



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica de especies vegetales en un medio cuasi-homogéneo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciatura en Física

por

Andrea Montiel Pérez

asesorada por:

Dr. J. Fernando Rojas R.

Dr. Adrián Hernández S.

Julio, 2016

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores: Dr. Fernando Rojas R. y Dr. Adrián Hernández S. por su paciencia, accesibilidad, motivación, guía y su valioso tiempo. Fernando gracias por tu amistad.

A mi esposo Abraham, gracias por tu amor incondicional, por impulsarme para alcanzar esta meta y por tu fé en mí. A mi hijo Altair por alegrar tanto mi vida. Ustedes me hacen esforzarme por ser mejor cada día.

A mi familia.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

.....	3
INTRODUCCIÓN	7
Resumen:	7
Objetivos:	7
Objetivos Generales:	7
Objetivos Específicos:	7
Metodología	8
1. Planteamiento	8
1.1. Problemática actual en la producción alimenticia	8
1.2. Ventajas de los modelos matemáticos y computacionales	9
1.3. Ventajas de los policultivos	11
2. Dinámica	13
2.1. Principio de Hamilton	14
2.2. Sistemas Hamiltonianos	17
3. Metodo de Euler	18
1. SISTEMAS DINÁMICOS	21
1.1. ¿Que son los sistemas dinámicos?	21
1.2. Nociones básicas de los sistemas dinámicos	23
Estado:	23
Vectores de Estado:	23
Reglas de Evolución:	23
Ecuaciones de Evolución :	23
Sistemas Autónomos y No Autónomos:	23
Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos:	24
Linealidad y no linealidad:	24
Espacio de fases:	25
Trayectoria:	25
Diagrama de fases:	25
Volumen fásico:	25
Sistemas conservativos y disipativos:	25
Teorema de existencia y unicidad:	25
Campo de velocidades:	26
Flujo:	26
Puntos fijos:	26
Perturbación:	27

Estabilidad local y global:	27
Autovalores y Autovectores:	27
Direcciones estable e inestable:	28
Teorema de Hartman-Grobman:	28
1.3. Sistemas complejos	29
1.4. Sistemas de Reacción-Difusión	29
1.5. Dinámica Poblacional	31
1.5.1. Modelos Poblacionales	32
1.5.1.1. Modelo Exponencial	32
1.5.1.2. Modelo logístico	33
1.6. Modelos Lotka-Volterra	35
1.6.1. Modelo Predador-Presa	35
1.6.2. Modelo Competitivo	37
1.6.3. Modelo Cooperativo	42
2. EL MODELO DE HARDENBERG: EXTENSIÓN A MÁS ESPECIES.	45
2.1. El modelo de Hardenberg.	45
2.2. Extensión a más especies	47
2.2.0.1. Modificando el modelo original	47
3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	49
Caso 1: w que varia en el tiempo	50
Para $\rho_1 < \rho_2$ y $\mu_1 < \mu_2$	50
Para $\rho_1 = \rho_2$; $\mu_1 = \mu_2$	52
Para $\rho_1 > \rho_2$; $\mu_1 > \mu_2$	53
Caso 2: w constante	55
Para $\mu_1 < \mu_2$	55
Para $\mu_1 = \mu_2$	57
Para $\mu_1 > \mu_2$	58
4. CONCLUSIONES	63
BIBLIOGRAFÍA	65

INTRODUCCIÓN

RESUMEN:

En esta tesis se desarrolla un programa para modelar la interacción de al menos dos especies vegetales que comparten el mismo terreno, para ello nos basamos en el modelo de Hardenberg.

Primero se simula el crecimiento de la biomasa de una especie vegetal debido a parámetros propios del terreno como humedad, evaporación. Posteriormente en este trabajo ampliamos el análisis a más de una especie vegetal agregando al modelo existente un modelo de competencia, en el cual se analiza como el desarrollo de una de las especies afecta al desarrollo de la otra considerando los parámetros anteriores y agregando a estos un nuevo parámetro, los nutrimentos del suelo.

Este programa servirá como herramienta para la optimización de la siembra de policultivos, los cuales son de relevante importancia ya que en un mismo terreno se eleva la productividad con menor desgaste del suelo que con las técnicas actuales.

OBJETIVOS:

Objetivos Generales:

Desarrollar un modelo que sirva como referencia en el estudio y siembra de los policultivos basado en los modelos de Hardenberg y modelos de competencia. Gracias a ello es de esperarse que posteriormente se genere una base de especies vegetales aptas para su uso en policultivos, fomentando así su introducción en el ámbito agrícola como una opción más atractiva que el monocultivo y con un impacto menos desgastante sobre el suelo fértil.

Objetivos Específicos:

La finalidad de este trabajo es, en un futuro, contar con un programa (software) que sea una herramienta de consulta para todo aquel interesado en el desarrollo de los policultivos, con ella podrá analizar la viabilidad del uso de distintas especies vegetales y en particular de dos especies simultáneamente. Al introducir la información de las especies en cuestión podrá comprobar si entre ellas se permite la convivencia en base a los recursos o si compiten por ellos inhabilitando de esta manera su correcto crecimiento. En este último caso se podrá apreciar cómo el desarrollo de una de las especies afecta a la otra.

METODOLOGÍA

Se realiza un análisis del modelo de vegetación de Hardenberg el cual originalmente contempla una sola especie vegetal en base a 2 parámetros que son la humedad y la evaporación en un terreno plano. En este trabajo se amplía dicho análisis al considerar dos especies vegetales en un medio cuasi - homogéneo. Para incluir mas de una especie se llevó a cabo un estudio de los sistemas de competencia como el de Lotka - Volterra, de los sistemas dinámicos en especial los no lineales y de programación en Python. Posteriormente se aplican modificaciones al modelo original de Hardenberg en base a las consideraciones de competencia entre dos especies por los recursos del medio, para así poder desarrollar el programa en lenguaje de programación Python.

1. PLANTEAMIENTO

1.1. Problemática actual en la producción alimenticia

El campo mexicano enfrenta grandes problemas en la actualidad como la falta de apoyos, los altos costos de insumos y servicios, las pérdidas por cuestiones climáticas y plagas, la falta de capacitación, la pérdida de fertilidad del suelo y la infraestructura insuficiente para la producción. Estos problemas resaltan entre los doce principales obstáculos que tienen que sortear los agricultores y ganaderos del país. Lo anterior se desprende de la Encuesta Nacional Agropecuaria (ENA) 2012 del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), basada en una muestra de 97,442 unidades de producción. Como se menciona en los objetivos, la intención de este trabajo es contribuir a una solución para los desafíos del campo en nuestro país.

No hay duda de que la amenaza a la seguridad alimentaria de millones de personas, es el resultado directo del modelo industrial de agricultura, que no sólo es peligrosamente dependiente de los hidrocarburos sino que se ha transformado en la mayor fuerza antrópica modificante de la biosfera. La creciente expansión del monocultivo industrial para transgénicos ejerce presiones sobre los ecosistemas naturales cada vez más degradados, socavando la capacidad de la naturaleza para suplir las demandas de la humanidad en cuanto a alimentos, fibras y energía. La tragedia es que la población humana depende de los servicios ecológicos de la naturaleza (ciclos de agua, polinizadores, suelos fértiles, clima local benevolente, control biológico etc.) y la agricultura intensiva continuamente, empuja más allá de sus límites.

Cada vez que fluctúan los mercados y caen los precios, una proporción considerable de campesinos y agriculturas familiares son expulsados del mercado debido, en parte, a los bajos precios que reciben por sus cultivos y, en parte, al elevado costo de los insumos, tales como los fertilizantes dependientes del precio del petróleo; mientras que los precios para los consumidores aumentan, independientemente de cuál sea el precio del trigo o del maíz. De esta manera, el mercado desregulado, la privatización y los tratados de libre comercio afectan negativamente tanto a campesinos como a consumidores, el problema es la vulnerabilidad de más de un billón de personas a la volatilidad de los precios. El libre comercio sin control social es el principal mecanismo que está desplazando a los agricultores de sus tierras y es el principal obstáculo para lograr desarrollo y seguridad alimentaria local. Sólo desafiando el control que las empresas multinacionales ejercen sobre el sistema alimentario y el modelo agroexportador que auspician los gobiernos neoliberales, se podrá detener la espiral de pobreza, hambre, migración rural y degradación ambiental [14].

El cambio climático global afecta todos los aspectos de la producción de alimentos, desde las aguas y los suelos hasta la biodiversidad y obligará a tomar decisiones fundamentales acerca del futuro. Aumento inusuales de temperaturas y severas fluctuaciones como sequías, inundaciones y tempestades poco comunes afectan negativamente los ecosistemas esenciales y por lo tanto se extienden a sistemas alimentarios de regiones enteras [3]. Incluso aquellos sistemas más autosuficientes se verían debilitados si sus vínculos con otros sistemas muestran vulnerabilidad, lo que dificulta la intervención en situaciones críticas de emergencia. Sabemos que la agricultura es la industria más sedienta del planeta consumiendo 72% del agua dulce disponible para usos humanos en momentos en que la ONU señala que un 80% de las existencias de agua es sobre explotada [1].

La intención de este trabajo es utilizar la metodología teórica de la física para poder optimizar los cultivos, un objetivo muy simple y específico pero con un importante trasfondo. En la actualidad queda claro que para la supervivencia de nuestra especie debemos optimizar nuestros recursos. Estamos llegando a nuestra capacidad máxima de carga. De continuar con este ritmo de crecimiento poblacional terminaremos con nuestros recursos y nos extinguiremos, o en el mejor de los escenarios sufriremos una merma poblacional tan severa que millones de vidas se perderán. Enfrentar la crisis que se avecina requiere todo nuestro conocimiento, ingenio y visión, serán necesarios nuevos enfoques para todos los aspectos de la vida cotidiana que damos por un hecho.

1.2. Ventajas de los modelos matemáticos y computacionales

Los modelos de simulación constituyen una herramienta fundamental para entender la complejidad que caracteriza los sistemas ecológicos y ambientales. Esto se debe a que son una herramienta que permite crear una representación

de cómo el ecosistema funciona en su totalidad, realizar análisis de impactos tecnológicos, económicos y ambientales, la evaluación de estrategias productivas y los pronósticos del rendimiento de los cultivos. Aunque la palabra modelo se utiliza para referirse a numerosas aproximaciones, en este trabajo entenderemos por modelos las representaciones de procesos dinámicos en el tiempo [24].

La simulación es una de las herramientas más importantes y más interdisciplinaria; los modelos de simulación de cultivos tienen varias aplicaciones actuales y potenciales en respuesta a temas relacionados con la investigación, el manejo de cultivos y la planificación. Estos pueden constituir un elemento importante para tomar decisiones en la agricultura al cuantificar, interpretar y predecir las necesidades hídricas de los cultivos, el desarrollo de estos y sus rendimientos.

Los modelos son muy útiles para describir, explicar o comprender mejor la realidad. Un modelo es una representación simplificada de un sistema y un sistema es una parte bien delimitada del mundo real. La construcción de un modelo consiste en la individualización de una serie de ecuaciones matemáticas, mediante las cuales se puede reproducir las propiedades esenciales del sistema examinado.

El uso de modelos, o modelación, es un instrumento muy común en el estudio de sistemas de toda índole. Los modelos son especialmente importantes, porque ayudan a comprender el funcionamiento de los sistemas. El empleo de modelos facilita el estudio de los sistemas, aun cuando estos puedan contener muchos componentes y mostrar numerosas interacciones, como puede ocurrir si se trata de conjuntos bastante complejos y de gran tamaño. La modelación comenzó a tener importancia en agronomía y en otras áreas biológicas, dada su capacidad de suministrar información en un enfoque sistemático de todo el sistema o de una parte, como es el sistema de producción agrícola.

Hoy más que nunca, el aumento de la producción de alimentos depende de la utilización prudente de los recursos. Además, cuestiones como el cambio climático, la variabilidad del clima, el suelo y el secuestro de carbono a largo plazo, efectos en la seguridad alimentaria y la sostenibilidad del medio ambiente, se han convertido en aspectos importantes.

Una de las grandes ventajas de la modelación de estos sistemas dinámicos, es que los modelos matemáticos sustituyen en muchos casos al experimento, además de que tienen la ventaja de que son más económicos y más eclécticos, es decir, que se les puede cambiar con mayor facilidad. Si queremos cambiar las propiedades de un modelo matemático computacional, solo modificamos un archivo de computadora. Podemos tener previstos todos los experimentos que queremos hacer y será el propio archivo, la propia computadora, quien va cambiando las propiedades del modelo. En cambio realizar modificaciones directamente en un cultivo será tardado y costoso, ya que deberá volver a sembrarse bajo las nuevas características.

La modelación hace posible estimar el comportamiento de un sistema existente, si se modifican algunas de las condiciones de funcionamiento actuales. Además, para probar si esos cambios producen mejoras, no es necesario interrumpir el funcionamiento del sistema real. Se pueden comparar distintas alternativas de diseño (o de formas de operar de un sistema), antes de construirlo, para ver cuál se comporta mejor. Permite estudiar en poco tiempo la evolución de un sistema en un período largo de tiempo: se pueden evaluar años de experiencia en el sistema real en unos pocos minutos de simulación. Alternativamente también permite lo contrario: estudiar los trabajos detallados de un sistema en un período de tiempo extendido.

Los modelos espaciales nos permiten explicar de manera más realista los posibles mecanismos que generan la distribución de las especies e incorporar procesos tales como la competencia o la dispersión, que pueden tener una gran influencia sobre los patrones observados. [24]

1.3. Ventajas de los policultivos

El policultivo es aquel tipo de agricultura que usa cosechas múltiples sobre la misma superficie, imitando hasta cierto punto la diversidad de ecosistemas naturales de plantas herbáceas, y evitando las grandes cargas sobre el suelo agrícola de las cosechas únicas.

La enorme variedad de policultivos existentes refleja la gran diversidad de cosechas y prácticas de manejo que usan los agricultores en todo el mundo. Los policultivos pueden comprender combinaciones de cultivos anuales con otros anuales, anuales con perennes o perennes con perennes. Los cereales pueden cultivarse asociados a leguminosas y los cultivos de raíces asociados a frutales. Los policultivos se pueden sembrar en forma espaciada, desde la combinación simple de dos cultivos en hileras intercaladas hasta asociaciones complejas de doce o más siembras entremezcladas. Los componentes de un policultivo pueden sembrarse en la misma fecha o en otra diferente (cultivos de relevo); la cosecha de los distintos cultivos puede ser simultánea o a intervalos.

Los policultivos ofrecen ventajas sobre los monocultivos como mayor rendimiento en la siembra, mayor eficiencia biológica, una mayor rentabilidad económica. En la referencia [15] se presenta un estudio de los sistemas de cultivos en el norte de Nigeria. El autor encontró que cuando tomaba en cuenta en sus análisis el costo de mano de obra, la utilidad era de un 42% a un 149% mayor para los policultivos que para los monocultivos, mayor estabilidad de la producción [19], mayor eficacia de conversión de recursos [23], mayor esta-

bilidad ecológica, económica, social, energética, incremento en la productividad del trabajo, se puede integrar mayores cantidades de biomasa al agroecosistema y de mejor calidad, se reduce la evaporación del agua de la superficie del suelo, se reduce la erosión en la superficie del suelo por medio de una protección física, se incrementa la cubierta vegetal en el suelo, la cual ayuda a controlar la presencia la maleza y produce beneficios físicos al terreno[1].

Por ejemplo, en la asociación maíz-frijol los agricultores aprovechan la capacidad del frijol de fijar nitrógeno y de enriquecer el suelo con materia orgánica, procesos de los cuales se beneficia el maíz, que a su vez proporciona sombra y sirve de sostén al frijol de enredadera. Al agregar la calabaza, la cobertura del suelo se incrementa reduciendo su erosión y evitando el crecimiento excesivo de las malezas. Además la milpa diversificada incrementa las oportunidades ambientales para combatir los enemigos naturales como plagas de insectos, y consecuentemente, mejora el control biológico de éstas. [2]

La evidencia acerca de la productividad del policultivo de pequeña escala en la agricultura campesina es convincente y ha ido ganando credibilidad gracias al trabajo de agroecólogos, ecólogos y etnólogos que prestan particular atención y reconocen la contribución legada a la producción agrícola sustentable por los campesinos, que con toda su heterogeneidad estructural, geográfica, cultural, histórica y ecológica[4], han encarnado una manera de vivir, un criterio de colaboración con la tierra y una verdadera riqueza de conocimientos consistente con los principios centrales de la ecología, clave para la materialización de los modelos de cultivo del futuro: la estabilidad en la producción local y diversificada de alimentos con impacto mínimo en el medio ambiente, emisión leve de gases de efecto invernadero, reduciendo el kilometraje en la distribución y reintegración plena de los deshechos del ciclo productor[2]. La situación en América Latina confirma el rol del campesinado como proveedores esenciales de seguridad alimentaria 17 millones de pequeñas unidades productivas de un tamaño promedio de 1.8 hectáreas, ocupando solo el 34% del total de la tierra cultivada (60,5 millones de hectáreas) produce 51% del maíz, 77% de los frijoles y 61% de las papas de consumo doméstico [5].

El hecho de aumentar la diversidad de la vegetación mediante el uso de los policultivos no es la panacea para resolver los problemas de producción y protección de cultivos, pero puede ofrecer a los agricultores opciones potencialmente útiles para disminuir la dependencia de insumos externos, reducir al mínimo la exposición a los productos agroquímicos, aminorar el riesgo económico, la vulnerabilidad nutricional y proteger la base necesaria de los recursos naturales para la sustentación agrícola.

Por supuesto que rediseñar el sistema alimentario hacia formas más equitativas y viables para agricultores y consumidores requerirá, además del escalonamiento de la propuesta agroecológica, cambios en las fuerzas políticas y económicas que determinan qué se produce, cómo, dónde y para quién.

2. DINÁMICA

Actualmente la dinámica es interdisciplinaria pero inicialmente era solo una rama de la física que surgió gracias a Isaac Newton, quien a mediados del siglo XVI desarrolló las ecuaciones diferenciales, descubrió las leyes de movimiento y gravitación universal, específicamente al combinarlas con las leyes de Kepler logro resolver el problema de los 2 cuerpos para el movimiento de la tierra alrededor del sol, Newton notó que los sistemas dinámicos tienen múltiples aplicaciones entre ellas nos sirven para entender cómo evolucionan temporalmente los procesos y sistemas naturales.

Posteriormente muchos intentaron aplicar los métodos analíticos de Newton para resolver el problema de los 3 cuerpos sin éxito hasta que finalmente se concluyó que era virtualmente imposible de resolver. Pero a finales del siglo XVIII Poincaré introdujo un nuevo enfoque a este problema, gracias al desarrollo geométrico del problema de los 3 cuerpos llegó a una muy buena solución aproximada y con ello se establecieron las bases para la dinámica moderna.

La primera vez que un modelo matemático fue utilizado para hacer predicciones en el ámbito biológico fue en 1760 por Bernoulli para el estudio sobre el control de una epidemia a través de una vacuna, sin embargo no fue sino hasta comienzos del siglo pasado cuando se observó el auge de los modelos matemáticos para analizar múltiples sistemas naturales.

En la década de los cincuenta se da un parte aguas para la dinámica, gracias a la invención de la computadora de alta velocidad ya que permitió desarrollar cálculos y realizar ecuaciones de formas que resultaban imposibles anteriormente. Esto llevó a Lorenz en 1963 a descubrir el movimiento caótico en un atractor extraño.

El movimiento de una partícula dentro de un sistema de referencia inercial queda correctamente descrito mediante la formulación de Newton $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, mientras la partícula no realice movimientos complicados y utilicemos coordenadas rectangulares para describirlo, las ecuaciones de movimiento generalmente serán sencillas, en caso contrario pueden volverse significativamente complicadas. Esto se debe a que para aplicar las leyes de Newton se deben conocer la totalidad de las fuerzas ya que \mathbf{F} es la fuerza resultante que actúa sobre ella. Bastará con utilizar un método que nos permita abordar problemas más complicados de índole más general. Para ello en la dinámica se aplica el principio de Hamilton y las ecuaciones de Lagrange.

2.1. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton permite abordar problemas complicados de forma general y las ecuaciones de movimiento que resultan de aplicarlo se llaman ecuaciones de Lagrange. El principio de Hamilton nos permite unificar satisfactoriamente muchas teorías separadas, partiendo de un postulado fundamentalmente sencillo [10].

Históricamente para la física los principios de mínimo han sido muy relevantes, parten de la idea que la naturaleza siempre actúa de forma que determinadas cantidades importantes resultan siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. Por citar algunos ejemplos “las leyes de reflexión y refracción” en la óptica, “el principio de mínima acción” en la mecánica, “el principio de ligadura mínima” de Gauss y “el principio de la curvatura mínima” de Hertz.

El principio de Hamilton puede formularse como: “*De todas las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras), que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial*”.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

Esta formulación variacional del principio de Hamilton impone únicamente que $T - U$ se extremal, no mínimo necesariamente, para la mayoría de las aplicaciones de la dinámica se obtiene una condición de mínimo.

La energía cinética de una partícula expresada en un sistema de coordenadas rectangulares fijo es solamente función de las x_i y cuando la partícula se mueva en campo de fuerzas conservativo, la energía potencial es función de las x_i .

$$T = T(\dot{x}_i); \quad U = U(x_i)$$

La diferencia de estas cantidades se define como

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$$

Entonces podemos expresar el principio de Hamilton como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0$$

La función L se toma como el funcional f de la integral variacional y haciendo los cambios

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t & y_i(x) &\rightarrow x_i(t) \\ y'_i(x) &\rightarrow \dot{x}_i(t) & f\{y_i(x), y'_i(x); x\} &\rightarrow L(x_i, \dot{x}_i) \end{aligned}$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula, siendo L la función de lagrange o lagrangiana de la partícula

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Las coordenadas generalizadas son un conjunto de cantidades que dejan completamente especificado el estado del sistema y se representan normalmente como q_1, q_2, \dots o q_i . El conjunto de coordenadas generalizadas no es único en general y existirán muchos conjuntos de cantidades que dejen especificado por completo el estado de un sistema dado. Además de las coordenadas generalizadas, podemos definir otro conjunto de cantidades que se compone de las derivadas temporales de las $q_i = \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ o simplemente \dot{q}_i , las velocidades generalizadas. Es posible, pues, representar el estado de tal sistema por un punto de un espacio de S dimensiones que llamaremos espacio de configuraciones, correspondiendo cada una de las dimensiones de este espacio a las q_i .

La evolución del sistema a través del tiempo, estará representada por una curva en este espacio, donde cada uno de los puntos representara la configuración del sistema en un instante determinado.

Por cada uno de estos puntos pasará un número infinito de curvas que representan posibles movimientos del sistema que corresponden a un conjunto particular de condiciones iniciales. Toda trayectoria del espacio de configuraciones, cuando este está formado por un sistema propio de coordenadas generalizadas, es compatible con las ligaduras del sistema ya que las coordenadas corresponden solo a movimientos posibles del sistema.

La lagrangeana es una función escalar y por lo tanto es invariante respecto a los cambios de coordenadas y coordenadas generalizadas elegidas para la descripción del sistema. La gran ventaja de la formulación Lagrangeana de la mecánica reside en que no es necesario incluir explícitamente las fuerzas de ligadura. Se centra en la dinámica del sistema más que en el cálculo de las fuerzas que actúan en cada una de las partes del mismo. La diferencia principal entre los procedimientos de Newton y Lagrange, es que el procedimiento de Newton hace énfasis sobre el agente exterior que actúa sobre un cuerpo (la fuerza), con el de Lagrange se hace hincapié a magnitudes asociadas al cuerpo (las energías cinéticas y potencial).

Cuando la energía potencial de un sistema es independiente de la velocidad, el momento en coordenadas cartesianas está dado por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Ampliando al caso de la Lagrangeana, el momento generalizado se define como:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Definimos la Hamiltoniana como:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

Expresando las velocidades generalizadas como $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t)$ podemos pasar del sistema de variables (q_j, \dot{q}_j, t) al sistema (q_j, p_j, t) y así expresar la Hamiltoniana como

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Así la Hamiltoniana es una función del sistema (q_k, p_k, t) y la Lagrangeana es una función del sistema (q_k, \dot{q}_k, t) . Por lo tanto la diferencial total de H sera

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

⇒

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Utilizando las definiciones de p_j y \dot{p}_j la expresión se reduce a

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Encontramos entonces las ecuaciones de movimiento de Hamilton, también conocidas como ecuaciones canónicas de movimiento, este nombre se deriva de aspecto simétrico. La dinámica de Hamilton es la descripción del movimiento mediante estas ecuaciones.

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Una de las grandes ventajas de la mecánica Hamiltoniana radica en el hecho de que, al plantear un problema, la elección de las variables puede hacerse con mayor libertad, simplifica la solución de los problemas, permite ampliar el análisis a más campos. El método de Hamilton resulta especialmente útil cuando los movimientos están sometidos a perturbaciones producidas por otros objetos. Las coordenadas generalizadas q_k y los momentos generalizados p_k son magnitudes *canónicamente conjugadas*. Se dice que una coordenada es *cíclica* cuando no se encuentre de forma explícita en las expresiones de T y U , la solución correspondiente a una coordenada cíclica es trivial y se reduce a una cuadratura. En consecuencia la formulación canónica de Hamilton es de suma utilidad cuando una o más coordenadas del problema en cuestión son cíclicas.

Las coordenadas generalizadas q_i pueden definir un espacio de configuraciones *s-dimensional*, donde cada uno de sus puntos determine un estado del sistema. Los momentos generalizados p_j análogamente definen un espacio de momentos *s-dimensional*, donde cada punto determinará un estado de movimiento del sistema. Podemos representar geoméricamente la dinámica de los sistemas a través de *diagramas fásicos*¹. Con esta idea podemos formar un espacio *2s-dimensional* formado por las q_i y p_j que nos permitirá la representación de las posiciones y momentos de todas las partículas, este espacio es el *espacio fásico de Hamilton* o simplemente *espacio fásico*.

En resumen aunque la dinámica Hamiltoniana puede emplearse para resolver problemas específicos de mecánica, su verdadero potencial se encuentra en proporcionar postulados fundamentales en campos tales como la mecánica cuántica, la mecánica estadística y mecánica celeste.

2.2. Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos son fundamentales para la mecánica clásica. Un sistema de ecuaciones diferenciales se dice Hamiltoniano (con un grado de libertad) si puede expresarse de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

o en notación clásica

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

donde q_i son las coordenadas de posición y p_i son las coordenadas momento. La función H se denomina Hamiltoniano. El sistema se dice conservativo si no hay disipación. El Hamiltoniano H se define como la suma de las energías cinética y potencial del sistema.

$$H = T + V$$

Algunas características de los sistemas hamiltonianos son la conservación de la energía y volumen. El flujo definido por un sistema Hamiltoniano preserva el volumen. Más aún, las trayectorias de las soluciones yacen sobre las superficies de nivel $H(p, q) = C$. Todo punto crítico no degenerado de un sistema Hamiltoniano es o un punto de silla o un centro, esto refleja un hecho más general, que los sistemas Hamiltonianos preservan el volumen del flujo.[6]

1. En el siguiente capítulo definiremos los conceptos de espacio fásico, diagrama de fase, volumen fásico, trayectoria, punto crítico y teorema de existencia y unicidad, que de momento solo serán mencionados.

La formulación de la dinámica en coordenadas generalizadas de Hamilton es ideal para estudiar sistemas complejos. Anteriormente ya hemos definido el espacio fásico, gracias a las coordenadas generalizadas de Hamilton q_i y p_i se puede definir también el espacio fásico. Cuando, en un instante dado se conozcan las posiciones y momentos de todas las partículas que forman el sistema, entonces con estas cantidades como condiciones iniciales, estará completamente determinado el movimiento subsiguiente del sistema, es decir, a partir de un punto $q_i(0)$, $p_i(0)$ del espacio fásico, el punto representativo del sistema se desplazará a lo largo de una trayectoria fásica única.

Gracias a los sistemas con muchos grados de libertad (como un volumen gaseoso) se desarrolló la rama de la física que conocemos como *mecánica estadística*. Cuando no es posible designar un punto del espacio fásico que represente correctamente al sistema, podemos llenar el espacio fásico con un conjunto de puntos, cada uno de los cuales represente un posible estado del sistema. Entonces cada uno de los puntos del espacio fásico representará a cada uno de los estados de dicho conjunto y el movimiento de cada uno de los puntos representará el movimiento independiente del sistema correspondiente, así pues no podrá haber nunca 2 trayectorias del espacio fásico que se corten, lo cual confirma el teorema de existencia y unicidad que enunciaremos más adelante.

El Teorema de Liouville establece que la densidad de puntos representativos del espacio fásico correspondientes al movimiento de un sistema de partículas permanece constante durante el movimiento. Podemos enunciar el teorema de Liouville: “*Los volúmenes de $2n$ dimensiones de R_1 y R_2 son los mismos, o si definimos la densidad como el número de puntos por unidad de volumen, entonces la densidad es constante. Podemos considerar los puntos de R_1 como partículas de un flujo incompresible que se desliza desde R_1 hasta R_2 en un tiempo t* ”

3. METODO DE EULER

Este método se aplica para encontrar la solución a ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Con $x \in [a, b]$, consideremos el dominio mencionado discretizado en $n + 1$ puntos equiespaciados, siendo h el espaciado:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

El método se basa de forma general en la pendiente estimada de la función para extrapolar desde un valor anterior a un nuevo valor, “nuevo valor = valor anterior + pendiente x tamaño de paso” o bien :

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset h \tag{1}$$

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÁMICOS

La teoría de los sistemas dinámicos tiene sus inicios con Newton, en el siglo XVII, y tomo un cambio radical a finales de 1800 cuando Poincaré comienza a considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista. También estudió el caos en su trabajo sobre el problema de los tres cuerpos, que aunque no resolvió por completo dió lugar a un amplio estudio de lo que ahora se denomina teoría del caos. [18]

Uno de los descubrimientos más trascendentes de Isaac Newton es que las ecuaciones diferenciales (en particular los sistemas dinámicos) son útiles para describir la evolución temporal de los sistemas naturales, desde entonces las teorías físicas suelen tomar la forma matemática de las ecuaciones diferenciales. La primera vez que un modelo matemático fue utilizado para hacer predicciones en el ámbito biológico fue en un estudio sobre el control de una epidemia a través de una vacuna (Bernoulli 1760).

Un sistema dinámico es capaz de representar un modelo de la naturaleza por ejemplo el sistema solar, que tiene una evolución en el tiempo, ya sea de forma discreta o continua. La evolución se lleva a cabo en base a estados, el sistema comienza en un estado x_0 y el estado siguiente es dependiente del estado anterior. Además existe una ley o regla que rige su evolución, si conocemos esta y el estado inicial es posible encontrar un estado posterior.

Por sistemas dinámicos entendemos no solo un conjunto de ecuaciones diferenciales, también un conjunto de ecuaciones en diferencias ó mapas; los primeros surgen cada vez que la evolución del sistema es en tiempo continuo y los segundos cuando el tiempo avanza a pasos discretos (o se puede representar de esta manera). Estos “mapas” son los mas adecuados para analizar los sistemas naturales, en ambos casos la evolución es determinista y dada una condición inicial es única siempre y cuando cumpla una serie de requisitos básicos. Sin embargo los sistemas homogéneos son excepcionales en la naturaleza.

1.1. ¿QUE SON LOS SISTEMAS DINÁMICOS?

Un sistema dinámico es cualquier conjunto de objetos, materiales o conceptuales que interactúan entre sí, definido por una serie de variables dependientes del tiempo. Esta descripción engloba tanto sistemas mecánicos como biológicos, económicos, químicos, etc. Ya que prácticamente todo lo que evoluciona en el tiempo puede tratarse como un sistema dinámico.[12]

Existe una primera diferencia crucial entre los distintos tipos de sistemas dinámicos. Cuando las funciones son combinaciones lineales de las variables, el sistema dinámico se llama lineal. Si esto no ocurre, es decir si aparecen potencias, productos, etc. entonces el sistema es no lineal. Para los sistemas lineales aplica el principio de superposición gracias al cual esencialmente se puede descomponer el sistema en subsistemas más sencillos y resolver las ecuaciones separadamente para cada uno de ellos. Así la solución de nuestro sistema original será la suma de las soluciones para cada uno de los subsistemas. Cuando las partes de un sistema interactúan por ejemplo compitiendo, el sistema ya no es lineal y por lo tanto no se le puede aplicar el principio de superposición esto ocurre con la mayoría de los sistemas naturales.

Todo sistema natural ocupa un cierto lugar en el espacio, en esta región al transcurrir el tiempo los elementos que constituyen a este sistema se mueven, transforman sus estados internos, interactúan unos con otros, o son influenciados por agentes externos. Cuando la distribución espacial de los componentes del sistema no influye en su evolución, como en un sistema espacialmente homogéneo, es posible caracterizar al sistema a través de propiedades globales tales como los promedios sobre la región del espacio en cuestión, para estos casos la evolución temporal y espacial se desacoplan y es posible analizar la evolución temporal por separado. La descripción matemática se lleva a cabo proponiendo un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en las cuales las variables dependientes son funciones únicamente del tiempo.

En los sistemas espacialmente extendidos el estado actual en un punto dado del espacio, es una función del estado del sistema en todos los puntos del espacio en un tiempo anterior. Para estudiar este tipo de sistemas desde un enfoque teórico proponemos un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se aproximen a la dinámica local del sistema. Suponiendo que las interacciones entre los elementos sean suficientemente débiles y las variaciones espaciales de los estados de los elementos constituyentes sean suficientemente suaves.

Ejemplos de este tipo de sistemas son los sistemas de reacción difusión, las ecuaciones de Navier-Stokes para la evolución del campo de velocidades de un fluido. Por lo general suelen ser muy complicados ya que carecen de soluciones analíticas por lo cual se recurre a métodos numéricos junto con un análisis perturbativo: partiendo de una solución uniforme de las soluciones, se encuentra una región de parámetros en los cuales la solución pierde estabilidad dando lugar a otra solución dependiente del espacio.

1.2. NOCIONES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

A continuación definiremos algunas nociones básicas sobre los sistemas dinámicos con la finalidad de entender mejor estos conceptos y poder emplearlos más adelante sin inconveniente alguno. [8]

Estado:

Consideremos un sistema dinámico, definido por un conjunto de variables. Decimos que el estado de un sistema dinámico es el conjunto de valores particulares de las variables que definen al sistema en un momento determinado del tiempo.

Vectores de Estado:

Son una descripción numérica de la configuración del sistema en ese momento, simple o complicado el estado de un sistema es siempre un vector.

Reglas de Evolución:

Como todo sistema real, nuestro sistema dinámico presentará una evolución de sus variables en el tiempo. Esta evolución puede seguir un cierto patrón, lo que denominaremos reglas de evolución.

Ecuaciones de Evolución :

Para trabajar matemáticamente con un sistema dinámico dado y predecir su comportamiento de forma numérica, debemos representarlo en forma de ecuaciones que ligen las diferentes variables x_i y posiblemente el tiempo. Estas representaciones pueden ser muy variadas, desde ecuaciones diferenciales de cualquier tipo a ecuaciones de recurrencia o en diferencias. Es decir, plasmamos las reglas de evolución del sistema en ecuaciones matemáticas que nos permitirán trabajar con ellas y predecir diversos comportamientos.

Sistemas Autónomos y No Autónomos:

Los sistemas dinámicos autónomos son aquellos para los cuales la variable temporal aparece explícitamente en su ecuación de evolución. Para los sistemas dinámicos no autónomos en caso contrario, la variable temporal no aparece de manera explícita en la ecuación de evolución.

Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos:

Un sistema dinámico en el cual la variable temporal presente un papel continuo se denomina sistema continuo. Cuando el tiempo es continuo consideramos que fluye como agua en un río, así que la ecuación describe cómo cambia el sistema para cualquier instante dado.

Por otra parte, si conocemos el estado del sistema sólo para determinados valores del tiempo, se dice que es un sistema discreto. Para el caso de tiempo discreto si conocemos el estado del sistema la función nos dice el estado del sistema en el siguiente instante, es decir manejaremos el tiempo como una serie de paquetes separados que se siguen como cuentas en un collar.

Linealidad y no linealidad:

Dadas las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico de orden n entonces

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t); i \in [1, n] \subset \mathbf{N}$$

decimos que se trata de un sistema lineal cuando las funciones f_i son lineales en las variables x_i . Por ejemplo, el sistema dinámico

$$\dot{x}_1 = a x_1 + b x_2$$

$$\dot{x}_2 = c x_1 + d x_2$$

La ecuación anterior puede escribirse de forma compacta introduciendo la notación vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2), \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

De esta forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

siendo \mathbf{A} la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Por otra parte, el sistema se dice no lineal cuando alguna de las funciones f_i es no lineal en las variables x_j , tal y como en el sistema dinámico:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\text{sen } x_1 \tag{1.1}$$

En este caso, las ecuaciones anteriores suelen denotarse de una forma compacta mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde hemos utilizado los vectores $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1, f_2)$. Un sistema lineal es un caso particular dentro del conjunto de los sistemas no lineales, mientras que lo contrario no se verifica.

Espacio de fases:

Consideremos un sistema dinámico definido por las variables $x_i, i = 1, \dots, n$. El espacio n -dimensional construido a partir de las variables x_i se denomina espacio de las fases del sistema. Decimos entonces que el sistema dinámico tiene dimensión u orden n . Por ejemplo, un sistema dinámico de orden 2 está compuesto por un par de variables, que podemos denotar por x_1, x_2 , como es el caso del sistema (1.1). El espacio de las fases del sistema en cuestión es, pues, el plano (x_1, x_2) . También se le conoce como espacio fásico.

Trayectoria:

La solución de un sistema dinámico de orden n , dadas unas condiciones iniciales, consiste en un conjunto de funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Dichas funciones constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio fásico, denominada trayectoria del sistema.

Diagrama de fases:

El conjunto de trayectorias del sistema en el espacio de las fases, para las posibles condiciones iniciales del sistema, se denomina diagrama de fases del sistema.

Volumen fásico:

Dado un sistema dinámico de orden n , denominamos volumen fásico a un conjunto de condiciones iniciales del sistema

Sistemas conservativos y disipativos:

Se dice que un sistema dinámico es conservativo si, dada una cierta porción de volumen fásico, al evolucionar el sistema éste es invariante. Si el volumen fásico no es invariante, esto es, es variable en el tiempo, se dice que el sistema es disipativo.

Teorema de existencia y unicidad:

TEOREMA 1.1. *“Si tenemos el campo vectorial, $\dot{u} = f(u, t)$ con $f(u, t)$ siendo $\mathbf{C}^r, r \geq 1$, en un abierto $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ y tomamos $(u_0, t_0) \in U$, entonces existe una solución $u(t, t_0, u_0)$ a esta ecuación que pasa por $u_0 = u(t, t_0, u_0)$ para $[t - t_0]$ suficientemente pequeño. Esta solución es única en el sentido que cualquier otra solución que pasa por u_0 a $t = t_0$, es la misma que $u(t, t_0, u_0)$ en el intervalo común de existencia. Además $u(t, t_0, u_0)$ es una función \mathbf{C}^r de t, t_0 y u_0 ”.*

El teorema de existencia y unicidad proporciona un importante corolario: diferentes trayectorias fásicas no se intersectan nunca. Si dos trayectorias se intersectaran, existirían dos soluciones válidas para el punto de intersección de ambas trayectorias, lo que contradice el teorema enunciado.

Campo de velocidades:

Tomemos un sistema dinámico definido por las variables x_1 y x_2 ,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

En el espacio de las fases, esto es, en el plano (x_1, x_2) podemos definir el campo vectorial dado por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Dicho campo vectorial se denomina *campo de velocidades*.

Flujo:

La introducción del campo de velocidades, definido en el punto anterior, nos permite imaginar el espacio de las fases como un fluido en movimiento, lo que hace posible utilizar una herramienta gráfica para estudiar la evolución de los sistemas dinámicos. De ahí que frecuentemente se hable del *flujo* de los puntos fásicos.

Puntos fijos:

Los puntos fijos o equilibrios son los que antes mencionamos como singularidades, tienen la característica de que la evolución dinámica se detiene ya que $\dot{u} = 0$. Definido un sistema dinámico de orden n en las variables x_1, \dots, x_n , se denominan puntos fijos a los puntos del espacio fásico que verifican

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

para todas las variables.

Describiremos los diferentes tipos de puntos fijos más relevantes que podemos encontrar en el plano de las fases (figura 1.1):

- a) **nodos** se obtienen cuando los autovalores son reales y del mismo signo, se denominan estables cuando atraen a las trayectorias cercanas, en caso contrario se denominan inestables, un caso particular es el denominado nodo simétrico o *estrella* en el cual la magnitud de los dos autovalores es la misma.
- b) **foco** se obtiene cuando los autovalores son complejos con parte real no nula, se denominan estables cuando atraen a las trayectorias cercanas, en caso contrario se denominan inestables.

- c) **centro** Se obtiene cuando los autovalores son complejos, con parte real nula. Se dice que un centro es *neutralmente estable*, debido a que no atrae ni repele las trayectorias cercanas.
- d) **punto silla** se obtiene cuando los autovalores son reales, de distinto signo, posee dos direcciones de diferente estabilidad.

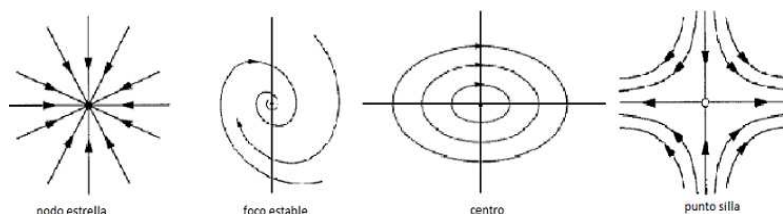


Figura 1.1. Tipos de estabilidad de un Sistema Dinámico de dos variables cerca de un Punto Fijo

Perturbación:

Denominamos perturbación de un sistema dinámico a una pequeña variación de las variables que definen su estado. A partir de esta definición, podemos decir que el sistema se encuentra en un estado (punto) estable si, tras ser perturbado, vuelve a su estado inicial; el sistema se encuentra en un estado (punto) inestable si, tras ser sometido a una perturbación, se aleja del estado inicial sin volver a él.

Estabilidad local y global:

Puede ocurrir que, encontrándose el sistema en un punto dado, se determine que el punto es estable para pequeñas perturbaciones, siendo inestable para mayores perturbaciones. Se diferencia así entre la estabilidad *local*, como en este caso, y la estabilidad *global*. Por ejemplo, un punto globalmente estable debe atraer, por definición, a todos los puntos del espacio de las fases.

Autovalores y Autovectores:

Para un sistema dinámico cuyas ecuaciones de movimiento están en notación vectorial de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, siendo \mathbf{A} la matriz que definimos anteriormente, introduciendo la solución buscada en la ecuación definitoria del sistema, y realizando ciertas manipulaciones algebraicas, obtenemos la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ donde \mathbf{I} es la matriz identidad, los *valores propios* o *autovalores* de la matriz \mathbf{A} son aquellos que anulan el polinomio en λ resultante de hallar el determinante $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$, una vez hallados los autovalores λ_1, λ_2 , que pueden ser iguales o distintos, al introducir cada uno de ellos en la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ obtenemos los *vectores propios asociados* o *autovectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente.

Un punto fijo del sistema $\dot{x} = f(x)$ para el que la matriz jacobiana no tiene autovalores nulos se denomina no degenerado, en caso contrario se denomina punto crítico degenerado.

Direcciones estable e inestable:

Las soluciones $\mathbf{x}(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{v}$, corresponden a rectas que pasan por el origen. Si el autovalor λ es positivo, en el límite $t \rightarrow \infty$ el valor de $\mathbf{x}(\infty)$ es divergente, caso en el que se dice que el vector \mathbf{v} tiene una *dirección inestable*. Por otra parte, si $\lambda_i < 0$, vemos que $\mathbf{x}(\infty) = 0$, se dice que el vector \mathbf{v} tiene una *dirección estable*.

Teorema de Hartman-Grobman:

Sea un sistema dinámico no lineal de orden n , que presenta una serie de puntos fijos. El *teorema de Hartman-Grobman* afirma que, en un entorno de un punto fijo hiperbólico, el espacio de las fases del sistema dinámico considerado y el de su linealización son *topológicamente equivalentes*. Esto implica que propiedades como la estabilidad o inestabilidad del punto considerado pueden ser analizadas en el sistema linealizado, con la garantía de que el comportamiento del sistema no lineal es equivalente si el punto es hiperbólico. La equivalencia topológica implica que existe un homeomorfismo entre los espacios fásicos de los sistemas no lineal y linealizado, y, de una forma intuitiva, que podemos obtener uno de ellos a partir de una deformación continua del otro.

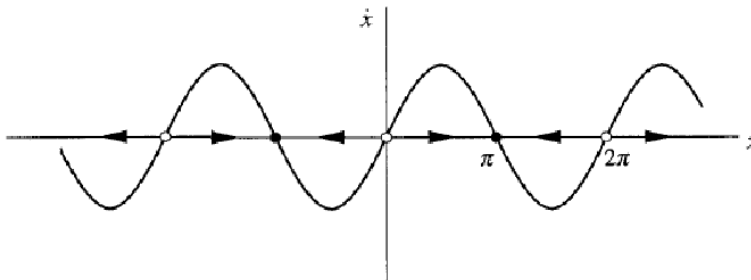


Figura 1.2. Direcciones del flujo asociado con $\dot{x} = \sin(x)$. Los puntos negros son puntos fijos *atractores*, mientras que, los blancos son *repulsores*.

A continuación ejemplificaremos algunos de los conceptos que hemos mencionado anteriormente. Consideremos por simplicidad, un sistema dinámico de orden 1, representado por la ecuación:

$$\dot{x} = f(x) = \text{sen}(x)$$

En este caso el espacio de las fases es unidimensional. Realizando la representación gráfica de \dot{x} frente a x , obtenemos la figura (1.2) en la cual podemos observar los conceptos ya mencionados, primero el concepto de *campo de velocidades* el cual está representado por flechas en el espacio fásico, constituido por el eje x .

Si imaginamos los puntos del espacio fásico como partículas de un fluido en movimiento, podemos observar que el *flujo* del sistema depende de la zona del espacio fásico que estudiemos.

Por otra parte, los *puntos fijos* del sistema son aquellos en los que \dot{x} se anula. Observamos que el flujo de los puntos fásicos se dirige hacia ciertos puntos fijos normalmente llamados *sumideros* o *puntos fijos estables*, de manera similar vemos el flujo alejándose de otros puntos fásicos denominados *fuentes* o *puntos fijos inestables*, en la figura (1.2) las fuentes se indican como puntos rellenos en blanco y los sumideros como puntos rellenos en negro.

1.3. SISTEMAS COMPLEJOS

Detrás de todo problema de formación de estructuras espacio-temporales suelen encontrarse fenómenos cooperativos subyacentes entre los componentes microscópicos del sistema. Una estructura sería entonces la manifestación colectiva de la interacción entre un gran número de partes elementales cuyo comportamiento individual puede ser relativamente simple, pero capaz de dar lugar a un comportamiento cualitativamente distinto a escala global. Este tipo de sistemas son los sistemas complejos, la formación de los patrones es llamada sinérgica.

Es importante hacer notar que para los sistemas complejos muchas de las propiedades que emergen a nivel macroscópico resultan insensibles a los detalles de los elementos constituyentes. Lo cual sugiere que la dinámica de los sistemas complejos en distintas permanece invariante o es autosimilar. Esto es un primer indicio del porque muchos sistemas aparentemente muy distintos tienen comportamientos similares.

1.4. SISTEMAS DE REACCIÓN-DIFUSIÓN

El proceso de difusión restaura el equilibrio en un campo con gradientes y tiende a desaparecer las formas: tiende a volver el medio homogéneo. Esto no ocurre siempre si la difusión se encuentra acoplada a un proceso de crecimiento. En este caso las formas son creadas y mantenidas a causa de que el proceso de difusión está constantemente retroalimentado por el proceso de crecimiento.

El caso en el que localmente se tiene más de una sustancia, población, etc. se representaría por un conjunto de ecuaciones asociadas una a una con las partes:

Variación de a = Crecimiento de a + Difusión de a + Interacción de a con otras

Variación de b = Crecimiento de b + Difusión de b + Interacción de b con otras

...

Variación de s = Crecimiento de s + Difusión de s + Interacción de s con otras

En la situación más general se tienen mezclas y una ecuación similar para cada una de las componentes con un término adicional que representa las interacciones entre cada una de las componentes. Las relaciones entre las componentes no necesariamente son de competencia o aniquilación: se presenta mutualismo, cooperación, dependencia, etc.

Los modelos de Reacción-Difusión predicen una rica variedad de formas extendidas espacialmente que van desde simples líneas paralelas hasta espirales, ondas viajeras o estructuras fractales. Una limitación, sin embargo, es que estos modelos asumen que el movimiento de los individuos o moléculas es aleatorio (dando lugar a la difusión). Esta hipótesis puede no ser correcta para animales vertebrados, por ejemplo.

De manera formal puede pensarse que si se tiene, por ejemplo, en un volumen V cierta cantidad de sustancia $\int_V x_i(\mathbf{r}, t) dv$ al tiempo t , entonces la variación temporal de esta sustancia solamente puede ser debida a flujos netos locales o a fuentes (o sumideros). De este modo se establece

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V x_i(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - \int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{s} + \int_V F_i(x_1, x_2, \dots, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.2)$$

En esta expresión \mathbf{J} representa una densidad de corriente que está asociada con un gradiente de concentración por la Ley empírica de Fick (o de Fourier) $\mathbf{J}_i \sim -\nabla x_i$. Aquí el signo negativo del término indica que el flujo va de regiones más densas a menos densas. El signo negativo en la integral $-\int_S \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{s}$ es de conservación: se refiere al flujo de sustancia a través de las paredes que encierran a V . Usando el teorema de Stokes se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V x_i(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_i d\mathbf{r} + \int_V F_i(x_1, x_2, \dots, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.3)$$

así que, para cada componente i del sistema, se cumple^{1.1}

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \mathcal{D}_i \nabla^2 x_i + F_i(x_1, x_2, \dots, \mathbf{r}), \quad (1.4)$$

en donde \mathcal{D}_i es el coeficiente de difusión para la componente x_i del sistema, y se supone constante.

Podría pensarse en una ampliación del formalismo de los SD consistente en agregar un término que permita, al resolver el sistema de ecuaciones, incluir el transporte de cada una de las variables involucradas. Este término está asociado con los procesos de difusión y consiste en un laplaciano operando sobre la variable correspondiente. En este sentido las ecuaciones de Reacción-Difusión pueden verse, también, como una generalización de la ecuación típica de difusión, pero ahora con términos reactivos, de finitud de recursos, de creación o muerte, retroalimentación, etc.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, \{\mu\}) + \mathcal{D}_1 \nabla^2 x_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, \{\mu\}) + \mathcal{D}_2 \nabla^2 x_2 \\ &\dots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t} &= F_m(x_1, x_2, \dots, x_m, \{\mu\}) + \mathcal{D}_m \nabla^2 x_m. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Los Sistemas de Reacción-Difusión (SRD) resultan ser de gran interés y existen modelos para una gran cantidad de sistemas de en áreas como la Química, la Física, la Economía, Fisiología o la Medicina. Esto, además de la dinámica simple, permite reproducir patrones espaciales mostrados por diferentes sistemas, por ejemplo, las manchas de la piel de los animales, la distribución de vegetación o de plancton, los patrones que se observan al hacer una mezcla o implementar una reacción química o modelar la construcción de nano y microestructuras (como la producción de microlentes sobre sustratos). El modelo de Hardenberg está íntimamente vinculado con este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales.

1.5. DINÁMICA POBLACIONAL

La dinámica poblacional es un área clásica de la matemática aplicada que se remonta a principios del siglo XX, y que ha dado lugar a avances tan significativos como la teoría de bifurcaciones o el caos.

1.1. Cuando el tiempo aparece explícitamente en las funciones F_k , siempre puede ser eliminado definiendo una nueva variable $x_{m+1} = t$, de modo que se tiene una nueva ecuación en el sistema: $\dot{x}_{m+1} = 1$.

Un modelo poblacional es un sistema dinámico, compuesto por una o varias ecuaciones diferenciales, que pretende predecir la evolución temporal en el número de individuos (o su densidad espacial) para una o un conjunto de especies. Para ello se parte de unas determinadas condiciones iniciales, y se asumen unas reglas que representan la interacción de las especies entre sí y su relación con el ecosistema o medio en que habitan, en términos de los recursos necesarios para su supervivencia. En cualquier ecosistema existe un gran número de especies que compiten por unos recursos necesariamente limitados, todas ellas con el mismo objetivo que es evitar la extinción y es gracias a esta imperiosa necesidad que cada especie interactúa con las demás. Esta interacción puede tener distintos grados de intensidad, puede ser beneficiosa para unas especies y perjudicial para otras. Por lo tanto un modelo poblacional totalmente general debe tener en cuenta todas estas interdependencias, tendría tan extraordinaria complejidad que estaría lejos del alcance de los métodos analíticos y computacionales actuales.

1.5.1. Modelos Poblacionales

A continuación se brinda una pequeña introducción a diferentes modelos poblacionales que se han utilizado a lo largo de la historia, para posteriormente concentrarse en los modelos Lotka-Volterra, de los cuales los modelos competitivo y cooperativo son los más relevantes para este trabajo.

1.5.1.1. Modelo Exponencial

Resulta conveniente estudiar en primer lugar los modelos poblacionales con una única especie, es decir, aquellos en los que la especie estudiada no presenta interacciones fuertes con ninguna otra especie en particular del ecosistema. Por ejemplo el modelo exponencial Thomas Malthus a finales del siglo XVIII para poblaciones humanas, considerando que en la actualidad el ser humano carece de depredadores naturales y su supervivencia depende de la abundancia o escasez de recursos en el ecosistema global terrestre. El modelo parte de la suposición de que el ritmo de aumento de la población de un país es directamente proporcional a su población en cada instante.

$$\frac{dx}{dt} = r x \quad (1.6)$$

siendo x la población total de individuos en un instante determinado t , y r una constante de proporcionalidad. Si $r > 0$ la ecuación modela el crecimiento de una población, y si $r < 0$ se modela su decaimiento hasta la extinción. Por integración directa de la ecuación se obtiene:

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (1.7)$$

donde $x_0 = x(0)$ es la población de la especie considerada en el instante $t = 0$. También es posible considerar que $x(t)$ es la densidad de individuos de esa especie en función del tiempo, considerando fija la región espacial ocupada por esa población. Es evidente que el modelo descrito en la ecuación (1.7) es demasiado simple para describir la evolución de una población, pues no se tienen en cuenta factores como las tasas variables de natalidad y mortalidad, envejecimiento, emigración e inmigración, disponibilidad de recursos, etc. Sin embargo sigue siendo de interés para el estudio de pequeñas poblaciones (no necesariamente humanas) durante periodos cortos de tiempo, tales como cultivos de bacterias o animales no sujetos a depredación.

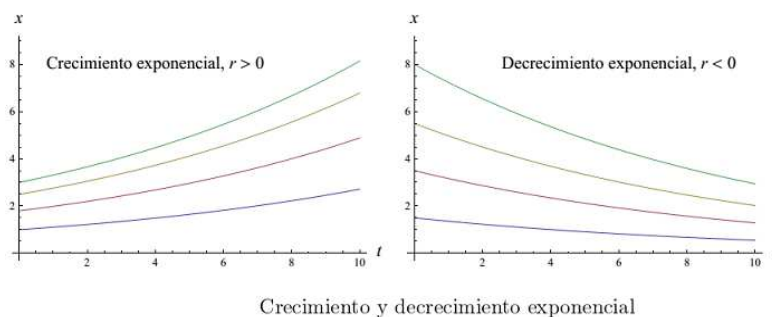


Figura 1.3. Soluciones de la ecuación (1.6) para $r > 0$ y $r < 0$ respectivamente.

1.5.1.2. Modelo logístico

Como se mencionó en la sección anterior el modelo exponencial no es adecuado para reflejar la dinámica de una población, ya que el crecimiento exponencial no puede continuar de manera ilimitada, naturalmente el crecimiento de las especies tiene factores inhibidores. Por esto fue necesario realizar modificaciones al modelo exponencial (ecuación (1.6)) estas modificaciones consisten en sustituir la constante de proporcionalidad r por una función $f(x)$ que decrece al aumentar x , de forma que un aumento de población penaliza los aumentos de población sucesivos, frenando el crecimiento ilimitado de $x(t)$. La ecuación diferencial en este caso es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

El matemático belga P. F. Verhulst en el siglo XIX introdujo uno de los modelos más sencillos de este tipo de ecuación llamada logística, que toma la forma:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x \quad (1.8)$$

donde $r > 0$ es una constante que recibe el nombre de tasa de crecimiento intrínseca, es decir, la tasa de crecimiento en ausencia de factores limitantes y $K > 0$ es la **capacidad límite o de soporte**, también conocido como nivel de saturación que es la máxima población $x(t)$ que se puede sostener a medida que avanza el tiempo.

Se observa que en la ecuación (1.8) para valores pequeños de x el crecimiento de la especie sigue una pauta de tipo exponencial, pero cuanto más grande es la población $x(t)$ en un instante dado la población tiende asintóticamente hacia el valor de saturación. Algunas poblaciones siguen aproximadamente un modelo logístico, el cual no es consecuencia de ninguna ley fundamental, sino que es un modelo asumido *a priori*, partiendo de una tasa de cambio intrínseca que es lineal y decreciente. En general se utilizan modelos más sofisticados y robustos, que son válidos para conjuntos de poblaciones en condiciones más generales.

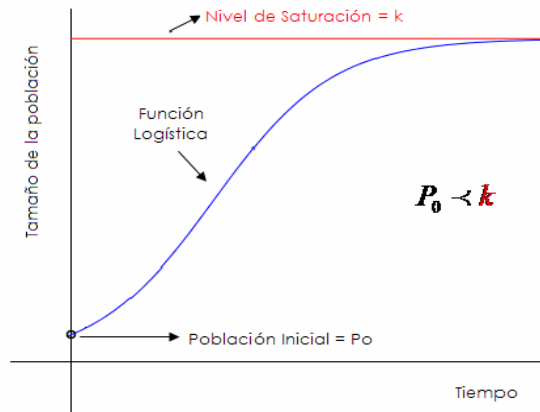


Figura 1.4. Solución de la ecuación logística (Modelo de Verhulst).

A continuación se mencionan algunas variaciones del modelo logístico, estas modificaciones se aplican a condiciones las cuales se pueden investigar a profundidad en textos de estadística, matemática, biología, etc.

- **Modelo logístico con umbral:** Introduciendo un elemento más de sofisticación en la ecuación (1.8) se puede considerar que determinadas especies necesitan un valor umbral, o masa crítica, en su número de individuos para poder subsistir. Es decir si el número de individuos de esta especie se encuentra por debajo del valor umbral, por ejemplo debido a caza, la especie se extingue aunque la caza se suprima por completo.
- **Modelo logístico con faenado:** El faenado o cosecha se entiende como la supresión de un cierto número de individuos de una población, a un ritmo determinado, para destinarlos a consumo u otros usos. Este modelo es útil para modelar poblaciones en ámbitos como la ganadería, agricultura, acuicultura, caza controlada, pesca, etc.

- **Modelo logístico discreto:** Existen especies para las cuales la generación progenitora no llega a coincidir en el tiempo con su descendencia. Por ejemplo una especie de insectos que se reproduce por medio de huevos, de tal forma que todos los insectos de la generación progenitora mueren antes de que los huevos eclosionen. Esto nos permite plantear modelos de crecimiento discreto, gobernados por ecuaciones en diferencias.

1.6. MODELOS LOTKA-VOLTERRA

El matemático y biólogo italiano Vito Volterra (1860 – 1940), que nació en Ancona, y el matemático y físico de nacionalidad estadounidense Alfred J. Lotka (1880 – 1949), que nació en Lemberg, en el imperio austro-húngaro, hoy Ucrania, son los pioneros en la investigación de lo que hoy se conoce como Biología Matemática. Ambos trabajaron a la vez, pero de forma independiente, en el modelo citado. Este modelo es fundamentalmente fruto del trabajo de Volterra, al final de su vida entre 1924 a 1938. El modelo lleva también el nombre de Lotka quien trabajó en problemas de este tipo entre 1920 a 1939.

Los trabajos de Lotka-Volterra en Biología Matemática, han servido para enriquecer a ambas y supusieron un gran avance en la aplicación de las Matemáticas al campo de la Biología. Antes de las investigaciones de Volterra y Lotka los estudios realizados eran principalmente biométricos. [7]

1.6.1. Modelo Predador-Presa

El modelo predador-presa de Volterra-Lotka, es un modelo matemático que describe la lucha constante por la supervivencia entre dos especies que viven en un mismo hábitat siendo una de ellas el alimento "presa" de la otra "depredadora" [9]. Representamos por x e y el número (o densidad) de individuos de las especies presa y depredadora respectivamente. El modelo se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) \qquad \frac{dy}{dt} = y(-c + dt) \qquad (1.9)$$

donde a, b, c, d son constantes positivas: a mide la tasa de crecimiento de la presa, c la mortalidad del depredador, respectivamente b y d son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies.

El significado del modelo se resume como sigue:

- En ausencia de depredadores, $y = 0$, la ecuación (1.9) para la presa se reduce a $\frac{dx}{dt} = ax$, siendo a la constante de crecimiento intrínseca para x dando lugar a un crecimiento exponencial; por lo cual es necesario realizar modificaciones a la ecuación (1.9) que eviten la explosión poblacional.
- En ausencia de presas, $x = 0$, la ecuación (1.9) para el depredador toma la forma $\frac{dy}{dt} = -cy$ que da lugar a un decrecimiento exponencial y posterior extinción de la población predatora. c es la tasa de decrecimiento intrínseca de y .
- La constante $b > 0$, que corresponde con el término cruzado $-bxy$ en la primera parte de la ecuación (1.9), da cuenta de que las interacciones entre las dos especies, que se suponen proporcionales al producto xy de ambas poblaciones, son desfavorables para la presa (de ahí el signo negativo).
- Análogamente, la constante $d > 0$ corresponde al término cruzado dxy en la segunda parte de la ecuación (1.9) pone en evidencia que los encuentros entre individuos de ambas especies son favorables al depredador.

Otra forma de interpretar el sistema (1.9) es por medio de las tasas de crecimiento per cápita. En efecto

$$\frac{dx}{dt} \text{ y } \frac{dy}{dt}$$

son las tasas de crecimiento absolutas para presa y depredador (x e y respectivamente). Por tanto

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \text{ y } \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$$

son las tasas de crecimiento per capita (es decir, por número de individuos) para las dos especies. Así, el sistema (1.9) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= a - by \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= -c + dx \end{aligned}$$

en la que los miembros de la derecha de cada ecuación son funciones lineales en las variables x e y .

En general, un sistema que modela la interacción de dos o más especies, sólo tiene sentido físico si x e y son funciones no negativas del tiempo. Esto nos lleva a estudiar trayectorias que se encuentren íntegramente en el primer cuadrante del mapa de fase.

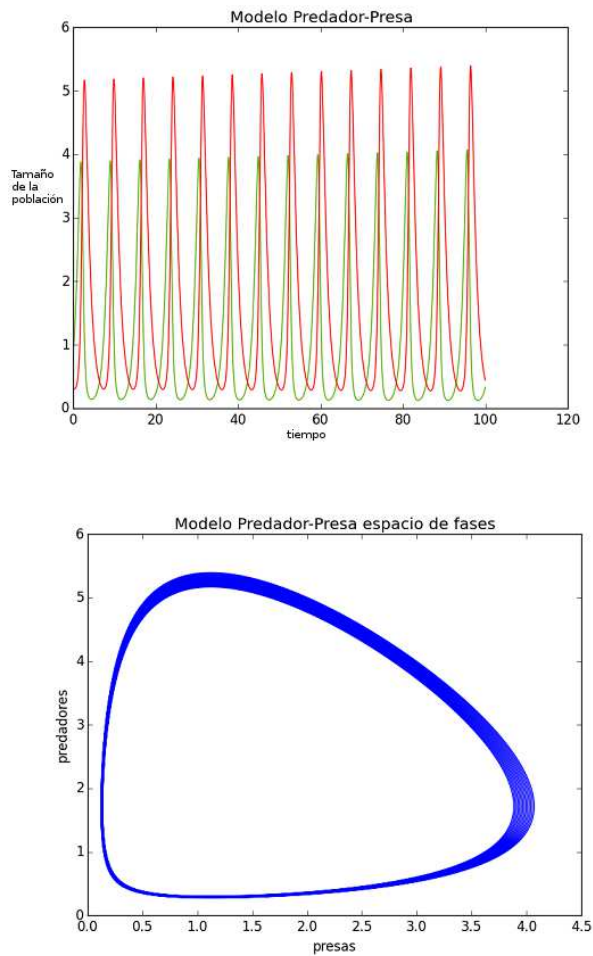


Figura 1.5. Solución del modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Arriba las dos poblaciones como función del tiempo, abajo el espacio fásico de las dos poblaciones (Aquí las curvas no se superponen del todo debido al error numérico asociado con el método de Euler).

1.6.2. Modelo Competitivo

La competencia ocurre cuando algunos organismos sufren una reducción en su fecundidad, supervivencia o crecimiento como resultado de la explotación de los recursos o de la interferencia por parte de otros organismos. Cuando es por y, por lo tanto, ocurre a través de, un recurso la competencia solo puede existir si ese recurso se encuentra en cantidad limitada. De modo que, dos especies que explotan recursos muy similares no competirán si dichos recursos son super-

abundantes. En el tema presente examinaremos interacciones competitivas que ocurren entre organismos de especies distintas, es decir, interespecíficas. En claro contraste con lo que sucede con la competencia intraespecífica, no puede decirse que la competencia interespecífica tienda a regular el tamaño de las poblaciones, sino a causar la extinción de las poblaciones implicadas en ella. No obstante, en tanto que este tipo de interacciones también tiene consecuencias para el tamaño de las poblaciones involucradas en ellas, si que pueden ser consideradas un factor importante para su regulación.

El modelo clásico de Lotka-Volterra considera dos especies, ambas están compitiendo por el mismo recurso y la cantidad disponible de dicho recurso es limitada. De esta manera se omiten otras variables como depredadores, fuentes adicionales de recursos, cambios estacionales, etc. Cada especie crecerá hasta su máxima capacidad de carga en ausencia de la otra. Al darse encuentros entre las especies es cuando comienza la competencia por los recursos y estos encuentros tenderán a disminuir el índice de crecimiento de las especies, este índice de decaimiento poblacional afectará más a una especie que otra.

Consideramos ahora que en un terreno tenemos una población inicial de dos especies x e y que comparten un determinado hábitat, y que ambas especies se alimentaran de un único recurso disponible de manera limitada (alimento, agua, luz, espacio, etc.). En este caso el crecimiento de x se ve desfavorecido por y , recíprocamente el crecimiento de y se ve inhibido por la presencia de x . Primero consideraremos que ambas especies tienen un crecimiento logístico con competencia intraespecie, posteriormente se producirán los encuentros entre ambas especies y comenzará la competencia inter-especie por el alimento. Obtenemos por tanto el siguiente modelo:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \quad (1.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(d - ex - fy) \quad (1.11)$$

Las constantes a, b, c, d, e, f son positivas al igual que en el modelo anterior donde a y d miden la tasa de crecimiento de las especies. Las constantes b, f son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento. Mientras que las constantes c, e son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra especie, es decir, son una medida de la competencia.

Si efectuamos el análisis correspondiente de este sistema vemos que sus puntos fijos [20]son:

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0), & S_2 &= \left(0, \frac{d}{f}\right), \\ S_3 &= \left(\frac{a}{b}, 0\right), & S_4 &= \left(\frac{fa - dc}{bf - ec}, \frac{db - ea}{bf - ec}\right) \end{aligned}$$

debemos distinguir dos casos:

1) C_1 , C_2 y C_3 son negativas.

2) C_1 , C_2 y C_3 son positivas.

donde $C_1 = fa - dc$, $C_2 = bf - ec$, y $C_3 = db - ea$

1) En el caso en el que las constantes C_1 , C_2 y C_3 son negativas, vemos que las singularidades $(S_i)_{i=1}^4$ tienen el siguiente caracter.

Para $S_1 = (0, 0)$

$$\mathcal{L}(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

es un punto inestable ya que a y d son positivas.

Para $S_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right)$ se tiene que

$$\mathcal{L}(S_2) = \begin{pmatrix} a - c\frac{d}{f} & 0 \\ -\frac{d}{f}e & -d \end{pmatrix},$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{-d, \frac{fa-dc}{f}\right\}$, con $C_1 = fa - dc < 0$ por lo tanto ambos autovalores son negativos y por lo tanto S_2 es un punto asintóticamente estable.

Para $S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$ se tiene, ahora,

$$\mathcal{L}(S_3) = \begin{pmatrix} -a & -c\frac{a}{b} \\ 0 & d - e\frac{a}{b} \end{pmatrix},$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{-a, \frac{db-ea}{b}\right\}$, con $C_3 = db - ea < 0$ por lo tanto ambos autovalores son negativos y por lo tanto S_3 es un punto asintóticamente estable.

Para $S_4 = \left(\frac{fa-dc}{bf-ec}, \frac{db-ec}{bf-ec}\right)$,

$$\mathcal{L}(S_4) = \begin{pmatrix} b\frac{fa-dc}{-bf+ec} & -\frac{fa-dc}{bf-ec}c \\ -e\frac{-db+ea}{-bf+ec} & -f\frac{-db+ea}{-bf+ec} \end{pmatrix} = \frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} bC_1 & cC_1 \\ eC_3 & fC_3 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1\right)}}{C_2} \quad y$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 - \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1\right)}}{C_2} ,$$

por lo tanto es un punto de silla. En este caso vemos que una de las dos especies se extingue. Para este caso se verifica la relación: $ce > bf$.

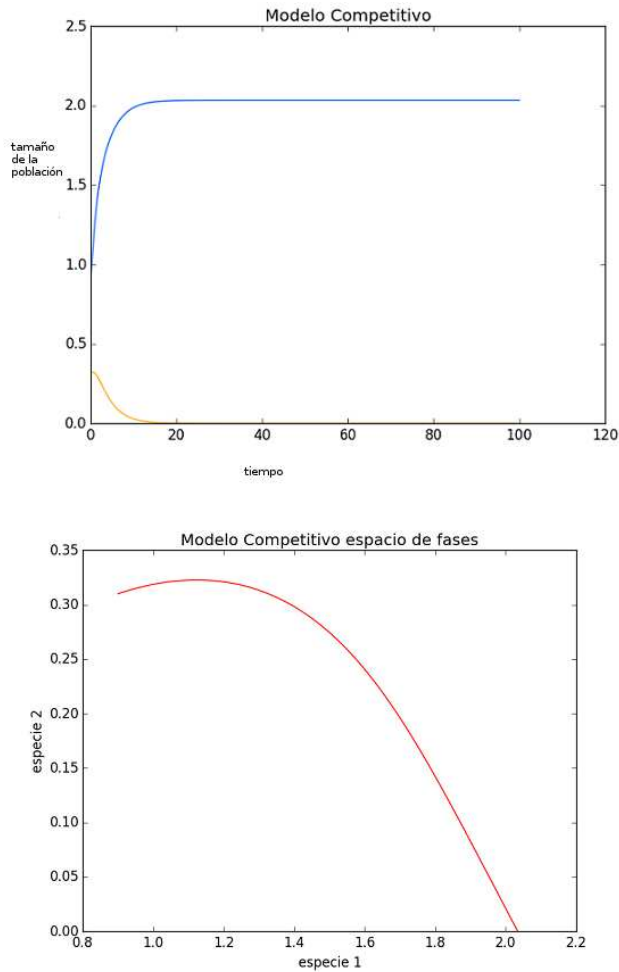


Figura 1.6.

2) En el caso en el que las constantes C_1 , C_2 y C_3 son positivas, realizamos el mismo análisis que cuando son negativas y obtenemos:

$S_1 = (0, 0)$ y

$$\mathcal{L}(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

que es un punto inestable ya que a y d son positivas.

$S_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right)$ y

$$\mathcal{L}(S_2) = \begin{pmatrix} a - c\frac{d}{f} & 0 \\ -\frac{d}{f}e & -d \end{pmatrix},$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{-d, \frac{fa-dc}{f}\right\}$, con $C_1 = fa - dc < 0$ por lo tanto uno de los autovalores es positivo, mientras que el otro negativo, entonces S_2 es un punto silla. El autovector asociado a $\lambda = -d$ es $V_\lambda = \{(0, 1)\}$ que genera la subvariedad estable, mientras que el autovector asociado al autovalor positivo: $\lambda = \frac{af-cd}{f}$ es $V_\lambda = \left\{-\frac{1}{de}(df + af - cd), 1\right\}$ que genera la subvariedad inestable.

Para $S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$:

$$\mathcal{L}(S_3) = \begin{pmatrix} -a & -c\frac{a}{b} \\ 0 & d - e\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{-a, \frac{db-ea}{b}\right\}$, con $C_3 = db - ea > 0$ por lo tanto uno de los autovalores es positivo mientras que el otro es negativo, de esta forma S_3 es un punto de silla. El autovector asociado a $\lambda = -a$ es $V_\lambda = \{(1, 0)\}$ que genera la subvariedad estable, mientras que el autovector asociado al autovalor positivo: $\lambda = \frac{bd-ea}{b}$ es $V_\lambda = \left\{\left(1, -\frac{1}{ac}(db - ea + ab)\right)\right\}$ que genera la subvariedad inestable.

Para $S_4 = \left(\frac{fa-dc}{bf-ec}, \frac{db-ea}{bf-ec}\right)$:

$$\mathcal{L}(S_4) = \begin{pmatrix} b\frac{fa-dc}{-bf+ec} & -\frac{fa-dc}{bf-ec}c \\ -e\frac{-db+ea}{-bf+ec} & -f\frac{-db+ea}{-bf+ec} \end{pmatrix} = -\frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} bC_1 & cC_1 \\ eC_3 & fC_3 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1\right)}}{C_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 - \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1\right)}}{C_2},$$

por lo tanto es un punto asintóticamente estable. En este caso vemos que las dos especies coexisten. Para este caso se verifica la relación: $ce < bf$.

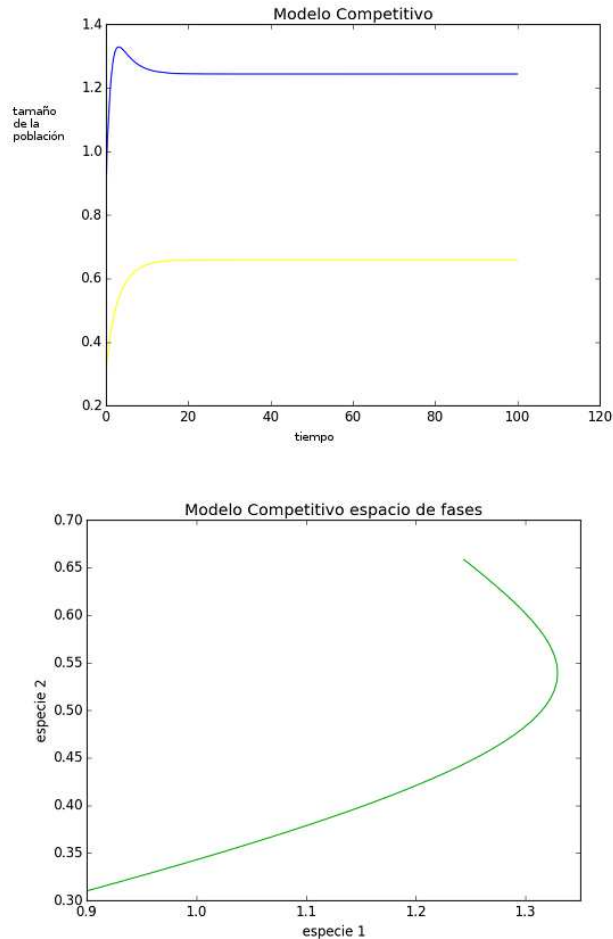


Figura 1.7. Coexistencia de dos especies

Este modelo general de competencia entre especies queda resumido de la siguiente manera: cuando $ce > bf$, no es posible la coexistencia de las dos especies y por lo tanto una de ellas debe desaparecer; mientras que si se cumple la relación $ce < bf$, vemos que ambas especies pueden coexistir.

1.6.3. Modelo Cooperativo

El modelo cooperativo, se basa en una interacción simbiótica de las especies donde se ven favorecidas por su mutua interacción. En el caso de dos especies las ecuaciones (1.10) y (1.11) toman la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx + cy) \quad \frac{dy}{dt} = y(d + ex - fy). \quad (1.12)$$

Las constantes a, b, c, d, e, f son las mismas que en el modelo competitivo (ecuaciones 1.10 y 1.11) pero en la ecuación (1.12) se cumple la relación $c e < b f$, donde los terminos intraespecie b, f son mayores que los terminos intraespecie c, e . Es decir, que la depredación es mayormente intraespecie, entonces vemos que ambas especies pueden coexistir y que esta interacción resulta benéfica para ellas. A largo plazo el comportamiento de la ecuación (1.12) se ajusta a las limitaciones físicas.

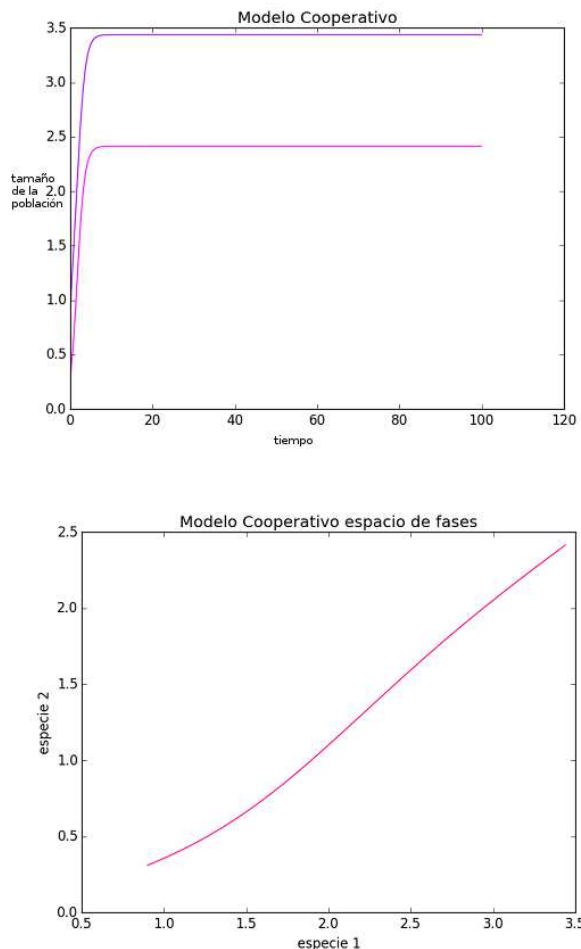


Figura 1.8. En el modelo cooperativo cada especie contribuye a la existencia de la otra.

CAPÍTULO 2

EL MODELO DE HARDENBERG: EXTENSIÓN A MÁS ESPECIES.

2.1. EL MODELO DE HARDENBERG.

La formación de patrones es un fenómeno ubicuo en la naturaleza, de donde las ondulaciones en desiertos de arena, las calles de nubes en la atmósfera o los dibujos en el pelaje de cebras y leopardos son sólo algunos ejemplos. En el contexto de la Ecología, las interacciones entre seres vivos y su entorno también pueden conducir a la aparición de patrones. De este modo, encontramos formaciones como islas de coral alineadas con la dirección predominante de las corrientes, laberintos de plantas vasculares en turberas (Rietkerk et al., 2004) o bandas de árboles separadas por lenguas de nieve en las Montañas Rocosas (Rietkerk y van de Koppel, 2008). En particular, en las regiones áridas y semiáridas donde el agua es un recurso escaso, la distribución de la vegetación en forma de *manchas*, *laberintos* o *huecos* entre otros supone un mecanismo de supervivencia ante condiciones ambientales adversas. Por ejemplo, el agrupamiento en forma de parches permite una mayor concentración de agua por infiltración y una menor pérdida por evaporación debido a las sombras. Las similitudes entre patrones de distinta naturaleza (universalidad), como pueden ser los parches de vegetación y las manchas en la piel de los leopardos, incita a pensar que son producidas por las mismas inestabilidades (Meron 2012).

El modelo de Hardenberg permite con sencillez y eficacia la obtención de los distintos tipos de patrones de vegetación que se desarrollan en suelo llano para diferentes condiciones de humedad. Originalmente este modelo se desarrolló pensando en las zonas áridas, donde naturalmente los patrones de vegetación toman distintas formas como “manchas”, “bandeados” y “laberintos”. El modelo predice este comportamiento con éxito, pero también predice correctamente la distribución de los patrones de vegetación para condiciones de alta humedad tales como los patrones de “punto”, “raya”, y “agujero”.

El modelo de Hardenberg involucra dos variables: la densidad de vegetación o biomasa n y humedad del suelo w . La evolución temporal de estas dos variables responde a las ecuaciones:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n - n^2 - \mu n + \nabla^2 n \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - nw^2 + \delta \nabla^2 (w - \alpha n) + v \frac{\partial (w - \beta n)}{\partial x} \quad (2.2)$$

En este modelo para (2.1) el termino $\frac{\gamma w}{1+\sigma w}$ considera la tasa de crecimiento la de vegetación que es dependiente de w . De forma similar a la mortandad de la vegetación le corresponde el término $-\mu n$, para ($\mu > 0$) y para la competencia intraespecie por los recursos limitados figura el término $-n^2$. Finalmente, el laplaciano $\nabla^2 n$ es referente a la diseminación de la biomasa por medio de un proceso de difusión.

En lo que respecta a la ecuación (2.2) p se refiere a una fuente de humedad en el suelo, en el caso de este modelo en particular es la precipitación anual y se ve reducida por 2 factores: la transpiración (modelada como $-nw^{2.1}$); y la evaporación con el termino $-(1-\rho n)w$ donde la vegetación reduce esta evaporación^{2.2}, esto se debe a que la vegetación ofrece sombra, la cual aumenta la acumulación de agua en el suelo facilitando así su infiltración y reduciendo la evaporación en un factor de $(1-\rho n)$ con ($\rho > 0$).

A diferencia de otros modelos que consideran una capa superficial de agua, suponen que el agua precipitada se infiltra por completo. El término de la difusión en (2.2) se debe a la simplificación asumida para la ley de Darcy en la que el flujo de agua es proporcional al gradiente de w , y el factor en $-\alpha n$ tiene en cuenta la absorción del agua en las raíces [21]. Considerando la ecuación de continuidad, la derivada temporal del flujo devuelve el laplaciano presente en (2.2).

En el último término de la ecuación.(2.2) ($v\frac{\partial(w-\beta n)}{\partial x}$), v es la velocidad de descenso superficial del agua hacia la dirección x cuando se supone una pendiente en el terreno, y el término derivado parcial significa la difusión de humedad en esta dirección, asumiendo que la infiltración aumenta en áreas cubiertas de vegetación (término en $-\beta n$) y que es constante. En la figura (2.1) se muestra la gráfica para este modelo.

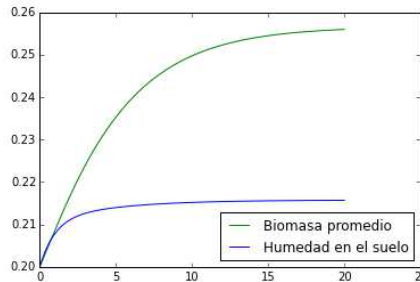


Figura 2.1.

2.1. Debe su forma a que es un ajuste aplicado por Von Hardenberg, basado en las diferentes curvas de transpiración que aparecen en la referencia[11]

2.2. En [16] se determino que la biomasa siempre tiende a .35, por lo cual no alcanza valores negativos.

En [16] se estableció que dadas ciertas condiciones iniciales la dinámica del modelo no puede romper la configuración espacial inicial. Que es precisamente lo que buscamos ya que para este trabajo se enfoca en los cultivos agrícolas, donde es el agricultor quien designa la configuración espacial inicial a través de la siembra en los surcos. Otra ventaja es que en estos cultivos se pueden controlar también las condiciones de humedad a través del riego.

2.2. EXTENSIÓN A MÁS ESPECIES

En los primeros dos capítulos se introdujeron varios conceptos que son necesarios para realizar la extensión a mas especies del modelo de Handemberg. Primero iniciamos con un poco de historia de la dinámica, una introducción a los sistemas dinámicos y sus nociones básicas, con estos conceptos pasamos a la dinámica poblacional, especialmente a los modelos Lotka-Volterra, siendo los más destacados para este trabajo los de competencia y cooperación. Lo ideal sería encontrar 2 especies vegetales cuyo desarrollo sea como el del modelo cooperativo, donde ambas se benefician por su mutua interacción, como se menciona en el planteamiento existen casos registrados como los policultivos de maíz y frijol. Pero el objetivo de este trabajo es crear un modelo mas general, como se observo el modelo cooperativo es un caso especial del modelo competitivo, por lo cual es el modelo poblacional competitivo el que se presenta con mayor detalle, ya que es el empleado para aplicar la extensión a mas especies.

El sistema dinámico que se estudia es un modelo computacional que simula el desarrollo de 2 especies vegetales en un medio cuasi-homogéneo (un cultivo controlado), con el objetivo de analizar este sistema variamos las condiciones iniciales para reflejar diferentes condiciones que pueden enfrentar en un cultivo real.

2.2.0.1. Modificando el modelo original

En la ecuación (2.1) se reemplaza n por n_1 y n_2 , es decir ya no se analiza una sola densidad de biomasa, sino la densidad de biomasa de ambas especies; no se altera el termino n^2 ya que este hace referencia únicamente a la finitud de recursos (como en el modelo de Verhulst o logístico), a su vez se desprecia el término $\nabla^2 n$ que se refiere a la diseminación de la biomasa, lo cual no es relevante para este estudio, ya que como se mencionó antes en un cultivo se selecciona la distribución espacial de las especies vegetales. El término $-\mu n$ que se refiere a la muerte de la vegetación, carece de interés en un cultivo donde la fecha de cosecha es controlada por el agricultor, de manera similar el segundo término es sustituido por los términos $\pm \mu_i n_i n_j$, con esto se obtienen 2 logísticas acopladas por un término cruzado que define mutualismo o competencia, según el signo que se le asigne.

Para la ecuación (2.2) también sustituiremos n y descartaremos los dos últimos términos de la ecuación referentes a la difusión de biomasa y a la pendiente en el terreno respectivamente, aplicando el mismo criterio al tratarse de un cultivo. Aplicando estas consideraciones obtenemos las ecuaciones modificadas:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n_1 - n_1^2 \pm \mu_1 n_1 n_2 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1 + \sigma w} n_2 - n_2^2 \pm \mu_2 n_1 n_2 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - (\rho_1 n_1 + \rho_2 n_2))w - (n_1 + n_2) w^2. \quad (2.5)$$

En nuestro modelo la ecuación (2.1) de Hardenberg es reemplazada por las ecuaciones (2.3) y (2.4), a su vez modificando la ecuación (2.2) se obtiene la ecuación (2.5). Para representar la pérdida de la humedad del suelo. El modelo original de Hardenberg incluye el término de evaporación $-(1 - \rho n)w$ y, en nuestro modelo, este término es reemplazado por $-(1 - (\rho_1 n_1 + \rho_2 n_2))w$ ^{2,3} donde podemos variar los coeficientes de reducción de evaporación cada especie ρ_1 , ρ_2 y estudiar los diferentes casos resultantes de estas modificaciones.

Los coeficientes (ρ_1, ρ_2) se refieren a la forma de la hoja de cada una de las especies vegetales, así que se pueden modificar aumentando o reduciendo el tamaño de la misma, lo cual tendrá un impacto directo en la humedad disponible para las plantas.

2.3. Basado [16] en se multiplican por .35 los terminos $\rho_1 n_1$ y $\rho_2 n_2$ respectivamente.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el análisis de estabilidad realizado al modelo poblacional competitivo de Lotka-Volterra se concluyó que la extinción o convivencia de las especies que comparten un hábitat y compiten por los recursos queda determinada por la relación entre sus constantes de depredación interespecie e intraespecie. En el modelo de Hardenberg los recursos por los cuales compiten las especies vegetales son reducidos a la humedad del suelo y la distribución de la biomasa. Por lo cual se puede observar que las ecuaciones (2.1) y (2.2) fueron modificadas bajo estos parámetros obteniendo las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) para incluir esta competencia.

A continuación se presentan los resultados del modelo computacional desarrollado a lo largo de este trabajo de tesis. Se tomaron diferentes condiciones iniciales para reflejar de manera realista la interacción entre dos especies vegetales.

Se realizaron varias combinaciones de nuestras condiciones iniciales, el análisis de estos resultados se dividirá en varios casos, donde se consideran diferentes valores para ρ y w . Ya que el modelo se centra en la competencia por la humedad del suelo como recurso fundamental, a continuación se muestran inicialmente los resultados para los casos donde w varía en el tiempo y distintos valores de ρ como $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 > \rho_2$ y $\rho_1 < \rho_2$.

Nos concentraremos en los casos donde se tiene w constante y los diferentes valores de ρ para ellos, ya que al ser un cultivo este parámetro se puede controlar y es de esperarse que así sea, pero se incluyen ambos para considerar cultivos donde el riego no sea controlado, como las cosechas estacionales.

Para el análisis consideraremos las variantes términos $\pm\mu_i n_i n_j$ en las ecuaciones (2.3) y (2.4) ya que estos son los que generan el comportamiento competitivo o cooperativo en nuestro modelo según su signo.

Para el modelo se utilizaron dos métodos de corrección de error, el método de Euler y el método de Runge-Kutta ambos para 10000 pasos, pero no se encontraron diferencias en los resultados como se puede apreciar en la figura (3.1). A la izquierda se muestra el modelo de Hardenberg utilizando el método de Euler y a la derecha el modelo de Hardenberg calculado utilizando el método de Runge-Kutta, como se puede apreciar no se encuentra diferencia entre los métodos aplicados.

Se tomaron las siguientes condiciones iniciales $w_i = 0.5$, $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 1$, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.6$, que fueron variando según el caso analizado.

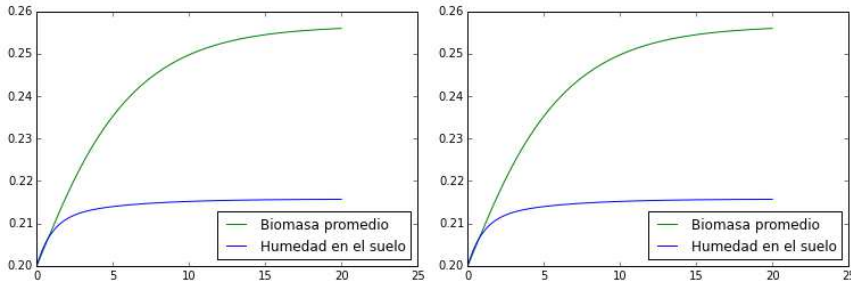


Figura 3.1. Las gráficas muestran el modelo original de Von Hardenberg, utilizando 2 métodos de corrección de error a la izquierda aplicando el método de Euler y a la derecha el método de Runge-Kutta.

Caso 1: w que varía en el tiempo

Para $\rho_1 < \rho_2$ y $\mu_1 < \mu_2$

Comenzamos mostrando el modelo original de Hardenberg para cada una de las especies en la figura (3.2), a la izquierda la especie 1 y a la derecha la especie 2

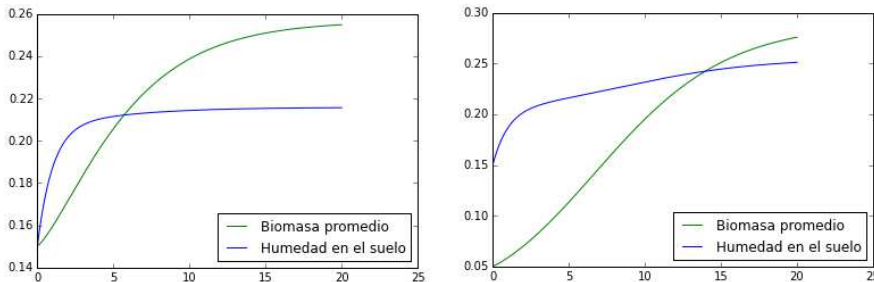


Figura 3.2. Se muestran los resultados del modelo de Von Hardenberg, a la izquierda para la especie 1 con $w_i = 0.5$, $\rho_1 = 0.5$ y $\mu_1 = 0.2$, a la derecha la especie 2 con valores $\rho_2 = 1$ y $\mu_2 = 0.6$

Ahora continuamos con la expansión del modelo de Hardenberg a más especies para los valores $w_i = 0.5$, $\rho_1 = 0.5$, $\mu_1 = 0.2$, $\rho_2 = 1$, $\mu_2 = 0.6$ en la figura (3.2) para competencia mostrando **a)** cuando en ambas especies la depredación interespecie es dominante, **b)** cuando en la especie 1 la depredación interespecie es dominante pero no lo es en la especie 2, por último **c)** muestra el caso inverso es la especie 2 quien sufre de mayor competencia interespecie.

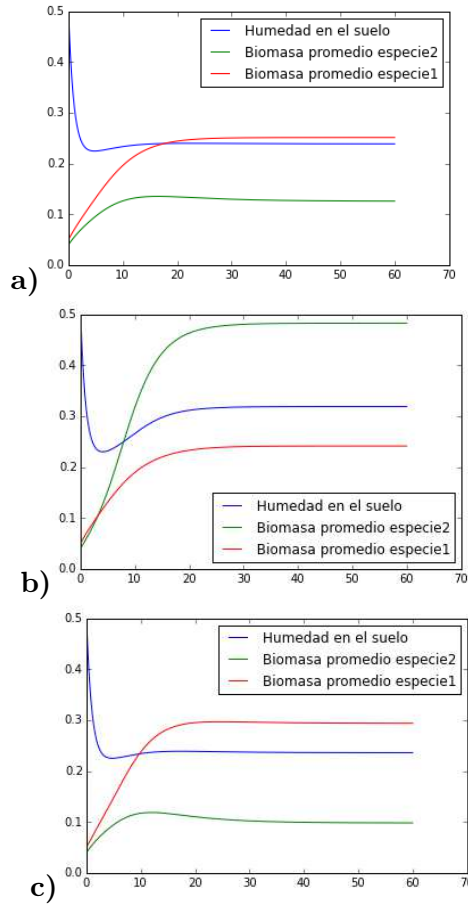


Figura 3.3. Se muestran los resultados para los valores de $w_i = 0.5$, especie1 $\rho_1 = 0.5$ y $\mu_1 = 0.2$, especie2 $\rho_2 = 1$ y $\mu_2 = 0.6$. En a) los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

Para el modelo se incluye en la figura(3.4) los resultados en el caso de mutualismo en las especies.

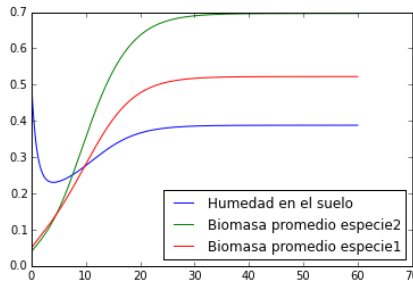


Figura 3.4. Con valores de $w_i = 0.5$, especie1 $\rho_1 = 0.5$ y $\mu_1 = 0.2$, especie2 $\rho_2 = 1$ y $\mu_2 = 0.6$. los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos positivos.

Para $\rho_1 = \rho_2$; $\mu_1 = \mu_2$

En la figura (3.5) se muestra el modelo para competencia interespecie para los valores $w_i = 0.5$, $\rho_1 = \rho_2 = 0.5$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.6$, el gráfico superior es el caso en el que ambas especies entran en competencia interespecie. El gráfico central es el caso en el que la especie sufre competencia interespecie, pero la especie 2 no sufre de ella. Por último el gráfico inferior muestra el caso en el cual es la especie 2 quien sufre de competencia interespecie mas no la especie 1.

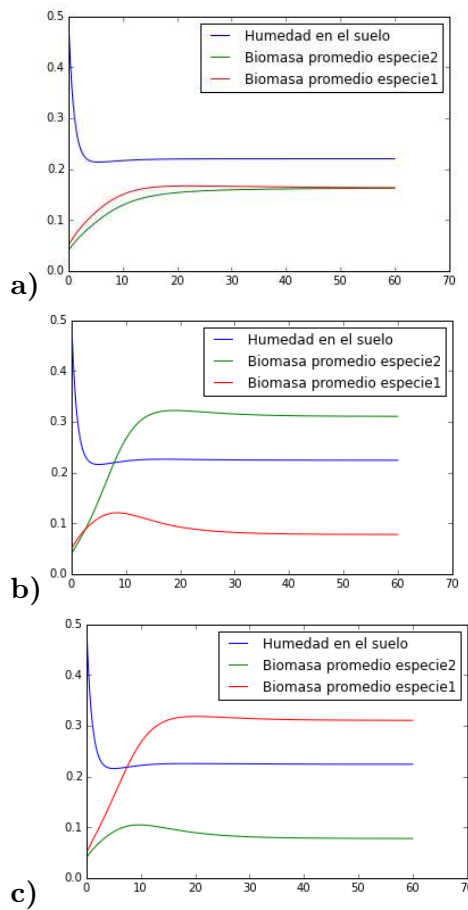


Figura 3.5. Con valores de $w_i = 0.5$, especie1 $\rho_1 = 0.5 = \rho_2$ y $\mu_1 = 0.6 = \mu_2$. En a) los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

En la figura(3.6) los resultados en el caso de mutualismo en las especies.

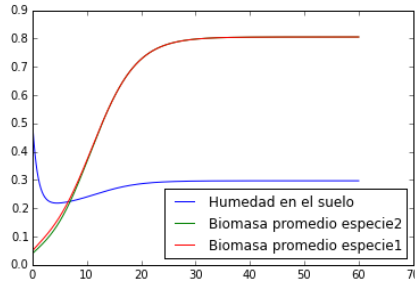


Figura 3.6. Para valores de $w_i=0.5$, especie1 $\rho_1=0.5=\rho_2$ y $\mu_1=0.6=\mu_2$ los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos.

Para $\rho_1 > \rho_2$; $\mu_1 > \mu_2$

Para este caso el modelo de Hardenberg proporciona el mismo resultado que en la figura (3.2) pero ahora la especie 1 se encuentra a la derecha y la especie 2 a la izquierda.

En la figura (3.7) se muestra el modelo para competencia intraespecie con los valores $w_i = 0.5$, $\rho_1 = 1$, $\mu_1 = 0.26$, $\rho_2 = 0.5$, $\mu_2 = 0.2$, nuevamente el gráfico superior **a)** es el caso en el que ambas especies entran en competencia

interespecie. El gráfico central **b)** es el caso en el que solo la especie 1 sufre competencia interespecie, el gráfico inferior **c)** muestra el caso en el cual es la especie 2 quien sufre de competencia interespecie.

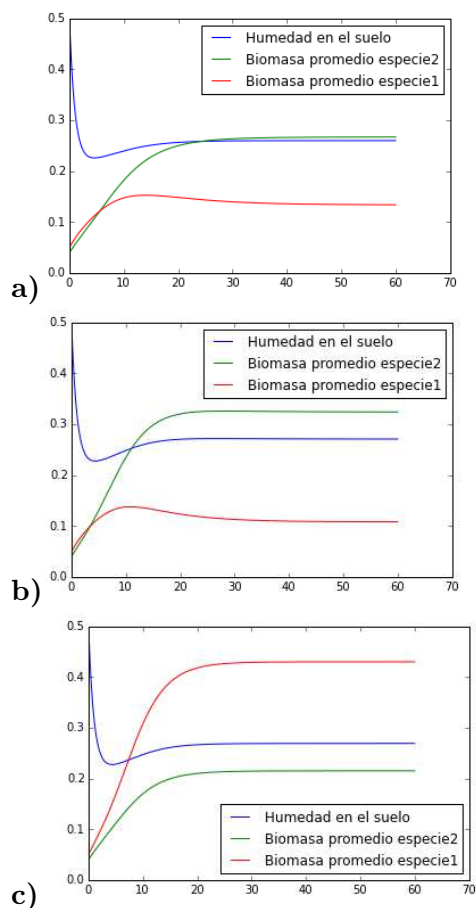


Figura 3.7. Se muestran los resultados para los valores de $w_i = 0.5$, especie1 $\rho_1 = 1$ y $\mu_1 = 0.6$, especie2 $\rho_2 = 0.5$ y $\mu_2 = 0.2$. En a) los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

La figura (3.8) con el mutualismo para este caso.

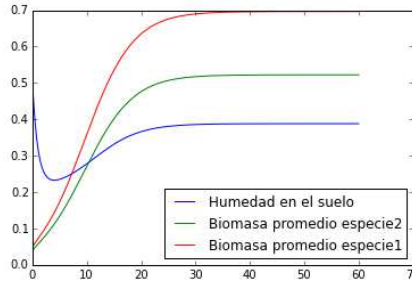


Figura 3.8. valores de $w_i=0.5$, especie1 $\rho_1=1$ y $\mu_1=0.6$, especie2 $\rho_2=0.5$ y $\mu_2=0.2$. los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos

Caso 2: w constante

Por último el caso en el que w es constante, este caso se refiere a cultivos donde la humedad puede ser controlada todo el tiempo, por ejemplo cultivos en un invernadero.

Para $\mu_1 < \mu_2$

A continuación la figura(3.9) muestra la competencia interespecie para las mismas condiciones iniciales señaladas en el caso equivalente con w que varia en el tiempo. Primero ambas especies en competición directa **a)**, posteriormente **b)** la especie 1 es quien se ve sometida a mayor competición, en la parte inferior **c)** para finalizar es la especie 2 la que se ve sometida a una mayor competencia.

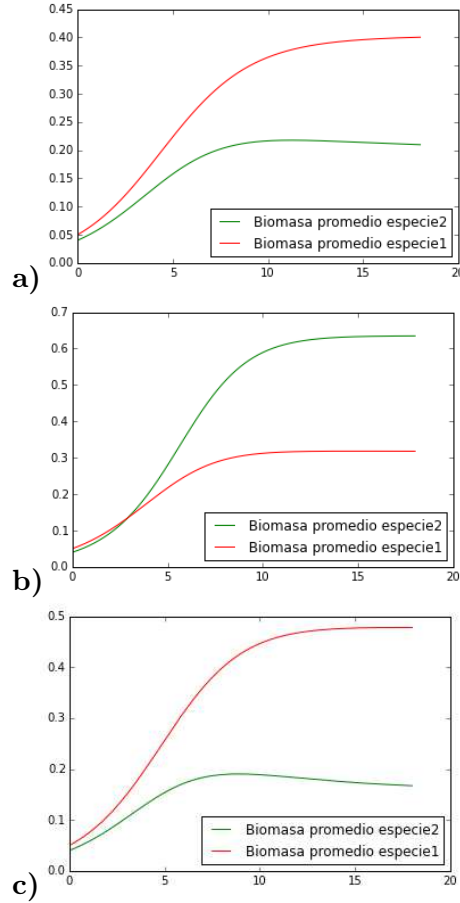


Figura 3.9. Para los valores de $w = 0.5$, especie1 $\mu_1 = 0.2$, especie2 $\mu_2 = 0.6$. En a) los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

También se muestra en la figura (3.10) el mutualismo entre las especies para estas condiciones iniciales.

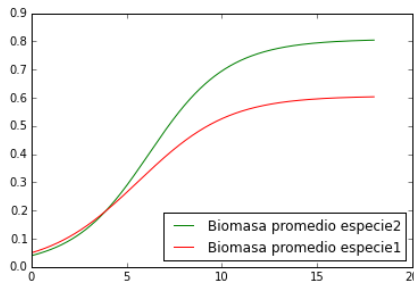


Figura 3.10. Con valores de $w = 0.5$, especie1 $\mu_1 = 0.2$, especie2 $\mu_2 = 0.6$. los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos.

Para $\mu_1 = \mu_2$

La figura (3.11) tiene la misma distribución que la figura (3.5), **a)** ambas especies en competencia directa, **b)** la especie 1 es quien sufre mayor competencia y en la parte inferior **c)** la especie 2 es quien posee esta característica. Para las mismas condiciones iniciales señaladas en el caso equivalente con w que varía en el tiempo.

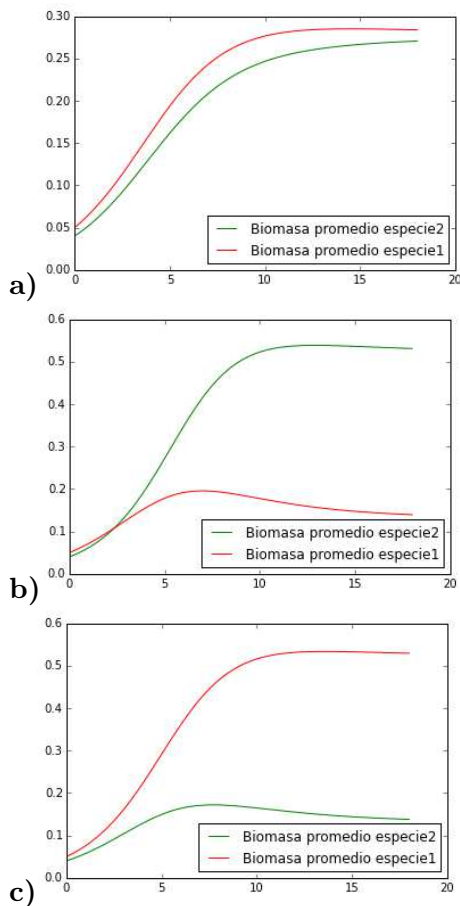


Figura 3.11. Con valores de $w = 0.5$, y $\mu_1 = 0.6 = \mu_2$ para ambas especies. En a) los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

Se aprecia en la figura(3.12) el mutualismo para este caso

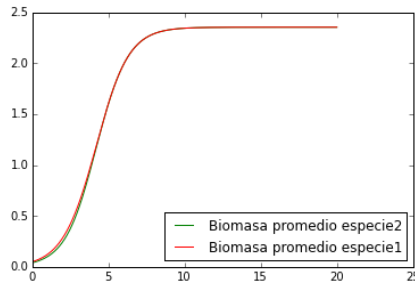


Figura 3.12. Para valores de $w=0.5$, y $\mu_1=0.6=\mu_2$ para ambas especies los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos

Para $\mu_1 > \mu_2$

Se muestra en la figura (3.15) la misma distribución que en las figuras anteriores. Primero **a)** donde ambas especies están en competencia directa, segundo **b)** y por último **c)** donde es la segunda especie la que está en competencia.

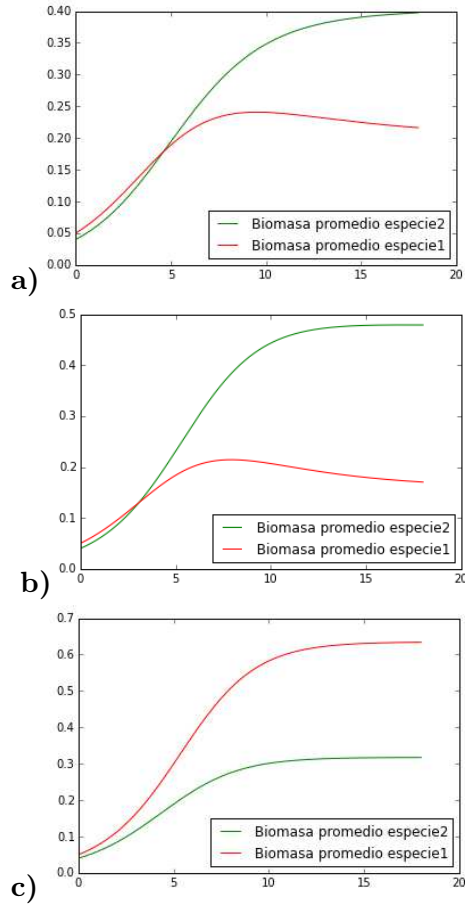


Figura 3.13. Para los valores de $w = 0.5$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. En a) los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

La figura (3.14) muestra el mutualismo en este caso.

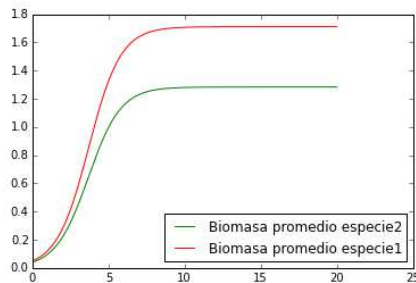


Figura 3.14. Para los valores de $w = 0.5$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos

Por último se incluyen una serie de gráficas donde podemos apreciar como valores distintos de w influyen en la dinámica de las especies vegetales, como es de esperarse para w pequeñas la competencia se agudiza, mientras que para valores mayores de w la competencia es menos severa debido a la abundancia de los recursos.

La figura (3.15) muestra los resultados para humedad en el suelo reducida ($w = .05$), comenzando por competencia en la gráfica superior, en la central la primera especie en competencia, para la inferior segunda especie en competencia.

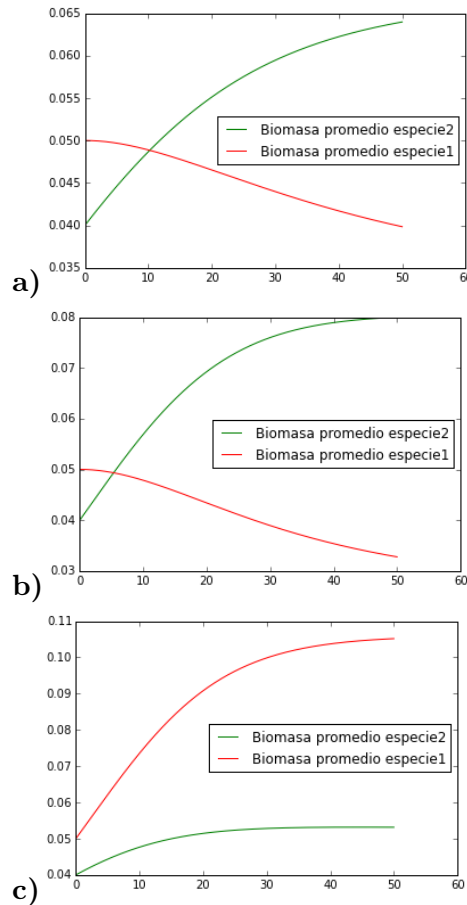


Figura 3.15. Para los valores de $w = 0.05$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. En a) los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

La figura(3.16) muestra el mutualismo en las especies para valores $w = 0.05$.

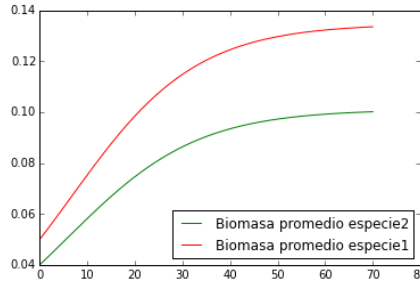


Figura 3.16. Con valores de $w = 0.05$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos positivos

La figura (3.17) muestra los resultados para humedad en el suelo reducida ($w = .05$), comenzando por competencia en la gráfica superior, en la central la primera especie en competencia, para la inferior segunda especie en competencia.

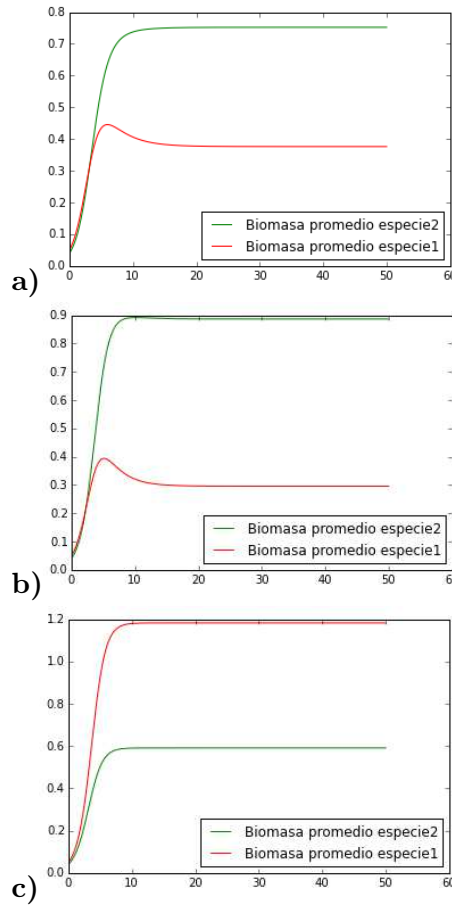


Figura 3.17. Con valores de $w = 3$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. En a) los términos cruzados $\pm\mu_i n_i n_j$ son ambos negativos, b) son negativo y positivo, c) positivo y negativo.

La figura (3.18) muestra el mutualismo en las especies para valores $w = 3$.

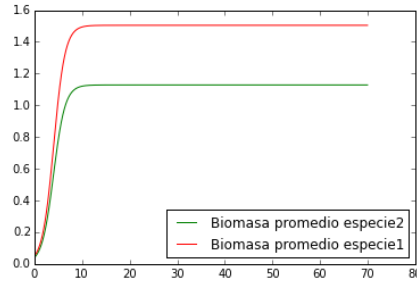


Figura 3.18. Valores de $w = 3$, especie1 $\mu_1 = 0.6$ y especie2 $\mu_2 = 0.2$. los términos cruzados $\pm \mu_i n_i n_j$ son ambos positivos

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Podemos concluir que el modelo matemático propuesto en este trabajo de tesis es adecuado para el estudio de la competencia y cooperación, entre dos especies vegetales en ambientes con humedad en el suelo que varía en el tiempo (cultivos de temporada) y humedad en el suelo controlada (invernadero).

Se cumple el comportamiento descrito en los modelos poblacionales de Lotka-Volterra. Al ser el recurso que se considera tanto en el modelo de Hardenberg como en el modelo computacional desarrollado en este trabajo, la cantidad de humedad en el suelo “ w ” es de fundamental importancia al momento de estudiar el comportamiento de las especies. Mientras menor sea la cantidad de w más intensa será la competencia entre las especies al verse reducido el abastecimiento de recursos. Mientras mayor sea la cantidad de w la competencia entre las especies es menos intensa y facilita la coexistencia de ambas especies en el medio. Para los casos en que se mantiene w constante se observa claramente que la densidad promedio de biomasa por especie es superior a los casos en los cuales w varía en el tiempo, esto se debe a que no hay disminución en los recursos necesarios para el crecimiento de la biomasa.

Para los casos de mutualismo o cooperativos se observa que ambas especies sobrepasan su cantidad máxima de biomasa comparadas contra el caso competitivo sin importar la modalidad de este. Para los casos de mutualismo la especie dominante es aquella cuyo término $+\mu_i n_i n_j$ sea mayor.

De los diferentes casos competitivos se concluye que la especie dominante será aquella para la cual su término $-\mu_i n_i n_j$ sea menor.

En el caso donde las condiciones iniciales son las mismas para ambas especies se puede observar que tanto para la competencia directa las dos especies llegan a un mismo nivel de biomasa y su comportamiento después de cierto tiempo es el mismo, en este caso ambas especies se extinguen si se reduce el valor de w . De la misma forma en el caso de mutualismo para las mismas condiciones iniciales ambas especies alcanzan el mismo valor máximo de biomasa y se comportan igual.

Para los cultivos de invernadero el parámetro determinante será la concentración de w ya que las variaciones aplicadas en las condiciones iniciales de cada especie no generan un impacto significativo en ellas comparadas con los otros casos para este tipo de cultivos.

Para lograr que el modelo se apegue más a la realidad, es necesario incluir al modelo original de Hardenberg parámetros adicionales a la humedad del suelo como la absorción de nutrientes y parámetros externos como temperatura, etc. Con estos nuevos parámetros podemos ampliar el modelo desarrollado en este trabajo e incluir otras condiciones de competencia interespecie.

Las estrategias agroecológicas propuestas a través de la implementación de los policultivos tienen que apuntar deliberadamente a la población con recursos económicos limitados, no solamente para aumentar la producción y conservar los recursos naturales, sino también para generar empleo y brindar acceso a mercados locales. Este proceso requiere nuestra participación para el mejoramiento del nivel cultural ecológico de los agricultores en relación a sus granjas y recursos, así podrán dar un mejor uso a sus recursos, mejorando su calidad de vida sentando las bases para la constante evolución y desarrollo para nuestras comunidades rurales.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M Altieri y N Clara. Agroecología: potenciando la agricultura campesina para revertir el hambre y la inseguridad alimentaria en el mundo. *Revista de Economía Crítica*, :62–74, 2010.
- [2] Miguel A Altieri. Agroecology: the science of natural resource management for poor farmers in marginal environments. *Agriculture, ecosystems & environment*, 93(1):1–24, 2002.
- [3] Miguel A Altieri y Clara Nicholls. Los impactos del cambio climático sobre las comunidades campesinas y de agricultores tradicionales y sus respuestas adaptativas. *Agroecología*, 3:7–24, 2008.
- [4] Miguel Ángel Altieri. Bases agroecológicas para una producción agrícola sustentable. 1994.
- [5] Miguel A Altieri. *Small farms as a planetary ecological asset: five key reasons why we should support the revitalisation of small farms in the global south*. Third World Network Penang, Malaysia, 2008.
- [6] Antonio Belinch y Primer Borrador Noviembre. Notas sobre Sistemas Dinámicos. , , 2003.
- [7] Alfredo Cano-Cancela y Fernando Pestana da Costa. Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional. , :155, 2011.
- [8] Raúl Carballo. Dinámica no Lineal. , :1–5, 2006.
- [9] Maria González. Modelo predador-presa de Lotka-Volterra. , :1–14, 2012.
- [10] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 1965.
- [11] Daniel Hillel. *Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations*. Academic press, 1998.
- [12] Albert C J Luo. *Dynamical systems: Discontinuity, stochasticity and time-delay*. 2010.
- [13] H. Matsuda, N. Ogita, a. Sasaki y K. Sato. Statistical Mechanics of Population: The Lattice Lotka-Volterra Model. *Progress of Theoretical Physics*, 88(6):1035–1049, 1992.
- [14] Nature Reviews Microbiology. Sistemas de. , 851(November):839–851, 2007.
- [15] David Norman Pegler et al. *A preliminary agaric flora of East Africa*. Her Majesty's Stationery Office., 1977.
- [16] J F Rojas, R Martínez y E Chasset. Vegetation patterns in an simple sinuous landscape. , :1–13.
- [17] Marta Seron. Sistemas No Lineales. *Proton. Ucting. Udg.Mx*, (0):1–6, 2001.
- [18] Steven H Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1994.
- [19] La Tour y Le Sambuc. *Oecologia* 9. *Oecologia*, 1:390–394, 1989.
- [20] Mathematics Tuzla, Herzegovina S Kalabu, Mathematics Sarajevo, Herzegovina M R S Kulenovi, Mathematics Kingston y Rhode Island. Nonhyperbolic Dynamics for Competitive Systems in the Plane and Global Period-doubling Bifurcations University of Rhode Island. , 3(2):229–249, 2008.
- [21] J von Hardenberg, E Meron, M Shachak y Y Zarmi. Diversity of vegetation patterns and desertification. *Physical review letters*, 87(19):198101, 2001.
- [22] Jost von Hardenberg, Assaf Y Kletter, Hezi Yizhaq, Jonathan Nathan y Ehud Meron. Periodic versus scale-free patterns in dryland vegetation. *Proceedings. Biological sciences / The Royal Society*, 277(1688):1771–1776, 2010.
- [23] R W Willey. Resource use in intercropping systems. *Agricultural water management*, 17(1):215–231, 1990.
- [24] Ma. Zavala, R. Díaz-Sierra, D. Purves, G. E. Zea y I. R. Urbieta. Modelos espacialmente explícitos. *Ecosistemas*, 15(3):88–99, 2006.