



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DINÁMICA CUÁNTICA DE
CAVIDADES ÓPTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA)

PRESENTA AL POSGRADO EN FÍSICA
APLICADA:

RODRÍGUEZ LIMA JOSUÉ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ARÉVALO AGUILAR LUIS MANUEL

Junio 2020

DINÁMICA CUÁNTICA DE CAVIDADES ÓPTICAS

RODRÍGUEZ LIMA JOSUÉ

COMITÉ

Dra. Méndez Otero Marcela Maribel
Presidente

Dr. Robledo Sánchez Carlos Ignacio
Secretario

Dr. Velázquez Aguilar Victor Manuel
Vocal Externo

Dr. Récamier Angelini
José Francisco
Vocal Externo

Dr. Palomino Merino Martín
Rodolfo.
Vocal

Dr. Díaz Cruz Justiniano Lorenzo
Suplente

Dr. Arévalo Aguilar Luis Manuel
Asesor

Índice general

Resumen	XIII
Introducción	xv
1. Cavidades optomecánicas	1
1.1. Cavidad optomecánica	1
1.1.1. Campo electromagnético en el interior de la cavidad .	2
1.1.2. Análisis del espejo móvil	5
1.2. Generación de un estado enredado en una cavidad optomecánica	11
1.2.1. Factorización del operador de evolución temporal del sistema	12
1.2.2. Estado final del sistema	16
2. Función Q	21
2.1. Función Q para un solo sistema cuántico	21
2.1.1. Función Q para un estado coherente	22
2.1.2. Función Q para un estado de número	22
2.2. Función Q para dos sistemas	23
2.2.1. Sistemas formados por estados de número	24
2.2.2. Sistemas formados por estados de número y coherentes	35
2.2.3. Sistemas formados por estados de número y estados de número desplazado	43

3. Función de Husimi para una cavidad optomecánica	63
3.1. Función de Husimi para una cavidad optomecánica	63
3.1.1. Estado inicial y final para una cavidad optomecánica .	63
3.1.2. Función Q para un sistema tripartito	65
3.1.3. Función Q para el estado inicial	66
3.1.4. Función Q para el estado final	69
4. Desigualdades de Van Loock Furusawa para una cavidad optomecánica	89
4.1. Enredamiento en tres sistemas cuánticos	89
4.1.1. Acoplamiento débil $g = \frac{\omega_m}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$	93
4.1.2. Acoplamiento fuerte $g = \omega_m \Rightarrow k = 1$	95
Conclusiones	99
Bibliografía	101

Índice de figuras

1.1. Cavity optomechanical.	2
1.2. Campo $\vec{D}$ entre la frontera de dos medios.	6
1.3. Campo $\vec{H}$ entre la frontera de dos medios.	8
2.1. Gráfica de la función Q para un estado coherente.	22
2.2. Gráfica de la función Q para un estado de número.	23
2.3. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle_1 (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$	25
2.4. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle_1 (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$. . .	26
2.5. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle_1 (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$. . .	26
2.6. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle_1 (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$. . .	27
2.7. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne2}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(0\rangle_1 + 1\rangle_1)(0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$	28

2.8. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	28
2.9. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	29
2.10. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (0\rangle_2 + 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	29
2.11. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e1} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 1\rangle_2 + 1\rangle_1 0\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	30
2.12. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e1} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 1\rangle_2 + 1\rangle_1 0\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	31
2.13. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e1} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 1\rangle_2 + 1\rangle_1 0\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	31
2.14. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e1} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 1\rangle_2 + 1\rangle_1 0\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	32
2.15. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e2} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 0\rangle_2 + 1\rangle_1 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	33
2.16. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e2} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 0\rangle_2 + 1\rangle_1 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	33
2.17. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e2} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 0\rangle_2 + 1\rangle_1 1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	34
2.18. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{e2} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 0\rangle_2 + 1\rangle_1 1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	34
2.19. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ng} =$ $\frac{1}{2} (1 + e^{-2 \phi ^2})^{-\frac{1}{2}} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (\phi\rangle_2 + -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 =$ $Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$	36
2.20. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ng} =$ $\frac{1}{2} (1 + e^{-2 \phi ^2})^{-\frac{1}{2}} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (\phi\rangle_2 + -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 =$ $Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$	37
2.21. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ng} =$ $\frac{1}{2} (1 + e^{-2 \phi ^2})^{-\frac{1}{2}} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (\phi\rangle_2 + -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 =$ $Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	38

2.22. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado no enredado $ \Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2 \phi ^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (0\rangle_1 + 1\rangle_1) (\phi\rangle_2 + -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	39
2.23. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 \phi\rangle_2 + 1\rangle_1 -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$	40
2.24. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 \phi\rangle_2 + 1\rangle_1 -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	41
2.25. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 \phi\rangle_2 + 1\rangle_1 -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$	42
2.26. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado enredado $ \Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle_1 \phi\rangle_2 + 1\rangle_1 -\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$	43
2.27. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	46
2.28. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	48
2.29. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	50
2.30. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	52
2.31. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema enredado $ \Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	55
2.32. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema enredado $ \Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	57

2.33. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema enredado $ \Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Im\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	59
2.34. Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema enredado $ \Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$	61
3.1. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{in} = (\gamma_1 0\rangle_1 + \delta_1 1\rangle_1)(\gamma_2 0\rangle_2 + \delta_2 1\rangle_2) \beta\rangle$, con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	67
3.2. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{in} = (\gamma_1 0\rangle_1 + \delta_1 1\rangle_1)(\gamma_2 0\rangle_2 + \delta_2 1\rangle_2) \beta\rangle$, con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	67
3.3. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema no enredado $ \Psi\rangle_{in} = (\gamma_1 0\rangle_1 + \delta_1 1\rangle_1)(\gamma_2 0\rangle_2 + \delta_2 1\rangle_2) \beta\rangle$, con $\mu = cte$, es decir, $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	68
3.4. Gráfica en función del tiempo de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	70
3.5. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	71
3.6. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	72
3.7. Gráfica en función del tiempo de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	73
3.8. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	74
3.9. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	75
3.10. Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $\mu = cte$, i.e. $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	76

3.11. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	77
3.12. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	78
3.13. Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	79
3.14. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	80
3.15. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$	81
3.16. Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	82
3.17. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	83
3.18. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	84
3.19. Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado enredado $ \Psi(t)\rangle$ con $\mu = cte$, i.e. $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	85
3.20. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	86
3.21. Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$	87
4.1. Desigualdad V_{12} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	93
4.2. Desigualdad V_{13} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	94

4.3.	Desigualdad V_{23} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	94
4.4.	Desigualdad V_{12} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	95
4.5.	Desigualdad V_{13} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	95
4.6.	Desigualdad V_{23} para el estado $ \Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$	96

Resumen

SE estudia la dinámica de una cavidad optomecánica en donde el enredamiento cuántico resultante es analizado en el espacio fase mediante la función Q o de Husimi. Dicho estudio toma en cuenta la interacción entre dos modos del campo electromagnético al interior de la cavidad con un espejo acoplado a un resonador mecánico. En una primera etapa, mediante el uso del método de factorización del operador de evolución temporal se encuentra que el estado inicial tripartito evoluciona a un estado enredado cuánticamente. En una segunda etapa se introduce a la función Q como una herramienta en el estudio del enredamiento de sistemas cuánticos permitiendo así encontrar colapsos y resurgimientos temporales del enredamiento cuántico del sistema. Finalmente las desigualdades de Van Loock-Furusawa son utilizadas para verificar que la función Q describe apropiadamente el comportamiento del enredamiento cuántico del sistema.

Introducción

LA inexistencia de una línea divisoria clara entre el reino cuántico, gobernado por la ecuación de Schrödinger, y el reino clásico, gobernado por las leyes de Newton, [1] ha hecho posible aplicar el formalismo de la mecánica cuántica a sistemas considerados físicamente clásicos. Esta libertad en la aplicación de las leyes cuánticas permitió sentar las bases de la optomecánica cuántica, cuyas ideas subyacentes se remontan al estudio de los detectores de ondas gravitacionales en las décadas de 1970 y 1980 [3; 4] desarrollándose hasta ser un área activa y bastante amplia de investigación involucrando diversas subáreas [2]. El avance en esta área, tanto en el ámbito experimental como teórico, ha permitido comprender y ampliar el conocimiento que se tiene acerca de cualidades pertenecientes al régimen cuántico siendo una de estas el enredamiento (ó entrelazamiento) cuántico, cuya existencia fue mencionada por Schrödinger desde 1935 [5].

La importancia del estudio del entrelazamiento cuántico en los sistemas recae en las implicaciones que tiene directamente en el desarrollo de la física cuántica [6] así como sus aplicaciones potenciales en el campo de la información y computación cuánticas [7]. Dicho enredamiento se puede dividir en dos grupos: en el primero se consideran dos sistemas involucrados (sistema bipartito) mientras que, en el segundo grupo se involucran tres (sistema tripartito) o más sistemas. Hasta donde se conoce en la literatura, la cuantificación del entrelazamiento para sistemas bipartitos con variables discretas se ha desarrollado satisfactoriamente hasta el punto en donde las medidas de entrelazamiento son bien comprendidas, tanto para estados puros como

estados mixtos siendo, por ejemplo, la concurrencia una de estas [8]. Sin embargo para el segundo grupo de sistemas se tiene un panorama totalmente diferente pues el estudio de las propiedades así como la cuantificación del entrelazamiento cuántico se vuelve más complejo ya que no existe todavía una teoría satisfactoria, especialmente en el caso de los estados mixtos. No obstante lo anterior, se han alcanzado avances importantes en este rubro [9], si bien es cierto, cuando se consideran variables continuas la complejidad aumenta considerablemente.

Aunado a esto, una de las primeras consideraciones sobre el entrelazamiento de tres sistemas fue que si al tener un sistema 1 enredado con un sistema 2 se podría compartir el enredamiento de este par hacia un tercer sistema. Esta suposición sirvió para la introducción del concepto de entrelazamiento residual y de una medida de entrelazamiento respectiva para un sistema tripartito [9], esta medida asigna una cantidad máxima de enredamiento para los estado GHZ ($|GHZ\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$) mientras que paradójicamente para los estados W ($|W\rangle = (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}$) asigna un valor de cero. Esto es una muestra de la complejidad y los problemas que surgen al trasladar las medidas de entrelazamiento desarrolladas para sistemas bipartitos a sistemas tripartitos.

Al mismo tiempo, de igual importancia es la generación de entrelazamiento cuántico en nuevos sistemas pues es un área activa e importante de estudio, especialmente en sistemas que pertenecen a escalas mesoscópicas y microscópicas. Es aquí donde el trabajo realizado por C. Law [10] en el análisis la interacción del campo electromagnético con un espejo móvil acoplado a un resonador mecánico juega un papel fundamental pues al hacer uso del formalismo de la mecánica cuántica en este sistema optomecánico creó un punto de partida que ha permitido proponer la obtención de entrelazamiento cuántico no solo en otros sistemas optomecánicos [11; 12; 13] sino además en sistemas electromecánicos [13]. En este contexto, se han analizado diferentes tipos de sistemas, tales como: dos espejos móviles [15], dos cavidades separadas espacialmente [16], dos cavidades en un interferómetro de Mach-Zhender [17], también la generación de estados no clásicos se ha estudiado [18; 19; 20]. En estos casos diversas herramientas se han usado en la caracterización del entrelazamiento cuántico, por ejemplo: entropía no lineal, negatividad, función de Wigner, etc.

Retomando el caso de la generación de estados cuánticos, se tiene que Bose et al. [18] estudiaron la generación de estados no clásicos tanto para el campo electromagnético como en el espejo, en este análisis se tiene la

posibilidad de crear el llamado estado gato de Schrödinger en el espejo. En una primera etapa, el sistema comprende un modo de la cavidad y un espejo móvil, es aquí donde se predice la creación de enredamiento cuántico y su desaparición al tiempo $t = 2\pi$ para este sistema. Además, muestran cómo para el caso del espejo la función de Wigner al tiempo $t = 2\pi$ se asemeja a la función de Wigner para el tiempo $t = 0$ [18], es decir, cuando no existe entrelazamiento. En una segunda etapa, estudian la dinámica de dos modos de la cavidad y un único espejo móvil, representados por estados coherentes, encontrando que dichos modos se enredan con el espejo y se desenredan de este para el tiempo $t = 2\pi$. Cabe señalar que la capacidad en la producción de estados no clásicos está relacionada con el parámetro $k = g/w_m$ [18] que involucra la constante de acoplamiento optomecánico g y la frecuencia de oscilación espejo w_m .

Considerando lo anterior llama la atención, como señalaron Hao et al. [29] y Liu et al. [30], que los trabajos en estos sistemas optomecánicos se han centrado tradicionalmente en los regímenes en los que no se tiene en cuenta la naturaleza intrínseca no lineal del acoplamiento optomecánico. Por ejemplo, en un trabajo reciente de Asjad et al [31], donde el sistema consta de dos modos de campo de la cavidad y un espejo móvil, los autores propusieron la generación de una compuerta cuántica de fase utilizando la aproximación en la que $(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, es decir, se modifica el componente Kerr.

Si bien es cierto, que existe un gran avance teórico la optomecánica cuántica también ha tenido en el ámbito experimental grandes logros tales como: la creación de estados cuánticos con el control y manipulación del sistema mecánico [21]; enfriamiento de un resonador mecánico hasta llegar a su estado cuántico base, esto representó un gran avance que se logró hace casi diez años cuando distintos grupos alrededor del mundo completaron esta tarea [22; 23; 24] y la producción de una superposición de estados cuánticos en un resonador mecánico, analizado por Kleckner et al. [25]. Además, mediante el uso de un circuito electromecánico se pudo generar experimentalmente un estado enredado entre un oscilador mecánico y un campo de microondas propagándose [26]. Sumado a lo anterior, se ha logrado la obtención de correlaciones no clásicas entre fotones y fonones de un resonador mecánico junto con un protocolo cuántico de información implicando la inicialización del resonador en su estado base y la generación y recuperación de las correlaciones no clásicas [27]. Recientemente, la retroacción cuántica responsable de la obtención de muchos efectos cuánticos en los sistemas optomecánicos cuánticos a logrado ser medida a temperatura ambiente [28].

En este trabajo de doctorado se realiza un análisis de la dinámica de una cavidad optomecánica considerando dos modos y un espejo móvil además de la inclusión de la no linealidad del acoplamiento optomecánico (efecto Kerr) en la evolución temporal de este sistema. Como resultado de dicha evolución temporal se obtiene un sistema tripartito con entrelazamiento cuántico para el cuál se propone la función de Husimi como herramienta para estudiar cualitativamente en el espacio fase dicho entrelazamiento llegándose a encontrar un comportamiento temporal de colapsos y resurgimientos. Con el fin de verificar que la función de Husimi describe apropiadamente el comportamiento del enredamiento cuántico del sistema las desigualdades de Van Loock-Furusawa son utilizadas.

La estructura del trabajo es la siguiente: En el primer capítulo se describe el sistema optomecánico y sus características para luego calcular la dinámica del sistema y obtener el estado final, el cual presenta enredamiento cuántico. En el capítulo 2 se calcula la función Q para diferentes sistemas bipartitos encontrándose que sirve como herramienta para analizar el entrelazamiento cuántico en el espacio fase. En el tercer capítulo se calcula la función Q para el sistema de la cavidad y obtener información acerca del comportamiento temporal del entrelazamiento cuántico. En el capítulo 4 se introducen las desigualdades de Van Loock Furusawa para constatar los resultados obtenidos por la función Q . Finalmente las conclusiones referentes al trabajo son presentadas.



Cavidades optomecánicas

EN este capítulo se estudia la dinámica de una cavidad optomecánica a partir del análisis del fenómeno de presión de radiación el cual juega un papel primordial en la comprensión de la interacción del campo electromagnético con la componente mecánica del sistema por lo que se discute detalladamente. A raíz del estudio de dicho fenómeno surgen los elementos necesarios para obtener el Hamiltoniano encontrado por Law [10] y del cual partieron Asjad, et. al. [31] para proponer el Hamiltoniano utilizados por ellos. Una vez realizado este estudio se prosigue a calcular la evolución temporal del sistema, inicialmente no enredado, aplicando el operador de evolución y el método de factorización propuesto por P. C. García. y L. M. Arévalo en [34] obteniendo un estado final enredado cuánticamente con propiedades temporales de interés.

1.1. Cavidad optomecánica

El sistema considerado es una cavidad optomecánica unidimensional formada por dos espejos perfectamente reflejantes entre los cuales existe un campo electromagnético. Uno de estos espejos es libre de moverse y esta bajo la influencia de un potencial mecánico $V(q)$ ya que este se encuentra acoplado a un resorte así como bajo la acción del campo electromagnético mediante el fenómeno de presión de radiación en tanto que el segundo espejo permanece fijo; las posiciones de los espejos móvil e inmóvil son $x = q(t)$ y $x = 0$ respectivamente. El sistema descrito previamente es mostrado en la

figura 1.1.

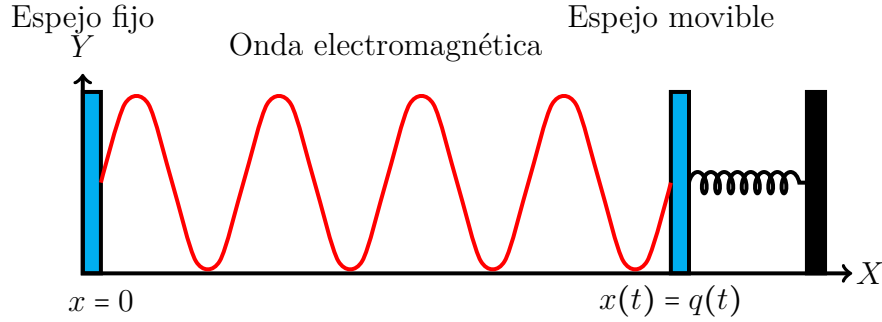


Figura 1.1: Cavidad optomecánica.

El estudio de la dinámica de este sistema será detallado en las siguientes líneas partiendo del análisis clásico del campo electromagnético al interior de la cavidad para después analizar explícitamente su interacción con el espejo móvil y así junto al potencial mecánico involucrado obtener finalmente la ecuación de movimiento fundamental en el estudio realizado por Law [10].

1.1.1. Campo electromagnético en el interior de la cavidad

El campo electromagnético en el interior de la cavidad se considera propagándose en la dirección X con sus partes eléctrica y magnética sobre las direcciones Z y Y respectivamente. Además por simplicidad se considera una única dependencia espacial, todo lo considerado anteriormente se indica a continuación:

$$\vec{E}(x, t) = E(x, t)\hat{k}, \quad (1.1)$$

$$\vec{B}(x, t) = B(x, t)\hat{j}. \quad (1.2)$$

Por otro lado, como se sabe, la dinámica del campo electromagnético está descrita por las ecuaciones de Maxwell las cuales son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Dichas ecuaciones conviene expresarlas en términos del potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ y el potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ para lo cual se requiere utilizar las definiciones correspondientes:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.8)$$

Con las definiciones 1.7 y 1.8 las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.9)$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \quad (1.10)$$

Con lo que se tiene una forma mas compacta para describir la dinámica del campo electromagnético en términos de los potenciales vectorial y escalar. Dichos potenciales no están definidos de manera única debido a la libertad en la elección de norma y en este caso conviene elegir aquella en donde se cumple la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (norma de Coulomb) la cual trae como resultado que las expresiones anteriores adquieren la siguiente forma:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \quad (1.12)$$

La solución a la ecuación 1.11 ya es conocida ¹ y esta dada como:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{r} d\tau'. \quad (1.13)$$

La ventaja en la elección de la norma de Coulomb ahora resulta clara pues dentro de la cavidad se tiene una densidad de carga igual a cero, $\rho = 0$, dando como consecuencia un potencial escalar nulo, es decir, $V(\vec{r}, t) = 0$. Considerando los resultados anteriores y el hecho de que tampoco existe una densidad de corriente ($\vec{J} = 0$) la ecuación 1.12 adquiere la forma de una ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \quad (1.14)$$

donde $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ corresponde a la velocidad de la luz en el vacío. Además si se considera una polarización lineal y la dependencia espacial del campo electromagnético la ecuación 1.14 se reduce a una ecuación de onda escalar:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \quad (1.15)$$

donde se considera por simplicidad $c = 1$. Esta ecuación de onda contiene la dinámica del campo electromagnético dentro de la cavidad en términos del potencial vectorial.

Finalmente cabe mencionar que al no tener un potencial escalar es posible que a partir de las identidades 1.7 y 1.8 el campo electromagnético en el interior de la cavidad pueda ser escrito únicamente en términos del potencial vectorial como se indica en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\vec{A}(x, t) = A\hat{k}, \quad (1.16)$$

$$\vec{E}(x, t) = E\hat{k} = -\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\hat{k}, \quad (1.17)$$

$$\vec{B}(x, t) = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A(x, t)}{\partial x}\hat{j} = B\hat{j}. \quad (1.18)$$

Estos resultados serán de utilidad en el análisis realizado en la siguiente sección.

¹véase por ejemplo D. J. Griffiths y R. Colleague. (1999), *Introduction to Electrodynamics*, (pp. 83-84), New Jersey, Prentice Hall

1.1.2. Análisis del espejo móvil

La dinámica del espejo móvil es el siguiente paso en el estudio de la cavidad optomecánica por lo que es necesario en principio encontrar la ecuación del movimiento de este. Dicha ecuación debe considerar las fuerzas aplicadas, las cuales corresponden al resonador mecánico caracterizado por potencial $V(q)$ y a la fuerza generada por el campo electromagnético en su interacción con el espejo, esta última conocida como presión de radiación. Considerando lo escrito previamente se puede escribir una ecuación de movimiento en principio genérica para el espejo móvil:

$$m\ddot{q} = F_{mec} + F_{em}, \quad (1.19)$$

donde m corresponde a la masa del espejo, q a la posición instantánea y los términos F_{mec} y F_{em} corresponden a las fuerzas de origen mecánico y electromagnético respectivamente. Dado que se conoce el potencial asociado al resonador mecánico es posible reescribir la ecuación de movimiento anterior como:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + F_{em}. \quad (1.20)$$

Como se observa la componente mecánica de la fuerza total sobre el espejo es obtenida directamente del potencial $V(q)$, sin embargo, en el caso de la parte electromagnética, F_{em} , su obtención requiere de un análisis mas detallado el cual será expuesto en las siguientes líneas.

La fuerza que ejerce el campo electromagnético sobre el espejo móvil es originada por el llamado fenómeno de presión de radiación. La explicación de dicho fenómeno parte de la expresión para la fuerza de Lorentz:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} (\sigma \vec{E} + \vec{K} \times \vec{B}), \quad (1.21)$$

donde $\vec{f}$ es la fuerza por unidad de área sobre la superficie, σ la densidad de carga superficial, $\vec{K}$ la densidad de corriente superficial; $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos justo fuera de la superficie. El factor de $1/2$ indica que se está tomando el valor promedio de los campos y las densidades de carga y corriente; esto debido a que tan pronto como cruzan adentro del espejo su valor se vuelve nulo.

En el caso de la cavidad los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ya son conocidos (ecuaciones 1.17 y 1.18 respectivamente) así que la obtención de σ y $\vec{K}$ se realizará a

continuación mediante la aplicación de las condiciones de frontera apropiadas que a su vez pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral. La densidad de carga superficial σ se deduce considerando la ecuación 1.22 y la frontera entre dos medios considerada en la figura 1.2.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{enc}. \quad (1.22)$$

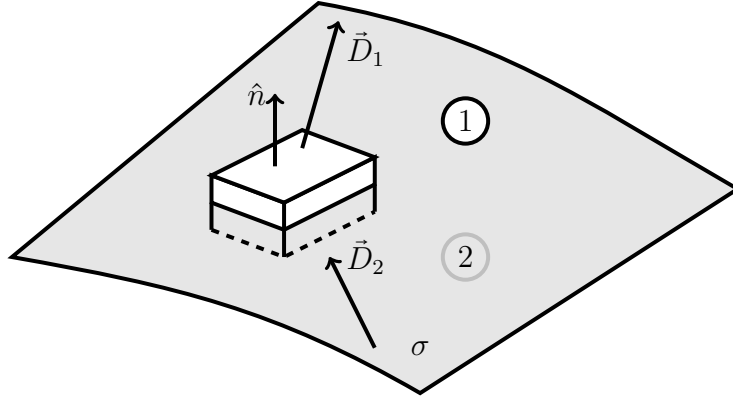


Figura 1.2: Campo $\vec{D}$ entre la frontera de dos medios.

Tomando en cuenta la superficie gaussiana en forma de caja contenida en ambos medios, los valores del campo de desplazamiento eléctrico para cada medio ($\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$) y un vector normal unitario $\hat{n}$ a la superficie de la tapa de la caja se tiene que es posible obtener la siguiente relación:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} - \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma a, \quad (1.23)$$

donde el flujo lateral de la caja ha sido despreciado pues al acercar las tapas de la cajas este tiende a cero. Como a corresponde al área de las tapas de la caja se puede escribir $\vec{a} = a\hat{n}$ resultando así en la condición de continuidad:

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} - \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \sigma. \quad (1.24)$$

Aplicando un razonamiento análogo a la ecuación

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0, \quad (1.25)$$

se obtiene la condición de continuidad correspondiente al campo magnético:

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n} - \vec{B}_2 \cdot \hat{n} = 0. \quad (1.26)$$

Las condiciones de frontera obtenidas anteriormente describen el comportamiento de las componentes perpendiculares de los campos en la frontera entre dos medios. Ahora pasemos al caso de la densidad de carga superficial, la cual se obtiene a partir de la condición de continuidad 1.24 considerando que en el interior de la cavidad el vector de desplazamiento esta dado como:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_0 E \hat{k}, \quad (1.27)$$

en tanto que dentro del espejo no existe campo eléctrico teniendo como consecuencia un vector de desplazamiento nulo, es decir,

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = 0. \quad (1.28)$$

Considerando la figura 1.1 el vector unitario perpendicular a la superficie esta representado como $\hat{n} = -\hat{i}$. por lo que se tiene que:

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} - \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \epsilon_0 \vec{E} \hat{k} \cdot (-\hat{i}) - 0 \cdot (-\hat{i}) = \sigma \Rightarrow 0 = \sigma, \quad (1.29)$$

es decir, una densidad de carga superficial inexistente.

La conclusión inmediata del resultado anterior es que la fuerza ejercida sobre el espejo proviene totalmente de la componente magnética del campo y la densidad de corriente superficial llevando a que la ecuación 1.21 sea escrita como:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} (\vec{K} \times \vec{B}). \quad (1.30)$$

La obtención de la densidad superficial de corriente es realizada tomando en cuenta la ecuación 1.31 y un circuito que atraviesa la frontera entre dos medios como se muestra en la figura 1.3,

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f_{enc}} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} \quad (1.31)$$

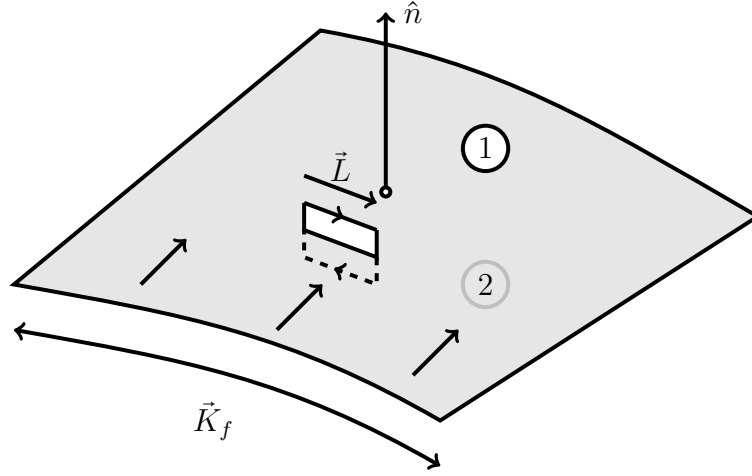


Figura 1.3: Campo $\vec{H}$ entre la frontera de dos medios.

Conforme el tamaño del circuito se haga mas pequeño y el circuito colapse hacia la interfase entre los medios el flujo producido por el campo $\vec{D}$ desaparecerá siendo posible despreciar este termino en la ecuación 1.31 y concentrarse en la aportación del campo $\vec{H}$ y la corriente I_{fenc} . Tomando en cuenta el lado izquierdo de 1.31 junto a los campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ pertenecientes a cada medio se tiene que:

$$\oint_P \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \cdot \vec{L} - \vec{H}_2 \cdot \vec{L}, \quad (1.32)$$

donde $\vec{L}$ corresponde al vector de longitud del circuito. Las contribuciones laterales del circuito se han despreciado pues no generarán una aportación cuando el circuito colapse hacia la frontera de los medios. Por otro lado, la corriente es expresada mediante una densidad de corriente superficial como se muestra a continuación:

$$I_{fenc} = \int \vec{K}_f \cdot d\vec{l}, \quad (1.33)$$

siendo la magnitud de $d\vec{l}$ un segmento del circuito por donde atraviesa la corriente superficial y cuya dirección apunta perpendicular a la superficie que encierra, en el sentido dado por el lazo de Ampere. Es conveniente reexpresar $d\vec{l}$ en términos de $\vec{L}$ y el vector normal a la frontera de los medios, $\hat{n}$; tomando de referencia la figura 1.3 es posible escribir

$$d\vec{l} = dl \frac{\hat{n} \times \vec{L}}{|\hat{n} \times \vec{L}|} = dl \frac{\hat{n} \times \vec{L}}{|\hat{n}||\vec{L}|} = dl \frac{\hat{n} \times \vec{L}}{L} = dl \left(\frac{\hat{n} \times \vec{L}}{L} \right), \quad (1.34)$$

siendo $L = |\vec{L}|$ la longitud de un lado del circuito. Sustituyendo ahora el resultado dado en 1.34 en la ecuación 1.33 se tiene:

$$I_{f_{enc}} = \int \vec{K}_f \cdot d\vec{l} \left(\frac{\hat{n} \times \vec{L}}{L} \right) = \vec{K}_f \cdot \left(\frac{\hat{n} \times \vec{L}}{L} \right) \int dl = \vec{K}_f \cdot \left(\frac{\hat{n} \times \vec{L}}{L} \right) L = \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{L}), \quad (1.35)$$

usando ahora la identidad

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}, \quad (1.36)$$

al último término de la expresión anterior la corriente adquiere la forma

$$I_{f_{enc}} = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{L}. \quad (1.37)$$

insertando este valor en la expresión de la corriente dada por la ecuación 1.33 e igualando con 1.32 se llega a la condición de continuidad buscada, es decir,

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{L} - \vec{H}_2 \cdot \vec{L} = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{L}, \quad (1.38)$$

eliminando el término $\vec{L}$ resulta en una expresión más conveniente:

$$\vec{K}_f \times \hat{n} = \vec{H}_1^{\parallel} - \vec{H}_2^{\parallel}, \quad (1.39)$$

la cuál, como se indica, se cumple sobre las componentes paralelas a la superficie de la frontera en consideración. Realizando un razonamiento análogo en siguiente ecuación:

$$\oint_P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}; \quad (1.40)$$

la última condición de continuidad es obtenida:

$$\vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_2^{\parallel} = 0. \quad (1.41)$$

La ecuación 1.39 nos da la relación entre el campo de intensidad magnético $\vec{H}$ y la densidad de corriente superficial $\vec{k}_f$. Dentro del espejo se cumple $\vec{H}_2 = 0$ mientras que en el resto de la cavidad $\vec{H}_1 = \vec{B}_1/\mu_0$ por estar

en el vacío. Considerando los datos anteriores la condición de continuidad resulta en:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{K}_f \times \hat{n}. \quad (1.42)$$

Esta expresión permite obtener explícitamente la densidad de corriente realizando el siguiente producto:

$$\hat{n} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \hat{n} \times (\vec{K}_f \times \hat{n}) \Rightarrow \vec{K}_f = \hat{n} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (1.43)$$

donde fue usada la identidad

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.44)$$

La obtención de la densidad de corriente en términos del campo magnético hace posible realizar la siguiente simplificación en la ecuación 1.30:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} (\vec{K} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \left(\hat{n} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \times \vec{B} = -\frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n}, \quad (1.45)$$

en la obtención del ultimo término se usó nuevamente 1.44. Como $c = 1$ (unidades naturales) implica que $\mu_0 = 1$ y $\hat{n} = -\hat{i}$; la expresión final para la fuerza aplicada al espejo adquiere la forma:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \hat{i} \quad (1.46)$$

donde el valor campo magnético es sobre la superficie del espejo, $x = q(t)$. Escribiendo el campo magnético en términos del potencial vectorial $\vec{A}$ la expresión anterior queda como:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right|^2 \hat{i}. \quad (1.47)$$

Este último resultado y el hecho de que la fuerza se dirige sobre la dirección x hace posible escribir la ecuación de movimiento 1.20 en términos ya conocidos, es decir,

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right|^2, \quad (1.48)$$

esta ecuación es fundamental para el trabajo realizado por Law en la obtención de la formulación Hamiltoniana [10]. La importancia de este trabajo radica en las implicaciones que tuvo, pues dio una justificación teórica formal al uso de sistemas optomecánicos como un nuevo camino para una comprensión más profunda de la mecánica cuántica tanto para sus bases fundamentales como sus cualidades, siendo el entrelazamiento cuántico una de estas.

1.2. Generación de un estado enredado en una cavidad optomecánica

El sistema, como se dijo al inicio de este capítulo, consta de dos espejos, uno fijo y el otro móvil acoplado a un resonador mecánico; además dentro de la cavidad formada por los espejos hay dos modos del campo electromagnético (MCE) que por el efecto de la presión de radiación interactúan con el resonador mecánico, el Hamiltoniano correspondiente a este sistema está dado por [31]:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar(g_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + g_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (1.49)$$

donde $\hat{a}_i$ y $\hat{a}_i^\dagger$ ($i = 1, 2$) son los operadores de aniquilación y creación de los MCE respectivamente, mientras tanto $\hat{b}$ y $\hat{b}^\dagger$ juegan el mismo papel para el resonador mecánico; ω_i y ω_m son las frecuencias de los modos electromagnético y mecánico y finalmente g_i es la constante i -ésima de acoplamiento optomecánica correspondiente a un modo. Los operadores anteriores obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0. \quad (1.50)$$

Observe que el Hamiltoniano está principalmente dividido en dos partes: los tres primeros términos corresponden a la parte libre, es decir, los modos libres, mientras que el último al término de interacción entre el resonador mecánico y el MCE. El estado inicial no enredado que representa al sistema esta dado por:

$$|\Psi\rangle_{in} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)|\beta\rangle, \quad (1.51)$$

donde los primeros dos factores corresponden a los MCE formados por los kets $|0\rangle_i$ y $|1\rangle_i$ correspondientes al espacio de Fock mientras que el resonador esta representado por el últimos término, estos es, el estado coherente $|\beta\rangle$.

Cabe señalar que los estados coherentes fueron introducidos por Schrödinger y utilizados por Glauber [40; 41; 42] y Sudarshan [43] en sus estudios sobre la cuantización de los campos electromagnéticos, dando así origen a la óptica cuántica. Dichos estados (coherentes) se suelen definir como eigenestados del operador de aniquilación, es decir:

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle. \quad (1.52)$$

donde β es un número complejo. Este estado está representado en la base de Fock en la siguiente forma [44]:

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.53)$$

1.2.1. Factorización del operador de evolución temporal del sistema

La dinámica del sistema para un hamiltoniano independiente del tiempo puede obtenerse a partir de la aplicación directa del operador de evolución al estado inicial. Esta aplicación en general no es sencilla, ya que la factorización del operador de evolución temporal suele ser una tarea complicada. Sin embargo, para lograrlo, se usará el método revisado por P. C. García Quijas y L. M. Arévalo Aguilar [34]. En resumen, la evolución temporal del sistema expresado se obtiene aplicando el operador de evolución temporal

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{it}{\hbar} \hat{H}}, \quad (1.54)$$

al estado inicial $|\Psi\rangle_{in}$ como se indica en la siguiente expresión:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle_{in}. \quad (1.55)$$

Para aplicar el operador de evolución temporal es necesario factorizarlo por lo que para proporcionar claridad y comprensión el método de factorización será seguido paso a paso en las siguientes líneas. Para esto es conveniente reescribir el Hamiltoniano de la ecuación 1.49 en la siguiente forma:

$$\hat{H} = \xi(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}), \quad (1.56)$$

donde las siguientes definiciones han sido hechas,

$$\xi = -\frac{it}{\hbar}, \quad (1.57)$$

$$\hat{A} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1, \quad (1.58)$$

$$\hat{B} = \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \quad (1.59)$$

$$\hat{C} = \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (1.60)$$

$$\hat{D} = \hbar(g_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + g_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger). \quad (1.61)$$

De las definiciones anteriores surgen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{D}] = [\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{D}] = 0. \quad (1.62)$$

Considerando lo escritos líneas arriba es posible escribir el operador de evolución temporal de la siguiente forma:

$$\hat{U}(t) = e^{\xi(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D})}. \quad (1.63)$$

Ahora, usando las relaciones de conmutación y la conocida fórmula de Baker-Camber-Hausdorff se obtiene la siguiente expresión:

$$\hat{U}(t) = e^{\xi\hat{A}}e^{\xi\hat{B}}e^{\xi(\hat{C}+\hat{D})}. \quad (1.64)$$

Ya que el último factor en 1.64 involucra los operadores $\hat{C}$ y $\hat{D}$ es necesario hallar la relación de conmutación entre ellos, la cual esta dada por la expresión ulterior:

$$[\hat{C}, \hat{D}] = \hbar\omega_m\hat{k}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}) = \hat{E}, \quad (1.65)$$

donde el operador $\hat{k} = d_1\hat{A} + d_2\hat{B}$ y las constantes $d_i = g_i/\omega_i$ han sido definidos para simplicidad del cálculo. Tomando en cuenta el resultado en 1.65 el método de factorización dado en [34] puede ser aplicado ya que $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$. Para realizar esto se definen las siguientes funciones:

$$\hat{F}(\xi) = e^{\xi(\hat{C}+\hat{D})}, \quad (1.66)$$

$$\hat{F}(\xi) = e^{f_0(\xi)\hat{k}^2}e^{f_1(\xi)[\hat{C}, \hat{D}]}e^{f_2(\xi)\hat{D}}e^{f_3(\xi)\hat{C}}, \quad (1.67)$$

la primera es una función auxiliar mientras que la segunda corresponde a la factorización propuesta. Estas definiciones pertenecen al primer paso del método.

El segundo paso consiste en diferenciar (1.66) y (1.67) con respecto al parámetro ξ para obtener en el primer caso

$$\frac{d}{d\xi}F(\xi) = (\hat{C} + \hat{D})e^{\xi(\hat{C}+\hat{D})} = (\hat{C} + \hat{D})F(\xi), \quad (1.68)$$

mientras que en el segundo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}F(\xi) = & \frac{df_0(\xi)}{d\xi} \hat{k}^2 e^{f_0(\xi)\hat{k}^2} e^{f_1(\xi)[\hat{C}, \hat{D}]} e^{f_2(\xi)\hat{D}} e^{f_3(\xi)\hat{C}} \\ & + \frac{df_1(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)\hat{k}^2} [\hat{C}, \hat{D}] e^{f_1(\xi)[\hat{C}, \hat{D}]} e^{f_2(\xi)\hat{D}} e^{f_3(\xi)\hat{C}} \\ & + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)\hat{k}^2} e^{f_1(\xi)[\hat{C}, \hat{D}]} \hat{D} e^{f_2(\xi)\hat{D}} e^{f_3(\xi)\hat{C}} \\ & + \frac{df_3(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)\hat{k}^2} e^{f_1(\xi)[\hat{C}, \hat{D}]} e^{f_2(\xi)\hat{D}} \hat{C} e^{f_3(\xi)\hat{C}}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Es necesario mover a la derecha la función $F(\xi)$, como en la ecuación (1.68) y para realizarlo, se deben hacer uso de las siguientes relaciones (ver [50])

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B} = (e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}})e^{\xi\hat{A}}, \quad (1.70)$$

$$e^{\gamma\hat{A}}\hat{B}e^{-\gamma\hat{A}} = \hat{B} + \gamma[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\gamma^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (1.71)$$

después de un poco de álgebra y con la ayuda de las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{C}, \hat{E}] = \hbar^2\omega_m^2\hat{D}, \quad (1.72)$$

$$[\hat{D}, \hat{E}] = 2\hbar\omega_m\hat{k}^2. \quad (1.73)$$

la ecuación (1.69) se convierte en:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}F(\xi) = & \left\{ \frac{df_3(\xi)}{d\xi}\hat{C} + \left(\frac{df_2(\xi)}{d\xi} - \hbar^2\omega_m^2 f_1(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} \right) \hat{D} \right. \\
& \left(\frac{df_1(\xi)}{d\xi} - f_2(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} \right) \hat{E} \\
& \left(\frac{df_0(\xi)}{d\xi} - 2\hbar\omega_m f_1(\xi) \frac{df_2(\xi)}{d\xi} + \hbar^2\omega_m^3 f_1^2(\xi) \right. \\
& \left. \left. - \hbar\omega_m f_2^2(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} \right) \hat{k}^2 \right\} F(\xi). \tag{1.74}
\end{aligned}$$

El tercer paso consiste en comparar los coeficientes de (1.68) y (1.74), así al realizar la comparación se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\frac{df_3(\xi)}{d\xi} &= 1 \\
\frac{df_2(\xi)}{d\xi} - \hbar^2\omega_m^2 f_1(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} &= 1 \\
\frac{df_1(\xi)}{d\xi} - f_2(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{df_0(\xi)}{d\xi} - 2\hbar\omega_m f_1(\xi) \frac{df_2(\xi)}{d\xi} + \hbar^2\omega_m^3 f_1^2(\xi) - \hbar\omega_m f_2^2(\xi) \frac{df_3(\xi)}{d\xi} = 0. \tag{1.75}$$

Las condición inicial $F(0) = 1$ implica que $f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$, esto permite resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obteniendo las siguientes soluciones:

$$f_0(\xi) = \frac{\sinh(\hbar\omega_m\xi) \cosh(\hbar\omega_m\xi) - \hbar\omega_m\xi}{\hbar^2\omega_m^2}, \tag{1.76}$$

$$f_1(\xi) = \frac{\cosh(\hbar\omega_m\xi) - 1}{\hbar^2\omega_m^2}, \tag{1.77}$$

$$f_2(\xi) = \frac{\sinh(\hbar\omega_m\xi)}{\hbar\omega_m}, \tag{1.78}$$

$$f_3(\xi) = \xi, \tag{1.79}$$

en consecuencia el operador $\hat{U}(t)$ queda expresado como:

$$\hat{U}(t) = e^{\xi\hat{A}} e^{\xi\hat{B}} e^{f_0(\xi)\hat{k}^2} e^{f_1(\xi)[\hat{C},\hat{D}]} e^{f_2(\xi)\hat{D}} e^{f_3(\xi)\hat{C}}, \quad (1.80)$$

Dado que el operador de la evolución temporal expresado en (1.80) se aplicará al estado inicial, es necesario tener una expresión más práctica y simple; para ello, los términos $e^{f_1(\xi)[\hat{C},\hat{D}]}$ y $e^{f_2(\xi)\hat{D}}$ se factorizarán usando de nuevo este método. Realizando el álgebra correspondiente, la expresión final para $\hat{U}(t)$ viene dada por

$$\hat{U}(t) = e^{\xi\hat{A}} e^{\xi\hat{B}} e^{F_1\hat{k}^2} e^{F_2\hat{k}\hat{b}^\dagger} e^{F_3\hat{k}\hat{b}} e^{\xi\hat{C}}, \quad (1.81)$$

donde $\hat{k}$ había sido definido como $\hat{k} = d_1\hat{A} + d_2\hat{B}$ siendo $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ y $F_3(\xi)$ las siguientes funciones:

$$F_1(\xi) = f_0(\xi) - \frac{1}{2} [f_1^2(\xi)\hbar^2\omega_m^2 + 2\hbar\omega_m f_1 f_2 - f_2^2(\xi)], \quad (1.82)$$

$$F_2(\xi) = f_1(\xi)\hbar\omega_m + f_2(\xi), \quad (1.83)$$

$$F_3(\xi) = -f_1(\xi)\hbar\omega_m + f_2(\xi). \quad (1.84)$$

Estas funciones después de sustituir $\xi = -it/\hbar$ y con algo de álgebra toman las formas ulteriores:

$$F_1(t) = \frac{e^{-i\omega_m t} - i\omega_m t - 1}{\hbar^2\omega_m^2}, \quad (1.85)$$

$$F_2(t) = \frac{e^{-i\omega_m t} - 1}{\hbar\omega_m}, \quad (1.86)$$

$$F_3(t) = \frac{1 - e^{i\omega_m t}}{\hbar\omega_m}. \quad (1.87)$$

Con estos últimos resultados, el operador $\hat{U}(t)$ puede ser finalmente aplicado al estado dado por 3.1.

1.2.2. Estado final del sistema

El estado final del sistema, como se dijo anteriormente, se obtiene aplicando el operador de evolución temporal al estado inicial del sistema, es decir, $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle_{in}$, con esto se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \frac{1}{2} \left[|0\rangle_1 \left(|0\rangle_2 |\beta'\rangle + c_2 |1\rangle_2 \overline{M}_2(m, k) |\beta', k\rangle \right) \right. \\
& + c_1 |1\rangle_1 \left(|0\rangle_2 \overline{M}_1(m, k) |\beta', k\rangle \right. \\
& \left. \left. + c_2 |1\rangle_2 e^{2F_1 \hbar^2 g_1 g_2} \overline{M}_2(m, k) \overline{M}_1(n, l) \sqrt{\frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}} |\beta', k+l\rangle \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.88}$$

donde $\beta' = \beta e^{-i\omega_m t}$ y $|\beta', k\rangle = \hat{D}(\beta')|k\rangle$ es un estado de número desplazado [45] mientras que $\hat{D}(\beta') = e^{\beta' \hat{b}^\dagger - \beta'^* \hat{b}}$ corresponde al operador de desplazamiento [41; 43].

Las definiciones c_j y $\overline{M}_j(m, k)$ fueron hechas por simplicidad y están dadas como:

$$\overline{M}_j(m, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(F_2(t) g_j \hbar)^m}{m!} (\beta'^*)^{m-k} \sqrt{k!} \tag{1.89}$$

$$c_j = e^{-i\omega_j t} e^{F_3(t) \hbar g_j \beta'} e^{F_1(t) \hbar^2 g_j^2}. \tag{1.90}$$

con $j = 1, 2$. Las funciones $F_1(t)$, $F_2(t)$ y $F_3(t)$ ya han sido definidas en las ecuaciones (1.85), (1.86) y (1.87) respectivamente.

El estado final resultante 1.88 es un estado cuánticamente entrelazado pues no puede separarse en productos de estados individuales asociados a cada componente del sistema como en el caso del estado inicial 3.1. Sin embargo, en el tiempo $t = 0$ este estado final se transforma en el estado inicial.

Por otro lado, como puede verse, hay una periodicidad en el tiempo para las funciones $F_2(t)$ y $F_3(t)$ que afecta en el comportamiento del sistema por lo que es de interés observar el comportamiento temporal para múltiplos del valor $t = 2\pi/\omega_m$. Así pues, considerando lo mencionado anteriormente se toman en cuenta los siguientes valores del tiempo:

$$t_s = \frac{2\pi s}{\omega_m}, \tag{1.91}$$

donde los valores $s = 0, 1, 2, \dots$ corresponden a números enteros, bajo estos valores se cumple que

$$F_2(t_s) = F_3(t_s) = 0, \quad (1.92)$$

como consecuencia de lo anterior el estado final toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\Psi(t_s)\rangle = & \frac{1}{2} \left[|0\rangle_1 \left(|0\rangle_2 + e^{-i2\pi sr_2} e^{-i2\pi sk_2^2} |1\rangle_2 \right) \right. \\ & \left. + e^{-i2\pi sr_1} e^{-i2\pi sk_1^2} |1\rangle_1 \left(|0\rangle_2 + e^{-i2\pi sr_2} e^{-i2\pi sk_2^2} e^{-i2\pi sk_1 k_2} |1\rangle_2 \right) \right] |\beta\rangle. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Se observa que en estos valores de tiempo t_s el entrelazamiento cuántico se produce únicamente entre los modos de campo dejando el modo mecánico totalmente separado de estos. En este resultado se han hecho las siguientes definiciones: $r_j = \omega_j/\omega_m$ es la razón entre la frecuencia de un modo del campo y la frecuencia mecánica mientras que $k_j = g_j/\omega_m$ es la llamada constante escalada de acoplamiento.

Es conveniente hacer un breve paréntesis y hacer notar de la importancia de la constante k_j , pues es usada en la literatura para indicar la intensidad del acoplamiento creado por el fenómeno de presión de radiación. El rango de valores de esta constante permite dividir en dos grupos de interés de estudio los sistemas optomecánicos: el régimen de acoplamiento fuerte para $k \gtrsim 1$ y el régimen de acoplamiento débil con $k < 1$. La importancia de esta división recae en que algunas propiedades cuánticas (como el enredamiento [15]) difieren si se considera un régimen o el otro. Inclusive aun estando en un mismo régimen pueden obtenerse estados finales diferentes tan solo cambiando valores específicos de k [18].

Continuando con el estado 1.93 obtenido para valores de tiempo t_s se tiene que por comodidad en el estudio a realizar se considerarán las siguientes condiciones:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow r_1 = r_2 = r, \quad (1.94)$$

$$g_1 = g_2 \Rightarrow k_1 = k_2 = k, \quad (1.95)$$

así el estado cuántico resultante toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t_s)\rangle = & \frac{1}{2} \left[|0\rangle_1 \left(|0\rangle_2 + e^{-i2\pi sr} e^{-i2\pi sk^2} |1\rangle_2 \right) \right. \\
& \left. + e^{-i2\pi sr} e^{-i2\pi sk^2} |1\rangle_1 \left(|0\rangle_2 + e^{-i2\pi sr} e^{-i4\pi sk^2} |1\rangle_2 \right) \right] |\beta\rangle.
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Se puede ver a partir de este resultado que cuando el valor de la constante de acoplamiento pertenece régimen de acoplamiento fuerte, es decir, en la Ec. (1.95) $k_1 = k_2 = k = 1$, el entrelazamiento cuántico desaparece completamente como se muestra a continuación:

$$|\Psi(t_s)\rangle = \frac{1}{2} \left[\left(|0\rangle_1 + e^{-i2\pi sr} |1\rangle_1 \right) \left(|0\rangle_2 + e^{-i2\pi sr} |1\rangle_2 \right) \right] |\beta\rangle. \tag{1.97}$$

El estudio correspondiente para este sistema resultante en el espacio de fase se llevará a cabo en el capítulo de la función de Husimi en una cavidad optomecánica considerando los valores $k = 1$ y $k = 1/2$. Mientras tanto, en el capítulo de las desigualdades de los van Loock se analizará el entrelazamiento cuántico para este sistema.



EN este capítulo se introduce el uso de la función Q (o de Husimi) como una herramienta para analizar una variedad de estados cuánticos mediante su comportamiento en el espacio fase. Esto es el punto de partida para poder utilizar dicha función en la caracterización del estado final obtenido en la dinámica de la cavidad. En una primera etapa se inicia por estados de un solo sistema aplicando la definición estándar en la literatura para esta función [44]. En una segunda etapa, se analizan sistemas bipartitos, tanto enredados como no enredados, introduciendo la definición propuesta por K. Banaszek y K. Wódkiewicz [48] por un lado y de S. Mancini, V.I. Man'ko y P. Tombesi [49] por otro. Como en este caso la definición involucra dos variables complejas se tiene un obstáculo para realizar una representación gráfica total del sistema por lo que es necesario dividir el estudio en casos donde se considere solo una componente(real o imaginaria) de cada variable.

2.1. Función Q para un solo sistema cuántico

La función Q , o de Husimi, es una descripción de la matriz de densidad de un sistema a través de sus elementos diagonales en una base de estados coherentes[44]. Su definición es la siguiente:

$$Q(\alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle}{\pi}, \quad (2.1)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente y $\hat{\rho}$ corresponde al operador de densidad del sistema. Además cumple con la condición de normalización

$$\int Q(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (2.2)$$

Esta función sirve como una herramienta para analizar el comportamiento en el espacio fase de un sistema cuántico, para ejemplificarlo se considera los siguientes sistemas: un estado coherente y un estado de número. Cabe señalar que se tiene una variable compleja α por lo que el eje X corresponderá a la parte real de α mientras que el eje Y corresponderá a la componente imaginaria.

2.1.1. Función Q para un estado coherente

El estado coherente $|\beta\rangle$, tiene un operador de densidad de la siguiente forma:

$$\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|, \quad (2.3)$$

por lo que la función de Husimi correspondiente esta dada por:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha - \beta|^2), \quad (2.4)$$

Su comportamiento en el espacio fase se muestra en la siguiente figura

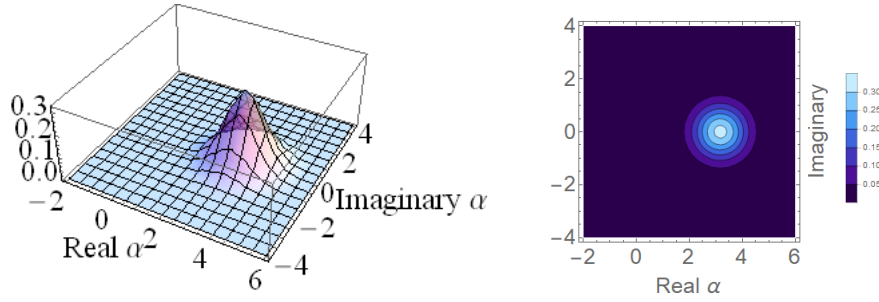


Figura 2.1: Gráfica de la función Q para un estado coherente.

2.1.2. Función Q para un estado de número

El estado de número $|n\rangle$, tiene el siguiente operador de densidad:

$$\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|, \quad (2.5)$$

así la función Q toma la siguiente forma:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.6)$$

donde se uso:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.7)$$

La gráfica correspondiente se muestra a continuación.

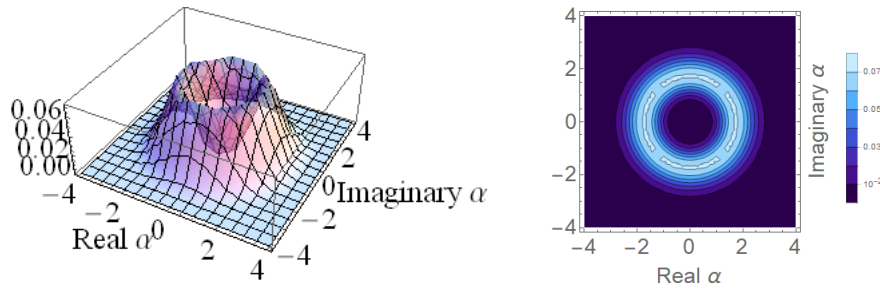


Figura 2.2: Gráfica de las función Q para un estado de número.

La función Q resulta una herramienta muy útil para analizar estados cuánticos en el espacio fase debido a que su definición hace mas fácil su cálculo respecto a otras funciones tales como: la función de Wigner y la función P ; esta simplicidad de cálculo a hecho posible su aplicación a sistemas bipartitos para el estudio de algunas propiedades de los sistemas cuánticos, [48; 49].

2.2. Función Q para dos sistemas

El uso de la función Q en sistemas bipartitos en principio no es posible usando la definición dada en 2.1 sin embargo usando las propuesta dadas por K. Banaszek, K. Wódkiewicz [48] y S. Mancini, et. al. [49] es posible aplicar esta función a los sistemas mencionados. La definición correspondiente es la siguiente:

$$Q(\alpha, \beta)_{12} = \frac{\langle \alpha, \beta | \hat{\rho}_{12} | \beta, \alpha \rangle}{\pi^2}, \quad (2.8)$$

donde $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2$ contiene a las bases correspondientes de los estados coherentes asociados a los sistemas 1 y 2 respectivamente. Como se observa,

esta definición sigue siendo una representación de un sistema a través de los elementos diagonales de la matriz de densidad considerando ahora dos sistemas.

En la siguiente parte de este trabajo se analizarán sistemas bipartitos mediante la definición 3.11 para lo cual se considerarán enredados y no enredados cuánticamente. Además se considerarán que dichos estados están formados por estados de número $|n\rangle$, estados coherentes $|\alpha\rangle$ y por estados de número desplazados $|\alpha, n\rangle$. Antes de proseguir es importante señalar que en este caso la función $Q(\alpha, \beta)_{12}$ contiene dos variables complejas por lo que para poder hacer una gráfica será necesario tomar una componente, real o imaginaria, de cada variable dejando las demás componentes constantes, esto permitirá obtener mayor información de cada sistema.

2.2.1. Sistemas formados por estados de número

Los primeros estados bipartitos a analizar corresponden a aquellos formados por estados de número $|n\rangle$ pertenecientes al espacio de Fock, en los cuales serán considerados únicamente los primeros dos estados, es decir, $|0\rangle, |1\rangle$.

Primer estado no enredado

El primer estado no enredado a considerar es el siguiente:

$$|\Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1 (|0\rangle_2 + |1\rangle_2) \quad (2.9)$$

cuya función de Husimi viene dada por

$$Q(\alpha, \beta)_{ne1} = \frac{1}{2}Q_0(\alpha)Q_0(\beta)[(1 + \text{Re}\{\beta\})^2 + (\text{Im}\{\beta\})^2] \quad (2.10)$$

donde

$$Q_0(\alpha) = \frac{1}{\pi}e^{-[(\text{Re}\{\alpha\})^2 + (\text{Im}\{\alpha\})^2]} \quad (2.11)$$

y similarmente para $Q_0(\beta)$. Como se dijo con anterioridad se tomarán en cuenta varios casos dependiendo las componentes a considerar de cada variable dejando las otras fijas, estos casos se muestran a continuación.

- El primer caso lo tenemos considerando las partes reales considerando $Re\{\alpha\}$ y $Re\{\beta\}$, es decir, se tiene que $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$. La condición anterior provoca que la función (2.10) adquiera la siguiente forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\beta\}]^2. \quad (2.12)$$

La gráfica para este caso se muestra a continuación:

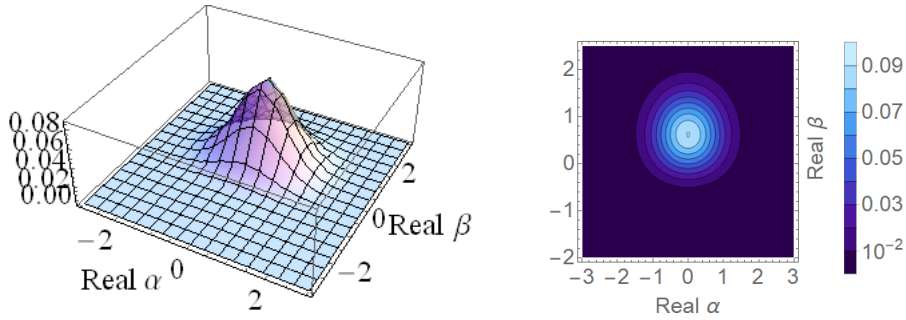


Figura 2.3: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$.

- En el segundo caso se consideran únicamente las partes imaginarias de α y β tomando en cuenta la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ la función de Husimi resulta en:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.13)$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

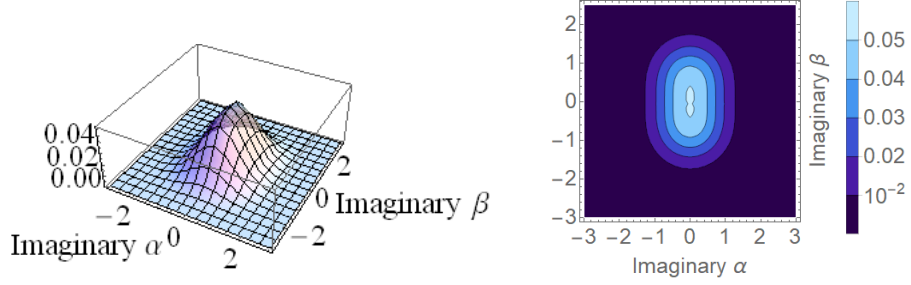


Figura 2.4: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- En el tercer caso se inicia con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ y en este caso la función Q obtenida es:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.14)$$

La gráfica correspondiente en este caso es:

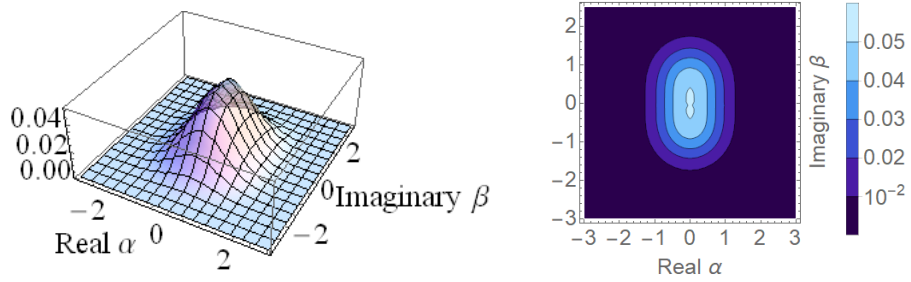


Figura 2.5: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Finalmente el caso correspondiente a la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ lleva a una función de Husimi de la forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\beta\}]^2. \quad (2.15)$$

en cuyo caso la gráfica es dada como se muestra a continuación.

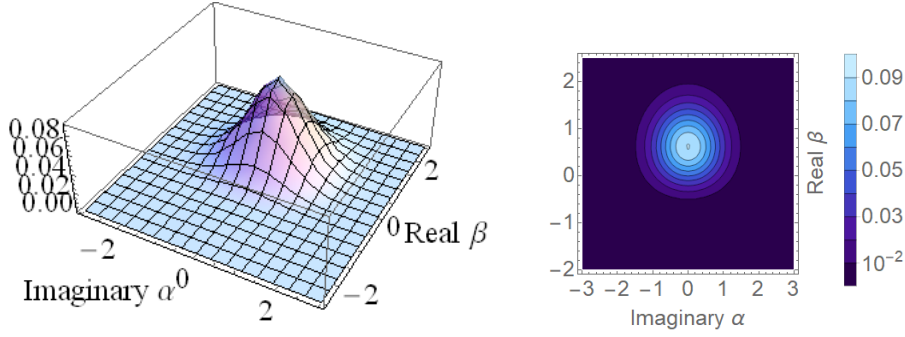


Figura 2.6: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne1} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Segundo estado no enredado

Se continua con otro estado no enredado también formado por estados de número:

$$|\Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2), \quad (2.16)$$

el cual, tiene asociada la función Q :

$$Q(\alpha, \beta)_{ne2} = \frac{1}{4}Q_0(\alpha)[(1+Re\{\alpha\})^2 + (Im\{\alpha\})^2]Q_0(\beta)[(1+Re\{\beta\})^2 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.17)$$

Nuevamente mostraremos varias gráficas en donde se consideran diferentes partes reales e imaginarias para α y β .

- Iniciamos con la condición $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$ la cuál hace que la función Q tome la forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne2} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Re\{\alpha\})^2] \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Re\{\beta\})^2]. \quad (2.18)$$

En este caso tenemos que la gráfica correspondiente es:

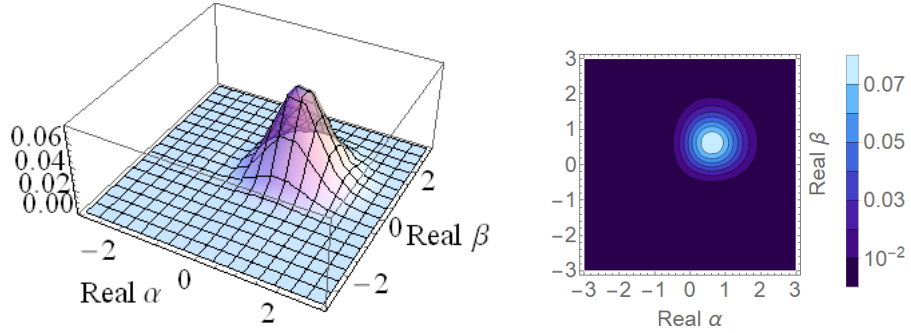


Figura 2.7: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne2}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$.

- En el caso de la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ la función de Husimi resulta en:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne2} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{e^{-[(Im\{\beta\})^2]}}{\pi} [1 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.19)$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

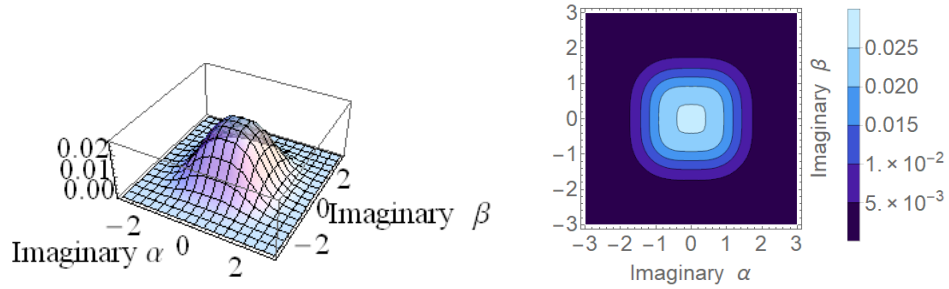


Figura 2.8: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- La condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ produce una función Q dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne2} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\alpha\}]^2 \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.20)$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

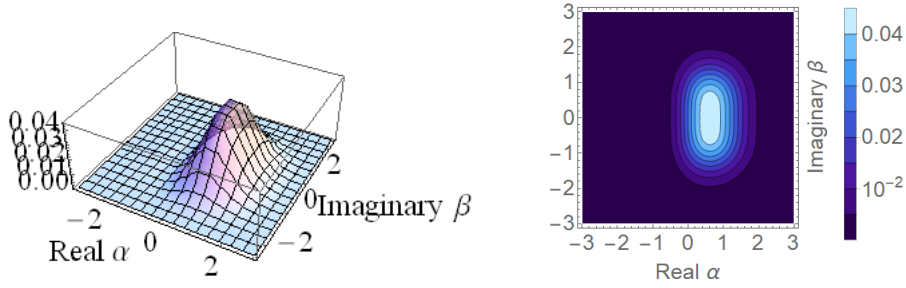


Figura 2.9: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Por otro lado la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ da lugar a la siguiente función de Husimi:

$$Q(\alpha, \beta)_{ne2} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\beta\}]^2. \quad (2.21)$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

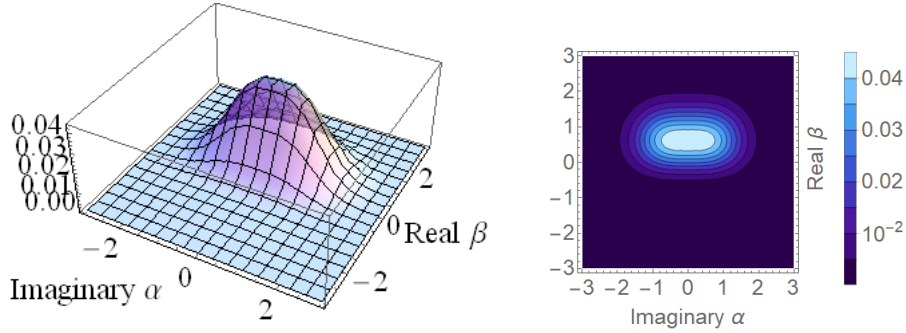


Figura 2.10: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ne2} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Primer estado enredado

Los casos anteriores corresponden a estados cuánticos no enredados por lo que ahora toca el turno de estados cuánticos que presentan un enre-

damiento. Se inicia considerando el siguiente estado:

$$|\Psi\rangle_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2) \quad (2.22)$$

cuya función Q correspondiente viene dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{e1} = \frac{1}{2} Q_0(\alpha) Q_0(\beta) [(Re\{\alpha\} + Re\{\beta\})^2 + (Im\{\alpha\} + Im\{\beta\})^2] \quad (2.23)$$

- Similarmente a los casos anteriores se inicia con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ la cual produce la siguiente función asociada:

$$Q(\alpha, \beta)_{e1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [Re\{\alpha\} + Re\{\beta\}]^2 \quad (2.24)$$

la gráfica de esta función se muestra a continuación:

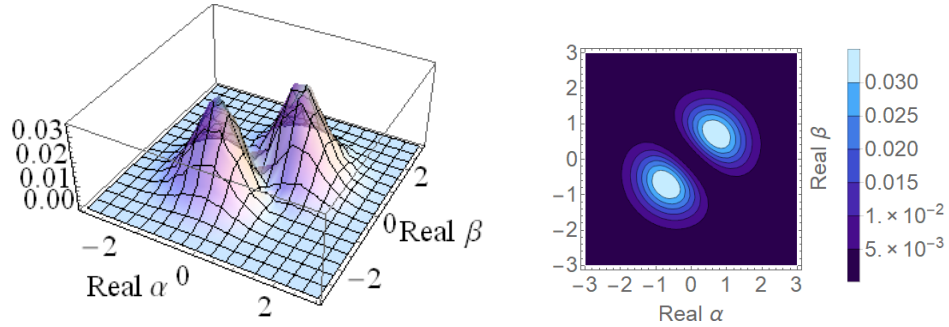


Figura 2.11: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{e1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

- Anulando ahora las partes reales, es decir, $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ se tiene ahora la función Q dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{e1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [Im\{\alpha\} + Im\{\beta\}]^2 \quad (2.25)$$

en donde la gráfica es:

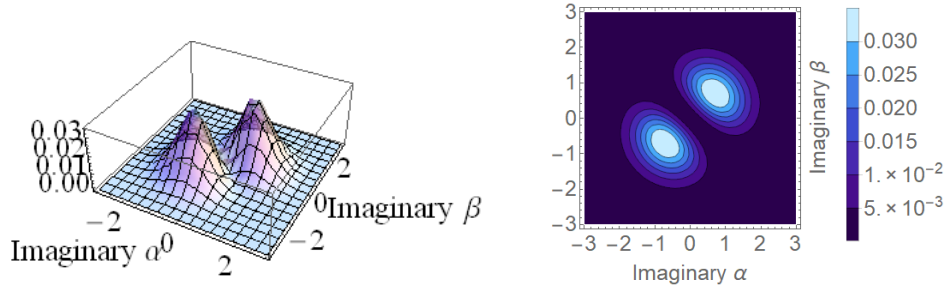


Figura 2.12: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{e1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Si se considera ahora $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ vemos que la función de Husimi adquiere la siguiente forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{e1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [(Re\{\alpha\})^2 + (Im\{\beta\})^2]. \quad (2.26)$$

En este caso la gráfica correspondiente es:

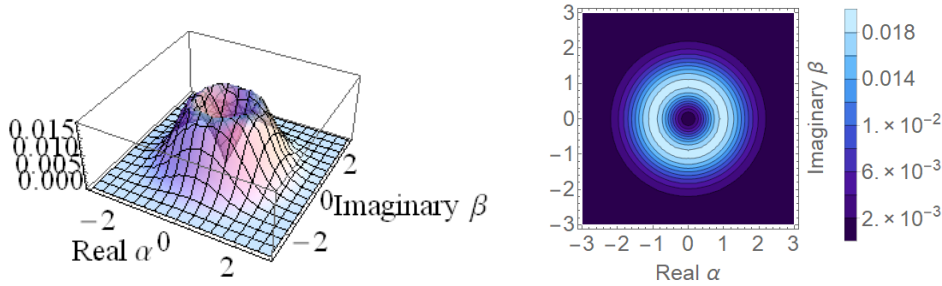


Figura 2.13: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{e1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Finalmente para este estado cuántico enredado se tiene la condición opuesta al caso anterior, es decir, $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$, en este caso la función Q es dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{e1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [(Im\{\alpha\})^2 + (Re\{\beta\})^2]. \quad (2.27)$$

La gráfica es en este caso:

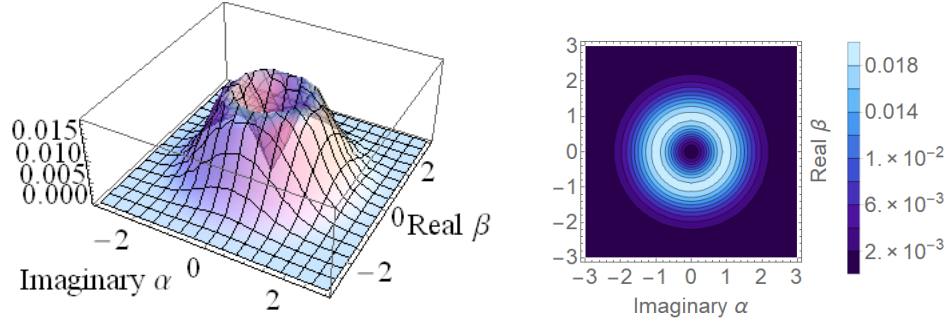


Figura 2.14: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Segundo estado enredado

Consideremos ahora un segundo estado cuántico enredado de la siguiente forma:

$$|\Psi\rangle_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \quad (2.28)$$

En este caso la función Q correspondiente es:

$$Q(\alpha, \beta)_{e2} = \frac{1}{2} Q_0(\alpha) Q_0(\beta) [(1 + Re\{\alpha\}Re\{\beta\} - Im\{\alpha\}Im\{\beta\})^2 + (Re\{\alpha\}Im\{\beta\} + Im\{\alpha\}Re\{\beta\})^2] \quad (2.29)$$

- Iniciemos nuevamente con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ que a su vez hace que la función de Husimi tome la forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{e2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\alpha\}Re\{\beta\}]^2. \quad (2.30)$$

Se tiene así la gráfica correspondiente:

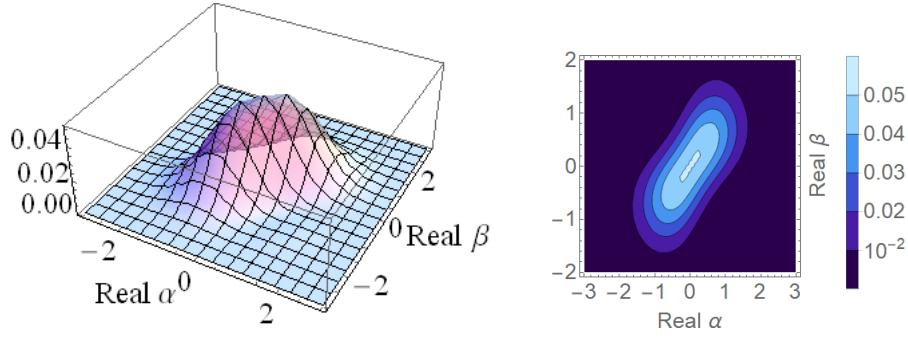


Figura 2.15: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

- Pasemos ahora a considerar únicamente las partes imaginarias; para esto se aplica $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ lo que hace que se tenga una función Q dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{e2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 - Im\{\alpha\}Im\{\beta\}]^2. \quad (2.31)$$

En este caso se tiene la siguiente gráfica:

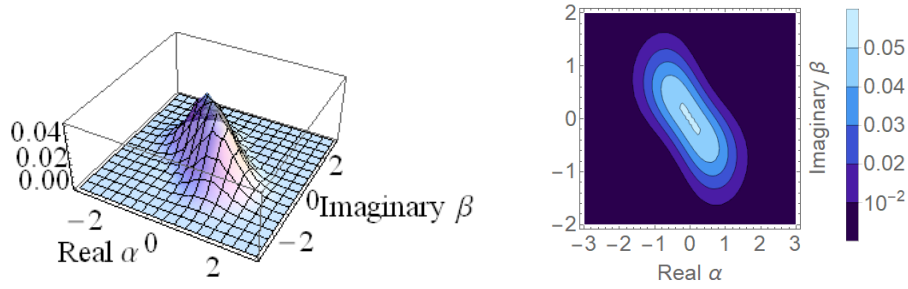


Figura 2.16: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Tomando ahora la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ vemos que la función de Husimi adquiere la siguiente forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{e2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Re\{\alpha\}Im\{\beta\})^2]. \quad (2.32)$$

La gráfica en este caso es:

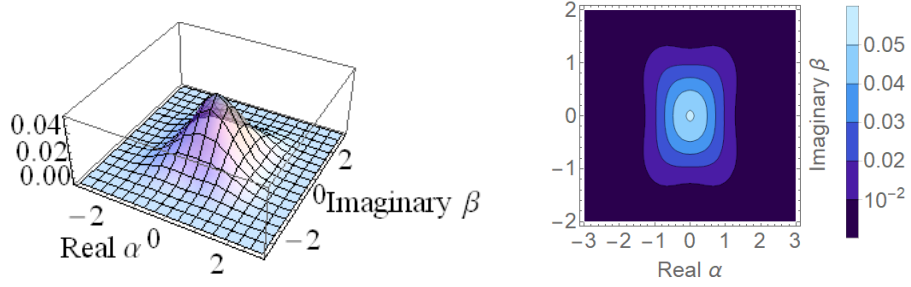


Figura 2.17: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)$ considerando $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Finalmente se toma la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ y se observa que la función Q toma la forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{e2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\}Re\{\beta\})^2]. \quad (2.33)$$

La gráfica en este último caso es:

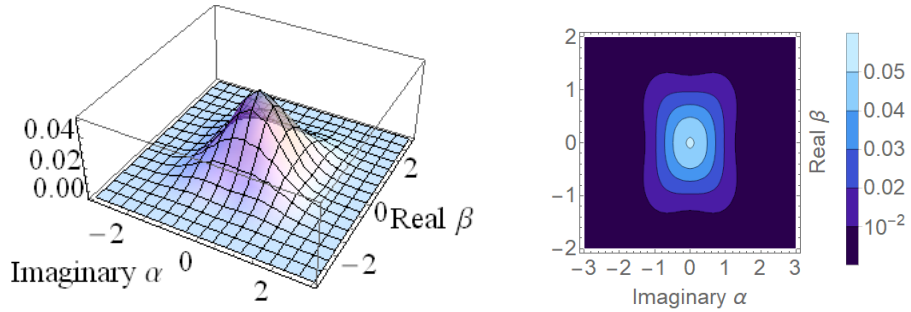


Figura 2.18: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ne1}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)$ considerando $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Los estados considerados hasta el momento muestran una diferencia en la función Q para estados no enredados ya que la función es de variables separables caso contrario al caso de un estado enredado donde la función no puede

separarse. En el caso de las gráficas en aquellos casos donde se consideran las componentes reales de cada variable se nota una diferencia entre un estado entrelazado y uno no entrelazado. En efecto, en uno de los estados enredados se observa una total separación de la función Q en dos partes mientras que en otro parece que tienden a separarse sin hacerlo plenamente, lo anterior no sucede en los estados no enredados.

2.2.2. Sistemas formados por estados de número y coherentes

En esta parte del trabajo se analizarán las funciones Q correspondientes a estados enredados y no enredados formados por estados de número $|0\rangle_1, |1\rangle_1$; y estados coherentes $|\phi\rangle_2, |-\phi\rangle_2$ donde el valor ϕ se tomara constante (ϕ_c) con los siguientes valores en sus componentes: $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$. Similarmente a los casos anteriores se iniciará estudiando un estado no enredado para finalizar con un estado enredado.

Estado no enredado

El estado bipartito a considerar es el siguiente:

$$|\Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} (1 + e^{-2|\phi|^2})^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\phi\rangle_2 + |-\phi\rangle_2) \quad (2.34)$$

cuya función Q correspondiente viene dada como:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta)_{ng} &= \frac{1}{4} Q_0(\alpha) [(1 + Re\{\alpha\})^2 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{\text{sech}(|\phi|^2)}{2} Q_0(\beta) \times \\ &\quad \left\{ \left[1 + e^{-2Re\{\beta\phi^*\}} \left(\cos[2Im\{\beta\phi^*\}] \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{-2Re\{\beta\phi^*\}} \left(\sin[2Im\{\beta\phi^*\}] \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Donde para ser más explícitos se tiene que:

$$Re\{\beta\phi^*\} = Re\{\beta\}Re\{\phi\} + Im\{\beta\}Im\{\phi\}, \quad (2.36)$$

$$Im\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}Re\{\phi\} - Re\{\beta\}Im\{\phi\}, \quad (2.37)$$

mientras que:

$$Q_0(\alpha) = \frac{e^{-[(Re\{\alpha\})^2 + (Im\{\alpha\})^2]}}{\pi}, \quad (2.38)$$

y análogamente para $Q_0(\beta)$.

El siguiente paso consiste en representar la función de Husimi en forma gráfica para observar su comportamiento, para esto se se hará una combinación de las partes reales e imaginarias como se hizo en los estados anteriores.

- Se inicia con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ la cual produce la siguiente función asociada:

$$Q(\alpha, \beta)_{ng} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [(1 + Re\{\alpha\})^2] \frac{\text{sech}(|\phi|^2)}{2} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} \times \\ \left\{ \left[e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} \left(\sin[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right) \right]^2 + \left[1 + e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} \left(\cos[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.39)$$

la gráfica de esta función se muestra a continuación:

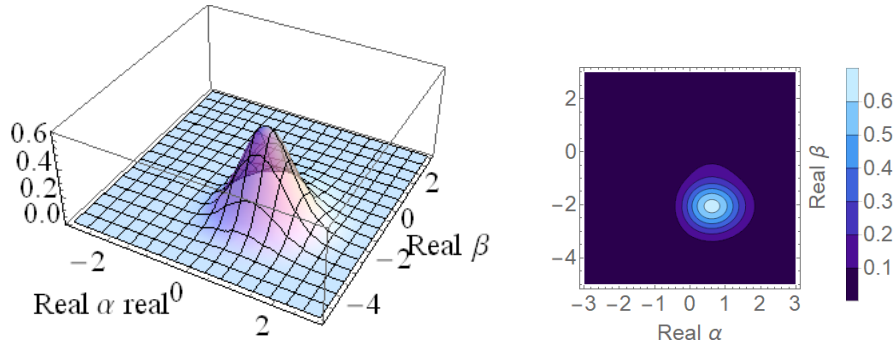


Figura 2.19: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2|\phi|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\phi\rangle_2 + |-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = Im\{\beta\} = 0$.

- Anulando ahora las partes reales, es decir, $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ se tiene ahora la función Q dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{ng} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{\text{sech}(|\phi|^2)}{2} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} \left\{ \left[e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \left(\sin[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right) \right]^2 + \left[1 + e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \left(\cos[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.40)$$

en donde la gráfica es:

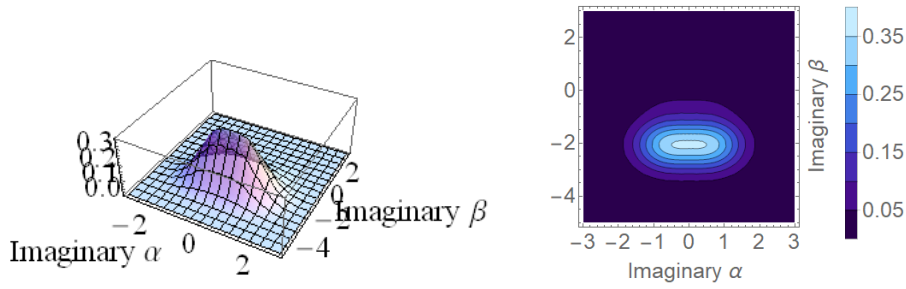


Figura 2.20: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2|\phi|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\phi\rangle_2 + |-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$.

- Si se considera ahora $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ vemos que la función de Husimi adquiere la siguiente forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{ng} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [(1 + Re\{\alpha\})^2] \frac{\text{sech}(|\phi|^2)}{2} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} \left\{ \left[e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \left(\sin[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right) \right]^2 + \left[1 + e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \left(\cos[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.41)$$

En este caso la gráfica correspondiente es:

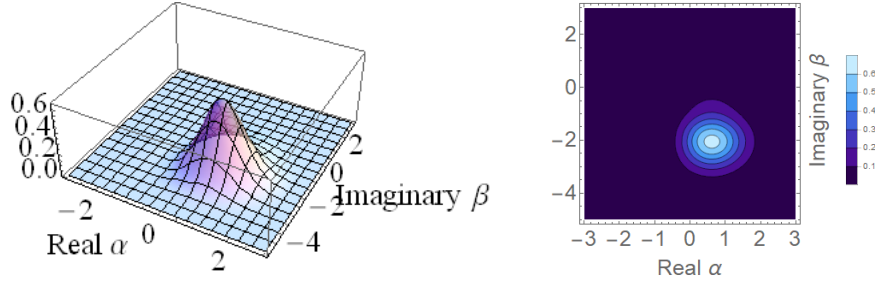


Figura 2.21: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2|\phi|^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\phi\rangle_2 + |-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Finalmente para este estado cuántico enredado se tiene la condición opuesta al caso anterior, es decir, $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$, en este caso la función Q es dada como:

$$Q(\alpha, \beta)_{ng} = \frac{1}{4} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{\text{sech}(|\phi|^2)}{2} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} \left\{ \left[e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} \left(\sin[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right) \right]^2 + \left[1 + e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} \left(\cos[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.42)$$

donde la gráfica correspondiente es:

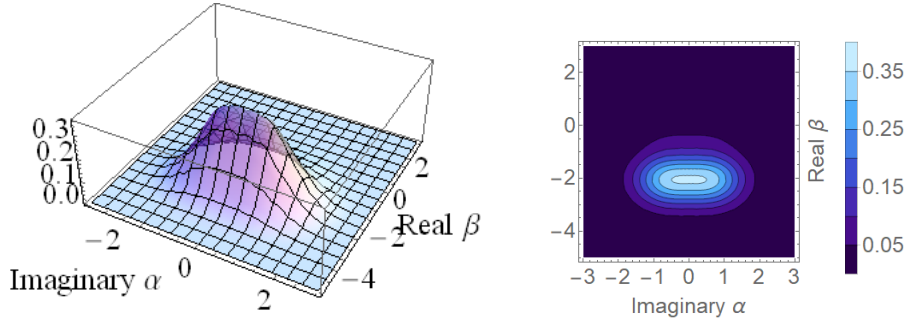


Figura 2.22: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el estado **no enredado** $|\Psi\rangle_{ng} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2|\phi|^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\phi\rangle_2 + |-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Estado enredado

El caso de un estado enredado se presenta a continuación,

$$|\Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 + |1\rangle_1 |-\phi\rangle_2), \quad (2.43)$$

siendo $|0\rangle_1$ y $|1\rangle_1$ estados de número mientras que $|\phi\rangle_2$ y $|-\phi\rangle_2$ corresponden a estados coherentes. La función de Husimi resultante para este sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta)_{nc} = & \frac{1}{2} Q_0(\alpha) Q_0(\beta) e^{-|\phi|^2} e^{2Re\{\beta^* \phi\}} \times \\ & \left\{ \left[1 + e^{-2Re\{\beta^* \phi\}} \left(Re\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta^* \phi\}] - Im\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta^* \phi\}] \right) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[e^{-2Re\{\beta^* \phi\}} \left(Re\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta^* \phi\}] + Im\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta^* \phi\}] \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Donde para ser más explícitos se tiene que:

$$Re\{\beta^* \phi\} = Re\{\beta\} Re\{\phi\} + Im\{\beta\} Im\{\phi\}, \quad (2.45)$$

$$Im\{\beta^* \phi\} = Re\{\beta\} Im\{\phi\} - Im\{\beta\} Re\{\phi\}, \quad (2.46)$$

mientras que:

$$Q_0(\alpha) = \frac{e^{-[(\text{Re}\{\alpha\})^2 + (\text{Im}\{\alpha\})^2]}}{\pi}, \quad (2.47)$$

y similarmente para $Q_0(\beta)$.

El orden de las gráficas será el mismo, es decir, por pares de las componentes reales o imaginarias de las variables involucradas.

- El primer caso lo tenemos considerando las partes reales considerando $\text{Re}\{\alpha\}$ y $\text{Re}\{\beta\}$, es decir, se tiene que $\text{Im}\{\alpha\} = \text{Im}\{\beta\} = 0$. La condición anterior provoca que la función (2.44) adquiera la siguiente forma:

$$Q(\alpha, \beta)_{nc} = \frac{1}{2} \frac{e^{-[\text{Re}\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[\text{Re}\{\beta\}]^2}}{\pi} e^{-|\phi|^2} e^{2\text{Re}\{\beta\}\text{Re}\{\phi\}} \left\{ \left[1 + e^{-2\text{Re}\{\beta\}\text{Re}\{\phi\}} \text{Re}\{\alpha\} \cos[2\text{Re}\{\beta\}\text{Im}\{\phi\}] \right]^2 + \left[e^{-2\text{Re}\{\beta\}\text{Re}\{\phi\}} \text{Re}\{\alpha\} \sin[2\text{Re}\{\beta\}\text{Im}\{\phi\}] \right]^2 \right\}. \quad (2.48)$$

La gráfica para este caso se muestra a continuación:

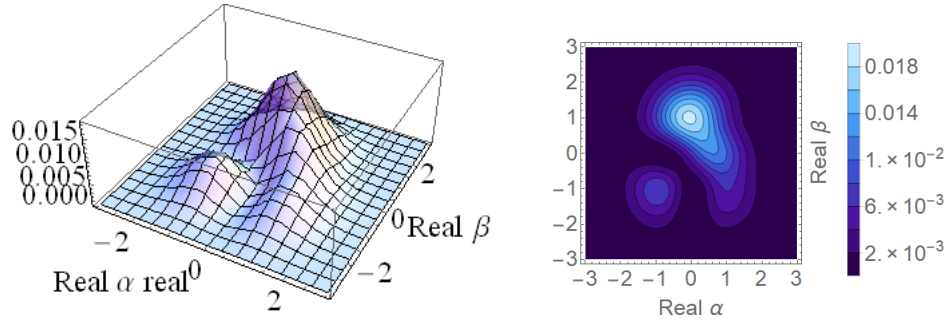


Figura 2.23: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 + |1\rangle_1 |-\phi\rangle_2)$ considerando $\text{Re}\{\phi\} = 1 = \text{Im}\{\phi\}$ y $\text{Im}\{\alpha\} = \text{Im}\{\beta\} = 0$.

- En el segundo caso se consideran únicamente las partes imaginarias de α y β tomando en cuenta la condición $\text{Re}\{\alpha\} = 0 = \text{Re}\{\beta\}$ la función de Husimi resulta en:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{nc} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} e^{-|\phi|^2} e^{2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \\
& \left\{ \left[1 + e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} Im\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} Im\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right]^2 \right\}. \quad (2.49)
\end{aligned}$$

La gráfica obtenida es la siguiente:

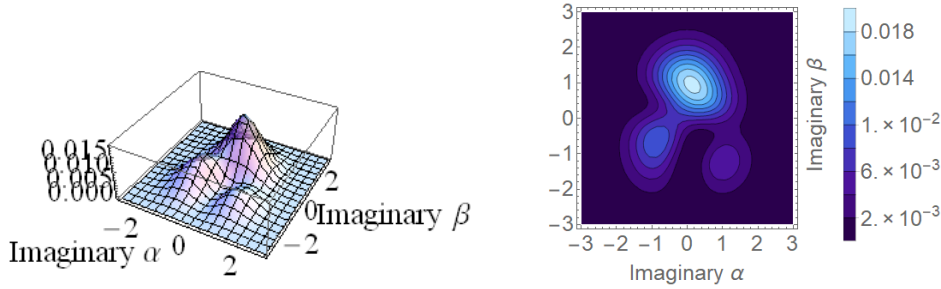


Figura 2.24: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 + |1\rangle_1 |-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- En el tercer caso se inicia con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ y en este caso la función Q obtenida es:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{nc} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} e^{-|\phi|^2} e^{2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} \\
& \left\{ \left[1 + e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} Re\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[e^{-2Im\{\beta\}Im\{\phi\}} Re\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta\}Re\{\phi\}] \right]^2 \right\}. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

La gráfica correspondiente en este caso es:

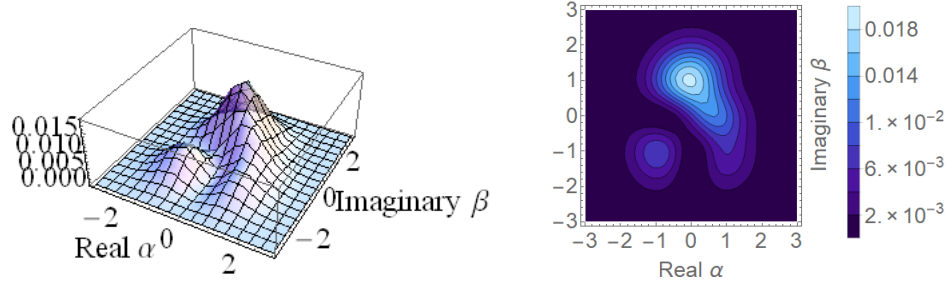


Figura 2.25: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|\phi\rangle_2 + |1\rangle_1|-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$.

- Finalmente el caso correspondiente a la condición $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ lleva a una función de Husimi de la forma:

$$\begin{aligned}
 Q(\alpha, \beta)_{nc} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} e^{-|\phi|^2} e^{2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} \\
 & \left\{ \left[1 - e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} Im\{\alpha\} \sin[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right]^2 \right. \\
 & \left. + \left[e^{-2Re\{\beta\}Re\{\phi\}} Im\{\alpha\} \cos[2Re\{\beta\}Im\{\phi\}] \right]^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

en cuyo caso la gráfica es dada como se muestra a continuación.

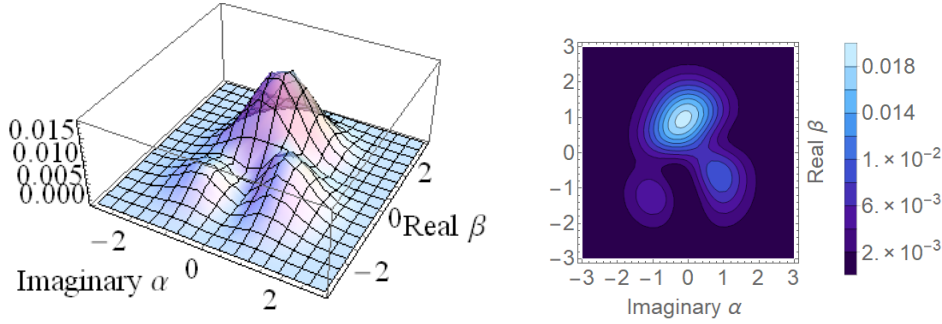


Figura 2.26: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{nc}$ para el estado **enredado** $|\Psi\rangle_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|\phi\rangle_2 + |1\rangle_1|-\phi\rangle_2)$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$ y $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$.

Como se puede ver nuevamente la función Q tiene un comportamiento diferente dependiendo si el estado presenta entrelazamiento cuántico o no. En el caso de un estado no enredado la función es de variables separables y gráficamente no presenta una separación en los casos de las componentes consideradas. En contraste al caso de un estado enredado en donde las gráficas en todos los casos presentan una separación y la función no es de variables separables.

2.2.3. Sistemas formados por estados de número y estados de número desplazado

Se analizarán las funciones Q correspondientes a sistemas bipartitos (enredados y no enredados) formados por estados de número $|0\rangle_1, |1\rangle_1$; y estados de número desplazado $|\delta, \phi\rangle_2, |\delta, -\phi\rangle_2$, nuevamente se considerará $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, es decir, $\phi_c = 1+i$. Siguiendo el orden usado en los casos anteriores se comienza estudiando un sistema no enredado para después finalizar con un sistema enredado.

Sistema no enredado

Se inicia con el siguiente sistema bipartito, no enredado:

$$|\Psi\rangle_{nd} = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2|\phi|^2} L_\delta(|2\phi|^2) \right)^{-\frac{1}{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|\delta, \phi\rangle_2 + |\delta, -\phi\rangle_2), \quad (2.52)$$

en donde $L_\delta(|2\phi|^2)$ corresponde al polinomio de Legendre de grado δ . Para este sistema se tiene la siguiente función Q :

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{ng} = & \frac{1}{4} \left(1 + e^{-2|\phi|^2} L_\delta(|2\phi|^2)\right)^{-\frac{1}{2}} Q_0(\alpha) |\alpha + 1|^2 Q_0(\beta) e^{-|\phi|^2} \times \\
& e^{2\operatorname{Re}\{\beta\phi^*\}} \frac{|\beta - \phi|^{2\delta}}{\delta!} \left\{ \left[\frac{e^{-2\operatorname{Re}\{\beta\phi^*\}}}{|\beta - \phi|^{2\delta}} \left(\sin[2\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\}] S_0(\delta, \beta, \phi) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \cos[2\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\}] S_1(\delta, \beta, \phi) \right) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[1 + \frac{e^{-2\operatorname{Re}\{\beta\phi^*\}}}{|\beta - \phi|^{2\delta}} \left(\cos[2\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\}] S_0(\delta, \beta, \phi) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sin[2\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\}] S_1(\delta, \beta, \phi) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Donde se tiene:

$$\operatorname{Re}\{\beta\phi^*\} = \operatorname{Re}\{\beta\} \operatorname{Re}\{\phi\} + \operatorname{Im}\{\beta\} \operatorname{Im}\{\phi\}, \tag{2.54}$$

$$\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\} = \operatorname{Im}\{\beta\} \operatorname{Re}\{\phi\} - \operatorname{Re}\{\beta\} \operatorname{Im}\{\phi\}, \tag{2.55}$$

$$Q_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-[(\operatorname{Re}\{\alpha\})^2 + (\operatorname{Im}\{\alpha\})^2]}, \tag{2.56}$$

y similarmente para $Q_0(\beta)$. Además por simplicidad se definió

$$S_n(\delta, \beta, \phi) = \sum_{m=0}^{\delta} \binom{\delta}{2m+n} (-1)^{m+n} (|\beta|^2 - |\phi|^2)^{\delta-(2m+n)} (\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\})^{2m+n}. \tag{2.57}$$

En este último caso se tiene que $n = 0, 1$.

Nuevamente la función de Husimi se calculará en diferentes casos y se graficará en cada uno de estos.

- Se inicia considerando $\operatorname{Im}\{\alpha\} = 0 = \operatorname{Im}\{\beta\}$ por lo que $\operatorname{Re}\{\beta\phi^*\} = \operatorname{Re}\{\beta\}$ y $\operatorname{Im}\{\beta\phi^*\} = -\operatorname{Re}\{\beta\}$. Aunado a esto se tiene que recordar que ϕ_c implica que $\operatorname{Re}\{\phi\} = 1 = \operatorname{Im}\{\phi\}$ por lo que se tiene la siguiente función Q :

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{ng} = & \frac{1}{4} \left(1 + e^{-4} L_\delta(8)\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\alpha\}]^2 \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} \\
& e^{-2} e^{2Re\{\beta\}} \frac{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
& \left\{ \left[\frac{e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \cos[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[1 + \frac{e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en realizar las gráficas y ver como evoluciona el sistema para diferentes valores de δ , en este caso se se tomarán los valores $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

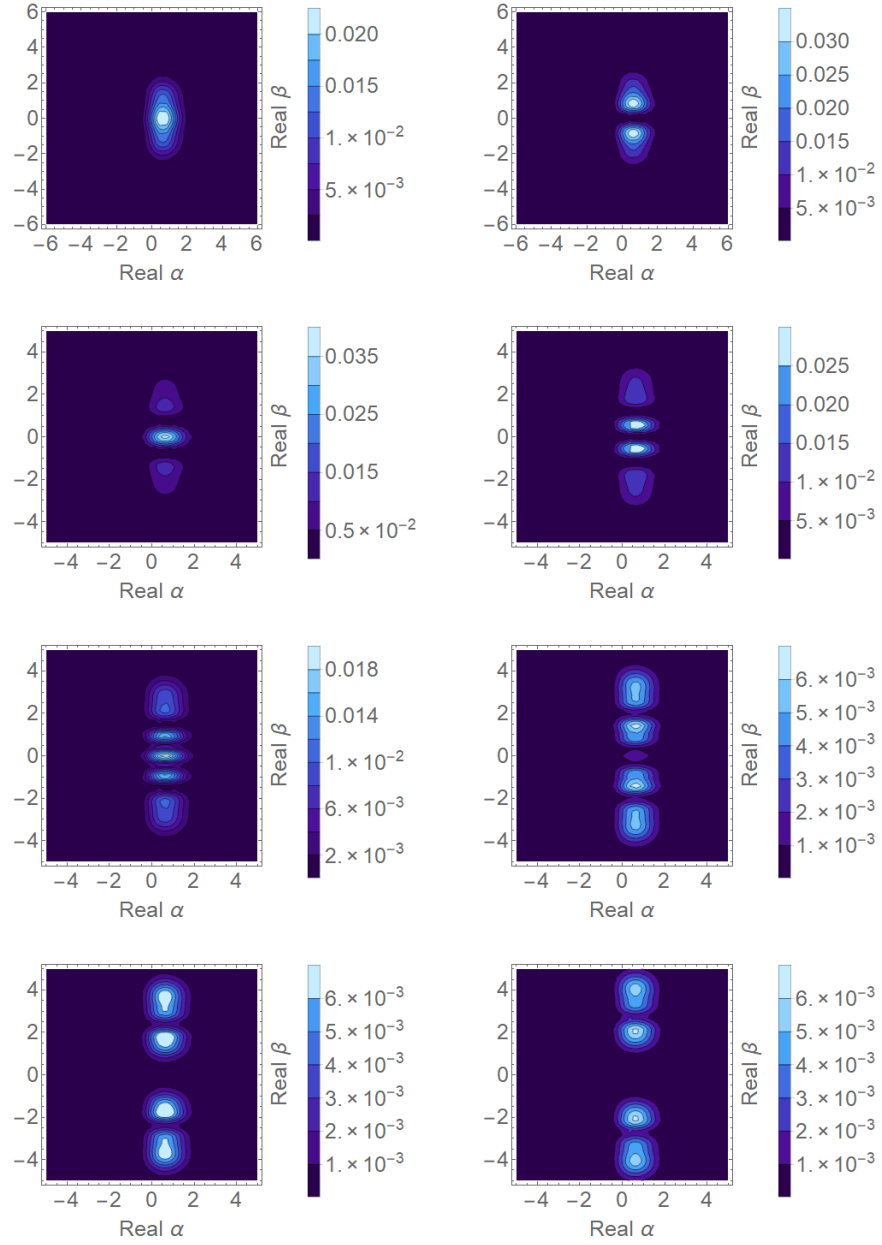


Figura 2.27: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{nd}$ considerando $\text{Re}\{\phi\} = 1 = \text{Im}\{\phi\}$, $\text{Im}\{\alpha\} = \text{Im}\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- El segundo caso corresponde a $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$. En este caso se tiene $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ por lo que la función Q toma la forma:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{ng} &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-4} L_\delta(8)\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} \\
&\quad e^{-2} e^{2Im\{\beta\}} \frac{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
&\quad \left\{ \left[\frac{e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \cos[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[1 + \frac{e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sin[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.59}
\end{aligned}$$

Ahora observemos las gráficas para varios valores de δ y ver como evoluciona el sistema.

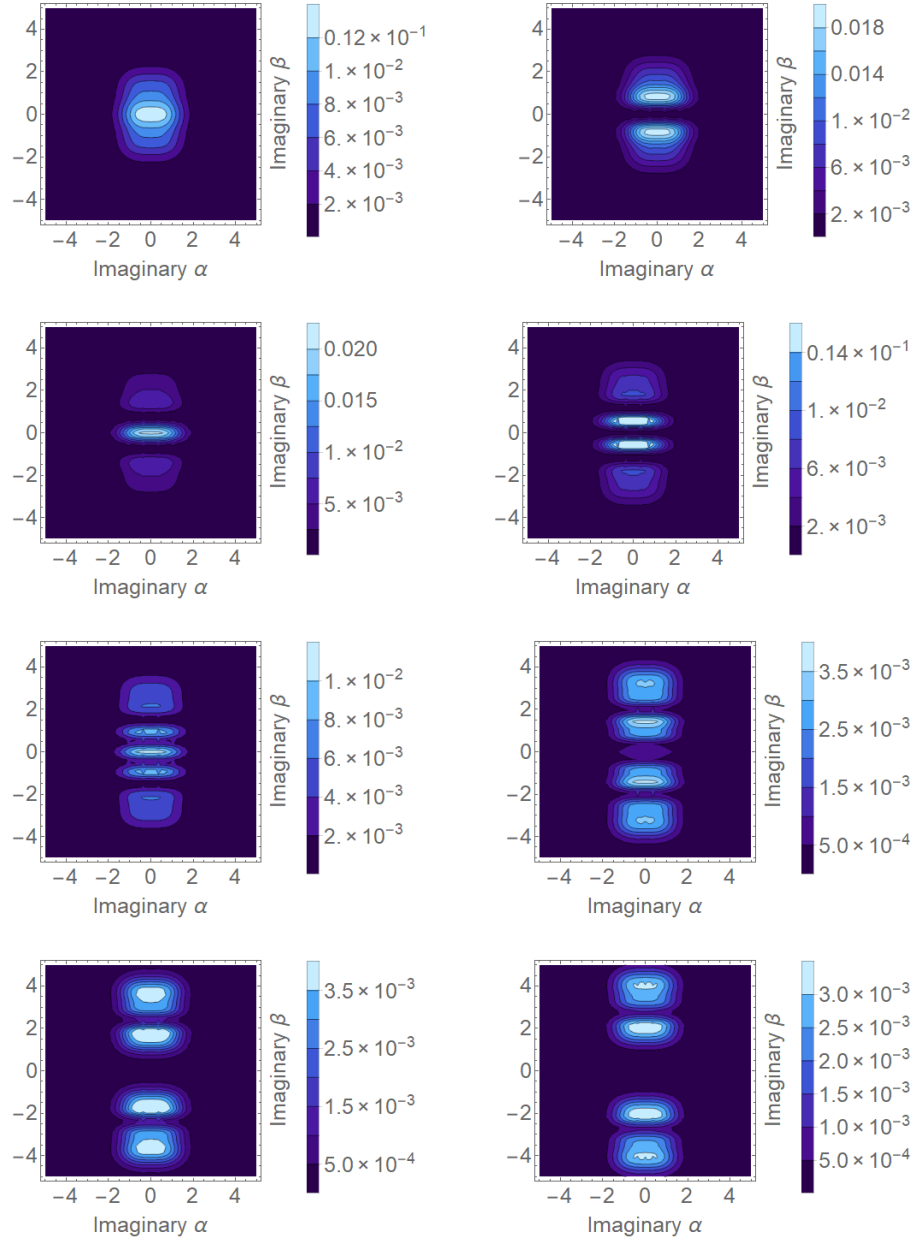


Figura 2.28: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- El tercer caso corresponde a la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ la que produce nuevamente que $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$. La función Q correspondiente es:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{ng} &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-4} L_\delta(8)\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-[Re\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + Re\{\alpha\}]^2 \frac{e^{-[Im\{\beta\}]^2}}{\pi} \\
&\quad e^{-2} e^{2Im\{\beta\}} \frac{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \\
&\quad \times \left\{ \left[\frac{e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \cos[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[1 + \frac{e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sin[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

En este caso las gráficas correspondientes son:

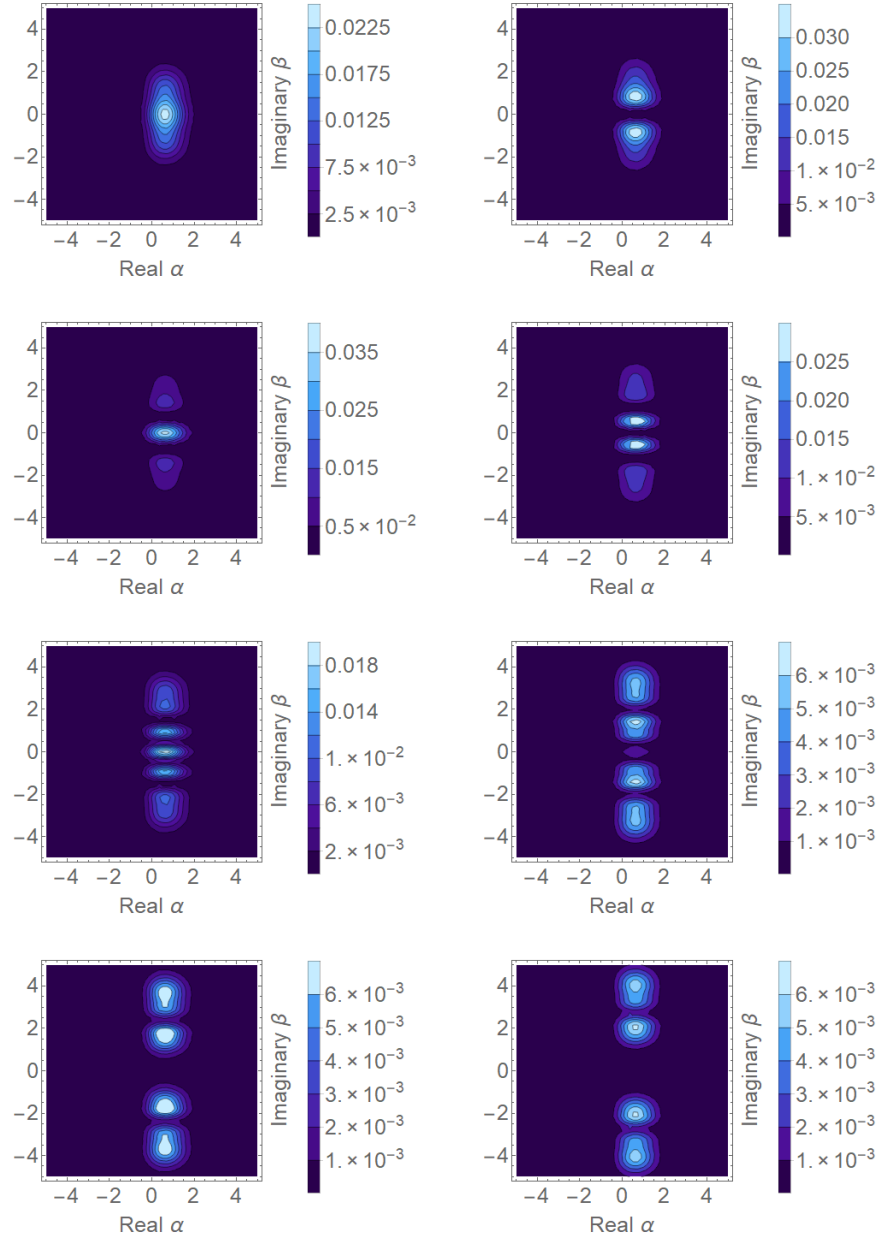


Figura 2.29: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{nd}$ considerando $\text{Re}\{\phi\} = 1 = \text{Im}\{\phi\}$, $\text{Im}\{\alpha\} = 0 = \text{Re}\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- Finalmente se tiene que $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ la que produce nuevamente que $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = -Im\{\beta\}$. La función Q correspondiente es:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{ng} &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-4} L_\delta(8)\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-[Im\{\alpha\}]^2}}{\pi} [1 + (Im\{\alpha\})^2] \frac{e^{-[Re\{\beta\}]^2}}{\pi} \\
&\quad e^{-2} e^{2Re\{\beta\}} \frac{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \\
&\quad \times \left\{ \left[\frac{e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \cos[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[1 + \frac{e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sin[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes a este caso se muestran a continuación:

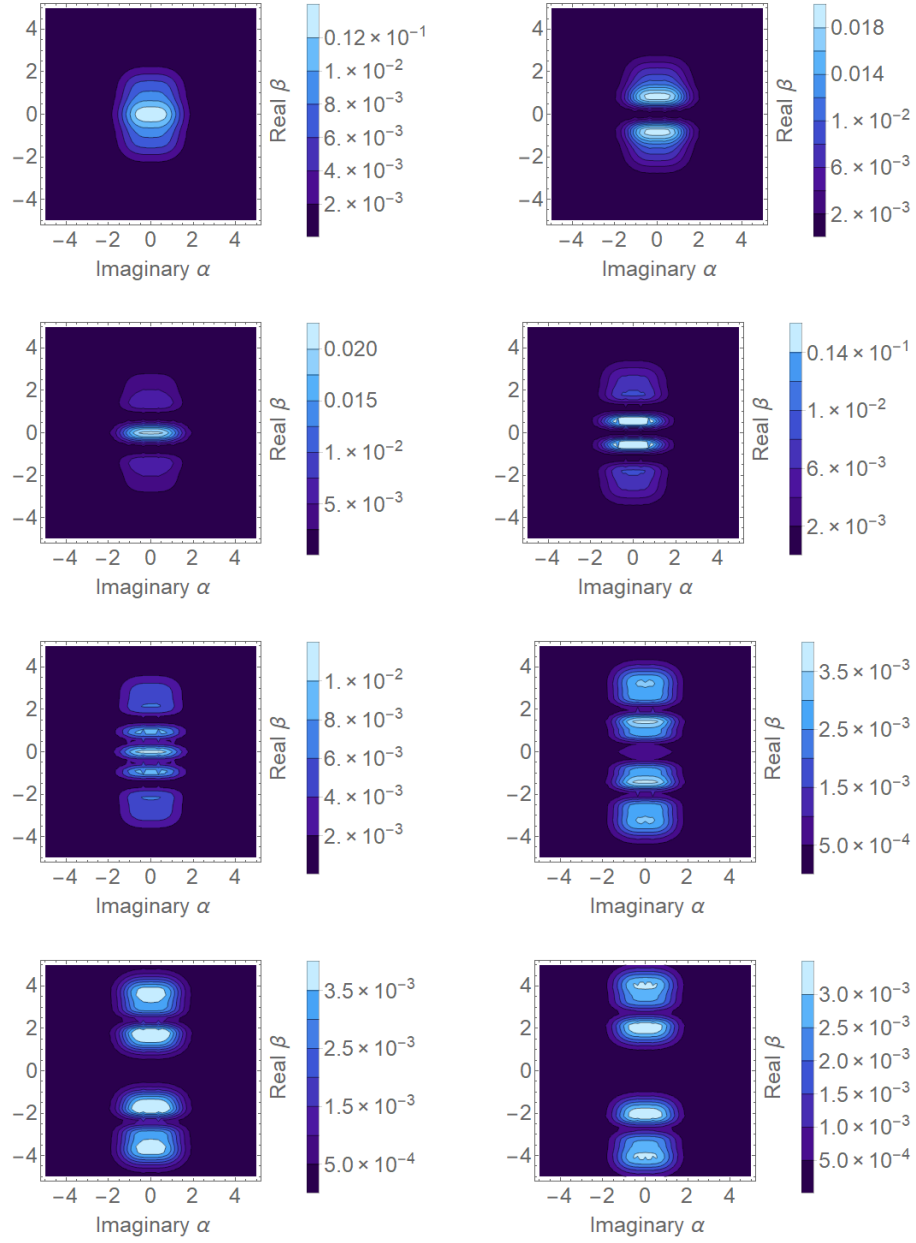


Figura 2.30: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{nd}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

Como se nota en las gráficas al ir aumentando el valor de δ la función Q se divide y «desplaza» sobre los ejes verticales que es donde se están considerando las componentes de la variable β . Esta variable corresponde a los valores de los elementos diagonales $|\beta\rangle$ del operador de densidad correspondiente a la representación de los estados de número desplazado.

Sistema enredado

En el caso del siguiente sistema enredado:

$$|\Psi\rangle_{de} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\delta, \phi\rangle_2 + |1\rangle_1 |\delta, -\phi\rangle_2), \quad (2.62)$$

la función de Husimi obtenida es dada en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta)_{de} = & \frac{1}{2} Q_0(\alpha) Q_0(\beta) e^{2Re\{\beta\phi^*\}} \frac{|\beta - \phi|^{2\delta}}{\delta!} \times \\ & \left\{ \left[1 + \frac{e^{-2Re\{\beta\phi^*\}}}{|\beta - \phi|^{2\delta}} \left((Re\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\phi^*\}] + Im\{\alpha\} \sin 2Im\{\beta\phi^*\}) S_0(\delta, \beta, \phi) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + (Re\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta\phi^*\}] - Im\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\phi^*\}]) S_1(\delta, \beta, \phi) \right) \right]^2 \\ & + \left[\frac{e^{-2Re\{\beta\phi^*\}}}{|\beta - \phi|^{2\delta}} \left((Re\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\phi^*\}] + Im\{\alpha\} \sin 2Im\{\beta\phi^*\}) S_1(\delta, \beta, \phi) \right. \right. \\ & \left. \left. - (Re\{\alpha\} \sin[2Im\{\beta\phi^*\}] - Im\{\alpha\} \cos[2Im\{\beta\phi^*\}]) S_0(\delta, \beta, \phi) \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Donde los elementos que conforman la función Q ya fueron definidos con anterioridad.

- En analogía al sistema no enredado se inicia con la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ que ocasiona que $Re\{\beta\phi^*\} = Re\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = -Re\{\beta\}$. Teniendo en consecuencia la siguiente función:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{de} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-(Re\{\alpha\})^2}}{\pi} \frac{e^{-[(Re\{\beta\})]^2}}{\pi} e^{2Re\{\beta\}} \frac{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
& \left\{ \left[1 + \frac{Re\{\alpha\} e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sin[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
& + \left[\frac{e^{Re\{\alpha\} - 2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin[2Im\{\beta\phi^*\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.64}
\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes a este caso son:

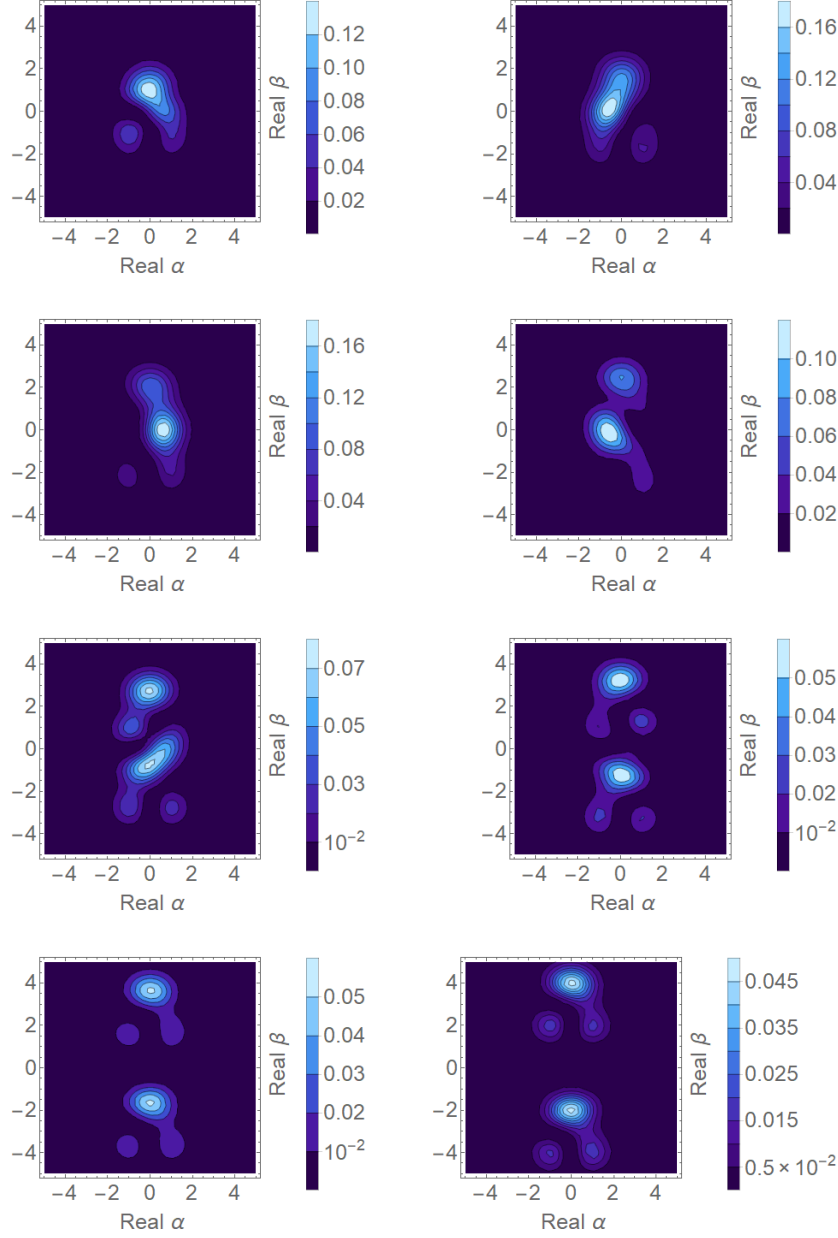


Figura 2.31: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **enredado** $|\Psi\rangle_{de}$ considerando $\text{Re}\{\phi\} = 1 = \text{Im}\{\phi\}$, $\text{Im}\{\alpha\} = \text{Im}\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- El segundo caso corresponde a $Re\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$. En este caso se tiene $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ por lo que la función Q toma la forma:

$$\begin{aligned}
 Q(\alpha, \beta)_{de} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-(Im\{\alpha\})^2}}{\pi} \frac{e^{-(Im\{\beta\})^2}}{\pi} e^{2Im\{\beta\}} \frac{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
 & \left\{ \left[1 + \frac{Im\{\alpha\} e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \cos[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
 & \left. + \left[\frac{Im\{\alpha\} e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \sin[2Im\{\beta\phi^*\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes para este caso son:

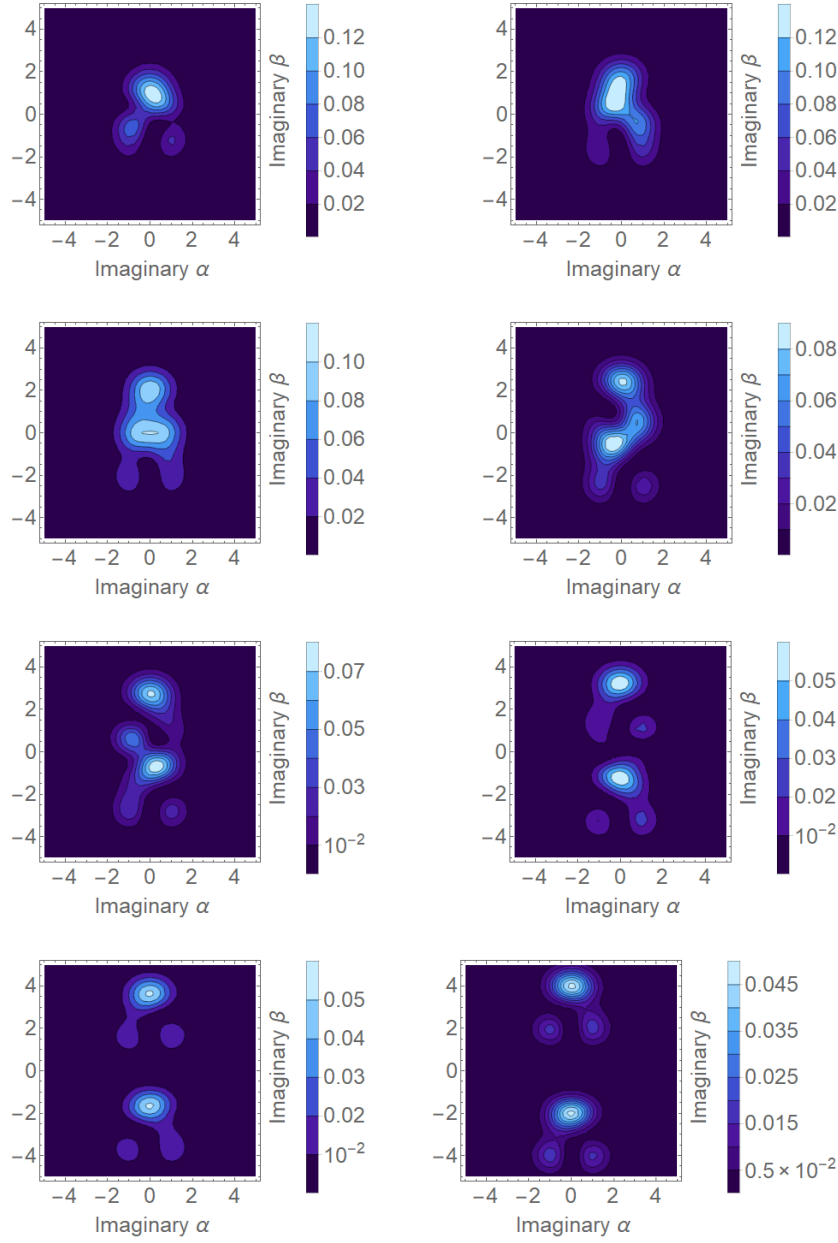


Figura 2.32: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **enredado** $|\Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- El tercer caso corresponde a la condición $Im\{\alpha\} = 0 = Re\{\beta\}$ la que produce nuevamente que $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$. La función Q correspondiente es:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{de} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-(Re\{\alpha\})^2}}{\pi} \frac{e^{-[(Im\{\beta\})^2]}}{\pi} e^{2Im\{\beta\}} \frac{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
& \left\{ \left[1 + \frac{Re\{\alpha\} e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Im\{\beta\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[\frac{Re\{\alpha\} e^{-2Im\{\beta\}}}{[(Im\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Im\{\beta\}] S_1(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sin[2Im\{\beta\phi^*\}] S_0(\delta, Im\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes para este caso son:

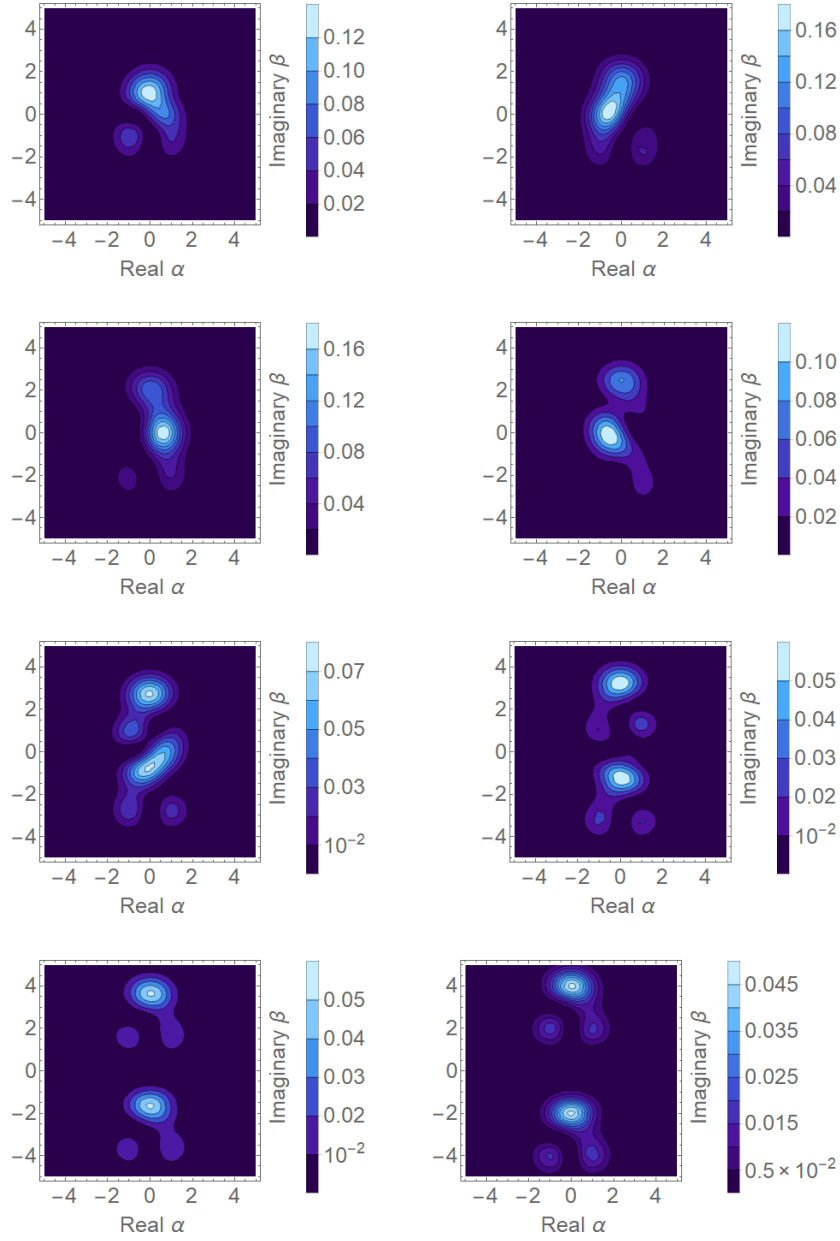


Figura 2.33: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **enredado** $|\Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Im\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

- Finalmente se tiene que $Re\{\alpha\} = 0 = Im\{\beta\}$ la que produce nuevamente que $Re\{\beta\phi^*\} = Im\{\beta\}$ y $Im\{\beta\phi^*\} = -Re\{\beta\}$. La función Q correspondiente es:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha, \beta)_{de} = & \frac{1}{2} \frac{e^{-[(Im\{\alpha\})^2]}}{\pi} \frac{e^{-[(Re\{\beta\})^2]}}{\pi} e^{2Re\{\beta\}} \frac{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta}{\delta!} \times \\
& \left\{ \left[1 + \frac{Im\{\alpha\} e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\sin[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \cos[2Re\{\beta\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right. \\
& + \left[\frac{Im\{\alpha\} e^{-2Re\{\beta\}}}{[(Re\{\beta\} - 1)^2 + 1]^\delta} \left(\cos[2Re\{\beta\}] S_0(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin[2Re\{\beta\phi^*\}] S_1(\delta, Re\{\beta\}, \phi_c) \right) \right]^2 \right\}. \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes para este caso son:

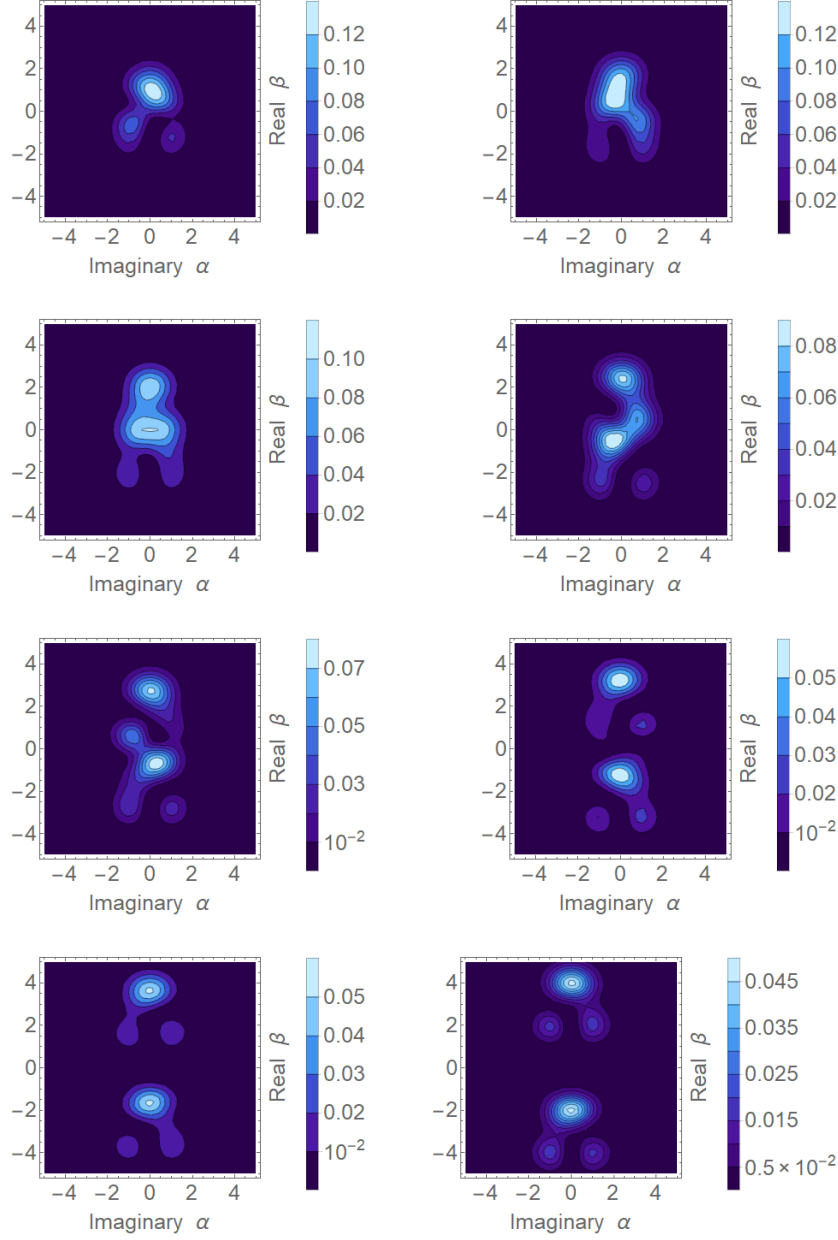


Figura 2.34: Gráfica de la función $Q(\alpha, \beta)_{ng}$ para el sistema **enredado** $|\Psi\rangle_{de}$ considerando $Re\{\phi\} = 1 = Im\{\phi\}$, $Re\{\alpha\} = Re\{\beta\} = 0$ para valores de $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

En este caso además de dividirse sobre el eje vertical, como en el caso de un estado no enredado, la función Q se separa sobre el eje horizontal el cuál se asocia a la base de elementos diagonales $|\alpha\rangle$ asociados a la parte del operador de densidad que representa a los estados de número. Al respecto, el comportamiento en el eje vertical puede asociarse a los valores que adquiere δ en los estados de número desplazado mientras que el comportamiento en el eje horizontal puede considerarse como una detección del entrelazamiento cuántico de los estados de número con los estados de número desplazado pues un comportamiento similar se observa en el estado entrelazado compuesto por estados de número y coherentes.

Lo analizado en este capítulo permite mostrar que la función Q puede usarse como una herramienta para analizar estados cuánticos entrelazados ya que en el espacio fase se observa un comportamiento distintivo pues la gráfica de la función tiende a separarse como en la figura 2.15 o totalmente como en las figuras 2.11 ó 2.23; y en algunos casos hasta en tres partes 2.31. Aunado a lo anterior la función de Husimi permite observar un desplazamiento en aquellos casos donde el sistema bipartito contiene estados de número desplazado. Finalmente es importante señalar que esta función es de variables separables cuando no existe enredamiento cuántico.



Función de Husimi para una cavidad optomecánica

EN este capítulo se usa la función Q para analizar la evolución en el espacio fase del sistema cuántico correspondiente a la cavidad optomecánica. En una primera parte de este capítulo se introduce una definición de la función de Husimi para un sistema tripartito la cual involucra tres variables complejas, por lo que se introducen las condiciones necesarias para poder representarla gráficamente. Una vez hecho lo anterior se procede a calcular dicha función para el estado inicial observando su correspondiente comportamiento en el espacio fase. Finalmente se realiza el análisis del estado final obtenido por la dinámica de la cavidad, iniciando por su comportamiento temporal para luego hacer lo mismo en el espacio fase; en esta parte del trabajo se considerarán tanto el acoplamiento fuerte como el débil.

3.1. Función de Husimi para una cavidad optomecánica

3.1.1. Estado inicial y final para una cavidad optomecánica

Antes de iniciar plenamente con la función de Husimi para un sistema tripartito es conveniente recordar la siguiente información. El estado inicial no enredado que representa al sistema esta dado por:

$$|\Psi\rangle_{in} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)|\beta\rangle, \quad (3.1)$$

donde los primeros los estados $|0\rangle_i$ y $|1\rangle_i$ representan a los modos del campo ($i = 1, 2$) mientras que el resonador es representado por el últimos término, es decir, el estado coherente $|\beta\rangle$. La evolución temporal del sistema se obtiene aplicando el operador de evolución temporal,

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}, \quad (3.2)$$

al estado inicial $|\Psi\rangle_{in}$ como se indica en la siguiente expresión:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle_{in}. \quad (3.3)$$

El Hamiltoniano correspondiente a este sistema está dado por:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar\omega_m\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar(g_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + g_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (3.4)$$

donde $\hat{a}_i$ y $\hat{a}_i^\dagger$ ($i = 1, 2$) son los operadores de aniquilación y creación respectivamente para los modos del campo, mientras tanto $\hat{b}$ y $\hat{b}^\dagger$ juegan el mismo papel para el resonador mecánico; ω_i y ω_m son las frecuencias de los modos electromagnético y mecánico; y finalmente g_i es la constante i -ésima de acoplamiento optomecánica correspondiente a un modo. Como resultado de la evolución temporal del sistema se obtiene el siguiente estado final,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \frac{1}{2} \left[|0\rangle_1 \left(|0\rangle_2 |\beta'\rangle + c_2 |1\rangle_2 \overline{M}_2(m, k) |\beta', k\rangle \right) \right. \\ & + c_1 |1\rangle_1 \left(|0\rangle_2 \overline{M}_1(m, k) |\beta', k\rangle \right. \\ & \left. \left. + c_2 |1\rangle_2 e^{2F_1\hbar^2 g_1 g_2} \overline{M}_2(m, k) \overline{M}_1(n, l) \sqrt{\frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}} |\beta', k+l\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde por simplicidad fueron hechas las siguientes definiciones:

$$\overline{M}_j(m, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(F_2(t)g_j\hbar)^m}{m!} (\beta^{t*})^{m-k} \sqrt{k!} \quad (3.6)$$

$$c_j = e^{-i\omega_j t} e^{F_3(t)\hbar g_j \beta'} e^{F_1(t)\hbar^2 g_j^2}. \quad (3.7)$$

con $j = 1, 2$. Las funciones $F_1(t)$, $F_2(t)$ y $F_3(t)$ son las siguientes:

$$F_1(t) = \frac{e^{-i\omega_m t} - i\omega_m t - 1}{\hbar^2 \omega_m^2}, \quad (3.8)$$

$$F_2(t) = \frac{e^{-i\omega_m t} - 1}{\hbar \omega_m}, \quad (3.9)$$

$$F_3(t) = \frac{1 - e^{i\omega_m t}}{\hbar \omega_m}. \quad (3.10)$$

Como se observa el estado cuántico inicial no enredado se transforma a un estado cuántico enredado a causa de la evolución temporal del sistema es por lo tanto necesario analizar el enredamiento cuántico generado y el comportamiento correspondiente en el espacio fase, para esto se usará la función Q .

3.1.2. Función Q para un sistema tripartito

En el capítulo anterior el análisis en el espacio fase para sistemas bipartitos fué realizado con la definición propuesta por [48] y [49], es decir,

$$Q(\alpha, \beta)_{12} = \frac{\langle \alpha, \beta | \hat{\rho}_{12} | \beta, \alpha \rangle}{\pi^2}, \quad (3.11)$$

en donde $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2$ son los estados coherentes asociados a la diagonal de la matriz de densidad para los sistemas 1 y 2 respectivamente.

El caso de un sistema tripartito requiere considerar un tercer sistema extra, por lo que resulta en cierta manera natural ampliar la definición anterior incluyendo ahora una base extra representada también por estados coherentes para incluir el nuevo sistema, como resultado de este razonamiento se tiene la siguiente definición:

$$Q(\alpha, \mu, \nu)_{cav} = \frac{\langle \alpha, \mu, \nu | \hat{\rho}_{cav} | \alpha, \mu, \nu \rangle}{\pi^3}, \quad (3.12)$$

donde $\hat{\rho}_{cav} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ corresponde al operador de densidad del sistema total y $|\alpha, \mu, \nu\rangle = |\mu\rangle_1 |\nu\rangle_2 |\alpha\rangle_3$ son los correspondientes estados coherentes en el espacio de fase de cada sistema. Se tiene por lo tanto, que $|\alpha\rangle$ mapea el comportamiento correspondiente del espejo, mientras que los kets $|\mu\rangle_1$ y $|\nu\rangle_2$ mapean el comportamiento de los modos de cavidad. En consecuencia la

función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{cav}$ depende de tres variables complejas (una para cada sistema) por lo que para poder obtener representaciones gráficas se tendrán que considerar casos en donde alguna de las variables se mantendrá constante dejando libre el par restante, en efecto, dichos casos son los siguientes:

- $\alpha = \text{constante}$.
- $\nu = \text{constante}$.
- $\mu = \text{constante}$.

Aún con las elecciones anteriores hay demasiadas variables que hacen que la visualización en el espacio de fase no sea posible. Por lo tanto para remediar esta situación, sólo las componentes reales de las variables a utilizar en cada caso se tendrán en cuenta. Además, como se hizo en el capítulo anterior, el valor del estado coherente (asociado al resonador mecánico) será considerado como constante, es decir, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$. Estas consideraciones serán aplicadas en la graficación de la función de Husimi tanto para el estado inicial como el final.

3.1.3. Función Q para el estado inicial

El estado inicial del sistema, como se indico líneas arriba, es el siguiente:

$$|\Psi\rangle_{in} = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)(|0\rangle_2 + |1\rangle_2)|\beta\rangle, \quad (3.13)$$

usando la definición 3.12 se obtiene la siguiente función Q:

$$Q(\alpha, \mu, \nu) = \frac{1}{4}Q_0(\alpha - \beta)Q_0(\mu)|1 + \mu|^2Q_0(\nu)|1 + \nu|^2, \quad (3.14)$$

donde

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{\pi}e^{-[(Re\{\mu\})^2 + (Im\{\mu\})^2]}. \quad (3.15)$$

Similarmente para $Q_0(\nu)$ y $Q_0(\alpha - \beta)$.

La expresión analítica de esta función hereda el comportamiento del sistema para el cual fue calculada porque puede ser factorizada, es decir, escrita como el producto de funciones que dependen cada una de la variable de espacio de fase correspondiente a cada sistema individual. Más tarde

se observará la contraparte para el sistema cuánticamente enredado. Pasemos ahora a observar el comportamiento gráfico de dicha función para los diferentes casos mencionados.

- Iniciemos considerando el caso $\alpha = cte$ y observemos su comportamiento. Se tiene $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$. El eje x corresponde a la parte real de μ mientras que el eje y corresponde a la parte real de ν

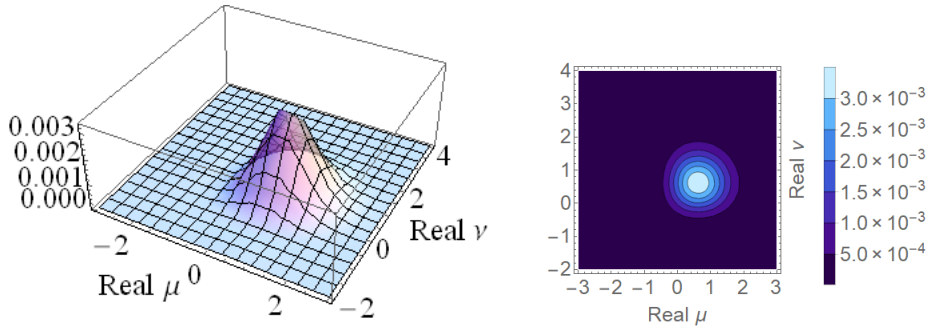


Figura 3.1: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{in} = (\gamma_1|0\rangle_1 + \delta_1|1\rangle_1)(\gamma_2|0\rangle_2 + \delta_2|1\rangle_2)|\beta\rangle$, con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$

- El segundo caso corresponde a $\nu = cte$, es decir, $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$. Nuevamente el eje x corresponde a la parte real de μ pero ahora el eje y corresponde a la parte real de α .

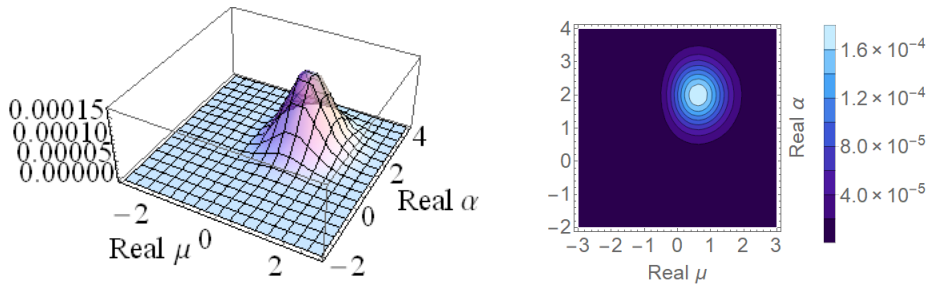


Figura 3.2: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{in} = (\gamma_1|0\rangle_1 + \delta_1|1\rangle_1)(\gamma_2|0\rangle_2 + \delta_2|1\rangle_2)|\beta\rangle$, con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$

- Finalmente tenemos el último caso en donde $\mu = cte$, es decir, $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$. En este caso el eje x corresponde a la parte real de ν y el eje y corresponde a la parte real de α

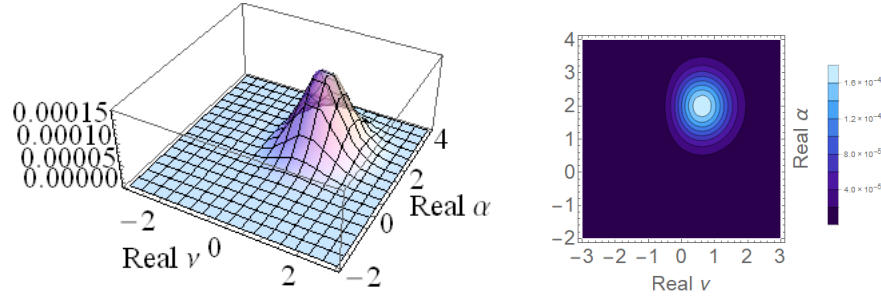


Figura 3.3: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)_{in}$ para el sistema **no enredado** $|\Psi\rangle_{in} = (\gamma_1|0\rangle_1 + \delta_1|1\rangle_1)(\gamma_2|0\rangle_2 + \delta_2|1\rangle_2)|\beta\rangle$, con $\mu = cte$, es decir, $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$

Cabe señalar que debido a que $Q(\alpha, \mu, \nu)$ pertenece a tres diferentes subespacios se tiene un espacio dimensional de 6 variables lo que se presenta en las gráficas anteriores es un mapeo de dicho espacio a un espacio tridimensional con el propósito de visualizar la compleja estructura del espacio original de mayor dimensión. Por ejemplo, en el caso $\alpha = cte$, se toma el subespacio asociado al espejo como constante y se analiza sólo en el comportamiento de los modos de cavidad representados por las variables μ y ν . Esta misma división del estudio del espacio por partes será considerado para el estado final resultante anexando la variable temporal. Dicho análisis de subespacios será llevado a cabo también en el caso de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ anexando el comportamiento temporal al estudio.

3.1.4. Función Q para el estado final

El estado final resultante de la dinámica de la cavidad es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle = & \frac{1}{2} \left[|0\rangle_1 \left(|0\rangle_2 |\beta'\rangle + c_2 |1\rangle_2 \overline{M}_2(m, k) |\beta', k\rangle \right) \right. \\
 & + c_1 |1\rangle_1 \left(|0\rangle_2 \overline{M}_1(m, k) |\beta', k\rangle \right. \\
 & \left. \left. + c_2 |1\rangle_2 e^{2F_1 \hbar^2 g_1 g_2} \overline{M}_2(m, k) \overline{M}_1(n, l) \sqrt{\frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}} |\beta', k+l\rangle \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

La función Q resultante de la definición 3.12 para este estado esta dada como:

$$Q(\alpha, \mu, \nu, t) = \frac{1}{4} Q_0(\mu) Q_0(\nu) Q_0(\alpha - \beta') \left| 1 + Q_2 + Q_1 (1 + Q_2 e^{2F_1 g_1 g_2 \hbar^2}) \right|^2 \tag{3.17}$$

con Q_1 y Q_2 las funciones siguientes:

$$Q_1(\mu, \alpha, t) = c_1 \mu * e^{F_2 g_1 \hbar \alpha^*}, \tag{3.18}$$

$$Q_2(\nu, \alpha, t) = c_2 \nu * e^{F_2 g_2 \hbar \alpha^*}, \tag{3.19}$$

en donde c_1 , c_2 , F_1 y F_2 ya han sido definidas con anterioridad. A diferencia de la función $Q(\alpha, \mu, \nu)$ ésta no puede separarse en un producto de funciones en el que cada una de ellas depende de una sola variable. No obstante lo anterior, esta función en el momento $t = 0$ se convierte en la función 3.14.

El análisis de la función 3.17 se dividirá en dos partes según los valores asignados a la constante de acoplamiento escalada, k , tomándose los valores $k = 1/2$ y $k = 1$ que pertenecen al régimen de acoplamiento débil y fuerte respectivamente. En cada régimen se comenzará analizando el comportamiento temporal para luego realizar lo mismo en el espacio fase. Para realizar el análisis se usará un tiempo escalado por la frecuencia mecánica ω_m , es decir, $t' = t/\omega_m$; recordemos que se esta aplicando las condición $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ para lo cual asignaremos valores para las frecuencias de $\omega = 10^{16}$ y $\omega_m = 10^3$ en consecuencia $r = 10^{13}$.

El comportamiento temporal se obtiene fijando las demás variables y dejando únicamente el tiempo como variable mientras que para el espacio fase se tomarán nuevamente los casos:

- $\alpha = \text{constante}$.
- $\nu = \text{constante}$.
- $\mu = \text{constante}$,

a diferencia del caso del estado inicial estas condiciones en el espacio fase tienen una dependencia temporal por lo que se usarán los valores $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ para realizar el análisis a tiempos fijos. Es importante señalar que estos valores serán indicados por líneas verticales en las gráficas temporales para poder tener una mejor visualización.

Acoplamiento débil $g = \frac{\omega_m}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Como se indicó líneas anteriores se inicia con el análisis en el régimen de acoplamiento débil iniciando con la parte temporal del comportamiento de 3.17 para luego pasar al espacio fase. En la etapa del espacio fase se inicia con las gráficas en 3 dimensiones usando únicamente las componentes reales de las variables usadas a tiempos determinados de tiempo para luego realizar lo mismo usando gráficas de contorno permitiendo una mejor visualización.

- Se tiene el caso $\alpha = \text{constante}$ con las condiciones $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$. Adicionalmente para el comportamiento temporal se considera $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$.

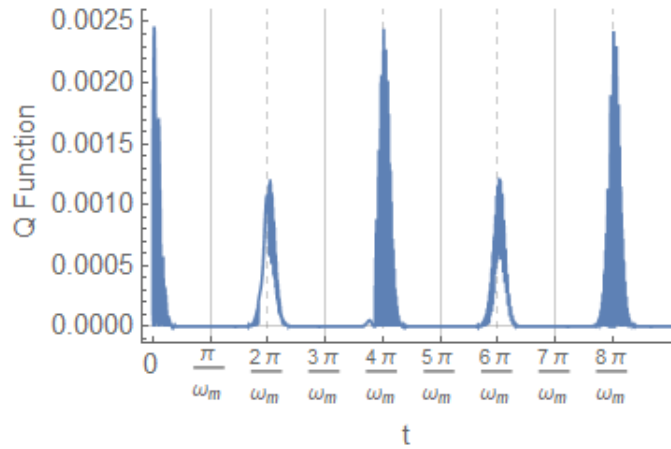


Figura 3.4: Gráfica en función del tiempo de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$.

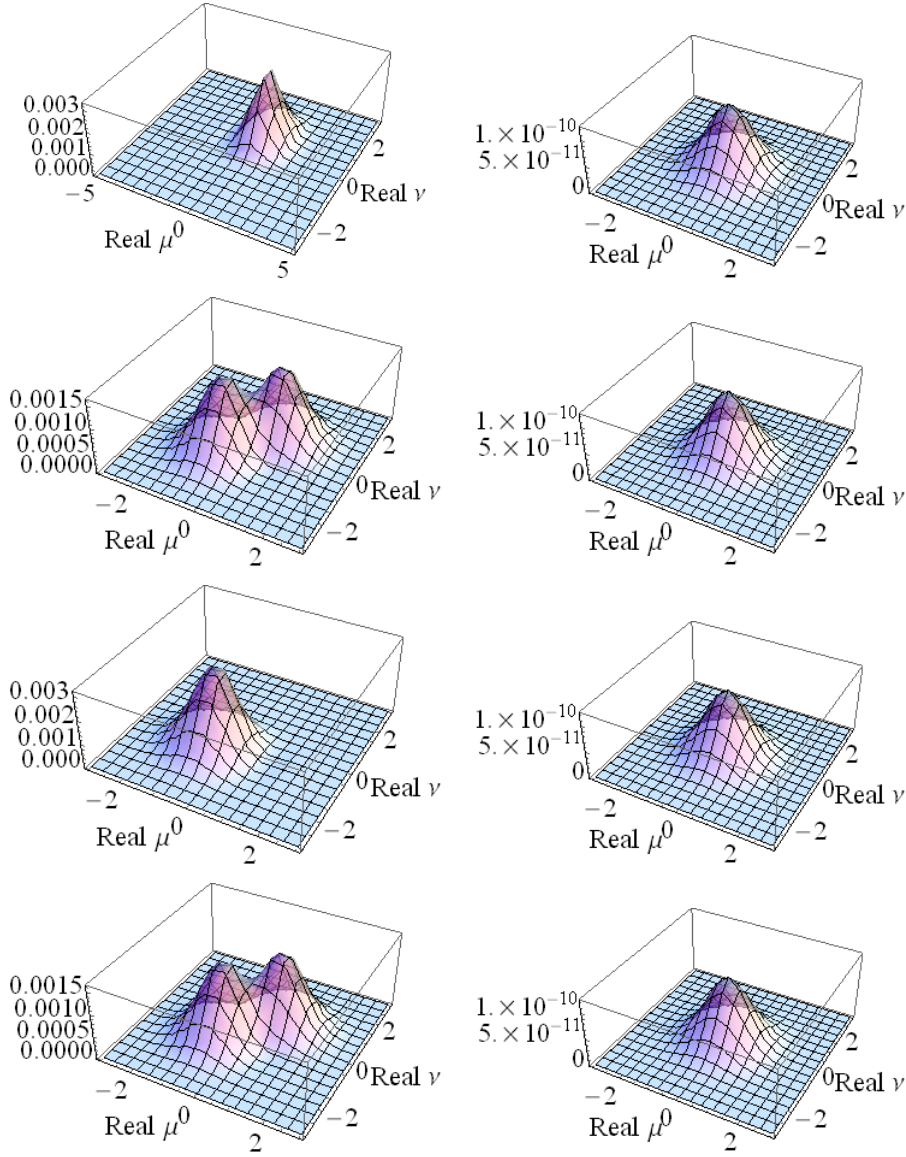


Figura 3.5: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $\text{Re}\{\alpha\} = 1 = \text{Im}\{\alpha\}$, $\text{Re}\{\beta\} = 2 = \text{Im}\{\beta\}$, y $\text{Im}\{\mu\} = 0 = \text{Im}\{\nu\}$.

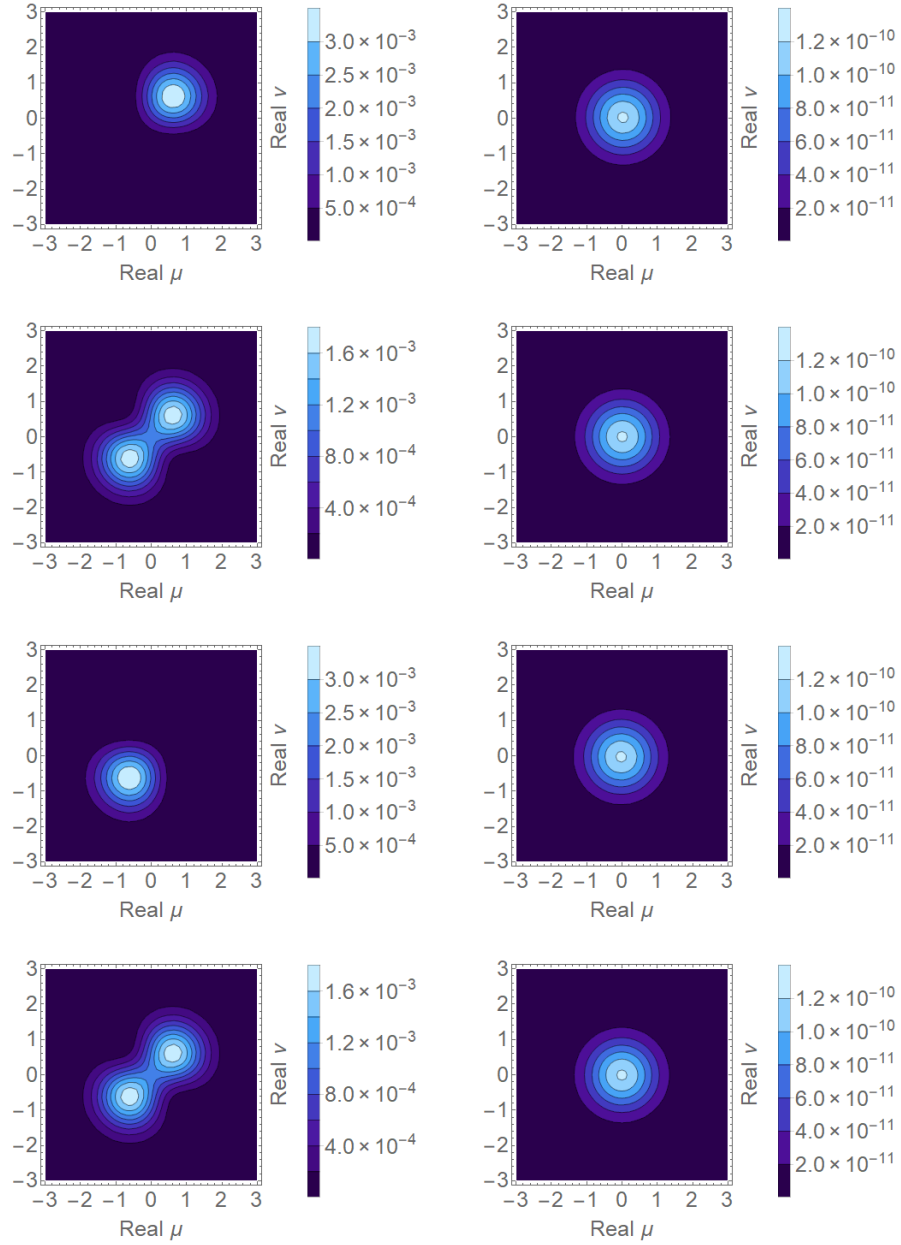


Figura 3.6: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$.

- El segundo caso, $\nu = \text{constante}$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$ y para el comportamiento temporal se considera además $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$.

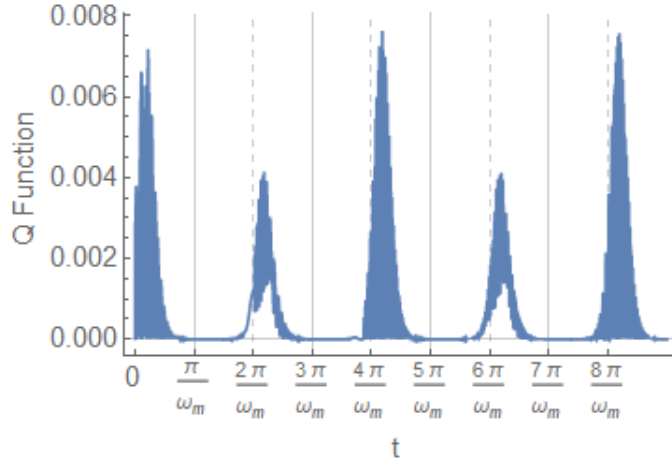


Figura 3.7: Gráfica en función del tiempo de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

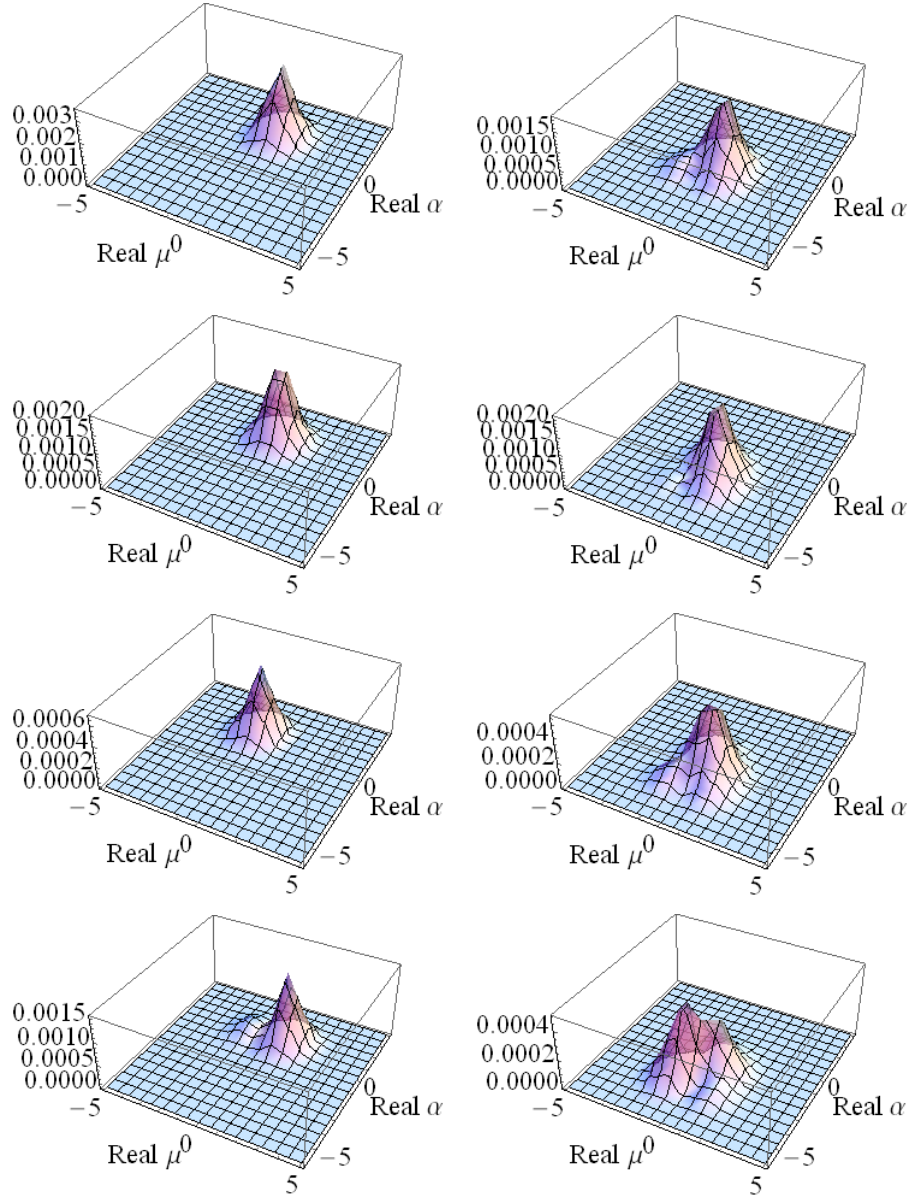


Figura 3.8: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

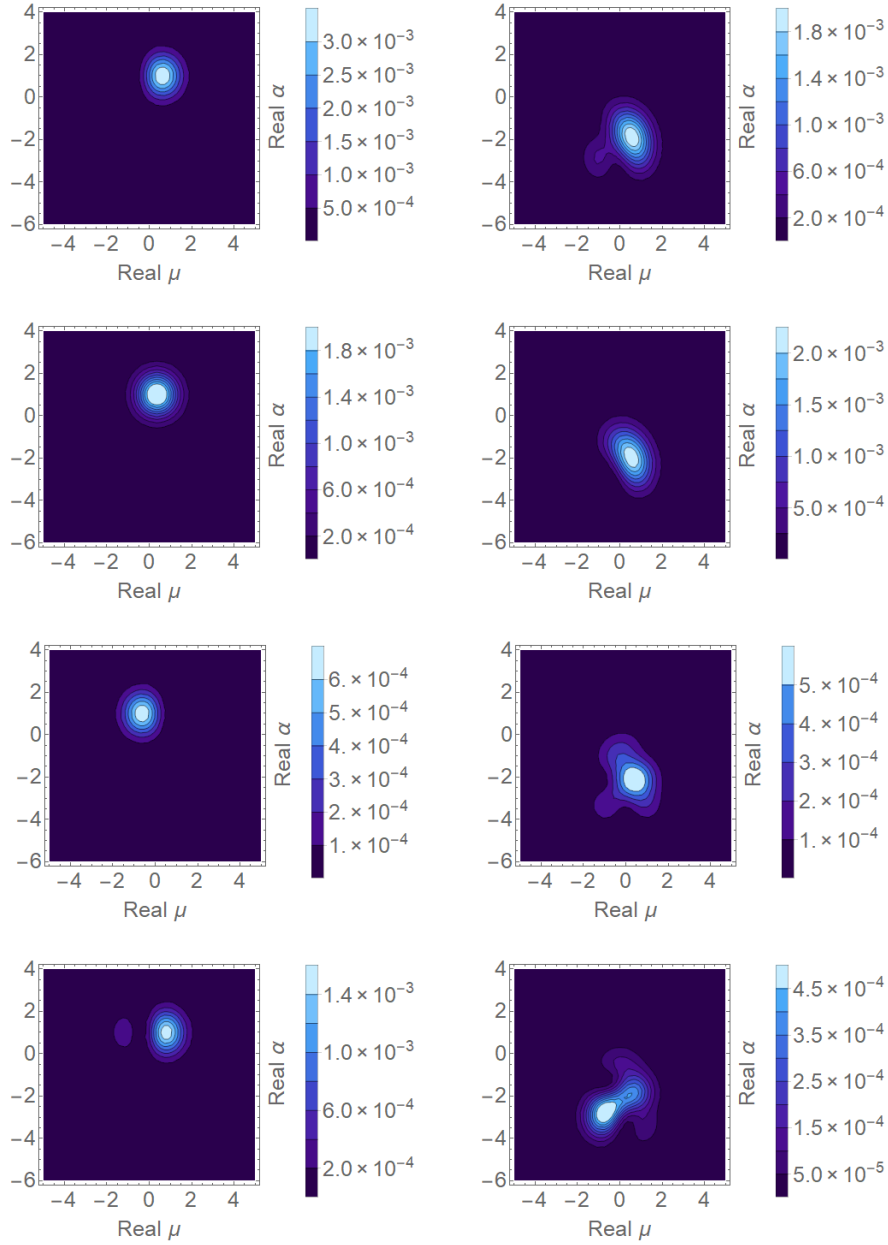


Figura 3.9: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

- Finalmente para el caso $\mu = \text{constante}$; con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$. Para realizar la gráfica temporal se considera también $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$.

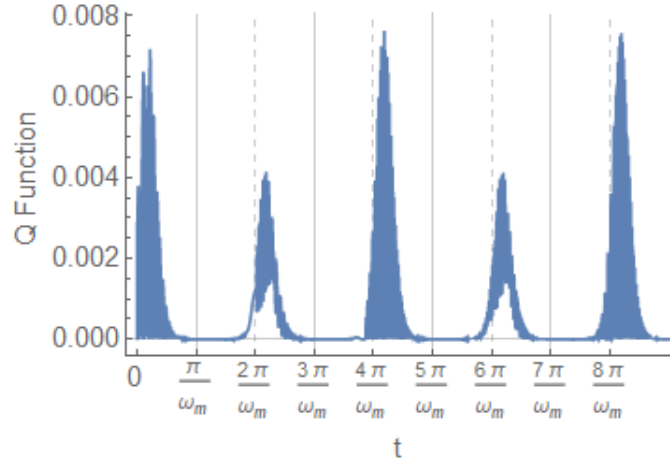


Figura 3.10: Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)_{fin}$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $\mu = cte$, i.e. $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

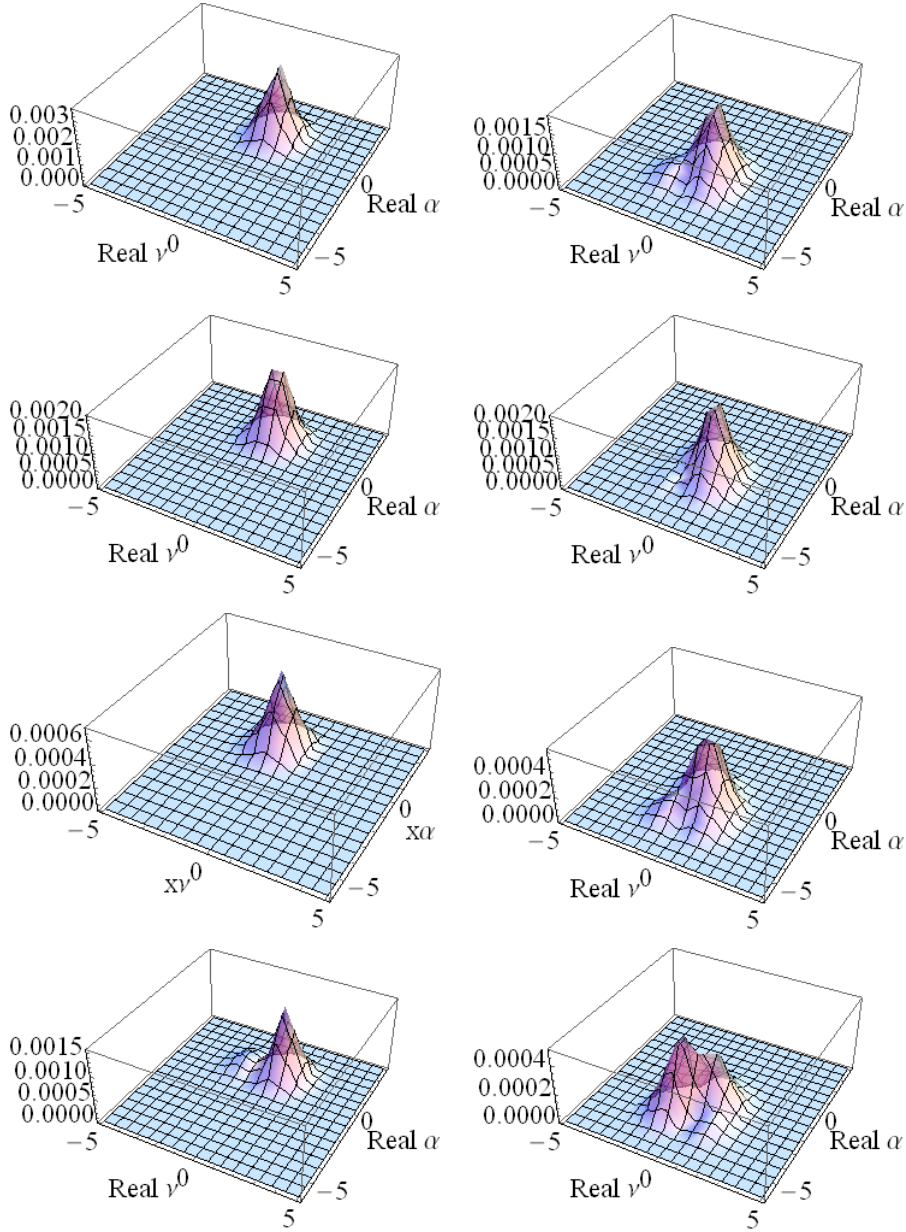


Figura 3.11: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

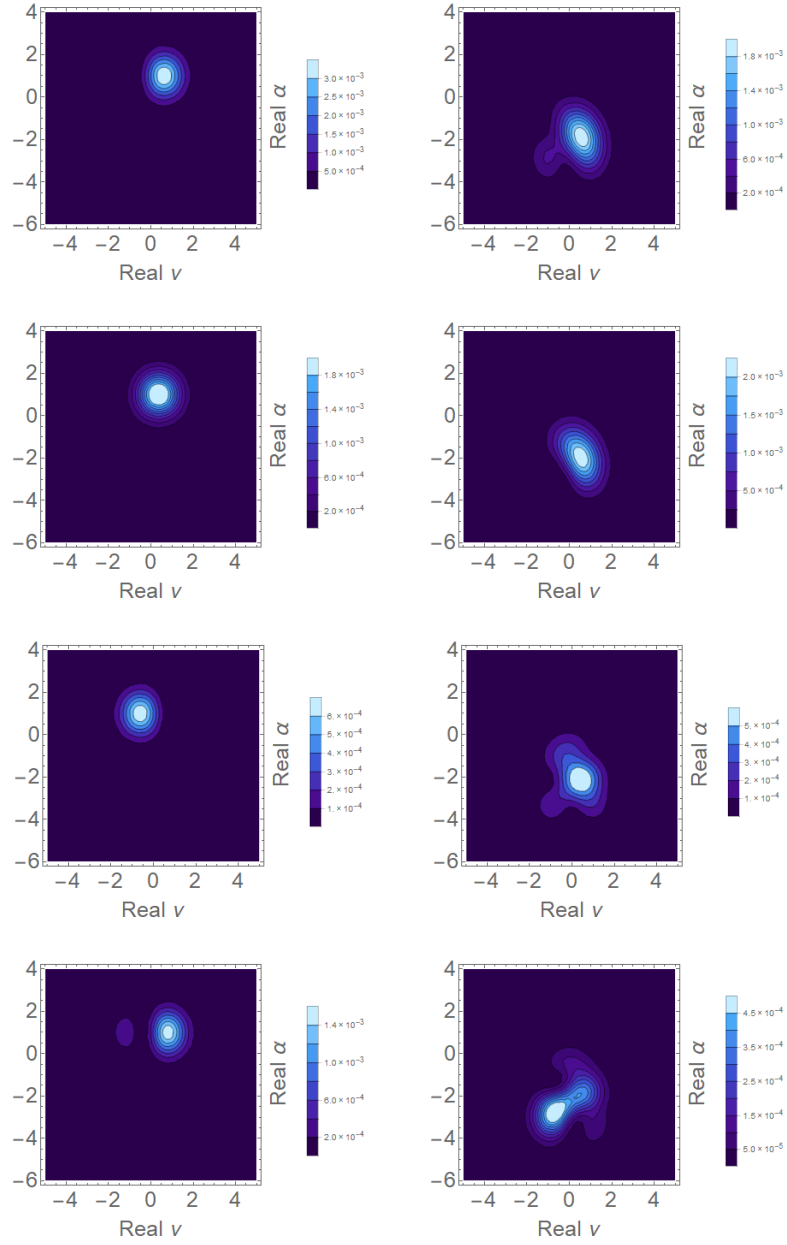


Figura 3.12: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ escalados por $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

Como se pudo observar la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ tiene un periodo de 4π por lo que es válido suponer que a partir del inicio de la dinámica del sistema surge enredamiento cuántico el cual colapsa al tiempo $t = 4\pi$ para luego resurgir e iniciar nuevamente este proceso. El comportamiento en el espacio fase muestra que existe un enredamiento cuántico en algunos valores de tiempo pues la gráfica se divide en formas similares a como sucedió en los casos de estados entrelazados del capítulo anterior.

Acoplamiento fuerte $g = \omega_m \Rightarrow k = 1$

Ahora corresponde el turno al régimen de acoplamiento fuerte para lo cual se seguirá el mismo orden del caso débil.

- Se inicia nuevamente con $\alpha = \text{constante}$ con las condiciones $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$. Adicionalmente para el comportamiento temporal se considera $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$.

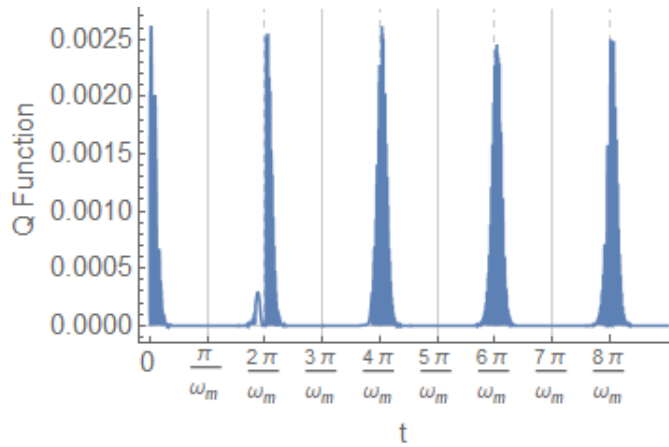


Figura 3.13: Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 0 = Re\{\nu\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$.

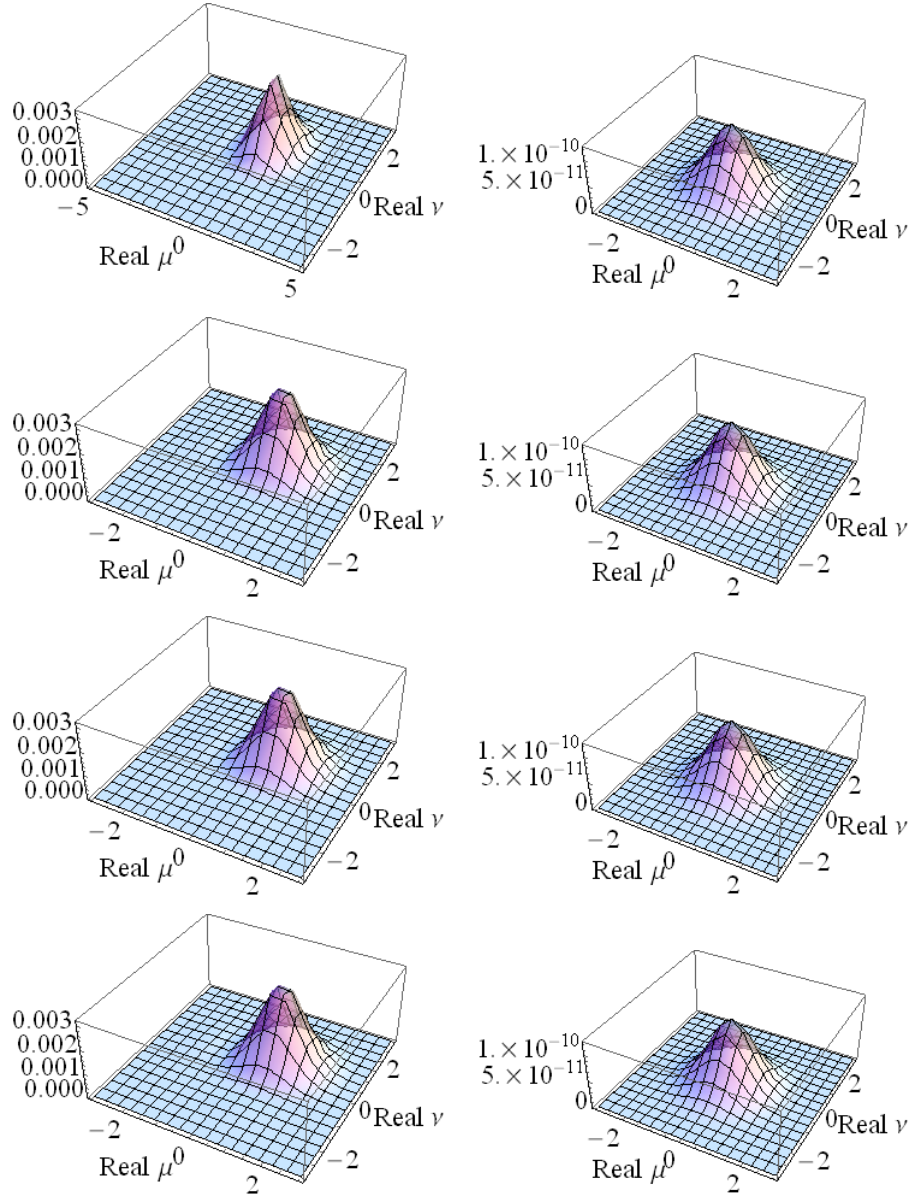


Figura 3.14: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$

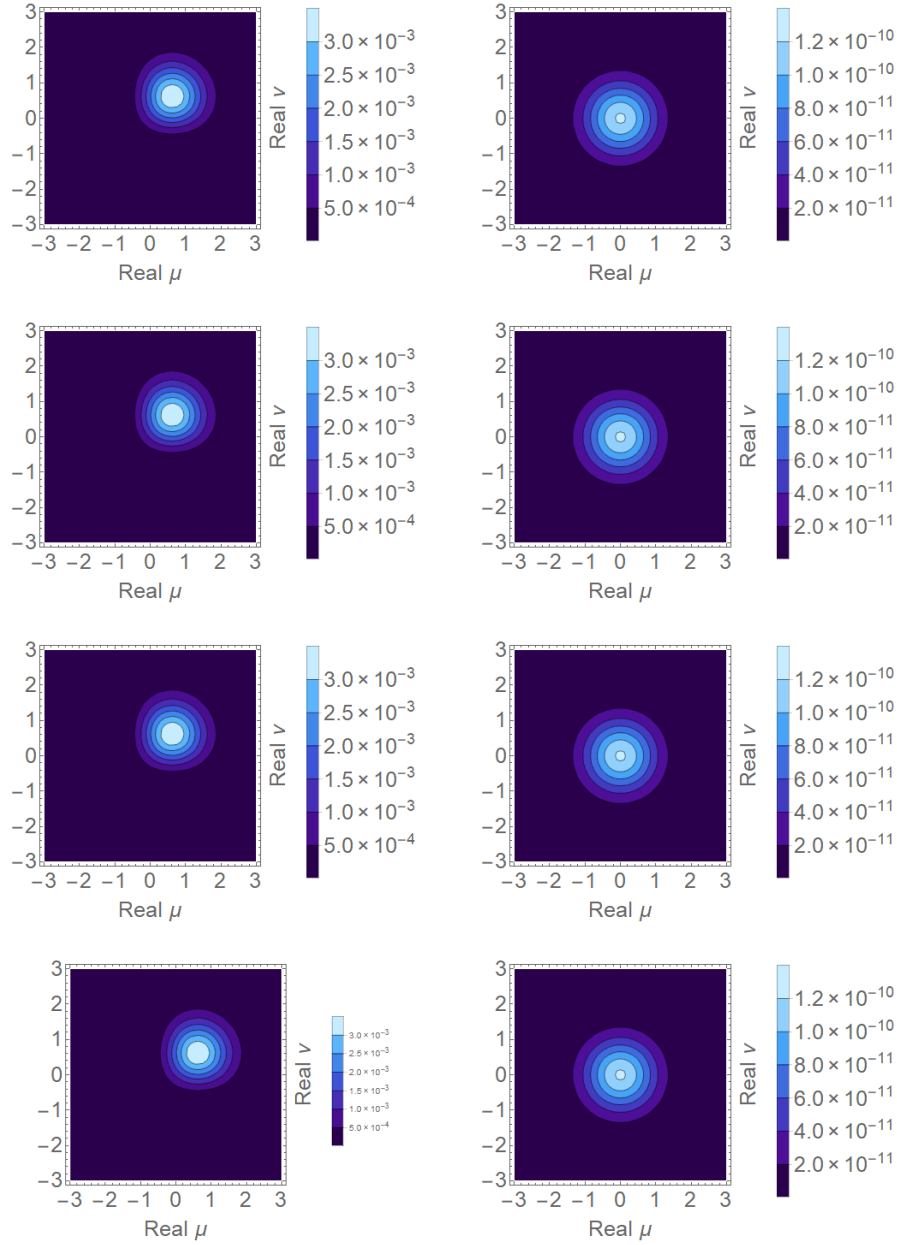


Figura 3.15: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\alpha\} = 1 = Im\{\alpha\}$, $Re\{\beta\} = 1 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\nu\}$

- El segundo caso $\nu = \text{constante}$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$ y para el comportamiento temporal se considera además $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$.

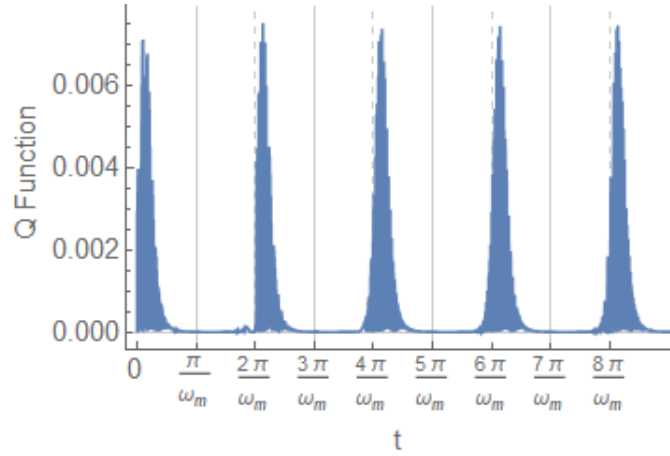


Figura 3.16: Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\mu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

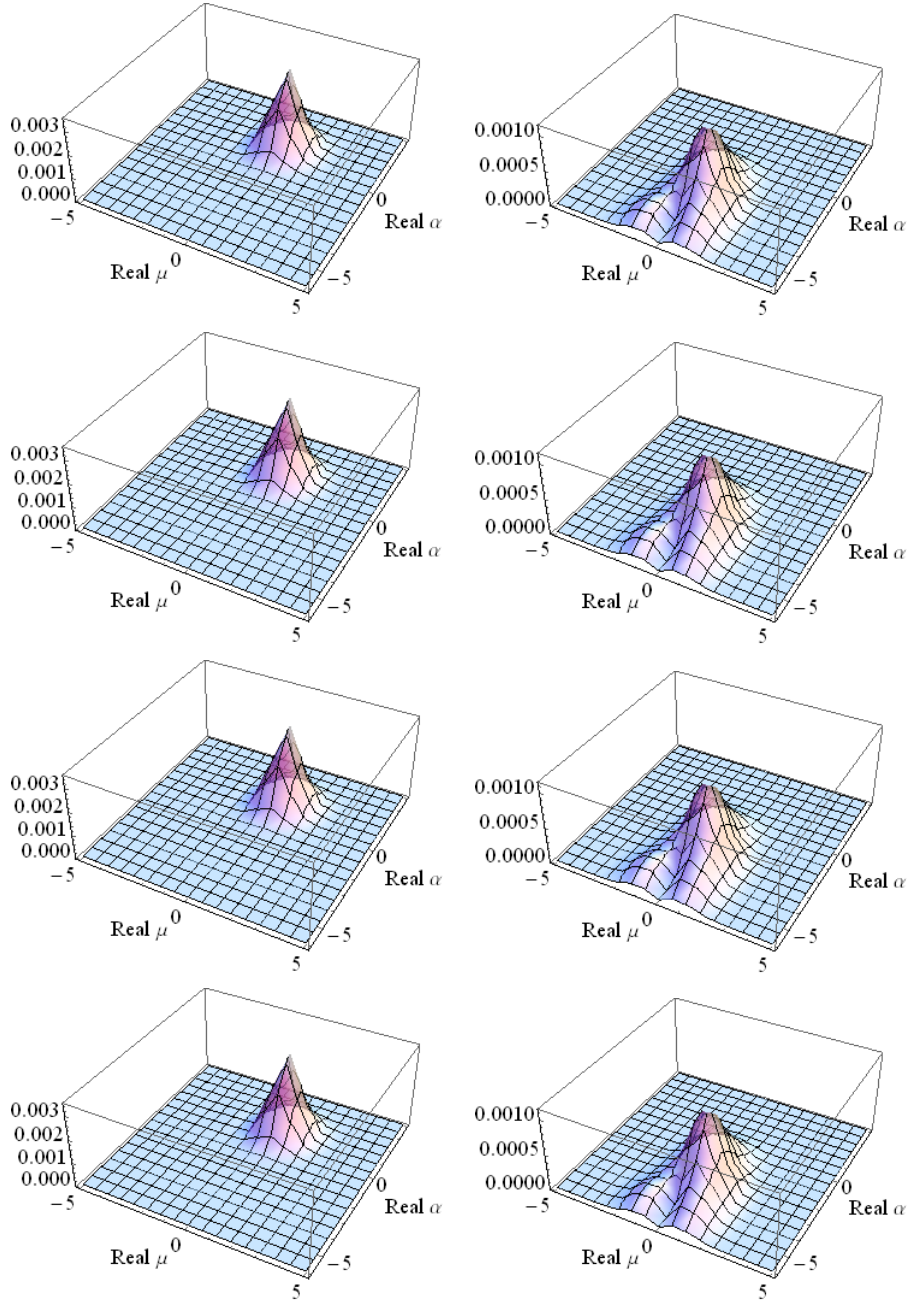


Figura 3.17: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

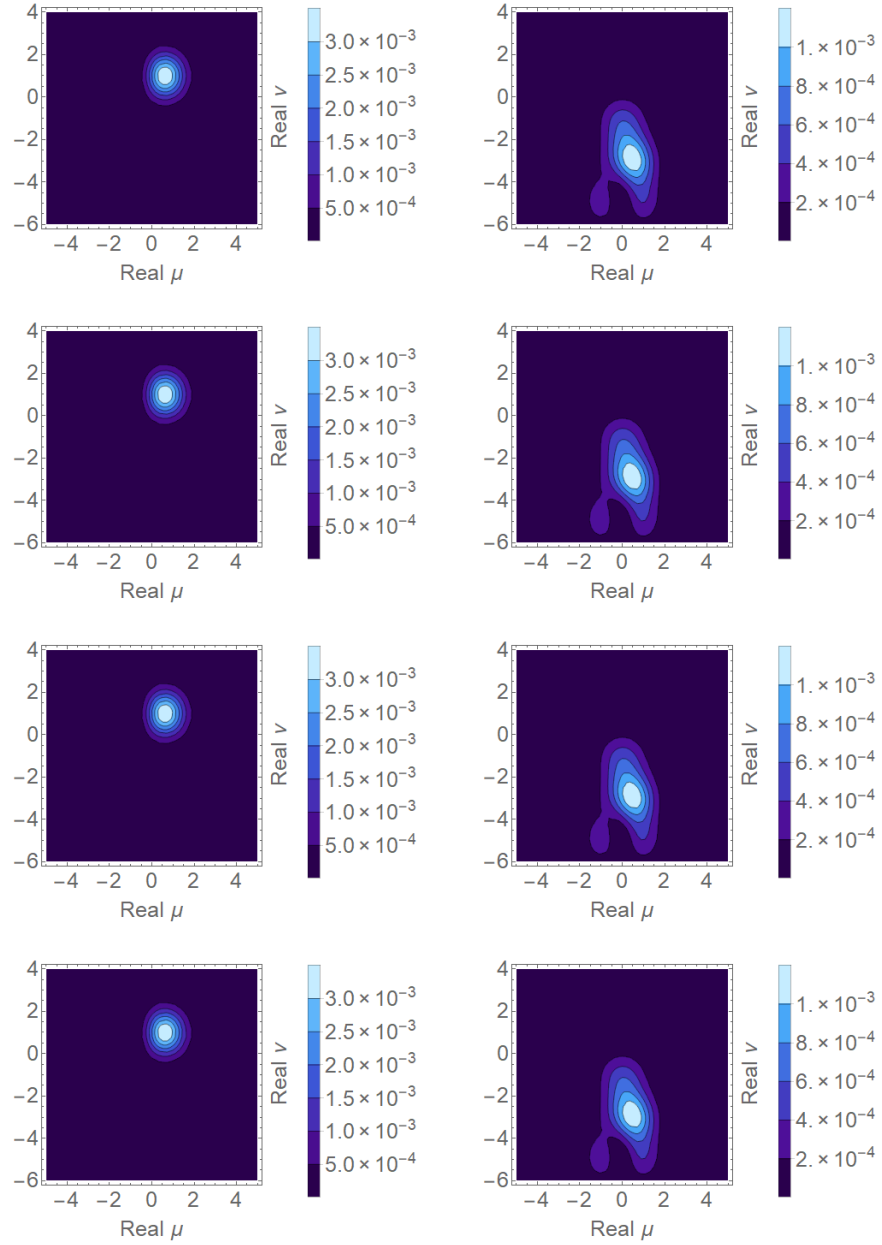


Figura 3.18: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\nu\} = 1 = Im\{\nu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\mu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

- Finalmente el caso $\mu = \text{constante}$; con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$. Para realizar la gráfica temporal se considera también $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$.

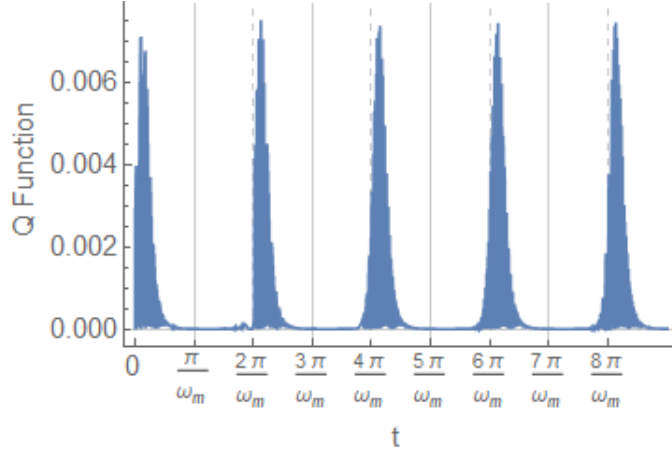


Figura 3.19: Gráfica temporal de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para el estado **enredado** $|\Psi(t)\rangle$ con $\mu = \text{cte}$, i.e. $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$, $Re\{\nu\} = 1 = Re\{\alpha\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

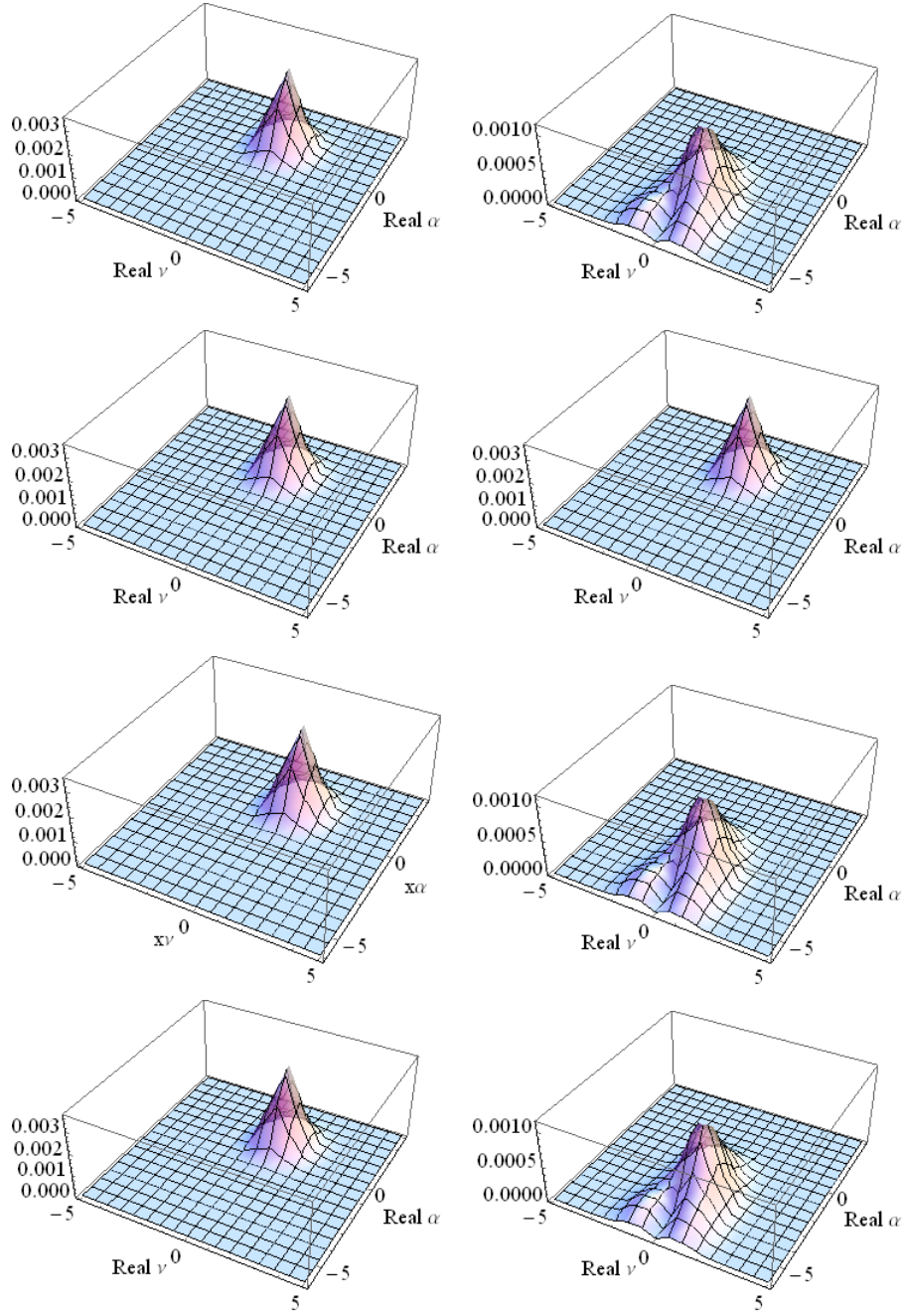


Figura 3.20: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

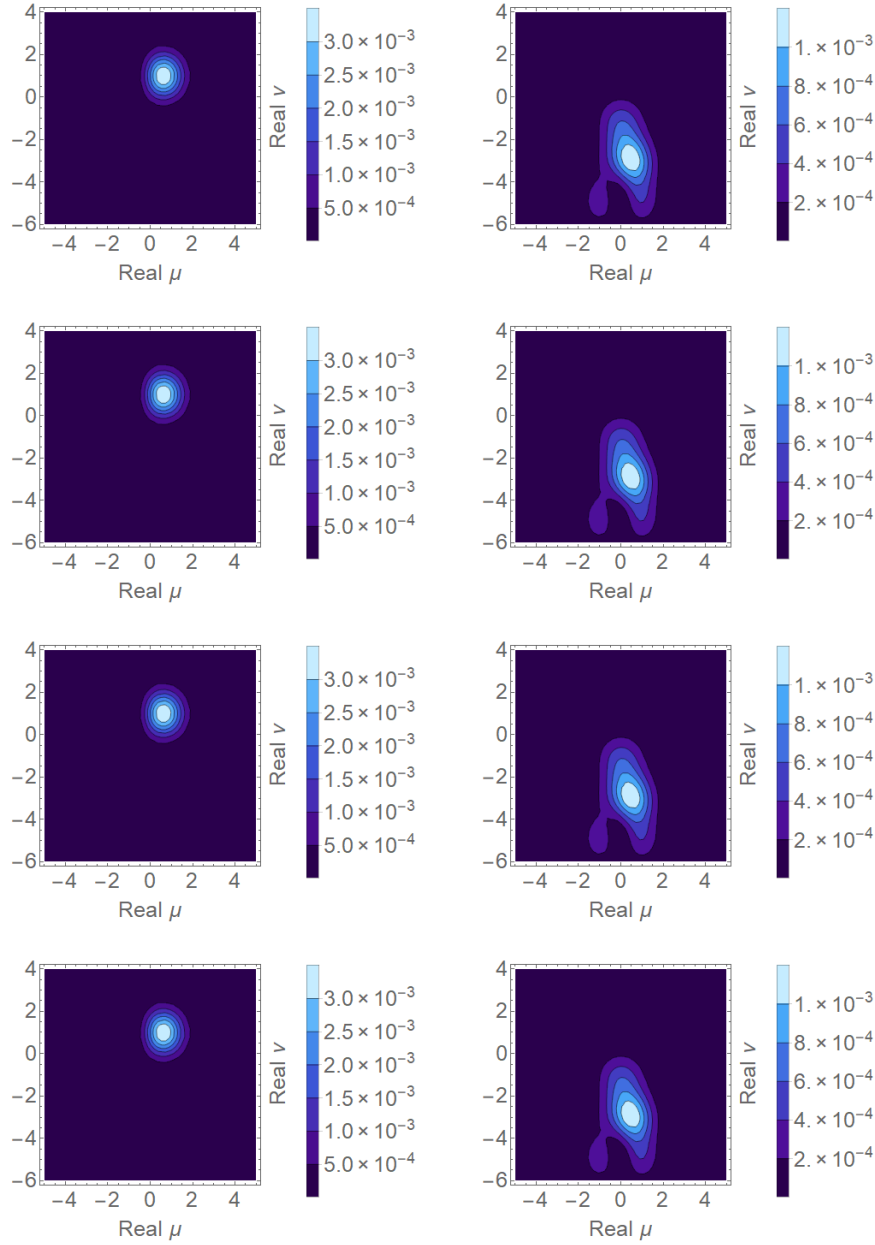


Figura 3.21: Gráfica de la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ para los tiempos $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ escalados por el factor $\omega_m = 10^3$. Con $Re\{\mu\} = 1 = Im\{\mu\}$, $Re\{\beta\} = 2 = Im\{\beta\}$ y $Im\{\nu\} = 0 = Im\{\alpha\}$.

En este régimen de acoplamiento fuerte, la función $Q(\alpha, \mu, \nu, t)$ muestra un periodo temporal de $t = 2\pi$. Esto implica que el comportamiento del enredamiento cuántico de colapsos y resurgimientos temporales ocurre de forma similar al caso del acoplamiento débil solo que en un tiempo menor. En el caso del espacio fase nuevamente se tienen gráficas que muestran entrelazamiento cuántico para algunos valores temporales.

La definición propuesta de la función Q para un sistema tripartito y su consecuente aplicación como herramienta de análisis de estados cuánticos ha probado tanto su utilidad como su alcance, pues ha permitido obtener resultados relevantes gracias al estudio cualitativo hecho en el espacio fase correspondiente. El primero de estos resultados recae directamente sobre el comportamiento temporal del enredamiento cuántico pues se ha podido concluir que presenta colapsos y resurgimientos según el sistema evoluciona a través del tiempo. En este contexto, un segundo resultado indica que el periodo temporal mencionado esta determinado directamente por el valor de la constante de acoplamiento escalada, k . Aunado a lo anterior, en el espacio fase ha sido posible encontrar valores del tiempo en los cuales la gráfica de la función de Husimi distingue enredamiento cuántico presentado en el sistema, lo cual en algunos subespacios (fijando una variable) del sistema se hace mas notorio.

Aun cuando los resultados obtenidos en este capítulo son significativos es necesario probar que efectivamente la función Q propuesta describe adecuadamente las características del enredamiento cuántico. Con el objetivo de realizar esta verificación, en el siguiente capítulo se emplearán las desigualdades de Van Loock-Furusawa en el estado final de la cavidad, estas desigualdades han probado su utilidad para examinar enredamiento cuántico tanto en sistemas bipartitos como tripartitos [38].



Desigualdades de Van Loock Furusawa para una cavidad optomecánica

EN este capítulo se utilizarán las desigualdades de Van Loock Furusawa con el objetivo de verificar los resultados obtenidos con la función Q en el sistema tripartito. En una primera etapa se da un breve repaso de las cualidades del enredamiento tripartito para luego introducir las desigualdades de Van Loock Furusawa. En una segunda etapa se calculan dichas desigualdades para el estado final procediendo a realizar el análisis nuevamente en los casos del régimen de acoplamiento débil y fuerte. Finalmente se comparan los resultados obtenidos con aquellos resultantes de la función Q .

4.1. Enredamiento en tres sistemas cuánticos

La cuantificación del enredamiento cuántico en sistemas tripartitos es mas complejo que sistemas bipartitos y además presenta características que estos últimos no poseen. Por ejemplo, si un sistema 1 se enreda al máximo con un sistema 2 entonces no puede entrelazarse simultáneamente con un tercer sistema [9]. Asimismo, si el sistema 1 no está enredado al máximo con otro sistema puede compartir una cantidad de enredamiento con un tercer sistema a través de la igualdad $\mathcal{C}_{1(23)}^2 = \mathcal{C}_{12}^2 + \mathcal{C}_{13}^2 + \tau_{123}$, donde $\mathcal{C}_{12}$ es la concurrencia entre el sistema 1 y el sistema 2; $\mathcal{C}_{13}$ es la concurrencia entre el sistema 1 y el sistema 3; y $\mathcal{C}_{1(23)}$ es la concurrencia entre el sistema 1 con el par de sistemas (23) considerados como uno solo. El término τ_{ABC} indica el enredamiento residual [9], una propiedad colectiva de los tres sistemas. En consecuencia, el

entrelazamiento entre el sistema 1 con el sistema en conjunto(23), es decir, $\mathcal{C}_{1(23)}$ se da a través de tres componentes: el entrelazamiento con 2 ($\mathcal{C}_{12}^2$), el entrelazamiento con 3 ($\mathcal{C}_{13}^2$) y un entrelazamiento general entre los tres sistemas τ_{123} .

Aunado a esto, W. Dür. et. al. [35] demostraron que tres qubits pueden entrelazarse sólo de dos maneras no equivalentes. Inicialmente, demostraron que dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son equivalentes bajo operaciones estocásticas locales y de comunicación clásica (SLOCC por sus siglas en inglés) si existe un operador local invertible que transforman uno en el otro, es decir, si $|\psi\rangle = \hat{A}^{-1} \otimes \hat{B}^{-1} \otimes \hat{C}^{-1} |\phi\rangle$. En una segunda etapa, muestran que las SLOCC dividen el entrelazamiento de sistemas tripartitos con variables discretas en seis clases no equivalentes: i) la clase $A : B : C$, ii) la clase $A : BC$, iii) la clase $B : AC$, iv) la clase $C : AB$, v) la clase W , y finalmente, vi) la clase GHZ . La primera clase no posee entrelazamiento, mientras que, las clases dos a cuatro lo poseen únicamente entre dos qubits, en tanto que, las dos últimas clases tiene un auténtico entrelazamiento de tres qubits. En este sentido cabe mencionar que existe una clasificación alternativa para el caso de sistemas con tres variables continuas, la cual se restringe a estados gaussianos de tres modos G. Giedke et al. [36; 37].

Por otra parte, en el estudio del entrelazamiento cuántico para sistemas con variables continuas Lu-Ming Duan y otros [33; 38] propusieron en el caso de sistemas bipartitos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} V(\hat{X}_i + \hat{X}_j) + V(\hat{Y}_i - \hat{Y}_j) &\geq 4, \\ V(\hat{X}_i - \hat{X}_j) + V(\hat{Y}_i + \hat{Y}_j) &\geq 4, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $V(\hat{X}_i)$ corresponde a la varianza; mientras que $\hat{X}_i = \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger$ y $\hat{Y}_i = -i(\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger)$ son operadores. La violación de cualquiera de estas desigualdades es una confirmación de enredamiento cuántico genuino. Es conveniente señalar que se ha seguido la convención dada por M.K. Olsen [38].

Para el caso tripartito a partir del trabajo realizado por Peter van Loock y Akira Furusawa [32] han sido obtenidas las siguientes desigualdades [38]:

$$\begin{aligned} V_{12} &= V(\hat{X}_1 - \hat{X}_2) + V(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + g_3 \hat{Y}_3) \geq 4, \\ V_{13} &= V(\hat{X}_1 - \hat{X}_3) + V(\hat{Y}_1 + g_2 \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3) \geq 4, \\ V_{23} &= V(\hat{X}_2 - \hat{X}_3) + V(g_1 \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3) \geq 4 \end{aligned} \quad (4.2)$$

una vez más se ha utilizado la convención que aparece en la referencia [38]. La violación de cualquiera de dos desigualdades es una confirmación de enredamiento cuántico. Las constantes g_j son obtenidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{V(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) + V(\hat{Y}_1, \hat{Y}_3)}{V(\hat{Y}_1)} \\ g_2 &= -\frac{V(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) + V(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3)}{V(\hat{Y}_2)} \\ g_3 &= -\frac{V(\hat{Y}_1, \hat{Y}_3) + V(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3)}{V(\hat{Y}_3)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $V(\hat{A}, \hat{B}) = (\langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle / 2) - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$ es la covarianza.

Hay una divergencia adicional en la teoría del entrelazamiento en cuanto a si el entrelazamiento se produce o no en variables discretas-discretas (DD-entanglement), variables continuas-continuas (CC-entanglement) o en variables continuas-discretas (DC-entanglement) [39]. En cuanto al enredamiento de variables continuas-discretas (DC-entanglement) también llamado enredamiento híbrido [39], van Loock et. al. han demostrado que para el caso tripartito donde hay dos subsistemas discretos y uno continuo, el espacio de Hilbert original $\mathcal{H}_{d_1}^A \otimes \mathcal{H}_{d_2}^B \otimes \mathcal{H}_{\infty}^C$ se comporta como un espacio de Hilbert discreto $\mathcal{H}_{d_1}^A \otimes \mathcal{H}_{d_2}^B \otimes \mathcal{H}_{d_1 \otimes d_2}^C$ [39]. Por lo tanto, para este caso particular es posible utilizar medidas de enredamiento discretas-discretas [39].

Con el fin de calcular las desigualdades de Van Loock se han calculado los valores promedio siguientes:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_1 \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|g_1 \hbar F_2(t)|^2} \left(\cos[w_1 t + \xi(t) \hbar^2 g_1^2] \right. \\ &\quad \left. + \cos[w_1 t + \xi(t) \hbar^2 g_1^2 + 2\xi(t) \hbar^2 g_1 g_2] \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_2 \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|g_2 \hbar F_2(t)|^2} \left(\cos[w_2 t + \xi(t) \hbar^2 g_2^2] \right. \\ &\quad \left. + \cos[w_2 t + \xi(t) \hbar^2 g_2^2 + 2\xi(t) \hbar^2 g_1 g_2] \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\langle \hat{X}_3 \rangle = \frac{1}{2} [2(\beta' + \beta'^*) + \hbar(g_1 + g_2)(F_2(t) + F_2^*(t))], \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{Y}_1 \rangle &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|g_1\hbar F_2(t)|^2} \left(\sin[w_1t + \xi(t)\hbar^2 g_1^2] \right. \\ &\quad \left. + \sin[w_1t + \xi(t)\hbar^2 g_1^2 + 2\xi(t)\hbar^2 g_1 g_2] \right),\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{Y}_2 \rangle &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|g_2\hbar F_2(t)|^2} \left(\sin[w_2t + \xi(t)\hbar^2 g_2^2] \right. \\ &\quad \left. + \sin[w_2t + \xi(t)\hbar^2 g_2^2 + 2\xi(t)\hbar^2 g_1 g_2] \right),\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$\langle \hat{Y}_3 \rangle = -\frac{i}{2} \left[2(\beta' - \beta'^*) + \hbar(g_1 + g_2)(F_2(t) - F_2^*(t)) \right], \quad (4.9)$$

donde la funciones $F_2(t)$ y $\xi(t)$ son las siguientes:

$$F_2(t) = \frac{e^{-i\omega_m t} - 1}{\hbar\omega_m} \quad (4.10)$$

$$\xi(t) = \frac{\sin[\omega_m t] + \omega_m t}{\hbar^2\omega_m^2}, \quad (4.11)$$

además se calcularon los valores promedio del cuadrado de los operadores:

$$\langle \hat{X}_1^2 \rangle = \langle \hat{Y}_1^2 \rangle = \langle \hat{X}_2^2 \rangle = \langle \hat{Y}_2^2 \rangle = 2, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{X}_3^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[4 + [2(\beta' + \beta'^*) + \hbar(F_2(t) + F_2^*(t))]^2 \right. \\ &\quad \left. + \hbar^2(g_1^2 + g_2^2)[F_2(t) + F_2^*(t)]^2 \right],\end{aligned}\quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{Y}_3^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[4 - [2(\beta' - \beta'^*) + \hbar(F_2(t) - F_2^*(t))]^2 \right. \\ &\quad \left. - \hbar^2(g_1^2 + g_2^2)[F_2(t) - F_2^*(t)]^2 \right].\end{aligned}\quad (4.14)$$

En el caso de nuestro sistema en particular se tiene el incumplimiento de la desigualdad V_{12} es una condición suficiente para asegurar la inseparabilidad de los modos de las cavidades, y es un criterio para el éxito de la

realización de un protocolo cuántico entre estos modos. El caso de la violación de la desigualdad V_{13} corresponde al enredamiento entre el modo 1 del campo y el resonador mecánico, mientras que la desigualdad V_{13} hace lo propio con el modo 2 del campo y el resonador.

Antes de pasar al análisis del sistema usando las gráficas de las desigualdades de van Loock-Furusawa es necesario tomar en cuenta que con el propósito de realizar una comparación directa con los resultados obtenidos por la función Q se usará nuevamente la condición $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, y los valores de las frecuencias $\omega = 10^{16}$ y $\omega_m = 10^3$ para los campos y el resonador mecánico respectivamente, asimismo se consideran los casos en los que la constante de acoplamiento escalada toma los valores $k = 1/2$ y $k = 1$. Además, se usará el tiempo escalado por la frecuencia del mecánica $t = t/\omega_m$. Finalmente, se ha indicado con una línea horizontal el valor 4 que corresponde al valor inferior de las desigualdades 4.2 para visualizar eficazmente aquellas zonas que al estar debajo de esta línea incumplen la desigualdad correspondiente.

4.1.1. Acoplamiento débil $g = \frac{\omega_m}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Se inicia en el régimen de acoplamiento débil con $k = \frac{1}{2}$, la gráficas de la desigualdades V_{12} , V_{13} y V_{23} están dadas en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, respectivamente.

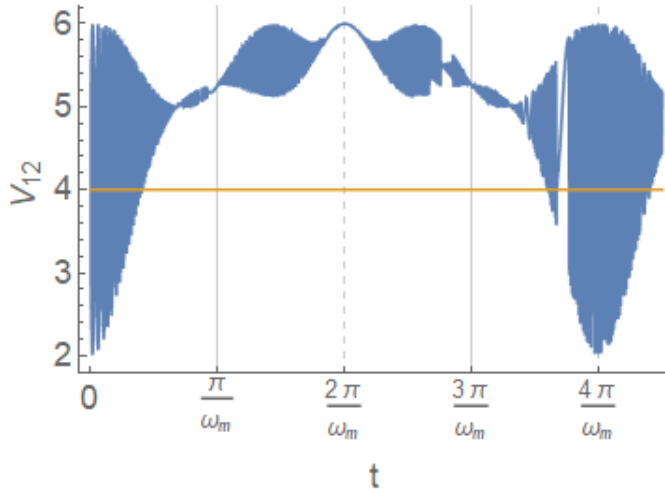


Figura 4.1: Desigualdad V_{12} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

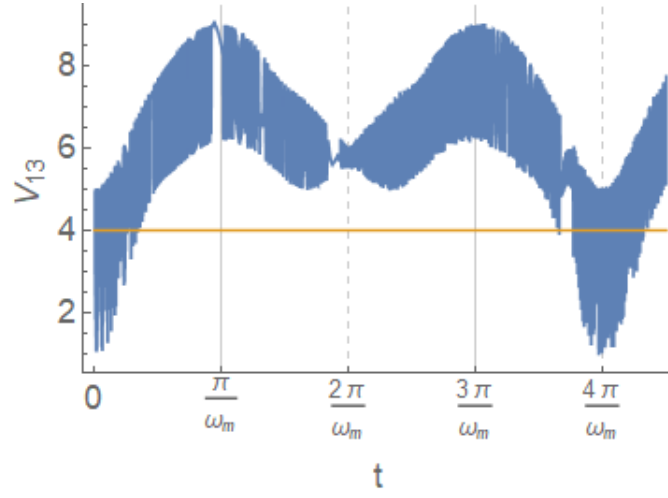


Figura 4.2: Desigualdad V_{13} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

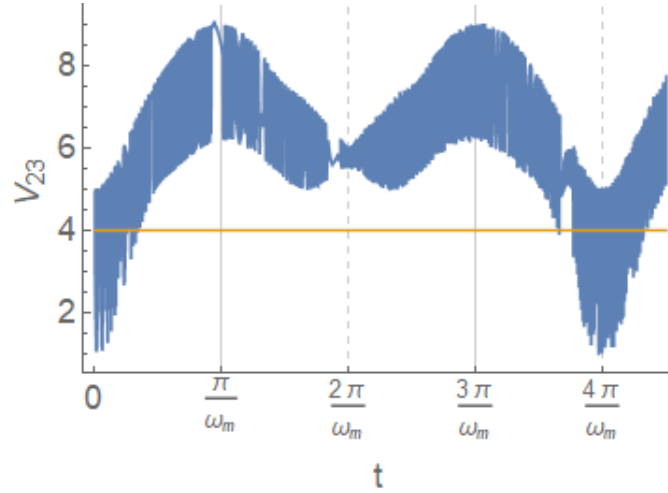


Figura 4.3: Desigualdad V_{23} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento débil $k = \frac{1}{2}$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se observa una violación de las tres desigualdades de Van Loock-Furusawa por lo que, en efecto, se tiene un entredamiento cuántico del sistema, pues se cumple que al menos dos de las desigualdades son violadas.

4.1.2. Acoplamiento fuerte $g = \omega_m \Rightarrow k = 1$

Análogamente al caso anterior se obtuvieron las gráficas de las desigualdades 4.2 pero ahora usando $k = 1$ obteniéndose las gráficas 4.4, 4.5 y 4.6 mostradas a continuación.

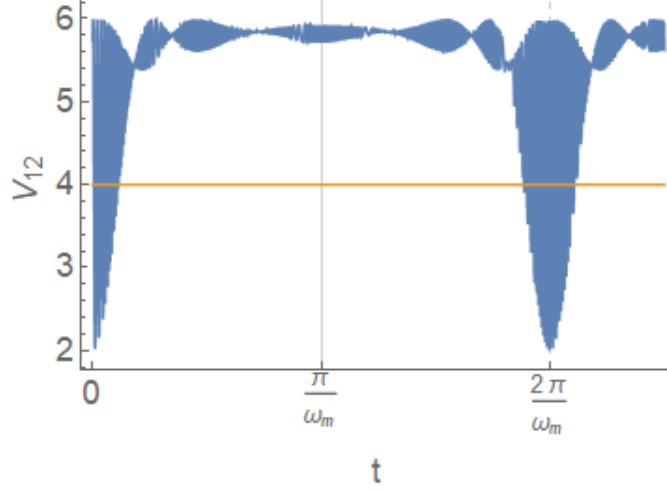


Figura 4.4: Desigualdad V_{12} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

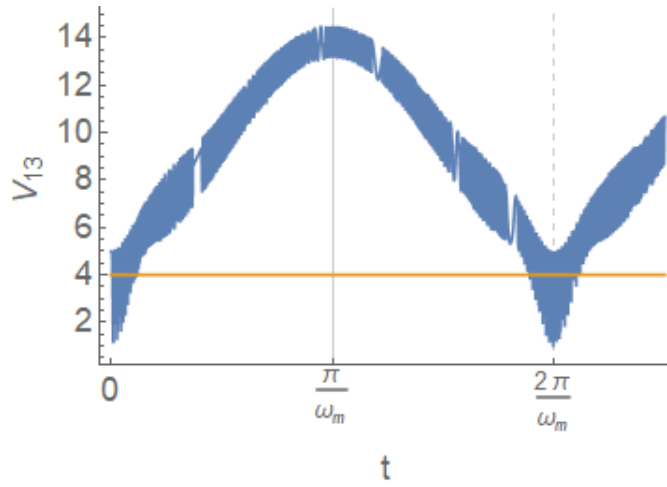


Figura 4.5: Desigualdad V_{13} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

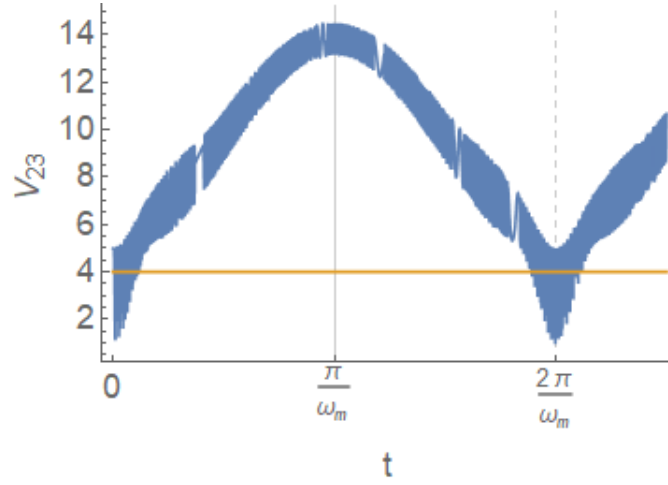


Figura 4.6: Desigualdad V_{23} para el estado $|\Psi(t)\rangle$ en el acoplamiento fuerte $k = 1$ con el tiempo escalado $t = t/\omega_m$.

Nuevamente se observa que existe una violación de las desigualdades 4.2 por lo que concluye que existe un entrelazamiento cuántico genuino.

A partir del comportamiento de todas las gráficas para los casos $k = 1/2$ y $k = 1$, ha sido posible obtener los siguientes resultados generales:

- La similitud de las gráficas para las desigualdades V_{13} y V_{23} es debido a que matemáticamente son equivalentes, esto era de esperarse pues se iguala la frecuencia de los modos del campo.
- Las gráficas muestran en una primera etapa que una vez iniciada la dinámica del sistema las desigualdades adquieren casi instantáneamente el valor máximo de violación para luego mantenerse oscilando rápidamente entre diferentes valores de cumplimiento-incumplimiento de la desigualdad. En una segunda etapa los valores de las desigualdades salen del estado de cumplimiento-incumplimiento para pasar a una zona donde no existen valores que violen dicha desigualdad. Finalmente los valores de la desigualdad vuelven a entrar a una zona de cumplimiento-incumplimiento para iniciar nuevamente este proceso después de un valor de tiempo.
- El valor del periodo para el comportamiento descrito anteriormente corresponde a 4π para el caso $k = 1/2$ y de 2π para el caso $k = 1$. Este

comportamiento periódico concuerda perfectamente con el observado por las gráficas de la función Q para los mismos valores de la constante de acoplamiento escalada, k .



Conclusiones

EN este trabajo de tesis se ha realizado el estudio de la dinámica de un sistema optomecánico mediante el análisis del enredamiento tripartito en el espacio fase. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- Se hallaron las condiciones en las que la componente mecánica se desenreda totalmente del resto del sistema, dejando la existencia del entrelazamiento únicamente entre los modos de campo. También fueron encontrados los requisitos para que el enredamiento desaparezca totalmente llegando incluso a obtenerse nuevamente el estado inicial.
- Se utilizó la función de Husimi para realizar un análisis cualitativo del entrelazamiento en el espacio de fase. Esto permitió visualizar el comportamiento temporal del enredamiento cuántico, en donde, se pudo concluir la presencia de colapsos y resurgimientos periódicos. En este contexto, el periodo temporal está determinado por el valor de la constante de acoplamiento escalada, k .
- El enredamiento cuántico generado por la dinámica del sistema fue certificado mediante el uso de las desigualdades de Van Loock-Furusawa reforzando de esta manera los resultados obtenidos por la función Q , esto fue producto de la comparación de las gráficas asociadas tanto a la función de Husimi como a las desigualdades mencionadas.

En conclusión, se ha demostrado que el uso de la función Q puede considerarse como una herramienta muy útil y fiable para el análisis cualita-

tivo de la dinámica del entrelazamiento en un sistema tripartito. El análisis realizado en este trabajo corresponde a un caso en el que se ha demostrado que la función Q mapea la característica matemática del entrelazamiento, es decir, la condición matemática de que los estados entrelazados no pueden ser factorizados, además se ha determinado que la función de Husimi mapea satisfactoriamente algunas características de las desigualdades de van Loock-Furusawa. Esto abre la posibilidad de usar el espacio fase para mapear el comportamiento del enredamiento en sistemas tripartitos. Las perspectivas de este trabajo contemplan analizar otro sistema optomecánico bajo este mismo contexto así como realizar un análisis adicional para una mejor comprensión del cómo la función Q representa el comportamiento del entrelazamiento de los sistemas tripartitos.



Bibliografía

Bibliografía

- [1] Zurek W.H. (2006) Decoherence and the Transition from Quantum to Classical? Revisited. In: Duplantier B., Raimond JM., Rivasseau V. (eds) Quantum Decoherence. Progress in Mathematical Physics, vol 48. Birkhäuser Base
- [2] Meystre, P. (2013), A short walk through quantum optomechanics. ANNALEN DER PHYSIK, 525: 215-233. doi:10.1002/andp.201200226
- [3] V. B. Braginsky, Y. L. Vorontsov, and K. S. Thorne, Science 209, 547 (1980); C. M. Caves et al., Rev. Mod.Phys. 52, 341 (1980).
- [4] P. Meystre and M. O. Scully, eds, ?Quantum Optics, Experimental Gravitation, and Measurement Theory,? Plenum Press, New York and London (1983).
- [5] Schrödinger, E., 1935, Naturwiss. 23, 807
- [6] S. Bell, Physics Physique Fizika **1**, 195 (1964).
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition (Cambridge University Press, 2010).

-
- [8] W. K. Wootters Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
 - [9] V. Coffman, J. Kundu and W. K. Wootters Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
 - [10] C. K. Law, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).
 - [11] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. Letters **88**, 120401 (2002).
 - [12] K. Stannigel, P. Komar, S. J. M. Habraken, S. D. Bennett, M. D. Lukin, P. Zoller, and P. Rabl, Phys. Rev. Letters **109**, 013603 (2012).
 - [13] W. Bowen and G. J. Milburn, Quantum Optomechanics (CRC Press, 2016).
 - [14] . M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, Rev. Mod. Phys. **86**, 1391 (2014).
 - [15] W. Ge and M. S. Zubairy, Physica Scripta **90**, 074015 (2015)
 - [16] E. Sete, H. Eleuch, and R. Ooi, Journal of the Optical Society of America B **31**, 2821 (2014).
 - [17] U. Akram, W. P. Bowen, and G. J. Milburn, New Journal of Physics **15**, 093007 (2013).
 - [18] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **56**, 4175 (1997)
 - [19] W. Ge, M. Al-Amri, H. Nha, and M. S. Zubairy, Phys. Rev. A **88**, 052301 (2013).
 - [20] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. B'ohm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer, Phys. Rev. Lett. **98**, 030405 (2007).
 - [21] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, Science **321**, 1172 (2008).
 - [22] A. D. O'Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, M. Lenander, Erik Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, John M. Martinis & A. N. Cleland, Nature **464**, 697-703 (2010).
-

- [23] Jasper Chan, T. P. Mayer Alegre, Amir H. Safavi-Naeini, Jeff T. Hill, Alex Krause, Simon Gröblacher, Markus Aspelmeyer & Oskar Painter, *Nature* **478**, 89?92 (2011).
- [24] J. D. Teufel, T. Donner, Dale Li, J. W. Harlow, M. S. Allman, K. Cicak, A. J. Sirois, J. D. Whittaker, K. W. Lehnert & R. W. Simmonds *Nature* **475**, 359?363 (2011).
- [25] D. Kleckner, I. Pikovski, E. Jeffrey, L. Ament, E. Eliel, J. van den Brink and D. Bouwmeester, *New J. Phys.* **10** 095020 (2008).
- [26] T. A. Palomaki, J. D. Teufel, R. W. Simmonds, and K. W. Lehnert, *Science* **342**, Issue 6159, pp. 710-713 (20013).
- [27] R. Riedinger, S. Hong, R. A. Norte, J. A. Slater, J. Shang, A. G. Krause, V. Anant, M. Aspelmeyer & S. Gröblacher *Nature* **530**, 313?316 (2016).
- [28] T. P. Purdy, K. E. Grutter, K. Srinivasan, and J. M. Taylor, *Science* **356**, Issue 6344, pp. 1265-1268 (2017).
- [29] X. Hao, SI LiuGang, LV Xin You, Y. XiaoXue, and W. Ying, *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **58**, 050302 (2015).
- [30] Yu-long Liu, C. Wnag, Jing Zhang and Yu-Xi Liu, *Chin. Phys. B* **27**, 024204 (2018).
- [31] M. Asjad, P. Tombesi, and D. Vitalli, *Optic Express* **23**, 7786 (2015).
- [32] P. van Lock and A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **67**, 052315 (2003).
- [33] L-M Duan, G. Giedke, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Letters* **84**, 2722 (2000).
- [34] P. C. G. Quijas and L. M. A. Aguilar, *Physica Scripta* **75**, 185 (2007).
- [35] W. D ür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000).
- [36] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **64**, 052303 (2001).
- [37] L-M Duan, G. Giedke, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **73**, 032345 (2006).

- [38] M. K. Olsen and J. F. Corney, *Opt. Communications* **378**, 49 (2016).
- [39] K. Kreis and P. van Loock, *Phys. Rev. A* **85**, 032307 (2012).
- [40] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [41] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [42] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).
- [43] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [44] M. Orzag, *Quantum Optics* (Berlin; New York; Springer, 2008) Chap. 4, p. 31.
- [45] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight, and V. Buek, *Phys. Rev. A* **41**, 2645 (1990).
- [46] P. C. García-Quijas and L. M. Arévalo Aguilar, *Quantum Information & Computation*, Vol. 10, No. 3&4, **10**, 189 (2010).
- [47] S. Aldana, C. Bruder, and A. Nunnenkamp, *Phys. Rev. A* **88**, 043826 (2013).
- [48] K. Banaszek and K. Wdkiewicz, *Acta Phys, Slovaca* **49**, 491 (1999).
- [49] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **55**, 3042 (1997).
- [50] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, edited by S. S. Ballard (New York: Wiley, 1990) Chap. 3, pp. 136-7.
- [51] W. Ge and M. S. Zubairy, *Physica Scripta* **90**, 074015 (2015).
- [52] E. Sete, H. Eleuch, and R. Ooi, *Journal of the Optical Society of America B* **31**, 2821 (2014).
- [53] U. Akram, W. P. Bowen, and G. J. Milburn, *New Journal of Physics* **15**, 093007 (2013).
- [54] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4175 (1997).
- [55] W. Ge, M. Al-Amri, H. Nha, and M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **88**, 052301 (2013)

-
- [56] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. Böhm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer, Phys. Rev. Lett. 98, 030405 (2007)
 - [57] S. Gigan, H.R. Böhm, M. Paternostro, et. al, *Self-cooling of a micro-mirror by radiation pressure*, Nature 444, 67-70 (2 November 2006)
 - [58] K. Banaszek, K. Wódkiewicz, *Nonlocality of the Einstein-Podolsky-Rosen state in the phase space*, Acta Phys, Slovaca vol 49 No. 4 491-500 (1999)
 - [59] Gerald T. Moore, Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable-Length One-Dimensional Cavity, Journal of Mathematical Physics 11, 2670 (1970).