Benemérita Universidad Autónoma
de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estructura hamiltoniana y términos de frontera en sistemas singulares de partículas puntuales

Tesis presentada por:

Jeny Juárez Susano

Para obtener el título de:

Licenciada en Física

Bajo la dirección de:

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Dra. Iraís Rubalcava García

Junio 2018

Estructura Hamiltoniana y términos de frontera en sistemas singulares de partículas puntuales

Tesis

Jeny Juárez Susano

Dra. Iraís Rubalcava García

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Título de la tesis: Estructura Hamiltoniana y términos de frontera en sistemas singulares de partículas puntuales.
Estudiante: Juárez Susano Jeny

Comité:

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Secretario

Dr. Alberto Escalante Hernández
Vocal

Asesoras:

Dra. Iraís Rubalcava García

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mis sinodales, al Dr. Jesús Toscano Chávez, al Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo y al Dr. Alberto Escalante Hernández reconocidos miembros del cuerpo académico de esta facultad, es un honor someter a su arbitraje y saber que tuvieron a bien dedicar su tiempo y atención al presente trabajo.

A mis asesoras, la Dra. Iraís Rubalcava García y la Dra. Mercedes Paulina Vázquez Quesada, quienes me acogieron bajo su paciente y constante tutelaje en la revisión de mis avances, estudio del material y redacción de esta tesis, pues ya sea en la distancia o en la proximidad supieron darme aliento y orientación, permitiéndome entender y descubrir la belleza inmersa en el estudio de estos temas.

A mis amados padres, Leonor y José, por su paciencia, comprensión y confianza, pues a pesar de no saber a ciencia cierta de que trataba esta carrera, me permitieron incursionar en el estudio de la física, aunque mi ausencia fuese para ustedes un doloroso sacrificio, supieron soltar mi mano y dejarme avanzar, pero sé que siempre han estado allí, apoyándome con el sudor de sus frentes, y deseando todo el tiempo mi bienestar. Todo esto que he logrado y todo lo que logre es y será gracias a ustedes, descansa en sus hombros y me encamina con sus pasos, los mismos pasos que me enseñaron a caminar, e incluso hoy, aquí están conmigo, viendo hasta donde me llevaron. Los amo.

A mis hermanos, Abel, Saúl y Gabriel que cuidaron de mí y me hicieron reír cuando niña, que me enseñaron a través de sus ojos a ver el mundo, que fueron mis primeros amigos de la infancia y que al verlos partir me enseñaron cuánto nos amaban, por cuidar de mis padres y de mí a la distancia, lejos de su hogar pero siempre en nuestros corazones, porque también me hicieron conocer la física, entender que debemos abandonar todo a veces para sanarnos y a seguir adelante con nuestras pasiones a pesar de todos los impedimentos que la vida nos ponga.

A las doctoras Martha Palomino Ovando, Leticia Fuchs Gómez y María Araceli Juárez Ramírez y al doctor Gilberto Silva Ortigoza a quienes agradezco no sólo su labor de enseñanza, sino también sus consejos y cálidas palabras de aliento que me impidieron darme por vencida.
A mis amigos, Iván Ramírez, Iván Baéz, Agustín Romano, Guillermo Dámazo, Girahad Huerta, Ricardo Thaddeus Paéz, Ángel Raúl García, Columba Medel, Isabel Rosas, Angélica Sotelo, Guadalupe Islas, Eréndira C. y Ana Paula P. espero me disculpen por no escribir un agradecimiento detallado a cada uno de ustedes, pero comprenderán que si escribiera todo aquello por lo que estoy agradecida con ustedes esta tesis tendría una extensión de más del doble de lo que tiene.

Finalmente, a P., J. y S. por enseñarme que el amor no requiere de palabras.

Gracias.

RESUMEN

En la primera parte de la presente tesis se realiza una revisión del Algoritmo de Dirac. En la segunda parte se lleva a cabo dicho algoritmo en dos sistemas singulares de partículas puntuales, luego se analiza lo que ocurre si llevamos a cabo el algortimo agrengándole a tales sistemas términos de frontera: el primero es la derivada total respecto al tiempo de una función que depende de las coordenadas generalizadas, el segundo es la derivada total de una función $F_1(q^i) + F_2(t)$ y el tercero es la derivada total respecto al tiempo de una función que depende de forma abitraria de las coordenadas y el tiempo. Se analizan estos casos para determinar si cualquier término de frontera que se le sume al Lagrangiano que describe el sistema es adamisible, es decir, si no cambiará la dinámica del sistema.

Palabras clave: Algoritmo de Dirac; términos de frontera: sistemas singulares.

INTRODUCCIÓN

En Mecánica Clásica a nivel licenciatura se estudian sistemas en los cuales es posible pasar de la formulación Lagragiana a la Hamiltoniana usando la transformada de Legendre. Para realizar esta transición es necesario poder despejar las velocidades (de la definición de momento) y expresarlas en términos de las coordenadas y los momentos, los casos en los que no es posible hacer esto se les conoce como *sistemas singulares*. Dichos sistemas surgen con frencuencia en la física, por ejemplo la mayoría de las teorías de campo así como todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza: electromagnética, débil, fuerte y gravitacional corresponden a sistemas singurales.

A mediados del sigo XX, los sistemas singulares comenzaron a estudiarse. Durante la década de los 50's Peter Gabriel Bergmann y sus colaboradores mostraron la conexión que existe entre las constricciones (revisaremos a detalle este concepto en el capítulo 1), y las propiedades de invarianza que hay en estos sistemas. Posteriormente, durante la década de los 60's, Paul Dirac desarrolló un método para analizar sistemas singulares con un número finito de grados de libertad, el cual trata de forma autoconsistente a las constricciones. Este trabajo realizado por Dirac tenía como finalidad ser el paso inicial para la cuantización de sistemas singulares, por ejemplo en teoría cuántica de campos o en la cuantización canónica de gravedad cuántica de lazos. Sin embargo, la utilidad del algoritmo no se limita a dicho propósito, pues en general permite estudiar sistemas singulares obteniendo sus constricciones que pueden ser de primera o segunda clase, con las cuales construimos las transformaciones de norma y el paréntesis de Dirac respectivamente, así mismo podemos determinar su número de grados de libertad y sus simetrias clásicas. Algunos ejemplos que corresponden a sistemas de tipo singular son el Lagrangiano de Maxwell, la Teoría de Yang-Mills, supersimetría, entre otros.

Lo anterior nos brinda la motivación necesaria para la realización del presente trabajo, el cual se concentra precisamente en el estudio del Algoritmo de Dirac bajo ciertas condiciones que se detallarán a continuación. De la mecánica clásica sabemos que dos Lagrangianos que difieren sólo por la derivada total respecto al tiempo de una función que puede depender de las coordenadas canónicas y el tiempo se relacionan por medio de una transformación canónica y más aún, las ecuaciones de Euler-Lagrange de ambos Lagrangianos serán exactamente las mismas. Por lo anterior, podemos esperar que si sumamos la derivada total ya mencionada al Lagrangiano que describe nuestro sistema, al aplicar el algoritmo de Dirac sus características escenciales como las transformaciones de norma, el número de grados de libertad, etc. serán equivalentes o bien iguales a lo que se halla cuando no se agrega ningún término. En esta tesis verificaremos la conjetura anterior en dos sistemas singulares sencillos.

En teoría de campos se necesita tener un principio de acción bien definido, es decir, que la acción sea finita y diferenciable (lo segundo es necesario para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange). En algunos casos, cuando la región del espacio tiempo que estamos considerando tiene frontera, se vuelve necesario agregar un *término de frontera* (cf. [3])

(que en principio no cambiará la dinámica del sistema). Una derivada total con las características que se mencionan en el párrafo anterior es, de hecho, en teoría de campos un término de frontera. Por lo que el trabajo propuesto en esta tesis, aunque restringido a sistemas puntuales, sirve como un acercamiento al estudio de los términos de frontera en teorías de campo.

Ahora damos una breve descripción de la estructura de esta tesis. En la primera parte de este texto se lleva a cabo una revisión del algoritmo de Dirac, esto se ha desarrollado basándonos en el trabajo de tesis previo [9], así como en los textos [2] y [8]. Esto será de utilidad para aquellos lectores que no estén familiarizados con este método, el cual es el eje principal de este trabajo.

A lo largo de la segunda parte de esta tesis se presentan dos capítulos que corresponden a los sistemas que llamamos: Sistema A y Sistema B, dicha distinción se debe a que cada uno de ellos corresponde a un Lagrangiano diferente, a su vez, para cada sistema se desarrollan cuatro casos distintos los cuales se detallan enseguida.

En el Caso 0 se aplica el algoritmo de Dirac sin agregar ningún término, se consideró pertinente incluir este caso para poder realizar las comparaciones necesarias entre éste y lo que se encontró al agregar la derivada total, asímismo les permitirá al familizarse con el método a los lectores que saben poco o nada de p él.

En el Caso 1 se le suma al Lagrangiano la derivada total de una función que depende sólo de las coordenadas generalizadas, este caso permite ver con claridad las diferencias y similitudes con el Caso 0. El caso 1 es el más sencillo de los que se trabajan y además es el que ocurre generalmente en la teoría de campos, donde los términos que se agregan no suelen depender explícitamente de las coordenadas (cf. [3]).

El Caso 2 es un paso intermedio, pues presenta un Lagrangiano al cual se le ha sumado la derivada total con respecto al tiempo de una función que depende tanto de las coordenadas canónicas como del tiempo, pero no de forma arbitraria, sino que separa la función en: una parte dependiente de las q^i y otra que depende solamente de t. Se dice que es un paso intermedio, pues permite ver lo que ocurre cuando ya interviene el tiempo, pero bajo condiciones específicas.

Finalmente, el Caso 3 es el caso más general, en éste ya sumamos la derivada total de una función que depende de las coordenadas canónicas y el tiempo, sin exigirle (en principio) ninguna condición partícular. Este último caso nos arroja resultados no esperados, pues como veremos, hay cambios importantes en distintos puntos del Algoritmo lo cual cambia el resto del desarrollo y por consiguiente, modifica el número de grados de libertad del sistema.

NOTACIÓN

Matriz Hessiana	(H_{ij})
Nulidad de una matriz	$null(\cdot)$
Constricciones n-arias	$\phi^n_\mu; \quad n = 1, 2, \ldots$
Superficie de constricciones primarias	Σ_1
Rango de una matriz	$\rho(\cdot)$
Imagen de una matriz	$Im(\cdot)$
Nulidad de una matriz	$\nu(\cdot)$
Igualdad débil	$\stackrel{\Sigma 1}{=}$
Hamiltoniano canónico	H_0
Hamiltoniano total	H_T
Hamiltoniano primado	H'
Multiplicadores de Lagrange	u^μ
Intersección de todas las superficies de constricciones	Σ
Matriz W	$W = (W_{\mu\nu})$
Constricciones de primera clase	γ_a
Constricciones de segunda clase	χ_α
Parentesis de Dirac	$\{,\}_D$

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Preliminares

1 ALGORITMO DE DIRAC PARA SISTEMAS SINGULARES

A lo largo de este capítulo haremos una revisión del algoritmo de Dirac, pues la finalidad de este trabajo es ver cómo se modifica este algoritmo cuando agregamos términos de frontera a la Lagrangiana. Presentaremos conceptos, definiciones y resultados que son necesarios para poder comprender el algoritmo. Un análisis más detallado de este contenido puede consultarse en [2, Capítulo 5], [8, Capítulo 1] y [9, Capítulo 1].

Constricciones primarias

En mecánica Hamiltoniana las ecuaciones de movimiento son un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con N el número de grados de libertad. Por otro lado, en mecánica Lagrangiana para definir completamente la evolución del sistema mecánico es necesario resolver un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden, lo cual puede resultar más complicado que resolver el sistema de $2N$ ecuaciones de primer orden correspondiente en la formulación Hamiltoniana. Por esta razón, en muchas ocasiones es ventajoso analizar los sistemas físicos a través de la mecánica Hamiltoniana. A nivel licenciatura suele estudiarse un tipo de sistemas llamados *sistemas regulares*, en los cuales se obtiene la función Hamiltoniana aplicando una transformada de Legendre a una función Lagrangiana. Para hacer esa transición es necesario despejar todas las velocidades de la definición de momento, la cual es:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \text{ donde } i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

siendo N es el número de coordenadas generalizadas q^i, así como del número de momentos generalizados p_i. Una vez que ya tenemos expresadas las velocidades en función de los momentos y las coordenadas canónicas podemos construir el Hamiltoniano.

Partiendo de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0, \text{ donde } i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Para Lagrangianas que no dependen explícitamente del tiempo, esto es $L(q^i, \dot{q}^i)$, y haciendo uso de la regla de la cadena, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j = 0, \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j. \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos ver que despejar las aceleraciones $\ddot{q}^j$ de la ecuación (3), de manera que queden determinadas a un tiempo dado por las coordenadas y las velocidades, es posible si y sólo si la matriz Hessiana dada por:

$$(H_{ij}) := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^N} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \dot{q}^1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \dot{q}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \dot{q}^N} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

es invertible, lo cual equivale a que:

$$\det (H_{ij}) \neq 0. \tag{5}$$

Por definición, un sistema se dice regular cuando se satisface la ecuación (5), pues si esto ocurre es posible expresar todas las velocidades, $\dot{q}^i$, en función de los momentos, p_i, y las coordenadas, q^i. En el caso en que $\det(H_{ij}) = 0$, no todas las velocidades podrán expresarse en función de los momentos y las coordenadas canónicas, en otras palabras los momentos (1) no son todos independientes. Los sistemas en los que ocurre esto se denominan *sistemas singulares*, a lo largo de este trabajo nos centraremos precisamente en ellos.

En el caso en que no podamos despejar las velocidades como función de p_i y q^i tendremos una cantidad, M, de relaciones entre los momentos y las coordenadas que se obtienen a partir de la definición de momento, a las que denominamos *constricciones primarias*. De esta manera, dada $p_\mu := f_\mu(q^i, p_a)$ con $\mu = 1, \ldots, M$ y $a = M+1, \ldots, N$, las constricciones primarias se expresan como:

$$\phi^1_\mu(q^i, p_i) = p_\mu - f_\mu(q^i, p_a) = 0. \tag{6}$$

Utilizaremos M' para denotar al total de las constricciones primarias independientes. Así mismo, para indicar que estamos tratando con constricciones primarias se hace uso del superíndice 1.

Para saber la cantidad de constricciones primarias independientes M' que hallaremos, partimos de la matriz Hessiana, la cual es una matriz cuadrada $N x N$. Debido a que la nulidad $\nu(H_{ij})$ puede interpretarse como el número de constricciones primarias independientes, es decir $M' = \nu(H_{ij})$, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho(H_{ij}) &= N - \nu(H_{ij}) \\ &= N - M', \\ \Rightarrow M' &= N - \rho(H_{ij}), \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\rho(H_{ij})$ denota el rango de la matriz Hessiana.

Superficie de constricciones primarias Σ_1

La *superficie de constricciones primarias* Σ_1, se encuentra en el espacio fase y está definida como la intersección de hipersuperficies que quedan determinadas por las constricciones primarias.

Ya que tenemos M' constricciones primarias independientes la dimensión de la superficie de constricciones primarias Σ_1 es:

$$\dim(\Sigma_1) = 2N - M', \tag{8}$$

donde $2N$ corresponde a las N coordenadas generalizadas q^i y a los N momentos generalizados p_i, es decir, a la dimensión del espacio fase.

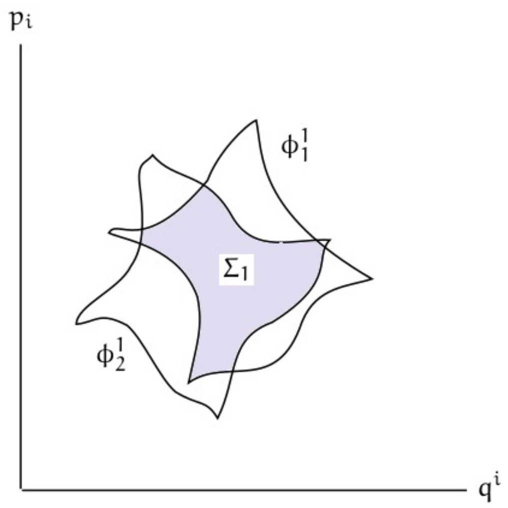

Figura 1: Superficie de constricciones primarias.

Igualdad débil e igualdad fuerte

Una función $F(q^i, p_i)$ es *débilmente cero* si hace cero únicamente sobre la superficie de constricciones primarias, es decir:

$$F(q^i, p_i)\Big|_{\Sigma_1} = 0, \tag{9}$$

lo que denotaremos en lo sucesivo como:

$$F(q^i, p_i) \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{10}$$

Además, de forma general, se dirá que dos funciones $F(q^i, p_i)$ y $G(q^i, p_i)$ serán iguales débilmente (lo cual denotaremos como $F \overset{\Sigma_1}{=} G$), o que coincidirán en la superficie de constricciones primarias, si cumplen que[1]:

$$F \overset{\Sigma_1}{=} G \Leftrightarrow F - G = c^\mu(q^i, p_i)\phi^1_\mu, \tag{11}$$

1 Es importante recalcar que no sólo hallaremos constricciones primarias, en muchos textos suele definirse la igualdad débil sobre la intersección de todas las constricciones halladas, y no sólo en la superficie de constricciones primarias.

donde c^{μ} son M funciones de los momentos y las coordenadas canónicas. En otras palabras, la diferencia entre F y G es igual a una combinación lineal de las constricciones.

Por otra parte, si la función $F(q^i, p_i)$ y todas sus primeras derivadas respecto a los momentos y las coordenadas se hacen cero sobre la superficie Σ_1, entonces diremos que $F(q^i, p_i)$ es *fuertemente cero*, esto es:

$$F(q^i, p_i) = 0 \Leftrightarrow F(q^i, p_i) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial q^i} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0 \stackrel{\Sigma_1}{=} \frac{\partial F}{\partial p_i}, \tag{12}$$

utilizaremos el símbolo usual de igualdad, esto es $F(q^i, p_i) = 0$[2]

Si la función $F(q^i, p_i)$ es igual a cero sobre todo el espacio fase, las condiciones anteriores se cumpliraán diremos que la función es fuertemente cero y utilizaremos el símbolo usual de igualdad, esto es $F(q^i, p_i) = 0$.

Condición de regularidad

La definición de constricciones primarias da cabida a ambigüedades, ya que pueden escogerse varias formas equivalentes para escribir las constricciones, de modo que se mantenga la igualdad a cero en Σ_1. Por ejemplo, $\phi^1_1 = p_1 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ puede ser escrito de forma equivalente como $(p_1)^2 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ ó $\sqrt{p_1} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$, escrito de estas tres formas diferentes p_1 es débilmente cero, así que, en principio podriamos elegir cualquiera de ellas como constricción. A través de la *condición de regularidad* evitaremos tales ambigüedades, así mismo, podremos garantizar que las constricciones sean independientes entre sí y que éstas generan la superficie de constricciones.

Enunciamos la condición de regularidad de la siguiene forma:

> *Las constricciones independientes $\phi^1_{\mu'}$, deben ser tales que la matriz jacobiana*
>
> $$J(\phi^1_{\mu'}) := \frac{\partial \phi^1_{\mu'}}{\partial (q^i, p_i)}, \tag{13}$$
>
> *es de rango constante $\rho(J(\phi^1_{\mu'})) = M'$ sobre toda superficie de constricciones primarias Σ_1.*

Es necesario tomar en cuenta que antes de calcular la matriz Jacobiana se deben separar las constricciones primarias en dependientes $\phi^1_{\bar{\mu}}$ e independientes $\phi^1_{\mu'}$, pues es con las constricciones independientes con las que nos quedaremos. Sin embargo, en los ejemplos que veremos posteriormente todas nuestras constricciones primarias serán independientes desde el comienzo, por lo que no se hará distinción entre ϕ^1_{μ} y $\phi^1_{\mu'}$.

Otra manera de expresar la condición sobre la matriz jacobiana es: *Las funciones $\phi^1_{\mu'}$, son las primeras M′ coordenadas de un nuevo sistema regular de coordenadas en una vecindad de la superficie de constricciones.*

2 Si $f(q^i, t)$ es igual a cero sobre todo el espacio fase trivialmente se cumplirán las condiciones (12).

Algunos resultados útiles

Para las constricciones que cumplen con las condiciones de regularidad, los siguientes resultados conocidos serán de utilidad en las secciones siguientes[3]:

Teorema 1. *Si una función suave G definida en el espacio fase se anula en la superficie de constricciones* Σ_1, *entonces* $G = g^{\mu}\phi^1_{\mu}$, *para algunas funciones* $g^{\mu}(q^i, p_i)$.

Teorema 2. *Si* $\lambda_i \delta q^i + \nu^i \delta p_i \overset{\Sigma_1}{=} 0$ *para variaciones* δq^i *y* δp_i *tangentes en la superficie de constricciones primarias* Σ_1, *entonces:*

$$\lambda_i = u^{\mu}\frac{\partial \phi^1_{\mu}}{\partial q^i},$$
$$\nu^i = u^{\mu}\frac{\partial \phi^1_{\mu}}{\partial p_i}, \tag{14}$$

para algún u^{μ} *que depende en general de las coordenadas de espacio fase. Estas igualdades se cumplen sobre la superficie de constricciones primarias.*

Teorema 3. *Los vectores* $\frac{\partial \phi^1_{\mu}}{\partial p_i(q,p(q,\dot{q}))}$ *proporcionan una base de vectores para el núcleo de la matriz Hessiana* $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$.

Hamiltoniano Canónico H_0 y Hamiltoniano Total H_T

Introducimos al *Hamiltoniano Canónico* H_0 dado por:

$$H_0 := \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i), \tag{15}$$

el cual puede considerarse como una función de las coordenadas generalizadas y de las velocidades, $H_0 = H_0(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i))$, donde el lado derecho de la ecuación (15) nos indica que $\dot{q}^i$ sólo entra en H_0 como combinación de los momentos $p_i(q^i, \dot{q}^i)$. Este hecho queda claro cuando realizamos la variación de H_0 de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i}, \end{aligned} \tag{16}$$

Aquí, vemos que H_0 es una función de q^i y p_i. Sin embargo, hay que notar que δp_i puede ser expresado como combinación lineal de $\delta \dot{q}^i$ y δq^i debido a la definición de momento.

Notemos que en la ecuación (16) δp_i no es totalmente independiente pero debe preservar a las constricciones primarias. De este modo H_0 sólo está bien definida sobre Σ_1. Es por ello que, para poder extender a H_0 fuera de Σ_1 agregamos una combinación lineal de

3 Las demostraciones del Teorema 1 y Teorema 2 se encuentran desarrolladas en [8, Theorem 1.1,Theorem 1.2 (pág 8)] y del Teorema 3 en [9, Teorema 2 (pág 9-10)].

las constricciones primarias. A este nuevo Hamiltoniano lo denominamos *Hamiltoniano total*[4], y se define como:

$$H_T := H_0 + u^\mu \phi^1_\mu, \tag{17}$$

donde u^μ son multiplicadores de Lagrange indeterminados. Cabe señalar que el Hamiltoniano total contiene la información de las constricciones primarias.

Por otra parte, como $H_0 = H_0(q^i, p_i)$, la variación de éste también se puede escribir como:

$$\delta H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\delta q^i, \tag{18}$$

igualando las ecuaciones (16) y (18) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\delta q^i &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i, \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\delta q^i &+ \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \dot{q}^i\right)\delta p_i = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Haciendo uso del Teorema 2 podemos escribir:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}, \tag{20}$$

$$-\left.\frac{\partial L}{\partial q^i}\right|_{\dot{q}} = \left.\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\right|_{p} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i}. \tag{21}$$

Si conocemos a p_i y los parámetros u^μ, a partir de la ecuación (20) podemos determinar $\dot{q}^i$. Por otro lado, si las constricciones son independientes sus gradientes $\partial\phi^1_\mu/\partial p_i$ en la superficie de constricciones también lo son; entonces para dos conjuntos distintos de u^μ no obtendremos la misma velocidad. Esto quiere decir que también podemos despejar a las u^μ de la ecuación (20), de modo que dependerán de las coordenadas y las velocidades.

Definimos la transformada de Legendre del espacio de configuración (cuyos puntos están etiquetados localmente por $(q, \dot{q})$) a la subvariedad definida por las constricciones primarias de puntos (q, p, u) mediante:

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q^i, \dot{q}^i), \\ u^\mu &= u^\mu(q^i, \dot{q}^i), \end{aligned} \tag{22}$$

esta transformación entre espacios que tienen dimensión $2N$, es invertible, debido a que:

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}, \\ \phi^1_\mu(q^i, p_i) &\overset{\Sigma_1}{=} 0, \end{aligned} \tag{23}$$

4 También se le llama Hamiltoniano primario, ya que contiene sólo la información de las contricciones primarias.

donde las ecuaciones (22) son las inversas de las ecuaciones (23) y viceversa.

Podemos ver con más detalle la transformada de Legendre enseguida. A partir de las ecuaciones (15) y (17), tenemos que:

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^i p_i(q^i, \dot{q}^i) - H_0(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i)) - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\phi^1_\mu(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i)), \tag{24}$$

el diferencial del lado derecho de la ecuación (24) es:

$$\begin{aligned}
dL &= p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - dH_0(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i)) - u^\mu(q^i, \dot{q}^i) d\phi^1_\mu(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i)) \\
&\quad -\phi^1_\mu(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i)) du^\mu(q^i, \dot{q}^i) \\
&= p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial H_0}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} dp_i - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\left(\frac{\partial \phi^i_\mu}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \phi^i_\mu}{\partial p_i} dp_i\right) \\
&\quad -\phi^1_\mu(q^i, p_i(q^i, \dot{q}^i))\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial u^\mu}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i\right) \\
&= \left(p_i - \phi^1_\mu(q^i, p_i)\frac{\partial u^\mu}{\partial \dot{q}^i}\right) d\dot{q}^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}\right) dp_i \\
&\quad + \left(-\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i} - \phi^1_\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial u^\mu}{\partial q^i}\right) dq^i.
\end{aligned} \tag{25}$$

Por el lado izquierdo de la ecuación (24) el diferencial resulta:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i, \tag{26}$$

luego, al comparar la ecuación (25) con la ecuación (26) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i} - \phi^1_\mu(q^i, p_i)\frac{\partial u^\mu}{\partial q^i}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i - \phi^1_\mu(q^i, p_i)\frac{\partial u^\mu}{\partial \dot{q}^i}, \tag{28}$$

$$0 = \dot{q}^i - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}. \tag{29}$$

Ahora, tomamos en cuenta que $\phi^1_\mu \overset{\Sigma_1}{=} 0$ y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos como resultado las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} &\overset{\Sigma_1}{=} -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &\overset{\Sigma_1}{=} p_i, \\
\dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu(q^i, \dot{q}^i)\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Son estas ecuaciones las que relacionan el espacio de configuración con el espacio fase, cuando la matriz Hessiana (4) no es invertible, con el costo de tener que introducir los *multiplicadores de Lagrange*, u^μ.

Principio de acción del Hamiltoniano Total

Haciendo uso de la definición de momento y las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos escribir las ecuaciones (20) y (21) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}, && (31)\\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i}, && (32)\\
\phi^1_\mu &\overset{\Sigma_1}{=} 0. && (33)
\end{aligned}$$

Otra forma de llegar a éstas, es a través del principio variacional, con la acción correspondiente al Hamiltoniano Total:

$$S_T[q^i, p_i, u^\mu] = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^i p_i - H_T)\, dt = 0, \tag{34}$$

para variaciones arbitrarias δq^i, δp_i y δu^μ con $\delta q^i(t_0) = \delta p_i(t_1) = 0$.

Ahora, es importante recordar que: Dadas dos funciones $F(q^i, p_i)$ y $G(q^i, p_i)$ en el espacio fase, el paréntesis de Poisson está definido como:

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}, \tag{35}$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&\{F, \alpha G + \beta R\} = \alpha\{F, G\} + \beta\{F, R\}, && \text{(Linealidad)}\\
&\{F, G\} = -\{G, F\}, && \text{(Antisimetría)}\\
&\{F, GR\} = \{F, G\}R + G\{F, R\}, && \text{(Regla del producto)}\\
&\{\{F, G\}\}, R\} + \{\{R, F\}, G\} + \{\{G, R\}, F\} = 0. && \text{(Identidad de Jacobi)}
\end{aligned}$$

De esta forma las ecuaciones (31) y (32) pueden expresarse también como:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \{q^i, H_0\} + u^\mu\{q^i, \phi^1_\mu\}, && (36)\\
\dot{p}_i &= \{p_i, H_0\} + u^\mu\{p_i, \phi^1_\mu\}. && (37)
\end{aligned}$$

De manera general para una función arbitraria $F(q^i, p_i)$ en el espacio fase, su evolución a través del parámetro t puede expresarse también por medio del paréntesis de Poisson, haciendo uso de la regla de la cadena y de las ecuaciones (31) y (32), esto es:

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\\
&= \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i}\right)\\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H_0}{\partial p_i}\right) + u^\mu\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}\right)\\
&= \{F, H_0\} + u^\mu\{F, \phi^1_\mu\}. && (38)
\end{aligned}$$

Esta forma de expresar la evolución de una función será conveniente en muchos casos. Sin embargo, hay otra manera de escribir la ecuación (38):

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_0\} + u^{\mu}\{F, \phi^1_{\mu}\} \\ &= \{F, H_0\} + \{F, u^{\mu}\phi^1_{\mu}\} - \{F, u^{\mu}\}\phi^1_{\mu} \quad (39) \\ &= \{F, H_T\} - \{F, u^{\mu}\}\phi^1_{\mu} \quad (40) \\ &\overset{\Sigma_1}{=} \{F, H_T\}. \quad (41) \end{aligned}$$

En la antepenúltima igualdad se usó la regla del producto del paréntesis de Poisson, en la penúltima la linealidad y en la última que $\phi^1_{\mu} \overset{\Sigma_1}{=} 0$.

Condiciones de Consistencia

En sistemas clásicos en los que existen ligaduras, no se espera que éstas varien en el tiempo, por ejemplo, en el sistema de un péndulo simple, la longitud de la cuerda no cambiará en ningún momento. De manera semejante a las constricciones les exigiremos que se conserven en el tiempo, pues son las constriciones las que definen a la superficie de constricciones donde está restringida nuestra dinámica y no queremos que Σ_1 cambie de un momento a otro. Tal requerimiento de consistencia se expresa del siguiente modo:

$$\dot{\phi}^1_{\mu} = \{\phi^1_{\mu}, H_0\} + u^{\nu}\{\phi^1_{\mu}, \phi^1_{\nu}\} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \quad (42)$$

donde $\mu, \nu = 1, \ldots, M'$, es decir, los índices corren sobre el número total de constricciones primarias independientes. Definimos las cantidades:

$$\begin{aligned} h_{\mu} &:= \{\phi^1_{\mu}, H_0\}, \quad (43) \\ P_{\mu\nu} &:= \{\phi^1_{\mu}, \phi^1_{\nu}\}, \quad (44) \end{aligned}$$

por lo que, podemos expresar las ecuaciones (42) de la siguiente manera:

$$\dot{\phi}^1_{\mu} = h_{\mu} + u^{\nu}P_{\mu\nu} \overset{\Sigma_1}{=} 0. \quad (45)$$

Para analizar a detalle la ecuación (45), será conveniente expresarla en su forma matricial, donde $\mathbf{h} = (h_{\mu})$ (vector columna), $P = (P_{\mu\nu})$ (matriz MxM) y $\mathbf{u} = (u^{\mu})$ (vector columna), es decir:

$$\mathbf{h} + P\mathbf{u} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \quad (46)$$

así mismo, si P es invertible definimos su matriz inversa como $P^{-1} = (P^{\nu\mu})$.

A partir de la ecuación (46) obtendremos los siguientes casos:

CASO I: Si $\mathbf{h} \overset{\Sigma_1}{\neq} 0$ y $\det(P) \overset{\Sigma_1}{\neq} 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &\overset{\Sigma_1}{=} -P\mathbf{u}, \\ \Rightarrow P^{-1}\mathbf{h} &\overset{\Sigma_1}{=} -P^{-1}P\mathbf{u} \\ \therefore -P^{-1}\mathbf{h} &\overset{\Sigma_1}{=} \mathbf{u}. \quad (47) \end{aligned}$$

Lo cual también puede expresarse como:

$$u^{\nu} \stackrel{\Sigma_1}{=} -P^{\nu\mu}h_{\mu}. \tag{48}$$

Esto nos dice que podemos determinar los multiplicadores de Lagrange siempre que P sea invertible y que al menos uno de los paréntesis de Poisson entre las constricciones primarias y H_0 sea débilmente distinto de cero.

CASO II: Si $\mathbf{h} \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0$ y $\mathrm{det}(P) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$, entonces:

$$P\mathbf{u} \stackrel{\Sigma_1}{=} -\mathbf{h}. \tag{49}$$

Como $\mathrm{det}(P) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ es claro que $\mathrm{nucl}(P) \neq \{0\}$, donde $\mathrm{nucl}(P)$ es el núcleo de P por lo tanto existe algún vector $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $P\mathbf{v} = 0$. Además, como P es antisimétrica entonces $P^t = -P$, así la ecuación (49) implica que:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &\stackrel{\Sigma_1}{=} P^t\mathbf{u}, \\ \Rightarrow \mathbf{h}^t &\stackrel{\Sigma_1}{=} \mathbf{u}^t P. \end{aligned}$$

Entonces multiplicando ambos lados por el vector $\mathbf{v} \in \mathrm{nucl}(P)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^t\mathbf{v} &\stackrel{\Sigma_1}{=} \mathbf{u}^t(P\mathbf{v}), \\ \Rightarrow \mathbf{h}^t\mathbf{v} &\stackrel{\Sigma_1}{=} \mathbf{u}^t 0 = 0, \\ \Rightarrow \mathbf{h}^t\mathbf{v} &\stackrel{\Sigma_1}{=} 0 \\ \therefore \mathbf{v}^t\mathbf{h} &\stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Ahora, para saber cuántos vectores nulos conformarán el núcleo de P, basta con utilizar la siguiente ecuación:

$$\nu(P) = M - \rho(P), \tag{51}$$

donde $\rho(P)$ y $\nu(P)$ son el rango y la nulidad de la matriz P. Si $\alpha = 1, \ldots, \nu(p)$ podemos escribir la ecuación (50) como:

$$\nu^{\mu}_{\alpha}h_{\mu} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{52}$$

De este resultado obtendremos una nueva generación de constricciones, lo que detallaremos en la siguiente sección de este capítulo.

CASO III: Si $h \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ y $\mathrm{det}(P) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$. Tenemos que la ecuación (45) se reduce en su forma matricial a:

$$P\mathbf{u} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{53}$$

Como $\mathrm{det}(P) \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$, tendremos que $\mathbf{u} \in \mathrm{nucl}(P)$, donde algún $\mathbf{u} \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0$, por lo tanto el sistema de ecuaciones homogéneas para los multiplicadores de Lagrange u^{μ} tendrá soluciones no triviales. Como resultado de lo anterior obtendremos una cantidad $\rho(P)$ de multiplicadores de Lagrange que podremos determinar sobre la superficie de constricciones primarias.

CASO IV: Si $h \overset{\Sigma_1}{=} 0$ y $\mathtt{det}(P) \overset{\Sigma_1}{\neq} 0$, entonces de:

$$P\mathbf{u} \overset{\Sigma_1}{=} 0 \tag{54}$$

se puede ver que para este caso sólo existe la solución trivial, es decir $\mathbf{u} \overset{\Sigma_1}{=} 0$. Así, se sigue de la ecuación (17) que los términos multiplicados por u^μ serán débilmente cero, por consiguiente $H_T := H_0 + u^\mu \phi^1_\mu \overset{\Sigma_1}{=} H_0$.

Obtención de Constricciones Secundarias, Terciarias y de generaciones superiores

Cuando las ecuaciones (52) no sean idénticamente cero, obtendremos una nueva generación de constricciones llamadas *constricciones secundarias* que expresaremos como:

$$\phi^2_\mu \overset{\Sigma_1}{=} 0, \text{ donde } \mu = 1, \ldots, K \leqslant M'. \tag{55}$$

Vemos que ϕ^2_μ tiene un superíndice 2 que señala que pertenece a la segunda generación de constricciones halladas.

Este nuevo conjunto de constricciones definirá una nueva superficie denominada *superficie de constricciones secundarias* y que denotaremos como Σ_2. La evolución del sistema quedará restringida a la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2, es decir sobre $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 =: \Sigma_{1\cap 2}$. Esta superficie tendrá una dimensión $\mathtt{dim}(\Sigma_{1\cap 2}) = 2N - M' - K$, tomando en cuenta que hay M' constricciones primarias independientes y K constricciones secundarias independientes (supondremos por simplicidad que no hay redundancia en las constricciones secundarias).

A las constricciones secundarias también se le exigirá consistencia sobre la superficie de constricciones primarias, es decir:

$$\dot{\phi}^2_\mu = \{\phi^2_\mu, H_0\} + u^\nu \{\phi^2_\mu, \phi^1_\nu\} \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{56}$$

Además, tanto las constricciones primarias como secundarias deberán ser consistentes sobre $\Sigma_{1\cap 2}$. Para poder expresar adecuadamente esto, será conveniente modificar la notación usada en las constricciones hasta el momento. Se seguirá haciendo distinción entre las constricciones primarias y secundarias cuando sea conveniente, pero de no ser necesario, agruparemos todas las constricciones halladas de modo que queden expresadas como ϕ_κ con $\kappa = 1, \ldots, M', M'+1, \ldots M'+K$, luego:

$$\dot{\phi}_\kappa = \{\phi_\kappa, H_0\} + u^\nu \{\phi_\kappa, \phi_\nu\} \overset{\Sigma_{1\cap 2}}{=} 0. \tag{57}$$

La comprobación de la consistencia sobre la superficie $\Sigma_{1\bigcap 2}$ no nos proporciona nuevas constricciones, a lo más nos brindará información sobre los multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, en las relaciones de consistencia sobre la superficie Σ_1 aplicadas a las constricciones secundarias se hará uso de los casos analizados en la subsección anterior.

Si ocurre el Caso II hallaremos una tercera generación de constricciones llamadas *constricciones terciarias*: $\phi^3_\tau \overset{\Sigma_1}{=} 0$, donde $1 \leqslant \tau \leqslant \kappa$, que definen la *superficie de constricciones terciarias* Σ_3. Después aplicaremos las condiciones de consistencia sobre Σ_1, $\Sigma_{1\bigcap 2}$ y así como la intersección de las superficies Σ_1, Σ_2 y Σ_3, es decir $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 := \Sigma_{1\cap 2\cap 3}$[5]. Esto puede arrojarnos constricciones cuaternarias o relaciones para los multiplicadores de Lagrange.

No es usual hallar constricciones de generaciones posteriores (incluso cuaternarias), sin embargo de existir pueden encontrarse mediante un proceso similar al descrito en los párrafos anteriores. Dicho proceso se detiene cuando ya no arroja nuevas constricciones.

Al final hallaremos un número finito J de constricciones. Una vez que se han encontrado todas las constricciones que arroja el método aplicamos la condición de consistencia sobre la intersección de todas las superficies de constricciones halladas, es decir sobre $\Sigma := \Sigma_{\cap^n_{i=1}}$, donde n es la última generación de constricciones. Así mismo, podemos dejar de hacer distinción entre las generaciones de constricciones, por lo cual las denotaremos como:

$$\phi_\rho \overset{\Sigma}{=} 0, \text{ con } \rho = 1, ..., J. \tag{58}$$

Por otra parte, con las J constricciones se construirá la matriz:

$$W = (W_{\mu\nu}) := (\{\phi_\mu, \phi_\nu\}) = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} & \dots & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} & \dots & \{\phi_2, \phi_J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & \{\phi_J, \phi_2\} & \dots & \{\phi_J, \phi_J\} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Supondremos que la matriz W tiene un rango constante sobre la superficie, en una sección posterior se verá por qué esta propiedad es necesaria.

Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange

A partir de las condiciones de consistencia sobre todas las constricciones halladas (dependiendo de los casos I, II, III y IV), podemos obtener *restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange*. Para esto consideramos:

$$\{\phi_\nu, H_0\} + u^\mu \{\phi_\nu, \phi^1_\mu\} \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{60}$$

como un sistema de J ecuaciones lineales no homogéneas con $R \leqslant J$ multiplicadores u^μ desconocidos con coeficientes que son funciones de q^i y p_i. Estas ecuaciones deben tener soluciones, de otro modo el sistema de ecuaciones descrito por la Lagragiana del sistema físico sería inconsistente.

La solución general de estas ecuaciones es de la forma:

$$u^\mu \overset{\Sigma}{=} U^\mu + V^\mu, \tag{61}$$

5 Este paso se realiza por completez, ya que es necesario que las constricciones sean consistentes también en estas intersecciones, sin embargo es la condición de consistencia en Σ_1 la que usualmente proporciona nuevas constricciones.

donde U^μ es una solución particular del sistema de ecuaciones no homogéneo (60) y V^μ la solucion general del sistema de ecuaciones homogéneo asociado:

$$V^\mu\{\phi_\nu, \phi^1_\mu\} \stackrel{\Sigma}{=} 0. \tag{62}$$

Notemos que la solución más general de (60) es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes V^μ_a, por lo tanto la ecuación (61) se puede escribir como:

$$u^\mu \stackrel{\Sigma}{=} U^\mu + v^a V^\mu_a, \tag{63}$$

en términos de los coeficientes v^a, los cuales son arbitarios en el espacio fase. Con esto tendremos una parte de los multiplicadores que será arbitraria ($v^a V^\mu_a$) y otra que si podemos determinar (U^μ).

Caso reducible y caso irreducible

Si las constricciones $\phi_J \stackrel{\Sigma}{=}$ no son independientes, diremos son reducibles (o redundantes) y al caso en que estas aparecen le llamaremos *caso reducible*. Por el contrario, si todas las constricciones son independientes, diremos que éste es el *caso irreducible*.

Ignorando las constricciones dependientes no perderemos información, por lo que podemos suponer que siempre existe un caso *localmente irreducible* sin embargo, la separación de constricciones en dependientes e independientes podría resultar complicada de realizar.

Los ejemplos que se desarrollan en el siguiente capítulo son irreducibles, sin embargo en teorías de campo, por ejemplo en las teorías BF sí encontramos el caso reductible.

Hamiltoniano H′

El hamiltoniano total se podrá expresar de una nueva forma:

$$\begin{aligned} H_T &= H_0 + u^\mu \phi^1_\mu \\ &= H_0 + (U^\mu + v^a V^\mu_a)\phi^1_\mu \\ &= H_0 + U^\mu \phi^1_\mu + v^a V^\mu_a \phi^1_\mu. \end{aligned} \tag{64}$$

El Hamiltoniano H' será definido como:

$$H' := H_0 + U^\mu \phi^1_\mu, \tag{65}$$

es decir, aquella parte del Hamiltoniano total que tiene los multiplicadores de Lagrange que están determinados. De este modo:

$$H_T = H' + v^a \phi^1_a, \tag{66}$$

donde $\phi^1_a := V^\mu_a \phi^1_\mu$.

Funciones de Primera Clase y de Segunda Clase

Una función $F(q^i, p_i)$ de *primera clase* será aquella cuyos paréntesis de Poisson con las J constricciones halladas sean débilmente cero[6], es decir:

$$\{F, \phi_\mu\} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \text{ donde } \mu = 1, ..., J. \tag{67}$$

En contraste, una función $F(q^i, p_i)$ será de *segunda clase* si al menos uno de los paréntesis de Poisson de la función con alguna de las contricciones halladas no es débilmente cero.

Una propiedad de esta definición es que el paréntesis de Poisson entre dos funciones de primera clase, es también de primera clase, esto se demuestra como sigue. Sean F y G dos constricciones de primera clase, entonces:

$$\begin{aligned} \{F, \phi_\mu\} &= f_a^\mu \phi_\mu, \\ \{G, \phi_\mu\} &= g_a^\mu \phi_\mu, \end{aligned} \tag{68}$$

y usando de la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_\mu\} &= \{F, \{G, \phi_\mu\}\} - \{G, \{F, \phi_\mu\}\} \\ &= \{F, f_a^\mu \phi_\mu\} - \{G, g_a^\mu \phi_\mu\} \\ &= \{F, f_a^\mu\}\phi_\mu + f_a^\mu\{F, \phi_\mu\} \\ &\quad -\{G, g_a^\mu\}\phi_\mu - g_a^\mu\{G, \phi_\mu\} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \end{aligned} \tag{69}$$

En la penúltima igualdad hay que notar que ya sabemos que F y G son de primera clase y que hay términos en los que las constricciones $\phi_\mu \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ aparecen multiplicando, por lo que tales términos son débilmente cero.

Se puede demostrar que H' es de primera clase, como se ve enseguida:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\Sigma_1}{=} \{\phi_\mu, H_0\} + u^\nu\{\phi_\mu, \phi_\nu^1\} \\ &= \{\phi_\mu, H_0\} + U^\nu\{\phi_\mu, \phi_\nu^1\} + V^\nu\{\phi_\mu, \phi_\nu^1\} \\ &\stackrel{\Sigma_1}{=} \{\phi_\mu, H_0\} + U^\nu\{\phi_\mu, \phi_\nu^1\} \\ &= \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, U^\nu\phi_\nu^1\} - \{\phi_\mu, U^\nu\}\phi_\nu^1 \\ &\stackrel{\Sigma_1}{=} \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, U^\nu\phi_\nu^1\} \\ &= \{\phi_\mu, H'\}. \end{aligned} \tag{70}$$

En la primera igualdad de la ecuación (70), comenzamos con la ecuación (60), tomamos en cuenta la igualdad (61), luego hacemos uso de la ecuación (62), después usamos la propiedad del producto de los paréntesis de Poisson, posteriomente la propiedad de linealidad de éstos y finalmente la definición de H'.

6 Si la igualdad es fuertemente cero con respecto a todas las constricciones también se considerá de primera clase.

Constricciones de primera y segunda clase

Las constricciones son funciones a las que podemos aplicar la definición de funciones de primera y de segunda clase, de la cual se habló en la sección anterior. Se dirá entonces que una constricción es de primera clase si todos los paréntesis Poisson de tal constricción con ella misma y con el resto de las constricciones halladas son débilmente cero, es decir:

La constricción ϕ_i es de primera clase si y sólo si

$$\{\phi_i, \phi_\nu\} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \quad \textit{para todo}\, \nu = 1, ..., J, \tag{71}$$

y la denotaremos como γ_a.

Una constricción es de segunda clase si al menos uno de sus paréntesis de Poisson con alguna de las constricciones halladas es débilmente distinto de cero, es decir:

La constricción ϕ_i es de segunda clase si y sólo si

$$\exists\, \nu \in \{1, ..., J\}, \quad \textit{tal que}\, \{\phi_i, \phi_\nu\} \overset{\Sigma_1}{\neq} 0, \tag{72}$$

y la denotaremos como χ_α.

Separación de constricciones de primera clase y de segunda clase

Como ya habíamos mencionado, es necesario exigir que W tenga rango $\rho(W)$ constante sobre Σ_1. Esto se debe a que el rango está asociado al número de constricciones de primera clase que ha arrojado el método, si $\rho(W)$ no fuese constante tampoco la cantidad de constriciones de primera clase (ni de segunda clase) lo sería.

Recordemos la definición de la matriz W:

$$W = (\{\phi_\mu, \phi_\nu\}), \tag{73}$$

vemos que sus entradas se conforman por todos los paréntesis de Poisson entre la totalidad de las constricciones halladas. Cuando aparezcan constricciones de segunda clase algunas de las entradas de la matriz no se anularán en la superficie de constricciones Σ_1. Sin embargo, esta separación de constricciones no siempre es inmediata, enseguida se verá una manera de realizar tal separación.

Mediante el siguiente teorema tendremos una forma de separar adecuadamente las constricciones.

Teorema 4. *Si* $\det(W_{\mu\nu}) \overset{\Sigma_1}{=} 0$ *entonces existe al menos una constriccion de primera clase ϕ_ν.*

Demostración. Si $\det(W) \overset{\Sigma_1}{=} 0$, podemos encontrar al menos un vector no trivial x con componentes x^μ para los cuales $x^\mu W_{\mu\nu} \overset{\Sigma_1}{=} 0$ ó $x^\mu\{\phi_\mu, \phi_\nu\} \overset{\Sigma_1}{=} 0$. Por otra parte, el paréntesis de Poisson de la constricción $x^\mu\phi_\mu$ con todas las otras constriciones y ella misma es:

$$\{x^\mu\phi_\mu, \phi_\nu\} = \{x^\mu, \phi_\nu\}\phi_\mu + x^\mu\{\phi_\mu, \phi_\nu\} \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{74}$$

El primer término es débilmente cero pues $\phi_\mu \overset{\Sigma_1}{=} 0$ y el segundo término es débilmente cero por hipótesis. Por lo tanto $x^\mu\phi_\mu$ es de primera clase. □

Vemos entonces que redefiniendo las constricciones ϕ_μ uno puede usar la constricción $x^\mu \phi_\mu$ como constricción de primera clase de una superficie de constricciones equivalente. Como ν^μ está en el núcleo de W, al encontrar la base de este núcleo podremos determinar una o más constricciones de primera clase, de hecho, tendremos tantas como la dimensión del núcleo de W. De esta manera podremos expresar a las constricciones de primera clase como:

$$\gamma_a = x_a^\mu \phi_\mu \text{ donde } a = 1, ..., \nu(W) \text{ y } \mu = 1, ..., J. \tag{75}$$

Teorema 5. *Si hay $\nu(W) < J$ constricciones de primera clase, entonces existen $\rho(W)$ constricciones de segunda clase ϕ_ν.*

Demostración. Dado que W es una matriz cuadrada $J \times J$, $\nu(W) + \rho(W) = J$, con $\nu(W)$ y $\rho(W)$ la nulidad y el rango de la matriz W respectivamente. Sabemos que hay J constricciones, entonces si no todas las constricciones son de primera clase, tendremos un número par de constricciones secundarias. Tenemos que $\nu(W) < J$, es decir $J - \nu(W) \geqslant 2$, de aquí que, $\rho(W) \geqslant 2$, entonces existe una base de la imagen de W con al menos un elemento.

Considérese β una base de la imagen de W, que denotamos como $\mathrm{Im}(W)$, entonces:

$$\beta = \{\mathbf{y}_\alpha\} \subseteq \mathrm{Im}(W) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \stackrel{\Sigma_1}{=} W\mathbf{z}\} \text{ donde } \alpha = 1, ..., \rho(W).$$

Por otro lado, supongamos que $W\mathbf{y}_\alpha \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ entonces $\mathbf{y}_\alpha \in \mathrm{nucl}(W)$, pero $\mathrm{nucl}(W) \bigcap \mathrm{Im}(W) \stackrel{\Sigma_1}{=} \{0\}$, en consecuencia $\mathbf{y}_\alpha \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ lo que es una contradicción pues $0 \notin \beta$.

Por lo tanto $W\mathbf{y}_\alpha \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0$, que escrito en términos de sus componentes es $y^\mu\{\phi_\mu, \phi_\nu\} \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0$ para algún $\nu \in \{1, ..., J\}$.

Ahora, el paréntesis de Poisson de la combinación lineal de constricciones $y^\mu \phi_\mu$, donde y^μ son las componentes de algún vector en β, con todas las otras constriciones y ella misma es:

$$\{y^\mu \phi_\mu, \phi_\nu\} = \{y^\mu, \phi_\nu\}\phi_\mu + y^\mu\{\phi_\mu, \phi_\nu\} \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0. \tag{76}$$

el primer término de la primera igualdad es débilmente cero, pues $\phi_\mu \stackrel{\Sigma_1}{=} 0$ sin embargo, para algún $\nu \in \{1, ..., J\}$ se cumplirá que $y^\mu\{\phi_\mu, \phi_\nu\} \stackrel{\Sigma_1}{\neq} 0$. Por lo tanto habrá $\rho(W)$ constricciones de segunda clase $y^\mu \phi_\mu$. □

A partir de la demostración del Teorema 5 podemos decir que redefiniendo ϕ_μ uno puede usar la constricción $y^\mu \phi_\mu$ como constricción de segunda clase de una superficie de constricciones equivalente. Como y^μ está en la base de la imagen de W hallaremos $\rho(W)$ constricciones de seguda clase. Así podremos expresar a las constricciones de segunda clase como:

$$\chi_\alpha = y_\alpha^\mu \phi_\mu \text{ donde } \alpha = 1, ..., \rho(W) \text{ y } \mu = 1, ..., J. \tag{77}$$

Una vez separadas las constricciones, la matriz formada por los paréntesis de Poisson de las constricciones de primera y segunda clase W' es:

$$W' = \begin{pmatrix} \{\gamma_1,\gamma_1\} & \cdots & \{\gamma_1,\gamma_{(J-w)}\} & \{\gamma_1,\chi_1\} & \cdots & \{\gamma_1,\chi_w\} \\ \{\gamma_2,\gamma_1\} & \cdots & \{\gamma_2,\gamma_{(J-w)}\} & \{\gamma_2,\chi_1\} & \cdots & \{\gamma_2,\chi_w\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\gamma_{(J-w)},\gamma_1\} & \cdots & \{\gamma_{(J-w)},\gamma_{(J-w)}\} & \{\gamma_{(J-w)},\chi_1\} & \cdots & \{\gamma_{(J-w)},\chi_w\} \\ \{\chi_1,\gamma_1\} & \cdots & \{\chi_1,\gamma_{(J-w)}\} & \{\chi_1,\chi_1\} & \cdots & \{\chi_1,\chi_w\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\chi_{(w-1)},\gamma_1\} & \cdots & \{\chi_{(w-1)},\gamma_{(J-w)}\} & \{\chi_{(w-1)},\chi_1\} & \cdots & \{\chi_{(w-1)},\chi_w\} \\ \{\chi_w,\gamma_1\} & \cdots & \{\chi_w,\gamma_{(J-w)}\} & \{\chi_w,\chi_1\} & \cdots & \{\chi_w,\chi_w\} \end{pmatrix}, \quad (78)$$

donde w es el rango de la matriz W, J es el número total de constricciones y

$$(C_{\alpha\beta}) = (\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}), \quad (79)$$

es una matriz antisimétrica e invertible. La matriz $(C_{\alpha\beta})$ debe ser de dimensión par, pues al ser antisimétrica, si su dimensión fuese impar su determinante sería cero y no sería invertible[7].

El acomodo de las constricciones para W' es de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \gamma_a & \chi_\alpha \end{array} \\ \begin{array}{c} \gamma_b \\ \chi_\beta \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (C_{\beta\alpha}) \end{pmatrix} \end{array}. \quad (81)$$

De esta forma hemos logrado separar las constricciones de primera y segunda clase.

Enlistamos algunos hechos que podemos afirmar sobre las constricciones de primera y de segunda clase. Sean $a_a{}^b$ y $a_\alpha{}^\beta$ las entradas constantes de dos matrices cuadradas, tales que $\det(a_a{}^b) \neq 0$ y $\det(a_\alpha{}^\beta) \neq 0$, se cumple que:

1. Ninguna combinación lineal de constricciones de segunda clase es de primera clase, es decir que $\chi'_\alpha = a_\alpha{}^\beta \chi_\beta$ son de segunda clase.

2. Cualquer combinación lineal de constricciones de primera clase es de primera clase, esto es que $\gamma'_a = a_a{}^b \gamma_b$ son de primera clase.

3. Cualquier combinación lineal que de como resultado una constricción de segunda clase debe tener al menos una componente de segunda clase, lo cual se puede expresar como $\chi'_\alpha = a_\alpha{}^\beta \chi_\beta + a_a{}^\alpha \gamma_a$, es de segunda clase.

7 Esto se demuestra en seguida. Sea A una matriz antisimétrica y $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ &= \det(-A) \ \text{(por antisimétria)} \\ &= (-1)^n \det(A) \\ &= -\det(A) \ \text{(si } n \text{ es impar)} \\ \Rightarrow 2\det(A) &= 0, \\ \Rightarrow \det(A) &= 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Por lo tanto A no es invertible.

4. Si sumamos una combinación de los productos de pares de constriciones de segunda clase a cualquier constricción de primera clase, tendremos como resultado una constricción de primera clase, dicho de otra forma $\gamma'_a = \gamma_a + t_a^{\alpha\beta}\chi_\alpha\chi_\beta$ es de primera clase.

Es fácil ver que estas afirmaciones son ciertas realizando los parentesis de Poisson con todas las constricciones de primera y segunda clase. A partir de ellas podemos ver que la separación de constricciones (81) no es única, sino que se preserva bajo las redefiniciones:

$$\gamma_a \to a_a{}^b\gamma_b,\ \chi_\alpha \to a_\alpha{}^\beta\chi_\beta + a_a{}^\alpha\gamma_a, \tag{82}$$

con $\det(a_a{}^b) \neq 0$ y $\det(a_\alpha{}^\beta) \neq 0$. Y también podemos agregar cuadrados de constricciones de segunda clase sin cambiar la propiedad de primera clase:

$$\gamma_a \to \gamma_a + t_a^{\alpha\beta}\chi_\alpha\chi_\beta. \tag{83}$$

Superficie de constricciones de primera clase Σ_a y superficie de constricciones de segunda clase Σ_α

Introducimos dos nuevas superficies de constricciones que toman en cuenta la clasificación de constricciones en primera y segunda clase. Definimos a la superficie de constricciones de primera clase Σ_a (que se encuentra en el espacio fase) como la intersección de hipersuperficies en las que las constricciones de primera clase se encuentran determinadas.

De manera semejante, la superficie de constricciones de segunda clase Σ_α (que también se encuentra en el espacio fase) se define como la intersección de hipersuperficies en las que las constricciones de segunda clase están determinadas.

Transformaciones de norma

En la ecuación (66) podemos ver que habrá multiplicadores de Lagrange ν^a en el Hamiltoniano total que están indeterminados, de hecho habrá tantos de ellos como constricciones primarias de primera clase ϕ_a. Esto nos dice que tendremos multiplicadores de Lagrange arbitrarios en las ecuaciones de movimiento y sus soluciones, por lo que no podremos determinar de manera única las variables $(q(t), p(t))$ con los valores iniciales dados $(q(0), p(0))$. Sin embargo, el estado físico está completamente determinado por los valores iniciales, entonces tendremos un conjunto de variables canónicas representado un mismo estado físico. Es necesario definir qué conjunto de (q^i, p_i) corresponden al mismo estado físico.

Tomemos a las variables canónicas al tiempo t_1 y consideremos $t_2 = t_1 + \delta t$, donde δt es un intervalo pequeño de tiempo. Sea $F(t)$ una variable dinámica que podemos expresar como:

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \frac{1}{1!}\dot{F}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{F}(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}F^{(3)}(t_0)(t-t_0)^3 + \ldots \\ &= F(t_0) + \dot{F}(t_0)(\delta t) + \frac{1}{2}F^{(3)}(t_0)(\delta t)^2 + \frac{1}{6}\ddot{F}(t_0)(\delta t)^3 + \ldots \end{aligned}$$

donde $\delta t = t - t_0$.

Luego, quedándonos en primer orden:

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F}(t_0)(\delta t) \\ &\overset{\Sigma_1}{=} F(t_0) + \{F, H_T\}\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + \{F, \nu^a \phi_a^1\})\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + \{F, \nu^a\}\phi_a^1 + \nu^a\{F, \phi_a^1\})\delta t \\ &\overset{\Sigma_1}{=} F(t_0) + (\{F, H'\} + \nu^a\{F, \nu^a \phi_a^1\}). \end{aligned} \tag{84}$$

Considerando que otra evolución de F' sólo difiere de F por los coeficientes ν^a's que denotaremos como ν^a para F y ν'^a para F', tenemos que:

$$\begin{aligned} F(t_0) - F'(t_0) &= \delta F \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + \nu^a\{F, \phi_a^1\})\delta t \\ &\quad - F(t_0) - (\{F, H'\} + \nu'^a\{F, \phi_a^1\})\delta t \\ &= \delta t(\nu^a - \nu'^a)\{F, \phi_a^1\} \\ &= \varepsilon^a\{F, \phi_a^1\} \end{aligned} \tag{85}$$

donde $\varepsilon^a(q^i, p_i, t) := \delta t(\nu^a - \nu'^a)$, el cual es un número pequeño y arbitrario. Llegamos a la conclusión de todas las constricciones primarias de primera clase generan transformaciones no físicas, a las que denonimanos *transformaciones de norma*, las cuales no cambian el estado físico del sistema.

Una afirmación importante es que el paréntesis de Poisson de dos constricciones primarias de primera clase también genera transformaciones de norma[8], es decir:

$$\delta F = \varepsilon^a \eta^b \{F\{\phi_a, \phi_b\}\} + O(\varepsilon^2) + O(\eta^2). \tag{86}$$

Como ϕ_a y ϕ_b son de primera clase, los paréntesis de Poisson $\{\phi_a, \phi_b\}$ son fuertemente iguales a una combinación lineal de constricciones de primera clase. Se puede esperar que tal combinación lineal incluya constricciones de primera clase de generaciones superiores a las primarias. En consecuencia las constricciones secundarias, terciarias, etc. de primera clase generan transformaciones de norma. Esto no nos permite concluir que todas las constricciones de primera clase (de todas las generaciones) generan transformaciones de norma, sin embargo, Dirac supuso que ésto sí ocurría, a lo cual se le conoce como *conjetura de Dirac*. En este trabajo tomaremos como válida esta conjetura.

Paréntesis de Dirac

Como hemos visto todas las constricciones de primera clase dan lugar a las transformaciones de norma, las constricciones de segunda clase, por su parte, no generan transformaciones con ningún significado físico. Sin embargo, con las segundas podemos construir el paréntesis de Dirac al cual definimos como:

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, G\}, \tag{87}$$

8 Esto se puede demostrar aplicando 4 veces de manera sucesiva una transformación de norma sobre F, despreciando $O(\varepsilon^n)$ y $O(\eta^n)$, para $n > 2$.

donde $C^{\alpha\beta}$ son las entradas de la matriz inversa de $(C_{\beta\alpha})$, la cual como ya se dijo antes es invertible.

Por la forma en que está definido el paréntesis de Dirac éste hereda de las propiedades de linealidad, antisimetría, regla del producto e identidad de Jacobi del paréntesis de Poisson, es decir:

$$\begin{array}{ll} \{F, \alpha G + \beta R\}_D = \alpha\{F, G\}_D + \beta\{F, R\}_D, & \text{(Linealidad)} \\ \{F, G\}_D = -\{G, F\}_D, & \text{(Antisimetría)} \\ \{F, GR\}_D = \{F, G\}_D R + G\{F, R\}_D, & \text{(Regla del producto)} \\ \{\{F, G\}\}_D, R\}_D + \{\{R, F\}_D, G\} + \{\{G, R\}_D, F\}_D = 0. & \text{(Identidad de Jacobi)} \end{array} \tag{88}$$

Además, el paréntesis de Dirac también cumple con lo siguiente:

$$\{\chi_\alpha, F\}_D = 0, \text{ para cualquier } F. \tag{89}$$

$$\{F, G\}_D \stackrel{\Sigma}{=} \{F, G\}, \text{ para } G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitrario.} \tag{90}$$

$$\{R, \{F, G\}_D\}_D \stackrel{\Sigma}{=} \{R, \{F, G\}\}, \text{ para } F \text{ y } G \text{ de primera clase y } R \text{ arbitrario.} \tag{91}$$

Usando la propiedad (90) podemos ver que la ecuación (85) se puede expresar como: $F(t_0) - F'(t_0) \stackrel{\Sigma}{=} \varepsilon^a\{F, \phi^1_a\}_D$.

Adicionalmente, el paréntesis de Dirac cumple con esta característica:

$$\{F, F\}_D = 0 \text{ para cualquier función,} \tag{92}$$

la cual es una consecuencia de la propiedad de antisimetría y se demuestra enseguida:

$$\begin{aligned} \{F, F\}_D &= -\{F, F\}_D, \\ \Rightarrow \{F, F\}_D + \{F, F\}_D &= 0, \\ \Rightarrow 2\{F, F\}_D &= 0 \\ \therefore \{F, F\}_D &= 0. \end{aligned} \tag{93}$$

En los paréntesis de Dirac la información relacionada con las constricciones de segunda clase ya está incorporada, no ocurriendo así con los paréntesis de Poisson. Las ecuaciones de la teoría en lo subsecuente estarán formuladas en términos de los paréntesis de Dirac y cuando trabajemos con ellos podremos fijar las constricciones de segunda clase como fuertemente cero antes de evaluar a este paréntesis modificado.

Hamiltoniano extendido H_E y principio de acción extendido S_E

Hasta ahora hemos considerado la evolución generada por H_T, en la cual sólo tendremos tantas transformaciones de norma como constricciones primarias de primera clase. Este Hamiltoniano no incluye la información de las constricciones de generaciones posteriores a la primaria ni la clasificación de primera y segunda clase. Debido a que la evolución más general posible tiene que admitir las transformaciones de norma generadas por todas las constricciones de primera clase, es necesario definir el *Hamiltoniano extendido*:

$$H_E := H_0 + u^J \phi_J, \tag{94}$$

donde la suma corre sobre todas las constricciones halladas en el método antes del proceso de separación de constricciones.

Sabemos que la clasificación de constricciones de primera y segunda clase es importante (pues las constricciones de primera clase están relacionadas con las transformaciones de norma y las constricciones de segunda clase nos permiten construir los paréntesis de Dirac), por lo que es conveniente expresar H_E tomándola en cuenta, es decir:

$$H_E := H_0 + v'^a \gamma_a + u''^\alpha \chi_\alpha, \tag{95}$$

donde v'^a y u''^α[9]. son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las constricciones de primera y segunda clase respectivamente.

Los multiplicadores v'^a no están determinados a diferencia de los multiplicadores u''^α para los que podemos encontrar una expresión analizando para las constricciones de segunda clase la condición de consistencia sobre la intersección de todas las superficies de constricciones:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\Sigma}{=} \dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H_E\} \\
&= \{\chi_\alpha, H_0 + v'^b \gamma_b + u''^\beta \chi_\beta\} \\
&\overset{\Sigma}{=} \{\chi_\alpha, H_0\} + \{\chi_\alpha, v'^b \gamma_b\} + \{\chi_\alpha, u''^\beta \chi_\beta\} \\
&= \{\chi_\alpha, H_0\} + v'^b \{\chi_\alpha, \gamma_b\} + \{\chi_\alpha, v'^b\}\gamma_b + u''^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} + \{\chi_\alpha, u''^\beta\}\chi_\beta \\
&\overset{\Sigma}{=} \{\chi_\alpha, H_0\} + u''^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\alpha\}.
\end{aligned} \tag{96}$$

Ahora para despejar u''^β hay que recordar que $(C_{\alpha\beta}) = (\{\chi_\alpha, \chi_\beta\})$, ya que esta matriz es invertible existe una matriz $(C^{\alpha\beta})$ tal que:

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

De este modo, a partir de la ecuación (96) tenemos que:

$$u''^\beta C_{\alpha\beta} \overset{\Sigma}{=} -\{\chi_\alpha, H_0\},$$

entonces,

$$u''^\beta C^{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} = u''^\beta \delta^\gamma_\beta \overset{\Sigma}{=} -C^{\gamma\alpha}\{\chi_\alpha, H_0\},$$

así,

$$u''^\gamma \overset{\Sigma}{=} -C^{\gamma\alpha}\{\chi_\alpha, H_0\}.$$

Finalmente, sabemos que la matriz $(C_{\alpha\beta})$ es antisimétrica por lo que su inversa también lo es, entonces $C^{\alpha\gamma} = -C^{\gamma\alpha}$, por lo tanto:

$$u''^\gamma \overset{\Sigma}{=} C^{\alpha\gamma}\{\chi_\alpha, H_0\}, \tag{97}$$

que es la expresión que estabamos buscando.

9 Los apostrofes utilizados en estos multiplicadores sólo se usan para indicar que éstos no son los mismos que los usandos antes de la separación de constricciones, es decir, u^μ No se debe confundir con la notación de Lagrange para derivadas, la cual no usamos en esta tesis.

El Hamiltoniano de primera clase H

Como vimos antes, el Hamiltoniano total puede escribirse como $H_T = H' + v^a \phi^1_a$, donde H' es un Hamiltoniano de primera clase que por definición sólo incluye a las constricciones primarias de segunda clase. Ahora definiremos un nuevo Hamiltoniano de primera clase que tome en cuenta las constricciones de segunda clase de todas las generaciones, al cual denotaremos como H y que está dado por:

$$H := H_0 + \lambda^\alpha \chi_\alpha. \tag{98}$$

Al igual que expresamos H_T en términos de H' buscaremos una forma de poder escribir H_E en relación a H. Partimos de la ecuación $H_E := H_0 + v'^a \gamma_a + u''^\alpha \chi_\alpha$ y agregamos del lado derecho de la ecuación los términos $\lambda^\alpha \chi_\alpha - \lambda^\alpha \chi_\alpha = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} H_E &:= H_0 + v'^a \gamma_a + u''^\alpha \chi_\alpha + \lambda^\alpha \chi_\alpha - \lambda^\alpha \chi_\alpha \\ &= H_0 + \lambda^\alpha \chi_\alpha + v'^a \gamma_a + (u''^\alpha - \lambda^\alpha)\chi_\alpha. \end{aligned} \tag{99}$$

En la última expresión ya se encuentra presente H, por lo que, definiendo $u'^\alpha := u''^\alpha - \lambda^\alpha$ podemos escribir el hamiltoniano extendido de la siguiente manera:

$$H_E = H + v'^a \gamma_a + u'^\alpha \chi_\alpha, \tag{100}$$

como deseabamos.

Asímismo, podemos determinar el valor de u'^α aplicando la condición de consistencia a las constricciones de segunda clase, igual que lo hicimos con u''^α, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\Sigma}{=} \dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H_E\} \\ &= \{\chi_\alpha, H + v'^a \gamma_a + u'^\beta \chi_\beta\} \\ &= \{\chi_\alpha, H\} + \{\chi_\alpha, v'^a \gamma_a\} + \{\chi_\alpha, u'^\beta \chi_\beta\} \\ &= \{\chi_\alpha, H\} + v'^a\{\chi_\alpha, \gamma_a\} + \{\chi_\alpha, v'^a\}\gamma_a + u'^\beta\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} + \{\chi_\alpha, u'^\beta\}\chi_\beta \\ &\overset{\Sigma}{=} u'^\beta\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \\ &= u'^\beta C_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{101}$$

como se dijo antes $(C_{\alpha\beta})$ es invertible, por lo que podemos despejar u'^β:

$$0 = 0 \cdot C^{\gamma\alpha} \overset{\Sigma}{=} u'^\beta C^{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} = u'^\beta \delta^\gamma_\beta = u'^\gamma,$$

además, recordando como hemos definido u'^β encontramos que $0 \overset{\Sigma}{=} u''^\alpha - \lambda^\alpha$, entonces:

$$u''^\alpha \overset{\Sigma}{=} \lambda^\alpha. \tag{102}$$

Tomando en cuenta esta igualdad, podemos escribir la ecuación (97) de la siguiente forma:

$$\lambda^\alpha \overset{\Sigma}{=} C^{\alpha\gamma}\{\chi_\gamma, H_0\}, \tag{103}$$

lo cual resulta conveniente al llevar a cabo el algoritmo de Dirac.

Por otra parte como hemos dicho H es un Hamiltoniano de primera clase, esto se ve enseguida. Sean ϕ_μ todas las constricciones de primera y segunda clase, por completez les exigimos cumplir la condición de consistencia en Σ_1, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\Sigma_1}{=} \dot{\phi}_\mu = \{\phi_\mu, H_0\} + v'^a\{\phi_\mu, \gamma_a\} + u''^\alpha\{\phi_\mu, \chi_\alpha\} \\ &\overset{\Sigma_1}{=} \{\phi_\mu, H_0\} + u''^\alpha\{\phi_\mu, \chi_\alpha\} \\ &= \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, u''^\alpha\chi_\alpha\} - \{\phi_\mu, u''^\alpha\}\chi_\alpha \\ &\overset{\Sigma_1}{=} \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, u''^\alpha\chi_\alpha\} \\ &= \{\phi_\mu, H\}, \end{aligned} \tag{104}$$

con lo que queda comprobada nuestra afirmación.

Principio de acción extendido y transformaciones de norma

Ahora que hemos definido el Hamiltoniano extendido podemos escribir el principio de acción extendido como:

$$\begin{aligned} S_E[q^i, p_i, v'^a, u'^\alpha] &= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^i p_i - H_E)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^i p_i - H - v'^a\gamma_a - u'^\alpha\chi_\alpha)\, dt, \end{aligned} \tag{105}$$

a través del cual podemos hallar las ecuaciones de movimiento haciendo uso del principio variacional.

Por otra parte, el principio de acción extendido es invariante ante las transformaciones de norma de las variables p_i, q^i, v'^a y u'^α. Las transformaciones para las primeras dos variables están dadas por:

$$\delta F = F - F' = \varepsilon^a\{F, \gamma_a\}, \tag{106}$$

donde los parámetros de norma ε^a, para este caso en particular, sólo dependen del tiempo. Además, para que se cumpla la invarianza, las transformaciones de norma de los multiplicadores de Lagrange deben estar dadas por:

$$\delta v'^a = \dot{\varepsilon}^a + v'^c\varepsilon^b C_{bc}^{\ \ a} + u'^\alpha\varepsilon^b C_{b\alpha}^a - \varepsilon^b V_b^a, \tag{107}$$

$$\delta u'^\alpha = v'^c\varepsilon^c T_{bc}^{\alpha\beta}\chi_\beta - \varepsilon^b V_b^{\alpha\beta}\chi_\beta + u'^\beta\varepsilon^b C_{b\beta}^\alpha. \tag{108}$$

Los coeficientes que acompañan los términos en las ecuaciones (107) y (108) provienen del álgebra de las constricciones de primera, segunda clase y H, la cual es:

$$\begin{aligned} \{\gamma_a, \gamma_b\} &= C_{ab}^{\ \ c}\gamma_c + T_{ab}^{\alpha\beta}\chi_\alpha\chi_\beta, \\ \{\gamma_a, \chi_\alpha\} &= C_{a\alpha}^b\gamma_b + C_{a\alpha}^\beta\chi_\beta, \\ \{H, \gamma_a\} &= V_a^{\ b}\gamma_b + V_a^{\alpha\beta}\chi_\alpha\chi_\beta, \\ \{H, \chi_\alpha\} &= V_\alpha^b\gamma_b + V_\alpha^\beta\chi_\beta, \end{aligned} \tag{109}$$

en el primer y tercer paréntesis pueden aparecer términos cuadráticos de constricciones de segunda clase debido a que, como ya se dijo, tanto H como γ_a son de primera clase.

Por otro lado, hay que mencionar que S_E puede ser totalmente invariante ante transformaciones de norma, es decir $\delta_\varepsilon S_E = S'_E[q^i + \delta_\epsilon q^i, p_i + \delta_\epsilon p_i, v'^a + \delta_\epsilon v'^a, u'^\alpha + \delta_\epsilon u'^\alpha] - S_E[q^i, p_i, v'^a, u'^\alpha] = 0$, o bien ser invariante módulo un término de frontera, esto es $\delta_\varepsilon S_E = S'_E[q^i + \delta_\epsilon q^i, p_i + \delta_\epsilon p_i, v'^a + \delta_\epsilon v'^a, u'^\alpha + \delta_\epsilon u'^\alpha] - S_E[q^i, p_i, v'^a, u'^\alpha] = M(t)$, donde M está dado por:

$$M(t) = \varepsilon^a \left(\frac{\partial \gamma_a}{\partial p_i} p_i - \gamma_a \right), \tag{110}$$

de esta forma, expresaremos la variación de la acción como $\delta S_E = M(t_1) - M(t_0)$.

Conteo de grados de libertad

Para realizar el conteo de grados de libertad partirmos de la dimensión del espacio fase, que está dada por $2N$, que es la cantidad de variables canónicas (q^i, p_i), a éste debemos restarle el número total de constricciones arrojadas por el algoritmo. Debido a la redundancia que existe en los estados asociados por las transformaciones de norma, es necesario sustraer una segunda vez a las constricciones de primera clase[10], esta operación nos brinda como resultado el doble del número de grados de libertad. Lo anteriormente dicho se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 2x \begin{pmatrix} \text{Número de grados} \\ \text{de libertad} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \text{Número original de} \\ \text{constricciones de segunda clase} \end{pmatrix} \\ & - 2x \begin{pmatrix} \text{Número de constricciones} \\ \text{de primera clase} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{111}$$

Ahora, denotando el número de grados físicos como η, al número de constriciones de segunda clase originales como ζ y al número total de constricciones de primera clase como ξ, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi]. \tag{112}$$

10 Esta doble substracción se debe a lo que se conoce como fijación de norma, una revisión detallada de este concepto puede encontrase en [8, págs: 27-28]

Parte II

Resultados: Algoritmo de Dirac para sistemas singulares con un término de frontera

En la Parte I de esta tesis se llevó a cabo la revisión del algortimo de Dirac, en esta segunda parte nosotros analizaremos qué cambios ocurren en el desarrollo de este algoritmo al agregar distintos términos de frontera a Lagrangianos que describen sistemas singulares. Como sabemos, sumar la derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo a un Lagrangiano no cambia sus ecuaciones de movimiento. Para sistemas regulares agregar este término de frontera no cambia la dinámica del sistema. Buscamos saber si algo semejante ocurre para sistemas singulares, es decir, saber si cualquier término de frontera que le sea agregado al Lagrangiano de un sistema singular no modificará las constricciones de primera y segunda clase, el número de grados de libertad, las tranformaciones de norma (y en consencuencia sus simetrías de norma), etc. Para ello, en el segundo capítulo presentamos el *Sistema A* que corresponde al Lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3$, mientras que en el capítulo tres nos centramos en el estudio del *Sistema B* que es descrito por el Lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i) = (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2$.
Ambos capítulos cuentan con cuatro secciones en las que analizamos cuatro casos distintos:

CASO 0. Aquí se aplica el algoritmo de Dirac al Lagrangiano sin agregar ningún término de frontera. Esto nos ayudará a ver las similitudes y diferencias que existen entre los casos con términos de frontera y sin ellos.

CASO 1. Agregamos la derivada total de una función que depende sólo de las coordenadas, este caso permite ver con claridad las diferencias y similitudes que hay en relación al Caso 0. Es el más simple y el que usualmente se presenta en teorías de campo.

CASO 2. Este es un paso intermedio, aquí sumamos al Lagrangiano una derivada total con respecto al tiempo de una función que depende no sólo de las coordenadas, sino también del tiempo: $\frac{d}{dt}\left(F_1(q^i) + F_2(t)\right)$.

CASO 3. En este último caso el término de frontera es, en pricipio, completamente arbitrario. En él analizamos los cambios debidos a esta arbitrariedad.

Desarollamos estos casos para saber qué términos de frontera conservarán la dinámica del sistema singular original, ya que, por ejemplo en teoría de campos, como se menciona en la introducción, los sistemas que surgen generalmente son singulares y en muchos casos es necesario emplear términos de frontera.

2 SISTEMA A: $L(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2 q^3$

Caso 0: Sin término de frontera

Consideremos el Lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3$ cuyo principio de acción es:

$$S_L[q^i(t), \dot{q}^i(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3]dt, \tag{113}$$

con $i = 1, 2, 3$.

La variación de esta acción es:

$$\begin{aligned}
\delta S_L[q^i(t), \dot{q}^i(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} \delta[\dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^3\delta\dot{q}^1 + \dot{q}^1\delta\dot{q}^3 + q^3\delta q^2 + q^2\delta q^3]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{q}^3\frac{d}{dt}\delta q^1 + \dot{q}^1\frac{d}{dt}\delta q^3 + q^3\delta q^2 + q^2\delta q^3\right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [-\ddot{q}^3\delta q^1 + q^3\delta q^2 + (q^2 - \ddot{q}^1)\delta q^3]dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}(\dot{q}^1\delta q^3 + \dot{q}^3\delta q^1)\right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [-\ddot{q}^3\delta q^1 + q^3\delta q^2 + (q^2 - \ddot{q}^1)\delta q^3]dt \\
&\quad + (\dot{q}^1\delta q^3 + \dot{q}^3\delta q^1)\Big|_{t_0}^{t_1},
\end{aligned} \tag{114}$$

y haciendo uso del principio de mínima acción $\delta S_L = 0$, lo cual debe cumplirse para cualquier δq^i con $\delta q^i|_{t_0}^{t_1} = 0$, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\delta q^1 &: -\ddot{q}^3 = 0, \\
\delta q^2 &: q^3 = 0, \\
\delta q^3 &: q^2 = \ddot{q}^1.
\end{aligned} \tag{115}$$

Ahora calculamos los momentos a partir de la ecuación (1), estos son:

$$
\begin{aligned}
p_1 &:= \frac{\partial L}{\partial \dot q^1} = \dot q^3, && (116)\\
p_2 &:= \frac{\partial L}{\partial \dot q^2} = 0, && (117)\\
p_3 &:= \frac{\partial L}{\partial \dot q^3} = \dot q^1. && (118)
\end{aligned}
$$

De la ecuación (4), la matriz Hessiana está dada por:

$$
(H_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{119}
$$

por lo que $\det(H_{ij}) = 0$. Ahora, dado que $N = 3$ y $\rho(H_{ij}) = 2$, de la ecuación (7) obtenemos que $M' = 1$, es decir sólo hallaremos una constricción primaria independiente, por consiguiente $\dim(\Sigma_1) = 5$ (ver la ecuación (8)). Esta constricción que proviene del momento (117) es:

$$
\phi^1_1 := p_2 \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{120}
$$

Ya que hemos obtenido nuestra constricción primaria podemos calcular la matriz Jacobiana:

$$
\begin{aligned}
J\left(\phi^1_\mu\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi^1_1}{\partial q^1} & \frac{\partial\phi^1_1}{\partial q^2} & \frac{\partial\phi^1_1}{\partial q^3} & \frac{\partial\phi^1_1}{\partial p_1} & \frac{\partial\phi^1_1}{\partial p_2} & \frac{\partial\phi^1_1}{\partial p_3} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. && (121)
\end{aligned}
$$

Debido a que $\rho\left(J\left(\phi^1_\mu\right)\right) = 1$ es constante sobre toda la superficie de constricciones primarias Σ_1 se cumple la condición de regularidad, por lo que podemos continuar con el procedimiento.

Siguiendo con el algoritmo determinamos el Hamiltoniano canónico mediante la ecuación (15):

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \dot q^1 p_1 + \dot q^2 p_2 + \dot q^3 p_3 - \dot q^1 \dot q^3 - q^2 q^3\\
&= \dot q^1 \dot q^3 + \dot q^2(0) + p_3 p_1 - \dot q^1 \dot q^3 - q^2 q^3\\
&= p_3 p_1 - q^2 q^3, && (122)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la definición de momento para eliminar las velocidades, de modo que H_0 queda en términos de los momentos y las coordenadas canónicas. Así, a partir de la ecuación (17) el Hamiltoniano canónico total está dado por:

$$
\begin{aligned}
H_T &= p_3 p_1 - q^2 q^3 + u^1 \phi^1_1\\
&= p_3 p_1 - q^2 q^3 + u^1 p_2. && (123)
\end{aligned}
$$

Nosotros podríamos hallar las ecuaciones de movimiento mediante las ecuaciones (31) y (32) o bien a través de la acción total, para este sistema lo haremos mediante la segunda forma. Partimos de S_T:

$$
\begin{aligned}
S_T[q^i, p_i, u^\mu] &= \int_{t_0}^{t_1} [\dot q^i p_i - H_T] dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1} [\dot q^1 p_1 + \dot q^2 p_2 + \dot q^3 p_3 - p_3 p_1 + q^2 q^3 - u^1 p_2] dt. && (124)
\end{aligned}
$$

Variamos esta acción y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta S_T[q^i,p_i,u^\mu] &= \int_{t_0}^{t_1} \delta[\dot{q}^1p_1+\dot{q}^2p_2+\dot{q}^3p_3-p_3p_1+q^2q^3-u^1p_2]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [p_1\delta\dot{q}^1+\dot{q}^1\delta p_1+p_2\delta\dot{q}^2+\dot{q}^2\delta p_2+p_3\delta\dot{q}^3+\dot{q}^3\delta p_3 \\
&\quad -p_1\delta p_3-p_3\delta p_1+q^3\delta q^2+q^2\delta q^3-p_2\delta u^1-u^1\delta p_2]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{p}_1\delta q^1+(q^3-\dot{p}_2)\delta q^2+(q^2-\dot{p}_3)\delta q^3+(-p_3+\dot{q}^1)\delta p_1 \\
&\quad +(\dot{q}^2-u^1)\delta p_2+(\dot{q}^3-p_1)\delta p_3-p_2\delta u^1]dt \\
&\quad +\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}(p_1\delta q^1+p_2\delta q^2+p_3\delta q^3)\right]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{p}_1\delta q^1+(q^3-\dot{p}_2)\delta q^2+(q^2-\dot{p}_3)\delta q^3+(-p_3+\dot{q}^1)\delta p_1 \\
&\quad +(\dot{q}_2-u^1)\delta p_2+(\dot{q}^3-p_1)\delta p_3-p_2\delta u^1]dt \\
&\quad +(p_1\delta q^1+p_2\delta q^2+p_3\delta q^3)\Big|_{t_0}^{t_1}.
\end{aligned} \tag{125}$$

De forma análoga al caso anterior, usamos el principio de mínima acción y obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\overset{\Sigma_1}{=} p_3, \\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} u^1, \\
\dot{q}^3 &\overset{\Sigma_1}{=} p_1, \\
\dot{p}_1 &\overset{\Sigma_1}{=} 0, \\
\dot{p}_2 &\overset{\Sigma_1}{=} q^3, \\
\dot{p}_3 &\overset{\Sigma_1}{=} q^2,
\end{aligned} \tag{126}$$

y que $p_2 \overset{\Sigma_1}{=} 0$, algo que ya sabiamos de la definición de momento.

Para continuar con el procedimiento aplicamos la condición de consistencia a la constricción primaria que hallamos:

$$\dot{\phi}_1^1 = \{\phi_1^1, H_0\}+u^1\{\phi_1^1,\phi_1^1\} = \{p_2, p_3p_1-q^2q^3\}+u^1(0) = q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0.$$

Así, hemos obtenido una constricción secundaria $\phi_1^2 = q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0$ a la que también aplicamos la condición de consistencia sobre la superficie Σ_1:

$$\dot{\phi}_1^2 = \{\phi_1^2, H_0\}+u^1\{\phi_1^2,\phi_1^1\} = \{q^3, p_3p_1-q^2q^3\}+u^1\{q^3,p_2\} = p_1 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$$

así como en la interesección de superficies $\Sigma_{1\cap 2}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1^2 &= \{\phi_1^2, H_0\}+u^1\{\phi_1^2,\phi_1^1\}+u^2\{\phi_1^2,\phi_1^2\} \\
&= \{q^3, p_3p_1-q^2q^3\}+u^1\{q^3,p_2\}+u^2(0) = p_1 \overset{\Sigma_{1\cap 2}}{=} 0,
\end{aligned}$$

por lo que hemos hallado una constricción terciaria $\phi_1^3 = p_1 \overset{\Sigma_1}{=} 0$.

A la última constricción hallada también le aplicamos la condición de consistencia en Σ_1:

$$\dot{\phi}_1^3 = \{\phi_1^3, H_0\} + u^1\{\phi_1^3, \phi_1^1\} = \{p_1, p_3p_1 - q^2q^3\} + u^1\{p_1, p_2\} \overset{\Sigma_1}{=} 0,$$

sobre $\Sigma_{1\cap 2}$:

$$\dot{\phi}_1^3 = \{\phi_1^3, H_0\} + u^1\{\phi_1^3, \phi_1^1\} + u^2\{\phi_1^3, \phi_1^2\} = \{p_1, p_3p_1 - q^2q^3\} + u^1\{p_1, p_2\} + u^2\{p_1, q^3\} \overset{\Sigma_{1\cap 2}}{=} 0,$$

y en $\overset{\Sigma_{1\cap 2\cap 3}}{=}$:

$$\dot{\phi}_1^3 = \{\phi_1^3, H_0\} + u^1\{\phi_1^3, \phi_1^1\} + u^2\{\phi_1^3, \phi_1^2\} + u^3\{\phi_1^3, \phi_1^3\} \overset{\Sigma_{1\cap 2\cap 3}}{=} 0.$$

Esto último no nos ofrece información nueva, ni constricciones cuaternarias. En total hemos hallado tres constricciones que enlistamos a continuación:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p_2 \overset{\Sigma_1}{=} 0, \\ \phi_2 &= q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0, \\ \phi_3 &= p_1 \overset{\Sigma_1}{=} 0. \end{aligned} \tag{127}$$

Ahora determinamos los multiplicadores de Lagrange, primero encontramos la solución particular del sistema de ecuaciones (60):

$$\begin{aligned} \{\phi_1, H_0\} + U^1\{\phi_1, \phi_1^1\} &= \{p_2, p_3p_1 - q^2q^3\} + U^1(0) = q^3 + U^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0, \\ \{\phi_2, H_0\} + U^1\{\phi_2, \phi_1^1\} &= \{q^3, p_3p_1 - q^2q^3\} + U^1\{q^3, p_2\} = p_1 + U^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0, \\ \{\phi_3, H_0\} + U^1\{\phi_3, \phi_1^1\} &= \{p_1, p_3p_1 - q^2q^3\} + U^1\{p_1, p_2\} = 0 + U^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0, \end{aligned}$$

y encontramos la solución general del sistema de ecuaciones homogéneo asociado:

$$\begin{aligned} V^1\{\phi_1, \phi_1^1\} &= V^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0 \\ V^1\{\phi_2, \phi_1^1\} &= V^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0, \\ V^1\{\phi_3, \phi_1^1\} &= V^1(0) \overset{\Sigma}{=} 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que u^1 está indeterminado por lo que, de la ecuación (65):

$$H_T := H_0 + u^1\phi_1^1 = (p_3p_1 - q^2q^3) + u^1p_2 = H' + u^1p_2, \tag{128}$$

de lo cual se sigue que $H' = H_0$. Demostraremos posteriormente que H' es de primera clase.

Continuando con el procedimiento, es necesario calcular la matriz W usando la ecuación (59):

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{129}$$

por la forma de W podemos ver que todas las constricciones encontradas son de primera clase, una consecuencia de esto es que no habrá paréntesis de Dirac para este Lagrangiano.

Enlistamos las constricciones de primera clase:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = p_2 &\overset{\Sigma}{=} 0, \\ \gamma_2 = q^3 &\overset{\Sigma}{=} 0, \\ \gamma_3 = p_1 &\overset{\Sigma}{=} 0. \end{aligned} \tag{130}$$

El proceso de separación de constricciones puede causar que las constricciones de primera y segunda clase que se obtengan no sean las exactamente las constricciones ϕ_μ encontradas inicialmente sino una combinación lineal de ellas. Como podemos ver en este ejemplo no ha sido así, sin embargo para mostrar que H' es de primera clase hemos esperado hasta ahora, pues los paréntesis de Poisson se deben realizar con las constricciones de primera y segunda clase halladas. Ahora que las hemos encontrado podemos calcular:

$$\begin{aligned}\{H',\gamma_1\} &= \{p_3p_1 - q^2q^3, p_2\} = -q^3 = -\gamma_2 \overset{\Sigma}{=} 0,\\ \{H',\gamma_2\} &= \{p_3p_1 - q^2q^3, q^3\} = -p_1 = -\gamma_3 \overset{\Sigma}{=} 0,\\ \{H',\gamma_3\} &= \{p_3p_1 - q^2q^3, p_2\} = 0,\end{aligned} \tag{131}$$

por lo tanto, tal como esperabamos H' es de primera clase.

Por otro lado, para poder construir el principio de acción extendido es necesario conocer primero al Hamiltoniano extendido, el cual hallamos a partir de la ecuación (100), de este modo $H_E = H + v'^a\gamma_a + u'^\alpha\chi_\alpha = H + v'^1p_2 + v'^2q^3 + v'^3p_1$, donde $H := H_0 + u''^\alpha\chi_\alpha = H_0$ pues no obtuvimos constricciones de segunda clase, de este modo el principio de acción extendido es:

$$\begin{aligned}S_E[q^i, p_i, v'^a] &:= \int_{t_0}^{t_1}[\dot{q}^ip_i - H_E]dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}[\dot{q}^1p_1 + \dot{q}^2p_2 + \dot{q}^3p_3 - H_0 - v'^1p_2 - v'^2q^3 - v'^3p_1]dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}[\dot{q}^1p_1 + \dot{q}^2p_2 + \dot{q}^3p_3 - p_1p_3 - v'^1p_2 - v'^2q^3 - v'^3p_1]dt.\end{aligned}$$

Para ver si S_E es invariante ante transformaciones de norma comenzamos por calcular las transformaciones de los momentos y de las coordenadas canónicas:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon q^1 &= \varepsilon^1\{q^1,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{q^1,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{q^1,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{q^1,p_2\} + \varepsilon^2\{q^1,q^3\} + \varepsilon^3\{q^1,p_1\} = \varepsilon^3,\\ \delta_\varepsilon q^2 &= \varepsilon^1\{q^2,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{q^2,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{q^2,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{q^2,p_2\} + \varepsilon^2\{q^2,q^3\} + \varepsilon^3\{q^2,p_1\} = \varepsilon^1,\\ \delta_\varepsilon q^3 &= \varepsilon^1\{q^3,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{q^3,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{q^3,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{q^3,p_2\} + \varepsilon^2\{q^3,q^3\} + \varepsilon^3\{q^3,p_1\} = 0,\\ \delta_\varepsilon p_1 &= \varepsilon^1\{p_1,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{p_1,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{p_1,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{p_1,p_2\} + \varepsilon^2\{p_1,q^3\} + \varepsilon^3\{p_1,p_1\} = 0,\\ \delta_\varepsilon p_2 &= \varepsilon^1\{p_2,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{p_2,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{p_2,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{p_2,p_2\} + \varepsilon^2\{p_2,q^3\} + \varepsilon^3\{p_2,p_1\} = 0,\\ \delta_\varepsilon p_3 &= \varepsilon^1\{p_3,\gamma_1\} + \varepsilon^2\{p_3,\gamma_2\} + \varepsilon^3\{p_3,\gamma_3\}\\ &= \varepsilon^1\{p_3,p_2\} + \varepsilon^2\{p_3,q^3\} + \varepsilon^3\{p_3,p_1\} = \varepsilon^2.\end{aligned} \tag{132}$$

Debido a que también ocuparemos las transformaciones de norma de las velocidades $\dot{q}^i$ las hallamos a partir de las variaciones de q^i, es decir:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon \dot{q}^1 &= \frac{d}{dt}\delta_\varepsilon q^1 = \dot{\varepsilon}^3,\\ \delta_\varepsilon \dot{q}^2 &= \frac{d}{dt}\delta_\varepsilon q^2 = \dot{\varepsilon}^1,\\ \delta_\varepsilon \dot{q}^3 &= \frac{d}{dt}\delta_\varepsilon q^3 = 0.\end{aligned} \tag{133}$$

Para determinar las transformaciones de norma de u'^a haremos uso de la ecuación (107), para lo cual calculamos el álgebra de las restricciones (109):

$$\begin{aligned}
\{\gamma_a, \gamma_b\} &= 0, \\
\{H, \gamma_1\} &= \{p_1p_3 - q^2q^3, p_2\} = -q^3 = -\gamma_2 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\
\{H, \gamma_2\} &= \{p_1p_3 - q^2q^3, q^3\} = -p_1 = -\gamma_3 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\
\{H, \gamma_3\} &= \{p_1p_3 - q^2q^3, p_1\} = 0.
\end{aligned} \tag{134}$$

Ya que no tenemos constricciones de segunda clase, los coeficientes que acompañan a los términos lineales de los paréntesis entre las constricciones de primera y de segunda clase, así como los que resultan de los paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase y H en (109) son iguales a cero, esto nos da como resultado que $V_1^2 = V_2^3 = -1$ y el resto de los coeficientes son cero. Con esta información y la ecuación (107) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
v'^1 &= \dot{\varepsilon}^1, \\
v'^2 &= \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1, \\
v'^3 &= \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{135}$$

Ahora corroboramos que $S'_E = S_E + \delta_\varepsilon S_E$ como sigue:

$$\begin{aligned}
S'_E &= \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^3)p_1 + (\dot{q}^2 + \dot{\varepsilon}^1)p_2 + \dot{q}^3(p_3 + \varepsilon^2) - p_1(p_3 + \varepsilon^2) + (q^2 + \varepsilon^1)q^3 \\
&\quad -(v'^1 + \dot{\varepsilon}^1)p_2 - (v'^2 + \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1)q^3 - (v'^3 + \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2)p_1]dt \\
&= S_E + \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{\varepsilon}^2 q^3 - \varepsilon^2 \dot{q}^3]dt \\
&= S_E + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[-\varepsilon^2 q^3]dt,
\end{aligned} \tag{136}$$

entonces:

$$\delta S_E = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[-\varepsilon^2 q^3]dt, \tag{137}$$

por consiguiente $M(t) = -\varepsilon^2 q^3$. Podemos comparar este resultado con lo que se obtiene de la ecuación (110):

$$\begin{aligned}
M(t) &= \varepsilon^1 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial p_3}p_3 - \gamma_1 \right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial p_3}p_3 - \gamma_2 \right) \\
&\quad + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial \gamma_3}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial \gamma_3}{\partial p_3}p_3 - \gamma_3 \right) \\
&= \varepsilon^1 \left(\frac{\partial p_2}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}p_3 - p_2 \right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial q^3}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial q^3}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial q^3}{\partial p_3}p_3 - q^3 \right) \\
&\quad + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial p_1}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}p_3 - p_1 \right) \\
&= \varepsilon^1(p_2 - p_2) + \varepsilon^2(0 - q^3) + \varepsilon^3(p_1 - p_1) \\
&= -\varepsilon^2 q^3.
\end{aligned} \tag{138}$$

A partir de la acción extendido también encontramos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &\overset{\Sigma}{=} 0,\\ \dot{p}_2 &\overset{\Sigma}{=} q^3,\\ \dot{p}_3 &\overset{\Sigma}{=} q^2 - v'^2,\\ \dot{q}^1 &\overset{\Sigma}{=} p_3 + v'^3,\\ \dot{q}^2 &\overset{\Sigma}{=} v'^1,\\ \dot{q}^3 &\overset{\Sigma}{=} p_1.\end{aligned} \tag{139}$$

Finalmente, realizamos el conteo de grados de libertad a partir de la ecuación (112):

$$\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi] = \frac{1}{2}[2(3) - 2(3) - 0] = 0. \tag{140}$$

Podemos ahora decir que el sistema A sin términos de frontera arrojó tres constricciones de primera clase y que posee cero grados de libertad locales. En este sentido podemos considerar al sistema descrito por el Lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3$ como una teoría topológica.

Caso 1: Sistema A más un término de frontera que proviene de $F(q^i)$

En este caso veremos qué cambios ocurren en el Algortimo de Dirac cuando le sumamos al Sistema A una derivada total con respecto al tiempo de la función $F(q^i)$.

Comenzamos considerando el Lagrangiano:

$$\bar{L}\,(q^i, \dot{q}^i) = \dot{q}^1\dot{q}^3 + q^2q^3 + \frac{d}{dt}F(q^i) = L + \frac{d}{dt}F(q^i), \tag{141}$$

las ecuaciones de movimiento para este Lagrangiano serán las mismas que para el Sistema A Caso 0, es decir las ecuaciones (115) (en la ecuación (314) del apéndice A se puede consultar un desarollo detallado que justifica esta igualdad).

Por otra parte, los momentos sí se verán modificados, para hallarlos hacemos uso de la definición de momento[1] y tenemos que:

$$\bar{p}_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} = \dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \tag{142}$$

$$\bar{p}_2 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} = \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}, \tag{143}$$

$$\bar{p}_3 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} = \dot{q}^1 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}. \tag{144}$$

1 Para ver con mayor presición como se llega a este resultado podemos consultar la ecuación (317) del apéndice A.

A partir de la ecuación (4) podemos determinar la matriz Hessiana, la cual está dada por:

$$(\bar{H}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{145}$$

en consecuencia $\det\left(\bar{H}_{ij}\right) = 0$. Debido a que la matriz Hessiana es de tamaño 3x3 y tiene rango dos su nulidad es igual a uno, sólo hay una constricción primaria independiente al igual que en el Sistema A Caso 0 (ver la ecuación (7)). Esto da como resultado que $\dim(\bar{\Sigma}_1) = 5$, lo cual coincide con la dimensión de la superficie de constricciones primarias de L. Nuestra constricción primaria proviene del momento $\bar{p}_2$ y es:

$$\bar{\phi}^1_1 := \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{146}$$

Usando la ecuación (13) obtenemos que la matriz Jacobiana correspondiente está dada por:

$$J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} & 1 - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} & -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{147}$$

Notemos que en esta matriz las segundas derivadas parciales de $F(q^i)$ nos darán funciones de q^i es decir:

$$J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} f_1(q^i) & f_2(q^i) & f_3(q^i) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Aunque estas funciones pueden cambiar en distintos puntos del espacio fase no aumentarán el número de filas linealmente independientes de la matriz, y por consiguiente tampoco el rango de la matriz, así mismo no pueden eliminar la quinta entrada, por lo que la única columna independiente no se verá afectada. Podemos decir de hecho que, debido a que 1 es constante, el rango de la matriz también lo será, y no sólo eso, sino que es idéntico al de la matriz Jacobiana del Sistema A Caso 0, es decir que $\rho\left(J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right)\right) = 1$ es constante sobre $\bar{\Sigma}_1$. Ya que la condición de regularidad se cumple podemos continuar con el Algoritmo.

Ahora determinemos el Hamiltoniano canónico usando la ecuación (15):

$$\begin{aligned} \bar{H}_0 &= \dot{q}^i\, \bar{p}_i - \bar{L} \\ &= \dot{q}^1\, \bar{p}_1 + \dot{q}^2\, \bar{p}_2 + \dot{q}^3\, \bar{p}_3 - \dot{q}^1\dot{q}^3 - q^2q^3 - \frac{d}{dt}F(q^i) \\ &= \dot{q}^1\left(\dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \dot{q}^2\left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) + \dot{q}^3\left(\dot{q}^1 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - \dot{q}^1\dot{q}^3 - q^2q^3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\dot{q}^i \\ &= \dot{q}^3\dot{q}^1 - q^2q^3 \\ &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3, \end{aligned} \tag{149}$$

donde hemos utilizado la definición de momento para eliminar las velocidades y que así H_0 quede en términos de los momentos y las coordenadas canónicas.

Encontramos el Hamiltoniano canónico total a partir de la ecuación (17):

$$\begin{aligned} \bar{H}_T &:= \bar{H}_0 + \bar{u}^\mu \bar{\phi}^1_\mu \\ &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 + \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right), \end{aligned} \tag{150}$$

usando éste podemos escribir la acción total con la que hallamos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_T\,[q^i,\bar{p}_i,\bar{u}^\mu] &= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^i\,\bar{p}_i - \bar{H}_T]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{q}^1\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\right. \\
&\quad \left. + q^2 q^3 - \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right)\right] dt. \qquad (151)
\end{aligned}$$

Calculando la variación de esta acción obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{S}_T &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\bar{p}_1\,\delta\dot{q}^1 + \dot{q}^1\delta\bar{p}_1 + \bar{p}_2\,\delta\dot{q}^2 + \dot{q}^2\delta\bar{p}_2 + \bar{p}_3\,\delta\dot{q}^3 + \dot{q}^3\delta\bar{p}_3\right. \\
&\quad - \delta\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) - \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\delta\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) \\
&\quad \left. + q^2\delta q^3 + q^3\delta q^2 - \bar{u}^1\,\delta\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) - \delta\bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right)\right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\dot{\bar{p}}_1 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\delta q^1\right. \\
&\quad + \left(-\dot{\bar{p}}_2 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + q^3 + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right)\delta q^2 \\
&\quad + \left(-\dot{\bar{p}}_3 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + q^2 + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\delta q^3 \\
&\quad + \left(\dot{q}^1 - \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\right)\delta\bar{p}_1 + \left(\dot{q}^3 - \bar{u}^1\right)\delta\bar{p}_2 + \left(\dot{q}^3 - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\right)\delta\bar{p}_3 \\
&\quad \left. + \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right)\delta\bar{u}^1\right] dt + \left[\bar{p}_1\,\delta q^1 + \bar{p}_2\,\delta q^2 + \bar{p}_3 + \delta q^3\right]\Big|_{t_0}^{t_1}. \qquad (152)
\end{aligned}$$

Mediante el principio de mínima acción encontramos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}, \\
\dot{q}^2 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{u}^1, \\
\dot{q}^3 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \\
\dot{\bar{p}}_1 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}_2 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}_3 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} q^2 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}, \qquad (153)
\end{aligned}$$

y que $\bar{p}_2 - \frac{\partial F}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0$.

Vemos que no todas las ecuaciones de movimiento halladas para el caso anterior son exactamente las mismas que las que acabamos de encontrar, este cambio ocurre de forma significativa para $\dot{\bar{p}}_i$, pues hay varios términos extra relacionados con la función $F(q^i)$. Para $\dot{q}^1$ y $\dot{q}^3$ sí obtuvimos lo mismo, podemos hacer esto evidente notando lo siguiente:

$$\bar{p}_1 = \dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} = p_1 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \Rightarrow p_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \tag{154}$$

$$\bar{p}_3 = \dot{q}^1 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} = p_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \Rightarrow p_3 = \bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}. \tag{155}$$

En el caso de $\dot{q}^2$ debemos saber qué ocurre con el multiplicador de Lagrange $\bar{u}^1$ (lo cual haremos más adelante) para poder decir si se obtuvo lo mismo que en el Sistema A Caso 0 donde u^1 resultó indeterminado. Sin embargo se puede esperar que las ecuaciones de movimiento sigan siendo las mismas para toda $\dot{q}^i$. Además, hay que señalar que cuando $F(q^i) = 0$ todas las ecuaciones coincidirán con lo que hallamos cuando no agregamos ningún término de frontera al Sistema A, esto nos dice que el procedimiento se está haciendo de manera correcta.

Continuando con el algoritmo es necesario que apliquemos la condición de consistencia a la constricción que hemos hallado, es decir:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1^1 &= \{\phi_1^1, \bar{H}_0\} + \bar{u}^1\,\{\bar{\phi}_1^1, \bar{\phi}_1^1\} \\
&= \left\{\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}, \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3\right\} \\
&= q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,
\end{aligned}$$

entonces $\bar{\phi}_1^2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0$.

Aplicamos la condición de consistencia en esta constricción secundaria en $\bar{\Sigma}_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1^2 &= \{\bar{\phi}_1^2, H_0\} + \bar{u}^1\,\{\bar{\phi}_1^2, \bar{\phi}_1^1\} \\
&= \left\{q^3, \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3\right\} + \bar{u}^1\left\{q^3, \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right\} \\
&= \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,
\end{aligned}$$

y luego en la intersección de las superficies $\bar{\Sigma}_{1\cap 2}$, para comprobar que estamos realizando el algoritmo correctamente:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1^2 &= \{\bar{\phi}_1^2, \bar{H}_0\} + \bar{u}^1\,\{\bar{\phi}_1^2, \bar{\phi}_1^1\} + \bar{u}^2\,\{\bar{\phi}_1^2, \bar{\phi}_1^2\} \\
&= \left\{q^3, \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3\right\} + \bar{u}^1\left\{q^3, \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right\} + \bar{u}^2\,(0) \\
&= \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_{1\cap 2}}{=} 0.
\end{aligned}$$

De esta forma la constricción terciaria que hallamos es $\bar{\phi}_1^3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0$, a la cual también aplicamos la condición de consistencia sobre $\bar{\Sigma}_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1^3 &= \{\bar{\phi}_1^3, \bar{H}_0\} + \bar{u}^1\,\{\bar{\phi}_1^3, \bar{\phi}_1^1\} \\
&= \left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) - q^2q^3\right\} \\
&\quad + \bar{u}^1\left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right\} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,
\end{aligned} \tag{156}$$

sobre la superficie $\bar{\Sigma}_{1\cap 2}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1^3 &= \{\bar{\phi}_1^3, \bar{H}_0\} + \bar{u}^1 \{\bar{\phi}_1^3, \bar{\phi}_1^1\} + \bar{u}^2 \{\bar{\phi}_1^3, \bar{\phi}_1^2\} \\
&= \left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) - q^2 q^3\right\} \\
&\quad + \bar{u}^1 \left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right\} + \bar{u}^2 \left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, q^3\right\} \overset{\bar{\Sigma}_{1\cap 2}}{=} 0,
\end{aligned}$$

y sobre $\bar{\Sigma}_{1\cap 2\cap 3}$:

$$\dot{\bar{\phi}}_1^3 = \{\phi_1^3, H_0\} + \bar{u}^1 \{\phi_1^3, \phi_1^1\} + \bar{u}^2 \{\phi_1^3, \phi_1^2\} + \bar{u}^3 \{\phi_1^3, \phi_1^3\} \overset{\bar{\Sigma}_{1\cap 2\cap 3}}{=} 0. \tag{157}$$

De esto último no hemos obtenido nueva información, por lo que hemos terminado de encontrar constricciones y podemos enlistar las tres constricciones halladas:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_1^1 &:= \bar{\phi}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{\phi}_1^2 &:= \bar{\phi}_2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{\phi}_1^3 &:= \bar{\phi}_3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0.
\end{aligned} \tag{158}$$

Ahora buscamos una solución particular del sistema de ecuaciones (60):

$$\begin{aligned}
\{\bar{\phi}_1, H_0\} + \bar{U}^1 \{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_1^1\} &= q^3 + \bar{U}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\{\bar{\phi}_2, H_0\} + \bar{U}^1 \{\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_1^1\} &= \bar{p}^1 - \frac{\partial F}{\partial q^1} + \bar{U}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\{\bar{\phi}_3, H_0\} + \bar{U}^1 \{\bar{\phi}_3, \bar{\phi}_1^1\} &= 0 + \bar{U}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0,
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $\bar{U}^1$ está indeterminado.

También buscamos la solución general del sistema de ecuaciones homogéneo asociado:

$$\begin{aligned}
\bar{V}^1 \{\phi_1, \phi_1^1\} &= \bar{V}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{V}^1 \{\phi_2, \phi_1^1\} &= \bar{V}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{V}^1 \{\phi_3, \phi_1^1\} &= \bar{V}^1 (0) \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0,
\end{aligned}$$

podemos ver que $\bar{V}^1$ también queda indeterminado, entonces al igual que en el Sistema A Caso 0 el multiplicador de Lagrange $\bar{u}^1$ queda indeterminado, y podemos escribir al Hamiltoniano total como:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_T &:= \bar{H}_0 + \bar{u}^1 \bar{\phi}_1^1 \\
&= \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) - q^2 q^3 + \bar{u}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) \\
&= \bar{H}' + \bar{u}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right),
\end{aligned} \tag{159}$$

donde $\bar{H}' = \bar{H}_0$. Del mismo modo que lo hicimos antes mostraremos que $\bar{H}'$ es de primera clase después de determinar las constricciones de primera y segunda clase.

Calculamos la matriz $\bar{W}$:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{160}$$

las entradas de ésta son las mismas que las de la matriz W del Sistema A Caso 0 (ecuación (129)), esto nos dice que al igual que en el caso anterior todas las constricciones que hallamos son de primera clase:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \bar{\gamma}_2 &= q^3 \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \bar{\gamma}_3 &= \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0. \end{aligned} \tag{161}$$

Ahora ya podemos mostrar que $\bar{H}'$ es de primera clase:

$$\begin{aligned} \{\bar{H}', \bar{\gamma}_1\} &= \left\{ \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3, \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \right\} \\ &= -q^3 = -\bar{\gamma}_2 \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \{\bar{H}', \bar{\gamma}_2\} &= \left\{ \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3, q^3 \right\} \\ &= -\bar{p}_1 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} = -\bar{\gamma}_3 \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \{\bar{H}', \bar{\gamma}_3\} &= \left\{ \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3, \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{162}$$

En efecto, ha ocurrido lo que esperabamos.

Continuando con el algoritmo a partir de la definición de Hamiltoniano extendido $\bar{H}_E$=$\bar{H} + \bar{v}'^1\bar{\gamma}_1 + \bar{v}'^2\bar{\gamma}_2$, donde $\bar{H}$:=$\bar{H}_0$ pues no obtuvimos constricciones de segunda clase, tenemos que el principio de acción extendido es:

$$\begin{aligned} \bar{S}_E\,[q^i, \bar{p}_i, \bar{v}'^\mu] &:= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^i\,\bar{p}_i - \bar{H}_E]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[\dot{q}^1\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) \\ &\quad + q^2q^3 - \bar{v}'^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) - \bar{v}'^2\,q^3 - \bar{v}'^3\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right)\Bigg] dt. \end{aligned}$$

Veremos que $\bar{S}_E$ sea invariante ante transformaciones de norma, las cuales calculamos enseguida:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon q^1 &= \varepsilon^a\{q^1, \gamma_a\} = \varepsilon^3, \\ \delta_\varepsilon q^2 &= \varepsilon^a\{q^2, \gamma_a\} = \varepsilon^1, \\ \delta_\varepsilon q^3 &= \varepsilon^a\{q^3, \gamma_a\} = 0, \\ \delta_\varepsilon\,\bar{p}_1 &= \varepsilon^a\{\bar{p}_1, \gamma_a\} = \varepsilon^1\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1\partial q^2} + \varepsilon^3\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1\partial q^1}, \\ \delta_\varepsilon\,\bar{p}_2 &= \varepsilon^a\{\bar{p}_2, \gamma_a\} = \varepsilon^1\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2\partial q^2} + \varepsilon^3\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2\partial q^1}, \\ \delta_\varepsilon\,\bar{p}_3 &= \varepsilon^a\{\bar{p}_3, \gamma_a\} = \varepsilon^2 + \varepsilon^1\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3\partial q^2} + \varepsilon^3\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3\partial q^1}. \end{aligned} \tag{163}$$

De las transformaciones de norma de q^i obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \dot{q}^1 &= \dot{\varepsilon}^3, \\ \delta_\varepsilon \dot{q}^2 &= \dot{\varepsilon}^1, \\ \delta_\varepsilon \dot{q}^3 &= 0, \end{aligned} \tag{164}$$

en el caso de las parciales de $F(q^i)$ con respecto a q^i, tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\right) &= \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i}\delta q^1 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i}\delta q^2 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^i}\delta q^3, \\ \Rightarrow \delta_\varepsilon\left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\right) &= \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i}\varepsilon^3 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i}\varepsilon^1 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^i}(0) \\ &= \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i}\varepsilon^3 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i}\varepsilon^1. \end{aligned} \tag{165}$$

Para hallar las transformaciones de norma de $\bar{u}'^a$ ocuparemos la ecuación (107), calcular el álgebra de constricciones (109):

$$\begin{aligned} \{\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b\} &= 0, \\ \{\bar{H}, \bar{\gamma}_1\} &= -q^3 = -\bar{\gamma}_2 \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \{\bar{H}, \bar{\gamma}_2\} &= -\bar{p}_1 + \frac{\partial F}{\partial q^1} = -\bar{\gamma}_3 \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \{\bar{H}, \bar{\gamma}_3\} &= 0. \end{aligned} \tag{166}$$

Entonces $V_1^2 = -1 = V_2^3$ y el resto de los coeficientes son cero, por lo tanto a partir de las ecuaciones (107) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \bar{v}'^1 &= \dot{\varepsilon}^1, \\ \delta_\varepsilon \bar{v}'^2 &= \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1, \\ \delta_\varepsilon \bar{v}'^3 &= \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{167}$$

Ya que hemos encontrado las transformaciones de norma de todas las variables que forman parte de la acción extendido ya podemos ver que ésta es invariante ante transformaciones de norma, es decir que $\bar{S}_E'$=$\bar{S}_E$ +δ_ε $\bar{S}_E$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_E' = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& (\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^3)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^1}\right) \\ & + (\dot{q}^2 + \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \\ & + \dot{q}^3\left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^3 \partial q^2} + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \\ & - \left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial F}{\partial q^1} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^3 \partial q^2}\right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^3 \partial q^1} + \varepsilon^2 - \frac{\partial F}{\partial q^3} - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^3} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2 \partial q^3}\right) + (q^2 + \varepsilon^1) q^3 \\ & - (\bar{v}'^1 + \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\bar{v}'^2 + \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1)q^3 - (\bar{v}'^3 + \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^3 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right.\\
&\left.\left. -\varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right)\right] dt \\
= \; & \bar{S}_E + \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{\varepsilon}^1 \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^i \partial q^2}\dot{q}^i + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^i \partial q^i}\dot{q}^i + \dot{\varepsilon}^3 \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \dot{\varepsilon}^2 q^3 - \varepsilon \dot{q}^3\right] dt \\
= \; & \bar{S}_E + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[\varepsilon^1 \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right] dt}_{\delta \bar{S}_E = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d\bar{M}(t)}{dt}\right] dt} . \qquad (168)
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $\bar{M}(t) = \varepsilon^1 \frac{\partial F}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F}{\partial q^1}$ y así podemos comparar este resultado con lo que se obtiene de la ecuación (110), esto es:

$$
\begin{aligned}
\bar{M}(t) \;=\; & \varepsilon^1 \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_1}{\partial \bar{p}_1}\bar{p}_1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_1}{\partial \bar{p}_2}\bar{p}_2 + \frac{\partial \bar{\gamma}_1}{\partial \bar{p}_3}\bar{p}_3 - \bar{\gamma}_1\right) \\
& + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_2}{\partial \bar{p}_1}\bar{p}_1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_2}{\partial \bar{p}_2}\bar{p}_2 + \frac{\partial \bar{\gamma}_2}{\partial \bar{p}_3}\bar{p}_3 - \bar{\gamma}_2\right) \\
& + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_3}{\partial \bar{p}_1}\bar{p}_1 + \frac{\partial \bar{\gamma}_3}{\partial \bar{p}_2}\bar{p}_2 + \frac{\partial \bar{\gamma}_3}{\partial \bar{p}_3}\bar{p}_3 - \bar{\gamma}_3\right) \\
= \; & \varepsilon^1 \frac{\partial F}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F}{\partial q^1}. \qquad (169)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones provenientes del Hamiltoniano extendido son:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{p}}_1 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} \left(\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} + \left(\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3}, \\
\dot{\bar{p}}_2 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} q^3 + \left(\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} + \left(\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}, \\
\dot{\bar{p}}_3 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} q^2 - \bar{v}^2 + \left(\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} + \left(\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right) + \bar{v}^1 + \bar{v}^3\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3}, \\
\dot{q}^1 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{v}'^3, \\
\dot{q}^2 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} \bar{v}'^1, \\
\dot{q}^3 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}\right). \qquad (170)
\end{aligned}
$$

El último paso a seguir es realizar el conteo de grados de libertad a partir de la ecuación (112):

$$
\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi] = \frac{1}{2}[2(3) - 2(3) - 0] = 0. \qquad (171)
$$

De lo que hemos desarrollado hasta ahora podemos ver que al agregar el término de frontera $\frac{d}{dt}F(q^i)$ al Sistema A no cambiamos cosas escenciales como la cantidad de constricciones de primera clase (que nos dan las transformaciones de norma) y de segunda clase, así como el número de grados de libertad. En particular si el número de grados de libertad fuese distinto nos indicaría que no estamos tratanto con el mismo sistema físico que en el caso sin término de frontera.

Caso 2: Sistema A más un término de frontera que proviene de $F(q^i, t) = F_1(q^i) + F_2(t)$

En el siguiente desarrollo veremos lo que ocurre cuando al Lagrangiano del Sistema A le sumamos la derivada total de la función $F(q^i, t) = F_1(q^i) + F_2(t)$, observaremos qué diferencias surgen al aplicar el algoritmo de Dirac y las compararemos con el Caso 0 y el Caso 1 de este mismo sistema.

Partimos del Lagrangiano:

$$\bar{L}\ (q^i, \dot{q}^i, t) = \dot{q}^1 \dot{q}^3 + q^2 q^3 + \frac{d}{dt}\left(F_1(q^i) + F_2(t)\right) = L + \frac{d}{dt}\left(F_1(q^i) + F_2(t)\right). \tag{172}$$

Al igual que en el caso anterior las ecuaciones de movimiento serán las mismas que las que obtenemos para el Lagrangiano del Sistema A Caso 0. Por otro lado, los momentos tendrán la misma forma que los encontrados en el Sistema A caso 1 (ya que tanto $F(q^i)$ y $F_1(q^i)$ son funciones que sólo dependen de las coordenadas canónicas) y son:

$$\bar{p}_1 \ := \ \dot{q}^3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}, \tag{173}$$

$$\bar{p}_2 \ := \ \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}, \tag{174}$$

$$\bar{p}_3 \ := \ \dot{q}^1 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}. \tag{175}$$

A partir de la ecuación (4) hallamos la matriz Hessiana:

$$\left(\bar{H}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{176}$$

por lo tanto su determinante es cero. Encontramos que $\bar{H}_{ij}$ es igual a las matrices halladas en los dos casos anteriores, entonces $N = 3$ y $\rho(\bar{H}_{ij}) = 2$ así $M' = N - \rho(\bar{H}_{ij}) = 1$, es decir habrá una constricción primaria independiente que podemos obtener del momento $\bar{p}_2$:

$$\bar{\varphi}^1_1 := \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \tag{177}$$

y al haber sólo una constricción primaria independiente $\dim(\bar{\Sigma}_1) = 5$.

Como siguiente paso calculamos la matriz Jacobiana:

$$J\left(\bar{\varphi}^1_\mu\right) \ = \ \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} & 1 - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} & -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos ver que $\rho\left(J\left(\bar{\varphi}^1_\mu\right)\right) = 1$ es constante sobre toda la superficie de constricciones primarias $\bar{\Sigma}_1$ por lo tanto cumple la condición de regularidad, esto nos dice que podemos continuar con el algoritmo. Notemos también que desde la matriz Hessiana hasta este punto todo coincide con lo hallado en el Sistema A caso 1.

Ahora calculamos el Hamiltoniano canónico a partir de la ecuación (15):

$$\begin{aligned}
\bar{H}_0 &= \dot{q}^i\,\bar{p}_i - \bar{L} \\
&= \dot{q}^i\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \dot{q}^i\dot{q}^3 - q^2q^3 - \frac{d}{dt}\left(F_1(q^i) + F_2(t)\right) \\
&= \dot{q}^i\left(\dot{q}^3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \dot{q}^2\left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \dot{q}^3\left(\dot{q}^1 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - \dot{q}^1\dot{q}^3 \\
&\quad - q^2q^3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} \\
&= \dot{q}^3\dot{q}^1 - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} \\
&= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, \qquad (178)
\end{aligned}$$

hemos usado la definición de momento para eliminar las velocidades, por lo que H_0 queda en términos de los momentos, las coordenadas canónicas y el tiempo (esta variable proviene de la parcial con respecto al tiempo de $F_2(t)$).

Ya que hemos encontrado el Hamiltoniano canónico podemos escribir el Hamiltoniano total:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_T &:= \bar{H}_0 + \bar{u}^\mu \bar{\phi}^1_\mu \\
&= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} \\
&\quad + \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right). \qquad (179)
\end{aligned}$$

Con el Hamiltoniano total hallamos la acción total y a partir de ella las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_T\,[q^i,\bar{p}_i,t,\bar{u}^\mu] &= \int_{t_0}^{t_1}[\dot{q}^i\,\bar{p}_i - \bar{H}_T]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\dot{q}^1\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \left(\bar{p}_1 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) \\
&\quad + q^2q^3 + \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} - \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)\Bigg]dt. \qquad (180)
\end{aligned}$$

Variamos la acción total y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{S}_T &= \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\bar{p}_1\,\delta\dot{q}^1 + \dot{q}^1\delta\bar{p}_1 + \bar{p}_2\,\delta\dot{q}^2 + \dot{q}^2\delta\bar{p}_2 + \bar{p}_3\,\delta\dot{q}^3 + \dot{q}^3\delta\bar{p}_3 \\
&\quad - \delta\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) - \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\delta\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) \\
&\quad + q^2\delta q^3 + q^3\delta q^2 - \bar{u}^1\,\delta\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \delta\frac{\partial F_2(t)}{\partial t} - \delta\bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)\Bigg]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\left(-\dot{\bar{p}}_1 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^2}\right)\delta q^1 \\
&\quad + \left(-\dot{\bar{p}}_2 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + q^3 + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^2}\right)\delta q^2 \\
&\quad + \left(-\dot{\bar{p}}_3 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + q^2 + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^2}\right)\delta q^3
\end{aligned}$$

$$+\left(\dot q^1 - \left(\bar p_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\right)\delta\bar p_1 + \left(\dot q^3 - \bar u^1\right)\delta\bar p_2 + \left(\dot q^3 - \left(\bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\right)\delta\bar p_3$$
$$+\left(\bar p_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)\delta\bar u^1\Big]\,dt + \left[\bar p_1\,\delta q^1 + \bar p_2\,\delta q^2 + \bar p_3 + \delta q^3\right]\Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (181)$$

Esta última igualdad tiene la misma forma que encontramos al final de la ecuación (152)[2], por lo que las ecuaciones de movimiento halladas en el Sistema A caso 1 y las que resultan de usar el principio de mínima acción en la ecuación (181) son iguales, es decir:

$$\begin{aligned}
\dot q^1 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} \bar p_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3},\\
\dot q^2 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} \bar u^1,\\
\dot q^3 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} \bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1},\\
\dot{\bar p}_1 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^3}\left(\bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^1}\left(\bar p_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar u^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1\partial q^2},\\
\dot{\bar p}_2 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} q^3 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^3}\left(\bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^1}\left(\bar p_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar u^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2\partial q^2},\\
\dot{\bar p}_3 &\overset{\bar\Sigma_1}{=} q^2 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^3}\left(\bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^1}\left(\bar p_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) + \bar u^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3\partial q^2}.
\end{aligned} \quad (182)$$

Por otra parte debemos aplicar la condición de consistencia a la constricción primaria que encontramos:

$$\dot\phi_1^1 = q^3 \overset{\bar\Sigma_1}{=} 0,$$

así hemos obtenido una constricción secundaria $\phi_1^2 = q^3 \overset{\bar\Sigma_1}{=} 0$. A esta nueva constricción le aplicamos la condición de consistencia en $\bar\Sigma_1$, es decir $\dot{\bar\phi}_1^2 = \bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar\Sigma_1}{=} 0$ y lo hacemos también sobre $\bar\Sigma_{1\cap 2}$ esto es $\dot{\bar\phi}_1^2 = \{\bar\phi_1^2, \bar H_0\} + \bar u^1\,\{\bar\phi_1^2, \bar\phi_1^1\} + \bar u^2\,\{\bar\phi_1^2, \bar\phi_1^2\} = \bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar\Sigma_{1\cap 2}}{=} 0$. De esto hemos obtenido la constricción terciaria:

$$\bar\phi_1^3 = \bar p_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar\Sigma_1}{=} 0. \quad (183)$$

Realizamos un proceso similiar a lo anterior, aplicando la condición consistencia, en consecuencia:

$$\dot{\bar\phi}_1^3 = \{\bar\phi_1^3, \bar H_0\} + \bar u^1\,\{\bar\phi_1^3, \bar\phi_1^1\} \overset{\bar\Sigma_1}{=} 0,$$

verificamos lo que ocurre en $\bar\Sigma_{1\cap 2}$:

$$\dot{\bar\phi}_1^3 = \{\bar\phi_1^3, \bar H_0\} + \bar u^1\,\{\bar\phi_1^3, \bar\phi_1^1\} + \bar u^2\,\{\bar\phi_1^3, \bar\phi_1^2\} \overset{\bar\Sigma_{1\cap 2}}{=} 0,$$

y también sobre $\bar\Sigma_{1\cap 2\cap 3}$:

$$\dot{\bar\phi}_1^3 = \{\phi_1^3, H_0\} + \bar u^1\,\{\phi_1^3, \phi_1^1\} + \bar u^2\,\{\phi_1^3, \phi_1^2\} + \bar u^3\,\{\phi_1^3, \phi_1^3\} \overset{\bar\Sigma_{1\cap 2\cap 3}}{=} 0. \quad (184)$$

2 Es útil para llegar a este resultado tomar en cuenta lo siguiente: Sea $G(t) = \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}$ entonces $\delta G(t) = 0$.

Ya que no obtuvimos más constricciones y tampoco información sobre el multiplicador de Lagrange hemos terminado el proceso de hallar constricciones y las enlistamos sin hacer distinción entre primaria, secundaria y terciaria:

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_1 &= \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{\phi}_2 &= q^3 \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\
\bar{\phi}_3 &= \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0.
\end{aligned} \tag{185}
$$

En vista de que estas constricciones son semejantes a las del Sistema A caso 1 la solución general de la ecuación (60) (con la cual hallamos los multiplicadores de Lagrange) es la misma, por lo tanto $\bar{u}^1$ queda indeterminado. Ahora que sabemos esto podemos escribir $\bar{H}_T$ incluyendo al hamiltoniano $\bar{H}'$:

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_T &= \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} + \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) \\
&= \bar{H}' + \bar{u}^1\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right),
\end{aligned} \tag{186}
$$

por lo tanto $\bar{H}'=\bar{H}_0$.

Con las constricciones halladas calculamos la matriz $\bar{W}'$:

$$
\bar{W}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Podemos ver que $\bar{W}'$ coincide con la de los dos casos anteriores del Sistema A y de ella se sigue que todas las constricciones que hallamos también son de primera clase:

$$
\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \stackrel{\Sigma}{=} 0, \tag{187}
$$

$$
\bar{\gamma}_2 = q^3 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \tag{188}
$$

$$
\bar{\gamma}_3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \stackrel{\Sigma}{=} 0. \tag{189}
$$

Ahora mostramos que $\bar{H}'$ es de primera clase:

$$
\begin{aligned}
\{\bar{H}', \bar{\gamma}_1\} &= \left\{\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right\} \\
&= -q^3 = -\bar{\gamma}_2 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\
\{\bar{H}', \bar{\gamma}_2\} &= \left\{\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, q^3\right\} \\
&= -\bar{p}_1 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} = -\bar{\gamma}_3 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\
\{\bar{H}', \bar{\gamma}_3\} &= \left\{\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{190}
$$

en efecto, lo que esperabamos queda comprobado.

Por otro lado, a partir la ecuación (100) obtenemos el Hamiltoniano extendido:

$$\begin{aligned} \bar{H}_E &:= \bar{H}_0 + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\chi}_\alpha + \bar{v}'^a \bar{\gamma}_a + \bar{u}'^\alpha \bar{\chi}_\alpha \\ &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) - q^2 q^3 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} \\ &\quad + \bar{v}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{v}^2\, q^3 + \bar{v}^3 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right), \end{aligned} \tag{191}$$

y con la ecuación (98) encontramos que:

$$\bar{H} := \bar{H}_0 + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\chi}_\alpha = \bar{H}_0\,. \tag{192}$$

Así, usando el $\bar{H}_E$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \bar{S}_E\,[q^i, \bar{p}_i, \bar{v}^\mu] &:= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^i\, \bar{p}_i - \bar{H}_E] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[\dot{q}^1\, \bar{p}_1 + \dot{q}^2\, \bar{p}_2 + \dot{q}^3\, \bar{p}_3 - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) \\ &\quad + q^2 q^3 + \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} - \bar{v}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) - \bar{v}^2\, q^3 \\ &\quad - \bar{v}^3 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right)\Bigg] dt. \end{aligned} \tag{193}$$

La siguiente parte del algoritmo es verificar que el principio de acción extendido es invariante ante transformaciones de norma, por lo que debemos calcularlas para cada variable de $\bar{S}_E$:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon q^1 &= \varepsilon^3, \\ \delta_\varepsilon q^2 &= \varepsilon^1, \\ \delta_\varepsilon q^3 &= 0, \\ \delta_\varepsilon\, \bar{p}_1 &= \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}, \\ \delta_\varepsilon\, \bar{p}_2 &= \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}, \\ \delta_\varepsilon\, \bar{p}_3 &= \varepsilon^2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}, \\ \delta_\varepsilon \dot{q}^1 &= \dot{\varepsilon}^3, \\ \delta_\varepsilon \dot{q}^2 &= \dot{\varepsilon}^1, \\ \delta_\varepsilon \dot{q}^3 &= 0. \end{aligned} \tag{194}$$

En el caso de las parciales de $F_1(q^i)$ con respecto a q^i tenemos:

$$\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i} \varepsilon^3 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i} \varepsilon^1,$$

y para la parcial respecto al tiempo de $F_2(t)$:

$$\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right) = 0.$$

Con el fin hallar las tranformaciones de norma de $\bar{v}'^a$ necesitamos encontrar los paréntesis de Poisson (109):

$$\begin{aligned}
\{\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b\} &= 0, \\
\{\bar{H}, \bar{\gamma}_1\} &= -\bar{\gamma}_2, \\
\{\bar{H}, \bar{\gamma}_2\} &= -\bar{\gamma}_3, \\
\{\bar{H}, \bar{\gamma}_3\} &= 0.
\end{aligned} \tag{195}$$

Entonces $V_1^2 = V_2^3 = -1$ y el resto de los coeficientes son cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon \bar{v}'^1 &= \dot{\varepsilon}^1, \\
\delta_\varepsilon \bar{v}'^2 &= \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1, \\
\delta_\varepsilon \bar{v}'^3 &= \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{196}$$

Ya que hemos obtenido las transformaciones de norma que necesitamos corroboramos que $\bar{S}'_E = \bar{S}_E + \delta_\varepsilon \bar{S}_E$, es decir:

$$\begin{aligned}
\bar{S}'_E = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^3\right)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\right) \right. \\
& + \left(\dot{q}^2 + \dot{\varepsilon}^1\right)\left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \\
& + \dot{q}^3 \left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \\
& - \left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right. \\
& \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} + \varepsilon^2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}\right) + (q^2 + \varepsilon^1) q^3 \\
& - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} - (\bar{v}'^1 + \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right) \\
& - (\bar{v}'^2 + \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1) q^3 - (\bar{v}'^3 + \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \frac{\partial^3 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right. \\
& \left.\left. - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right)\right] dt \\
= & \ \bar{S}_E + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[\varepsilon^1 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right] dt.
\end{aligned} \tag{197}$$

Se puede ver de la última igualdad que $\bar{M}\ (t) = \varepsilon^1 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}$, que es lo mismo que encontramos en el Sistema A Caso 1.

Finalmente, debido a que hemos encontrado la misma cantidad de constricciones de primera y segunda clase que en todos los casos desarrollados hasta ahora, es claro que:

$$\eta = 0, \tag{198}$$

es decir que el número de grados de libertad para el sistema A Caso 2 también es cero.

Al realizar el algoritmo de Dirac nos damos cuenta que la parte de la función que depende sólo del tiempo, en el término de frontera que hemos agregado al Sistema A, cambió resultados que no modifican el sistema físico original y al igual que en caso anterior las constricciones de primera clase y el número de grados de libertad son iguales a lo que se encuentra cuando no agregamos ningún término de frontera.

Caso 3: Sistema A más un término de frontera que proviene de $F(q^i, t)$

En este último caso del Sistema A sumanos al Lagrangiano L la derivada total con respecto al tiempo de una función abitraria que depende de las coordenadas canónicas y el tiempo. Hallaremos las diferencias que existen en el desarollo del algoritmo de Dirac comparado con los tres primeros casos.

El Lagrangiano con el que trabajaremos es:

$$\bar{L}\ (q^i, \dot{q}^i, t) = \dot{q}^1 \dot{q}^3 + q^2 q^3 + \frac{d}{dt} F(q^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i) + \frac{d}{dt} F(q^i, t) \tag{199}$$

Como ya sabemos las ecuaciones de movimiento serán iguales que las del caso sin término de frontera. Por otro lado los momentos son:

$$\bar{p}_1 := \dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^1}, \tag{200}$$

$$\bar{p}_2 := \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^2}, \tag{201}$$

$$\bar{p}_3 := \dot{q}^1 + \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^3}. \tag{202}$$

La matriz Hessiana de este caso no es diferente a la encontrada en los anteriores:

$$(\bar{H}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{203}$$

por lo que tendremos una superficie de constricciones primarias de dimensión 5 y sólo una constricción primaria, a partir del momento (201) encontramos tal constricción:

$$\bar{\phi}^1_1 := \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i, t)}{\partial q^2} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{204}$$

Para continuar calculamos la matriz Jacobiana:

$$J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2} & 1 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2} & -\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{205}$$

Al igual que en los casos 0, 1 y 2 del sistema A, el rango de la matriz Jacobiana es igual a 1 y es constante en toda la superficie de constricciones primarias. En vista de que se cumple con la condición de regularidad continuamos con el algoritmo.

El Hamiltoniano canónico queda como:

$$\bar{H}_0 = \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^3}\right) - q^2 q^3 - \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial t}. \tag{206}$$

A partir de la definición de $\bar{H}_T$ que:

$$\begin{aligned}\bar{H}_T = &\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) - q^2 q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t} \\ &+ \bar{u}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right).\end{aligned} \tag{207}$$

con el cual construimos el principio de acción total:

$$\begin{aligned}\bar{S}_T \;=\; &\int_{t_0}^{t^1} \left[\dot{q}^1\, \bar{p}_1 + \dot{q}^2\, \bar{p}_2 + \dot{q}^3\, \bar{p}_3 - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + q^2 q^3\right. \\ &\left. + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t} - \bar{u}^1 \left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)\right] dt.\end{aligned} \tag{208}$$

Variando S_T y haciendo uso del principio de mínima acción se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}, \\
\dot{q}^2 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{u}^1, \\
\dot{q}^3 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}, \\
\dot{\bar{p}}_1 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right), \\
&\quad + \bar{u}^1 \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t}, \\
\dot{\bar{p}}_2 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \\
&\quad + \bar{u}^1 \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}, \\
\dot{\bar{p}}_3 &\stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} q^2 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \\
&\quad + \bar{u}^1 \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t}.
\end{aligned} \tag{209}$$

Podemos notar que son semejantes a las encontradas en los Casos 1 y 2 del Sistema A, pero al depender $F(q^i,t)$ tanto de las coordenadas canónicas como del tiempo, los términos $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^i \partial t}$, si están presentes[3].

Continuando con el algoritmo, es necesario aplicar la condición de consistencia a la constricción primaria hallada, con lo que encontramos una constricción secundaria:

$$\bar{\phi}_1^2 = q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{210}$$

Y de aplicar la condición de consistencia de la constricción secundaria se obtiene:

$$\dot{\bar{\phi}}_1^2 \;=\; \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t}$$

3 Podemos notar que $\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^i \partial t} = 0$ y $\frac{\partial^2 (F_1(q^i)+F_2(t))}{\partial q^i \partial t} = 0$ y es por esto que en las ecuaciones de movimiento de casos 1 y 2 del sistema A $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^i \partial t} = 0$.

$$+\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t} + \bar{u}^1\ \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{211}$$

Un resultado igual se encontrará al aplicar la condición de consistencia en la intersección de superficies $\Sigma_{1\cap 2}$. Aquí podemos ver que ya comienzan a surgir cambios significativos pues si $\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \neq 0$, entonces a partir de (211) se puede determinar el multiplicador de Lagrange $\bar{u}^1$, es por eso que podemos enlistar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_1 &= \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0,\\
\bar{\phi}_2 &= q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0,\\
\bar{u}^1 &\overset{\bar{\Sigma}}{=} \frac{-\bar{p}_1 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} - \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t}}{\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}}.
\end{aligned} \tag{212}$$

Con esta información podemos escribir el Hamiltoniano total como:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_T &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) - q^2 q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t}\\
&\quad - \frac{\left[\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} - \left(\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - \left(\bar{p}_1 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t}\right]\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)}{\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}}\\
&= \bar{H}'.
\end{aligned} \tag{213}$$

Continuando con el algoritmo calculamos la matriz $\bar{W}$:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \\ \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{214}$$

Para despejar $\bar{u}^1$ hemos exigido que $\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \neq 0$ por lo tanto $\rho\left(\bar{W}\right) = 2$ es constante en toda la superficie de constricciones, además det $\bar{W} \neq 0$. Por otra parte, haber determinado un multiplicador de Lagrange nos dice que tendremos al menos dos constricciones de segunda clase, y ya que sólo hemos hallado dos constricciones ninguna de ellas es de primera clase. También podemos verificar esto mediante la separación de constricciones a partir de la matriz $\bar{W}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \\ \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \overset{\bar{\Sigma}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $x^1 \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0 \overset{\bar{\Sigma}}{=} x^2$, por lo tanto el vector nulo es:

$$x_1^\mu \overset{\Sigma}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{215}$$

Esto concuerda con lo que habíamos dicho, no hay constricciones de primera clase, enlistamos las de segunda clase:

$$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{=} 0,$$

$$\bar{\chi}_2 = q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0.$$

Otra cosa que también debemos notar es que $\bar{W}= (\bar{C}_{\alpha\beta})$, la cual ocuparemos para construir el principio de acción extendido.

Por otra parte, ahora que ya hemos separado las constricciones realizamos los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\bar{H}', \bar{\chi}_1\} = & -\bar{\chi}_2 + \bar{\chi}_1 \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \left[\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\left(\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right.\right. \\ & \left. + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right) + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right. \\ & \left.\left. + \left(1 + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t}\right) \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)\right] \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \end{aligned} \tag{216}$$

$$\{\bar{H}', \bar{\chi}_2\} = \bar{\chi}_1 \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t} - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t}\right) \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \tag{217}$$

con esto queda confirmado que $\bar{H}'$ es de primera clase.

El siguiente paso en el algoritmo es encontrar la acción extendido, por lo que necesitaremos determinar primero λ^α a partir de la ecuación $\lambda^\alpha \stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} C^{\gamma\alpha}\{\bar{\chi}_\gamma, \bar{H}_0\}$, por ello calculamos los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\bar{\chi}_1, \bar{H}_0\} &= q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \\ \{\bar{\chi}_2, \bar{H}_0\} &= \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} + \left(1 + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t}\right)\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right), \end{aligned}$$

y obtenemos la matriz inversa de $(\bar{C}_{\alpha\beta})$, es decir:

$$(\bar{C}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \\ -\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{218}$$

Con lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^1 &= -\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \left[\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t}\right. \\ & \quad \left. + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(1 + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t}\right)\right] \\ \bar{\lambda}^2 &= \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \left(q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}\right). \end{aligned} \tag{219}$$

A partir de la ecuación (98) ya podemos escribir al Hamiltoniano $\bar{H}$:

$$\begin{aligned} \bar{H} := \bar{H}_0 + \bar{\lambda}^1 \bar{\chi}_1 + \bar{\lambda}^2 \bar{\chi}_2 = & \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) - q^2 q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t} \\ & - \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \left[\left(\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t}\right.\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(1+\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3\partial t}\right)\Bigg)\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)\\
&-\left(q^3-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\right)^2\Bigg]. \qquad (220)
\end{aligned}
$$

En vista de que el Hamiltoniano extendido se define como $\bar{H}_E := \bar{H}_0 + v'^a\gamma_a + u''^\alpha\chi_\alpha = \bar{H}_0 + \lambda^\alpha\chi_\alpha = \bar{H}$ pues en el desarrollo del método no hemos encontrado constricciones de primera clase. Con esto ya podemos escribir el principio de acción extendido:

$$
\begin{aligned}
\bar{S}_E = \int_{t_0}^{t_1} &\Bigg[\dot{q}^1\,\bar{p}_1+\dot{q}^2\,\bar{p}_2+\dot{q}^3\,\bar{p}_3-\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)+q^2q^3+\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t}\\
&+\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\Bigg[\Bigg(\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial t}\\
&+\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(1+\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3\partial t}\right)\Bigg)\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)\\
&-\left(q^3-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\right)^2\Bigg]\Bigg]\,dt. \qquad (221)
\end{aligned}
$$

De variar el principio de acción extendido y usar el principio de mínima acción obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} \left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)+\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)\left(1+\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3\partial t}\right),\\
\dot{q}^2 &\overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} \bar{u}^1,\\
\dot{q}^3 &\overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} \left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)+\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial t}\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right),\\
\dot{\bar{p}}_1 &\overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^1}\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)+\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^3}\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial t}\\
&+\left[\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\left(q^3-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\right)^2-\bar{u}^1\right]\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial q^2\partial t}\\
&+\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\Bigg[\Bigg(-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^3}\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial t}+\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^1\partial q^2\partial t}\\
&-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^1}\left(1+\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3\partial t}\right)+\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial q^3\partial t}\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\Bigg)\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)\\
&-\bar{u}^1\,\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2}+2\left(q^3-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial t}\Bigg],\\
\dot{\bar{p}}_2 &\overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} q^3+\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^1}\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)+\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3}\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\\
&+\left[\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\left(q^3-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial t}\right)^2-\bar{u}^1\right]\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial q^2\partial t}\\
&+\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial t}\right)^{-1}\Bigg[\Bigg(-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3}\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial t}+\left(\bar{p}_3-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1\partial q^2\partial q^2\partial t}\\
&-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^1}\left(1+\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^3\partial t}\right)+\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^2\partial q^2\partial q^3\partial t}\left(\bar{p}_1-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\Bigg)\left(\bar{p}_2-\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \bar{u}^1 \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2} + 2\left(q^3 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}\right) \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\Bigg], \\
\dot{\bar{p}}_3 \; \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} \; & q^2 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^1}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t} \\
& + \left[\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1}\left(q^3 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}\right)^2 - \bar{u}^1\right]\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1} \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial q^2 \partial t} \\
& + \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\right)^{-1}\Bigg[\Bigg(-\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3}\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial q^3 \partial t} \\
& - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^1}\left(1 + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t}\right) + \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial q^3 \partial t}\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\Bigg)\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right) \\
& - \bar{u}^1 \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2} + 2\left(q^3 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t}\Bigg].
\end{aligned} \tag{222}
$$

A partir de estas ecuaciones se pueden recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que como hemos dicho, son las mismas para todos los casos del sistema A. Hay que mencionar que éstas ya no dependen del multiplicador de Lagrange $\bar{u}^1$, las hemos expresado de este modo únicamente para que sea notoria la semejanza que tiene con las ecuaciones halladas a partir del Hamiltoniano total, es decir (209).

Ahora hacemos el conteo de grados de libertad:

$$
\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi] = \frac{1}{2}[2(3) - 2(0) - 2] = 2, \tag{223}
$$

este resultado nos indica que agregar la derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria $F(q^i, t)$ cambia el sistema con el que estamos tratando, pues este no posee los mismos grados de libertad que los del sistema descrito por el lagrangiano L.

Otro caso es que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} = 0$, si esto ocurre de la ecuación (211) obtendremos una constricción terciaria:

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_1^3 \; = \; & \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} \\
& + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0.
\end{aligned} \tag{224}
$$

Aplicando la condición de consistencia obtenemos una constricción cuaternaria:

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_1^4 = & \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)^2 \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3 \partial q^2 \partial t} + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)^2 \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^2 \partial t} \\
& + 2\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial q^3 \partial t} \\
& + \left(1 + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2 \partial t}\right)\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} + \left(q^2 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t}\right)\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t}.
\end{aligned} \tag{225}
$$

Al aplicar la condición de consistencia a esta última ya no hallamos nuevas constricciones pero si se puede hallar un multiplicador de Lagrange. Hemos obtenido un total de 4 constricciones, se puede averiguar cuántas de ellas son de primera clase y de segunda clase utilizando el Teorema 4 y el Teorema 5, de hecho se encuentra que todas las constricciones son de segunda clase, por lo que al hacer el conteo de grados de liberad se obtiene:

$$
\eta = \frac{1}{2}[6 - 2(0) - 4] = 2. \tag{226}
$$

Este resultado no coincide con el número de grados de libertad del sistema sin término de frontera, por lo tanto no nos bastará con exigir que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} = 0$. Podemos suponer que debemos exigir otra condición a la función $F(q^i,t)$, de manera que esta selección nos proporcione resultados equivalentes a los hallados en los casos anteriores del Sistema A.

Si comparamos la constricción secundaria encontrada en este caso, con la hallada en los Casos 1 y 2 respetivamente, notamos una diferencia importante:

$$\bar{\phi}_1^2 = q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \tag{227}$$

como podemos ver $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t}$ no aparece en la constricción secundaria de los dos casos anteriores. Si exigimos que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} = 0$ podemos escribir:

$$\tilde{\phi}_1^2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{228}$$

Al aplicar la condición de consistencia a esta constricción hallamos:

$$\tilde{\phi}_1^3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{229}$$

Y aplicando la condición de consistencia a esta constricción terciaria obtenemos:

$$\tilde{\phi}_1^4 = \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{230}$$

Si el proceso de aplicar consistencia a las constricciones se repite tres veces más encontraremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1^5 &= \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t} + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \\
\tilde{\phi}_1^6 &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)^2 \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t} \\
&\quad + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\left[\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial q^3 \partial t} + \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^1 \partial t}\right] \\
&\quad + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \\
\tilde{\phi}_1^7 &= \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)^3 \frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial q^3 \partial t} + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)^3 \frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t} \\
&\quad + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)^2 \left[2\frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial q^3 \partial t} + \frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t}\right] \\
&\quad + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)^2\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) \left[\frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial q^3 \partial t} + 2\frac{\partial^5 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t}\right] \\
&\quad + \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right)\left[\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} + \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial q^3 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t}\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t} + \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3 \partial t}\right)\right] + \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\left[\frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^1 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^4 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial q^3 \partial t}\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t} + \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{231}$$

A partir de que se obtienen 7 constricciones para un sistema en el que hay un total de 6 variables canónicas, al hacer el conteo de grados de libertad hallaremos resultados negativos, esto se puede ver de la ecuación $\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi]$ tomando en cuenta siempre que obtengamos constricciones de segunda clase hallaremos una cantidad par de ellas. Además podemos suponer si continuamos el proceso de hallar constricciones este continuará infinitamente. En consecuencia pedir que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} = 0$ resulta insuficiente, adicionalmente exigiremos que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} = 0$. De esta forma las constricciones halladas son:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1 &= \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \bar{\phi}_2 &= q^3 \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0, \\ \bar{\phi}_3 &= \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} \stackrel{\bar{\Sigma}}{=} 0. \end{aligned} \tag{232}$$

Vemos que estas constricciones tienen una forma semejante a las de los casos 1 y 2 y los resultados subsecuentes que hallamos para ellos también los encontraremos al exigir que $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} = 0$ y $\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} = 0$ es decir: Todas las constricciones halladas son de primera clase, $\bar{H}' = \bar{H}_0$, $\bar{H}'$ es efectivamente de primera clase, $\bar{S}_E$ es invariante ante transformaciones excepto por $\bar{M}(t) = \varepsilon^1 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^2 q^3 + \varepsilon^3 \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}$ y el total de grados de libertad es cero.

Al desarrollar el Algoritmo de Dirac para este último caso podemos ver que, para evitar que el número de grados de libertad del sistema cambie al agregarle un término de frontera, es necesario que tal término cumpla con algunas exigencias, es decir que no puede ser completamente abitrario.

Comparación de los Casos del Sistema A

Resultados comparados con el sistema A sin término de frontera				
Características	Caso 0	Caso 1	Caso 2	Caso 3 $\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \neq 0\right)$
Constricciones	$\phi_1^1 = p_2 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$ $\phi_1^2 = q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$ $\phi_1^3 = p_1 \overset{\Sigma_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}_1^1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}_1^2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}_1^3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}_1^1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}_1^2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}_1^3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}_1^1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}_1^2 = q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$
Constricciones de primera clase	$\gamma_1 = p_2 \overset{\Sigma}{\equiv} 0,$ $\gamma_2 = q^3 \overset{\Sigma}{\equiv} 0,$ $\gamma_3 = p_1 \overset{\Sigma}{\equiv} 0.$	$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\gamma}_2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\gamma}_3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\gamma}_2 = q^3 \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\gamma}_3 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	Ninguna.
Constricciones de segunda clase	Ninguna.	Ninguna.	Ninguna.	$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_2 = q^3 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$
Tranformaciones de norma	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^3,$ $\delta_\varepsilon q^2 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_1 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_2 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_3 = \varepsilon^2,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^3,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon v'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon v'^2 = \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon v'^3 = \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2.$	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^3,$ $\delta_\varepsilon q^2 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_1 = \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_2 = \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_3 = \varepsilon^2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^3,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^2 = \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^3 = \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2,$ $\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i} \varepsilon^3 + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i} \varepsilon^1.$	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^3,$ $\delta_\varepsilon q^2 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_1 = \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_2 = \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_3 = \varepsilon^2 + \varepsilon^1 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1},$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^3,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^2 = \dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^3 = \dot{\varepsilon}^3 + \varepsilon^2,$ $\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i} \varepsilon^3 + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^i} \varepsilon^1.$	Ninguna.
Grados de libertad	0	0	0	2

Figura 2: Tabla comparativa del Sistema A.

En esta tabla podemos ver condensadas las diferencias y similitudes más importantes que existen con respecto al caso sin término de frontera. Resulta claro que los casos 1 y 2 no presentan diferencias significativas, más aún, tomando en cuenta que $p_i = \bar{p}_i - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}$ y $p_i = \bar{p}_i - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^i}$, la dinámica del sistema original no cambia, lo cual no ocurre con el caso 3, en el que las transformaciones de norma ya no surgen y el número de grados de libertad aumenta.

3 SISTEMA B: $L(q^i, \dot{q}^i) = (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2$

Caso 0: Sin término de frontera

El Lagrangiano de este segundo sistema es $L(q^i, \dot{q}^i) = (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2$, a partir de él se obtienen las ecuaciones de movimiento $\dot{q}^3 = 0$ y $\dot{q}^1 + \dot{q}^2 - \ddot{q}^3 = 0$ (aunque aparentemente sólo obtenemos dos ecuaciones, esto se debe a que la primera se halla dos veces), así como los momentos:

$$p_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = q^3, \tag{233}$$

$$p_2 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = q^3, \tag{234}$$

$$p_3 := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} = \dot{q}^3. \tag{235}$$

Podemos ver que este sistema es singular pues su matriz Hessiana obtenida a partir de la ecuación (4), es decir:

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{236}$$

tiene un determinante igual a cero. También observamos que $\rho\left(H_{ij}\right) = 1$ y $N = 3$, con esta información y la ecuación $M' = N - \rho(H_{ij})$ ya podemos saber que encontraremos $M' = 2$ constricciones primarias independientes, las cuales se obtienen a partir de los momentos (233) y (234). Éstas son:

$$\phi^1_1 = p_1 - q^3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \tag{237}$$

$$\phi^1_2 = p_2 - q^3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{238}$$

Las constricciones primarias definen a Σ_1 y a partir ecuación (8) vemos que $\dim(\Sigma_1) = 4$. Continuando con el Algoritmo, calculamos la matriz Jacobiana:

$$J\left(\phi^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{239}$$

Se puede ver que $\rho\left(J\left(\phi^1_\mu\right)\right) = 2$ es constante sobre toda la superficie de constricciones primarias por lo tanto se cumple la condición regularidad de este modo podemos seguir con el procedimiento.

A partir de la ecuación (15) obtenemos el Hamiltoniano canónico $H_0 = \frac{1}{2}(p_3)^2$ y con él usando la ecuación (17) obtenemos que el Hamiltoniano total es $H_T = \frac{1}{2}(p_3)^2 + u^1(p_1 - q^3) + u^2(p_2 - q^3)$.

Este último Hamiltoniano contiene la información de las constricciones primarias, a partir de él se pueden hallar las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones (31) y (32), éstas son:

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &\stackrel{\Sigma_1}{=} u^1, \\ \dot{q}^2 &\stackrel{\Sigma_1}{=} u^2, \\ \dot{q}^2 &\stackrel{\Sigma_1}{=} p_3, \\ \dot{p}^1 &\stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \\ \dot{p}^2 &\stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \\ \dot{p}^3 &\stackrel{\Sigma_1}{=} -u^1 - u^2. \end{aligned} \tag{240}$$

Aplicando la condición de consistencia a las constriciones primarias que hemos encontrado sólo obtenemos:

$$\phi_1^2 = -p_3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{241}$$

Aplicamos nuevamente la condición de consistencia, en esta ecuación ya no hallaremos más constricciones pero sí que $u^1 \stackrel{\Sigma_1}{=} -u^2$. Enlistamos todas las constricciones que hemos hallado:

$$\phi_1 = \phi_1^1 = p_1 - q^3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \tag{242}$$

$$\phi_2 = \phi_2^1 = p_2 - q^3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \tag{243}$$

$$\phi_3 = \phi_1^2 = -p_3 \stackrel{\Sigma_1}{=} 0. \tag{244}$$

Ahora, partiendo de la ecuación (60) veremos que el multiplicador de Lagrange u^2 queda indeterminado, es por ello que a partir de la ecuación (17) encontramos que $H_T = \frac{1}{2}(p_3)^2 + u^1(p_1 - p_2) = H' + u^1(p_1 - p_2)$ y por lo tanto $H' = H_0$.

Ahora, de la ecuación (59) obtenemos la matriz:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{245}$$

debido a que $\det(W) = 0$ y que $\rho(W) = 2$ sabemos que hay dos constricciones de segunda clase y una de primera clase. Realizamos la separación de constricciones usando la matriz W mediante el Teorema 4 y el Teorema 5 y hallamos:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= p_1 - p_2 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\ \chi_1 &= p_1 - 2q^3 + p_2 \stackrel{\Sigma}{=} 0, \\ \chi_2 &= -p_3 \stackrel{\Sigma}{=} 0. \end{aligned} \tag{246}$$

Ahora que ya tenemos constricciones de primera clase y de segunda clase a partir de la ecuación (78) podemos calcular la matriz:

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{247}$$

en ella podemos identificar la matriz $(C_{\alpha\beta})$ que está dada por:

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{248}$$

Vemos que esta última tiene las características que deseamos, es decir es antisimétrica, de tamaño par y de rango constante sobre Σ_1.

Por otro lado, ya que hemos encontrado las constricciones de primera y de segunda clase podemos realizar los paréntesis de Poisson entre H' y estas constricciones:

$$\begin{aligned}
\{H', \gamma_1\} &= \left\{\frac{1}{2}(p_3)^2, p_1 - p_2\right\} = 0, \\
\{H', \chi_1\} &= \left\{\frac{1}{2}(p_3)^2, p_1 - 2q^3 + p_2\right\} = 2p_3 = -2\chi_3 \overset{\Sigma}{=} 0, \\
\{H', \chi_2\} &= \left\{\frac{1}{2}(p_3)^2, -p_3\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{249}$$

así queda comprobado que H' es de primera clase.

Ahora debemos calcular H_E y H por lo que primero hallamos a partir de la ecuación (103) que $\lambda^1 = 0$ y $\lambda^2 = -p_3$. Utilizando la ecuación (98) tenemos que $H = \frac{3}{2}(p_3)^2$ y usando la definición de Hamiltoniano extendido encontramos que $H_E = \frac{3}{2}(p_3)^2 + v'^1(p_1 - p_2) + u'^1(p_1 - 2q^3 + p_2) + u'^2(-p_3)$. Con estos Hamiltonianos ya podemos escribir el principio de acción extendido:

$$\begin{aligned}
S_E &:= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^1 p_1 + \dot{q}^2 p_2 + \dot{q}^3 p_3 - H - v'^1\gamma_1 - u'^1\chi_1 - u'^2\chi_2] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}^1 p_1 + \dot{q}^2 p_2 + \dot{q}^3 p_3 - \frac{3}{2}(p_3)^2 - v'^1(p_1 - p_2) - u'^1(p_1 - 2q^3 + p_2) + u'^2 p_3] dt.
\end{aligned} \tag{250}$$

El siguiente paso es corroborar que S_E sea invariante ante las transformaciones de norma que se obtienen de la definición (106) y las ecuaciones (107) y (108), las cuales enlistamos enseguida:

$$\begin{array}{llll}
\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1, & \delta_\varepsilon p_1 = 0, & \delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1, & \delta_\varepsilon v'^1 = \dot{\varepsilon}^1, \\
\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1, & \delta_\varepsilon p_2 = 0, & \delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1, & \delta_\varepsilon u'^\alpha = 0. \\
\delta_\varepsilon q^3 = 0, & \delta_\varepsilon p_3 = 0, & \delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0, &
\end{array}$$

Con ellas comprobamos que $S_E = S'_E - \delta_\varepsilon S_E$, es decir:

$$\begin{aligned}
S'_E = \int_{t_0}^{t_1} & [(\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^1)p_1 + (\dot{q}^2 - \dot{\varepsilon}^1)p_2 + \dot{q}^3 p_3 + \frac{1}{2}(p_3)^2 - (v'^1 + \dot{\varepsilon}^1)(p_1 - p_2) - u'^1(p_1 + p_2 - 2q^3) \\
& + u'^2(p_3)] dt = S_E;
\end{aligned} \tag{251}$$

podemos ver que $\delta_\varepsilon S_E = 0$ y por tanto $M(t) = 0$, una forma de verificar que esto es correcto es usar la ecuación (110) mediante la cual efectivamente se llega al mismo resultado.

Así mismo, a partir de la acción extendido hallamos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &\overset{\Sigma}{=} 0, \\
\dot{p}_2 &\overset{\Sigma}{=} 0, \\
\dot{p}_3 &\overset{\Sigma}{=} 2u'^1, \\
\dot{q}^1 &\overset{\Sigma}{=} v'^1 + u'^1, \\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma}{=} -v'^1 + u'^1, \\
\dot{q}^3 &\overset{\Sigma}{=} 3p_3 + u'^2.
\end{aligned} \tag{252}$$

$$(253)$$

Lo siguiente que debemos hacer es el conteo de grados de libertad, debido a que tenemos un sistema con tres coordenadas canónicas con sus respectivos momentos canónicos, una constricción de primera clase y dos de segunda clase, usando la ecuación (112) obtenemos que:

$$\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi] = \frac{1}{2}[2(3) - 2(1) - 2] = 1. \tag{254}$$

Finalmente, ya que en este caso sí encontramos constricciones de segunda clase podemos expresar el paréntesis de Dirac definido en la ecuación (87) obtenemos:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} + \frac{1}{2}\{A, p_1 - 2q^3 + p_2\}\{-p_3, B\} - \frac{1}{2}\{A, -p_3\}\{p_1 - 2q^3 + p_2, B\}. \tag{255}$$

En particular calculamos el paréntesis de Dirac para las variables canónicas originales:

$$\begin{aligned} \{q^1, q^3\}_D &= \frac{1}{2}, \\ \{q^2, q^3\}_D &= \frac{1}{2}, \\ \{q^1, p_1\}_D &= 1, \\ \{q^2, p_2\}_D &= 1, \end{aligned} \tag{256}$$

y el resto de los paréntesis son fuertemente iguales a cero, nos damos cuenta de que (q^i, p_i) no son variables canónicas con respecto al paréntesis de Dirac.

En resumen, para el sistema B sin términos de frontera hallaremos que: tiene tres constricciones una de primera clase y dos de segunda clase, su acción extendido es invariante ante transformaciones de norma y posee sólo un grado de libertad.

Caso 1: Sistema B más un término de frontera que proviene de $F(q^i)$

En este caso desarrollamos el Algorimo de Dirac para el Lagrangiano $\bar{L}\ (q^i, \dot{q}^i) = (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2 + \frac{dF(q^i)}{dt}$, cuyas ecuaciones de movimiento son las mismas que para el caso anterior, es decir: $-\dot{q}^3 = 0$ y $\dot{q}^1 + \dot{q}^2 - \ddot{q}^3 = 0$. A partir de la definición de momento tenemos que:

$$\bar{p}_1 := q^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}, \tag{257}$$

$$\bar{p}_2 := q^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}, \tag{258}$$

$$\bar{p}_3 := \dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}. \tag{259}$$

Utilizando la ecuación (4) hallamos la matriz Hessiana:

$$(\bar{H}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{260}$$

Vemos que el determinante de esta matriz es igual a cero, por lo que este sistema es singular, también obtenemos que $\rho\left(\bar{H}_{ij}\right) = 1$ y $\bar{N}= 3$, en consencuencia tendremos $\bar{M}'= 2$ constricciones primarias independientes que se obtienen de las ecuaciones (257) y (258) y son:

$$\bar{\phi}^1_1 = \bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \tag{261}$$

$$\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \tag{262}$$

las cuales definen el espacio de constricciones primarias que tiene $\dim(\bar{\Sigma}_1) = 4$.

El siguiente paso en el algoritmo es calcular la matriz Jacobiana:

$$J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} & -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} & -1 - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} & -\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} & -1 - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{263}$$

Se tiene que $\rho\left(J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right)\right) = 2$ es constante sobre toda la superficie de constricciones por lo tanto se cumple la condición de regularidad así podemos continuar con el algortimo.

De la ecuación (15), tenemos que el Hamiltoniano canónico está dado por:

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2 = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2,$$

y mediante la ecuación (17) hallamos que el Hamiltoniano total es:

$$\bar{H}_T = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 + \bar{u}^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - q^3\right) + \bar{u}^2\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - q^3\right).$$

Con este último Hamiltoniano encontramos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{u}^1, \\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{u}^2, \\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}, \\
\dot{\bar{p}}^1 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + \bar{u}^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} + \bar{u}^2 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3} + \bar{u}^1 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \bar{u}^2 \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}^3 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3} - \bar{u}^1\left(-1 - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\right) - \bar{u}^2\left(-1 - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right).
\end{aligned} \tag{264}$$

Ahora, aplicando la condición de consistencia a las constricciones primarias encontramos únicamente una constricción secundaria que es:

$$\bar{\phi}^2_1 \overset{\Sigma_1}{=} -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}. \tag{265}$$

Aplicamos la condición de consistencia a $\bar{\phi}_1^2$ y hallamos que:

$$\dot{\bar{\phi}}_1^2 = -\bar{u}^1 - \bar{u}^2 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$$

esto no nos ofrece una constricción nueva, pero nos dice que $\bar{u}^1 \overset{\Sigma_1}{=} -\bar{u}^2$, algo semejante ocurre al aplicar la condición de consistencia sobre $\Sigma_{1\cap 2}$. De este modo ya hemos obtenido todas las constricciones posibles:

$$\bar{\phi}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0, \tag{266}$$

$$\bar{\phi}_2 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0, \tag{267}$$

$$\bar{\phi}_3 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{268}$$

Mediante las restricciones en los multiplicadores de Lagrange hallamos que $-\bar{u}^1 \overset{\Sigma_1}{=} \bar{u}^2$ donde $\bar{u}^2$ queda indeterminado, con esto podemos escribir el Hamiltoniano total como:

$$H_T = \bar{H}' + \bar{u}^1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \right), \tag{269}$$

con $\bar{H}' = \bar{H}_0$.

Por otra parte, a partir de la ecuación (59) obtenemos:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

notemos que esta matriz $\bar{W}$ y la del sistema B caso 0 son iguales, por lo que la cantidad de constriciones de segunda clase y de primera clase será la misma que para caso anterior. Es necesario que ahora realicemos la separación de constricciones haciendo uso del Teorema 4 y el Teorema 5, con los cuales encontramos:

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{270}$$

$$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{271}$$

$$\bar{\chi}_2 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \overset{\Sigma}{=} 0. \tag{272}$$

Calculamos la matriz $\bar{W}'$ con las constricciones separadas en primera y segunda clase:

$$\bar{W}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De $\bar{W}'$ hallamos que la matriz $(\bar{C}_{\beta\alpha})$ está dada por:

$$(\bar{C}_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{273}$$

la cual es antisimétrica, de tamaño par y constante sobre $\bar{\Sigma}_1$ tal como deseamos.

Por otro lado mostramos que $\bar{H}'$ es una función de primera clase usando las constricciones de primera y segunda clase:

$$
\begin{aligned}
\{\bar{H}', \bar{\gamma}_1\} &= \left\{ \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2, \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \right\} = 0, \\
\{\bar{H}', \bar{\chi}_1\} &= \left\{ \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2, \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} \right\} \\
&= 2\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right) = -2\,\bar{\chi}_3 \stackrel{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \\
\{\bar{H}', \bar{\chi}_2\} &= \left\{ \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2, -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{274}
$$

con esto queda confirmada nuestra afirmación.

Continuando con el procedimiento calculamos el Hamiltoniano extendido, el cual se define como $\bar{H}_E := \bar{H} + \bar{v}'^a \bar{\gamma}_a + \bar{u}'^\alpha \bar{\chi}_\alpha$ donde $\bar{H} := \bar{H}_0 + \bar{u}'^\alpha \bar{\chi}_\alpha$, por lo que primero calculamos los nuevos multiplicadores de Lagrange a partir de la ecuación $\bar{\lambda}^\alpha \stackrel{\Sigma}{=} \bar{C}^{\alpha\beta}\ \{\bar{\chi}_\beta, \bar{H}_0\}$, los cuales son $\bar{\lambda}^1 = 0$ y $\bar{\lambda}^2 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}$. De esta forma $\bar{H} = \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2$ y $H_E = \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 + v'^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{u}'^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{u}'^2\left(-\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)$, en consecuencia el principio de acción extendido es:

$$
\begin{aligned}
S_E := \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \dot{q}^1\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - v'^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) \\
& - \bar{u}'^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right) \\
& + \bar{u}'^2\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}\right)\Bigg]\,dt.
\end{aligned} \tag{275}
$$

Veamos que la acción extendido es invariante ante las transformaciones de norma de q^i, $\bar{p}_i$, $\bar{u}^a$ y $\bar{v}'^\alpha$, las cuales son:

$$
\begin{aligned}
&\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1, && \delta_\varepsilon\,\bar{p}_1 = \varepsilon^1\left(\tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right), && \delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1, && \delta_\varepsilon\,\bar{v}'^1 = \dot{\varepsilon}^1, \\
&\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1, && \delta_\varepsilon\,\bar{p}_2 = \varepsilon^1\left(\tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} - \tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right), && \delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1, && \delta_\varepsilon\,\bar{u}'^\alpha = 0, \\
&\delta_\varepsilon q^3 = 0, && \delta_\varepsilon\,\bar{p}_3 = \varepsilon^1\left(\tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} - \tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right), && \delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0 && \delta\left(\tfrac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\right) = \varepsilon^1\left(\tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i} - \tfrac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^i \partial q^2}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora comprobamos que $\bar{S}_E = \bar{S}_E' - \delta_\varepsilon\,\bar{S}_E$, esto es:

$$
\begin{aligned}
\bar{S}_E := \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& (\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\right) + (\dot{q}^2 - \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right)\right) \\
& + \dot{q}^3\left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\right) \\
& - \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} - \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\right)^2 \\
& - (v'^1 + \dot{\varepsilon}^1)\left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \varepsilon^1\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \bar{p}_2 - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) \Bigg) \\
& - \bar{u}'^1 \Bigg(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} \right) - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} \right) \\
& -2q^3 + \bar{p}_2 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) \Bigg) \\
& - \bar{u}'^2 \left(- \bar{p}_3 - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} \right) + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} \right) \right) \Bigg] dt \\
= \; & \delta \bar{S}_E + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\varepsilon^1 \left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \right) \right] dt, \qquad (276)
\end{aligned}
$$

luego, podemos ver que $\bar{M}(t) = \varepsilon \left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \right)$, algo que se puede corroborar mediante la ecuación (110).

Además encontramos las ecuaciones de movimiento provenientes de la acción extendido, las cuales son:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{p}}_1 & \stackrel{\Sigma}{=} \left(3 \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right) - u'^2 \right) \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + v'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} \right) \\
& \quad + u'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} \right), \\
\dot{\bar{p}}_2 & \stackrel{\Sigma}{=} \left(3 \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right) - u'^2 \right) \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3} + v'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) \\
& \quad + u'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} \right), \\
\dot{\bar{p}}_3 & \stackrel{\Sigma}{=} \left(3 \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right) - u'^2 \right) \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3} + v'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3} \right) \\
& \quad + u'^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3} \right) \\
& \quad + 2u'^1, \\
\dot{q}^1 & \stackrel{\Sigma}{=} \bar{v}'^1 + \bar{u}'^1, \\
\dot{q}^2 & \stackrel{\Sigma}{=} - \bar{v}'^1 + \bar{u}'^1, \\
\dot{q}^3 & \stackrel{\Sigma}{=} 3 \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right) + \bar{u}'^2 . \qquad (277)
\end{aligned}
$$

Lo siguiente consistirá en realizar el conteo de grados de libertad. Tenemos un sistema con tres coordenadas canónicas con sus respectivos momentos canónicos, una constricción de primera clase y dos de segunda clase así, usando la ecuación (112) obtenemos que:

$$
\eta = \frac{1}{2}[2N - 2\zeta - \xi] = \frac{1}{2}[2(3) - 2(1) - 2] = 1. \qquad (278)
$$

Por otro lado, puesto que hemos obtenido constricciones de segunda clase podemos expresar el paréntesis de Dirac a partir de la ecuación (87) como:

$$
\begin{aligned}
\{A, B\}_D = \; & \{A, B\} + \frac{1}{2} \left\{ A, \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - 2q^3 \right\} \left\{ - \bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3}, B \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ A, - \bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \right\} \left\{ \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} + \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3, B \right\}, \qquad (279)
\end{aligned}
$$

en particular, para las variables canónicas originales encontramos que $\{q^1,\bar{p}_1\}_D = 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3}$, $\{q^2,\bar{p}_2\}_D = 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}$, $\{q^3,\bar{p}_3\}_D = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}\right)$ esto nos dice que $(q^i,\bar{p}_i)$ no son variables canónicas con respecto al paréntesis de Dirac.

A lo largo de este desarrollo pudimos ver que existen semejanzas entre el caso 0 (es decir sin término de fontera) y lo encontrado al agregar la derivada de una función que sólo depende de las coordenadas canónicas, por ejemplo, posee la misma cantidad de constricciones primarias y secundarias así como el mismo número de grados de libertad.

Caso 2: Sistema B más un término de frontera que proviene de $F(q^i,t) = F_1(q^i) + F_2(t)$

Partimos del Lagrangiano $\bar{L}\,(q^i,\dot{q}^i,t) = (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2 + \frac{d(F_1(q^i)+F_2(t))}{dt}$ cuyas ecuaciones de movimiento son las mismas que en el caso 0 y el caso 1 sistema B. De la definición de momento obtenemos que:

$$\bar{p}_1 := q^3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}, \tag{280}$$

$$\bar{p}_2 := q^3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}, \tag{281}$$

$$\bar{p}_3 := \dot{q}^3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}. \tag{282}$$

Usando la ecuación (4) hallamos la matriz Hessiana:

$$(\bar{H}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{283}$$

cuyo determinante es cero por lo que, al igual que en los casos anteriores, el sistema es singular. Ya que $\rho\left(\bar{H}_{ij}\right) = 1$ y $\bar{N} = 3$, hallaremos $\bar{M}' = 2$ constricciones primarias independientes, las cuales son:

$$\bar{\phi}^1_1 = \bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\Sigma_1}{=} 0, \tag{284}$$

$$\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \overset{\Sigma_1}{=} 0. \tag{285}$$

Estas constricciones definen $\bar{\Sigma}_1$ cuya dimensión es 4. Para continuar el algorimo calculamos la matriz Jacobiana:

$$J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} & -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} & -1 - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} & -\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2} & -1 - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{286}$$

Vemos que $\rho\left(J\left(\bar{\phi}^1_\mu\right)\right) = 2$ es constante sobre toda la superficie de constricciones por lo tanto se cumple las condición de regularidad y de este modo podemos continuar con el Algoritmo.

De la definición de Hamiltoniano canónico hallamos $\bar{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}$ y de la ecuación (17) obtenemos que el Hamiltoniano total es $\bar{H}_T = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 + \bar{u}^1\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - q^3\right)$ $+ \bar{u}^2\left(\bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - q^3\right) - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}$. A partir del Hamiltoniano total encontramos las mismas ecuaciones de movimiento en el caso anterior, es decir:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{u}^1,\\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{u}^2,\\
\dot{q}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3},\\
\dot{\bar{p}}^1 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} + \bar{u}^2\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2},\\
\dot{\bar{p}}^2 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3} + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} + \bar{u}^2\,\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2},\\
\dot{\bar{p}}^3 &\overset{\Sigma_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^3} - \bar{u}^1\left(-1 - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\right) - \bar{u}^2\left(-1 - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right).
\end{aligned} \tag{287}$$

Aplicando la condición de consistencia a las constricciones primarias encontramos una constricción secundaria $\bar{\phi}^2_1 \overset{\Sigma_1}{=} -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}$ y repitiendo el procedimiento sólo obtenemos que $\bar{u}^1 \overset{\Sigma_1}{=} -\bar{u}^2$, este resultado concuerda con lo que se obtiene usando las condiciones de consistencia de los multiplicadores de Lagrange. Adicionalmente, de esto último hallamos que $\bar{u}^2$ está indeterminado, por lo que podemos escribir el Hamiltoniano total como $H_T = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} + \bar{u}^1$ $\left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}\right)$ donde $\bar{H}' = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} = \bar{H}_0$.

Ahora que hemos terminado el proceso de encontrar constricciones las enlistamos:

$$\bar{\phi}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - q^3 \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{288}$$

$$\bar{\phi}_2 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - q^3 \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{289}$$

$$\bar{\phi}_3 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} \overset{\Sigma}{=} 0. \tag{290}$$

Calculamos la matriz $\bar{W}$:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ya que esta matriz tiene rango 2 obtendremos dos constricciones de segunda clase y una de primera clase que se obtienen usando el Teorema 4 y el Teorema 5 y son las mismas que para el caso 1 del sistema B, es decir:

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} \overset{\Sigma}{=} 0, \tag{291}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_1 &= \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - 2q^3 \overset{\Sigma}{=} 0, && (292)\\
\bar{\chi}_2 &= -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} \overset{\Sigma}{=} 0. && (293)
\end{aligned}$$

Así la matriz $\bar{W}'$ es:

$$\bar{W}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $(\bar{C}_{\beta\alpha})$ está dada por:

$$(\bar{C}_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{294}$$

la cual es antisimétrica, de tamaño par y constante sobre $\bar{\Sigma}_1$ tal como queremos.

Ahora, mostramos $\bar{H}'$ es una función de primera clase usando las constricciones de primera y segunda clase:

$$\begin{aligned}
\{\bar{H}', \bar{\gamma}_1\} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right\} = 0,\\
\{\bar{H}', \bar{\chi}_1\} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}\right\}\\
&= 2\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right) = -2\,\bar{\chi}_3 \overset{\Sigma}{=} 0,\\
\{\bar{H}', \bar{\chi}_2\} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}, -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right\} = 0, && (295)
\end{aligned}$$

por lo tanto nuestra afirmación es correcta.

El siguiente paso en el procedimiento es calcular el Hamiltoniano extendido a partir de la definición $\bar{H}_E := \bar{H} + \bar{v}'^a \bar{\gamma}_a + \bar{u}'^\alpha \bar{\chi}_\alpha$ donde $\bar{H} := \bar{H}_0 + \bar{\lambda}^\alpha \bar{\chi}_\alpha$, por lo que necesitamos los multiplicadores $\bar{\lambda}^1 = 0$ y $\bar{\lambda}^2 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}$ que obtenemos de la ecuación (103). Por lo tanto $\bar{H} = \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}$ y $H_E = \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} + \bar{v}'^1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{u}'^1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{u}'^2 \left(-\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)$. Así el principio de acción extendido es:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_E := \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \dot{q}^1\,\bar{p}_1 + \dot{q}^2\,\bar{p}_2 + \dot{q}^3\,\bar{p}_3 - \frac{3}{2}\left(\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\\
& - v'^1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \bar{p}_2 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right) + \bar{u}'^1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3 + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)\\
& + \bar{u}'^2 \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right)\Bigg] \mathrm{d}t. && (296)
\end{aligned}$$

Ahora comprobaremos que el principio de acción extendido es invariante ante las transformaciones de norma de q^i, p_i, $\bar{v}^a$ y $\bar{u}'^\alpha$:

$$
\begin{array}{llll}
\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1, & \delta_\varepsilon\, \bar{p}_1 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right), & \delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1, & \delta_\varepsilon\, \bar{v}'^1 = \dot{\varepsilon}^1, \\
\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1, & \delta_\varepsilon\, \bar{p}_2 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right), & \delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1, & \delta_\varepsilon\, \bar{u}'^\alpha = 0, \\
\delta_\varepsilon q^3 = 0, & \delta_\varepsilon\, \bar{p}_3 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right), & \delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0, & \\
\delta\left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right) = 0, & \delta\left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^i}\right) = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^i \partial q^2}\right), & &
\end{array}
$$

es decir que $\bar{S}_E = \bar{S}_E' - \delta_\varepsilon\, \bar{S}_E$.

$$
\begin{aligned}
\bar{S}_E \; := & \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[(\dot{q}^1 + \dot{\varepsilon}^1) \left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\right) \\
& + (\dot{q}^2 - \dot{\varepsilon}^1) \left(\bar{p}_2 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right)\right) + \dot{q}^3 \left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\right) \\
& - \frac{3}{2} \left(\bar{p}_3 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\right)^2 + \frac{\partial F_2(t)}{\partial t} \\
& - (v'^1 + \dot{\varepsilon}^1) \left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\right. \\
& \left. - \bar{p}_2 - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right) + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right)\right) \\
& - \bar{u}'^1 \left(\bar{p}_1 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right)\right. \\
& \left. - 2q^3 + \bar{p}_2 + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right) - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right)\right) \\
& - \bar{u}'^2 \left(- \bar{p}_3 - \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right) + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} + \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} - \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right)\right)\Bigg] dt \\
= \; & \delta \bar{S}_E + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\varepsilon^1 \left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)\right] dt. \qquad (297)
\end{aligned}
$$

Vemos que $\bar{S}_E$ es invariante ante transformaciones de norma hasta el término de frontera $\bar{M}\,(t) = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}\right)$.

Ahora, hemos obtenido la misma cantidad de constricciones de primera y segunda clase que en el caso anterior y este sistema también tiene tres coordenadas canónicas con tres momentos canónicos, por lo tanto obtendremos el mismo número de grados de libertad, es decir que $\eta = 1$.

Finalmente escribimos el paréntesis de Dirac a partir de la ecuación (87), es decir:

$$
\begin{aligned}
\{A, B\}_D \; = \; & \{A, B\} + \frac{1}{2} \left\{A, \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - 2q^3\right\} \left\{- \bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}, B\right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{A, - \bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3}\right\} \left\{\bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} + \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - 2q^3, B\right\}, \qquad (298)
\end{aligned}
$$

en particular, para las variables canónicas originales encontramos que $\{q^1, \bar{p}_1\}_D = 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3}$, $\{q^2, \bar{p}_2\}_D = 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}$, $\{q^3, \bar{p}_3\}_D = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^3}\right)$. Otros de los paréntesis son distintos de cero, pero bastan estos ejemplos para darnos cuenta de que $(q^i, \bar{p}_i)$ no son variables canónicas con respecto al paréntesis de Dirac.

Los resultados que obtuvimos para este caso y el caso 1 del sistema B son casi los mismos, pues a pesar de que existe un término que depende del tiempo, al presentarse de forma aditiva, en la mayoría de los casos desaparece, por ejemplo: en los momentos, en las constricciones de todas las generaciones, en las constricciones de primera y segunda clase, en las ecuaciones de movimiento y en las transformaciones de norma.

Caso 3: Sistema B más un término de frontera que proviene de $F(q^i, t)$

Para este caso el Lagrangiano con el cual trabajaremos es $\bar{L}= (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)q^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}^3)^2 + \frac{dF(q^i,t)}{dt}$, cuyas ecuaciones de movimiento son $-\ddot{q}^3 = 0$ y $\dot{q}^1 + \dot{q}^2$, que son las mismas que para todos los casos anteriores del sistema B. Asímismo a partir de la definición de momento se obtiene que:

$$\bar{p}_1 = q^3 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} \tag{299}$$

$$\bar{p}_2 = q^3 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \tag{300}$$

$$\bar{p}_3 = \dot{q}^3 + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}. \tag{301}$$

La matriz Hessiana que se obtiene de este Lagrangiano usando la ecuación (4) es:

$$(\bar{H}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{302}$$

Podemos ver que la matriz es la misma que se obtuvo en los tres casos anteriores, esto nos dice que este sistema también es singular. Además de lo anterior obtendremos $M' = 2$ constricciones primaria y que la superficie de constricciones $\bar{\Sigma}_1$ tiene dimensión igual a 4. La constricciones primarias proviene de los momentos (299) y (300) son:

$$\bar{\phi}_1^1 = \bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \tag{303}$$

$$\bar{\phi}_2^1 = \bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0. \tag{304}$$

El siguiente paso en el algoritmo es calcular la siguiente matriz Jacobiana:

$$J\left(\bar{\phi}_1^1\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1} & \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2} & -1 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2} & \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2} & -1 - \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual tiene rango igual a 2 que es constante en cualquier punto de Σ_1, por lo que se cumple la condición de regularidad y podemos continuar el proceso.

Ahora, a partir de la definición de Hamiltoniano canónico y sustituyendo los momentos podemos escribir $\bar{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t}$, y a partir de la ecuación (17) hallamos el $\bar{H}_T = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)^2 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t} + \bar{u}^1\left(\bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1}\right) + \bar{u}^2\left(\bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2}\right)$. Ya que hemos obtenido H_T podemos hallar las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones (36) y (37), las cuales son:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{u}^1, \\
\dot{q}_2 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{u}^2, \\
\dot{q}_3 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}, \\
\dot{\bar{p}}_1 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1} + \bar{u}^2\,\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}_2 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} + \bar{u}^1\,\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^1} + \bar{u}^2\,\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2}, \\
\dot{\bar{p}}_3 &\overset{\bar{\Sigma}_1}{=} \left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)\frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^3} + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial t} + \bar{u}^1\left(1 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^1}\right) \\
&\quad + \bar{u}^2\left(1 + \frac{\partial^2 F(q^i,t)}{\partial q^3 \partial q^2}\right).
\end{aligned} \tag{305}
$$

Continuamos con el algoritmo aplicando la condición de consistencia a las constricciones (303) y (304), de lo cual obtenemos dos constricciones de secundarias: $\bar{\varphi}_2^1 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0$ y $\bar{\varphi}_2^2 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0$. Ahora aplicamos la condición de consistencia a estas constricciones, es decir:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\varphi}}_2^1 &= \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t} - 1\right) + \bar{u}^2\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - 1\right) \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0, \\
\dot{\bar{\varphi}}_2^2 &= \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t}\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right) + \bar{u}^1\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - 1\right) + \bar{u}^2\left(\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} - 1\right) \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.
\end{aligned} \tag{306}
$$

A partir de estas dos ecuaciones podemos despejar los multiplicadores de Lagrange $\bar{u}^1$ y $\bar{u}^2$, estos dice que al menos hallaremos dos constricciones de segunda clase. Podemos conocer el total de constricciones de primera y segunda clase calculando la matriz W y su rango, es decir:

$$
W = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t} & 1 - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} \\
0 & 0 & 1 - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} & 1 - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} \\
\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^1 \partial t} - 1 & \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - 1 & 0 & \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t} - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t} \\
\frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^2 \partial t} - 1 & \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^2 \partial t} - 1 & \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial q^3 \partial t} - \frac{\partial^3 F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial q^3 \partial t} & 0
\end{pmatrix}. \tag{307}
$$

Al reducir esta matriz se llega a que su rango es igual a cuatro, por lo tanto todas las constricciones son obtenidas son de segunda clase. Con esta información y usando la ecuación (112) llegamos a que el número de grados de libertad del sistema es:

$$
\eta = \frac{1}{2}[2(3) - 2(0) - 4] = 1. \tag{308}
$$

En este caso hemos obtenido el mismo número de grados de libertad que para todos los casos anteriores del sistema B, sin embargo, en vista de que todas las constricciones halladas son de segunda clase al agregar a L el término de frontera $\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial t}$ ya no estamos obteniendo simetrías de norma. Lo anterior nos dice si agregamos un término de frontera arbitrario cambiamos la teoría.

Comparación de los Casos del Sistema B

Resultados comparados con el sistema A sin término de frontera				
Características	Caso 0	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Constricciones	$\phi^1_1 = p_1 - q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$ $\phi^1_2 = p_2 - q^3 \overset{\Sigma_1}{=} 0,$ $\phi^2_1 = -p_3 \overset{\Sigma_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1} - q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} - q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^2_1 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}^1_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1} - q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} - q^3 \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^2_1 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$	$\bar{\phi}^1_1 = \bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^1_2 = \bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^2_1 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)$ $+ \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0,$ $\bar{\phi}^2_2 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)$ $+ \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}_1}{=} 0.$
Constricciones de primera clase	$\gamma_1 = p_1 - p_2 \overset{\Sigma}{\equiv} 0.$	$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}$ $- \bar{p}_2 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	$\bar{\gamma}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}$ $- \bar{p}_2 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	Ninguna.
Constricciones de segunda clase	$\chi_1 = p_1 - 2q^3$ $+ p_2 \overset{\Sigma}{\equiv} 0,$ $\chi_2 = -p_3 \overset{\Sigma}{\equiv} 0.$	$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^1}$ $+ \bar{p}_2 - \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^2}$ $-2q^3 \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_2 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^3} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_1 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^1}$ $+ \bar{p}_2 - \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^2}$ $-2q^3 \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_2 = -\bar{p}_3 + \frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^3} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$	$\bar{\chi}_1 = \bar{p}_1 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_2 = \bar{p}_2 - q^3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_3 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)$ $+ \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^1 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0,$ $\bar{\chi}_4 = -\left(\bar{p}_3 - \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^3}\right)$ $+ \frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^2 \partial t} \overset{\bar{\Sigma}}{\equiv} 0.$
Tranformaciones de norma	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_1 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_2 = 0,$ $\delta_\varepsilon p_3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon u'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon v'^1 = 0,$ $\delta_\varepsilon v'^2 = 0.$	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_1 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_2 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_3 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{u}'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^1 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^2 = 0,$ $\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F(q^i)}{\partial q^i}\right) = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F(q^i)}{\partial q^i \partial q^2}\right).$	$\delta_\varepsilon q^1 = \varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^2 = -\varepsilon^1,$ $\delta_\varepsilon q^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_1 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_2 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^2 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \bar{p}_3 = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^1}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^3 \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^2 = -\dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \dot{q}^3 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{u}'^1 = \dot{\varepsilon}^1,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^1 = 0,$ $\delta_\varepsilon \bar{v}'^2 = 0,$ $\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F_1(q^i)}{\partial q^i}\right) = \varepsilon^1 \left(\frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^1 \partial q^i}\right.$ $\left.- \frac{\partial^2 F_1(q^i)}{\partial q^i \partial q^2}\right),$ $\delta_\varepsilon \left(\frac{\partial F_2(t)}{\partial t}\right) = 0.$	Ninguna.
Grados de libertad	1	1	1	1

Figura 3: Tabla comparativa del Sistema B.

En estre cuadro comparativo podemos ver que los casos 1 y 2 mantienen la dinámica del sistema original, es decir del caso 0, mientras que el caso 3, a pesar de que tiene el mismo número de grados de libertad que los casos anteriores, no arrojó constricciones de primera clase, por lo que ya no obtuvimos simetrías de norma.

4 CONCLUSIONES

Al comenzar este trabajo supusimos que si agregábamos un término de frontera, de características arbitrarias a un Lagrangiano, no cambiaría la dinámica original del sistema.

En los casos 1 y 2 de los Sistemas A y B que estudiamos, la dinámica no cambió, sin embargo, sí impusimos condiciones a los términos de frontera que sumamos. La variable temporal no apareció o bien permaneció aislada, estas características hicieron posible que la dinámica fuese la misma que cuando no agregamos dichos términos.

El caso más interesante de analizar en ambos sistemas fue el caso 3, pues en éste se pudo ver con claridad que la hipótesis no se satisfizo: hubo alteraciones en la cantidad de constricciones halladas, se determinó una mayor o menor cantidad de multiplicadores de Lagrange, lo que dió como resultado que cambiase el número de constricciones de primera y segunda clase, por lo que también se modificaron las simetrías de norma y/o el número de grados de libertad del sistema.

Para cada sistema los cambios en la dinámica fueron distintos, es decir, se presentaron en diferentes puntos del desarollo del algoritmo, lo cual indica que cada sistema amitirá un término de frontera particular, en otras palabras, no cualquier término es permisible.

Hasta este punto no obtuvimos un método general para determinar qué debemos exigir a los términos de frontera dependiendo de la Lagrangiana que se está estudiando, de tal forma que la evolución del sistema no cambie. Se espera continuar con este trabajo para lograr esta meta, pues será herramienta útil en investigaciones en las que se utilizan tales términos, como es el caso de teoría de campos donde éstos pueden ser necesarios para tener un principio de acción bien definido.

Apéndices

A APÉNDICE: CONCEPTOS FÍSICOS

Principio variacional lagrangiano

El movimiento de un sistema mecánico de un tiempo t_0 a t_1 es tal que la acción:

$$S_L\left[q^i(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt; \text{ donde } i = 1, ..., N, \tag{309}$$

es estacionario o extremal (máximo o mínimo) bajo variaciones $\delta q^i(t)$. Es decir que $\delta S_L = 0$. Considerando una familia de curvas que pasan por los puntos (t_0, q^0) y (t_1, q^1) en el espacio de configuración, tales que $q^i(t, \alpha) = q^i(t) + \alpha\eta^i(t)$, donde α y $\eta^i(t)$ son parámetros que distinguen la deformación arbitraria de la trayectoria $q^i(t)$. La función $\eta^i(t)$ sólo tiene como restricciones que para toda i: $\eta^i(t_0) = 0 = \eta^i(t_1)$, ya que todas las trayectorias pasan por los puntos (t_0, q^0) y (t_1, q^1), y debe ser diferenciable.

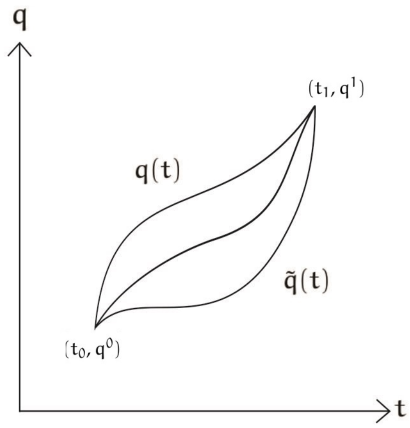

Figura 4: Trayectorias posibles en el espacio de configuración.

Luego, la variación de $q^i(t)$ sería:

$$\begin{aligned} \delta q^i(t) &= \tilde{q}^i(t) - q^i(t) \\ &= q^i(t, \alpha) - q^i(t, 0) \\ &= q^i(t) + \alpha\eta^i(t) - q^i(t) \\ &= \alpha\eta^i(t) \\ &\Rightarrow \delta q^i(t_0) = 0 = \delta q^i(t_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta S_L = \left(\frac{\partial S_L}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$.

Al establecer lo anterior, podemos escribir la acción de la siguiente forma:

$$S_L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t, \alpha), \dot{q}^i(t, \alpha), t)dt, \tag{310}$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
\delta S_L &= \left.\frac{dS_L}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial\dot{q}^i}{\partial\alpha}\right)dt\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial^2 q^i}{\partial\alpha\partial t}\right)dt\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}\right)dt\right|_{\alpha=0}+\left.\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}\right|_{t_0}^{t_1}\right|_{\alpha=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\right)\left.\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}dt=0.
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad se ha utilizado la conmutatividad de los operadores derivada e integral puesto que las variables α y t son independientes, en la segunda igualdad se usa la forma diferencial de la velocidad, para la tercera se hace uso de la integración por partes, para la cuarta note que $\frac{\partial q^i}{\partial\alpha}=\eta^i(t)$, y es tal que, evaluada en los límites, es cero. Finalmente, esta igualdad debe cumplirse para cualquier $\eta^i(t)$, por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0,\ \text{donde } i=1,...,N, \tag{311}$$

y éstas se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Demostraremos que las ecuaciones de movimiento de un Lagrangiano:

$$L(q^i,\dot{q}^i), \tag{312}$$

son las mismas que las del Lagrangiano:

$$\bar{L}=L(q^i,\dot{q}^i)+\frac{d}{dt}F(q^i,t), \tag{313}$$

para una función arbitraria $F(q^i,t)$.

Partimos del principio de acción de $\bar{L}$:

$$\bar{S}_L\ [q^i(t),\dot{q}^i] = \int_{t_0}^{t_1}\left[L(q^i,\dot{q}^i)+\frac{d}{dt}F(q^i,t)\right]dt,$$

donde $i=1,2,...,N$.

La variación virtual de esta acción es:

$$
\begin{aligned}
\delta\ \bar{S}_L\ [q^i(t),\dot{q}^i(t)] &= \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q^i,\dot{q}^i)+\frac{dF(q^i,t)}{dt}\right]dt \\
&= \delta\int_{t_0}^{t_1}[L(q^i,\dot{q}^i)]dt+\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}F(q^i,t)\right]dt \\
&= \delta S_L+\delta F(q^i,t)\big|_{t_o}^{t_1} \\
&= \delta S_L+\left.\frac{\partial F(q^i,t)}{\partial q^i}\delta q^i\right|_{t_o}^{t_1},
\end{aligned} \tag{314}
$$

hacemos uso del principio de mínima acción $\delta\ \bar{S}_L = 0$ con $\delta q^i|_{t_0}^{t_1} = 0$ donde $i = 1, 2, 3$, al aplicarlo el primer término nos arroja las ecuaciones de movimiento (311) y el segundo término se hace cero, tal como esperabamos.

Este resultado es utilizado en los casos de esta tesis en los que se agregan términos de frontera.

Momento de un Lagrangiano al que le sumamos la derivada total de una función $F(q^j, t)$

Sabemos que la definición de momento es:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{315}$$

algo que mencionamos en el primer capítulo de este trabajo. Para el Lagrangiano $\bar{L} = L(q^i, \dot{q}^i) + \frac{d}{dt} F(q^i, t)$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_j &= \frac{\partial\ \bar{L}}{\partial \dot{q}^j} \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{dF(q^i, t)}{dt}\right) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 F(q^i, t)}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F(q^j, t)}{\partial q^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 F(q^i, t)}{\partial \dot{q}^j \partial t} \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial F(q^i, t)}{\partial q^j}.
\end{aligned} \tag{316}$$

A partir de este resultado encontramos que si al Lagrangiano le sumamos la derivada total de una función $F(q^i)$ entonces el momento es:

$$\bar{p_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial F(q^i)}{\partial q^j}, \tag{317}$$

mientras que si la función es de tipo $F(t)$, los momentos de L y $\bar{L}$ son los mismos.

B APÉNDICE: CONCEPTOS MATEMÁTICOS

En este apéndice daremos un breve repaso de conceptos de álgebra lineal, con la intención de enunciar el teorema de la dimensión y un par de corolarios para matrices. En lo sucesivo, considérese siempre a V como un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K, si m y n son enteros mayores o iguales que uno, los elementos de K^n y K^m serán vistos como vectores columna, se representarán en negritas y la expresión: *matriz rectangular* $m \times n$, se usará para referirnos a una matriz con coeficientes en el campo K de m filas y n columnas.

Conceptos básicos sobre matrices

Definición 6. Sea A una matriz rectangular $m \times n$. Un vector $\mathbf{v} \in K^n$ *anula* a la matriz A si ocurre que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Definimos:

(i) El *núcleo* de la matriz como el conjunto de todos los vectores que anulan a A, esto es:

$$\operatorname{nucl} A = \{\mathbf{v} \in K^n : A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

(ii) La imagen de la matriz como el subconjunto de K^m formado al multiplicar a la matriz A por cada uno de los vectores de K^n, es decir:

$$\operatorname{Im} A = \{\mathbf{w} \in K^m : \mathbf{w} = A\mathbf{v} \text{ con } \mathbf{v} \in K^n\}$$

Definición 7. Sea V un espacio vectorial, $U \subseteq V$ se dirá un subespacio vectorial de V si U es cerrado bajo suma y producto por un escalar, esto es:

- Para todos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ se tiene que $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$.
- Para todo $\mathbf{u} \in U$ y para todo $k \in K$ se sigue que $k\mathbf{u} \in U$.

Definición 8. Sea V un espacio vectorial, dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$.

- $\mathbf{u} \in V$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si existen $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$, tales que $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$.
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son *linealmente independientes* si cada vez que $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, entonces $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.
- Un subconjunto β de V *genera* a V si todo vector en V es combinación lineal de los elementos de β.
- Un subconjunto β de V es una *base* para V si éste genera a V y todos sus vectores son linealmente independientes.
- Si β es una base para V, entonces la **dimensión** de V es el número de elementos que tiene β.

Los siguientes resultados son bien conocidos y por tanto sus demostraciones se omiten. (cf. [7, Capítulo 4], [1, Capítulos 4 y 5]).

Teorema 9. *Sean* V *un espacio vectorial y* A *una matriz* $m \times n$.

(i) Existe una base β *para* V.

(ii) El núcleo y la imagen de una matriz, son subespacios de K^n *y* K^m *respectivamente.*

(iii) Si U *es un subespacio de* V *y la dimensión de* U *coincide con la de* V*, entonces* $U = V$.

El concepto de dimensión de un espacio vectorial es de suma importancia en el álgebra lineal, algunos ejemplos de espacios de dimensión finita, pueden ser $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los cuales tienen por bases canónicas a los conjuntos $\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\beta_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ respectivamente y en consecuencia son de dimensión 2 y 3 respectivamente. Además, en virtud del Teorema 9, existe una base para el núcleo e imagen de una matriz, así introducimos las siguientes definiciones.

Definición 10. Sea A una matriz rectangular $m \times n$. Definimos:

(i) La *nulidad* de A como la dimensión del núcleo de A y se denota por $\nu(A)$.

(ii) El *rango* de A como la dimensión de la imagen de A y se denota por $\rho(A)$.

Ejemplo 11. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ entonces:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \big(y + 2z, 3y + 3z, 4y + 5z\big)$$

si $\mathbf{v} \in \operatorname{nucl} A$ entonces $\big(y+2z, 3y+3z, 4y+5z\big) = (0,0,0)$, tras igualar las coordenadas y resolver el sistema de ecuaciones se conlcuye que $y = z = 0$, mientras que x es una variable libre (no está determinada), entonces todo vector de la forma $(x,0,0)$ donde x es un número real arbitrario, anula a la matriz A, más aún, $(x,0,0) = x(1,0,0)$, luego los vectores que anulan a la matriz son una combinanción lineal del vector $(1,0,0)$ y es claro que la única forma de que $x(1,0,0) = (0,0,0)$ es cuando $x = 0$, así, el conjunto $\beta_{nucl} = \{(1,0,0)\}$ es una base para el $\operatorname{nucl} A$ y se sigue de lo anterior que $\nu(A) = \dim \operatorname{nucl} A = 1$, por otro lado:

$$\begin{aligned} \big(y+2z, 3y+3z, 4y+5z\big) &= \big(y, 3y, 4y\big) + \big(2z, 3z, 5z\big) \\ &= y(1,3,4) + z(2,3,5) \end{aligned}$$

aquí es claro que todo vector que proviene del producto de A con un vector columna es una combinación lineal de los vectores $(1,3,4)$ y $(2,3,5)$, y nuevamente, la única forma que esta combinación sea el vector cero es cuando $y = z = 0$, por lo tanto son linealmente independientes y así, $\beta_{Im} = \{(1,3,4)(2,3,5)\}$ es una base para la imagen de la matriz A, por lo tanto $\rho(A) = 2$.

Teorema de la dimensión

Recordemos que dos matrices A y B son *equivalentes por filas* si existe una sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$ de operaciones elementales entre filas de modo que $(E_1 E_2 \cdots E_r)A = B$, entiéndase por operaciones elementales entre filas:

(i) *Intercambio en la posición de 2 filas.*

(ii) *Multiplicación de una fila por un escalar.*

(iii) *La suma de una fila con un múltiplo escalar de otra.*

Definición 12. Diremos que una matriz R es la *forma escalonada reducida por filas* de una matriz A si A es equivalente por filas a R y si R satisface:

1. Todas la filas compuestas por ceros están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer número distinto de cero que aparece (de izquierda a derecha) en cada fila es 1 y se le llama *pivote*.
3. Si una fila esta por debajo de otra, su pivote aparece más a la derecha que el pivote de la fila anterior.

Definición 13. Sea A una matriz $m \times n$.

1. Si R es la forma reducida de la matriz A, el **espacio fila** de la matriz A es el espacio vectorial formado por las filas distintas de cero en R.
2. Si S es la forma reducida de A^t, el **espacio columna** es el espacio vectorial formado por las columnas distintas de cero en S^t.

Ejemplo 14. Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y apliquemos algunas operaciones por filas:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la forma escalonada reducida por filas de la matriz A siguiendo un procedimiento análogo al Ejemplo 11 podemos concluir que $\nu(R) = 1$ y $\rho(R) = 2$ coincidiendo con la nulidad y rango de la matriz A.

Lema 15. *Sea A una matriz y R su forma escalonada reducida por filas, entonces $\nu(R) = \nu(A)$ y $\rho(R) = \rho(A)$, más aún $\rho(R)$ coincide con su número de filas distintas de cero y $\nu(R)$ coincide con su número de filas compuestas por ceros.*

Teorema 16. *[1, Teorema 5,pág 218] Sea A una matriz $m \times n$. Entonces el espacio fila y columna de la matriz A tienen la misma dimensión.*

Demostración. (cf. [1, págs 221 y 222]) □

Lema 17. *Sea A una matriz $n \times n$. Si $\nu(A) = n$, entonces $\rho(A) = 0$ y A es la matriz nula.*

Demostración. Supóngase que $\nu(A) = n$, entonces la dimensión del núcleo de A coincide con la dimensión del espacio vectorial K^n y por (iii) del Teorema 9 tenemos que $\operatorname{nucl} A = K^n$, es decir, cualquier vector de K^n multiplicado por A es el vector nulo, entonces por la Definición 6 la imagen de A consta únicamente del vector $\mathbf{0}$, entonces, la dimensión de la imagen debe ser cero, es decir $\rho(A) = 0$.

Si la matriz A no es la matriz nula, al menos una entrada $a_{ij} \neq 0$, dígamos que $a_{ij} = 1$ para algunos i y j, intercambiando filas, tenemos que A es equivalente por filas a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{318}$$

no resulta difícil demostrar que si multiplicamos esta matriz equivalente con A por un vector $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1)$ el producto no puede ser cero, contradiciendo lo anterior, por lo tanto A es la matriz nula. $\square$

Teorema 18 (de la dimensión)**.** *Sea A una matriz $m \times n$. Entonces $\nu(A) + \rho(A) = n$.*

Demostración. (cf. [1, págs 223 y 224]) $\square$

Corolario 19. *Sea A una matriz $n \times n$. Si $\nu(A) < n$ entonces la matriz no es la matriz nula y $\rho(A) \geqslant 1$.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] Anton, Howard. 1983. *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Limusa 6a. Reimpresión.

[2] Blagojević, Milutin. 2001. *Gravitation and gaugue symmetries*. Bristol: Institute of physics publishing.

[3] Corichiri, Alejandro y Rubalcaba G., Iraís. 2012. *Actions, topological terms and boundaries in first order gravity: A review*. International Journal of Modern Physics D. Vol 25. No. 4, 1630011.

[4] Castellani, Leonardo. 1982. *Symmetries in constrained hamiltonian systems*, Annals of physics 143, 357-371.

[5] Bogar, DÃaz et al. 2014. *Lagrangian approach to the physical degree of freedom count*, International Journal of Modern Physics D. Vol 55. 122901.

[6] Escalante H., Alberto, Rubalcava G., Iraís. 2012. *A pure Dirac's canonical analysis for four-dimensional BF theories*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 9, 1250053.

[7] Grossman, Stanley. 1984. *Elementary Linear Algebra*. Belmont: Wadsworth Publishing Company.

[8] Henneaux, Marc y Teitelboim, Claudio. 1991. *Quantization of Gaugue Symmetries*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[9] Mondragón López, Mauricio. 2003. *Formalismo covariante de teorías BF en cuatro dimensiones y sistemas parametrizados en un número finito de grados de libertad*. Tesis de maestría en física., Cinvestav-IPN.

[10] Sundermeyer, Kurt. 1982. *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Alemania: Springer-Verlag.