, entonces  $N \models (\varphi \wedge \psi)$  si y solo si  $N \models \varphi$  y  $N \models \psi$ .

De esta manera queda concluida nuestra prueba.  $\square$

**Corolario 4.60.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $\varphi$  una sentencia de  $M$ . Se cumple que  $\Vdash \varphi$  si y solo si  $p \Vdash \varphi$  para cada  $p \in \mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $\Vdash \varphi$ . Consideremos  $p \in \mathbb{P}$ , como  $p \leq 1$  y  $1 \Vdash \varphi$ , por la Proposición 4.59, se tiene que  $p \Vdash \varphi$ .

La otra implicación es clara.  $\square$

**Definición 4.61.** *Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  con todas sus variables libres exhibidas,  $p \in \mathbb{P}$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_n, a, b \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ . Las siguientes definen la expresión  $p \Vdash^* \varphi$ :*

- (1)  $p \Vdash^* a = b$  si se cumple lo siguiente:

(a) Para cada  $(c, r) \in a$ , se tiene que el conjunto

$$\{q \leq p \mid q \leq r \Rightarrow \exists (d, s) \in b (q \leq s \wedge q \Vdash^* c = d)\}$$

es denso por debajo de  $p$ .

(b) Para cada  $(c, r) \in b$ , se tiene que el conjunto

$$\{q \leq p \mid q \leq r \Rightarrow \exists(d, s) \in a(q \leq s \wedge q \Vdash^* c = d)\}$$

es denso por debajo de  $p$ .

(2)  $p \Vdash^* a \in b$  si el conjunto

$$\{q \leq p \mid \exists(c, r) \in b(q \leq r \wedge q \Vdash^* a = c)\}$$

es denso por debajo de  $p$ .

(3)  $p \Vdash^* (\psi \wedge \gamma)$ , si y solo si,  $p \Vdash^* \psi$  y  $p \Vdash^* \gamma$ .

(4)  $p \Vdash^* \neg\psi$ , si y solo si, para cada  $q \leq p$ ,  $\neg(q \Vdash^* \psi)$ .

(5)  $p \Vdash^* \exists x\psi(x)$  si el conjunto  $\{q \leq p \mid \exists\sigma(q \Vdash^* \psi(\sigma))\}$  es denso por debajo de  $p$ .

Nos podemos dar cuenta de que definir noción de  $\Vdash^*$  tiene el objetivo de mantenernos en  $M$  al hablar de él, a diferencia de la noción de forzar donde hacemos uso de la extensión genérica. El Teorema 4.62, relaciona los conceptos de  $\Vdash$  y  $\Vdash^*$ . Los argumentos utilizados para su demostración rebasan los objetivos de este trabajo, motivo por el cuál se omite. Sin embargo, al lector interesado en su demostración se remite a [5, Teorema 3.1.25, pág. 70] ó [23, Theorem 6.22, pág. 99].

**Teorema 4.62.** Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula de la teoría de conjuntos con todas sus variables libres exhibidas,  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$  y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ . Se cumple lo siguiente:

(1) Si  $p \in G$  y  $M \models p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , entonces  $M[G] \models \varphi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$ .

(2) Si  $M[G] \models \varphi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$ , entonces existe  $p \in G$  tal que  $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

Con el Teorema 4.62, podemos establecer el conocido Lema de definibilidad. (Lema 4.63).

**Lema 4.63** (Lema de Definibilidad). *Sea  $M$  un modelo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $\varphi$  una fórmula de la teoría de conjuntos. Para cada  $p \in \mathbb{P}$ , se cumple que  $p \Vdash \varphi$ , si y solo si,  $M \models p \Vdash^* \varphi$ .*

*Demostración.* Consideremos  $p \in \mathbb{P}$  arbitrario. Supongamos primero que  $p \Vdash \varphi$ . Vamos a demostrar que

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid M \models r \Vdash^* \varphi\}$$

es denso por debajo de  $p$ . Supongamos lo contrario, de modo que existe  $q \leq p$  tal que para cada  $r \leq q$  se tiene que  $r \not\Vdash^* \varphi$ . Por la definición de  $\Vdash^*$ , se tiene que  $q \Vdash^* \neg\varphi$ , en consecuencia,  $q \Vdash \neg\varphi$ . Por otro lado, como  $p \Vdash \varphi$  y  $q \leq p$ , por (1) de la Proposición 4.59, se tiene que  $q \Vdash \varphi$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $D$  es denso por debajo de  $p$ , es decir,  $p \Vdash^* \varphi$ .

Ahora, supongamos que  $M \models p \Vdash^* \varphi$  y mostremos que  $p \Vdash \varphi$ . Si  $p \not\Vdash \varphi$ , existe  $G \subseteq \mathbb{P}$  filtro  $\mathbb{P}$ -genérico tal que  $p \in G$  y  $M[G] \not\models \varphi$ , luego,  $M[G] \models \neg\varphi$ , por (2) del Teorema 4.62, existe  $q \in G$  tal que  $q \Vdash^* \varphi$ . Dado que  $p, q \in G$  y  $G$  es filtro, existe  $r \in G$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , entonces  $r \Vdash^* \varphi$  y  $r \Vdash^* \neg\varphi$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $p \Vdash \varphi$ .  $\square$

Como hemos visto anteriormente, el Lema de Definibilidad nos permite relacionar las nociones  $\Vdash$  y  $\Vdash^*$ , de esta manera podemos utilizar el concepto de forzamiento manteniéndonos dentro del modelo base  $M$ .

**Lema 4.64** (Lema de Verdad). *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $\varphi$  una fórmula de la teoría de conjuntos. Entonces para cada filtro  $G \subseteq \mathbb{P}$   $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ , se cumple que  $M[G] \models \varphi$ , si y solo si, existe  $p \in G$  tal que  $p \Vdash \varphi$ .*

*Demostración.* Para la necesidad, supongamos que  $M[G] \models \varphi$ . Por el Teorema 4.62, existe  $p \in G$  tal que  $p \Vdash^* \varphi$ . Por el Lema 4.63, se tiene que  $p \Vdash \varphi$ .

La suficiencia se sigue inmediatamente de la Definición 4.58.  $\square$

En palabras, el Lema de Verdad nos dice que, valga la redundancia, la verdad en  $M[G]$  está forzada. En virtud de los Lemas

4.63 y 4.64, podemos conocer la verdad en  $M[G]$  sin salirnos de  $M$ .

**Corolario 4.65.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $\varphi$  una fórmula de la teoría de conjuntos y  $p \in \mathbb{P}$ . Se cumple lo siguiente:*

(1) *El conjunto*

$$\{p \mid p \Vdash \varphi \vee p \Vdash \neg\varphi\}$$

*es denso en  $\mathbb{P}$ .*

(2)  *$p \Vdash \neg\varphi$ , si y solo si,  $\neg(\exists q \leq p(q \Vdash \varphi))$ .*

(3)  *$p \Vdash \exists x(\varphi(x))$ , si y solo si, el conjunto*

$$\{r \mid \exists \sigma \in M : r \Vdash \varphi(\sigma)\}$$

*es denso por debajo de  $p$ .*

(4) *Si  $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x))$ , entonces existen  $q \leq p$  y  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$  tales que  $q \Vdash \varphi(\pi)$ , donde  $\text{dom}(\sigma) = \{\pi \mid \exists p \in \mathbb{P} : (\pi, p) \in \sigma\}$ .*

*Demostración.* Por la definición de  $\Vdash^*$  (Definición 4.61), se cumplen (1), (2) y (3) para  $\Vdash^*$  y por el Lema 4.63, se cumplen para  $\Vdash$ . En consecuencia, para concluir la prueba de este corolario basta probar (4). Para probar (4), supongamos que  $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x))$ . Ahora, consideremos  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico tal que  $p \in G$ . Luego, existe  $\pi_G \in \sigma_G$  tal que  $M[G] \models \varphi(\pi_G)$ . Por consiguiente  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$  y por el Lema 4.64, existe  $r \in G$  tal que  $r \Vdash \varphi(\pi)$ . Ahora bien, se tiene que  $p, r \in G$  y  $G$  es un filtro, de modo que existe  $q \in G$  tal que  $q \leq p$  y  $q \leq r$ . Como  $q \leq r$  y  $r \Vdash \varphi(\pi)$ , entonces  $q \Vdash \varphi(\pi)$ , pero  $q \leq p$ , de modo que  $q$  satisface la propiedad deseada.  $\square$

**Observación 4.66.** *Si  $\mathbb{P}$  es una noción de forcing y  $\varphi$  es una fórmula de la teoría de conjuntos, por (1) del Corolario 4.65, para cada  $p \in \mathbb{P}$ , existe  $q \in \mathbb{P}$  tal que  $q \leq p$ ,  $q \Vdash \varphi$  ó  $q \Vdash \neg\varphi$ . En este caso se dice que  $q$  decide a  $\varphi$ .*

Concluimos este apartado con el Teorema 4.67, el cual nos asegura que si partimos de un modelo de la teoría de conjuntos, mediante la extensión genérica obtenemos de nuevo un modelo de la teoría de conjuntos. Su demostración escapa del objetivo de esta tesis, razón por la que se omite. Sin embargo, su demostración se puede consultar en [5, Teorema 3.1.31, pág. 76] o [23, Theorem 6.24, pág. 102].

**Teorema 4.67.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $G \subseteq \mathbb{P}$  un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ . Se cumple que  $M[G] \models \mathbf{ZF}$ . Más aún, si  $M \models \mathbf{ZFC}$ , entonces  $M[G] \models \mathbf{ZFC}$ .*

### Forcing de Cohen

En este apartado vamos a definir los forcing de Cohen que se utilizan en el modelo planteado en [22].

**Notación 20.** *Denotamos*

$$\mathbb{C} = \omega^{<\omega} = \{p : n \rightarrow \omega \mid p \text{ es función y } n \in \omega\}.$$

No debe confundirse  $\mathbb{C}$  con el conjunto de los números complejos, pues consideramos que el contexto es claro cuando se utiliza uno u otro significado.

En palabras, el conjunto  $\mathbb{C}$  consta de las sucesiones finitas de números naturales. Ahora bien, definimos la relación  $\leq$  en  $\mathbb{C}$  como sigue:

$$p \leq q, \text{ si y solo si, } q \subseteq p.$$

Más explícitamente,  $p \leq q$ , si y solo si, existe  $n \in \omega$  tal que  $p|_n = q$ . Es claro que  $\leq$  es un orden parcial en  $\mathbb{C}$ . Además,  $\emptyset \in \mathbb{C}$  y es tal que  $p \leq \emptyset$  para cada  $p \in \mathbb{C}$ , de modo que  $\emptyset$  es el elemento mayor de  $\mathbb{C}$  respecto al orden  $\leq$ .

Con lo anterior, estamos en condiciones de definir el forcing de Cohen.

**Definición 4.68** (Forcing de Cohen). *La noción de forcing  $(\mathbb{C}, \leq, \emptyset)$  es llamada el forcing de Cohen.*

**Teorema 4.69.** *Sea  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ . Se cumple lo siguiente:*

- (1)  $\mathbb{C} \in M$ .
- (2)  $\mathbb{C}$  no tiene átomos.
- (3) Si  $G \subseteq \mathbb{C}$  es un filtro  $\mathbb{C}$ -genérico sobre  $M$ , entonces  $G \notin M$ .

*Demostración.*

- (1) Como  $M$  satisface **ZF**, se tiene que  $M$  conoce todo lo que interviene en la definición de  $\mathbb{C}$ , en consecuencia,  $\mathbb{C} \in M$ .
- (2) Sea  $p \in \mathbb{C}$ . Vamos a demostrar que  $p$  no es átomo. Para probar esto, consideremos  $\text{dom}(p) = n \in \omega$  y  $m = n + 1$ . Definamos  $q = p \cup \{(n, 0)\}$  y  $r = p \cup \{(n, 1)\}$ , se tiene que  $q, r \in \mathbb{C}$ ,  $p \subseteq q$  y  $p \subseteq r$ , es decir,  $q \leq p$  y  $r \leq p$ . Además, si  $t \in \mathbb{C}$  cumple que  $t \leq q$  y  $t \leq r$ , entonces  $q \subseteq t$  y  $r \subseteq t$ , en consecuencia,  $t(n) = 0$  y  $t(n) = 1$ , lo cual es imposible debido a que  $t$  es función. En consecuencia,  $q \perp r$ , mostrando así que  $p$  no es átomo. Puesto que  $p$  fue elegido de manera arbitraria, concluimos que  $\mathbb{C}$  no tiene átomos.
- (3) Se sigue de (2) y del Teorema 4.53.

De esta manera concluimos la prueba de nuestro teorema. □

Teniendo definido el forcing de Cohen  $\mathbb{C}$ , estamos en condiciones de definir el forcing  $\mathbb{C}(\alpha)$ , donde  $\alpha$  es un ordinal.

**Definición 4.70.** *Sea  $\alpha$  un ordinal.*

- (1) *Definimos el conjunto*

$$\mathbb{C}^\alpha = \{p \in \mathcal{P}(\alpha \times \mathbb{C}) \mid p \text{ es función}\}.$$

- (2) *Para  $p \in \mathbb{C}^\alpha$ , se define el soporte de  $p$  como el conjunto*

$$\text{sop}(p) = \{\beta < \alpha \mid p(\beta) \neq \emptyset\}.$$

- (3) *Se define el conjunto*

$$\mathbb{C}(\alpha) = \{p \in \mathbb{C}^\alpha \mid |\text{sop}(p)| < \omega\}.$$

#### 4.1. TÓPICOS AVANZADOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 121

(4) Definimos el orden  $\leq$  en  $\mathbb{C}(\alpha)$  de la siguiente manera:

$$p \leq q, \text{ si y solo si, para cada } \beta < \alpha, p(\beta) \leq q(\beta)$$

es decir,

$$p \leq q, \text{ si y solo si, } q(\beta) \subseteq p(\beta), \text{ para cada } \beta < \alpha.$$

**Teorema 4.71.** Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$  y  $\alpha$  un ordinal. Se cumple lo siguiente:

(1)  $\mathbb{C}(\alpha) \in M$ .

(2)  $\mathbb{C}(\alpha)$  no tiene átomos.

(3) Si  $G \subseteq \mathbb{C}(\alpha)$  es un filtro  $\mathbb{C}(\alpha)$ -genérico sobre  $M$ , entonces  $G \notin M$ .

*Demostración.* La demostración se realiza mutatis mutandis a la prueba del Teorema 4.69.  $\square$

Para conocer más propiedades sobre los forcing de Cohen, se puede consultar [23].

#### Otros conceptos de interés en la teoría de forcing

En este apartado escribimos otros conceptos relacionados con la teoría de forcing que consideramos necesarios para el propósito del trabajo.

**Definición 4.72.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $\kappa$  un cardinal no numerable. Decimos que  $\mathbb{P}$  cumple la condición de  $\kappa$ -cadena, ( $\kappa$ -cc), si para cada anticadena  $A \subseteq \mathbb{P}$ , se cumple que  $|A| < \kappa$ . Cuando  $\mathbb{P}$  cumple la condición  $\omega_1$ -cc, se dice que  $\mathbb{P}$  cumple la ccc.

**Definición 4.73.** Sean  $\mathbb{P}$  una noción de forcing y  $\kappa$  un cardinal regular infinito.

(1) Se dice que  $\mathbb{P}$  es  $\kappa$ -cerrado si para cada  $\lambda < \kappa$  y cada sucesión  $(p_\gamma)_{\gamma < \lambda} \subseteq \mathbb{P}$  tal que  $p_\epsilon \leq p_\delta$  si  $\delta \leq \epsilon$ , existe  $q \in \mathbb{P}$  tal que  $q \leq p_\rho$  para cada  $\rho < \lambda$ .

- (2) Se dice que  $\mathbb{P}$  es  $\kappa$ -distributivo si para cada  $\gamma < \kappa$  y para cada familia  $(D_\epsilon)_{\epsilon < \gamma}$  de subconjuntos abiertos densos en  $\mathbb{P}$ , se cumple que  $\bigcap_{\epsilon < \gamma} D_\epsilon$  es abierto denso en  $\mathbb{P}$ .

Vale la pena definir los morfismos entre nociones de forcing.

**Definición 4.74.** Sean  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  nociones de forcing.

- (1) Una función  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  es un morfismo de nociones de forcing, si satisface lo siguiente:
- (a) Para cada  $p, r \in \mathbb{P}$ ,  $p \leq r$  implica  $\pi(p) \leq \pi(r)$ .
  - (b) Para cada  $p, r \in \mathbb{P}$ ,  $p \perp r$ , implica  $\pi(p) \perp \pi(r)$ .
  - (c)  $\pi(1_{\mathbb{P}}) = 1_{\mathbb{Q}}$ .

Cuando  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ ,  $\pi$  es llamado un endomorfismo.

- (2) Un morfismo  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  es denso, si  $\pi(\mathbb{P})$  es denso en  $\mathbb{Q}$ , es decir, para cada  $q \in \mathbb{Q}$ , existe  $p \in \mathbb{P}$  tal que  $\pi(p) \leq q$ .

**Observación 4.75.** Si  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  es un morfismo,  $p, r \in \mathbb{P}$  y  $p \parallel r$ , existe  $s \in \mathbb{P}$  tal que  $s \leq p$  y  $s \leq r$ , por (a) de la Definición 4.74, se tiene que  $\pi(s) \leq \pi(p)$  y  $\pi(s) \leq \pi(r)$ , en consecuencia,  $\pi(p) \parallel \pi(r)$ . Por otro lado, si  $\pi(p) \parallel \pi(r)$ , entonces  $p \parallel r$ , debido a la (b) de la Definición 4.74. En consecuencia, se cumple que  $p \parallel r$  si y solo si  $\pi(p) \parallel \pi(r)$ .

El Teorema 4.76, cuya demostración se puede consultar en [23, Lemma 6.48, pág. 113], nos da una utilidad de los morfismos densos.

**Teorema 4.76.** Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZF**,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$  nociones de forcing y  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  un morfismo denso tal que  $\pi \in M$ . Si  $G \subseteq \mathbb{P}$  es un filtro  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$ , entonces  $H = \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in G : \pi(q) \leq p\}$  es un filtro  $\mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M$ ,  $G = \{p \in \mathbb{P} \mid \pi(p) \in H\}$  y  $M[G] = M[H]$ . También, si  $H \subseteq \mathbb{Q}$  es  $\mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M$ , entonces  $G = \{p \in \mathbb{P} \mid \pi(p) \in H\}$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$  y  $M[H] = M[G]$ .

Un endomorfismo denso en una noción de forcing induce una función entre las clases de los nombres, esto se expresa en la Definición 4.77.

**Definición 4.77.** . Sea  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing y  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  un endomorfismo denso. El morfismo  $\pi$  induce la función  $\hat{\pi} : M^{\mathbb{P}} \rightarrow M^{\mathbb{P}}$  definido por

$$\hat{\pi}(\tau) = \{(\hat{\pi}(\sigma), \pi(p)) \mid (\sigma, p) \in \tau\}.$$

El Teorema 4.78, cuya prueba se puede consultar en [23, Lemma 6.56, pág. 116] relaciona las nociones de forcing mediante un morfismo denso.

**Teorema 4.78.** Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P} \in M$  una noción de forcing,  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  un endomorfismo denso tal que  $\pi \in M$ ,  $p \in \mathbb{P}$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula de la teoría de conjuntos y  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ . Se cumple que  $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , si y solo si,  $\pi(p) \Vdash \varphi(\hat{\pi}(\tau_1), \dots, \hat{\pi}(\tau_n))$ .

Para concluir este apartado daremos la definición de producto de nociones de forcing y algunas propiedades.

**Definición 4.79.** Sean  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$  nociones de forcing. El producto de  $\mathbb{P}$  con  $\mathbb{Q}$  se define como la noción de forcing

$$(\mathbb{P} \times \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}}, (1_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{Q}}))$$

donde  $\leq_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} \subseteq (\mathbb{P} \times \mathbb{Q})^2$  se define como

$$(p_1, q_1) \leq_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} (p_2, q_2), \text{ si y solo si, } p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_2 \text{ y } q_1 \leq_{\mathbb{Q}} q_2.$$

Enunciamos el Lema del producto, cuya prueba se puede encontrar en [23, Lemma 6.65, pág. 118].

**Teorema 4.80** (Lema del producto). Sean  $M$  un modelo transitivo de  $\mathbf{ZF}$ ,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$  nociones de forcing,  $G \subseteq \mathbb{P}$  y  $H \subseteq \mathbb{Q}$  filtros. Si  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$  y  $H$  es  $\mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M[G]$ , entonces  $G \times H$  es  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M$ . Por otro lado, si  $K \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$  es  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M$  y consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} G &= \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{Q} : (p, q) \in K\} \\ H &= \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in \mathbb{P} : (p, q) \in K\} \end{aligned}$$

se cumple que  $G$  es  $\mathbb{P}$ -genérico sobre  $M$  y  $H$  es  $\mathbb{Q}$ -genérico sobre  $M[G]$ .

Finalmente enunciamos el Teorema 4.81, que nos da una propiedad para los filtros  $\mathbb{C}(\alpha)$ -genéricos. La demostración del Teorema 4.81 se puede consultar en [23, Lemma 6.66, pág. 119].

**Teorema 4.81.** *Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZFC**,  $\alpha \in M$  un ordinal,  $G \subseteq \mathbb{C}(\alpha)$  un filtro  $\mathbb{C}(\alpha)$ -genérico sobre  $M$  y  $x \in M[G] \cap \omega^\omega$ . Se cumple que existe un filtro  $H \subseteq \mathbb{C}$ ,  $H \in M[G]$   $\mathbb{C}$ -genérico sobre  $M$  tal que  $x \in M[H]$ . Más aún, si  $\omega_1^M \leq \alpha$ , existe un filtro  $K \subseteq \mathbb{C}(\alpha)$ ,  $K \in M[G]$   $\mathbb{C}(\alpha)$ -genérico sobre  $M[H]$  tal que  $M[G] = M[H][K]$ .*

Para conocer éstas y más propiedades acerca de la teoría de forcing, se sugiere consultar [10], [13], [14], [15] y [23].

## 4.2. Un modelo de ZF donde falla AC y existen FANL

En este apartado, vamos a describir de manera general los pasos a seguir para la construcción del modelo planteado en [22] por Ralf Schindler, Liuzhen Wu y Liang Yu.

Finalmente, mostraremos que en el modelo planteado existen FANL y por la construcción del modelo se tiene que falla **AC**, concluyendo así que en **ZF**, la implicación

**Existencia de funciones aditivas no lineales**

↓

**Axioma de Elección**

es falsa.

Podemos notar que si tenemos un modelo transitivo de **ZFC**, digamos  $M$ , se pueden definir los números reales en  $M$  debido a que las nociones que intervienen en su definición son absolutas. De esta manera se introduce la Definición 4.82.

**Definición 4.82.** [22, Definition 2.1] *Sea  $M$  un modelo transitivo de **ZFC** y  $R$  el conjunto de los reales en  $M$ . Describimos el conjunto  $\mathbb{H}(R)$  como sigue:  $p \in \mathbb{H}(R)$ , si y solo si, existe  $x \in R$  tal que:*

- (1)  $p \in L[x]$ .

## 4.2. UN MODELO DE ZF DONDE FALLA AC Y EXISTEN FANL125

(2)  $p$  es una base para  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[x])$ .

Definimos la relación  $\leq$  en  $\mathbb{H}(R)$  como sigue:  $p \leq q$ , si y solo si,  $q \subseteq p$ .

En la Observación 4.83, se justifica que la Definición 4.82 tiene sentido.

**Observación 4.83.** Consideremos  $M$  un modelo transitivo de **ZFC** y  $R$  los reales de  $M$ .

(1) Por el Teorema 4.28, para cada  $x \in R$ , se tiene que  $L[x] \models$  **ZFC**, de modo que existen los reales en  $L[x]$ , los cuáles se denotan por  $\mathbb{R} \cap L[x] = \mathbb{R}_x$ . Como  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}_x$  es un espacio vectorial y  $L[x]$  satisface el Axioma de Elección,  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}_x$  tiene base en  $L[x]$ . De esta manera, se tiene que

$$\mathcal{B}_x = \{B_x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_x) \mid B_x \text{ es base en } L[x] \text{ para } {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}_x\}$$

es un conjunto no vacío para cada  $x \in R$ . Por el Axioma de Reemplazo, en virtud de que  $R$  es un conjunto, se tiene que la colección

$$\{\mathcal{B}_x \mid x \in R\}$$

es también un conjunto. Se puede observar que

$$\mathbb{H}(R) = \bigcup_{x \in R} \mathcal{B}_x$$

el cual es un conjunto por el Axioma de la unión. Por lo tanto, se establece que  $\mathbb{H}(R)$  es un conjunto no vacío.

(2) Es claro que  $\leq$  de la Definición 4.82, es un orden parcial.

Si  $M$  es un modelo transitivo de **ZFC**,  $R$  es el conjunto de los números reales de  $M$  y  $W$  es un modelo interior de **ZFC** tal que  $R \in W$ , se puede notar que  $W$  conoce todo lo que interviene en la definición de  $\mathbb{H}(R)$ , entonces  $\mathbb{H}(R) \in W$ . En particular, cuando  $R = \mathbb{R} \cap W$ .

Consideremos  $L$  como en Definición 4.26 y el forcing  $\mathbb{C}(\omega_1)$  de la Definición 4.70, siendo  $\omega_1$  el primer cardinal no numerable,  $G$  un filtro  $\mathbb{C}(\omega_1)$ -genérico sobre  $L$ . En virtud del Teorema 4.28,  $L$  es un modelo transitivo de **ZFC**, por el Teorema 4.67,  $L[G]$  es un

modelo transitivo de **ZFC**, de modo que podemos considerar  $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap L[G]$ . Ahora bien, por los Teoremas 4.33 y 4.34, se cumple que  $L(\mathbb{R}_0)$  es un modelo transitivo de **ZF**. Como  $\mathbb{C}(\omega_1) \in L \subseteq L(\mathbb{R}_0)$ , entonces  $\mathbb{C}(\omega_1) \in L(\mathbb{R}_0)$ . Como  $\mathbb{C}(\omega_1)$  no tiene átomos, por el Teorema 4.53, se tiene que  $G \notin L(\mathbb{R}_0)$ . De esta manera, el Lema 4.84, únicamente tiene sentido en  $L[G]$ .

**Notación 21.** Sean  $M$  un modelo transitivo de **ZFC**,  $\alpha$  un ordinal,  $G \subseteq \mathbb{C}(\alpha)$  un filtro  $\mathbb{C}(\alpha)$ -genérico sobre  $M$  y  $\beta < \alpha$ . Denotamos

$$G_{|\beta} = \{f_{|\beta} \mid f \in G\}.$$

**Lema 4.84.** [22, Claim 2.2] Sea  $D \in L[G]$ , definido de la siguiente manera:  $p \in D$ , si y solo si,  $p \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  y existen  $x \in \mathbb{R}_0$ ,  $\alpha < \omega_1$  tales que:

- (1)  $q \in L[x]$ .
- (2)  $q$  es una base para  $\mathbb{Q}(\mathbb{R} \cap L[x])$ .
- (3)  $L[x] = L[G_{|\alpha}]$ .

Se cumple que  $D$  es denso en  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ .

*Demostración.* Consideremos  $p \in L[G] \cap \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ . Luego,  $p \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ , por la Definición 4.82, existe  $y \in \mathbb{R}_0$  tal que  $p \in L[y]$  y  $p$  es una base para  $\mathbb{Q}(\mathbb{R} \cap L[y])$ . Ahora bien,  $y \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap L[G]$ , en consecuencia,  $y \in L[G]$ . Como  $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1)$ , tenemos que  $L[G] = \bigcup_{\beta < \omega_1} L[G_{|\beta}]$ , por consiguiente, existe  $\alpha < \omega_1$  tal que  $y \in L[G_{|\alpha}]$ . Podemos observar que  $G_{|\alpha} = (f_\delta)_{\delta < \alpha}$ , donde  $f_\delta \in \mathbb{C}$  (ver Definición 4.68) para cada  $\delta < \alpha$ . Sabemos que la noción de biyección es absoluta en  $L$ , ya que  $L$  es transitiva. Como  $\alpha < \omega_1$ , existe una biyección en  $L$  entre  $\alpha \times \omega$  y  $\omega$ , también, hay una biyección entre  $\omega$  y  $\omega^{<\omega}$ , en consecuencia,  $G_{|\alpha}$  se puede identificar con una única función  $h : \omega \rightarrow \omega$  y como en  $L$  se cumple el Axioma de Elección,  $\omega^\omega$  es equipotente a  $\mathbb{R} \cap L$  en  $L$ , por absolutez,  $\omega^\omega$  es equipotente a  $\mathbb{R}_0$  en  $L[G]$ . Se sigue que  $G_{|\alpha}$  se puede identificar con un único real  $x \in \mathbb{R}_0$ , en consecuencia,  $L[G_{|\alpha}] = L[x]$ . Ahora, tenemos que  $y \in L[x]$ , pero  $L[y]$  es el menor modelo transitivo que contiene a  $y$ , en consecuencia,  $L[y] \subseteq L[x]$ , entonces,  $\mathbb{R} \cap L[y] \subseteq \mathbb{R} \cap L[x]$ . Como  $p$  es una base de  $\mathbb{R} \cap L[y]$ , entonces es linealmente independiente

## 4.2. UN MODELO DE ZF DONDE FALLA AC Y EXISTEN FANL127

en  $\mathbb{R} \cap L[y]$  y consecuentemente, lo es en  $\mathbb{R} \cap L[x]$ , pero en  $L[x]$  se cumple el Axioma de Elección, por tanto, existe una base  $q$  de  $\mathbb{Q}(\mathbb{R} \cap L[x])$  tal que  $p \subseteq q$ , obteniendo así que  $q \in D$  y  $q \leq p$ . Por lo tanto,  $D$  es denso en  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ .  $\square$

**Lema 4.85.** [22, Claim 2.3] *En  $L[G]$ , se cumplen las siguientes propiedades:*

- (1)  $L(\mathbb{R}_0)$  es cerrado bajo  $\omega$ -sucesiones.
- (2) Para cada  $x \in \mathbb{R}_0$  y  $f \in L[x]^\omega$ , existe  $y \in \mathbb{R}_0$  tal que  $f \in L[y]$ .

*Demostración.*

- (1) Sabemos que en  $L(\mathbb{R}_0)$ , los conjuntos son definibles por ordinales a partir de reales en  $\mathbb{R}_0$ . Dado que  $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap L[G]$ , basta demostrar que  $\mathbf{OR}^\omega \cap L[G] \subseteq L(\mathbb{R}_0)$ . Consideremos  $\tau_G \in \mathbf{OR}^\omega \cap L[G]$ , con  $\tau \in L^{\mathbb{C}(\omega_1)}$ . Luego, existe  $p \in G$  tal que

$$p \Vdash_L^{\mathbb{C}(\omega_1)} \tau : \omega \rightarrow \mathbf{OR}.$$

Se cumple que para cada  $n \in \omega$ , el conjunto

$$D_n = \left\{ r \in \mathbb{C}(\omega_1) \mid r \Vdash_L^{\mathbb{C}(\omega_1)} \text{“}\exists \gamma \in \mathbf{OR} : \tau(n) = \gamma\text{”} \right\}$$

es denso en  $\mathbb{C}(\omega_1)$  y podemos considerar  $A_n \subseteq D_n$ , donde  $A_n$  es una anticadena máxima, esto para cada  $n \in \omega$ . Utilizando el Teorema 4.51, podemos suponer que

$$\tau = \{((n, \gamma), q) \mid n \in \omega, \gamma \in \mathbf{OR}, q \in A_n\}$$

donde  $A_n$  es una anticadena en  $\mathbb{C}(\omega_1)$  para cada  $n \in \omega$ . Como  $\mathbb{C}(\omega_1)$  satisface ccc, se tiene que  $|A_n| < \omega_1$  para cada  $n \in \omega$ , en consecuencia,  $\tau_G \in L[G|_\alpha]$  para algún  $\alpha < \omega_1$ . Utilizando el argumento de la demostración del Lema 4.84, se obtiene que  $L[G|_\alpha] \subseteq L(\mathbb{R}_0)$ , así que  $\tau_G \in L(\mathbb{R}_0)$ . Por lo tanto, se concluye lo deseado.

- (2) Mutatis mutandis a la prueba de (1).

De esta manera queda probado el lema.  $\square$

El Axioma de Elecciones Dependientes se enuncia de la siguiente manera.

**Axioma 22** (Axioma de Elecciones Dependientes (**ADC**)). *Para cada conjunto  $A$  y cada relación  $R \subseteq A^2$ , se cumple lo siguiente: Si  $a \in A$  y para cada  $x \in A$ , existe  $y \in A$  tal que  $(x, y) \in R$ , entonces existe una función  $f : \omega \rightarrow A$  tal que  $f(0) = a$  y  $f(n)Rf(n+1)$  para cada  $n \in \omega$ .*

Podemos darnos cuenta de que una consecuencia de la parte (1) del Lema 4.85, es que en  $L(\mathbb{R}_0)$  se satisface **ZF+ADC**.

Para proceder a enunciar y probar el Lema 4.86, es necesario establecer un convenio de notación.

**Notación 22.** *Sean  $x, y$  conjuntos y  $(x_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos. Denotamos*

$$x \oplus y = (x \times \{0\}) \cup (y \times \{1\}).$$

$$\bigoplus_{i \in I} x_i = \bigcup_{i \in I} (x_i \times \{i\}).$$

*Apelamos a la atención del lector para no confundir la notación anterior con la suma directa de espacios vectoriales.*

**Lema 4.86.** [22, Claim 2.4] *Consideremos  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  como anteriormente. Se cumple lo siguiente:*

- (1) *Para cada  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ , se cumple que  $p$  y  $q$  son compatibles, si y solo si,  $p \cup q$  es linealmente independiente.*
- (2)  *$\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  es  $\omega$ -cerrado en  $L[G]$  y en  $L(\mathbb{R}_0)$ .*

*Demostración.*

- (1) Sean  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ . Para la primera implicación, supongamos que  $p$  y  $q$  son compatibles y demostremos que  $p \cup q$  es linealmente independiente. Para probar esto, observemos que como  $p$  y  $q$  son compatibles, existe  $r \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  tal que  $r \leq p$  y  $r \leq q$ , esto es,  $p \subseteq r$  y  $q \subseteq r$ . Ahora, como  $r \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ , existe  $x \in \mathbb{R}_0$  tal que  $r \in L[x]$  y  $r$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[x])$ , en particular,  $r$  es linealmente independiente. Como  $p \subseteq r$  y  $q \subseteq r$ , entonces  $p \cup q \subseteq r$ , al ser  $r$

linealmente independiente, se tiene que  $p \cup q$  es linealmente independiente.

Para la otra implicación, supongamos que  $p \cup q$  es linealmente independiente. Demostraremos que  $p$  y  $q$  son compatibles. Para esto, notemos que como  $p, q \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ , existen  $x \in \mathbb{R}_0$ ,  $y \in \mathbb{R}_0$  tales que  $p \in L[x]$ ,  $q \in L[y]$ ,  $p$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[x])$  y  $q$  es base de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[y])$ . Consideremos  $x \oplus y$  como en la Notación 22, luego  $x \in L[x \oplus y]$  y  $y \in L[x \oplus y]$ , pero  $L[x]$  y  $L[y]$  son el menor modelo transitivo que contiene a  $x$  e  $y$ , respectivamente, en consecuencia  $L[x], L[y] \subseteq L[x \oplus y]$ , por tanto,  $\{p, q\} \subseteq L[x \oplus y]$ . Como  $L[x \oplus y]$  es transitiva, se tiene que  $p \cup q \subseteq L[x \oplus y]$ , por tanto,  $p \cup q \subseteq \mathbb{R} \cap L[x \oplus y]$ . Dado que  $p \cup q$  es linealmente independiente y en  $L[x \oplus y]$  se cumple el Axioma de Elección, existe una base  $r$  de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[x \oplus y])$  tal que  $p \cup q \subseteq r$ . Luego,  $p \subseteq r$ ,  $q \subseteq r$  y  $r \in \mathbb{R}_0$ , de la Definición 4.82,  $r \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ ,  $r \leq p$  y  $r \leq q$ . Por lo tanto,  $p$  y  $q$  son compatibles.

- (2) Por el Lema 4.85, basta demostrar que la afirmación se cumple en  $L[G]$ . Sea  $(p_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  tal que  $p_{n+1} \leq p_n$  para cada  $n \in \omega$ . Se tiene que para cada  $n \in \omega$ , existe  $x_n \in \mathbb{R}_0$  tal que  $p_n \in L[x_n]$ . Si consideramos  $x = \bigoplus_{n \in \omega} x_n$  como en la Notación 22, se tiene que  $(p_n)_{n \in \omega} \subseteq L[x]$ . Aplicando (b) del Lema 4.85, existe  $y \in \mathbb{R}_0$  tal que  $(p_n)_{n \in \omega} \in L[y]$ , dado que  $L[y]$  es transitiva, se tiene que  $\bigcup p_n \subseteq L[y]$  y utilizando inductivamente el argumento de (1), se establece que cualquier subconjunto finito de  $\bigcup_{n \in \omega} p_n$  es linealmente independiente en  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[y])$ , por consiguiente,  $\bigcup_{n \in \omega} p_n$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R} \cap L[y]$ . Como en  $L[y]$  se cumple el Axioma de Elección, existe una base  $p$  de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[y])$  tal que  $\bigcup_{n \in \omega} p_n \subseteq p$ , en consecuencia,  $p_n \subseteq p$  para cada  $n \in \omega$ , es decir,  $p \leq p_n$  para cada  $n \in \omega$ . Por lo tanto, se cumple lo deseado.

De esta manera, se concluye la prueba de este lema.  $\square$

En lo sucesivo, consideraremos un filtro fijo  $H \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$  que sea  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ -genérico sobre  $L[G]$ . En virtud de (2) del Lema 4.86, se

tiene que

$$\mathbb{R} \cap L(\mathbb{R}_0)[H] = \mathbb{R} \cap L(\mathbb{R}_0) = \mathbb{R}_0.$$

Además, cualesquiera dos elementos en  $H$  son compatibles, en consecuencia, cualquier subconjunto finito de  $\bigcup H$  es linealmente independiente, lo cual implica que  $\bigcup H$  es linealmente independiente. Más aún, en virtud del Lema 4.84 y la  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ -genericidad de  $H$ , se sigue que  $\bigcup H$  es una base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}_0$  y  $\bigcup H \in L(\mathbb{R}_0)[H]$ . De aquí se deduce que en el modelo  $L(\mathbb{R}_0)[H]$  existe al menos una base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}_0$ , a saber,  $B = \bigcup H$ .

Con los argumentos expuestos hasta el momento, estamos en condiciones de establecer el Lema 4.87 ([22, Claim 2.5]), el cual exhibe una falla del Axioma de Elección en el modelo planteado.

**Lema 4.87.** [22, Claim 2.5] *Sea  $H$  un filtro  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)$ -genérico sobre  $L[G]$  y por tanto sobre  $L(\mathbb{R}_0)$ . No existe un buen orden para  $\mathbb{R}_0$  en  $L(\mathbb{R}_0)[H]$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un buen orden, en  $L(\mathbb{R}_0)[H]$ , para  $\mathbb{R}_0$ . Luego, existe una biyección  $f : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_0$  en  $L(\mathbb{R}_0)[H]$ . Como  $f \in L(\mathbb{R}_0)[H]$ , entonces  $f = \tau_H$ , para alguna  $\tau \in L(\mathbb{R}_0)^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)}$ . Dado que  $\tau \in L(\mathbb{R}_0)$ , existen una fórmula  $\varphi$  de la teoría de conjuntos,  $z \in \mathbb{R}_0$  y  $\gamma \in \mathbf{OR}$  tales que

$$\tau = \{u \mid L(\mathbb{R}_0) \models \varphi(u, z, \gamma)\}.$$

Por simplicidad, denotemos  $g = \tau = \{u \mid L(\mathbb{R}_0) \models \varphi(u, z, \gamma)\}$  y consideremos  $p_0 \in H$  tal que

$$p_0 \Vdash_{L(\mathbb{R}_0)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)} \text{“}g : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_0 \text{ es biyección”}. \quad (4.1)$$

Por el Lema 4.84, existe  $\alpha < \omega_1$  tal que  $p_0 \in L[G_{|\alpha}]$  y  $p_0$  es una base para  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[G_{|\alpha}])$ . Además, podemos suponer que  $z \in L[G_{|\alpha}]$ . Por la ecuación (4.1), se tiene que

$$\Vdash_{L[G_{|\alpha}]}^{\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha)} \text{“}\hat{p}_0 \Vdash_{L(\mathbb{R})}^{\mathbb{H}(\mathbb{R})} \hat{g} : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ es biyección”} \quad (4.2)$$

donde  $\mathbb{R}$  son los reales de la extensión de forcing y  $\hat{g} = \{u \mid L(\mathbb{R}) \models \varphi(u, \hat{z}, \hat{\gamma})\}$ .

Ahora, elijamos un filtro  $\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha)$ -genérico sobre  $L[G]$ , digamos  $\overline{G}$  y definamos  $G_1$  como sigue:

$$G_1 = \{f \in \mathbb{C}(\omega_1) \mid f_{|\alpha} \in G_{|\alpha}, f_{|(\omega_1 \setminus \alpha)} \in \overline{G}\}.$$

## 4.2. UN MODELO DE ZF DONDE FALLA AC Y EXISTEN FANL131

Se cumple que  $G_1$  es  $\mathbb{C}(\omega_1)$ -genérico, ya que  $G_{|\alpha}$  es  $\mathbb{C}(\alpha)$ -genérico y  $\overline{G}$  es  $\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha)$ -genérico. Denotando  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \cap L[G_1]$ , por la ecuación (4.2), tenemos que

$$p_0 \Vdash_{L(\mathbb{R}_1)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_1)} \text{“} g_1 : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_1 \text{ es biyección”} \quad (4.3)$$

donde  $g_1 = \{u \mid L(\mathbb{R}_1) \models \varphi(u, z, \gamma)\}$ .

Denotemos  $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} \cap L[G][\overline{G}]$ . Se cumple que

$$\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha) \cong \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha) \times \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha)$$

pues se puede notar que

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha) & \rightarrow & \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha) \times \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \alpha) \\ f & \mapsto & (f, f) \end{array}$$

es un morfismo denso de nociones de forcing. En consecuencia, debido a la ecuación (4.2), se cumple que

$$p_0 \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“} g_2 : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_2 \text{ es biyección”} \quad (4.4)$$

donde  $g_2 = \{u \mid L(\mathbb{R}_2) \models \varphi(u, z, \gamma)\}$ . Sea  $H_1$  un filtro  $\mathbb{H}(\mathbb{R}_1)$ -genérico sobre  $L(\mathbb{R}_1)$ . Es claro que  $\mathbb{R}_0 \neq \mathbb{R}_1$ , en consecuencia, por las ecuaciones (4.3) y (4.4), existen  $\eta < \omega_1$ ,  $n, m_1, m_2 \in \omega$  con  $m_1 \neq m_2$ ,  $p \in H$  y  $p_1 \in H_1$  tales que

$$p \Vdash_{L(\mathbb{R}_0)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_0)} \text{“} g(\eta)(n) = m_1 \text{”} \quad (4.5)$$

y

$$p_1 \Vdash_{L(\mathbb{R}_1)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_1)} \text{“} g_1(\eta)(n) = m_2 \text{”}. \quad (4.6)$$

De acuerdo con el Lema 4.84, podemos suponer que existen  $\beta_1, \beta_2 < \omega_1$  tales que  $p \in L[G_{|\beta_1}]$  y  $p$  es una base para  $\mathbb{Q}(\mathbb{R} \cap L[G_{|\beta_1}])$ ,  $p_1 \in L[G_{|\beta_2}]$  y  $p_1$  es una base para  $\mathbb{Q}(\mathbb{R} \cap L[G_{|\beta_2}])$ . Por las ecuaciones (4.5) y (4.6), se tiene que

$$\Vdash_{L[G_{|\beta_1}]}^{\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_1)} \text{“} \hat{p} \Vdash_{L(\mathbb{R})}^{\mathbb{H}(\mathbb{R})} \hat{g}(\hat{\eta})(\hat{n}) = \hat{m}_1 \text{”} \quad (4.7)$$

y

$$\Vdash_{L[G_{|\beta_2}]}^{\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_2)} \text{“} \hat{p}_1 \Vdash_{L(\mathbb{R})}^{\mathbb{H}(\mathbb{R})} \hat{g}_1(\hat{\eta})(\hat{n}) = \hat{m}_2 \text{”} \quad (4.8)$$

donde  $\mathbb{R}$  denota el conjunto de los números reales de las respectivas extensiones de forcing.

Vamos a demostrar que  $p_0 \cup p \cup p_1$  es linealmente independiente. Para probar esto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^j a_i x_i + \sum_{i=1}^k b_i y_i + \sum_{i=1}^l c_i z_i = 0$$

donde  $j, k, l \in \omega \setminus \{0\}$ ,  $\{a_i\}_{i=1}^j \cup \{b_i\}_{i=1}^k \cup \{c_i\}_{i=1}^l \subseteq \mathbb{Q}$ ,  $\{x_i\}_{i=1}^j \subseteq p_0$ ,  $\{y_i\}_{i=1}^k \subseteq p \setminus p_0$  y  $\{z_i\}_{i=1}^l \subseteq p_1 \setminus p$ . Por la elección de  $p_0$ ,  $p$  y  $p_1$ , tenemos que  $p_0 \subseteq L[G|_\alpha]$ ,  $p \setminus p_0 \subseteq L[G]$  y  $p_1 \setminus p \subseteq L[G_1]$ . Notemos que

$$\sum_{i=1}^l c_i z_i = - \left( \sum_{i=1}^j a_i x_i + \sum_{i=1}^k b_i y_i \right)$$

por consiguiente,  $\sum_{i=1}^l c_i z_i \in L[G] \cap L[G_1] = L[G|_\alpha]$ , de modo que  $\sum_{i=1}^l c_i z_i \in L[G|_\alpha]$ . Debido a que  $p_0$  es una base de  ${}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \cap L[G|_\alpha])$ , se cumple que

$$\sum_{i=1}^l c_i z_i = \sum_{i=1}^s d_i w_i$$

con  $s \in \omega \setminus \{0\}$ ,  $\{d_i\}_{i=1}^s \subseteq \mathbb{Q}$  y  $\{w_i\}_{i=1}^s \subseteq p_0$ . De esta manera, tenemos que

$$\sum_{i=1}^l c_i z_i - \sum_{i=1}^s d_i w_i = 0.$$

Dado que  $p_0 \cup p_1 \subseteq \bigcup H_1$  y  $\bigcup H_1$  es linealmente independiente por el Lema 4.86, se cumple que  $p_0 \cup p_1$  es linealmente independiente, en consecuencia,  $c_r = 0$  y  $d_t = 0$  para cada  $r \in \{1, \dots, l\}$  y  $t \in \{1, \dots, s\}$ , por consiguiente,  $\sum_{i=1}^l c_i z_i = 0$ , así que

$$\sum_{i=1}^j a_i x_i + \sum_{i=1}^k b_i y_i = 0.$$

En virtud de que  $p_0 \cup p \subseteq \bigcup H$  y  $\bigcup H$  es linealmente independiente, se tiene que  $p_0 \cup p$  es linealmente independiente, en consecuencia,  $a_r = 0$  y  $b_t = 0$  para cada  $r \in \{1, \dots, j\}$  y  $t \in \{1, \dots, k\}$ . De esta manera, hemos probado que  $p_0 \cup p \cup p_1$  es linealmente independiente.

## 4.2. UN MODELO DE ZF DONDE FALLA AC Y EXISTEN FANL133

Sustituyendo  $\mathbb{R}_2$  por  $\mathbb{R}_0$  en (1) del Lema 4.86, se tiene que  $p_0$ ,  $p$  y  $p_1$  son compatibles, por consiguiente, existe  $q \in \mathbb{H}(\mathbb{R}_2)$  tal que  $q \leq p_0$ ,  $q \leq p$  y  $q \leq p_1$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha \leq \beta_1$  y  $\beta_1 = \beta_2$ , luego, se tiene que

$$\mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_1) \cong \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_1) \times \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_2) \cong \mathbb{C}(\omega_1 \setminus \beta_2).$$

Por las ecuaciones (4.7) y (4.8), tenemos que

$$p \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“}g_2(\eta)(n) = m_1\text{”} \quad (4.9)$$

y

$$p_1 \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“}g_2(\eta)(n) = m_2\text{”}. \quad (4.10)$$

Como  $q \leq p_0$ ,  $q \leq p$  y  $q \leq p_1$ , por la Proposición 4.59, se tiene que

$$q \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“}g_2 \text{ es biyección”}, \quad (4.11)$$

$$q \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“}g_2(\eta)(n) = m_1\text{”} \quad (4.12)$$

y

$$q \Vdash_{L(\mathbb{R}_2)}^{\mathbb{H}(\mathbb{R}_2)} \text{“}g_2(\eta)(n) = m_2\text{”}. \quad (4.13)$$

con  $m_1 \neq m_2$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto, no puede haber un buen orden para  $\mathbb{R}_0$  en  $L(\mathbb{R}_0)[H]$ .  $\square$

Con los argumentos expuestos, se puede establecer el Teorema 4.88.

**Teorema 4.88.** [22, Theorem 1.1] *Existe una extensión simétrica de  $L$  en la cual se cumple lo siguiente:*

- (1) **ZF+ADC.**
- (2) *Existen bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ .*
- (3) *No existe un buen orden para  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Por los Lemas 4.84, 4.85, 4.86 y 4.87, se sigue que  $L(\mathbb{R}_0)[H]$  es un modelo que satisface las condiciones deseadas.  $\square$

Con el Teorema 4.88, estamos en “perfectas condiciones” de responder a la pregunta principal de esta tesis, que es saber si la implicación

$$\text{Existencia de funciones aditivas no lineales} \quad (4.14)$$

$$\Downarrow$$

**Axioma de Elección**

es falsa o verdadera, lo cual hacemos en el Teorema 4.89.

**Teorema 4.89.** *Existen modelos de  $\mathbf{ZF}$  en el cual existen funciones aditivas no lineales pero no se cumple el Axioma de Elección.*

*Demostración.* Consideremos el modelo  $L(\mathbb{R}_0)[H]$  como en el Teorema 4.88, el cual por simplicidad lo llamaremos  $N$ , es decir,  $N = L(\mathbb{R}_0)[H]$ . Por (3) del Teorema 4.88, no se cumple el Axioma de Elección en  $N$ , pues sabemos que el Axioma de Elección es equivalente a que todo conjunto se puede bien ordenar y en  $N$  hay un conjunto que no puede ser bien ordenado, a saber,  $\mathbb{R}_0$ .

Por otro lado, en virtud de (2) del Teorema 4.88, existe al menos una base para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  en  $N$ . Por el Teorema 3.11, existe al menos una función aditiva no lineal en  $N$ , digamos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por lo tanto, se cumple lo deseado.  $\square$

A partir del Teorema 4.89, tenemos el argumento para concluir que la implicación 4.14 es falsa.

### 4.3. Algunos comentarios

En este apartado, vamos a realizar algunos comentarios de interés sobre la relación de la existencia de funciones aditivas no lineales respecto a algunas consecuencias posiblemente más débiles que el Axioma de Elección. En particular, se menciona una relación con el Axioma de Elecciones Numerables, que se enunciará más adelante así como con la existencia de subconjuntos de los reales que no son Lebesgue-Medibles. Cabe mencionar que debido al propósito de este trabajo, las demostraciones de los resultados que se enunciarán en este apartado serán omitidas. Sin embargo, daremos las correspondientes referencias donde el lector más interesado las puede consultar.

De acuerdo con el modelo planteado en [22] por Ralf Schindler, Liuzhen Wu y Liang Yu, podemos concluir que existen modelos de **ZF** donde existen funciones aditivas no lineales y falla el Axioma de Elección, como se mencionó a lo largo de la Sección 4.2. Esto nos indica que la existencia de funciones aditivas no lineales es una premisa más débil que el Axioma de Elección.

Para el resultado que vamos a mencionar a continuación, es necesario recordar el Axioma de Elecciones numerables, como se enuncia a continuación.

**Axioma 23** (Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**)). *Para cada familia numerable de conjuntos no vacíos  $\{A_n\}_{n \in \omega}$ , existe una función*

$$f : \omega \rightarrow \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

*tal que  $f(n) \in A_n$  para cada  $n \in \omega$ .*

En [21], se plantea el Teorema 4.90, el cual en palabras nos presenta un modelo donde existen bases para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  pero falla el Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**).

**Teorema 4.90.** [21, Theorem 1.1] *Existe un modelo de **ZF** en el cual no se cumple el Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**) pero se cumple lo siguiente:*

1. *Existe un conjunto de Luzin de cara clara  $\Delta_2^1$ .*
2. *Existe un conjunto de Serpiński de cara clara  $\Delta_2^1$ .*
3. *Existe un conjunto de Bernstein de cara clara  $\Delta_3^1$ .*
4. *Existe una base para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  de cara clara  $\Delta_3^1$ .*

Como consecuencia del Teorema 4.90 y el Teorema 3.11, podemos establecer el Teorema 4.91, cuya prueba se realiza mutatis mutandis la prueba del Teorema 4.89.

**Teorema 4.91.** *Existen modelos de **ZF** donde existen funciones aditivas no lineales pero no se cumple el Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**).*

De esta manera, podemos concluir que la existencia de funciones aditivas no lineales tampoco es equivalente al Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**).

Finalmente, vamos a mencionar un modelo de **ZF**, conocido en la literatura como el Modelo de Solovay, en el cual todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  son Lebesgue-medibles. Una prueba de este hecho se puede consultar en [23, Theorem 8.23, pág. 157]. Resumiendo estos argumentos, enunciamos el Teorema 4.92.

**Teorema 4.92.** *Existen modelos de **ZF** donde todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  son Lebesgue-medibles.*

En virtud del Teorema 4.92, se puede establecer el Teorema 4.93, cuya prueba se sigue del Corolario 3.22.

**Teorema 4.93.** *Existen modelos de **ZF** donde todas las funciones aditivas son lineales.*

Más aún, con los argumentos que se expusieron, por lo menos podemos concluir que la existencia de funciones aditivas no lineales es independiente de **ZF**, pues hay un modelo de **ZF** donde existen funciones aditivas no lineales, a saber, el modelo del Teorema 4.89 y hay un modelo de **ZF** donde no existen funciones aditivas no lineales, a saber, el modelo de [23, Theorem 8.23, pág. 157].

Se sabe también que el Axioma de Elecciones Dependientes (**ADC**) implica el Axioma de Elecciones Numerables (**ANC**), una prueba de este hecho se puede consultar en [8, Teorema 8.67, pág. 211]. Por consiguiente en el modelo del Teorema 4.88, se cumple la existencia de funciones aditivas no lineales y el Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**), mientras que en el modelo del Teorema 4.90, se cumple la existencia de funciones aditivas no lineales y la negación del Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**). De esta manera, podemos concluir que el Axioma de Elecciones Numerables(**ANC**) es independiente de **ZF** más la existencia de funciones aditivas no lineales.

# Conclusiones

El desarrollo de esta tesis se centró en presentar la relación que existe entre el Axioma de Elección y la existencia de funciones aditivas no lineales en  $\mathbb{R}$ .

En el Capítulo 1, se expusieron los conceptos básicos que consideramos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Dentro de los temas que destacan son conceptos elementales de conjuntos, espacios vectoriales y análisis matemático.

En el Capítulo 2, se estudiaron las propiedades elementales de las funciones aditivas. Dentro de las que destacan, es que el conjunto de las funciones aditivas, el cual denotamos por  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , tiene estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , es cerrado bajo composiciones y bajo funciones inversas cuando éstas son biyectivas. Además, la composición de las funciones aditivas se distribuye sobre la suma de las mismas. También se mostró que el conjunto  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$  coincide con el conjunto de las transformaciones lineales en  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ , denotado por  $End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ . Posteriormente, se analizaron los requerimientos que deben cumplir las funciones aditivas para ser lineales en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ , estas condiciones corresponden a continuidad, integrabilidad y acotación. En lo que corresponde, se mostró que en  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , la continuidad es equivalente a la linealidad en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ , que la integrabilidad local es equivalente a la linealidad en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ . Más aún, se demostró que en  $\mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , la linealidad en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  es equivalente a la integrabilidad en algún intervalo acotado, esto a consecuencia de que toda función integrable tiene al menos un punto de continuidad. También, se demostró que cuando una función aditiva no es lineal, su gráfica es un conjunto denso en  $\mathbb{R}^2$ , lo cual se probó sin la necesidad del Axioma de Elección. Otras condiciones que se expusieron en este capítulo para la linealidad en  ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ , son la acotación

en algún intervalo acotado, la derivabilidad y la monotonía.

En el Capítulo 3, se establecieron las condiciones que se requieren para garantizar la existencia de funciones aditivas no lineales en  $\mathbb{R}\mathbb{R}$ . Se expuso que si asumimos los axiomas de **ZF** más la existencia de al menos una base para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ , esta no puede ser equipotente a algún número natural. Esto nos da la pauta para construir funciones aditivas no lineales vía bases de  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ . Es claro que esto se cumple en **ZFC**, pues en este modelo todo espacio vectorial tiene base y  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  no podría ser la excepción. Se mostró que en **ZFC**,  $\dim(\mathbb{Q}\mathbb{R}) = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ , esto como consecuencia de la asignación de cardinales a los conjuntos. También, se probó que en **ZFC**, existen  $2^{\aleph_0}$  funciones aditivas lineales, existen  $2^{2^{\aleph_0}}$  funciones aditivas no lineales y existe un isomorfismo de grupos abelianos entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^n$ , para cualquier  $n \in \omega \setminus \{0\}$ . En particular, se probó que existe un isomorfismo de grupos abelianos entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ . También, se mostró que en **ZF**, si existen bases de  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ , éstas son Dedekind-infinitas, a razón de esto,  $\mathbb{R} \cong (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$  como grupos abelianos y  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  contiene una copia isomorfa de  $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{(\omega)}$ . Se mostró que en **ZF+BRQ**, existen funciones aditivas cuya gráfica es densa en  $\mathbb{R}^2$ , donde éstas pueden ser isomorfismos de grupos abelianos o no. Se probó que en **ZF**, las afirmaciones  $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$  como grupos abelianos,  $\mathbb{R} \cong (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$  como grupos abelianos o existen automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$ , son suficientes para garantizar la existencia de funciones aditivas no lineales en  $\mathbb{R}$ .

Para concluir este capítulo, se mostró que asumiendo los axiomas de **ZF** más la existencia de funciones aditivas no lineales, se obtienen subconjuntos de  $\mathbb{R}$  no medibles bajo el criterio de Lebesgue.

Con respecto a los resultados expuestos en los capítulos 2 y 3, presentamos un esquema de los más relevantes, haciendo énfasis cuáles se probaron sin el Axioma de Elección (**AC**) y cuáles se probaron con este último.

| <b>Resultados sin AC</b>   |
|--|
| $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ es lineal, si y solo si, $f$ es continua.  |
| $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ es lineal, si y solo si, $f$ es localmente integrable.   |
| $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ es lineal, si y solo si, $f$ es integrable en $[a, b]$ , para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ .                  |
| $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ es lineal, si y solo si, $f$ es acotada en $[a, b]$ , para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ .                     |
| Si $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ no es lineal, entonces $Gr f(f)$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}^2$ .   |
| Si $f \in \mathbf{Ad}(\mathbb{R})$ , $f$ es lineal, si y solo si, $f$ es Lebesgue-medible.   |
| Si $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ o $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ como grupos abelianos, entonces existen funciones aditivas no lineales. |
| Si existen automorfismos no continuos en $\mathbb{C}$ , entonces existen funciones aditivas no lineales.   |
| Si existen funciones aditivas no lineales, existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles.  |

| <b>Resultados con AC</b>   |
|--|
| Si ${}_{\mathbb{Q}}V$ es un espacio vectorial y $S \subseteq V$ no vacío, entonces<br>$ \langle S \rangle  \leq  S  \omega$ .  |
| $\dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ .   |
| $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ como grupos abelianos, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ .<br>En particular, $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ como grupos abelianos. |
| $ End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})  = \mathfrak{c}$ y $ End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \setminus End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})  = 2^{\mathfrak{c}}$ .                           |

En la siguiente tabla, especificamos los resultados que se probaron con los axiomas de **ZF**, sustituyendo el Axioma de Elección (**AC**) por la hipótesis de existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$  (**BRQ**).

| <b>Resultados sin AC suponiendo la hipótesis BRQ</b>  |
|---|
| Ninguna base de ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ es equipotente a algún número natural.                                  |
| Las bases de ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ son Dedekind-infinitas.  |
| $\mathbb{R} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ como grupos abelianos.  |
| Existe $W \leq_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ tal que $W \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(\omega)}$ .                      |
| Existen funciones aditivas no lineales, las cuales pueden ser isomorfismos de grupos abelianos o no.                |
| Existen funciones cuya gráfica es densa en $\mathbb{R}^2$ . Estas pueden ser isomorfismos de grupos abelianos o no. |

Finalmente, en el cuarto y último capítulo de esta tesis, se respondió si la implicación

**Existencia de funciones aditivas no lineales**

↓

**Axioma de Elección**

es verdadera o no. Para esto, se inició dando un pequeño preámbulo de conceptos avanzados de la Teoría de Conjuntos, tales como teoría de modelos, modelos de la teoría de conjuntos, constructibilidad, constructibilidad relativa y forcing. Posteriormente, se presentó el modelo planteado en [22], el cual nos proporciona, valga la redundancia, un modelo de **ZF** donde existen bases para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  pero no se puede dar un buen orden a los reales. Esto nos permite concluir, debido a los resultados expuestos en el Capítulo 3, que en este modelo existen funciones aditivas no lineales pero falla el Axioma de Elección, pues sabemos que el Axioma de Elección es equivalente a que todo conjunto puede ser bien ordenado, obteniendo así que la implicación antes mencionada es falsa. De esta manera se concluye que la existencia de funciones aditivas no lineales es una premisa más débil que el Axioma de Elección.

En este capítulo 4, también se mencionó que debido a [21], existe un modelo de **ZF** donde existen bases para  $\mathbb{Q}\mathbb{R}$  pero falla el Axioma de Elecciones Numerables, en consecuencia, en dicho modelo existen funciones aditivas no lineales pero falla el Axioma de Elecciones Numerables. Así, podemos concluir que la existencia de funciones aditivas no lineales tampoco es equivalente al Axioma de Elecciones Numerables.

Finalmente, se mencionó el conocido Modelo de Solovay, el cual, en resumen, es un modelo de **ZF** en el que todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  son Lebesgue-medibles. Como consecuencia del resultado del tercer capítulo, que muestra que la existencia de funciones aditivas no lineales implica la existencia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que no son Lebesgue-medibles, podemos concluir que en el modelo de Solovay, todas las funciones aditivas son lineales. De esta manera, podemos concluir que hay un modelo de **ZF** donde existen funciones aditivas no lineales, a saber, el modelo de [22] y hay otro modelo de

**ZF**, a saber, el modelo de Solovay donde no existen funciones aditivas no lineales, a saber, el modelo de Solovay, concluyendo así que la existencia de funciones aditivas no lineales es independiente de los axiomas de **ZF**. También es posible concluir el Axioma de Elecciones Numerables es independiente de **ZF** más la existencia de funciones aditivas no lineales.

La aportación que consideramos que se hizo en este trabajo es presentar de manera más clara y detallada muchos resultados que, a pesar de ser conocidos, en las fuentes donde aparecen se presentan como ejercicios o se omiten detalles importantes en sus demostraciones. También consideramos que hemos dado un panorama a los interesados en construir algún modelo de **ZF** donde existan funciones aditivas no lineales sobre algunas de las condiciones que garantizan dicha existencia. Además, complementamos la información presentada en los artículos [21] y [22], exhibiendo que en tales modelos existen funciones aditivas no lineales sobre sus respectivos números reales.

Este trabajo es un motor de arranque para realizar una investigación más profunda acerca de la relación entre el Axioma de Elección y la existencia de funciones aditivas no lineales así como para buscar una generalización a espacios vectoriales más generales.

Algunas preguntas que quedan pendientes de responder o por lo menos, en las fuentes que se consultaron, no se encontró respuesta alguna son:

- ¿A qué consecuencia del Axioma de Elección es equivalente la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ?
- ¿A qué consecuencia del Axioma de Elección es equivalente la existencia de funciones aditivas no lineales?
- ¿La existencia de funciones aditivas no lineales es equivalente a la existencia de bases para  ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ?
- ¿La existencia de funciones aditivas no lineales implica la existencia de automorfismos no continuos en  $\mathbb{C}$ ?

Sería interesante en un trabajo futuro, revisar si existe alguna investigación donde se aborden tales preguntas y en caso de que no, intentar explorarlas.

# Bibliografía

- [1] Libertad Becerra Azuara. *Equivalencia entre el Axioma de Elección y la existencia de bases en espacios vectoriales*. Tesis de licenciatura. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.
- [2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [3] Alejandro Bravo Mojica, Hugo Rincón Mejía, Cesar Rincón Orta. *Álgebra superior*, Primera edición. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
- [4] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*, Fourth edition, India: Prentice Hall, 2002.
- [5] Sergio Atayan García Balán. *La técnica de forcing y algunas aplicaciones*. Tesis de licenciatura. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2014.
- [6] Jonathan S. Golan. *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Second edition. USA: Springer, 2007.
- [7] Horst Herlich. *Axiom of Choice*, New York: Springer, 2006.
- [8] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos, una introducción*, Segunda edición. México: Sociedad matemática mexicana, 2003.
- [9] Carlos Ivorra Castillo. *Lógica Matemática*. Notas en línea.
- [10] Carlos Ivorra Castillo. *Pruebas de consistencia*. Notas en línea.

- [11] Carlos Ivorra Castillo. *Teoría de conjuntos*. Notas en línea.
- [12] Carlos Ivorra Castillo. *Teoría descriptiva de conjuntos*. Notas en línea.
- [13] Thomas Jech. *Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded.*, Germany: Springer, 2003.
- [14] Akihiro Kanamori. *The higher infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Second Edition, New York: Springer, 2009.
- [15] Kenneth Kunen. *Set theory. An introduction to Independence Proofs*.
- [16] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*, Second edition. USA: W.H Freeman and Company, 1993.
- [17] Hugo Alberto Rincón Mejía. *Álgebra lineal*, Segunda edición. México: Facultad de ciencias, UNAM, 2006.
- [18] W. Rudin, Casal Piga A. *Análisis real y complejo*, Primera edición. España: Alhambra, 1979.
- [19] José de Jesús Sáez Macegoza. *Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales*. Tesis de licenciatura. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2023.
- [20] José de Jesús Sáez Macegoza, Ivan Fernando Vilchis Montalvo. *Aspectos categóricos de las bases y los morfismos en los E.V.* Capítulo en Topología y sus aplicaciones 11. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2025.
- [21] Vladimir Kanovei, Ralf Schlinder. *Definable Hamel bases and  $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$* , 2020.
- [22] Ralf Schindler, Liuzhen Wu, Liang Yu. *Hamel bases and the principle of dependent choice*, 2024.

- [23] Ralf Schindler. *Set Theory. Exploring Independence and Truth*, New York: Springer, 2014.
- [24] Michael Spivak. *Cálculo infinitesimal*, Segunda Edición, España: Editorial Reverté, 1992.
- [25] Paul B. Yale. *Automorphisms of the Complex Numbers*, *Mathematics Magazine*, 39:3, 135-41, DOI: 10.1080/0025570x.1966.11975699, 1966.