Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN ACTUARÍA

Teoría Moderna de Carteras con un enfoque en Modelos Dinámicos para la Predicción del Comportamiento de Activos Financieros

Gabriel Cao Romero Martínez

Asesor José Asunción Hernández

Febrero, 2024

Agradecimientos

A mi madre, por ser mi más grande soporte en ésta vida, por ser la persona a quien más admiro y por ser mi más grande motivación.

A mi asesor de tesis el Dr. José Asunción Hernández, no sólo por su apoyo para realizar éste trabajo sino por la amistad brindada durante mi etapa universitaria.

A mis sinodales, agradezco mucho su tiempo para la revisión del manuscrito, mención particular a la maestra Brenda López Zavala por lo aprendido durante los tantos cursos que tomé con ella, y el sinfín de anécdotas que llevaré con cariño siempre. De igual forma, agradezco a la Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, por sus enseñanzas y por compartirme la pasión y el gusto de la Estadística.

A mis maestros, gracias por todo lo que me compartieron, agradezco especialmente al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, por despertar mi gustó a la investigación y por sacar lo mejor de mí en términos de probabilidad.

A mis amigos, Arnold, Capi, Bernardo, Aranxa, Habacuq, Liz, Brenda, Didier Mau, Mike Champ, Uriel, agradezco el tiempo, compartido, su apoyo en los momentos difíciles, las fiestas, el billar, las risas, las locuras, hicieron de ésta etapa algo inolvidable y no cabe duda que el regalo más grande que me dió la universidad no fue el conocimiento, si no haberlos conocido, ya que, tengo la certeza que su amistad, trascenderá fronteras, estados, y el mismo tiempo..

A Karina, porque si bien no estuviste a lo largo de mi etapa universitaria, estás ahora y estás siempre, en especial cuando más te necesito, gracias por todo tu amor y cariño, ya que, como dicen por ahí no hay que llegar primero pero hay que saber llegar.

Gracias, infinitas a todos, esto va por ustedes..

Abstract

El objetivo primordial de ésta tesis se centra en una exploración de la gestión de carteras a través de la Teoría Moderna de Carteras (MPT, por sus siglas en inglés) y la predicción dinámica de comportamientos de precios. La sección preliminar profundiza en los aspectos fundamentales de la teoría de carteras, destacando la importancia del enfoque de Mean-Variance.

Los capítulos subsiguientes navegan por las complejidades del problema de la Teoría Moderna de Carteras, desglosando el Mean-Variance uniperiodo en tiempo discreto, perfiles de inversionistas, carteras de mínima varianza, carteras de máximo rendimiento, fronteras eficientes y la formulación matemática de Mean-Variance.

Centrándose en modelos dinámicos para predecir comportamientos de precios, la tesis introduce la simulación Montecarlo como una herramienta poderosa. Un ejemplo práctico ilustra su aplicación. Posteriormente, la exploración se extiende a la simulación del Movimiento Browniano Geométrico (GBM), brindando información sobre su implementación práctica.

Este manuscrito no solo contribuye al avance de las técnicas de gestión de carteras, sino que también destaca la importancia de adaptarse a la dinámica siempre cambiante del panorama financiero. La combinación del análisis tradicional de Mean-Variance con métodos de predicción representa una evolución innovadora capaz de navegar por las complejidades de un entorno financiero en constante cambio.

Índice general

1 Preliminares **5**
1.1 Teoría de Portafolios 6

2 Problema de Teoría Moderna de Carteras **9**
2.1 Mean Variance Uniperiodo en Tiempo Discreto 11
2.2 Perfil del Inversionista 11
2.3 Portafolio de Mínima Varianza y Portafolio de Máximo Rendimiento. 13
2.4 Frontera Eficiente 14
2.5 Formulación Matemática de Mean-Variance 16
2.6 Ejemplo Práctico de Mean Variance 18
2.7 Consideraciones Relevantes 29

3 Modelos Dinámicos en la Predicción de Comportamientos de Precios 31
3.1 Simulación Montecarlo 32
3.2 Ejemplo de Simulación Montecarlo 33
3.3 Simulación con el Browniano Geométrico 38
3.4 Ejemplo Práctico de Simulación GBM 39
3.5 Consideraciones Relevantes 44

Índice de figuras 53

Índice de cuadros 54

Referencias 55

Introducción

La gestión de carteras es esencial para los inversionistas que buscan optimizar sus rendimientos mientras gestionan el riesgo asociado Salamah (2023). En este contexto, la Teoría moderna de carteras se presenta como un marco teórico fundamental que ha revolucionado la toma de decisiones en inversiones ya que proporciona una inmersión profunda en conceptos esenciales, desde los principios básicos de la Teoría de Portafolios hasta la formulación matemática de la Mean-Variance Optimization (MVO) Markowitz y Todd (2000). En este sentido, la comprensión de la Teoría Moderna de Carteras (TMC) se convierte en un componente clave para la toma de decisiones informada en un mercado financiero cada vez más complejo y dinámico. En primera instancia se busca proporcionar al lector una comprensión sólida de los principios que guían la construcción y gestión de carteras, sirviendo como plataforma esencial para las exploraciones más avanzadas que se desarrollarán posteriormente.

En éste trabajo se hará hincapié más allá de los fundamentos teóricos explorados , adentrándose en cuestiones específicas y métodos aplicados en la gestión de carteras. El enfoque crucial se centra en el análisis del problema de la TMC en el contexto de un tiempo discreto, con énfasis en la Uniperiodo de Mean-Variance Optimization (MVO),donde se abordan aspectos valiosos, como la formulación matemática y la aplicación de estrategias de gestión de carteras en un horizonte de tiempo discreto. Se examinarán perfiles de inversionistas y se explorarán los portafolios de Mínima Varianza y de Máximo Rendimiento, así como la Frontera Eficiente, que representa la combinación óptima de riesgo y retorno, donde se integrarán modelos dinámicos para una comprensión más completa y realista de los comportamientos de precios en los mercados financieros Dodd (1951).

Finalmente, se enviciará la necesidad de una exploración profunda de modelos dinámicos aplicados a la predicción de comportamientos de precios en los mercados financieros. Se iniciará con la Simulación Montecarlo Yang (2020), la cual es una herramienta fundamental para la generación de escenarios futuros basados en múltiples

trayectorias aleatorias. Se presenta un ejemplo práctico que ilustra la aplicación de esta técnica para evaluar y comprender la variabilidad en los rendimientos de activos financieros. Posteriormente se usará la Simulación del Browniano Geométrico (GBM) Markowitz (1991), un modelo estocástico que captura de manera efectiva la dinámica de los precios de activos financieros. A través de un ejemplo práctico de simulación GBM, se demuestra cómo este enfoque puede ofrecer una visión más realista de los comportamientos de precios en comparación con la simulación Montecarlo. Para así destacar las consideraciones relevantes al utilizar modelos dinámicos, desde la selección de parámetros hasta la interpretación de resultados. Estos modelos no solo enriquecen la predicción de comportamientos de precios, sino que también sientan las bases para la aplicación innovadoras de técnicas en la gestión de carteras. La integración de modelos dinámicos representa una evolución significativa en la comprensión y optimización de portafolios en un entorno financiero en constante cambio.

Metodología

En este manuscrito la metodología se estructuró en tres capítulos fundamentales. En el Capítulo 1 se establecieron las bases teóricas de la investigación, sumergiéndose en los fundamentos de la Teoría Moderna de Carteras. Explorando conceptos esenciales como la Teoría de Portafolios, se proporcionó una comprensión sólida de los principios que orientan la gestión de inversiones, estableciendo así el terreno para futuras aplicaciones. En el Capítulo 2 se introdujo la Teoría Moderna de Carteras abordando de manera profunda el núcleo del problema, enfocándose en el análisis de Mean-Variance en un contexto de tiempo discreto. Se examinaron aspectos clave, desde el perfil del inversionista hasta la formulación matemática de Mean-Variance, con ejemplos prácticos que ilustraron la construcción de carteras y la comprensión de la Frontera Eficiente. Este Capítulo no solo proporcionó conocimientos teóricos sólidos sino que también discutió consideraciones cruciales para la aplicación efectiva de la Teoría Moderna de Carteras. El Capítulo 3: Modelos Dinámicos en la Predicción de Comportamientos de Precios se centró en la aplicación de modelos dinámicos para anticipar comportamientos de precios. Desde la Simulación Montecarlo hasta el uso del Movimiento Browniano Geométrico (GBM), se exploraron técnicas avanzadas con

ejemplos prácticos. Este Capítulo evaluó la efectividad y limitaciones de los modelos dinámicos, consolidando así una metodología que integra la Teoría Moderna de Carteras con enfoques innovadores para la gestión de carteras en un entorno financiero dinámico y complejo. La figura 1 esclarece lo anterior mencionado.

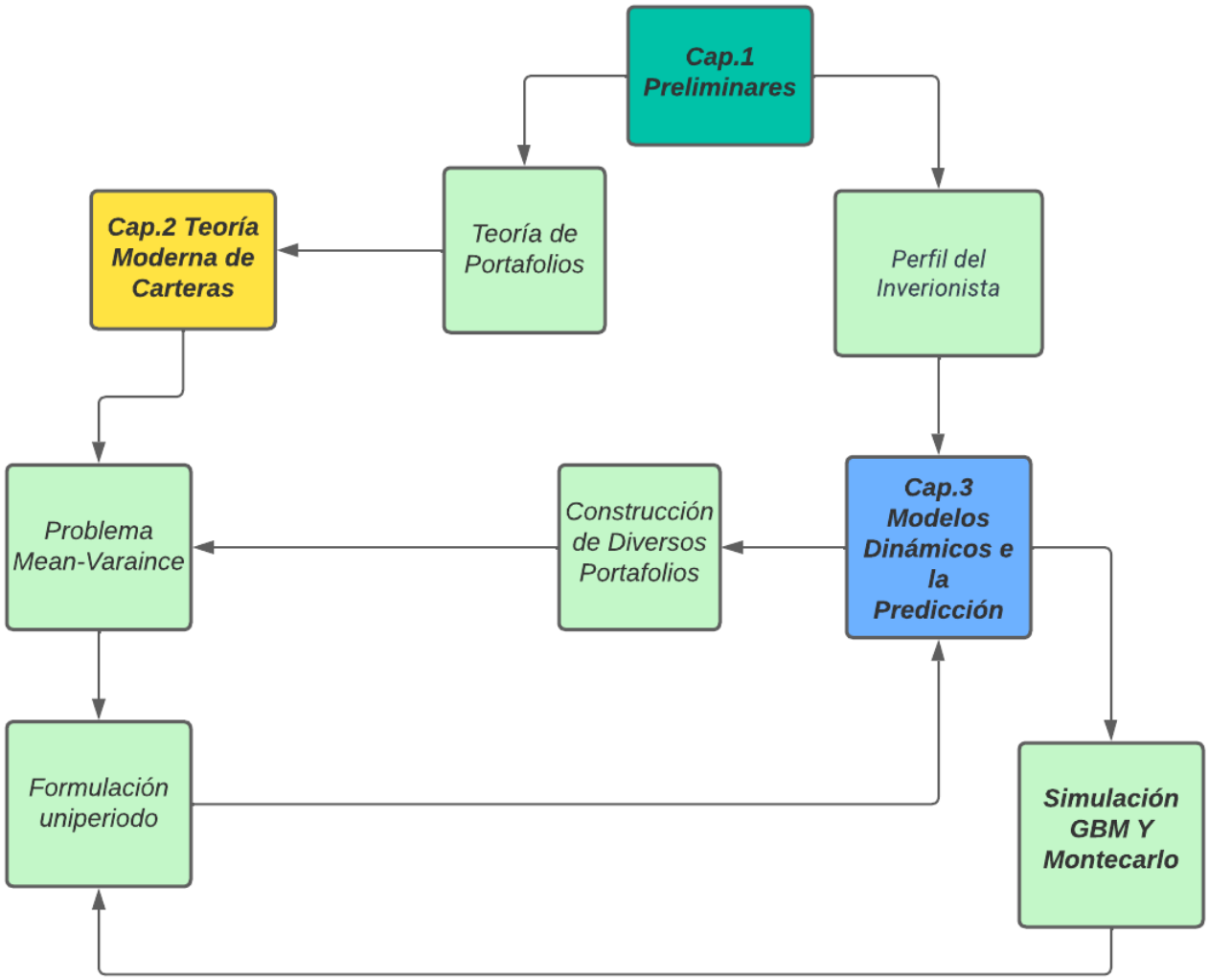

Figura 1: Diagrama de la Metodología.

Capítulo 1

Preliminares

Desde las primeras interacciones comerciales, las inversiones han perdurado como una constante en el entramado de la economía y las finanzas. Se sumergen profundamente en la esencia misma de la actividad económica, ejerciendo una influencia tan poderosa que ha dejado su huella en la formación de civilizaciones, el auge de imperios y la configuración de sociedades Lindelwa (2020). De ésta forma, las inversiones no son simplemente transacciones financieras, son compromisos con el crecimiento, la innovación y la creación de riqueza, encapsulando la esperanza de un rendimiento futuro, ya sea en forma de beneficios económicos, desarrollo personal o avances tecnológicos. Por éstas razones, y de manera informal se pueden considerar a las inversiones como un acto de fe en el potencial de crecimiento y mejora Ferguson (2008).

No obstante, en el mundo de las inversiones, la toma de decisiones es un arte intrincado que equilibra el riesgo y el rendimiento. Cada decisión implica una evaluación cuidadosa de las posibles recompensas en relación con los riesgos asociados. La volatilidad inherente a los mercados financieros y las incertidumbres globales añaden capas de complejidad a esta ecuación. Cabe mencionar que no siempre fue así, tal y como se verá posteriormente, ya que a lo largo de la historia tomar malas decisiones financieras sin buscar un balance entre riesgo y rendimiento han propiciado la ruina individual y colectiva Rose y Spiegel (2012) .

En este sentido, el reto más grande que puede existir al momento de invertir es buscar el retorno máximo posible con el nivel de riesgo más bajo, y de ésta forma optimizar la toma de decisiones, estas ideas serán detalladas en los capítulos subsecuentes, por ahora, es importante mencionar que la teoría de portafolios o teoría de carteras es la piedra angular que da respuesta a dichas interrogantes.

1.1. Teoría de Portafolios

A finales del siglo XIX y principios del XX, la gestión de inversiones se basaba en gran medida en la intuición y el análisis individual de activos, es decir, se basaba en la idea primitiva de que invertir era equivalente a jugar un juego de azar, y aunque intrínsecamente un juego de azar contempla la idea de un posible riesgo, los inversionistas no contemplaban dicha posibilidad para poder cuantificarla y posteriormente mitigarla Dodd (1951). Además se consideraban los activos de manera individual y no colectiva. No obstante, a la postre se hicieron varias contribuciones pertinentes, tal y como considerar los activos ya no de manera individual sino colectiva y la diversificación, la cual consiste en no invertir todo el capital en un activo y escoger los activos de distintos mercados, para tener un portafolio equilibrado Guerard (2023). Posteriormente, no sólo se consideraba la idea de la diversificación, si no una idea concisa de como medirla, fue así que se empezó a analizar las correlaciones entre activos, para priorizar la construcción de carteras con activos muy poco correlacionados entre sí y de ésta forma protegerse si un evento desfavorable ocurría Lintner (1975).

La idea formal de escoger las correlaciones entre activos subyace en la teoría estadística la caul estipula que la correlación (r) entre dos variables X e Y se define como:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad ,$$

donde:

- X_i e Y_i son los valores individuales de las dos variables.
- $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son las medias de X e Y, respectivamente.

La correlación de Pearson produce un valor r que varía entre -1 y 1.

- Un r cercano a 1 indica una correlación positiva perfecta (las variables se mueven juntas en la misma dirección).
- Un r cercano a -1 indica una correlación negativa perfecta (las variables se mueven en direcciones opuestas).
- Un r cercano a 0 sugiere una relación débil o nula.

Cabe mencionar que la correlación no implica causalidad y asume una relación lineal. Si el lector está interesado en ahondar más en teorías estadísticas para medir relaciones entre variables se le recomienda el siguiente material Lindgren (2017)

Ejemplo Teórico de Correlación entre Activos

Consideremos que queremos invertir en activos de compañías de ropa, donde tenemos la compañía A que tiene artículos de primavera, la compañía B que tiene artículos de verano, la compañía C que tiene artículos de otoño y la compañía D que tiene artículos de invierno, es claro que dependiendo la época del año, el valor de las acciones que se compraron fluctuará de manera distinta, así cuando sea invierno la ropa de primavera y verano no será tan requerida como la de otoño e invierno, por lo que ante las descompensaciones propias de las estaciones habrá compensaciones, y de ésta forma el portafolio de inversión quedará protegido. Ésta es la manera informal en que se debe pensar la correlación de activos en la construcción de portafolios, es decir, escoger activos propios de mercados diferentes o que correspondan a cambios en temporadas o estaciones, como en el ejemplo anterior.

Siguiendo las ideas previas, en 1950 Harry Markowitz cambió la forma de concebir el estudio de las carteras Quintero (2002). Su enfoque revolucionario incorporó conceptos matemáticos y estadísticos para abordar la gestión de riesgos y rendimientos

en carteras de inversiones. Markowitz no solo propuso un método sistemático para construir carteras eficientes, sino que también introdujo el concepto de diversificación estratégica la cual es una estrategia de gestión de inversiones que busca optimizar la relación entre riesgo y rendimiento al construir una cartera que incluya una variedad de activos con diferentes características de rendimiento y riesgo Markowitz y Todd (2000). A diferencia de la simple diversificación, que implica la distribución de activos de manera uniforme, la diversificación estratégica implica la selección específica de activos que tienen correlaciones bajas o negativas entre sí. La idea fundamental detrás de la diversificación estratégica es reducir la volatilidad y el riesgo general de una cartera al incorporar activos que no se mueven en la misma dirección o que no están altamente correlacionados. En otras palabras, cuando algunos activos en la cartera experimentan pérdidas, otros pueden tener un rendimiento positivo o ser menos afectados, ayudando a mitigar las fluctuaciones extremas y a suavizar el perfil de riesgo de la carteras, esto se pudo constatar con la idea del ejemplo teórico que se proporcionó.

Aunado a esto, Markowitz destacó la relevancia de la diversificación como un medio para reducir el riesgo total de una cartera. Argumentó que no solo es importante la elección individual de activos, sino también cómo interactúan estos activos dentro de una cartera Markowitz (2010). Además, Markowitz introdujo el concepto de eficiencia de la cartera, señalando que una cartera es eficiente si no se puede mejorar su rendimiento sin aumentar su riesgo o reducir su riesgo sin disminuir su rendimiento. Esta idea sentó las bases para la construcción de carteras que buscan maximizar el rendimiento para un nivel de riesgo dado o minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento objetivo Markowitz (1999). En el Capitulo siguiente se abordarán a detalle dichas contribuciones de Markowitz en la teoría moderna de carteras.

Capítulo 2

Problema de Teoría Moderna de Carteras

La teoría moderna de carteras, emerge como una problemática central que aborda la compleja relación entre riesgo y rendimiento. Este enfoque, presentado por Harry Markowitz en la Teoría Moderna de Portafolios, plantea la cuestión fundamental de cómo los inversores pueden optimizar sus carteras para alcanzar un equilibrio eficiente entre el rendimiento esperado y el riesgo asumido Ghavamzadeh (2022).

La esencia de la Teoría Moderna de Carteras reside en la búsqueda de carteras eficientes que ofrezcan el máximo rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo o, inversamente, el mínimo riesgo para un rendimiento esperado específico Markowitz (1999). La problemática fundamental de esta teoría reside en la formulación del problema Mean-Variance, que propone que los inversores pueden optimizar sus carteras al considerar no solo el rendimiento promedio esperado (la "Media") de los activos, sino también la variabilidad de esos rendimientos (la "desviación estándar") Fernández (2021). El problema Mean-Variance invita a los inversores a enfrentar la dualidad de riesgo y rendimiento. La diversificación se convierte en la piedra angular, permitiendo la construcción de carteras que equilibran el deseo de rendimientos atractivos con la necesidad de mitigar el riesgo. La optimización implica seleccionar la combinación de activos que maximiza la media y minimiza la varianza, generando así la llamada

frontera eficiente Cardoso y Argolo (2022), de la cual se hablará posteriormente.

En este sentido, la Teoría Moderna de Carteras ha dejado una marca indeleble en la gestión de inversiones. Modelos de asignación de activos, estrategias de diversificación y enfoques basados en riesgo han derivado directamente de sus principios. En la era contemporánea, la tecnología y enfoques más avanzados, como la inclusión de factores y estrategias de inversión sostenible, han ampliado la aplicación práctica de estos principios Wolf (2023). A pesar de su impacto revolucionario, la Teoría Moderna de Carteras y el problema Mean-Variance no están exentos de desafíos. Las suposiciones de distribuciones normales de rendimientos y aversión constante al riesgo pueden simplificar en exceso la realidad. Eventos extremos y cambios en las preferencias de los inversores han llevado a adaptaciones y a la consideración de modelos más sofisticados.

En el siglo XXI, el problema Mean-Variance se enfrenta a un terreno más complejo. La crisis financiera de 2008 y la pandemia de COVID-19 desafiaron las suposiciones tradicionales, llevando a una reevaluación de estrategias de optimización Ghavamzadeh (2022). Los inversores buscan no solo rendimientos ajustados al riesgo, sino también consideraciones éticas y sostenibles, dando lugar a enfoques más modernos. La tecnología también ha jugado un papel crucial, la disponibilidad de grandes conjuntos de datos y el auge de la inteligencia artificial han permitido enfoques más sofisticados en la gestión de carteras. Estrategias que incorporan modelos predictivos Kalayci (2019), aprendizaje automático y optimización avanzada están redefiniendo el panorama y ampliando la conversación más allá de la simplicidad de la Mean-Variance.La Teoría Moderna de Carteras, encabezada por el problema Mean-Variance, ha trascendido décadas y sigue siendo un faro en la gestión de inversiones. Su capacidad para proporcionar un marco conceptual sólido que equilibra riesgo y rendimiento ha influido profundamente en cómo los inversores comprenden y abordan la complejidad de los mercados financieros. Aunque enfrenta desafíos y adaptaciones en un entorno financiero dinámico, su legado perdura, recordándonos que la eficiencia y el equilibrio son pilares esenciales en la construcción de carteras sólidas y resilientes Markowitz

(2010).

2.1. Mean Variance Uniperiodo en Tiempo Discreto

El problema de carteras en un periodo, es altamente estudiado por los investigadores e inversionistas, principalmente por su sencillez al momento de formularse y por los resultados cuantitativos y cualitativos que se obtienen, éste enfoque se centra en una composición de n activos en la cartera, la cual se busca optimizar en un horizonte de un periodo Tokat y Wicas (2007), se puede inferir que será en el periodo siguiente, tal y como será ejemplificado al final de éste capítulo. La toma de decisiones en un único período en tiempo discreto, demanda estrategias meticulosas y decisiones fundamentadas, ya que, primeramente se deben construir las carteras de acuerdo al perfil del inversionista, y de acuerdo a las metas que éste tenga. En este sentido, se esbozará lo anteriormente mencionado.

2.2. Perfil del Inversionista

La segmentación de los inversionistas de acuerdo a su perfil es una práctica esencial en el mundo de las finanzas, y su relevancia se manifiesta en múltiples facetas que van más allá de la mera clasificación. La diversidad en las preferencias y tolerancias al riesgo entre los inversionistas es innegable. Al segmentarlos según su perfil, se abre la puerta a la alineación perfecta entre sus estrategias de inversión y sus propias características. Un inversionista conservador, por ejemplo, puede centrarse en la preservación del capital, mientras que uno agresivo puede explorar oportunidades de alto rendimiento. Esta alineación estratégica asegura que cada inversionista siga un camino que se ajuste a sus metas y aversiones al riesgo específicas Macías (2012). Al segmentar a los inversionistas, se facilita la comunicación clara y transparente sobre las perspectivas de rendimiento y volatilidad Lu y Zhang (2012). Esto contribuye a evitar sorpresas desagradables y a establecer expectativas realistas, fortaleciendo la confianza y la relación a largo plazo entre ambas partes. De igual manera, los inversio-

nistas atraviesan diferentes etapas en sus vidas, y sus objetivos financieros evolucionan con el tiempo. La segmentación facilita la gestión del ciclo de vida al permitir ajustes en las estrategias de inversión a medida que cambian las circunstancias y metas Markowitz (1999). Un inversionista puede comenzar siendo agresivo en la juventud para luego adoptar un enfoque más conservador en la jubilación, adaptando así sus inversiones a sus necesidades cambiantes. A continuación se muestran los tres perfiles más comunes en el mundo de las inversiones.

Perfil Agresivo

El inversionista agresivo se caracteriza por su elevada tolerancia al riesgo y su búsqueda activa de rendimientos significativos, mostrando disposición para asumir volatilidad en su cartera. Orientado hacia oportunidades de crecimiento a largo plazo, este perfil tiende a enfocarse en inversiones que prometen alto potencial de crecimiento y están dispuesto a explorar opciones alternativas y de mayor riesgo. Las inversiones típicas incluyen acciones con potencial de crecimiento robusto y alternativas de inversión de riesgo. Los objetivos primordiales de este inversionista son lograr un crecimiento sustancial del capital y capitalizar oportunidades de inversión que ofrezcan rendimientos excepcionales.

Perfil Moderado

El inversionista moderado exhibe una tolerancia al riesgo de nivel intermedio, buscando un equilibrio entre seguridad y crecimiento en su cartera. Este perfil demuestra disposición a asumir cierta volatilidad con el objetivo de obtener rendimientos moderados. Sus inversiones típicas incluyen una mezcla diversificada de acciones y bonos, así como la preferencia por fondos de inversión equilibrados. El objetivo principal del inversionista moderado es lograr un crecimiento moderado del capital, acompañado de una preocupación por la protección contra la inflación, lo que refleja su enfoque equilibrado entre la generación de rendimientos y la preservación del capital en un entorno financiero dinámico.

Perfil Conservador

El inversionista conservador se caracteriza por una baja tolerancia al riesgo y una priorización clara de la preservación del capital sobre la obtención de rendimientos más altos. Con un enfoque cauteloso, busca estabilidad y seguridad en sus inversiones. Las inversiones típicas de este perfil incluyen bonos y deuda de bajo riesgo, así como cuentas de ahorro que ofrecen mayor seguridad. Los objetivos fundamentales del inversionista conservador son proteger el capital contra pérdidas significativas y generar ingresos estables y predecibles, reflejando su preferencia por estrategias que minimicen el riesgo y prioricen la seguridad financiera a largo plazo.

Si el lector está interesado en cual es su perfil, se le recomienda exhaustivamente el material Macías (2012).

Es fundamental recordar que, aunque la elección de un portafolio está estrechamente ligada al perfil del inversionista y se puede conformar la combinación más adecuada a sus preferencias, existen dos tipos de portafolios cruciales para el análisis de carteras: el portafolio de varianza mínima y el portafolio de máximo rendimiento. Estos portafolios son sumamente valiosos al establecer límites para delinear la frontera eficiente.

2.3. Portafolio de Mínima Varianza y Portafolio de Máximo Rendimiento.

El portafolio de máximo rendimiento y el portafolio de mínima varianza son conceptos clave en la teoría moderna de carteras, éstos portafolios desempeñan un papel crucial al proporcionar un marco sólido para la construcción de carteras eficientes que buscan optimizar el equilibrio entre riesgo y rendimiento.

El portafolio de máximo rendimiento representa la combinación óptima de activos que ofrece el rendimiento esperado más alto para un nivel de riesgo determinado. En un entorno financiero donde los inversionistas buscan maximizar sus retornos, este portafolio señala la ruta más eficiente para lograr rendimientos significativos sin

sacrificar de manera desproporcionada la estabilidad. El portafolio de máximo rendimiento es útil para los inversionistas que desean identificar la cartera que maximiza sus ganancias potenciales dentro de su nivel de aversión al riesgo Coffin (2007).

Por otro lado, el portafolio de mínima varianza representa la combinación de activos que proporciona la menor variabilidad o volatilidad en los rendimientos de la inversión. Este portafolio es esencial para aquellos inversionistas que priorizan la reducción del riesgo en sus carteras. Al minimizar la varianza, el inversionista puede buscar una mayor estabilidad en los rendimientos, lo que es especialmente valioso en periodos de incertidumbre económica Kalayci (2019). El portafolio de mínima varianza permite construir carteras defensivas que buscan proteger el capital ante posibles fluctuaciones del mercado. La importancia de estos portafolios radica en que ambos contribuyen a la formación de la llamada frontera eficiente. Esta frontera representa todas las combinaciones posibles de activos que maximizan el rendimiento para un nivel dado de riesgo Li y Zhang (2023). Al seleccionar entre el portafolio de máximo rendimiento y el de mínima varianza, los inversionistas pueden personalizar sus estrategias según sus objetivos, tolerancias al riesgo y preferencias individuales. La conjunción de estos portafolios en la frontera eficiente brinda a los inversionistas una guía valiosa para la construcción de carteras que optimizan sus metas financieras en un entorno dinámico y cambiante.

2.4. Frontera Eficiente

La frontera eficiente representa todas las combinaciones posibles de activos o portafolios que ofrecen el máximo rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo o la mínima varianza (o desviación estándar) para un nivel dado de rendimiento Bodnar y Schmid (2009). En otras palabras, la frontera eficiente ilustra las combinaciones óptimas de activos que permiten a los inversionistas alcanzar el mayor rendimiento posible para un nivel determinado de riesgo o, alternativamente, asumir el menor riesgo posible para un nivel dado de rendimiento. La eficiencia se logra porque los

inversores pueden diversificar sus inversiones, aprovechando la relación entre activos con diferentes niveles de riesgo y rendimiento.

La frontera eficiente se representa típicamente en un gráfico donde el eje x representa la volatilidad (o riesgo) y el eje y representa el rendimiento esperado. La curva de la frontera eficiente conecta los portafolios que ofrecen las mejores combinaciones de riesgo y rendimiento.

Es importante destacar que la frontera eficiente se construye considerando activos individuales y cómo se combinan en una cartera diversificada. La inclusión de un activo libre de riesgo y la combinación de activos con alta volatilidad a lo largo de la frontera eficiente permite a los inversionistas elegir la cartera que mejor se ajuste a sus preferencias de riesgo y rendimiento.

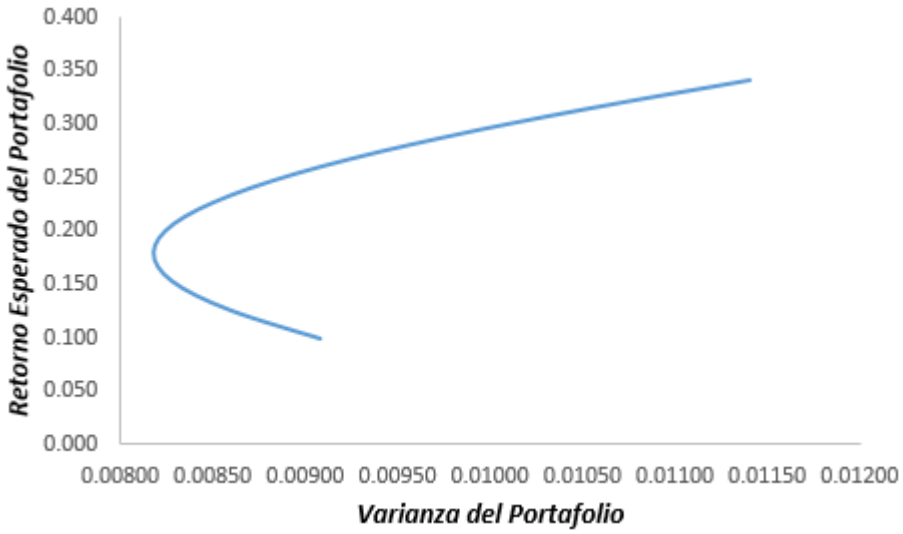

Figura 2.1: Frontera Eficiente.

La Figura 2.1 muestra las mejores combinaciones de riesgo y rendimiento disponibles para un inversor al diversificar su cartera. Facilita la comprensión de las compensaciones entre riesgo y rendimiento, ayudando a los inversores a encontrar carteras que ofrezcan el máximo rendimiento ajustado al riesgo. Además, guía a los inversores en la elección de la cartera adecuada según sus perfiles de riesgo y metas de inversión.

2.5. Formulación Matemática de Mean-Variance

La parte más importante del problema de carteras es como se puede tratar un problema de naturaleza estocástico financiero, a un problema meramente de optimización. En este sentido esbocemos las ideas necesarias para plantear el problema y luego dar una prueba intuitiva.

Consideremos que queremos construir un portafolio, y para esto, invertimos nuestro capital en G activos diferentes (g_1,g_2,....g_G) donde cada activo tiene asociado un rendimiento (R_1,R_2,....R_G). Es importante mencionar que cada rendimiento de cada activo lo podemos obtener en función los precios de ese activo, es decir: $R_g := \frac{S_g(1)-S_g(0)}{S_g(0)}$ (2.5).

Por otro lado, consideremos el vector $W = (w_1,w_2,\dots w_G)^T$ como la proporción de capital invertido en el G-ésimo activo, y a su vez consideremos el vector $\mu = (\bar{R_1},\bar{R_2},\dots \bar{R_G})$ el cual describe el vector de los rendimientos de los G activos,

donde $\mu_1 = E[R_1] = \bar{R_1}$,$\mu_2 = E[R_2] = \bar{R_2}$ ... y $\mu_g = E[R_G] = \bar{R_G}$.

De ésta forma el rendimiento esperado de toda la cartera puede expresarse como:

$\mu_p = E[R_p] = \sum_{g=1}^{G} .E[w_g R_g] = \sum_{g=1}^{G} w_g \mu_g$.

y de forma análoga la varianza de todo el portafolio puede expresarse como :

$\sigma_p^2 = Var[R_p] = \sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} w_i w_j Cov(R_i,R_j) = \sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} w_i \sigma_{ij} w_j$.
$R_p = \sum_{n=1}^{G} w_g R_g$.

Formulación del Problema

Como se mencionó previamente, la gran contribución es expresar el problema estocástico en uno de optimización, de ésta forma, el objetivo es:

Minimizar $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} w_i \sigma_{ij} w_j$

sujeto a: $\mu_p = \sum_{i=1}^{G} w_i \mu_i$ y $\sum_{i=1}^{G} w_i = 1$.

La solución es encontrar los w_i óptimos que minimicen σ_p^2 dado un rendimiento μ_p, cabe mencionar que ese rendimiento lo fija el inversor y esto es en consecuencia de su perfil de inversionista, es decir, un inversionista arriesgado, seguramente optará por un mayor rendimiento y esto propiciará un mayor riesgo en su portafolio y de forma viceversa.

Solución

Para resolver el problema de optimización planteado, se usarán multiplicadores de Lagrange, donde el Lagrangiano queda expresado de la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} w_i \sigma_{ij} w_j + \lambda\left(\mu_p - \sum_{i=1}^{G} w_i \mu_i\right) + \eta\left(\sum_{i=1}^{G} w_i - 1\right)$$

donde:

- λ es el multiplicador de Lagrange para la restricción de rendimiento esperado.
- η es el multiplicador de Lagrange para la restricción de la suma de pesos.

Nótese que se introdujo un multiplicador de Lagrange por cada restricción, para tener en cuenta las limitaciones del problema.

Para encontrar la solución de los multiplicadores, tomamos las derivadas parciales de L con respecto a w_i, λ, and η, y las igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{G} \sigma_{ij} w_j - \lambda \mu_i - \eta = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu_p - \sum_{i=1}^{G} w_i \mu_i = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{G} w_i - 1 = 0.$$

Haciendo el álgebra minuciosamente se encuentran los valores de λ y η , posteriormente se sustituyen en las expresiones de arriba y se obtiene:

$$w_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{G} \sigma_{ij}^{-1}}{\sum_{k=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} \sigma_{kj}^{-1}} \left(\mu_i - \sum_{k=1}^{G} \mu_k \frac{\sum_{j=1}^{G} \sigma_{kj}^{-1}}{\sum_{l=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} \sigma_{lj}^{-1}} \right).$$

Una vez hallado los pesos óptimos w_i^* se puede sustituir en la expresión de la varianza de todo el portafolio, la cual queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = & \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} \sigma_{kj}^{-1}\right)^2} \\ & \times \sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} \sigma_{ij}^{-1} \left(\mu_i - \sum_{k=1}^{G} \mu_k \frac{\sum_{j=1}^{G} \sigma_{kj}^{-1}}{\sum_{l=1}^{G}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{lj}^{-1}} \right) \\ & \times \left(\mu_j - \sum_{k=1}^{G} \mu_k \frac{\sum_{j=1}^{G} \sigma_{kj}^{-1}}{\sum_{l=1}^{G}\sum_{j=1}^{G} \sigma_{lj}^{-1}} \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es posible observar que la solución es compleja e involucra álgebra avanzada. Por esa razón para clarificar la idea, se presentará un ejemplo numérico para entender como es que funciona dicho algoritmo. No obstante, si el lector quiere ver una prueba alternativa se le recomienda el siguiente material Cousin, Lelong, y Picard (2023) en el cual resuelven el problema de minimización usando álgebra matricial, aunque usan supuestos extra como la invertibilidad de la matriz de varianza y covarianza.

2.6. Ejemplo Práctico de Mean Variance

En la sección 2.5 fue notable la mayor contribución de Markowitz en la Teoría Moderna de Portafolios. No obstante, la formulación matemática puede parecer confusa, por lo que se proporcionará un caso práctico donde se pueda apreciar a detalle las bondades del algoritmo.

Para dicho propósito, es importante hablar de los datos que se usarán para el ejercicio, los cuales fueron tomados de Yahoo Finance, donde se escogieron 4 compa-

ñías de tal forma que todas fueran de distintos giros y se cumpliera el principio de la diversificación. En este sentido, se escogieron los siguientes actvos: TESLA(TSLA), BTC(BITCOIN), NIKE(NIKE), y FEMSA(FEMSA).

Time Period: Jul 05, 2022 - Jul 05, 2023 Show: Historical Prices Frequency: Daily

Currency in USD

Date	Open	High	Low	Close*	Adj Close**
Jul 05, 2023	30,793.59	30,877.33	30,769.84	30,845.15	30,845.15
Jul 04, 2023	31,156.87	31,325.20	30,659.36	30,777.58	30,777.58
Jul 03, 2023	30,624.52	31,375.61	30,586.51	31,156.44	31,156.44
Jul 02, 2023	30,587.27	30,766.14	30,264.02	30,620.77	30,620.77
Jul 01, 2023	30,471.85	30,641.29	30,328.87	30,590.08	30,590.08
Jun 30, 2023	30,441.35	31,256.86	29,600.28	30,477.25	30,477.25
Jun 29, 2023	30,086.19	30,796.25	30,057.20	30,445.35	30,445.35
Jun 28, 2023	30,696.56	30,703.28	29,921.82	30,086.25	30,086.25
Jun 27, 2023	30,274.32	31,006.79	30,236.65	30,688.16	30,688.16
Jun 26, 2023	30,480.52	30,636.03	29,955.74	30,271.13	30,271.13

Figura 2.2: Datos Históricos de Bitcoin tomados de Yahoo Finance.

La figura 2.2 muestra como es una hoja de Datos históricos en Yahoo Finance, para el activo de BITCOIN, y para entender los apartados de la gráfica se presenta el siguiente cuadro 2.1.

Columna	Descripción
Fecha	Esta columna muestra la fecha de cada punto de datos históricos. Cada fila representa un día específico en el pasado.
Apertura	El valor en esta columna indica el precio de apertura de la acción (u otro activo financiero) al comienzo del día de negociación.
Máximo	Este valor representa el precio más alto alcanzado por la acción durante el día de negociación.
Mínimo	Indica el precio más bajo alcanzado por la acción durante el día de negociación.
Cierre	El precio de cierre es el valor de la acción al final del día de negociación.
Cierre Ajustado	Esta columna muestra el precio de cierre ajustado de la acción, que tiene en cuenta eventos como dividendos, divisiones de acciones u otras acciones corporativas.
Volumen	El volumen es el número total de acciones (u otro activo financiero) negociadas durante el día.
Dividendos	Esta columna muestra los pagos de dividendos realizados por la empresa durante el período especificado.
Divisiones de Acciones	Aquí se registran las divisiones de acciones que ocurrieron durante el período especificado.

Cuadro 2.1: Descripción de las Columnas.

Nótese que cada columna provee información que es muy relevante por si sola, sin embargo, para el ejemplo que implementaremos, sólo nos basta usar la columna de cierre ajustado, esto porque el precio de los activos resulta ser más adecuado a la realidad. De ésta forma se tomaron los datos de los activos previamente mencionados, de manera semanal por 8 años, teniendo un total de 471 observaciones por activo. A continuación las figuras 2.3 , 2.4, 2.5, 2.6 las fluctuaciones de dicho activos durante ese umbral de tiempo.

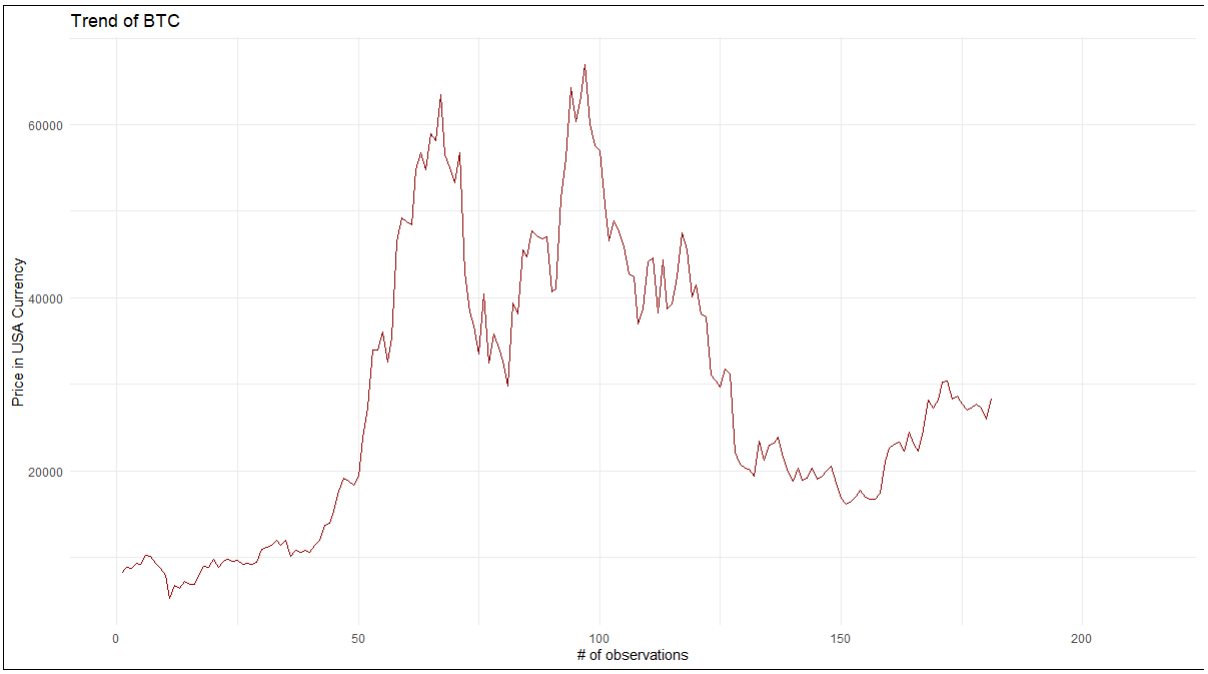

Figura 2.3: Tendencia semanal de BITCOIN.

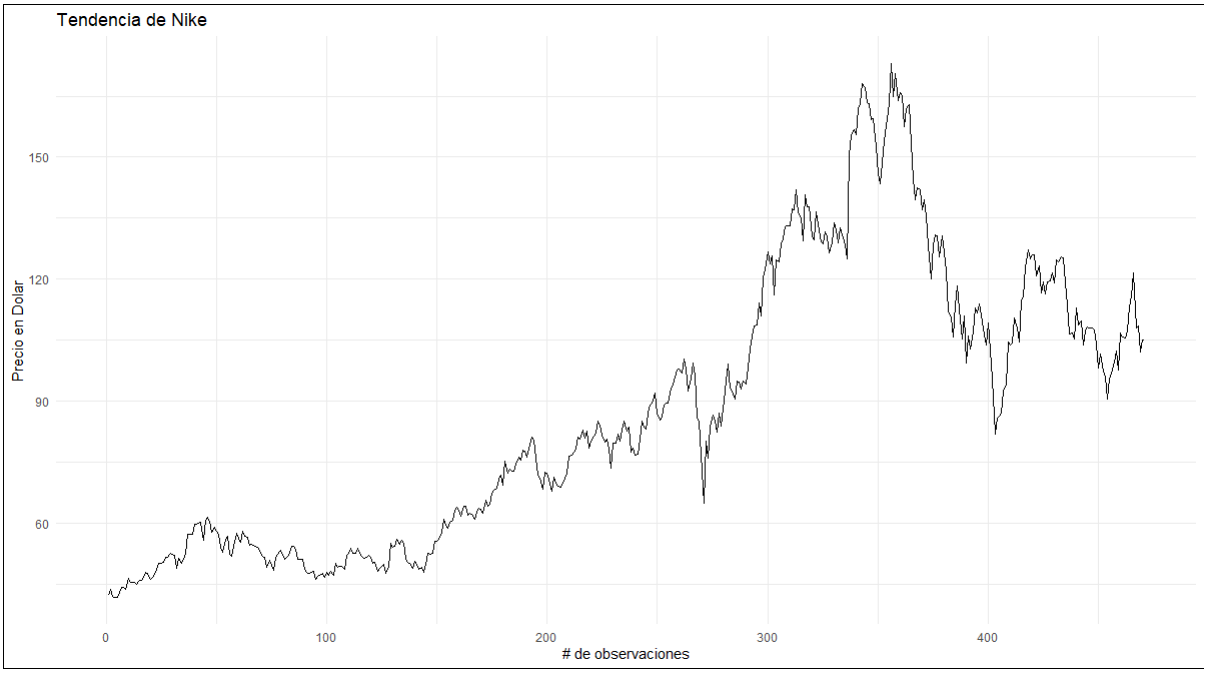

Figura 2.4: Tendencia Semanal de NIKE.

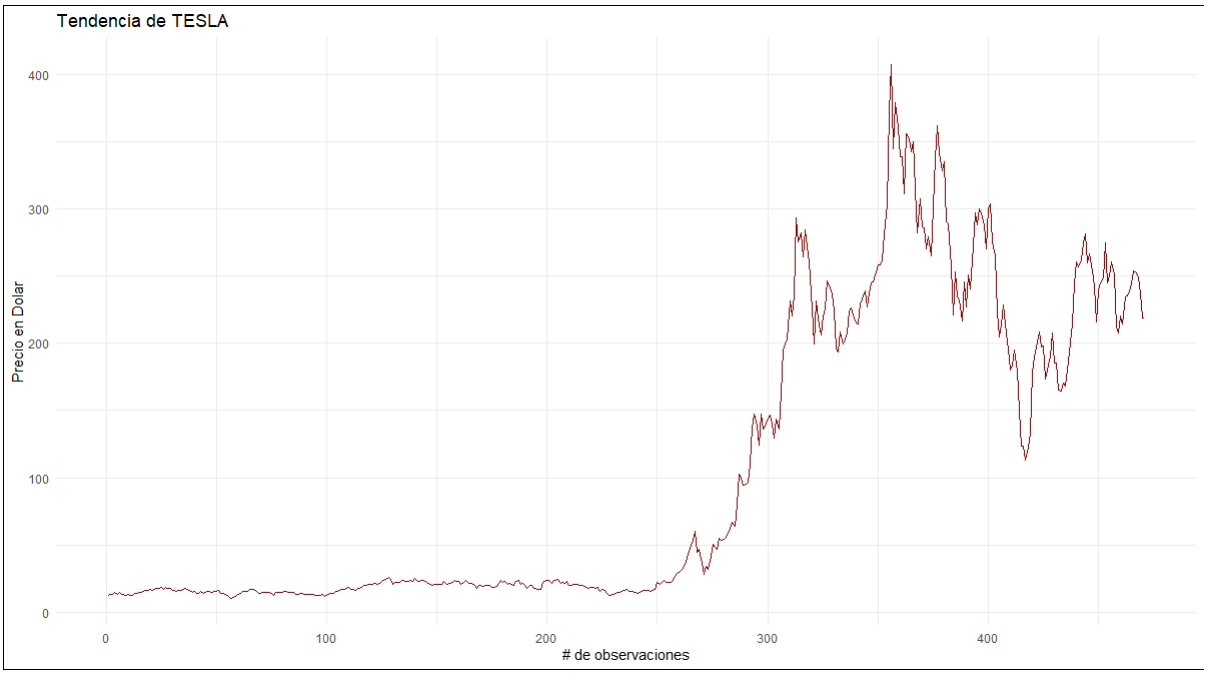

Figura 2.5: Tendencia Semanal de TESLA.

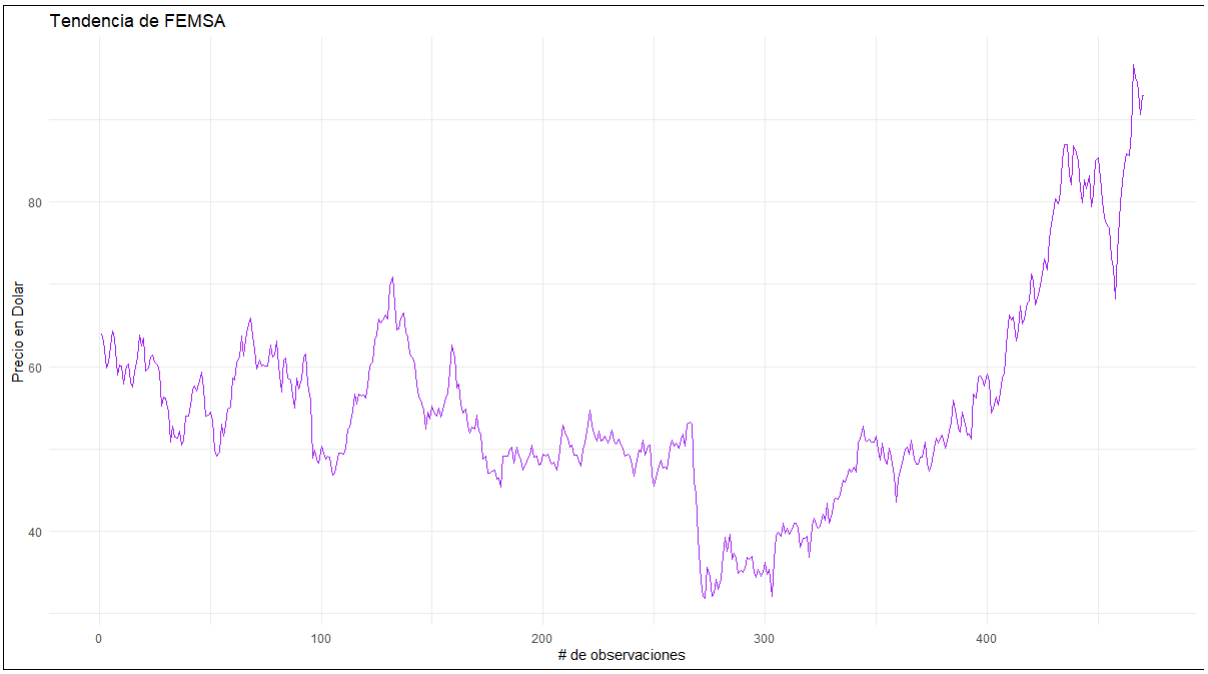

Figura 2.6: Tendencia Semanal de FEMSA.

Es importante tener en cuenta algunas estadísticas descriptivas de los activos que se están analizando para comprender a grandes razgos como han sido sus fluctuaciones durante esos 8 años.

	TSLA	FEMSA	NIKE	BTC
Min.	10.07	31.82	41.61	210.3
1st Qu.	16.72	48.61	54.59	1244.2
Median	23.33	52.23	81.65	8723.9
Mean	103.67	54.98	87.11	15303.1
3rd Qu.	214.56	60.25	111.40	26139.6
Max.	407.36	96.72	173.07	65466.8

Cuadro 2.2: Estadísticas Descriptivas de los Precios de cada Activo.

El cuadro 2.2 presenta una visión detallada de la distribución de precios para cuatro activos financieros: TSLA, FEMSA, NIKE y BTC (Bitcoin) de manera semanal. Analizando las medidas clave, observamos que TSLA exhibe una variabilidad significativa, con un rango amplio desde el mínimo hasta el máximo, indicando posibles fluctuaciones pronunciadas en los precios. FEMSA, en contraste, muestra un rango más estrecho y una variabilidad moderada, lo que sugiere una mayor estabilidad en los precios. NIKE presenta una variabilidad moderada, destacando una mediana significativamente menor que la media, sugiriendo una posible distribución sesgada. BTC, característico de las criptomonedas, muestra un rango extremadamente amplio y variabilidad significativa. La comparación de estas estadísticas ofrece información valiosa para inversores, permitiendo evaluar la dispersión de los precios y la posible volatilidad de cada activo.

Adicionalmente podemos analizar los diagramas de dispersión y las correlaciones entre precios de los activos, los cuales están representados en la figura 2.7.

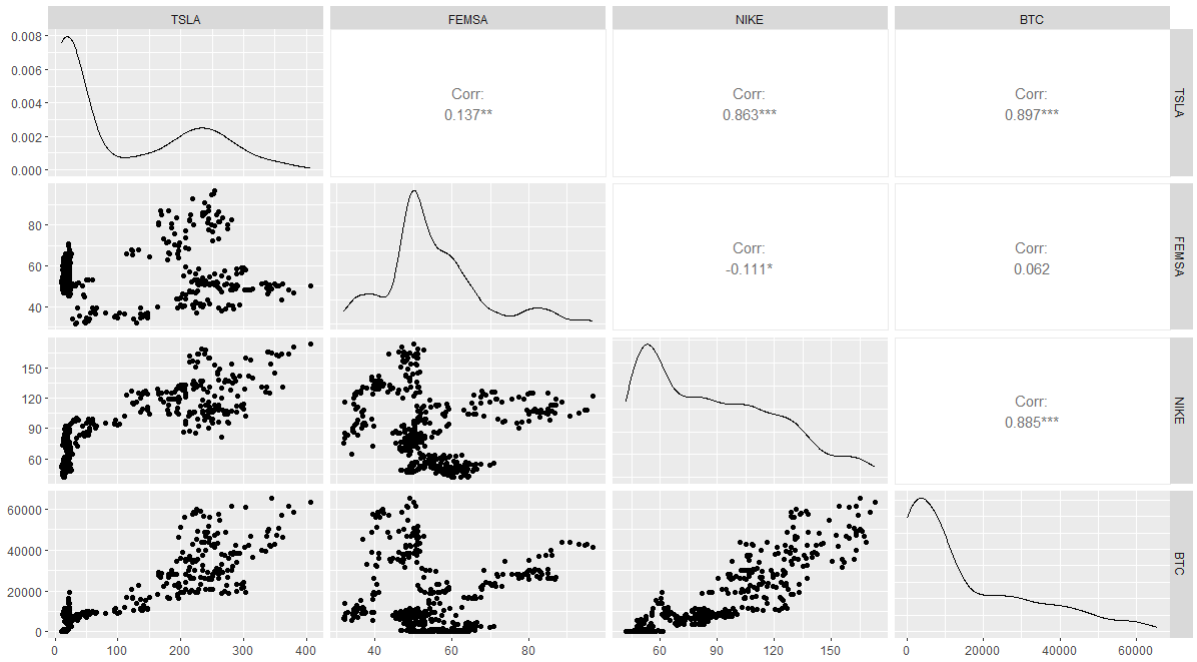

Figura 2.7: Visualizaciones gráficas de los Precios de cada Activo.

Las correlaciones entre los precios ofrecen una perspectiva valiosa sobre cómo estos activos están interrelacionados y si la cartera que se va a proponer tiene sentido en cuanto a la diversificación. La relación entre los precios de TSLA y FEMSA es relativamente baja (0.14), indicando una débil conexión lineal entre ambos activos. En contraste, TSLA exhibe correlaciones notables con NIKE (0.86) y BTC (0.90), sugiriendo fuertes relaciones lineales positivas. En términos simples, los precios de TSLA tienden a moverse en la misma dirección que los de NIKE y BTC, destacando una posible asociación en sus dinámicas. Por otro lado, la correlación negativa y baja entre FEMSA y NIKE (-0.11) indica una débil relación lineal inversa, mientras que la correlación entre FEMSA y BTC es baja (0.06), sugiriendo una conexión lineal débil. Por último, la correlación entre NIKE y BTC es alta (0.89), señalando una fuerte relación lineal positiva. En este sentido, ya se puede empezar el procedimiento para aplicar el algoritmo de MEAN-VARIANCE, donde primero se darán algunas estadísticas del portafolio en el cuadro 2.3.

	TSLA	**FEMSA**	**BTC**	**NIKE**
$\bar{X}_r$	0.0092	0.0014	0.0163	0.0027
S_r^2	0.0064	0.0012	0.0098	0.0016
S_r	0.0800	0.0349	0.0992	0.0398
$\frac{S_r}{\bar{X}_r}$	0.0871	0.2484	0.0608	0.1457

Cuadro 2.3: Estadísticas Descriptivas de los Retornos por Activo.

Para calcular los rendimientos, se utilizó la ecuación 2.5. Primeramente, en términos de rendimiento promedio, TSLA lidera con la media más alta (0.0092), seguido por BTC (0.0163), NIKE (0.0027) y FEMSA (0.0014). Esta métrica proporciona una indicación del rendimiento esperado para cada activo. En cuanto a la varianza, que mide la dispersión de los retornos con respecto a la media, TSLA exhibe la varianza más alta (0.0064), seguido por BTC (0.0098), NIKE (0.0016) y FEMSA (0.0012), sugiriendo una mayor dispersión en los rendimientos, especialmente en TSLA. La desviación estándar, que representa la volatilidad, sigue la misma tendencia, siendo TSLA el más volátil (0.0800), seguido por BTC (0.0992), NIKE (0.0398) y FEMSA (0.0349). En cuanto al coeficiente de variación, expresado como un porcentaje de la media, FEMSA tiene el coeficiente más alto (24 %), seguido por NIKE (14 %), TSLA (8 %) y BTC (6 %). Este indicador revela una mayor variabilidad relativa en FEMSA. Mientras TSLA lidera en rendimiento, también presenta mayor volatilidad. BTC exhibe un rendimiento significativo con volatilidad considerable, NIKE muestra un rendimiento moderado con volatilidad equilibrada, y FEMSA, a pesar de un rendimiento más bajo, presenta una volatilidad relativamente baja en comparación con los demás activos.

De acuerdo a la formulación de Mean Variance para proseguir, es necesario obtener la matriz de varianza covarianza entre los rendimientos de los activos, la cual se puede visualizar en el cuadro 2.4.

Matriz de Var-CovarΣ	**Retornos FEMSA**	**Retornos NIKE**	**Retornos BTC**	**Retornos TSLA**
Retornos FEMSA	0.0012	0.0004	0.0003	0.0006
Retornos NIKE	0.0004	0.0015	0.0005	0.0011
Retornos BTC	0.0003	0.0005	0.0098	0.0011
Retornos TSLA	0.0006	0.0011	0.0011	0.0064

Cuadro 2.4: Matriz de Varianza y Covarianza de los Retornos.

El cuadro 2.4 presenta la Matriz de Varianza y Covarianza (Σ) de los retornos para cuatro activos financieros: FEMSA, NIKE, BTC (Bitcoin) y TSLA (Tesla). En la diagonal principal, se observan las varianzas de los retornos de cada activo, siendo 0.00121671 para FEMSA, 0.001585478 para NIKE, 0.009856407 para BTC y 0.006406012 para TSLA. Las celdas fuera de la diagonal principal contienen las covarianzas entre los retornos de los respectivos pares de activos. Se destaca que la covarianza refleja la relación lineal entre los retornos de dos activos: valores positivos indican movimientos conjuntos, mientras que valores negativos sugieren movimientos opuestos. En este contexto, las covarianzas más altas entre FEMSA y TSLA (0.0006) y entre NIKE y TSLA (0.0011) podrían señalar posibles patrones de comportamiento conjunto o inverso entre estos pares de activos.

Finalmente, antes de aplicar el algoritmo, se requiere un último ingrediente y es la restricción en el rendimiento que se desea obtener, ya que el problema cuadrático expone que la varianza de la cartera a minimizar debe estar sujeta a un rendimiento esperado, y este en nuestro caso será mayor que la ganancia que puede ofrecer un CETE, el cual es un instrumento libre de riesgo, ya que no tendría sentido invertir el capital en un portafolio el cual a priori tiene riesgo y además te ofrece menos que lo que pudieras ganar en otro instrumento. Para dicho fin, es importante mencionar que de a cuerdo a Villaverde (2023), la tasa libre de riesgo anual efectiva es aproximadamente del 11 % lo cual implica que la tasa mensual sea de $(1{,}1107)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}008768$. No obstante, nuestros datos están de manera semanal por lo que la tasa deseada sería: $(1{,}008768)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}002184$

Con las consideraciones mencionadas, podemos ver el cuadro 2.5 que compara el enfoque clásico y este enfoque de MEAN Variance.

Portfafolio	**Pesos iguales**	**Mean Variance**	**Máximo Retorno**
$wFEMSA$	25.00 %	54.89 %	0.00 %
$wBTC$	25.00 %	4.26 %	100.00 %
$wTSLA$	25.00 %	3.90 %	0.00 %
$wNIKE$	25.00 %	36.93 %	0.00 %
Total	**100 %**	**100 %**	**100 %**
Retorno Esperado μ_p	0.74 %	0.68 %	1.63 %
Varianza del Portafolio σ_p	4.07 %	2.94 %	9.92 %
Performance $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$	18.18 %	23.15 %	16.41 %

Cuadro 2.5: Combinación de Distintos Tipos de Portafolios.

En la construcción y análisis de distintos portafolios, se pueden identificar estrategias fundamentadas en la teoría clásica y moderna de inversiones. El portafolio de pesos iguales, asignando el 25 % del capital a cada activo, refleja la filosofía clásica de diversificación, buscando distribuir equitativamente los recursos para mitigar riesgos. Por otro lado, el portafolio Mean Variance, que optimiza la combinación de activos para maximizar el rendimiento esperado o minimizar el riesgo, muestra un equilibrio entre riesgo y rendimiento. El enfoque de Máximo Retorno, asignando el 100 % del capital al activo con el mayor rendimiento individual, se alinea con la teoría clásica, priorizando la maximización de los rendimientos.

Al analizar los resultados, el portafolio de pesos iguales presenta un rendimiento esperado del 0,74 %, reflejando una distribución equitativa de rendimientos, mientras que Mean Variance ofrece un rendimiento ligeramente menor (0,7 %). El portafolio de Máximo Retorno destaca con el rendimiento más alto (1,6 %). En términos de variabilidad, el portafolio de pesos iguales tiene la menor varianza (4 %), Mean Variance busca un equilibrio (3 %), y Máximo Retorno exhibe la mayor variabilidad (10 %). La métrica de rendimiento relativo al riesgo destaca que el portafolio de pesos iguales tiene un buen equilibrio (18 %), Mean Variance muestra un rendimiento relativo superior (23 %), mientras que el portafolio de Máximo Retorno, a pesar de su mayor rendimiento esperado, presenta una mayor variabilidad, reflejada en un rendimiento

relativo más bajo (16 %).

Este análisis evidencia cómo diversas estrategias de construcción de portafolios pueden ser interpretadas desde los prismas de la teoría clásica y moderna, permitiendo a los inversores seleccionar la estrategia que mejor se alinee con sus objetivos y tolerancias al riesgo. La integración de la diversificación clásica con herramientas modernas de optimización de portafolios proporciona un enfoque integral para la gestión efectiva de riesgos y rendimientos en el entorno financiero actual. Es importante mencionar que debido a la restricción del rendimiento esperado, no se calculó el portafolio de mínima varianza.

Finalmente, se presenta la figura 2.8 de la frontera eficiente para darnos una idea mas global de la variedad de portafolios que pueden existir dependiendo del perfil del inversionista y cuales son los óptimos desde la teoría de carteras.

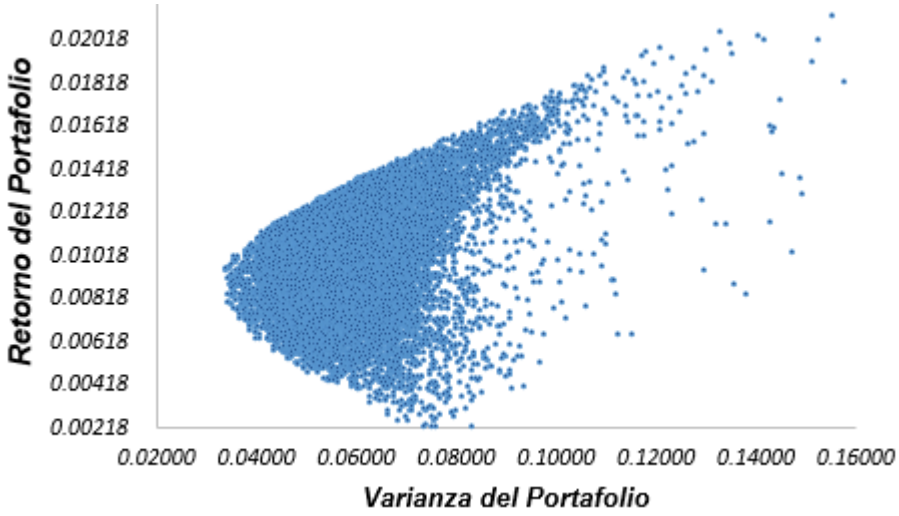

Figura 2.8: Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios.

La figura 2.8 presenta la frontera eficiente obtenida a partir del análisis de 15,000 carteras simuladas, teniendo en cuenta las restricciones del problema. Es evidente que la elección de puntos por debajo de la curva puede no ser recomendable, ya que estos puntos implican un mayor riesgo para el mismo nivel de rendimiento en comparación con los puntos situados por encima de la curva. Esto subraya la importancia de la asignación estratégica de cartera, donde los inversionistas buscan optimizar su relación riesgo-rendimiento. De ésta forma, los inversionistas pueden identificar carteras que

ofrecen rendimientos óptimos mientras minimizan la exposición a riesgos innecesarios.

2.7. Consideraciones Relevantes

El enfoque Mean Variance para la gestión de portafolios en un solo periodo demostró ser una herramienta valiosa al permitirnos construir portafolios que maximizan el rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, principalmente, una de las ventajas que ofrece ésta formulación es que se puede analizar matemáticamente sin mucha dificultad, y se pueden entender con ejemplos sencillos todas sus propiedades. Sin embargo, en la evolución constante del ámbito financiero, es imperativo adaptarse a nuevas metodologías que aprovechen el vasto conjunto de datos históricos disponibles para poder simular datos que sirvan para futuras predicciones y así poder crear carteras que resulten más realistas.

La capacidad actual para simular datos históricos mediante metodologías innovadoras marca un hito significativo en el proceso de toma de decisiones. La incorporación de enfoques como el Browniano Geométrico y Simulación Montecarlo en la simulación de precios de activos nos brinda una perspectiva más dinámica y precisa. Estas metodologías no solo capturan la esencia de la dinámica de los mercados, sino que también permiten modelar con mayor fidelidad las complejidades subyacentes. La simulación de datos históricos mediante estas técnicas más avanzadas proporciona una visión más robusta y realista de los posibles escenarios futuros. Además, al utilizar modelos más sofisticados, podemos considerar de manera más efectiva las fluctuaciones y patrones que los enfoques tradicionales podrían pasar por alto. La combinación de la sólida base de Mean Variance con estas innovaciones metodológicas marca el camino hacia un análisis más completo y eficaz en la toma de decisiones financieras.

Capítulo 3

Modelos Dinámicos en la Predicción de Comportamientos de Precios

En la sección anterior se hizo énfasis en la necesidad de buscar herramientas y metodologías que nos ayudarán en la construcción de modelos para simular los precios de los activos, para esto primeramente se planteará como es que funciona la lógica detrás de los modelos predictivos y para dicho fin se presenta el cuadro 3.1 que engloba la metodología a seguir:

Paso	**Descripción**
1. Definición del Problema	Establecer claramente el objetivo de predicción, como la fluctuación del precio de una acción.
2. Recopilación de Datos	Seleccionar y recopilar datos relevantes, priorizando la calidad y cantidad de datos.
3. Exploración y Preprocesamiento	Llevar a cabo la limpieza de datos para eliminar inconsistencias y realizar análisis exploratorio para identificar patrones y tendencias.
4. Selección del Modelo	Elegir el algoritmo adecuado (Montecarlo y Browniano Geométrico.) y dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba.
5. Entrenamiento del Modelo	Ajustar iterativamente los parámetros del modelo utilizando el conjunto de entrenamiento.
6. Validación del Modelo	Probar el modelo con un conjunto de datos de prueba y evaluar su rendimiento mediante métricas como precisión o error cuadrático medio.

Cuadro 3.1: Proceso paso a paso para la construcción de un modelo predictivo.

Lo confuso desde el punto de vista del autor es como es que funciona la división en el conjunto de prueba y en el conjunto de entrenamiento, de acuerdo a Wolf (2023) se recomienda implementar un enfoque estratégico que refleje la naturaleza temporal de los datos financieros. La metodología preferida es la división temporal Lindgren (2017), donde se ordenan los datos cronológicamente y se asigna una fracción significativa, por ejemplo, el 80 % más antiguo, para constituir el conjunto de entrenamiento. Este conjunto abarca la mayor parte del historial disponible y permite al modelo aprender de patrones y comportamientos previos. Por otro lado, se reserva el 20 % más reciente como conjunto de prueba, proporcionando una evaluación realista de la capacidad del modelo para generalizar a datos futuros. Esta estrategia es crucial al simular y predecir precios de activos, ya que asegura que el modelo se entrene en escenarios históricos antes de enfrentarse a información más actualizada. Siguiendo este enfoque, se logra una evaluación más precisa del rendimiento del modelo en condiciones que imitan con fidelidad las exigencias dinámicas del entorno financiero real.

3.1. Simulación Montecarlo

La simulación de Montecarlo es una técnica estadística y computacional que se utiliza para modelar el comportamiento de sistemas complejos mediante la generación de múltiples muestras aleatorias Coffin (2007). Esta metodología toma su nombre del famoso casino Montecarlo, conocido por el azar presente en los juegos de azar Lawson (2013). La esencia de la simulación de Montecarlo radica en realizar repetidas simulaciones utilizando números aleatorios para representar la incertidumbre y variabilidad en un modelo. En el contexto financiero, la simulación de Montecarlo se emplea para evaluar el riesgo y rendimiento de carteras de inversión, opciones financieras, y otros instrumentos. Para llevar a cabo una simulación de Montecarlo, se definen los parámetros clave del modelo y se generan múltiples trayectorias de datos utilizando números aleatorios que siguen las distribuciones de probabilidad especificadas. Estas trayectorias simuladas permiten evaluar el comportamiento del sistema en diferen-

tes escenarios y proporcionan una visión más completa de los posibles resultados. Procedamos a entender matemáticamente como es que funciona dicho método:

Consideramos una variable aleatoria X que representa la fuente de la incertidumbre en el sistema, en nuestro caso es la fluctuación de precios por activo. La función objetivo $f(X)$ describe el comportamiento de los precios. Para abordar esta incertidumbre, empleamos la técnica de Simulación Montecarlo. El proceso comienza generando N muestras aleatorias de la variable X, denotadas como $X_1, X_2, \ldots, X_N$, siguiendo la distribución de probabilidad conocida o estimada. Posteriormente, evaluamos la función objetivo para cada muestra generada, es decir, calculamos $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_N)$. Con estas evaluaciones, podemos estimar el resultado de interés, ya sea el promedio, la varianza, cuantiles, u otras métricas relevantes. Una forma común de aproximar la expectativa de una función $g(X)$ se expresa mediante la fórmula:

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(X_i)$$

Donde $\mathbb{E}[\cdot]$ denota la esperanza matemática y N es el número de muestras aleatorias generadas. Esta metodología proporciona una aproximación efectiva de la respuesta del sistema bajo incertidumbre, permitiendo la toma de decisiones informadas y la evaluación de diferentes escenarios.

3.2. Ejemplo de Simulación Montecarlo

A continuación se presenta la construcción de un portafolio con datos simulados, donde se utilizó un algoritmo de aprendizaje y el método Montecarlo para simular 100,000 escenarios usando como referencia la media y varianza halladas en el ejemplo de la sección 2 para así generar trayectorias lo más parecidas a los precios de nuestros activos. Para dicho fin, las figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 muestran las trayectorias de los precios obtenidos versus las trayectorias originales.

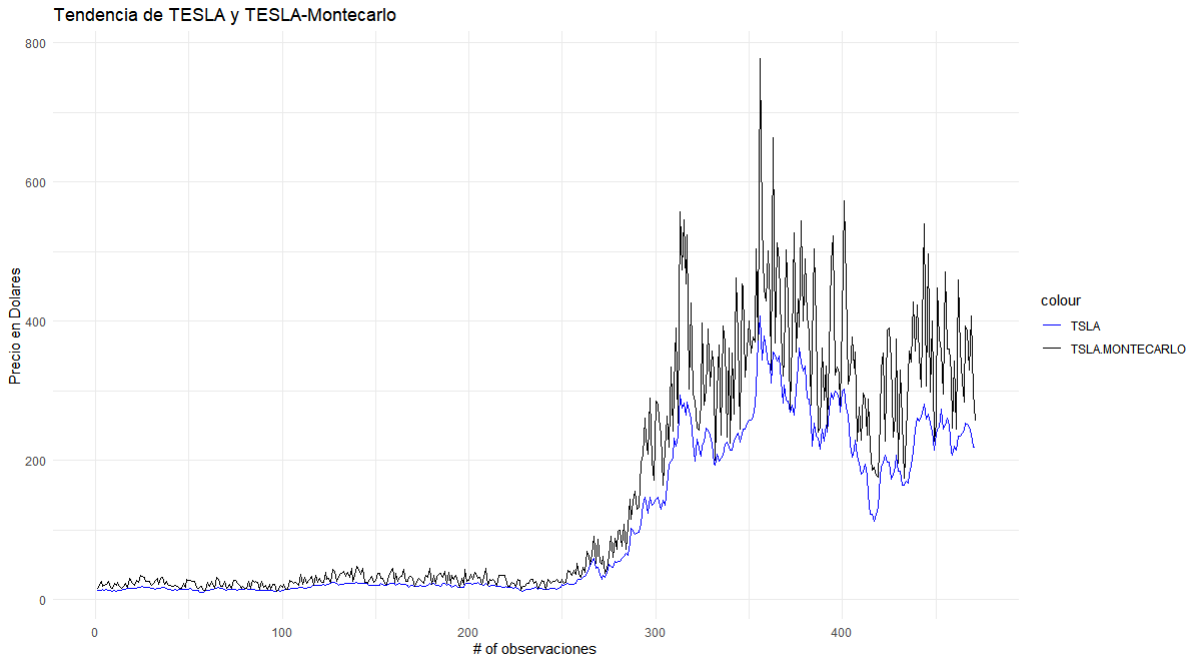

Figura 3.1: TSLA-Monecarlo vs TSLA.

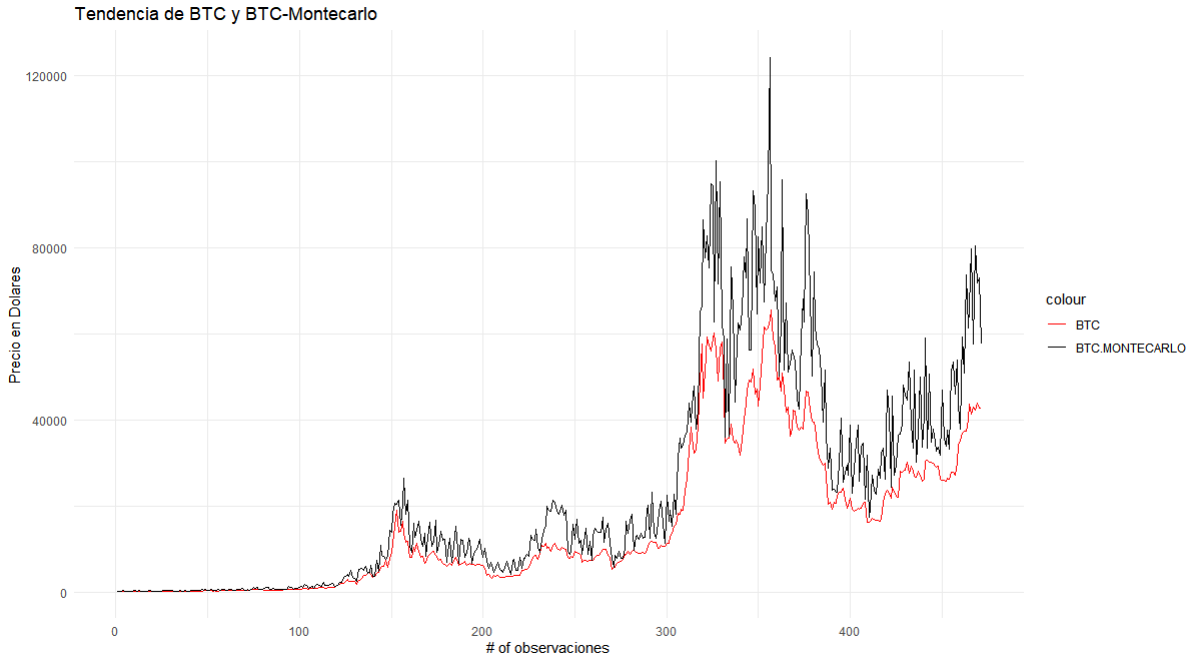

Figura 3.2: BTC-Montecarlo vs BTC.

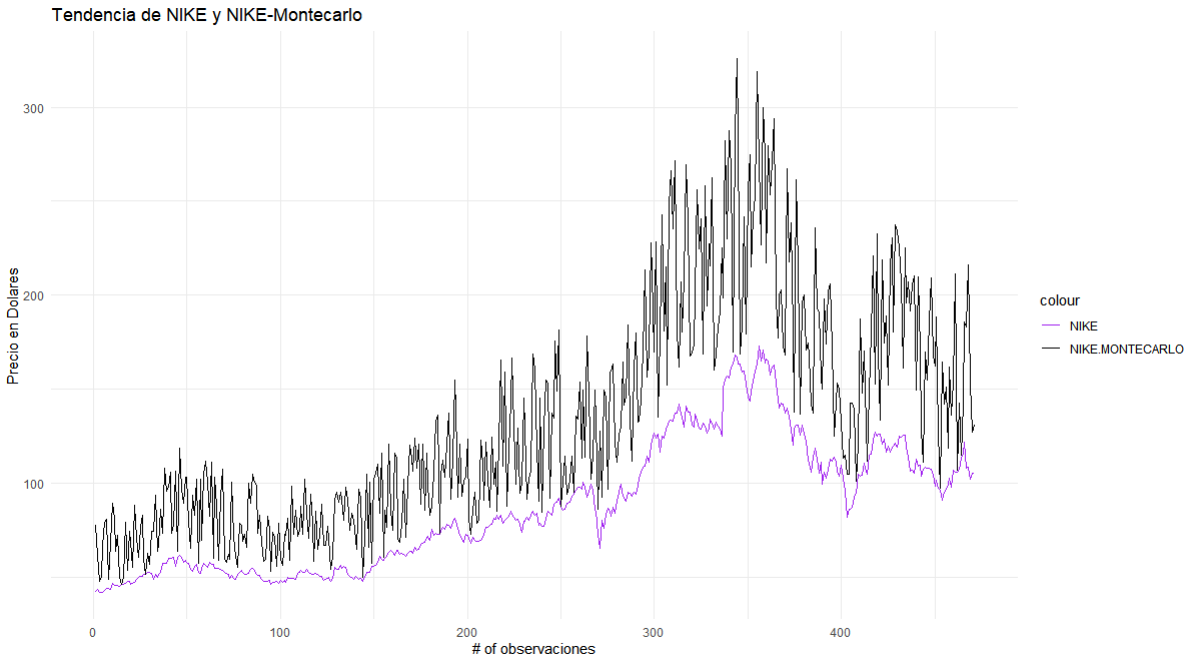

Figura 3.3: NIKE-Montecarlo vs NIKE.

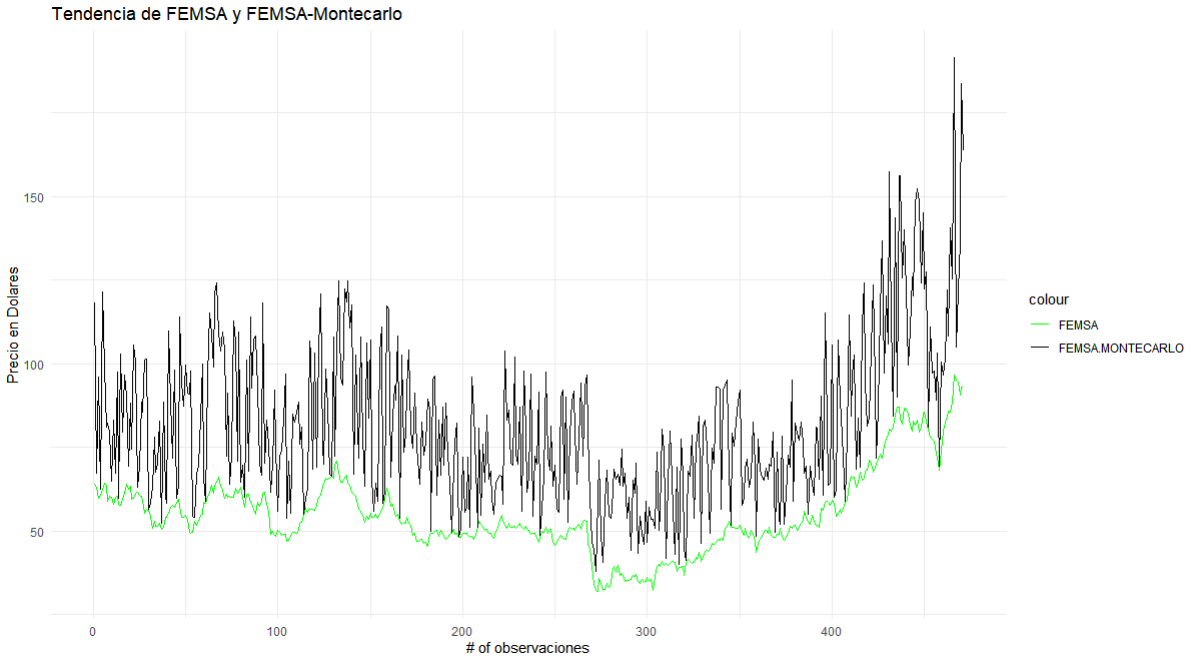

Figura 3.4: FEMSA-Montecarlo vs FEMSA.

	TSLA	**FEMSA**	**BTC**	**NIKE**
$\bar{X}_r$	0.0538	0.0433	0.0533	0.0375
S_r^2	0.1060	0.0938	0.0931	0.0774
S_r	0.3256	0.3062	0.3051	0.2782
$\frac{S_r}{\bar{X}}$	1.9700	2.1656	1.7466	2.0637

Cuadro 3.2: Estadísticas de los Rendimientos usando Método Montecarlo.

El cuadro 3.2 ofrece los resultados estadísticos de los rendimientos de los cuatro activos financieros simulados por el método Montecarlo. En términos de rendimiento promedio, TSLA lidera con un 6 %, seguido de cerca por BTC (5 %), mientras que FEMSA y NIKE muestran rendimientos ligeramente más bajos de 4 % y 3 %, respectivamente. La varianza, que indica la dispersión de los rendimientos, presenta a TSLA como el activo más volátil (10 %), seguido por FEMSA (9 %), BTC (8 %) y NIKE (7 %). La desviación estándar, que refleja la volatilidad, sigue la misma tendencia, con TSLA registrando la cifra más alta (32 %). En términos relativos, el coeficiente de variación destaca a FEMSA como el activo más variable en relación con su media (21 %), seguido de NIKE (20 %), TSLA (19 %) y BTC (17 %).

De igual forma que en la sección 2 para aplicar el algoritmo de Mean-Variance, se presenta a continuación el cuadro 3.3 la matriz de Varianza y Covarianza.

Matriz de Var-CovarΣ	**Retornos FEMSA**	**Retornos NIKE**	**Retornos BTC**	**Retornos TSLA**
Retornos FEMSA	0.1081	0.0007	0.0009	0.0096
Retornos NIKE	0.0007	0.0958	0.0029	0.0068
Retornos BTC	0.0003	0.0005	0.0098	0.0011
Retornos TSLA	0.0006	0.0011	0.0011	0.0064

Cuadro 3.3: Matriz de Varianza y Covarianza de los Retornos por Simulación Montecarlo.

Al examinar la diagonal principal, se revela la dispersión de los rendimientos individuales, evidenciando, por ejemplo, la notable volatilidad de TSLA con una varianza de 0.1081. Las covarianzas situadas fuera de la diagonal principal son cruciales para comprender las relaciones entre los activos. Covarianzas positivas, como la modesta pero significativa 0.0007 entre TSLA y FEMSA, indican la propensión de ambos activos a experimentar movimientos conjuntos en la misma dirección. Además, la simetría de la matriz y las covarianzas no negativas refuerzan la validez y coherencia de la estructura, confirmando las propiedades esenciales de una matriz de varianza y covarianza.

Portfafolio	**Pesos iguales**	**Mean Variance**	**Máximo Retorno**
$wFEMSA$	25.00 %	24.48 %	0.00 %
$wBTC$	25.00 %	22.77 %	0.00 %
$wTSLA$	25.00 %	21.68	100.00 %
$wNIKE$	25.00 %	31.05 %	0.00 %
Total	**100 %**	**100 %**	**100 %**
Retorno Esperado μ_p	4.69 %	4.60 %	5.38 %
Varianza del Portafolio σ_p	16.30 %	16.16 %	32.88 %
Performance $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$	28.81 %	28.49 %	16.41 %

Cuadro 3.4: Combinación de Distintos Tipos de Portafolios por Simulación Montecarlo.

En términos de rendimiento, se observa en el cuadro 3.4 que el portafolio de Màximo Retorno presenta el rendimiento esperado más alto, alcanzando un 5 %, seguido por el portafolio de Pesos Iguales. No obstante, al analizar la variabilidad, se observa que el portafolio de Máximo Retorno exhibe una varianza considerablemente más alta (32 %), mientras que los portafolios de Pesos Iguales y Mean Variance muestran una menor variabilidad. La métrica de rendimiento relativo al riesgo ($\frac{\mu_p}{\sigma_p}$) destaca que el portafolio de Mean Variance proporciona una eficiente compensación entre riesgo y retorno, con un valor del 28 %. Por otro lado, el portafolio de Pesos Iguales muestra ligeramente un mejor equilibrio (29 %), mientras que el portafolio de Máximo Retorno tiene un rendimiento relativo más bajo (16 %), lo cual es coherente con su mayor riesgo.

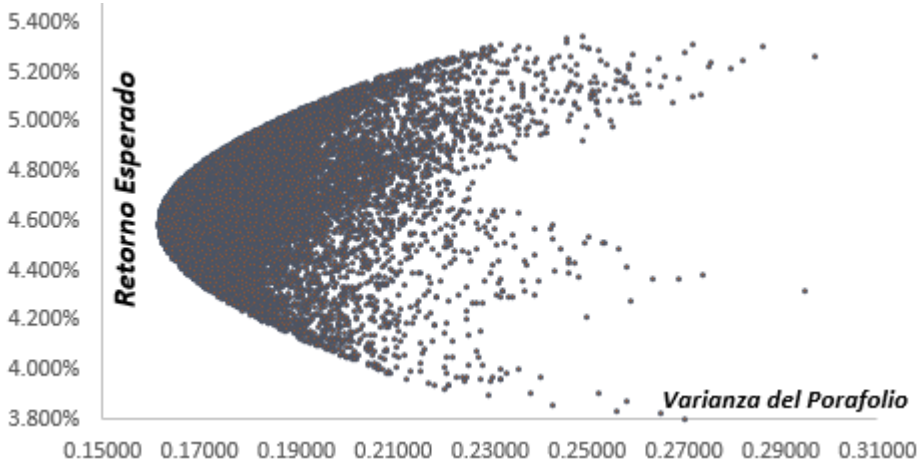

Figura 3.5: Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios con Simulación Montecarlo.

De igual forma que en la sección 2, se tiene la figura 3.5 de la frontera eficiente donde los puntos ubicados en la parte superior izquierda de la frontera representan las opciones preferidas, ya que ofrecen mayores rendimientos para un nivel dado de riesgo. Por otro lado, los puntos en la parte inferior derecha indican combinaciones menos atractivas, ya que implican un mayor riesgo para un rendimiento similar. No obstante, se puede apreciar que las figuras 2.8 y 3.5 son distintas porque sus respectivas carteras ofrecen distintos riesgo y retornos.

3.3. Simulación con el Browniano Geométrico

La metodología del Browniano Geométrico es un modelo matemático ampliamente utilizado para describir la evolución de activos financieros a lo largo del tiempo, especialmente en contextos de finanzas cuantitativas Ríos (2012). Este modelo se basa en el movimiento browniano, un proceso estocástico continuo, y se utiliza para simular el comportamiento de precios de activos financieros, como acciones, divisas o commodities. El GBM se define por la siguiente ecuación estocástica: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

Donde:

- S_t es el precio del activo en el tiempo t.

- μ es la tasa de crecimiento anual, que representa la tendencia esperada del activo.

- σ es la volatilidad anual, que mide la dispersión de los rendimientos del activo.

- dW_t es el movimiento browniano, un proceso estocástico que introduce aleatoriedad.

Esta ecuación describe cómo el precio de un activo cambia en el tiempo. La primera parte ($\mu S_t dt$) representa la tendencia determinística del crecimiento o declive del activo, mientras que la segunda parte ($\sigma S_t dW_t$) modela la volatilidad estocástica, que introduce aleatoriedad en el proceso. No obstante, recordemos que estamos en el caso discreto, por lo que hay una versión condensada del GBM para el caso discreto donde en lugar de utilizar una ecuación diferencial estocástica continua, se puede emplear una ecuación que refleje los cambios en el precio del activo en intervalos específicos de tiempo Trillo (s.f.). La versión discreta del GBM se expresa comúnmente de la siguiente manera:

$$S_{t+1} = S_t \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot Z}$$

donde:

- S_t es el precio del activo en el tiempo t.
- r es la tasa de crecimiento anual, que representa la tendencia esperada del activo.
- σ es la volatilidad anual, que mide la dispersión de los rendimientos del activo.
- Δt es el intervalo de tiempo entre observaciones.
- Z es un número aleatorio generado a partir de una distribución normal estándar.

En este enfoque discreto, el cambio en el precio del activo entre dos periodos de tiempo consecutivos se calcula mediante una función exponencial que incorpora tanto la tendencia determinista como la volatilidad estocástica, lo cual resulta sencillo para implementaciones en entornos computacionales, ya que simplifica el cálculo de las trayectorias del precio del activo en pasos discretos Aguilar (2020).

3.4. Ejemplo Práctico de Simulación GBM

Nuevamente mediante técnicas de aprendizaje automático y simulado los precios usando el GBM, se muestran las figuras 3.7, 3.8, 3.6, 3.9 trayectorias de los precios

simulados versus los precios reales.

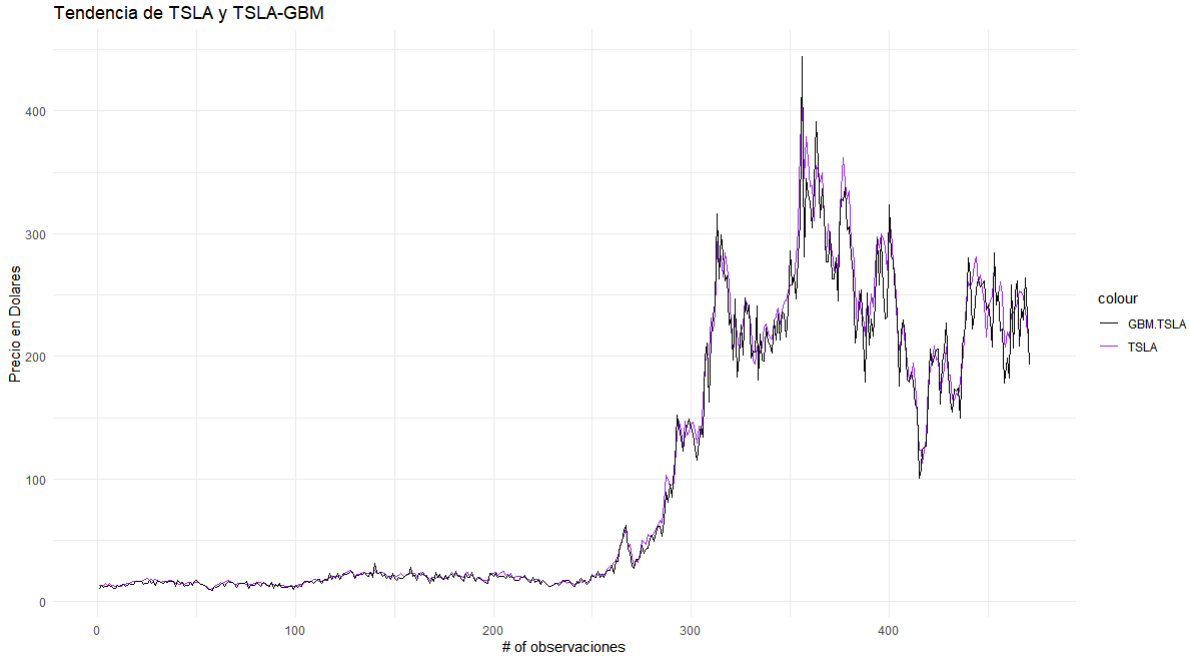

Figura 3.6: GBM-TSLA vs TSLA

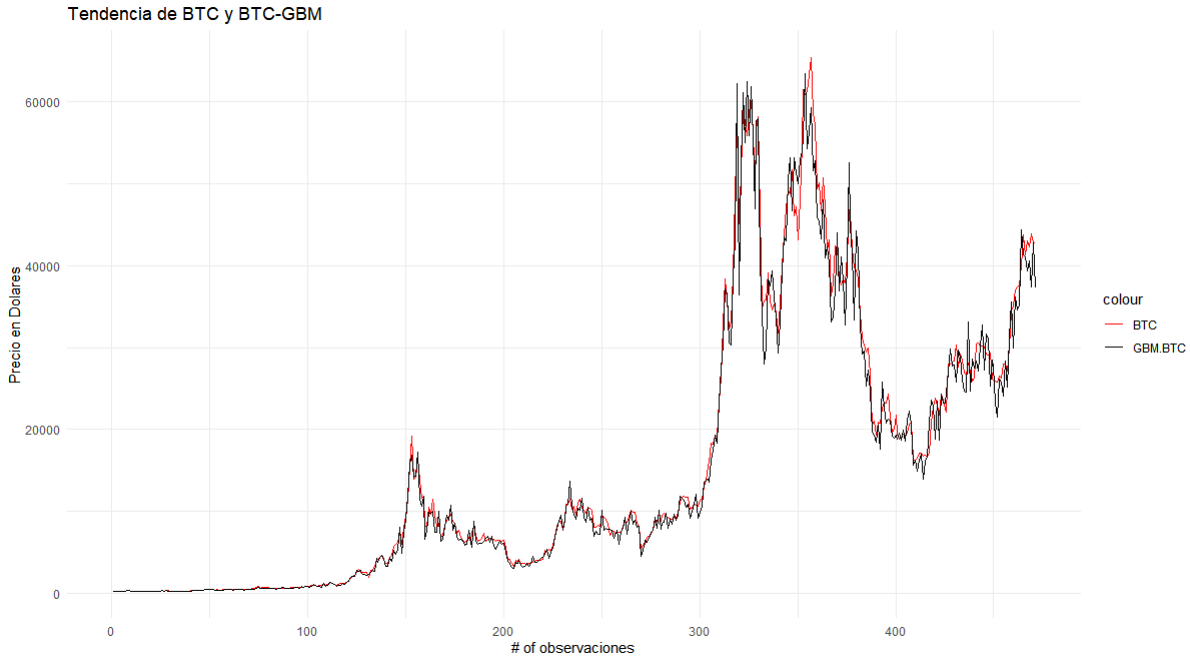

Figura 3.7: GBM-BTC vs BTC

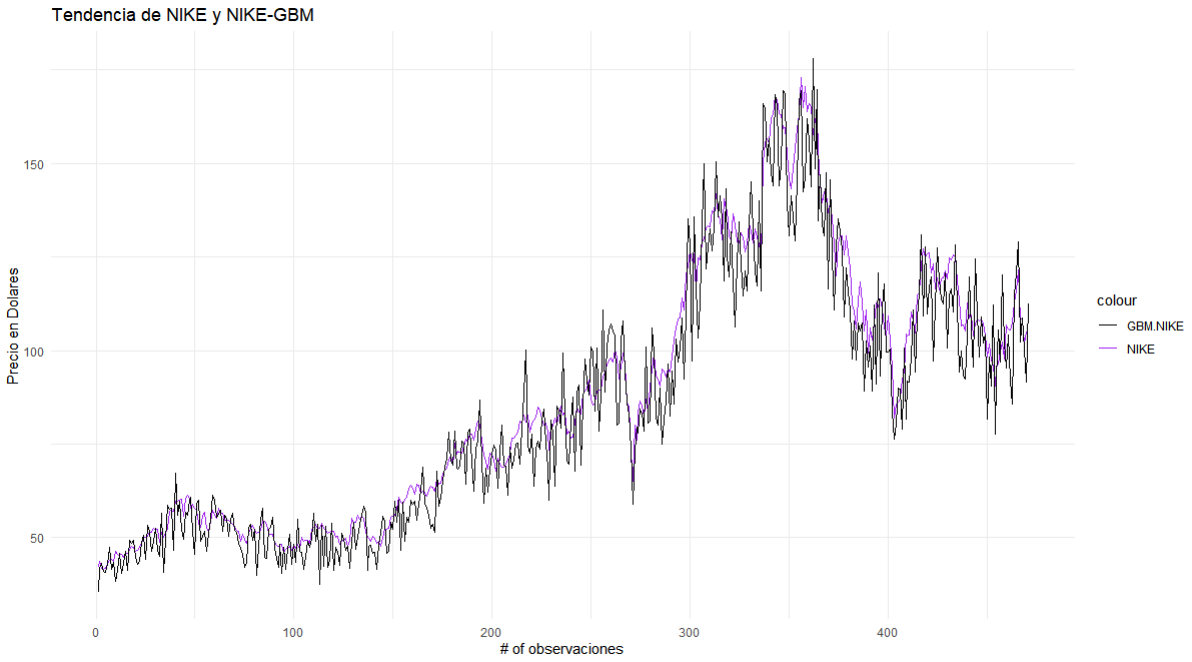

Figura 3.8: GBM-NIKE vs NIKE

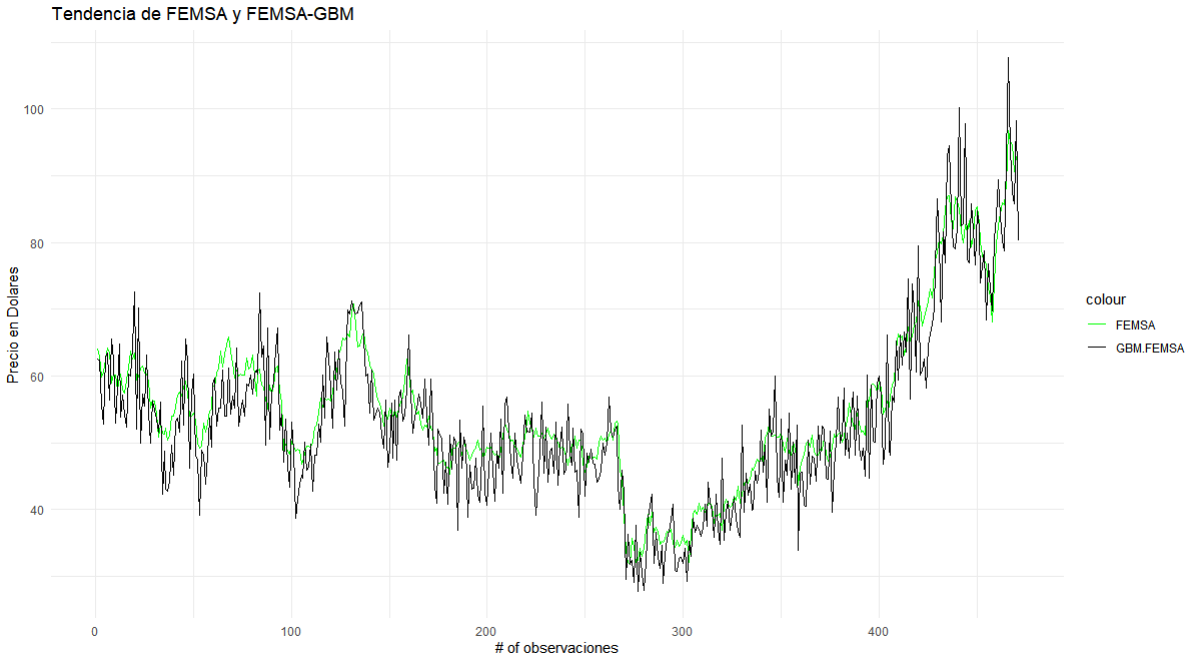

Figura 3.9: GBM-FEMSA vs FEMSA

Proseguimos con la construcción de los portafolios, tomando en cuenta estos nuevos precios simulados, donde el cuadro 3.5 se presentan las estadísticas de los rendimientos por activo.

Activo	**TSLA**	**FEMSA**	**NIKE**	**BTC**
$\bar{X}_r$	0.0177	0.0098	0.0116	0.0243
S_r^2	0.0239	0.0188	0.0186	0.0271
S_r	0.1548	0.1372	0.1365	0.1647
$\frac{S_r}{\bar{X}}$	6.4562	7.2865	7.3217	6.0689

Cuadro 3.5: Estadísticas de los Rendimiento de Activos usando simulación GBM.

Al analizar las métricas presentadas, podemos observar que en términos de rendimiento promedio ($\bar{X}_r$), BTC lidera con un valor de 0.0243, indicando un rendimiento esperado superior en comparación con los demás activos. En cuanto a la varianza de rendimiento (S_r^2), BTC también muestra la cifra más alta (0.0271), lo que sugiere una mayor dispersión de los rendimientos alrededor de la media y, por ende, una mayor volatilidad. Al evaluar la desviación estándar (S_r), que proporciona una medida de la dispersión de los rendimientos, nuevamente BTC se destaca con el valor más elevado (0.1648), confirmando su mayor volatilidad en comparación con los demás activos. Sin embargo, cuando consideramos el coeficiente de variación ($\frac{S_r}{\bar{X}}$), que normaliza la desviación estándar en relación con la media, observamos que NIKE tiene el coeficiente más alto, indicando una mayor volatilidad relativa en relación con su rendimiento promedio.

Procedemos de igual forma a construir la matriz de varianza y covarianza entre los activos en el cuadro 3.6:

Σ Var-Covar	**RendTSLA**	**RendFEMSA**	**RendNIKE**	**RendBTC**
RendTSLA	0.0261	0.0047	0.0038	0.0040
RendFEMSA	0.0047	0.0210	0.0028	-0.0010
RendNIKE	0.0038	0.0028	0.0208	0.0033
RendBTC	0.0040	-0.0010	0.0033	0.0293

Cuadro 3.6: Matriz de Varianza y Covarianza entre Activos usando Simulación GBM.

Los valores fuera de la diagonal principal representan las covarianzas entre los rendimientos de diferentes activos, mientras que los valores en la diagonal principal son las varianzas individuales. La covarianza positiva entre RendTSLA y RendFEMSA (0.0047) indica cierta relación positiva entre estos dos activos. Por otro lado, la covarianza negativa entre RendFEMSA y RendBTC (-0.0010) sugiere una relación inversa. La mayor varianza se observa en RendBTC (0.0293), indicando su mayor nivel de riesgo individual. Esta información es crucial para la construcción de carteras diversificadas, ya que una matriz de varianza y covarianza se utiliza en la teoría moderna de carteras para calcular el riesgo y el rendimiento esperado de los portafolios.

Finalmente, se procede a la construcción de las diversas carteras y al análisis de éstas:

Portfafolio	**Pesos iguales**	**Mean Variance**	**Máximo Retorno**
$wFEMSA$	25.00 %	31.86 %	0.00 %
$wBTC$	25.00 %	22.99 %	100.00 %
$wTSLA$	25.00 %	17.56 %	0.00 %
$wNIKE$	25.00 %	27.57 %	0.00 %
Total	**100 %**	**100 %**	**100 %**
Retorno Esperado μ_p	1.588 %	1.50 %	2.43 %
Varianza del Portafolio σ_p	9.10 %	8.97 %	17.12 %
Performance $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$	17.45 %	16.77 %	14.21 %

Cuadro 3.7: Combinación de Distintos Tipos de Portafolios por Simulación GBM.

El cuadro 3.7 presenta tres tipos de portafolios generados mediante simulación GBM: Pesos Iguales, Mean Variance y Máximo Retorno. El primer portafolio asigna un 25 % a cada activo, mientras que Mean Variance optimiza la relación riesgo-rendimiento y Máximo Retorno concentra el 100 % en el activo de mayor rendimiento

(BTC). En términos de rendimiento esperado (μ_p), Pesos Iguales obtiene un .016, Mean Variance alcanza .015, y Máximo Retorno llega a .023. La varianza del portafolio (σ_p) es más baja en Pesos Iguales (9 %) que en Mean Variance (8 %) y Máximo Retorno (17 %). Al considerar la métrica de rendimiento relativo al riesgo ($\frac{\mu_p}{\sigma_p}$), Pesos Iguales lidera con un 17 %, seguido por Mean Variance con 16 %, y Máximo Retorno con 14 %. La conclusión destaca que, aunque Mean Variance presenta un rendimiento esperado ligeramente menor, logra una reducción significativa en la varianza, evidenciando su eficacia para equilibrar riesgo y rendimiento en la construcción de portafolios.

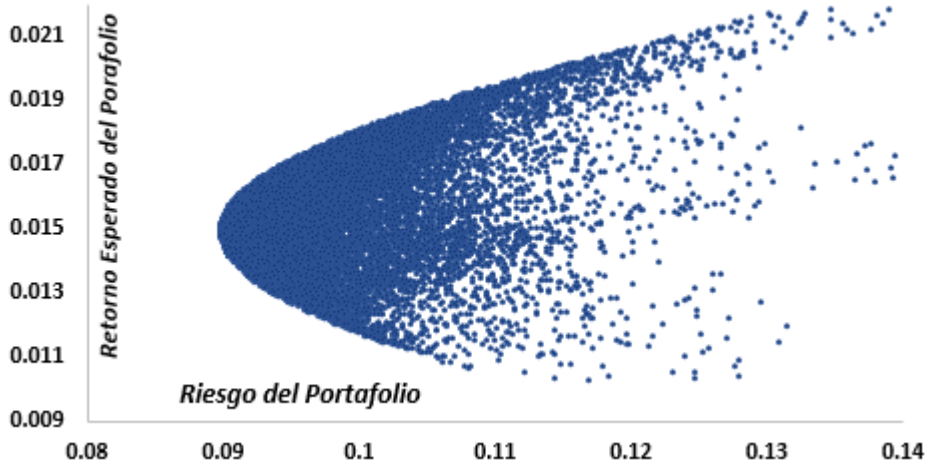

Figura 3.10: Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios con Simulación GBM.

Es crucial destacar que las figuras 2.8 , 3.5 y 3.10 presentan fronteras eficientes distintas. Esto refleja las diferentes combinaciones de activos en sus respectivas carteras, lo que se traduce en perfiles únicos de riesgo y retorno. La variación en estas fronteras subraya la importancia de la selección cuidadosa de activos y la diversificación para construir carteras que se alineen con los objetivos financieros individuales.

3.5. Consideraciones Relevantes

En este capítulo, se han explorado modelos dinámicos aplicados a la predicción de comportamientos de precios en los mercados financieros, con el fin de realizar un

análisis más realista. El objetivo fundamental ha sido avanzar hacia un análisis más realista que considere la naturaleza dinámica y cambiante de los activos financieros. A través de la aplicación de técnicas de simulación Montecarlo y del modelo de Browniano Geométrico, se ha buscado capturar la complejidad inherente a la evolución temporal de los precios. Este enfoque dinámico no solo permite modelar patrones y tendencias, sino que también abre la puerta a la simulación de escenarios futuros, dotando a los inversionistas y analistas de herramientas más robustas para la toma de decisiones informada en entornos financieros caracterizados por su dinamismo y variabilidad. Este capítulo, por ende, contribuye a la comprensión más profunda y matizada de los factores que influyen en los movimientos de precios, proporcionando una base sólida para abordar los desafíos y aprovechar las oportunidades en los mercados financieros. La validación de estos modelos se ha realizado mediante las gráficas y las variaciones entre riesgo y rendimiento de las carteras con con datos históricos, evaluando así su capacidad para anticipar movimientos de precios de manera realista. A lo largo de este proceso, hemos considerado críticamente las limitaciones y simplificaciones inherentes a nuestros enfoques, asegurándonos de proporcionar una visión equilibrada de sus capacidades y restricciones, pero sobre todo moderna.

Conclusiones Generales

En el desarrollo de este estudio, hemos explorado teorías clásica y enfoques modernos, sobre todo, es destacable que los modelos dinámicos que desempeñan un papel fundamental en la predicción de comportamientos de precios en los mercados financieros. En ese sentido, para complementar nuestro análisis teórico, nos adentraremos en la visualización práctica de estos modelos. A continuación, presentaremos gráficas generadas mediante la simulación Montecarlo y el modelo de Browniano Geométrico (GBM), que ofrecen una representación gráfica de las trayectorias esperadas de los precios para cada activo financiero estudiado. Además, incorporaremos visualizaciones de los datos históricos de precios en las figuras 3.13, 3.14, 3.12, 3.11 , proporcionando un contexto fundamental para comparar y contrastar las predicciones de los modelos con la realidad observada en los mercados, donde el horizonte de tiempo, sigue siendo de manera semanal.

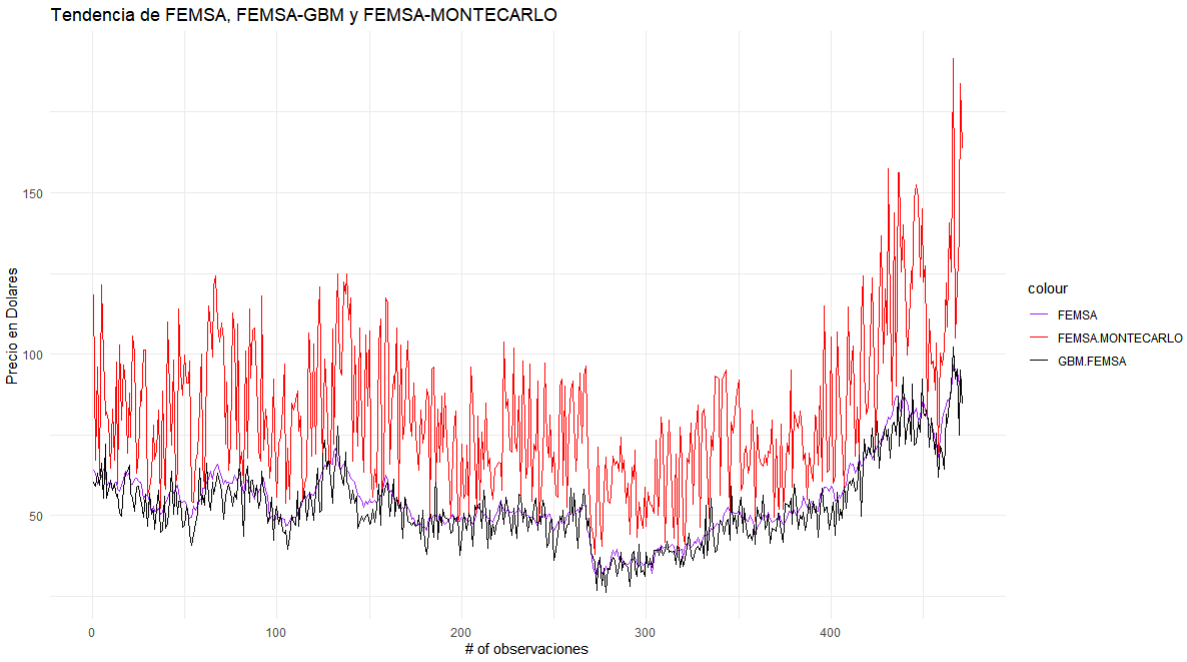

Figura 3.11: GBM-FEMSA vs FEMSA vs Montecarlo-FEMSA.

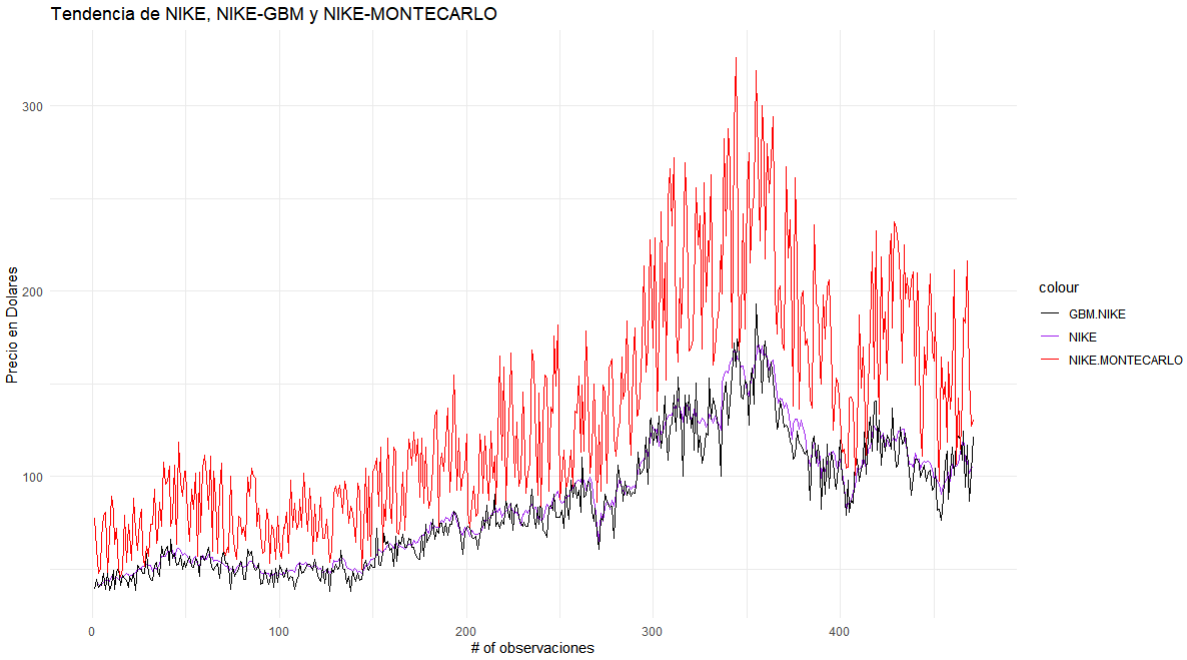

Figura 3.12: GBM-NIKE vs NIKE vs Montecarlo-NIKE.

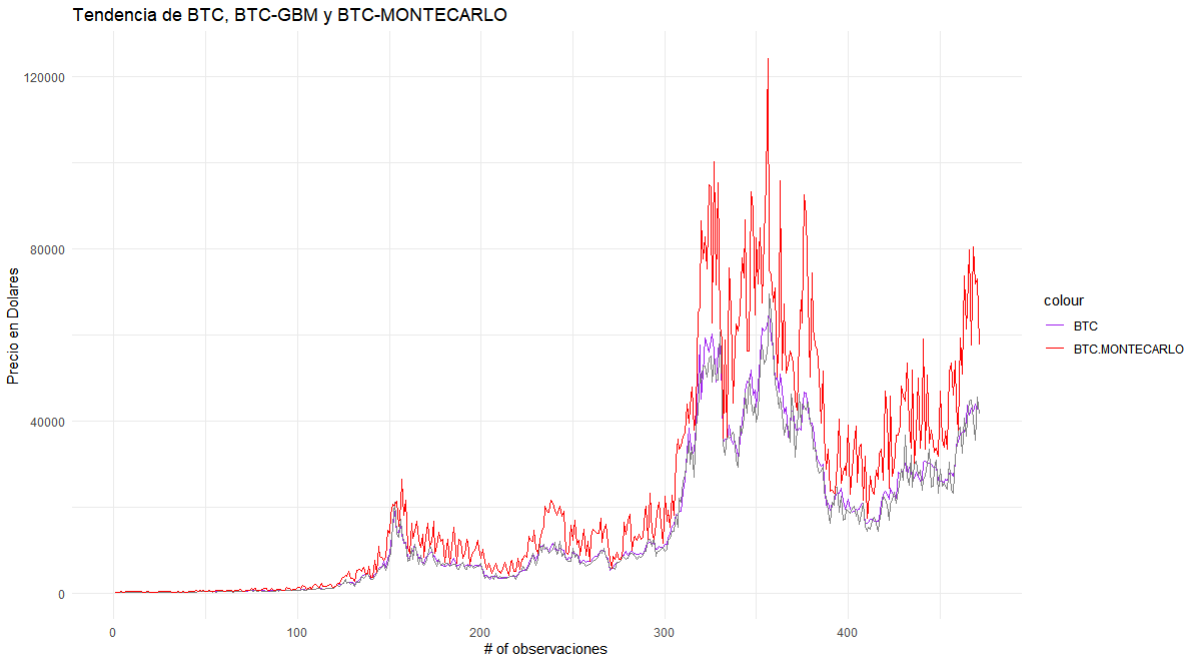

Figura 3.13: GBM-BTC vs BTC vs Montecarlo-BTC.

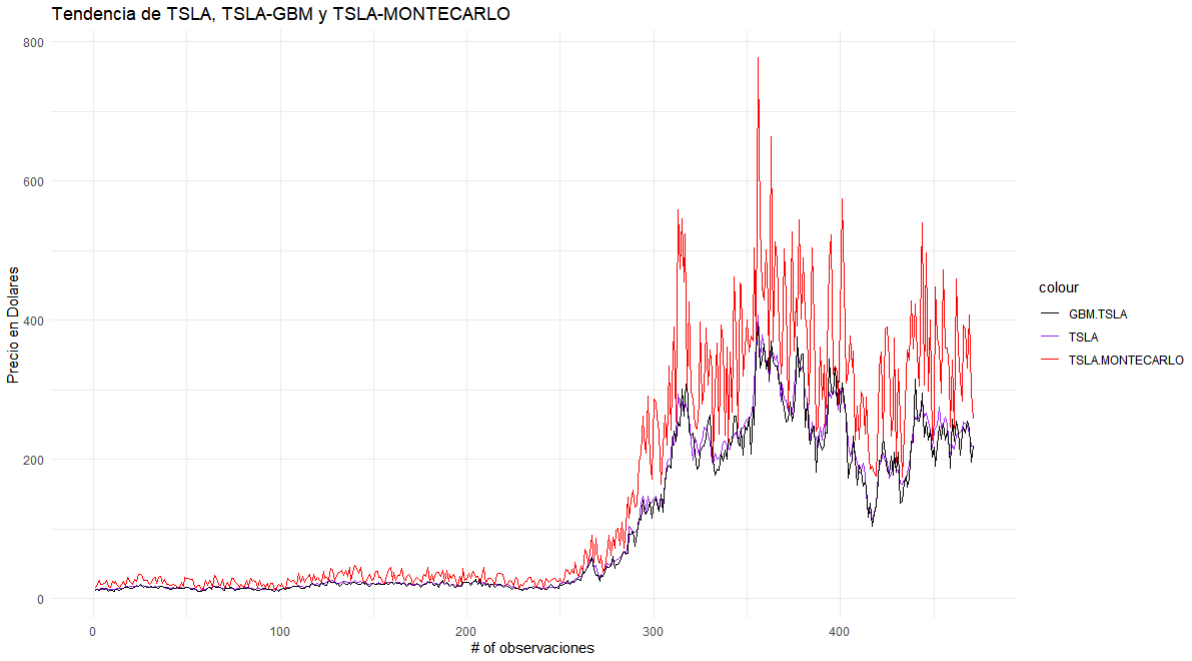

Figura 3.14: GBM-TESLA vs TESLA vs Montecarlo-TESLA.

Es posible notar que la simulación del Movimiento Browniano Geométrico (GBM) parece ajustarse mejor a los datos históricos originales, lo cual sugiere que este modelo proporciona una representación adecuada de la dinámica subyacente en el comportamiento de los precios, al menos de forma gráfica.Esto se debe a que el GBM tiene en cuenta tanto la tendencia determinista como la volatilidad estocástica, permitiendo así simular trayectorias realistas que capturan la variabilidad inherente en los movimientos de los activos financieros. La calidad del ajuste puede ser indicativa de la capacidad del GBM para modelar eficazmente las fluctuaciones y patrones observados en los datos históricos, lo que a su vez respalda su utilidad en la predicción y simulación de futuros escenarios de precios.

Por otro, lado es de suma importancia concluir y destacar los distintos portafolios que se construyeron, por lo que a continuación se presenta la siguiente tabla que resalta los portafolios usando el algoritmo MEAN-VARIANCE, usando datos históricos y los distintos métodos dinámicos.

Portafolio	**Retorno Esperado** μ_p	**Riesgo Esperado** σ_p	**Performance** $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$
Histórico	.68066 %	2.910 %	23.151 %
GBM	1.505 %	8.974 %	16.771 %
Montecarlo	4.606 %	16.161 %	28.499 %

Cuadro 3.8: Performance de los distintos tipos de Portafolios.

El cuadro 3.8 presenta una comparación detallada del rendimiento de diferentes tipos de portafolios, evaluados en términos de retorno esperado (μ_p), riesgo esperado (σ_p), y su rendimiento relativo calculado como la relación $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$. Estos portafolios incluyen el histórico, basado en datos reales, el modelo Geométrico Browniano (GBM), y la simulación Montecarlo. En primer lugar, el portafolio basado en datos históricos refleja el rendimiento real pasado, con un retorno esperado del 0,68066 %, un riesgo esperado del 3 %, y un rendimiento relativo destacable del 23 %. Esta métrica sugiere que, históricamente, el rendimiento ha superado proporcionalmente al riesgo asumido.

Por otro lado, el portafolio modelado mediante GBM muestra un rendimiento esperado del 2 %, un riesgo esperado del 8 %, y un rendimiento relativo del 16 %. Aunque el GBM proporciona una perspectiva más proyectada basada en un modelo estocástico, se observa un equilibrio positivo entre riesgo y retorno. Finalmente, la superioridad del modelo Geométrico Browniano (GBM) sobre la simulación Montecarlo se deriva de varias consideraciones que se reflejan en la tabla comparativa de rendimiento de portafolios.En primer lugar, el GBM ofrece un rendimiento esperado del 2 %, que supera significativamente al rendimiento histórico del 0,68066 %. Esta mejora puede atribuirse a la capacidad del GBM para capturar patrones y tendencias subyacentes en los datos, permitiendo así una mejor proyección de futuros rendimientos.

En cuanto al riesgo, el GBM exhibe un riesgo esperado del 9 %, que, aunque mayor que el riesgo histórico del 3 %, sigue siendo relativamente bajo en comparación con la simulación Montecarlo. Esta menor variabilidad en los resultados del GBM sugiere una mayor capacidad del modelo para explicar y prever las fluctuaciones en los precios de los activos.La relación $\frac{\mu_p}{\sigma_p}$, que mide la eficiencia en términos de rendimiento ajustado por riesgo, muestra que el GBM supera a la simulación Montecarlo con un rendimiento relativo del 16 % frente al 28 % de la simulación Montecarlo. Aunque el rendimiento de la simulación Montecarlo es más alto, su mayor riesgo impacta negativamente en la eficiencia.

En términos prácticos, la elección entre el GBM y la simulación Montecarlo dependerá de las preferencias del inversionista y su apetito por el riesgo. Si se valora un

equilibrio entre rendimiento y riesgo, el GBM podría considerarse superior debido a su capacidad para ofrecer rendimientos competitivos con una menor volatilidad. Sin embargo, si se busca un rendimiento más agresivo, la simulación Montecarlo podría ser preferible, a pesar del riesgo adicional asociado. En última instancia, esta elección tiene implicaciones significativas para la toma de decisiones de inversión, ya que influye en la construcción y gestión de carteras de manera más efectiva.

En conclusión, este manuscrito, ha explorado la teoría clásica de portafolios y la teoría moderna, dejando a relucir las contribuciones más relevantes de Markowitz formulaciones matemáticas como la de Mean Variance, la cual posteriormente fue aplicada a modelos dinámicos para la predicción de comportamientos de precios en los mercados financieros. Se ha utilizado simulación Montecarlo y el modelo Geométrico Browniano (GBM) para abordar la variabilidad en los rendimientos y la evolución de activos financieros.La comparación de distintos tipos de portafolios, como el histórico, el modelado por GBM, y la simulación Montecarlo, proporciona insights valiosos para los inversores. En términos de rendimiento, el GBM ha demostrado ser superior al proporcionar un rendimiento esperado significativamente mejorado en comparación con el histórico. Además, el GBM presenta un equilibrio positivo entre riesgo y retorno, evidenciado por su rendimiento relativo. Por otro lado, la simulación Montecarlo, aunque ofrece un rendimiento más alto, implica un mayor riesgo, lo que puede ser adecuado para inversores con un apetito más agresivo por el riesgo. Sin embargo, el GBM destaca por su capacidad para proyectar de manera efectiva las fluctuaciones de precios con una menor variabilidad. La representación visual a través de gráficos y la construcción de la frontera eficiente han permitido una comparación más clara de las diferentes estrategias de inversión. La frontera eficiente revela cómo los portafolios con mayor rendimiento para un nivel de riesgo dado se encuentran en la parte superior izquierda, destacando el atractivo de la eficiencia en la asignación de activos. En última instancia, esta investigación contribuye a la comprensión y aplicación práctica de modelos dinámicos en la gestión de portafolios, proporcionando a los inversores herramientas más sofisticadas para tomar decisiones informadas. El enfoque integrado

en la TMP y la predicción dinámica de comportamientos de precios ofrecen un marco robusto para la gestión de inversiones en entornos financieros cambiantes.

Índice de figuras

1 Diagrama de la Metodología. 3

2.1 Frontera Eficiente. 15
2.2 Datos Históricos de Bitcoin tomados de Yahoo Finance. 19
2.3 Tendencia semanal de BITCOIN. 21
2.4 Tendencia Semanal de NIKE. 21
2.5 Tendencia Semanal de TESLA. 22
2.6 Tendencia Semanal de FEMSA. 22
2.7 Visualizaciones gráficas de los Precios de cada Activo. 24
2.8 Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios. 28

3.1 TSLA-Monecarlo vs TSLA. 34
3.2 BTC-Montecarlo vs BTC. 34
3.3 NIKE-Montecarlo vs NIKE. 35
3.4 FEMSA-Montecarlo vs FEMSA. 35
3.5 Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios con Simulación Montecarlo. 38
3.6 GBM-TSLA 40
3.7 GBM-BTC vs BTC 40
3.8 GBM-NIKE vs NIKE 41
3.9 GBM-FEMSA vs FEMSA 41
3.10 Frontera Eficiente para 15,000 Portafolios con Simulación GBM. . . . 44
3.11 GBM-FEMSA vs FEMSA vs Montecarlo-FEMSA. 48
3.12 GBM-NIKE vs NIKE vs Montecarlo-NIKE. 48
3.13 GBM-BTC vs BTC vs Montecarlo-BTC. 49

3.14 GBM-TESLA vs TESLA vs Montecarlo-TESLA. 49

Índice de cuadros

2.1 Descripción de las Columnas. 20
2.2 Estadísticas Descriptivas de los Precios de cada Activo. 23
2.3 Estadísticas Descriptivas de los Retornos por Activo. 25
2.4 Matriz de Varianza y Covarianza de los Retornos. 26
2.5 Combinación de Distintos Tipos de Portafolios. 27

3.1 Proceso paso a paso para la construcción de un modelo predictivo. . . 31
3.2 Estadísticas de los Rendimientos usando Método Montecarlo. 36
3.3 Matriz de Varianza y Covarianza de los Retornos por Simulación Montecarlo. 36
3.4 Combinación de Distintos Tipos de Portafolios por Simulación Montecarlo. 37
3.5 Estadísticas de los Rendimiento de Activos usando simulación GBM. 42
3.6 Matriz de Varianza y Covarianza entre Activos usando Simulación GBM. 43
3.7 Combinación de Distintos Tipos de Portafolios por Simulación GBM. 43
3.8 Performance de los distintos tipos de Portafolios. 50

Referencias

Aguilar, J. (2020). Gestión del riesgo de carteras financieras con subyacentes modelizados con el movimiento browniano geométrico. aplicación a un caso práctico.

Bodnar, T., y Schmid, W. (2009). Econometrical analysis of the sample efficient frontier. *The European journal of finance*, *15*(3), 317–335.

Cardoso, R. T. N., y Argolo. (2022). Multiobjective model predictive control for portfolio optimization with cardinality constraint. *Expert Systems with Applications*, *205*, 117639.

Coffin, B. (2007). Carrying the weight. *Risk Management*, *54*(2), 20.

Cousin, A., Lelong, J., y Picard, T. (2023). Mean-variance dynamic portfolio allocation with transaction costs: a wiener chaos expansion approach. *arXiv preprint arXiv:2305.16152*.

Dodd, G. . (1951). *Security analysis : principles and technique*. McGraw-Hill. 3rd ed.

Ferguson, N. (2008). *The ascent of money: A financial history of the world*. Penguin.

Fernández, N. (2021). *Mean squared variance portfolio: A mixed-integer linear programming formulation. mathematics 2021, 9, 223.* s Note: MDPI stays neu-tral with regard to jurisdictional clai-ms in ....

Ghavamzadeh, S. (2022). Efficient risk-averse reinforcement learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*, *35*, 32639–32652.

Guerard, J. (2023). Harry markowitz: An appreciation. *International Journal of Forecasting*, *39*(4), 1496-1501. Descargado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207023000742 doi: https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2023.07.004

Kalayci, M. A. (2019). A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization. *Expert Systems with Applications*, *125*, 345–368.

Lawson, A. (2013). *Bayesian disease mapping: Hierarchical modeling in spatial epidemiology, second edition.* Taylor & Francis. Descargado de https://books.google.com.mx/books?id=g7RJEZb1umwC

Li, B., y Zhang, Y. (2023). Multi-period portfolio selection based on uncertainty theory with bankruptcy control and liquidity. *Automatica*, *147*, 110751.

Lindelwa, P. (2020). *Foreign portfolio investments, exchange rates and capital openness : a panel data approach.* Eleftherios Thalassinosr.

Lindgren, B. (2017). *Statistical theory.* Routledge.

Lintner, J. (1975). Inflation and security returns*. *The Journal of Finance*, *30*(2), 259-280. Descargado de https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1975.tb01809.x doi: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1975.tb01809.x

Lu, J., y Zhang, G. (2012). *Handbook on decision making vol 2: Risk management in decision making.* Springer.

Macías, S. (2012). *Pequeño cerdo capitalista: Finanzas personales para hippies, yuppies y bohemios.* Penguin Random House Grupo Editorial México. Descargado de https://books.google.com.mx/books?id=FWLUKlba55cC

Markowitz, H. M. (1991). "foundations of portfolio theory.". *The Journal of Finance*, *46*(2), 1-16. doi: https://doi.org/10.2307/2328831.

Markowitz, H. M. (1999). The early history of portfolio theory: 1600-1960.". *Financial Analysts Journal*, *55*(4), 5-16. doi: http://www.jstor.org/stable/4480178.

Markowitz, H. M. (2010). Portfolio theory: As i still see it. *Annual Review of Financial Economics*, *2*(1), 1-23. doi: 10.1146/annurev-financial-011110-134602

Markowitz, H. M., y Todd, G. P. (2000). *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets* (Vol. 66). John Wiley & Sons.

Quintero, A. (2002). La selección de carteras: Desde markowitz. *Unpublished manuscript*.

Ríos, V. (2012). Tendencias y explicaciones al asesinato de periodistas y alcaldes en méxico: El crimen organizado y la violencia de alto perfil. *Cambridge: Harvard University), unpublished typescript (http://www. gov. harvard. edu/people/viridianarios-contreras)*.

Rose, A. K., y Spiegel, M. M. (2012). Cross-country causes and consequences of the 2008 crisis: Early warning. *Japan and the World Economy*, *24*(1), 1-16. Descargado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0922142511000417 doi: https://doi.org/10.1016/j.japwor.2011.11.001

Salamah, S. N. (2023). Financial management strategies to improve business performance. *Journal of Contemporary Administration and Management (ADMAN)*, *1*(1), 9–12.

Tokat, Y., y Wicas. (2007). Portfolio rebalancing in theory and practice. *The Journal of Investing*, *16*(2), 52–59.

Trillo. (s.f.). Simulación de difusiones clásicas y anómalas.

Villaverde, D. (2023). *Comparación de la utilidad económica de inversiones en dólares, cetes y vivienda de interés social* (Tesis Doctoral no publicada). UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA.

Wolf. (2023). Improved inference in financial factor models. *International Review of Economics & Finance*, *86*, 364–379.

Yang, S. (2020). Discrete time multi-period mean-variance model: Bellman type strategy and empirical analysis. *arXiv preprint arXiv:2011.10966*.