

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS.

AXIOMAS DE SEPARACIÓN EN TOPOLOGÍA SIN PUNTOS

TESIS
PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

PRESENTA
LUIS ALBERTO REYES MACÍAS

DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN ANGOA AMADOR
DR. JESÚS GONZÁLEZ SANDOVAL

PUEBLA, PUEBLA.

2026



BUAP

Mtro. Alfredo Avendaño Arenaza
Director General de Bibliotecas
Presente

A través de este medio me dirijo a usted para informarle que la tesis con título **"Axiomas de Separación en Topología sin Puntos"** ha sido avalada bajo los preceptos de integridad académica; por lo tanto se autoriza la impresión de tesis del alumno:

Nombre del alumno: **Luis Alberto Reyes Macías**

Matrícula: **224470131**

Facultad: **Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Programa Educativo: **Maestría en Ciencias Matemáticas**

Licenciatura o Posgrado: **Posgrado**

Sin más por el momento, agradezco la atención al presente.

ATENTAMENTE
"PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR"
H. Puebla de Z., 12 de diciembre de 2025


Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado


Dr. José Juan Angoa Amador
Director de Tesis


Dr. Jesús González Sandoval
Director de Tesis

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edil. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Quisiera agradecer de primera instancia a la SECIHTI por el apoyo económico al momento de realizar este posgrado. Asimismo, agradezco el apoyo, atención y paciencia prácticamente incondicional del Dr. Angoa, Dr. Sandoval y Dr. Perkins.

Por otro lado, agradezco a cada profesor con el que tome clase en la FCFM, a cada compañero que tuve. Finalmente, quisiera agradecer a mi familia, que siempre me apoyó en esta aventura, sin condición alguna.

Introducción

A inicios del siglo XX, la formalización de la Topología General se consolidó tras la presentación de diversas propuestas, entre las cuales destaca la otorgada por Hausdorff en [Hau14] de la cual se deriva actualmente el axioma de separación T_2 y que ulteriormente se complementó con la introducción de una jerarquía completa de axiomas de Separación (T_1 , regularidad, normalidad, etc.)

La importancia de estos axiomas radica en su capacidad de distinguir topológicamente entre puntos y conjuntos, lo cual es inviable bajo las condiciones mínimas de la definición general de topología, tal es el caso topología trivial sobre un conjunto X con más de un elemento. Al imponer estas condiciones, es posible garantizar la existencia de suficientes conjuntos abiertos para validar teoremas esenciales, como la unicidad de límites o la igualdad de extensiones de funciones continuas, propiedades que son fundamentales en el estudio del análisis matemático.

Con el paso del tiempo, en la década de los 30 del siglo pasado, se comenzó a relacionar los espacios topológicos con las retículas distributivas ¹. Ejemplo de esto es encontrado en las célebres publicaciones de M. Stone [Sto36], [Sto37], de las cuales se desprende el actualmente conocido Teorema de Representación de Stone para Álgebras Booleanas, donde se expresa que cada álgebra booleana B tiene un espacio topológico asociado $S(B)$ llamado espacio de Stone.

Posteriormente en [Sto38] Stone consigue una generalización del teorema anteriormente mencionando, donde provee una representación de retículas distributivas, no necesariamente booleanas, vía espacios coherentes, igualmente llamados espacios espectrales ².

¹Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado, en el cual para cada par de elementos existe un supremo y un ínfimo.

²Un espacio espectral X es aquel que es compacto, T_0 , sobrio, y en el cual el conjunto de sus subconjuntos compactos y abiertos es cerrado bajo intersecciones finitas y es base de los subconjuntos abiertos de X

IV

De aquí se observa la diferencia de que una retícula distributiva sea booleana o no, pues por una parte los espacios de Stone son topológicamente Hausdorff, mientras que los coherentes no lo son necesariamente. Esto último motiva la intuición de poder hablar de axiomas de separación en términos de retículas.

La formalización de esta intuición culminó con el desarrollo de la Topología sin Puntos, donde el concepto central es el de locale. En [Isb72], Isbell observa que las álgebras de Heyting pueden emerger como una generalización de las topologías vía su retícula de conjuntos abiertos. Esto denota nuevamente el aspecto algebraico de los espacios topológicos, solo que, en este caso, no resulta ser necesario que este tipo de retículas tengan el carácter "booleano".

Borceaux menciona en [Bor94] que un algebra de Heyting L es un locale, es decir una retícula completa que satisface la siguiente propiedad

$$\left(\bigvee A\right) \wedge b = \bigvee \{a \wedge b \mid a \in A\}$$

para cualquier subconjunto $A \subseteq L$ y cualquier $b \in L$, propiedad la cual es satisfecha por la retícula de abiertos $\Omega(X)$ de cualquier espacio topológico X , permitiendo estudiar la topología a través de su estructura algebraica, lo cual permite, en cierta forma, tener una mayor cantidad de "espacios" que antes.

Con esto en mente, es posible asignar a cada espacio topológico X una retícula, considerando meramente la retícula de conjuntos abiertos $\Omega(X)$. Por otro lado, es posible construir a partir de un locale L un espacio topológico como sigue: se considera el conjunto de elementos primos $p \in L$ ³, con la topología formada por los abiertos $\Sigma_a := \{p : a \not\leq p\}$.

Al ver los locales como espacios topológicos generalizados, se espera que extiendan conceptos como compacidad, subespacios y, crucialmente, los axiomas de separación. Sin embargo, la naturaleza puramente algebraica de los locales hace que la traducción de estas ideas no siempre sea directa ni intuitiva. La mayor dificultad que surge con los axiomas de separación que dependen explícitamente de los puntos. Por ejemplo, la traducción literal del axioma T_1 ($\{\overline{x}\} = \{x\}$) al lenguaje de locales — que establece que *cada elemento primo es máximo* [PP21]— resulta ser dependiente al concepto de punto. De igual modo, la versión local del axioma T_2 admite una variedad de definiciones no equivalentes [PP21],

³un elemento $p \in L$ es primo si para cualesquiera $a, b \in L$ tales que $a \wedge b \leq p$ entonces $a \leq p$ o $b \leq p$

lo que ha motivado el surgimiento de "nuevos" axiomas de separación en este contexto, como los conceptos *subfit* y *fit*, que están intrínsecamente ligados a las propiedades algebraicas de los marcos pero que provienen de propiedades topológicas, reflejando la importancia de la retícula de abiertos de cada espacio topológico.

En este contexto de abstracción y desarrollo conceptual, el objetivo principal de la presente tesis es realizar un estudio sistemático y detallado de los axiomas de separación en topología sin puntos.

Si bien el marco teórico se apoya en la literatura canónica reciente [PP21], la contribución de esta tesis es esencialmente doble y se orienta a la clarificación y profundización de la teoría para la comunidad académica hispanohablante:

1. Rigurosidad demostrativa: Se ofrecen demostraciones detalladas y autocontenidas para los principales teoremas que definen y relacionan los axiomas de separación en topología sin puntos, buscando una exposición coherente y clara.
2. Análisis aplicado: Se complementa la teoría mediante el análisis de ejemplos clásicos de la topología con el enfoque libre de puntos, ilustrando las sutiles distinciones que emergen al abandonar la noción de punto.

Aunado a que se presta énfasis en los espacios espectrales provenientes de anillos puesto a que estos no presentan una riqueza en los axiomas clásicos, pero satisfacen algunos de estos axiomas nuevos.

La tesis se estructura de la siguiente manera:

1. El capítulo 1 presenta los preliminares algebraicos, estableciendo el lenguaje de retículas, filtros, conexiones de Galois y álgebras de Heyting.
2. El capítulo 2 introduce la Topología sin puntos, definiendo formalmente los conceptos de marcos y locales, la noción de puntos y espectro, y la estructura de sublocales.
3. El capítulo 3 constituye el núcleo de este trabajo, donde se definen y analizan en profundidad los axiomas de separación en el contexto de locales, estudiando las equivalencias y propiedades de las versiones T_1 , Hausdorff, regularidad y normalidad.

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Retículas	1
1.2. Filtros e ideales	14
1.3. Conexiones de Galois	16
1.4. Álgebras de Heyting	18
2. Topología sin puntos	29
2.1. Marcos y Locales	29
2.2. Puntos	37
2.3. Espectro	39
2.4. Sublocales	42
3. Axiomas de separación	49
3.1. Una aproximación al axioma T_1	49
3.1.1. Axioma subfit	52
3.2. Locales T_2	56
3.2.1. Debilmente Hausdorff	57
3.2.2. Hausdorff	58
3.2.3. Punto Hausdorff	60
3.3. Locales fit	61
3.4. Espacios Regulares y Normales	65
Conclusión	71
Bibliografía	72

Capítulo 1

Preliminares

Un espacio topológico es un objeto matemático construido mediante un conjunto de puntos y de subconjuntos abiertos, pero, siguiendo a [Bor94], en algún sentido, los subconjuntos abiertos son más esenciales que los puntos dado que la retícula de subconjuntos abiertos usualmente caracteriza al conjunto de puntos.

La topología sin puntos es un campo que redefine el estudio de espacio topológico, haciendo uso de estructuras algebraicas, en particular, fundamentando esta teoría en el objeto llamado marco [PP11]. La noción de marco demanda un entendimiento de sus propiedades tanto algebraicas como de orden.

Por ello, esta sección es dedicada a explorar las nociones elementales de la teoría de retículas que son indispensables para el estudio y comprensión de los marcos. Con esto, se busca sentar las bases para una mejor comprensión de la naturaleza de los espacios topológicos desde una perspectiva libre de puntos.

1.1. Retículas

Sea X un conjunto, $x, y \in X$ y $R \subseteq X \times X$ una relación. Denotamos por xRy si y solo si $(x, y) \in R$. Decimos que R es un orden si y solo si:

- 1) Para todo $x \in R$, xRx (reflexividad),
- 2) para todo $x, y, z \in R$, si xRy , yRz , entonces xRz (transitividad).

Si además se cumple que:

- 3) Para todo $x, y, z \in R$, si xRy y yRx entonces $x = y$ (anti-simetría).

diremos que R es un orden parcial.

Si R es un orden parcial, denotaremos a xRy por $x \leq y$ y diremos que el par $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Si $(X, \leq)$ y $(Y, \leq')$ son dos conjuntos parcialmente ordenados, una función $\varphi : X \rightarrow Y$ es llamada monótona si, para cada $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ entonces, $\varphi(x) \leq' \varphi(y)$. Es un isomorfismo si tiene inversa e igual es monótona.

Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces $(X, \leq')$ donde

$$x \leq' y \iff y \leq x$$

es igualmente un conjunto parcialmente ordenado. Este será denotado por $(X, \leq)^{op}$ y será llamado el conjunto parcialmente ordenado dual.

Denotaremos simplemente por X a $(X, \leq)$ cuando se sobreentienda el contexto.

A continuación algunos ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados.

Ejemplo 1.1.1. Sea X un conjunto arbitrario, considerando al conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ con el orden de contención tenemos que el par $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Además, si X tiene alguna estructura algebraica, el conjunto de subestructuras con el orden de contención es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.1.2. El ejemplo que compete a esta tesis es el siguiente: Sea (X, τ) un espacio topológico, tal como en el ejemplo anterior, si dotamos a τ con el orden de contención es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros, con el orden usual $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Por otro lado, si nos restringimos solamente a los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ bajo la divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado. Es decir, para $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \leq y \iff x|y$.

Para un elemento $x \in X$ definimos

$$x \downarrow = \{y : y \leq x\} \text{ y } x \uparrow = \{y : x \leq y\}$$

A $x\downarrow$ lo llamamos ideal principal y a $x\uparrow$ filtro principal.

Por otro lado, para un subconjunto $M \subseteq X$,

$$M\downarrow = \bigcup \{x\downarrow : x \in M\} \text{ y } M\uparrow = \bigcup \{x\uparrow : x \in M\}$$

Un elemento $x \in X$ es máximo si $x\uparrow = \{x\}$, de manera análoga es mínimo si $x\downarrow = \{x\}$.

Diremos que $x \in X$ es una cota inferior de un subconjunto $M \subseteq X$ si $\forall m \in M, x \leq m$ y diremos que es cota superior si $\forall m \in M, m \leq x$. Al conjunto de cotas inferiores lo denotaremos por $\text{lb}M = \bigcap \{x\downarrow | x \in M\}$ mientras que al de cotas superiores $= \text{ub}M = \bigcap \{x\uparrow | x \in M\}$.

Definición 1.1.4. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $M \subseteq X$. Un elemento $x \in X$ es llamado supremo de M si:

1. $x \in \text{ub } M$,
2. si $z \in \text{ub } M$ entonces $x \leq z$.

Se denotará al supremo de M mediante $\bigvee M$. En el caso de que $x \in M \cap M\uparrow$ diremos que x es el mayor elemento de M .

Análogamente $y \in X$ es llamado ínfimo de M si:

1. $y \in \text{lb } M$,
2. si $z \in \text{lb } M$ entonces $z \leq y$.

Se denotará al ínfimo de M mediante $\bigwedge M$. En el caso de que $y \in M \cap \downarrow M$ diremos que y es el menor elemento de M .

Dado un conjunto parcialmente ordenado X y $M \subseteq X$, en caso de existir el supremo de M , por antisimetría, es único. Este comportamiento es análogo al ínfimo de M . Si X tiene un menor elemento se denotará por 0, en caso de tener un elemento mayor se denotará por 1. Además, observemos que

$$0 = \bigvee \emptyset = \bigwedge X$$

$$1 = \bigwedge X = \bigvee \emptyset$$

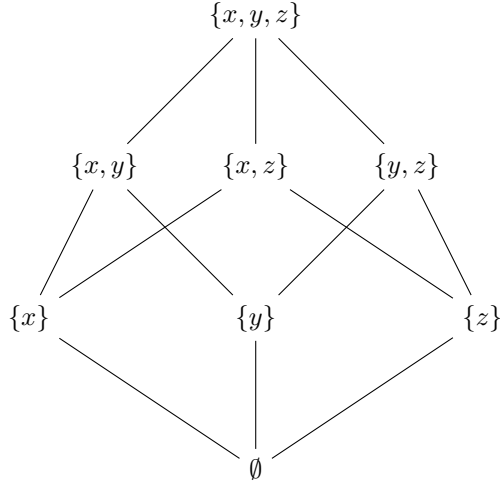
Definición 1.1.5. Sea X un conjunto parcialmente ordenado, es llamado:

1. $\wedge$ -semirretícula si para cada $a, b \in X$ existe $a \wedge b$,
2. $\vee$ -semirretícula si para cada $a, b \in X$ existe $a \vee b$,
3. $\wedge$ -semirretícula acotada si es $\wedge$ -semirretícula y existe 1,
4. $\vee$ -semirretícula acotada si es $\vee$ -semirretícula y existe 0,
5. retícula si es $\wedge$ -semirretícula y $\vee$ -semirretícula,
6. retícula acotada si es $\wedge$ -semirretícula acotada y $\vee$ -semirretícula acotada,
7. retícula completa si para cada subconjunto existe su supremo e ínfimo.

Algunos ejemplos son los siguientes

Ejemplo 1.1.6. Retomando el ejemplo 1.1.1, el par $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula completa donde la unión toma el rol de supremo, la intersección toma el rol de ínfimo.

Un ejemplo particular cuando $X = \{x, y, z\}$ es el siguiente plasmado en un diagrama de Hasse.

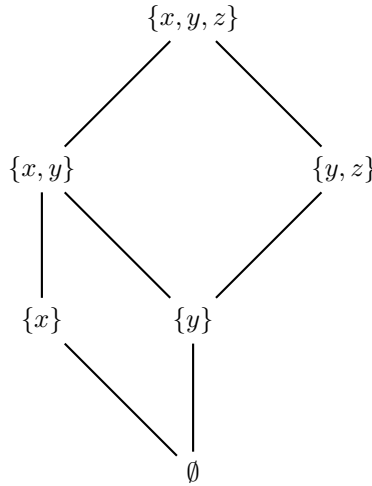


Ejemplo 1.1.7. Retomando al ejemplo en 1.1.2 y tal como el conjunto potencia, el conjunto parcialmente ordenado $(\tau, \subseteq)$ es una retícula donde el ínfimo es dado por intersección y el supremo por la unión.

Caso particular es el siguiente: consideremos

$$X = \{x, y, z\} \quad \tau = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\},$$

tenemos el siguiente diagrama de Hasse:



Ejemplo 1.1.8. Retomando el ejemplo de 1.1.3 notamos que $(\mathbb{Z}, |)$ es retícula donde el ínfimo es dado por el máximo común divisor y el supremo por el mínimo común múltiplo, sin embargo no existe el elemento 1.

Por otro lado si nos restringimos al conjunto $\{1, 2, 3\}$ notamos que no es retícula.

Notemos que para que un conjunto parcialmente ordenado sea retícula completa, basta que para cada subconjunto exista su supremo.

Teorema 1.1.9. Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Si para todo $A \subseteq X$, existe su supremo, entonces X es una retícula completa.

Demostración. En efecto, sea $M \subseteq X$, llamemos N al conjunto de sus cotas inferiores y $a = \bigvee M$, obviamente para cada $m \in M$, m es elemento de las cotas superiores de N luego, $a \leq m$, en consecuencia $a \in N$. Así a es el mayor elemento en las cotas inferiores de M , es decir, es el ínfimo de M . $\square$

Ejemplo 1.1.10. Notemos que en el ejemplo 1.1.7 el supremo arbitrario es dado por la unión arbitraria, así que por el resultado anterior $(\tau, \subseteq)$ es retícula completa.

Si bien, podemos considerar las retículas como conjuntos ordenados de cierto tipo, uno puede tomar una perspectiva algebraica. Para esto seguiremos a [DP02].

Sea L una retícula, podemos definir operaciones binarias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vee : L \times L &\rightarrow L \\ (a, b) &\mapsto a \vee b := \sup\{a, b\}\end{aligned}$$

Es decir, a cada par de elementos en L , se asigna su supremo. Análogamente

$$\begin{aligned}\wedge : L \times L &\rightarrow L \\ (a, b) &\mapsto a \wedge b := \inf\{a, b\}\end{aligned}$$

Con esto, tenemos el siguiente resultado

Lema 1.1.11. *Sea L una retícula, $a, b \in L$ entonces son equivalentes:*

- i.* $a \leq b$
- ii.* $a \vee b = b$
- iii.* $a \wedge b = a$

Demostración. Si $a \leq b$, entonces por definición $a \vee b = \sup\{a, b\} = b$, de esta forma *i.* implica *ii.* De manera análoga *i.* implica *iii.*

Por otro lado, si asumimos que $a \vee b = b$ entonces b es cota superior de $\{a, b\}$, por lo tanto $a \leq b$, así *ii.* implica *i.* Con un razonamiento similar *iii.* implica *i.* $\square$

Teorema 1.1.12. *Sea L una retícula. Entonces $\wedge$ y $\vee$ satisfacen para cada $a, b, c \in L$*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \tag{1.1}$$

$$a \vee b = b \vee a \tag{1.2}$$

$$a \vee a = a \tag{1.3}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \tag{1.4}$$

$$a \vee 0 = a \tag{1.5}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \tag{1.6}$$

$$a \wedge b = b \wedge a \tag{1.7}$$

$$a \wedge a = a \tag{1.8}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \tag{1.9}$$

$$a \wedge 1 = a \tag{1.10}$$

Demostración. Basta mostrar las primeras cinco ecuaciones pues las siguientes se siguen por dualidad.

- (1.1) Queremos mostrar que $\sup\{(a \vee b), c\} = \sup\{a, (b \vee c)\}$. Para esto basta ver que

$$\{(a \vee b), c\}^\uparrow = \{a, (b \vee c)\}^\uparrow$$

En efecto, $x \in \{(a \vee b), c\}^\uparrow$ si y solo si, $x \geq a \vee b$ y $x \leq c$ si y solo si $x \in \{a \vee b\}^\uparrow$ y $x \geq c$ si y solo si $x \geq a$, $x \geq b$, $x \geq c$ si y solo si $x \geq a$, $x \in \{b \vee c\}^\uparrow$ si y solo si $x \geq a$, $x \geq b \vee c$ si y solo si $x \in \{a, (b \vee c)\}^\uparrow$. Luego cerrando bajo ínfimos tenemos

$$(a \vee b) \vee c = \bigwedge(\{(a \vee b), c\}^\uparrow) = \bigwedge(\{a, b \vee c\}^\uparrow) = a \vee (b \vee c).$$

- (1.2) Se sigue de

$$a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$$

- (1.3) Es trivial.

- (1.4) Como $a \in \{a, (a \wedge b)\}^\uparrow$, y $a \geq a$, $a \geq a \wedge b$, y como es la mínima cota superior $a \vee (a \wedge b) = a$

- (1.5) Es trivial.

□

En el siguiente resultado observamos que dadas dos operaciones binarias cualesquier que cumplan las ecuaciones anteriores, podemos recuperar un orden.

Teorema 1.1.13. *Sea X un conjunto, $0, 1 \in X$ y $\wedge, \vee$ operaciones definidas en X tal que se cumplan las ecuaciones antes mostradas. Si definimos $\leq \subseteq X \times X$ por*

$$a \leq b \iff a \wedge b = a,$$

entonces $(X, \leq)$ es una retícula.

Demostración. Es evidente que $a \leq a$ pues $a \wedge a = a$. Se sigue que si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \wedge b = a$ y $b \wedge c = b$ entonces $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$ de lo que se tiene que $a \leq c$. Ahora supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces se tiene que $a \wedge b = a$ y $b \wedge a = b$ entonces $a = a \wedge b = b \wedge a = b$ por lo tanto $a = b$. Todo lo anterior demuestra que $\leq$ es un orden parcial.

Ahora consideramos $a, b \in X$ y definimos $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ y $\sup\{a, b\} = a \vee b$. Demostremos que se obtiene una buena definición. Notemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ esto pues $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$, de manera análoga para $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$. Sea $c \in X$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$ entonces notemos que

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$$

por lo tanto $c \leq a \wedge b$, es decir $a \wedge b$ es ínfimo de $\{a, b\}$. De manera análoga para mostrar el supremo. $\square$

Siguiendo el aspecto algebraico, dados L, M retículas, una función $\varphi : L \rightarrow M$ es llamada morfismo de retículas si preserva ínfimos y supremos, esto es,

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$$

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$$

Para cada $a, b \in L$. Es llamada isomorfismo de retículas si tiene inversa de retículas.

A continuación introduciremos el concepto de retícula distributiva, la cual nos servirá como antesala a la introducción de marcos.

Definición 1.1.14. Sea X una retícula, decimos que X es una retícula distributiva si y solo si para todo $a, b, c \in X$ se cumple

$$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Además, $(X, \leq)$ es una retícula modular si para todo $a, b, c \in X$ se cumple que:

$$\text{si } a \leq c \text{ entonces } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Lema 1.1.15. Toda retícula distributiva es modular.

Demostración. Sea $(X, \leq)$ una retícula distributiva y $a, b, c \in X$ tal que $a \leq c$, entonces tenemos que

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$$

$\square$

Proposición 1.1.16. Una retícula L es distributiva si y solo si se cumple la siguiente igualdad

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Demostración. Si L es distributiva entonces tenemos

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) = \\ &= a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) = (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) = \\ &= a \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

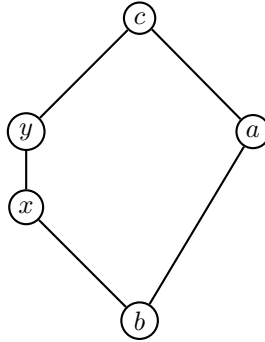
Por otro lado, si asumimos la condición tenemos

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= (a \wedge (a \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c)) = \\ &= a \vee ((b \wedge a) \vee (b \wedge c)) = (a \vee (a \wedge b)) \vee (b \wedge c) = \\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

□

Introducimos las siguientes dos retículas para dar caracterizaciones de retículas modulares y distributivas.

Primeramente, tenemos la retícula



Afirmamos que no es modular. En efecto, basta considerar

$$x \vee (a \wedge y) = x \vee b = x < y = c \wedge y = (c \vee a) \wedge y$$

Esto motiva el siguiente resultado.

Proposición 1.1.17. *Una retícula L es modular si y solo si no contiene una subretícula isomorfa a la retícula C_5*

Demostración. Supongamos que L es modular. Entonces, toda subretícula de L es también modular. Dado que C_5 no es modular (como se muestra en el ejemplo anterior), L no puede contener una subretícula isomorfa a C_5 .

Por otro lado, supongamos que L no es modular. Entonces, existen $u, v, w \in L$ tales que $u \leq w$ pero

$$u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w.$$

Definamos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} b &= v \wedge w, \\ x &= u \vee (v \wedge w), \\ a &= v, \\ y &= (u \vee v) \wedge w, \\ c &= u \vee v. \end{aligned}$$

Afirmamos que el conjunto $\{b, x, a, y, c\}$ forma una subretícula de L isomorfa a C_5 .

Veamos las siguientes relaciones de orden

- $b \leq a$ porque $b = v \wedge w \leq v = a$.
- $b \leq x$ porque $v \wedge w \leq x$.
- $a \leq c$ porque $v \leq u \vee v = c$.
- $x \leq y$ porque $u \leq w$ y $v \wedge w \leq w$, luego $x = u \vee (v \wedge w) \leq w$, y también $x \leq u \vee v$, por lo que $x \leq (u \vee v) \wedge w = y$. Por hipótesis, $x < y$.
- $y \leq c$ porque $y = (u \vee v) \wedge w \leq u \vee v = c$.
- $b \leq y$ porque $b = v \wedge w \leq (u \vee v) \wedge w = y$.

Ahora veamos lo siguiente.

- a y x son incomparables.
 - Si $a \leq x$, entonces $v \leq u \vee (v \wedge w)$. Como $u \leq w$, se sigue que $v \leq w$, luego $v \wedge w = v$. Entonces $x = u \vee v$. Pero $y = (u \vee v) \wedge w = u \vee v$ (pues $u \vee v \leq w$), por lo que $x = y$, contradicción.
 - Si $x \leq a$, entonces $u \vee (v \wedge w) \leq v$. Luego $u \leq v$ y $v \wedge w \leq v$. Como $u \leq w$, se tiene $u \leq v \wedge w$, luego $x = v \wedge w$. Además, $y = (u \vee v) \wedge w = v \wedge w$ (pues $u \vee v = v$), por lo que $x = y$, contradicción.
- a y y son incomparables.

- Si $a \leq y$, entonces $v \leq (u \vee v) \wedge w$, luego $v \leq w$, por lo que $v \wedge w = v$. Entonces $x = u \vee v$. Y $y = (u \vee v) \wedge w = u \vee v$, así que $x = y$, contradicción.
- Si $y \leq a$, entonces $(u \vee v) \wedge w \leq v$. Luego $y \leq v \wedge w$ (pues $y \leq w$). Pero $v \wedge w \leq x \leq y$, por lo que $y \leq x$, contradiciendo $x < y$.

Ahora calculando ínfimos y supremos.

- $a \wedge x = v \wedge (u \vee (v \wedge w)) = v \wedge w = b$.
 - Dado que $u \leq w$ y $v \wedge w \leq w$, se tiene $u \vee (v \wedge w) \leq w$, luego $v \wedge (u \vee (v \wedge w)) \leq v \wedge w$.
 - Además, $v \wedge w \leq v$ y $v \wedge w \leq u \vee (v \wedge w)$, luego $v \wedge w \leq v \wedge (u \vee (v \wedge w))$.
 - Por tanto, igualdad.
- $a \vee x = v \vee (u \vee (v \wedge w)) = u \vee v = c$ (pues $v \wedge w \leq v$).
- $a \wedge y = v \wedge ((u \vee v) \wedge w) = (v \wedge (u \vee v)) \wedge w = v \wedge w = b$ (pues $v \leq u \vee v$).
- $a \vee y = v \vee ((u \vee v) \wedge w) = u \vee v = c$.
 - Note que $u \leq (u \vee v) \wedge w$ (ya que $u \leq w$ y $u \leq u \vee v$), luego $u \vee v \leq v \vee ((u \vee v) \wedge w)$.
 - Además, $((u \vee v) \wedge w) \leq u \vee v$, luego $v \vee ((u \vee v) \wedge w) \leq v \vee (u \vee v) = u \vee v$.
 - Por tanto, igualdad.
- $x \wedge y = x$ (pues $x \leq y$).
- $x \vee y = y$ (pues $x \leq y$).

Estas relaciones muestran que la subretícula generada por $\{b, x, a, y, c\}$ es isomorfa a C_5 . Por lo tanto, si L no es modular, contiene una subretícula isomorfa a C_5 . $\square$

Lema 1.1.18. *Una retícula modular es distributiva si y solo si se satisface la siguiente igualdad*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

Demostración. Si L es distributiva tenemos

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee (b \wedge (a \vee c))) \wedge (b \vee c) = \\ (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c)) = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Por otro lado, tenemos

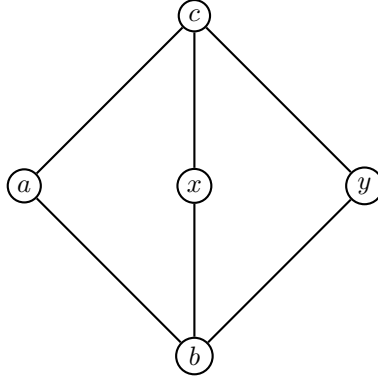
$$(a \vee b) \wedge c = ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \wedge c = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge c$$

Pero por hipótesis L es modular y además $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c$ entonces

$$((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Por lo tanto L es distributiva. $\square$

Para dar una caracterización de las retículas distributivas análoga a las retículas modulares introducimos la siguiente retícula



la cual no es distributiva pues notamos lo siguiente.

$$(a \wedge x) \vee (a \wedge y) = b < a \wedge c = a \wedge (x \vee y)$$

Entonces obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.19. *Una retícula L es distributiva si y solo si no contiene una subretícula isomorfa a C_5 o D_3*

Demostración. Supongamos que L es distributiva. Entonces L es modular, por lo que no puede contener una subretícula isomorfa a C_5 , ya que C_5 no es modular. Además, si L contuviera una subretícula isomorfa a M_3 , entonces para los elementos de M_3 la propiedad distributiva fallaría, lo que contradice la hipótesis. Así, L no contiene M_3 .

Supongamos que L no es distributiva. Consideramos dos casos:

1. Si L no es modular, entonces por el teorema de caracterización de retículas modulares, L contiene una subretícula isomorfa a C_5 .
2. Si L es modular pero no distributiva, entonces existen elementos $a, b, c \in L$ tales que

$$x = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < y = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Definimos

$$u = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c), \quad v = (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c), \quad w = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b).$$

Por modularidad, estas expresiones se simplifican a

$$u = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c)), \quad v = (a \wedge c) \vee (b \wedge (a \vee c)), \quad w = (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b)).$$

Se verifica que

$$u \wedge v = u \wedge w = v \wedge w = x, \quad y \quad u \vee v = u \vee w = v \vee w = y.$$

Además, u, v, w son incomparables. Por ejemplo, si $u \leq v$, entonces $u \wedge v = u = x$, lo que implica $u = x$, pero luego $u \leq v \leq y$ y $x < y$, una contradicción. Similarmente para otras comparaciones.

Por tanto, $\{x, u, v, w, y\}$ forma una subretícula isomorfa a M_3 .

En ambos casos, si L no es distributiva, contiene una subretícula isomorfa a C_5 o a M_3 . $\square$

Concluimos con el siguiente resultado

Proposición 1.1.20. *Una retícula L es distributiva si y solo si cada par de ecuaciones de la forma*

$$a \wedge x = b$$

$$a \vee x = c$$

tiene a lo sumo una solución.

Demostración. Si L es distributiva y

$$a \wedge x = b \quad a \vee x = c$$

$$a \wedge y = b \quad a \vee y = c$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) = \\ (x \wedge a) \vee (x \wedge y) &= (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = \\ y \wedge (a \vee x) &= y \wedge (a \vee y) = y \end{aligned}$$

Por otro lado, si L no es distributiva entonces las subretículas C_5 o D_3 dan como soluciones a x, y a las ecuaciones previas. $\square$

1.2. Filtros e ideales

Introducimos a continuación la noción de ideal y filtro en retículas distributivas.

Definición 1.2.1. Sea L una retícula distributiva e I subconjunto de L . Decimos que I es un ideal de L si y solo si

- 1) $0 \in I$.
- 2) Si tenemos que $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$.
- 3) Si $a \leq b$ y $b \in I$, entonces $a \in I$.

Por otro lado, un filtro en L es un subconjunto F de L si y solo si

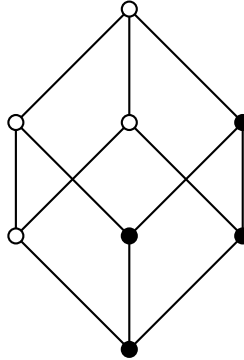
- 1) $1 \in F$.
- 2) Si tenemos que $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$.
- 3) Si $a \leq b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.

Un ideal (respectivamente un filtro) es propio si no es la retícula L completamente. Un ideal es primo (respectivamente un filtro) si $a \wedge b \in I$ implica que $a \in I$ o $b \in I$ (respectivamente, $a \vee b \in F$). Además, un ideal es máximo (respectivamente un filtro) si no existe un ideal propio que lo contenga a él.

Veamos un ejemplo de filtro

Ejemplo 1.2.2. Siguiendo a Salicrup [SRP93]. Sea $x \in X$, decimos que una vecindad de x en (X, τ) es un subconjunto $N \subseteq X$ para el cual existe un $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq N$. Al conjunto de vecindades abiertas de x se denotará por $\mathcal{U}(x)$. Es obvio que $U \in \tau$ si y solo si $U \in \mathcal{U}(x)$ para todo $x \in U$. En 2.1.7 demostraremos que es filtro.

Ejemplo 1.2.3. En la siguiente retícula, los nodos distinguidos son un ideal



Ejemplo 1.2.4. Sean L y M dos retículas acotadas y $f : L \rightarrow M$ un morfismo de retículas, entonces $f^{-1}(0)$ es ideal y $f^{-1}(1)$ es filtro en L .

Teorema 1.2.5. Sean I y F un ideal y un filtro propio respectivamente de una retícula distributiva L . Si $I \cap F = \emptyset$, entonces existe $\overline{F}$ tal que $\overline{F}$ es filtro primo y máximo con la propiedad de que $I \cap \overline{F} = \emptyset$.

Demostración. Haremos uso del lema de Zorn. Consideremos

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{F}L : I \cap F = \emptyset\}$$

tal que para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{F}$ es filtro disjunto de I .

En efecto

- $1 \in \bigcup \mathcal{F}$ pues en cada $F \in \mathcal{F}$, $1 \in F$.
- Sean $a, b \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F_1$, $b \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$ entonces $a \in F_2$, luego $a \wedge b \in F_2 \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, así $a \wedge b \in \bigcup \mathcal{F}$. Si $F_2 \subseteq F_1$, el razonamiento es similar.
- Sean $a, b \in L$ tal que $a \leq b$ y $a \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F$, luego $b \in F$ por lo tanto $b \in \bigcup \mathcal{F}$.

Si $\bigcup \mathcal{F}$ no fuese disjunto de I entonces existe $a \in \bigcup \mathcal{F}$, $a \in I$, luego existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F$, pero esto implica que $F \cap I \neq \emptyset$ lo que es una contradicción, por lo tanto $\bigcup \mathcal{F}$ es disjunto de I .

Luego por el lema de Zorn existe un filtro máximo $\overline{F}$ que satisface la primera condición. Veamos qué $\overline{F}$ es primo.

Si $a \notin \overline{F}$, $b \notin \overline{F}$ pero $a \vee b \in \overline{F}$, definimos

$$G = \{x : x \vee b \in \overline{F}\}$$

Veamos qué G es filtro

- $1 \in G$ pues $1 \vee b = 1 \in \overline{F}$
- si $x, y \in G$, entonces $(x \wedge y) \vee b = (x \vee b) \wedge (y \vee b) \in \overline{F}$, entonces $x \wedge y \in G$
- si $x \leq z$, $x \in G$ entonces $x \vee b \leq z \vee b$, $x \vee b \in \overline{F}$, así $z \vee b \in \overline{F}$ y $z \in G$

Así G es filtro y dado que $\overline{F} \subseteq G$ y $a \in G$ pero $a \notin \overline{F}$ entonces es más grande que $\overline{F}$ y no puede ser disjunto de I . Escogemos entonces $c_1 \in G \cap I$ y definimos

$$H = \{x : x \vee c_1 \in \overline{F}\}$$

Por el razonamiento anterior, H es filtro y más grande que $\overline{F}$ entonces tiene algún $c_2 \in I$ lo que es una contradicción pues $c_1 \vee c_2 \in I \cap \overline{F}$. Por lo tanto $a \in \overline{F}$ o $b \in \overline{F}$, entonces $\overline{F}$ es filtro primo. $\square$

Teorema 1.2.6 (Birkhoff). *Sean I y F un ideal y un filtro propio respectivamente de una retícula distributiva L . Si $I \cap F = \emptyset$, entonces existen $\overline{I}$, $\overline{F}$ en L tales que $I \subseteq \overline{I}$, $F \subseteq \overline{F}$ tal que $\overline{F} \cap \overline{I} = \emptyset$.*

Demostración. Por el teorema anterior tomamos $\overline{F}$ y I y aplicamos el lema dualmente. De esta forma obtenemos $\overline{I}$ primo tal que $\overline{I} \cap \overline{F} = \emptyset$ $\square$

Corolario 1.2.6.1. *Sea L una retícula distributiva y $a, b \in L$, si $a \not\leq b$ entonces existe un filtro primo $\overline{F}$ tal que $a \in \overline{F}$ pero $b \notin \overline{F}$.*

1.3. Conexiones de Galois

En la teoría del orden, las funciones adjuntas o conexiones de Galois, juegan un papel fundamental, pues estas establecen una correspondencia específica entre dos conjuntos parcialmente ordenados. Esta es una abstracción de la correspondencia entre subgrupos de Galois y sub-campos, resultado de la teoría de Galois [DP02].

Aunque si bien, recordemos que una conexión de Galois es una relación más débil que un isomorfismo entre los conjuntos parcialmente ordenados involucrados. Pese a ello, cada conexión de Galois induce un isomorfismo entre ciertos subconjuntos parcialmente ordenados de los involucrados.

Definición 1.3.1. *Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ dos conjuntos parcialmente ordenados y $\varphi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow X$ funciones monótonas. Ellas son una conexión de Galois o φ es adjunta izquierda de ψ o ψ es adjunta derecha de φ si para todo $x \in X$, $y \in Y$ se cumple*

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{array} Y$$

$$\varphi(x) \leq y \iff x \leq \psi(y)$$

A continuación damos el ejemplo clasico de esta teoría.

Ejemplo 1.3.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre conjuntos. Para cualquier subconjunto $M \subseteq X$ consideramos $F(M) := \{f(m) : m \in M\}$ llamada la imagen directa y para cualquier subconjunto $N \subseteq Y$ consideramos su preimagen $G(N) = f^{-1}(N) = \{x \in X : f(x) \in N\}$, entonces F y G forman una conexión de Galois.*

Ahora mostremos el ejemplo que inspira a esta teoría.

Ejemplo 1.3.3. Sea F un campo, E/F una extensión de Galois finita con grupo de Galois $G = \text{Gal}(E/F)$ y consideramos X al conjunto de subgrupos de G ordenados por contención y Y al conjunto de extensiones de F contenidas en E con el orden de contención, definimos $\varphi : X \rightarrow Y$, como $\varphi(H) = E^H$ y $\psi : Y \rightarrow X$ donde $\psi(M) = \text{Gal}(E/M)$. En este caso la relación es

$$H \supseteq \text{Gal}(E/M) \iff E^H \subseteq M$$

Este es el ejemplo de una conexión de Galois antitona [Mil03].

De la definición proviene el siguiente resultado.

Lema 1.3.4. Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ dos conjuntos parcialmente ordenados, $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow X$ dos funciones monótonas, entonces ellas son conexión de Galois si y solo si para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumple que

$$\varphi(\psi(y)) \leq y \text{ y } x \leq \psi(\varphi(x)) \quad (*)$$

Demostración. Dado $y \in Y$, tenemos que $\psi(y) \leq \psi(y)$, inmediatamente por adjunción tenemos que $\varphi(\psi(y)) \leq y$. Con un razonamiento análogo obtenemos que $x \leq \psi(\varphi(x))$.

Por otro lado, asumiendo $(*)$ y $\varphi(x) \leq y$ entonces $x \leq \psi(\varphi(x)) \leq \psi(y)$, luego $x \leq \psi(y)$. Por otro lado, ahora asumiendo $x \leq \psi(y)$ entonces $\varphi(x) \leq \varphi(\psi(y)) \leq y$, de esta forma $\varphi(x) \leq y$, por lo tanto φ es adjunta de ψ . $\square$

Corolario 1.3.4.1. Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ dos conjuntos parcialmente ordenados, $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow X$ dos funciones monótonas que sean conexión de Galois, entonces $\varphi\psi\varphi = \varphi$ y $\psi\varphi\psi = \psi$.

Lema 1.3.5. Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ dos retículas completas, $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow X$ dos funciones monótonas que sean conexión de Galois, entonces φ preserva supremos y ψ preserva ínfimos.

Demostración. Sea $M \subseteq X$ y denotamos por s al supremo de M . Dado $m \in M$, tenemos que $m \leq s$, luego $\varphi(m) \leq \varphi(s)$, esto es, $\varphi(s)$ es cota superior de la imagen de M . Ahora sea $y \in Y$ tal que $\varphi(m) \leq y$, entonces $m \leq \psi(y)$, es decir, es cota superior de M , de lo cual sigue que $s \leq \psi(y)$, por lo tanto $\varphi(s) \leq y$, con lo que concluimos que φ preserva supremos.

Con un razonamiento similar se tiene que ψ preserva ínfimos. $\square$

Teorema 1.3.6. *Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$ dos retículas completas, $\varphi : X \rightarrow Y$ función monótona, φ preserva supremos si y solo si es adjunta izquierda de alguna $\psi : Y \rightarrow X$ monótona.*

Demostración. Por el resultado anterior basta mostrar que si φ preserva supremos entonces existe alguna función monótona adjunta a φ .

Definimos $\psi(y) := \bigvee \{x : \varphi(x) \leq y\}$. Supongamos que $\varphi(x) \leq y$, entonces $x \in \{x : \varphi(x) \leq y\}$, así $x \leq \psi(y)$, por otro lado si $x \leq \psi(y)$, tenemos que $x \leq \bigvee \{z \in X : \varphi(z) \leq y\}$, como φ preserva supremos obtenemos $\varphi(\psi(y)) = \bigvee \{\varphi(z) : \varphi(z) \leq y\}$ y como y es cota superior de $\{\varphi(z) : \varphi(z) \leq y\}$, entonces $\varphi(\psi(y)) \leq y$. $\square$

1.4. Álgebras de Heyting

Las álgebras de Heyting fueron estudiadas por Arend Heyting a inicios del siglo pasado. Estas son estructuras matemáticas que generalizan las álgebras de Boole. Son definidas como retículas con una operación adicional, que será estudiada en esta sección, y de primera instancia funge como modelo de la lógica intuicionista.

Posteriormente, a inicios de la década de los setenta [Isb72], John Isbell toma este objeto matemático para introducir la topología sin puntos, es por ello que las álgebras de Heyting juegan un rol central en el estudio de esta rama de las matemáticas.

Definición 1.4.1. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado con elemento 0 y con ínfimos finitos, si existe el máximo del conjunto $\{b \in L : a \wedge b = 0\}$ se denotará como a^* . Llamaremos a a^* , cuando exista, el pseudocomplemento de a .*

Demos un ejemplo de pseudocomplementos.

Ejemplo 1.4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y consideramos $(\tau, \subseteq)$ como retícula. Para $V \in \tau$ caracterizamos su pseudocomplemento como $V^* = X \setminus \overline{V}$. En efecto basta probar que $X \setminus \overline{V}$ es el supremo de la familia $\{U \in \tau : U \cap V = \emptyset\}$.*

Sea $U \in \tau$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Si existe $z \in X$ tal que $z \in U \cap \overline{V}$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap \overline{V} = \emptyset$, entonces $U \subseteq X \setminus \overline{V}$. Además, notamos que $X \setminus \overline{V} \in \tau$ y que $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$, concluimos que $V^ = X \setminus \overline{V}$.*

Lema 1.4.3. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado con 0 y con ínfimos finitos, entonces a^* cumple que $b \wedge a = 0$ si y solo si $b \leq a^*$.*

Demostración. En efecto, si $b \wedge a = 0$, entonces $b \in \{x \in L : a \wedge x = 0\}$, entonces $b \leq a^*$ pues a^* es el máximo del conjunto antes mencionado.

En otra dirección, como $b \leq a^*$ entonces $b \wedge a \leq a^* \wedge a = 0$, por lo tanto $b \wedge a = 0$. $\square$

Lema 1.4.4. *Sea L un conjunto parcialmente ordenado con 0 y con ínfimos finitos, donde para todo $a, b \in L$ existe a^*, b^*, a^{**}, b^{**} y a^{***} , entonces se cumple lo siguiente*

1. $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$.
2. $a \leq b$ entonces $a^{**} \leq b^{**}$
3. $a \leq a^{**}$.
4. $a^{***} = a^*$.
5. $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$.

Demostración.

1. Si $a \leq b$ consideramos $A = \{x \in L : a \wedge x = 0\}$ y $B = \{y \in L : b \wedge y = 0\}$, notamos que $B \subseteq A$, luego calculando máximos, $\text{máx } B \leq \text{máx } A$, esto es $b^* \leq a^*$.
2. Se sigue de un razonamiento análogo al anterior.
3. Consideramos $\{x \in L : x \wedge a^* = 0\}$ y notamos que a pertenece a dicho conjunto, luego es menor que a^{**} .
4. Por los incisos anteriores tenemos $a^* \leq (a^*)^{**}$ y $a^* \geq (a^{**})^*$.
5. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, por monotonía tenemos que $(a \wedge b)^{**} \leq a^{**}$ y $(a \wedge b)^{**} \leq b^{**}$ y de esta forma

$$(a \wedge b)^{**} \leq a^{**} \wedge b^{**}.$$

Por otro lado por 3. Tenemos que

$$a \wedge b = 0 \iff a^{**} \wedge b = 0 \quad (*)$$

Dado que $a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**}$ tenemos que $a \wedge b \wedge (a \wedge b)^* = 0$ y por $(*)$ obtenemos que $a^{**} \wedge b^{**} \wedge (a \wedge b)^* = 0$, entonces $a^{**} \wedge b^{**} \leq (a \wedge b)^{**}$.

□

Teorema 1.4.5 (Primera ley de Morgan). *Si L es una retícula distributiva y $a, b \in L$ tienen pseudocomplementos, entonces $a \vee b$ tiene pseudocomplemento. Además se tiene la igualdad*

$$(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$$

Demostración. Como L es distributiva, tenemos $(a \vee b) \wedge a^* \wedge b^* = 0$. Si existiere algún $c \in L$ tal que $(a \vee b) \wedge c = 0$ tenemos por distributividad $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = 0$, luego $c \leq a^*, c \leq b^*$ así $c \leq a^* \wedge b^*$.

□

Definición 1.4.6. Sea L una retícula. Para $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

En general, en una retícula el complemento no tiene por que ser único, sin embargo, tenemos el siguiente resultado que garantiza la unicidad.

Proposición 1.4.7. Sea L una retícula distributiva, entonces todo complemento es pseudocomplemento y único.

Demostración. Dado $a \in L$ y b su complemento. Si existe $x \in L$ tal que $x \wedge a = 0$, por distributividad tenemos $x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge b) \vee (x \wedge a) = x \wedge b$. Por lo tanto $x \leq b$, es decir b es pseudocomplemento.

La unicidad se sigue de 1.1.20. □

Otra propiedad del pseudocomplemento es la siguiente:

Lema 1.4.8. Si L es retícula distributiva, $a \in L$ y a^* tiene pseudocomplemento, entonces $(a \vee a^*)^* = 0$.

Demostración. Si $b \wedge (a \vee a^*) = 0$ para algún $b \in L$, tenemos por distributividad tenemos

$$0 = b \wedge (a \vee a^*) = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^*)$$

así $b \wedge a = 0$, y $b \wedge a^* = 0$ esto es $b \leq a^*$, $b \leq a^{**}$ y entonces $b \leq a^* \wedge a^{**} = 0$ □

Definición 1.4.9. Sea L una $\wedge$ -semirretícula con 0 , entonces decimos que es una semirretícula de Heyting si existe una operación $\rightarrow$ tal que para todo $a, b, c \in L$ se cumple

$$c \leq a \rightarrow b \iff c \wedge a \leq b$$

Si L es retícula, entonces diremos que L es un álgebra de Heyting.

Demos un ejemplo de álgebra de Heyting.

Ejemplo 1.4.10. Retomando a 1.4.2 afirmamos que $(\tau, \subseteq)$ es álgebra de Heyting con la operación para $U, V \in \tau$, $U \rightarrow V = \text{int}(U^c \cup V)$.

En efecto, asumimos $W \subseteq U \rightarrow V$. Por definición, $W \subseteq \text{int}(U^c \cup V)$. Dado que el interior de un conjunto está contenido en el conjunto mismo, tenemos $W \subseteq U^c \cup V$. Intersecando ambos lados con U se obtiene $W \cap U \subseteq (U^c \cup V) \cap U$. Aplicando la distributividad de conjuntos, el lado derecho se simplifica a $(U^c \cap U) \cup (V \cap U) = \emptyset \cup (V \cap U) = V \cap U$. Por lo tanto, $W \cap U \subseteq V \cap U$, lo que trivialmente implica $W \cap U \subseteq V$.

Ahora asumimos $W \cap U \subseteq V$. Queremos probar que $W \subseteq U \rightarrow V = \text{int}(U^c \cup V)$. Primero, mostramos la contención conjuntista $W \subseteq U^c \cup V$. Sea $x \in W$. Si $x \in U$, entonces $x \in W \cap U$, y por hipótesis, $x \in V$, lo que implica $x \in U^c \cup V$. Si $x \notin U$, entonces $x \in U^c$, lo que también implica $x \in U^c \cup V$. Por lo tanto, $W \subseteq U^c \cup V$. Dado que W es un conjunto abierto (por ser $W \in \tau$) contenido en $U^c \cup V$, y como $U \rightarrow V = \text{int}(U^c \cup V)$ es el mayor conjunto abierto contenido en $U^c \cup V$, se sigue necesariamente que $W \subseteq U \rightarrow V$. Esto es $(\tau, \subseteq)$ es un álgebra de Heyting.

Lema 1.4.11. Si L es un álgebra de Heyting entonces $a \rightarrow 0$ es el pseudocomplemento de a .

Demostración. Basta considerar en la definición $b = 0$ en $c \leq a \rightarrow b \iff c \wedge a \leq b$ para obtener $c \leq a \rightarrow 0 \iff c \wedge a \leq 0$. $\square$

Es inmediato de la definición de conexión de Galois el siguiente resultado.

Lema 1.4.12. La operación $a \rightarrow _$ es adjunta derecha de la operación $a \wedge _$.

Lema 1.4.13. Si L es una $\wedge$ -semirretícula de Heyting, entonces solo tiene una operación que la hace de Heyting.

Demostración. Como $a \rightarrow _$ es adjunta derecha de $a \wedge _$ entonces tiene que ser única. $\square$

Teorema 1.4.14. Sea L una retícula completa. Entonces L admite una operación para ser un álgebra de Heyting si y solo si se cumple $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge a = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge a)$ para todo $\{a_i : i \in I\} \subseteq L$ y $a \in L$.

Demostración. Se sigue del hecho que $b \wedge _$ tiene adjunta derecha $b \rightarrow _$ si y solo si $b \wedge _$ preserva supremos arbitrarios por 1.3.6. $\square$

Teorema 1.4.15 (Primera ley de Morgan). Si L es un álgebra de Heyting, entonces se cumple $(\bigvee_{i \in I} a_i)^* = \bigwedge_{i \in I} a_i^*$ cuando existen $\bigvee_{i \in I} a_i$ y $(\bigvee_{i \in I} a_i)^*$.

Demostración. En efecto $c \leq (\bigvee_{i \in I} a_i)^* \iff c \wedge (\bigvee_{i \in I} a_i) = 0 \iff \bigvee_{i \in I} (c \wedge a_i) = 0 \iff c \wedge a_i = 0$ para cada $i \in I \iff c \leq a_i^*$ para cada $i \in I \iff c \leq \bigwedge_{i \in I} a_i^*$. $\square$

Tenemos la siguiente caracterización de la operación de Heyting.

Lema 1.4.16. Sea L una retícula. La operación binaria $\rightarrow$ hace a L álgebra de Heyting si y solo si para todo $a, b, c \in L$ se cumplen:

1. $a \rightarrow a = 1$.
2. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.
3. $b \wedge (a \rightarrow b) = b$.
4. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

Demostración. Si L es álgebra de Heyting entonces

1. $a \leq a \iff 1 \wedge a \leq a \iff 1 \leq a \rightarrow a$ por lo tanto $a \rightarrow a = 1$.
2. Notemos que $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b \iff a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ entonces inmediatamente tenemos que $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$. Por otro lado, tenemos que $(a \wedge b) \wedge a \leq b \iff a \wedge b \leq a \rightarrow b$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge (a \rightarrow b)$.
3. Es claro que $b \wedge (a \rightarrow b) \leq b$. Por otro lado $b \leq a \rightarrow b$, entonces $b \leq b \wedge (a \rightarrow b)$.
- 4.

Por otro lado, asumiendo las ecuaciones y si $c \leq a \rightarrow b$ tenemos

$$c \wedge a \leq a \wedge a \rightarrow b = a \wedge b \leq b$$

además, si tenemos que $c \wedge a \leq b$ tenemos

$$c = c \wedge (a \rightarrow c) \leq (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow (a \wedge c) \leq a \rightarrow b$$

por lo tanto, $\rightarrow$ es de Heyting. □

Veamos algunas propiedades de la operación de Heyting que nos serán útiles posteriormente

Proposición 1.4.17. *Sea L un álgebra de Heyting, $a, b, c \in L$ y $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq L$, entonces se cumple:*

1. $a \rightarrow \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \rightarrow b_i)$,
2. $b \leq c$ entonces $c \rightarrow a \leq b \rightarrow a$,
3. $a \leq b \rightarrow c$ si y solo si $b \leq a \rightarrow c$
4. $(\bigvee_{i \in I} b_i) \rightarrow a = \bigwedge_{i \in I} (b_i \rightarrow a)$.

Demostración.

1. Como $_ \rightarrow _$ es adjunta derecha de $_ \wedge _$ entonces por 1.3.6 preserva ínfimos arbitrarios.
2. Sea $x \in L$ tal que $x \leq c \rightarrow a$ entonces $x \wedge c \leq a$ y como $b \leq c$, entonces $x \wedge b \leq a$, luego $x \leq b \rightarrow a$.
3. Se sigue de la siguiente cadena de implicaciones

$$a \leq b \rightarrow c \iff a \wedge b \leq c \iff b \wedge a \leq c \iff b \leq a \rightarrow c.$$

4. Sea $x \in L$ tal que $x \leq (\bigvee_{i \in I} b_i) \rightarrow a$, entonces tenemos

$$x \leq \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \rightarrow a \iff x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \leq a \iff \bigvee_{i \in I} (x \wedge b_i) \leq a,$$

entonces para cada $i \in I$ $x \wedge b_i \leq a$, luego tenemos para cada $i \in I$ $x \leq b_i \rightarrow a$ y de esta forma $x \leq \bigwedge_{i \in I} (b_i \rightarrow a)$.

Por otro lado si $x \leq \bigwedge_{i \in I} (b_i \rightarrow a)$ entonces para cada $i \in I$ $x \leq b_i \rightarrow a$ luego para cada $i \in I$ $x \wedge b_i \leq a$, en particular tenemos

$$\bigvee_{i \in I} (x \wedge b_i) \leq a \iff x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \leq a \iff x \leq \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \rightarrow a.$$

□

Proposición 1.4.18. *Sea L un álgebra de Heyting, entonces se cumple:*

1. Existe $1 \in L$ y para cada $a \in L$, $1 \rightarrow a = a$,
2. $a \leq b$ si y solo si $a \rightarrow b = 1$,
3. $a \leq b \rightarrow a$,
4. $a \rightarrow b = a \rightarrow (a \wedge b)$,
5. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$,
6. $a \wedge b = a \wedge c$ si y solo si $a \rightarrow b = a \rightarrow c$,
7. $(a \wedge b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$ y $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$,
8. $a = (a \vee b) \wedge (b \rightarrow a)$,
9. $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$,

$$10. ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow b = a \rightarrow b.$$

Demostración.

1. Sea $x \in L$ arbitrario y definimos $1 = x \rightarrow x$, entonces para cualquier $a \in L$, $a \wedge x \leq x$ si y solo si $a \leq x \rightarrow x = 1$. Ahora para cada $y \in L$,

$$y \leq a \iff y \wedge 1 \leq a \iff y \leq 1 \rightarrow a,$$

por lo tanto $a = 1 \rightarrow a$.

2. Ocupando la definición tenemos

$$a \leq b \iff a \wedge 1 \leq b \iff 1 \leq a \rightarrow b.$$

3. Notemos que

$$a \wedge b \leq a \iff a \leq b \rightarrow c.$$

4. Ocupando 1. de 1.4.17 tenemos

$$a \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b),$$

luego por 1. de esta proposición obtenemos

$$(a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) = 1 \wedge (a \rightarrow b) = a \rightarrow b.$$

5. Dado que tenemos $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b \iff (a \rightarrow b) \wedge a \leq b$. Aplicando $_ \wedge a$ a ambos lados obtenemos

$$(a \rightarrow b) \wedge a \leq b \wedge a.$$

Por otro lado, como $b \leq a \rightarrow b$, aplicando $_ \wedge a$ tenemos

$$b \wedge a \leq (a \rightarrow b) \wedge a.$$

6. Si $a \wedge b = a \wedge c$, entonces por 4. tenemos

$$a \rightarrow b = a \rightarrow (a \wedge b) = a \rightarrow (a \wedge c) = a \wedge c.$$

Para el recíproco, ocupamos 5. y obtenemos

$$a \wedge b = a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge (a \rightarrow c) = a \wedge c.$$

7. Notemos para la primera condición que

$$\begin{aligned} x \leq (a \wedge b) \rightarrow c &\iff x \wedge (a \wedge b) \leq c \iff \\ (x \wedge a) \wedge b \leq c &\iff x \wedge a \leq b \rightarrow c \iff x \leq a \rightarrow (b \rightarrow c). \end{aligned}$$

Para la segunda condición obtenemos

$$\begin{aligned} x \leq a \rightarrow (b \rightarrow c) &\iff x \wedge a \leq b \rightarrow c \iff (x \wedge a) \wedge b \leq c \\ (x \wedge b) \wedge a \leq c &\iff x \wedge b \leq a \rightarrow c \iff x \leq b \rightarrow (a \rightarrow c). \end{aligned}$$

8. Primeramente tenemos que $a \leq a \vee b$, $a \leq b \rightarrow a$, por lo tanto $a \leq (a \vee b) \wedge (b \rightarrow a)$. Ahora ocupando distributividad

$$(a \vee b) \wedge (b \rightarrow a) = (a \wedge (b \rightarrow a)) \vee (b \wedge (b \rightarrow a)) \leq a \vee a = a.$$

9. Tenemos que

$$a \wedge b \leq b \iff a \wedge (a \rightarrow b) \leq b \iff a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b.$$

10. Por el inciso anterior, $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$, luego por antimonotonía $((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow b \leq a \rightarrow b$.

□

Recordemos que una retícula es llamada álgebra de Boole si es distributiva y con complementos. Este tipo de retículas es un claro ejemplo de álgebras de Heyting. En efecto, sea L un álgebra de Boole, entonces para $a, b \in L$ definimos la operación de Heyting como sigue

$$a \rightarrow b = a^* \vee b$$

donde a^* es el complemento de a .

Si $c \leq a \rightarrow b$, entonces $c \wedge a \leq (a^* \vee b) \wedge a = b \wedge a \leq b$, esto dado que L en particular es distributiva. Por otro lado si $c \wedge a \leq b$, entonces $c = c \wedge (a \vee a^*) = (c \wedge a) \vee (c \wedge a^*) \leq b \vee a^* = a \rightarrow b$, esto es, L es álgebra de Heyting.

Proposición 1.4.19. *Sea L un álgebra booleana entonces $a^{**} = a$ para cada $a \in L$. Además, existe un isomorfismo de álgebras booleanas entre L y L^{op} .*

Demostración. Como L es en particular distributiva, el complemento de a es a^* y el complemento de a^* es a^{**} , entonces notamos que

$$a \vee a^* = 1 = a^{**} \vee a^*$$

$$a \wedge a^* = 0 = a^{**} \wedge a^*$$

entonces por 1.1.20 $a = a^{**}$.

Ahora definimos $\varphi : L \rightarrow L^{op}$ tal que para cada $a \in L$, $\varphi(a) = a^*$.

Es de orden pues $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$ luego con el orden opuesto, $a^* \leq_{op} b^*$.

Veamos que preserva supremos: Sea $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, entonces

$$\varphi \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) = \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right)^* = \bigwedge_{i \in I} a_i^*$$

el cual es supremo de $\{a_i^*\}_{i \in I}$ en L^{op} .

Además, preserva ínfimos. En efecto

$$\varphi \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) = \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right)^* = \left(\bigwedge_{i \in I} a_i^{**} \right)^* = \left(\bigwedge_{i \in I} a_i^* \right)^{**}$$

Lo cual es igual a $\bigvee_{i \in I} a_i^*$, el cual es ínfimo de $\{a_i^*\}_{i \in I}$ en L^{op} . Por lo tanto φ preserva supremos e ínfimos.

Asimismo si $a \in L$, tenemos que $\varphi(a^*) = a^{**} = \varphi(a)^*$, por lo tanto preserva complementos.

Finalmente definimos $\varphi^{-1} : L \rightarrow L^{op}$ donde a cada $x \in L^{op}$ asociamos $\varphi^{-1}(x) = x^*$.

Notamos que para $a \in L$ tenemos $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(a) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = \varphi^{-1}(a^*) = a^{**} = a$. Análogamente para $a \in L^{op}$. Entonces concluimos que $L \cong L^{op}$.

□

Tenemos un recíproco

Proposición 1.4.20. *Un álgebra de Heyting L es booleana si y solo si $a^{**} = a$ para cada $a \in L$*

Demostración. Una dirección es evidente. Si L es de Boole entonces es de Heyting, luego $a^{**} = a$ para cada $a \in L$.

Ahora, si L es álgebra de Heyting, en particular es distributiva, además siempre existen pseudocomplementos. Resta ver que si para cada $a \in L$, $a^{**} = a$, entonces a^* es complemento, para lo cual, basta mostrar que $1 = a \vee a^*$.

Por el isomorfismo que existe entre L y L^{op} y $1 = \varphi(0) = \varphi(a \wedge a^*) = \varphi(a) \vee \varphi(a^*) = a^* \vee a^{**} = a \vee a^*$, es decir $1 = a \vee a^*$ $\square$

Inmediatamente obtenemos lo siguiente

Corolario 1.4.20.1. *Si L es álgebra booleana, $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, $\bigvee_{i \in I} a_i$, $\bigwedge_{i \in I} a_i \in L$ entonces*

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i \right)^* = \bigwedge_{i \in I} a_i^*$$

Capítulo 2

Topología sin puntos

2.1. Marcos y Locales

Recordemos que dado un conjunto X y τ una familia de subconjuntos de X , decimos que τ es una topología en X si

1. Para toda $\{U_i\}_{i \in J} \subset \tau$, $\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$.
2. Para toda $\{U_i\}_{i \in J} \subset \tau$ con J finito, $\bigcap_{i \in J} U_i \in \tau$

(X, τ) será llamado espacio topológico. Los elementos de X se llaman puntos y los elementos de τ son llamados los abiertos del espacio topológico (X, τ) . Por economía de notación, simplemente denotaremos a (X, τ) por X cuando la topología sea sobreentendida.

Convención 2.1.1. *Asumiremos que todos los espacios topológicos son T_0 , es decir que para cada $x, y \in X$ tales que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ entonces $x = y$, o en su forma clásica: si $x, y \in X$, tal que $x \neq y$, entonces existe un abierto U tal que $y \notin U \ni x$ o $x \notin U \ni y$.*

Una consecuencia de este axioma es el siguiente:

Proposición 2.1.2. *Sea Y un espacio topológico T_0 y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas tal que $f^{-1}[U] = g^{-1}[U]$ para cada U abierto en Y , entonces $f = g$.*

Demostración. Supongamos que, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, entonces, como Y es T_0 existe $U \subseteq Y$ abierto tal que, $f(x) \in U$ pero $g(x) \notin U$, como $x \in f^{-1}[U]$, entonces $x \in g^{-1}[U]$, luego $g(x) \in U$, de igual manera se llega a una contradicción, si existe $U \subseteq Y$ abierto tal que $g(x) \in U$ pero $f(x) \notin U$. Así que $f = g$. $\square$

A partir de esta noción podemos notar que la topología τ toma una estructura de retícula de una forma natural. A saber, el ínfimo finita es determinado por la intersección de conjuntos y el supremo por la unión de conjuntos, además el elemento 1 es determinado por X y el 0 por $\emptyset$. Denotamos a esta retícula de abiertos mediante $\Omega(X)$, pues posteriormente construiremos un funtor.

Notamos que en la retícula $\Omega(X)$, los siguientes elementos

$$X \setminus \overline{\{x\}}$$

con $x \in X$ y $\overline{\{x\}}$ denota la clausura topológica de $\{x\}$, tienen la siguiente propiedad: si dados $U, V \in \Omega(X)$ tales que $U \cap V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ entonces $U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ o $V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$. Los abiertos con esta propiedad serán llamados abiertos $\cap$ -irreducibles. Esto nos motiva a la siguiente definición.

Definición 2.1.3 (Espacios sobrios). *Un espacio topológico X es llamado sobrio si todos los $\cap$ -irreducibles U son de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ para $x \in X$.*

Por otro lado, la definición original la podemos encontrar en el libro *Éléments de Géométrie Algébrique* de Alexander Grothendieck [DG71], la cual fue formulada en el lenguaje de cerrados. Para esto, recordemos que un cerrado $C \subseteq X$ es llamado irreducible si para C_1, C_2 cerrados propios de X tales que $C_1 \cup C_2 = C$ entonces $C = C_1$ o $C_2 = C$. Entonces, decimos que un espacio topológico X es sobrio si cada cerrado irreducible es la clausura de un único punto.

Notemos que ambas definiciones son equivalentes. En efecto, sea X un espacio topológico sobrio, en términos de abiertos, y sea $C \subseteq X$ cerrado irreducible entonces afirmamos que $X \setminus C$ es $\wedge$ -irreducible.

Sean U_1, U_2 abiertos de X tales que $U_1 \cap U_2 \subseteq X \setminus C$, entonces notamos que

$$C \subseteq X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

pero como C es irreducible entonces $X \setminus U_1 = C$ o $X \setminus U_2 = C$, entonces $U_1 = X \setminus C$ o $U_2 = X \setminus C$, en particular, $U_1 \subseteq X \setminus C$ o $U_2 \subseteq X \setminus C$. Como X es sobrio, entonces existe $x \in X$ tal que $X \setminus C = X \setminus \overline{\{x\}}$, luego $C = \overline{\{x\}}$. La unicidad se sigue del hecho de que los espacios que consideramos son T_0 .

Por otro lado, si X es sobrio, en el sentido de Grothendieck, pero existe U abierto $\wedge$ -irreducible que no sea de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ para

algún $x \in X$, afirmamos que $X \setminus U$ es cerrado irreducible.

Sean C_1, C_2 cerrados irreducibles propios tales que $C_1 \cup C_2 = X \setminus U$ entonces tenemos

$$X \setminus (C_1 \cup C_2) = (X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2) = U.$$

En particular, $(X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2) \subseteq U$. Usando el hecho que U es $\wedge$ -irreducible tenemos que $X \setminus C_1 \subseteq U$ o $X \setminus C_2 \subseteq U$, es decir $X \setminus U \subseteq C_1$ o $X \setminus U \subseteq C_2$, pero como C_1 y C_2 son cerrados propios, entonces se verifica la igualdad igualdad.

Aplicando que X es sobrio en el sentido de Grothendieck, existe un único $x \in X$ tal que $\overline{\{x\}} = X \setminus U$, es decir $X \setminus \overline{\{x\}} = U$, una contradicción.

La sobriedad no es una propiedad extraña en topología, para notar esto, recordemos que un espacio topológico es Hausdorff si para cada par de puntos distintos existen vecindades disjuntas que contienen a cada punto, entonces tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.4. *Todo espacio topológico Hausdorff es sobrio.*

Demostración. Basta mostrar que los cerrados irreducibles son unipuntuales. Sea $C \subseteq X$ un cerrado irreducible y sean, $x, y \in C$ tales que $x \neq y$, como X es Hausdorff entonces existen abiertos $U, V \in \Omega(X)$ disjuntos, tales que $x \in U, y \in V$. Consideramos los cerrados propios $C \setminus U$ y $C \setminus V$ entonces tenemos

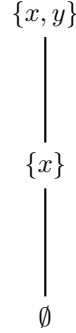
$$C = C \setminus \emptyset = C \setminus (U \cap V) = (C \setminus U) \cup (C \setminus V)$$

Lo cual es una contradicción.

□

Sin embargo existen espacios topologicos que no son Hausdorff pero que son sobrios, mencionemos dos ejemplos

Ejemplo 2.1.5 (Espacio de Sierpinski). *Sea $X = \{x, y\}$ con la siguiente topología $\tau = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$, notamos que X es sobrio.*



Ejemplo 2.1.6. Sea A un anillo conmutativo con 1. Definimos $\text{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \text{ es ideal primo}\}$. Definimos la topología de Zariski declarando sus cerrados como sigue: para cualquier ideal I de A definimos

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Notemos que

- para ideales I, J $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$.
- para una familia de ideales $\{I\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_{\lambda \in \Lambda}) = V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda})$
- $V(A) = \emptyset$, $V(0) = \text{Spec}(A)$.

Para $f \in A$, definimos $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(fA)$, donde fA es el ideal generado por f . Los conjuntos $D(f)$ definen una base de abiertos.

Entonces para cualquier anillo conmutativo con 1 A , $\text{Spec}(A)$ es un espacio sobrio [Liu02].

Retomando 1.2.2 demostremos que el conjunto de vecindades $\mathcal{U}(x)$ para $x \in X$ es filtro.

Proposición 2.1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ entonces

1. $\mathcal{U}(x)$ es distinto del vacío.
2. Si $M, N \in \mathcal{U}(x)$ entonces $M \cap N \in \mathcal{U}(x)$.
3. Si $N \in \mathcal{U}(x)$ y $N \subset M \subset X$ entonces $M \in \mathcal{U}(x)$.
4. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigcup_{i \in I} M_i \in \mathcal{U}(x)$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $M_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$.

Demostración. 1. Es claro.

2. Si $M, N \in \mathcal{U}(x)$ entonces existen $U, V \in \tau$ de manera que $x \in U \subseteq M, x \in V \subseteq N$ por lo tanto $U \cap V \in \tau$ y $x \in U \cap V \subseteq M \cap N$, luego $M \cap N \in \mathcal{U}(x)$.
3. Si $N \in \mathcal{U}(x)$ entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$ y como $N \subset M \subset X$ entonces $x \in U \subset M$, luego $M \in \mathcal{U}(x)$.
4. Si $\bigcup_{i \in I} M_i \in \mathcal{U}(x)$ entonces $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$ por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $x \in M_{i_0}$, entonces $M_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$.

□

Tenemos el siguiente resultado para los espacios topológicos T_0 .

Proposición 2.1.8. *Sea X un espacio topológico, $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Si X es T_0 entonces $\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y)$.*

Demostración. Como X es T_0 y $x \neq y$ entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Sin pérdida de generalidad, existe $z \in \overline{\{x\}}$ pero $z \notin \overline{\{y\}}$ entonces existe una vecindad abierta de z , U_z , $y \notin U_z$ pero $x \in U_z$, esto es $U_z \notin \mathcal{U}(y)$ pero $U_z \in \mathcal{U}(x)$, esto es $\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y)$. □

Ahora demos una caracterización de los espacios sobrios a través de los sistemas de vecindades de sus puntos.

Proposición 2.1.9. *Un espacio X es sobrio si y solo si los filtros $\mathcal{U}(x)$ son precisamente todos los filtros completamente primos en $\Omega(X)$.*

Demostración. Sea X sobrio y sea $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo en $\Omega(X)$. Entonces definimos

$$W = \bigcup \{U \in \Omega(X) : U \notin \mathcal{F}\}$$

y declaramos que es $\wedge$ -irreducible. En efecto, por ser completamente primo tenemos que $W \notin \mathcal{F}$, en particular $W \neq X$, si $V_1 \cap V_2 \subseteq W$ entonces $V_1 \subseteq W$ o $V_2 \subseteq W$ pues no puede suceder que ambos $V_i \in \mathcal{F}$ ya que si $V_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, 2$ entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{F}$ entonces $V_1 \cap V_2 \notin W$. Si $V_1 \subseteq W$ entonces $W = X \setminus \overline{\{x\}}$ para algún $x \in X$ y tenemos que

$$U \notin \mathcal{F} \iff U \subseteq W = X \setminus \overline{\{x\}} \iff x \notin U$$

y $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$.

Para el recíproco, si X no es sobrio entonces existe un $\wedge$ -irreducible abierto W que no es de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ para cualquier x . Sea

$$\mathcal{F} := \{U \in \Omega X : U \not\subseteq W\}$$

$\mathcal{F}$ es un filtro completamente primo pues si $U \cap V \subseteq W$ entonces tenemos que $U \subseteq W$ o $V \subseteq W$; si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subseteq V$ obviamente $V \in \mathcal{F}$ y si $\bigcup_{i \in J} U_i \not\subseteq W$ tenemos que $U_i \not\subseteq W$ para algún $i \in I$. Pero $\mathcal{F}$ no es de la forma $\mathcal{U}(x)$, de lo contrario tendríamos

$$U \not\subseteq V \iff x \in U \iff U \not\subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$$

$$\text{y } W = X \setminus \overline{\{x\}}.$$

□

Veremos posteriormente que si L es una retícula isomorfa a $\Omega(X)$ de algún espacio sobrio X , entonces X es homeomorfo a

$$(\{F : F \text{ es completamente primo en } L\}, \{\bar{a} : a \in L\})$$

donde $\bar{a} = \{F : a \in F\}$. Para ver que la colección $\{\bar{a} : a \in L\}$ es topología ver en... Así podemos decir que el espacio X puede ser reconstruido de la retícula L en un sentido meramente reticular.

Por otro lado, recordemos que dados (X, τ) , (Y, σ) dos espacios topológicos, decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si la preimagen de todo σ -abierto en Y es τ -abierto en X .

Decimos que f es abierta si para todo $U \in \tau$, $f[U] \in \sigma$; es cerrada si para todo C cerrado en (X, τ) , $f[C]$ es cerrado en (Y, σ) y que es homeomorfismo si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua.

En materia de reconstrucción de funciones continuas primeramente notemos que L y M son retículas completas y $h : L \rightarrow M$ una función que preserve 1, 0, ínfimos finitos y supremos arbitrarios entonces para cada filtro completamente primo F en M entonces $h^{-1}[F]$ es completamente primo.

En efecto, sea F un filtro completamente primo en M , entonces como $h(1) = 1$, $1 \in h^{-1}[F]$ y como $h(0) = 0$ entonces $0 \notin h^{-1}[F]$. Si $a, b \in h^{-1}[F]$ entonces $h(a), h(b) \in F$ pero como F es filtro y h preserva ínfimos entonces $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) \in F$ por lo tanto $a \wedge b \in h^{-1}(F)$. Si $a \leq b$ y $a \in h^{-1}[F]$, como en particular h preserva orden, entonces $h(a) \leq h(b)$ y $h(a) \in F$ entonces $h(b) \in F$ por lo tanto $b \in h^{-1}[F]$. Finalmente si $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ tal que $\bigvee_{i \in I} a_i \in h^{-1}[F]$ entonces como h preserva supremos arbitrarios $\bigvee_{i \in I} h(a_i) = h(\bigvee_{i \in I} a_i) \in F$, pero como F es completamente primo entonces existe $i_0 \in I$ tal que $h(a_{i_0}) \in F$ entonces $a_{i_0} \in h^{-1}[F]$. De esta forma concluimos que $h^{-1}[F]$ es filtro completamente primo.

De esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.10. *Sea Y sobrio y X un espacio arbitrario, entonces las funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ están en correspondencia uno a uno con las funciones $h : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ preservan ínfimos finitos y supremos arbitrarios dada por la siguiente asignación*

$$f \mapsto h = \Omega(f), \quad \Omega(f)(U) = f^{-1}[U].$$

Demostración. Por propiedades de la preimagen, $\Omega(f)$ preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas.

Ahora, dado una función $h : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ que preserve uniones arbitrarias e intersecciones finitas, para cada $x \in X$ consideramos su filtro de vecindades $\mathcal{U}(x)$ entonces $h^{-1}[\mathcal{U}(x)]$ es filtro completamente primo en $\Omega(Y)$ y dado que Y es sobrio por 2.1.7, existe $y \in Y$ tal que $h^{-1}[\mathcal{U}(x)] = \mathcal{U}(y)$, además, es única pues Y por 2.1.8. Entonces definimos $f : X \rightarrow Y$ donde para cada $x \in X$, $f(x) = y$. Veamos que f^{-1} coincide con h ,

$$x \in h(V) \iff V \in h^{-1}[\mathcal{U}(x)] \iff f(x) \in V \iff x \in f^{-1}[V]$$

y notamos que $h = \Omega(f)$, haciendo a f continua. $\square$

Notemos que con lo discutido previamente, la retícula $\Omega(X)$ es completa y cumple la siguiente condición para abiertos para cada conjunto I tal que $U_i, V \in \Omega(X)$, $i \in I$,

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap V = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V)$$

Es decir, cumple la distributividad infinita. Esto nos motiva a la siguiente definición.

Definición 2.1.11. *Sea L una retícula completa, decimos que es un marco si para cualquier $A \subset L$, $b \in L$ se cumple*

$$\left(\bigvee A\right) \wedge b = \bigvee \{a \wedge b : a \in A\}$$

Nos referiremos indistintamente a los marcos como locales. Por la ley de distributividad tenemos entonces la siguiente caracterización.

Proposición 2.1.12. *Sea L una retícula, son equivalentes:*

1. L es un locale,
2. L es un álgebra de Heyting completa.

Demostración. Es inmediato de la adjunción de la operacion de Heyting con el ínfimo. $\square$

Por otra parte, decimos que una retícula completa L es un co-marco si se cumple

$$(\bigwedge A) \vee b = \bigwedge \{a \vee b : a \in A\}$$

Definición 2.1.13. Si L, M son marcos y $h : L \rightarrow M$ una función, decimos que es un morfismo de marcos si para todo $a, b \in L$ y una familia $a_i \in L$ con $i \in J$ se cumple

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$h\left(\bigvee_{i \in J} a_i\right) = \bigvee_{i \in J} h(a_i)$$

como consecuencia inmediata tenemos que $h(0_L) = 0_M$ y $h(1_L) = 1_M$. Con estos elementos podemos constituir la categoría **Mar** de marcos y sus respectivos morfismos.

Ahora, llamemos a la categoría **Mar**^{op} llamándola **Loc** donde un morfismo en esta categoría puede representarse como aquellos que preservan ínfimos arbitrarios $f : L \rightarrow M$ tal que sus correspondientes adjuntas por la izquierda $f^* : M \rightarrow L$ preservan ínfimos finitos. A estos morfismos los llamaremos funciones localicas .

A continuación, mostraremos una característica de las funciones localicas.

Proposición 2.1.14. Sea $f : L \rightarrow M$ con adjunta izquierda f^* . Entonces tenemos

1. $f^*(1) = 1 \iff f[L \setminus \{1\}] \subseteq M \setminus \{1\}$.
2. f^* preserva ínfimos binarios $\iff$

$$f(f^*(a) \rightarrow b) = a \rightarrow f(b)$$

Demostración. 1. Si $f^*(1) = 1$ y $1 \leq f(x)$ entonces $1 = f^*(1) \leq x$, por otro lado, si se satisface la inclusión entonces basta usar $f(f^*(1)) \geq 1$.

2. Tenemos $x \leq f(f^*(a) \rightarrow b) \iff f^*(x \wedge a) = f^*(x) \wedge f^*(a) \leq b \iff x \wedge a \leq f(b) \iff x \leq a \rightarrow f(b)$.

Por otro lado tenemos $f^*(a \wedge b) \leq x \iff a \leq b \rightarrow f(x) = f(f^*(b) \rightarrow x) \iff f^*(a) \leq f^*(b) \rightarrow x \iff f^*(a) \wedge f^*(b) \leq x$.

□

Ahora podemos construir el siguiente funtor

$$\mathbf{Lc} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Loc}$$

donde $\mathbf{Lc}(X) = \Omega(X)$ y $\mathbf{Lc}(f) = \Omega(f)^*$.

2.2. Puntos

Ahora para poder determinar un espacio topológico a partir de un locale, debemos de dar un conjunto y su topología. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué es un punto en un locale?

Por el resultado 2.1.7 a cada punto podemos asociarle su filtro de vecindades, el cual es un filtro completamente primo, de esta forma en un locale podemos pensar la noción de punto como un filtro completamente primo lo cual nos conduce a la siguiente definición

Definición 2.2.1. *Un punto en un marco (locale) L es un filtro completamente primo $F \subseteq L$.*

Por otro lado, recordemos que un elemento $p \in L$ distinto del 1 es primo si para cualquier $a, b \in L$ tal que $a \wedge b \leq p$ implica que $a \leq p$ o $b \leq p$.

Notamos lo siguiente

Proposición 2.2.2. *Sea L un locale, entonces el conjunto de filtros completamente primos está en correspondencia biyectiva con el conjunto de elementos $\wedge$ -irreducibles.*

Demostración. Consideremos un filtro completamente primo $F \subseteq L$ y definimos

$$p_F = \bigvee \{x : x \notin F\}$$

afirmamos que p_F es primo. En efecto, $p_F \notin F$, luego $p_F \neq 1$ y si $a \wedge b \leq p_F$ no puede suceder que $a, b \in F$ simultáneamente entonces si $a \notin F$ tenemos que $a \leq p_F$. Análogamente si $b \notin F$.

Por otro lado, si $p \in L$ es primo entonces definimos

$$F_p = \{x : x \not\leq p\}$$

afirmamos que F_p es un filtro completamente primo.

En efecto, si $x, y \in F_p$ entonces $x \wedge y \in F_p$ pues p es primo; obviamente si $x \in F_p$ y $x \leq y$ entonces $y \in F_p$ y si $\bigvee_{i \in I} x_i \not\leq p$ entonces $x_i \not\leq p$ para algún $i \in I$. Además, $1 \not\leq p$ y $0 \leq p$ por lo que F_p es propio y no vacío.

Finalmente, con unos simples cálculos notamos que $p_{F_p} = \bigvee \{x : x \leq p\} = p$ y que $x \in F_{p_F}$ si y solo si $x \not\leq \bigvee \{y : y \notin F\}$ si y solo si $x \in F$. Lo que nos lleva a la siguiente definición $\square$

Con esto tenemos el siguiente resultado

Lema 2.2.3. *Las funciones localicas preservan elementos $\wedge$ -irreducible.*

Demostración. Primero, notemos que las funciones localicas reflejan elementos 1, esto es si $f(a) = 1$ entonces $a = 1$. En efecto, si $1 \leq f(a)$ entonces $1 = f^*(1) \leq a$.

Ahora, si $f : L \rightarrow M$ es una función localica y sea $a \in L$ un elemento primo, entonces sea $x \wedge y \leq f(a)$, luego tenemos que $f^*(x \wedge y) \leq a$ pero como f^* preserva ínfimos finitos, tenemos $f^*(x) \wedge f^*(y) \leq a$ así $f^*(x) \leq a$ y $x \leq f(a)$, el cual no puede ser 1 por lo anterior. $\square$

Este resultado muestra que las funciones localicas preservan puntos.

Pese a esto, cabe recordar que los puntos x en un espacio topológico X están en una correspondencia natural uno a uno con las funciones continuas $f : \{0\} \rightarrow X$ de la forma $0 \mapsto x$, en el caso de espacios sobrios, con un morfismo de marcos $h : \Omega(X) \rightarrow P$, entonces un punto en un locale L puede ser visto como un morfismo de marcos $h : L \rightarrow P$ (o como una función localica $P \rightarrow L$).

Notemos que podemos trasladar de definición a definición pues si $F \subseteq L$ es un filtro completamente primo definimos $h : L \rightarrow P$ teniendo que $h(x) = 1$ si y solo si $x \in F$ y dado un morfismo de marcos $h : L \rightarrow P$ tenemos un filtro completamente primo $F = \{x : h(x) = 1\}$.

Sin embargo, hay locales sin elementos $\wedge$ -irreducibles, pero antes de dar ejemplos, veamos lo siguiente.

Sea B un algebra booleana, recordemos que $a \in L$ es atomo si $0 < a$ y tal que para cada $x \in L$ con $0 < x \leq a$ implica que $x = a$. De forma dual definimos coatomo. Es claro que en un algebra booleana, a es atomo si y solo si a^c es un coatomo. Tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.2.4. *Todo elemento $\wedge$ -irreducible en un algebra booleana es un coatomo.*

Demostración. Sea $p \in B$ $\wedge$ -irreducible y $p < x$. Si consideramos x^c , tenemos que $x \wedge x^c = 0 \leq p$, entonces $x \leq p$ o $x^c \leq p$, pero $p < x$, luego $x^c \leq p$ y tenemos que $x^c \leq x$, entonces $1 = x \vee x^c = x$. $\square$

A continuación un ejemplo de locales sin puntos.

Ejemplo 2.2.5. Sea (X, τ) un espacio topológico y consideramos el álgebra booleana $RO(X)$ de abiertos regulares, es decir los abiertos tales que $\text{Int}(\overline{S}) = S$.

Si X es Hausdorff, entonces $RO(X)$ no tiene elementos $\wedge$ -irreducibles si y solo si X no tiene puntos aislados.

$RO(X)$ es un álgebra booleana con las siguientes operaciones

- $U \vee V = \text{Int}(\overline{U \cup V})$,
- $U \wedge V = U \cap V$
- $U^c = \text{Int}(X \setminus U)$.

2.3. Espectro

Adoptando la idea anterior respecto a filtros completamente primos relacionándolos con sistemas de vecindades podemos llevar un sistema de puntos de L a un espacio, y lo llamaremos espectro.

En este momento consideramos F como filtro completamente primo a menos que se mencione lo contrario.

Sea $a \in L$ entonces consideramos

$$\Sigma_a := \{F : a \in F, F \text{ es filtro completamente primo}\}$$

fácilmente verificamos que

- $\Sigma_0 = \emptyset$
- $\Sigma_1 = \text{todos los filtros completamente primos}$
- $\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$
- $\Sigma_{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigcup_{i \in I} \Sigma_{a_i}$.

En consecuencia, tenemos un espacio topológico

$$\text{Sp}(L) = (\{\text{todos los filtros c.p.}\}, \{\Sigma_a : a \in L\})$$

Y lo llamaremos espectro de L .

Además, si $f : L \rightarrow M$ es una función localica, definimos

$$\mathrm{Sp}(f) : \mathrm{Sp}(L) \rightarrow \mathrm{Sp}(M)$$

$$\mathrm{Sp}(f)(F) = (f^*)^{-1}[F]$$

dado que f^* es un morfismo de marcos, la preimagen es un filtro completamente primo.

Lema 2.3.1. $(\mathrm{Sp}(f))^{-1}[\Sigma_a] = \Sigma_{f^*(a)}$. Consecuentemente, $\mathrm{Sp}(f)$ es una función continua.

Demostración. $(\mathrm{Sp}(f))^{-1}[\Sigma_a] = \{F : \mathrm{Sp}(f)(F) = (f^*)^{-1}[F] \in \Sigma_a\} = \{F : a \in (f^*)^{-1}[F]\} = \{F : f^*(a) \in F\} = \Sigma_{f^*(a)}$ $\square$

Evidentemente tenemos que $\mathrm{Sp}(id_L) = id_{\mathrm{Sp}(L)}$ y $\mathrm{Sp}(g \cdot f) = \mathrm{Sp}(g) \cdot \mathrm{Sp}(f)$ entonces tenemos que las fórmulas $\mathrm{Sp}(L)$ y $\mathrm{Sp}(f)$ definen un funtor

$$\mathrm{Sp} : \mathbf{Loc} \rightarrow \mathbf{Top}$$

llamado funtor espectro.

Dado lo anterior, tenemos morfismos de marcos

$$\phi_L : L \rightarrow \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L))$$

dados por $\phi_L(a) = \Sigma_a$. Considerando sus adjuntas derechas, tenemos las funciones localicas

$$\sigma_L = (\phi_L)^* : \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L)) \rightarrow L$$

Lema 2.3.2.

1. El sistema $(\sigma_L)_L$ constituye un morfismo de funtores $\mathrm{LcSp} \rightarrow \mathrm{Id}$
2. Cada σ_L es uno a uno.

Demostración. 1. Sea $f : L \rightarrow M$. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(L)) & \xrightarrow{\sigma_L} & L \\ \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Lc}(\mathrm{Sp}(M)) & \xrightarrow{\sigma_M} & M \end{array}$$

Esto es

$$\begin{aligned}
(\sigma_M \cdot \text{LcSp}(f))^*(a) &= \text{LcSp}(f)^*(\phi_M(a)) = \Omega(\text{Sp}(f))(\Sigma_a) \\
\{F : \text{Sp}(f)[F] \ni a\} &= \{F : (f^*)^{-1}[F] \ni a\} = \{F : f^*(a) \in F\} \\
\Sigma_{f^*(a)} &= \phi_L(f^*(a)) = (\sigma_L)^*(f^*(a)) = (f \cdot \sigma_L)^*(a)
\end{aligned}$$

2. La función ϕ_L es sobreyectiva, entonces por la ecuación de Galois estándar $\phi_L \sigma_L \phi_L = \phi_L$, así obtenemos $\phi_L \sigma_L = id$ lo cual hace que cada σ_L sea uno a uno.

□

Ahora, dado un espacio topológico X consideramos las funciones

$$\lambda_X : X \rightarrow \text{Sp}(\text{Lc}(X))$$

definidas por

$$\lambda_X(x) = \mathcal{U}(x) = \{U \in \Omega(X) : x \in U\}$$

De esto tenemos el siguiente resultado

Lema 2.3.3.

1. λ_X es una función continua
2. El sistema $(\lambda_X)_{X \in \mathbf{Top}}$ constituye un morfismo de funtores $\text{Id} \rightarrow \text{SpLc}$

Demostración. 1. Cada abierto en $\text{SpLc}(X)$ es de la forma Σ_U con U abierto en X . Entonces tenemos

$$\lambda_X^{-1}[\Sigma_U] = \{x : \mathcal{U}(x) \in \Sigma_U\} = \{x : U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x : x \in U\} = U$$

2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\lambda_X} & \text{SpLc}(X) \\
f \downarrow & & \downarrow \text{SpLc}(f) \\
Y & \xrightarrow{\lambda_Y} & \text{SpLc}(Y)
\end{array}$$

Esto es

$$(\text{SpLc}(f) \cdot \lambda_X)(x) = \text{SpLc}(f)(\mathcal{U}(x)) = (\Omega(f))^{-1}(\mathcal{U}(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \{U : f^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)\} = \{U : x \in f^{-1}[U]\} \\
&= \{U : f(x) \in U\} = \lambda_Y(f(x))
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.4. *Los funtores Lc y Sp son adjuntos, Lc por la izquierda y Sp por la derecha, con unidades $\lambda : Id \rightarrow SpLc$ y $\sigma : LcSp \rightarrow Id$.*

Demostración. Consideremos

$$Sp(\sigma_L) \cdot \lambda_{SpL} : SpL \rightarrow Sp(Lc(SpL)) \rightarrow SpL$$

Dado que $(\sigma_L)^* = \phi_L$ tenemos

$$\begin{aligned}
&(Sp(\sigma_L) \cdot \lambda_{SpL})(F) = Sp(\sigma_L)(\mathcal{U}(F)) = \phi_L^{-1}[U(F)] \\
&= \{U : \Sigma_U \in \mathcal{U}(F)\} = \{U : F \in \Sigma_U\} = \{U : U \in F\} = F
\end{aligned}$$

Por otro lado consideremos

$$\sigma_{Lc(X)} \cdot Lc(\lambda_X) : LcX \rightarrow Lc(Sp(Lc(X))) \rightarrow LcX$$

y tenemos

$$(\sigma_{LcX} \cdot Lc(\lambda_X))^*(U) = (Lc(\lambda_X))^*(\Sigma_U)$$

$$= \Omega(\lambda_X)(\Sigma_U) = \lambda_X^{-1}[\Sigma_U] = \{x : \mathcal{U}(x) \ni U\} = \{x : x \in U\} = U$$

□

Conocemos que cada σ_L es uno a uno, ahora que sabemos

$$\sigma_{Lc(X)} \cdot Lc(\lambda_X) = id_{Lc(X)}$$

se tiene que $\sigma_{Lc(X)}$ es una función sobreyectiva y concluimos que para cada X , la función localica $\sigma_{Lc(X)} : Lc(Sp(Lc(X))) \rightarrow Lc(X)$ es un isomorfismo.

2.4. Sublocales

De manera análoga a los espacios topológicos, en teoría de locales tenemos una noción de "subestructura", la cual introducimos a continuación.

Definición 2.4.1. *Sea L un locale y $S \subseteq L$ un subconjunto. Decimos que S es un sublocale si*

1. Es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.
2. Para cada $s \in S$ y cada $x \in L$, $x \rightarrow s \in S$.

De primera instancia, esta definición no parece capturar la noción de subespacio intuitivamente, sin embargo, tenemos la siguiente equivalencia.

Proposición 2.4.2. *Sea L un locale. Un subconjunto $S \subseteq L$ es sublocale si y solo si es un locale con el orden inducido y la inclusión $i : S \rightarrow L$ es función localica.*

Demostración. Si S es un sublocale, como es cerrado bajo ínfimos arbitrarios entonces por 1.1.9 es retícula completa. Por la segunda condición es cerrado bajo operación de Heyting, entonces la correspondencia

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S \\ x &\mapsto x \wedge a \end{aligned}$$

tiene adjunta derecha

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S \\ x &\mapsto (a \rightarrow x) \end{aligned}$$

entonces se cumple la distributividad de marcos por 2.1.12. De esta forma S es un locale. De la primera condición, la inclusión $i : S \rightarrow L$ preserva ínfimos arbitrarios, luego por 1.3.6, tiene adjunto izquierdo $i^* : L \rightarrow S$, de esta forma tenemos para cada $x \in L$, para cada $s \in S$

$$i^*(x) \leq s \iff x \leq i(s) = s$$

Afirmamos que i^* preserva ínfimos binarios. Para cada $a, b \in L$, $s \in S$

$$\begin{aligned} i^*(a) \wedge i^*(b) \leq s &\iff i^*(b) \leq i^*(a) \rightarrow s \\ &\iff i^*(b) \leq a \rightarrow s \iff b \leq a \rightarrow s \\ &\iff a \wedge b \leq s \iff i^*(a \wedge b) \leq s. \end{aligned}$$

De esta forma, $i^*(a) \wedge i^*(b) = i^*(a \wedge b)$. Dado que $x \leq i^*(x)$ para cada $x \in S$, en particular tenemos $1 \leq i^*(1)$. Con esto mostramos que la inclusión es función localica.

Por otro lado, si S es locale y la inclusión $i : S \rightarrow L$ es función localica, entonces S es retícula completa y la inclusión preserva todos los ínfimos, entonces se cumple la primera condición. Además, S es un

álgebra de Heyting. Denotamos por $\rightarrow'$ la operación de Heyting en S . Entonces, con la notación previa, para cada $x, a \in L, s \in S$ obtenemos

$$x \leq i^*(a) \rightarrow' s \iff i(x) \leq i(i^*(a) \rightarrow' s) \iff x \leq a \rightarrow s.$$

De esta forma $a \rightarrow s = i^*(a) \rightarrow' s \in S$.

Con esto mostramos que S es sublocale. □

En la demostración obtenemos que la operación de Heyting en S coincide con la de L .

Sea L un locale y sean $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq S(L)$ sublocales, veamos que $\bigcap_{i \in I} S_i$ es sublocale. En efecto, sean $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq \bigcap_{i \in I} S_i$, entonces para cada $i \in I$ $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq S_i$, luego, como para cada $i \in I$, S_i es sublocale, entonces $\bigwedge_{j \in J} x_j \in S_i$ luego $\bigwedge_{j \in J} x_j \in \bigcap_{i \in I} S_i$. Ahora sea $x \in L$ y $s \in \bigcap_{i \in I} S_i$, entonces para cada $i \in I$, $s \in S_i$, de esta forma, para cada $i \in I$ $x \rightarrow s \in S_i$, así obteniendo $x \rightarrow s \in \bigcap_{i \in I} S_i$, por lo tanto, la intersección de sublocales es sublocale.

Esto nos induce a pensar que el conjunto de sublocales de un locale L (denotado por $S(L)$), es una retícula completa. Para esto, definimos el supremo de sublocales de la siguiente manera

$$\bigvee_{i \in I} S_i = \{\bigwedge A : A \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i\}.$$

Teorema 2.4.3. $S(L)$ es un comarco.

Demostración. Primeramente notemos que $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \vee B)$ así como $B \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \vee B)$ entonces $(\bigcap_{i \in I} A_i) \vee B \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \vee B)$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \vee B)$. Entonces para cada $i \in I$ existen $a_i \in A_i$ y $b_i \in B$ de manera que $x = a_i \wedge b_i$. Denotamos por $b = \bigwedge_{i \in I} b_i$ y obtenemos

$$x = \bigwedge_{i \in I} a_i \wedge b \leq a_i \wedge b \leq a_i \wedge b_i \leq x$$

entonces $x = a_i \wedge b$ para cada $i \in I$, de esta forma, para cada $i \in I$ los $b \rightarrow a_i$ coinciden por 1.4.18. Denotando por a a los valores en común, obtenemos

$$x = b \wedge a_i = b \wedge (b \rightarrow a_i) = b \wedge a \in B \vee \bigcap_{i \in I} A_i.$$

□

Además, tenemos otra representación del concepto de sublocale usando la noción de *núcleo*.

Definición 2.4.4. Sea L un locale, un núcleo en L es una función $\nu : L \rightarrow L$ tal que para cada $a, b \in L$

1. $a \leq \nu(a)$,
2. cada que $a \leq b$ tenemos $\nu(a) \leq \nu(b)$,
3. $\nu(\nu(a)) = \nu(a)$,
4. $\nu(a \wedge b) = \nu(a) \wedge \nu(b)$.

Tenemos inmediatamente las siguientes propiedades:

Lema 2.4.5. Para cada $a, b \in L$ tenemos

1. $\nu(a \rightarrow \nu(b)) = a \rightarrow \nu(b)$,
2. $b \rightarrow \nu(a) = \nu(b) \rightarrow \nu(a)$.

Demostración. Ocuparemos implícitamente 1.4.17 y 1.4.18.

1. Para cada $a, b \in L$ tenemos

$$\nu(a \rightarrow \nu(b)) \wedge a \leq \nu(a \rightarrow \nu(b)) \wedge \nu(a) = \nu((a \rightarrow \nu(b)) \wedge a),$$

pero $a \rightarrow \nu(b)) \wedge a = \nu(b) \wedge a$ por 1.4.18, entonces

$$\nu(a \rightarrow \nu(b)) \wedge a \leq \nu(\nu(b) \wedge a) \leq \nu(\nu(b)) \leq \nu(b)$$

luego tenemos $\nu(a \rightarrow \nu(b)) \leq a \rightarrow \nu(b)$. La otra desigualdad es inmediata.

2. Como $b \rightarrow \nu(a) \leq b \rightarrow \nu(a)$ tenemos que $b \rightarrow \nu(a) \wedge b \leq \nu(a)$, luego tenemos $\nu(b \rightarrow \nu(a)) \wedge \nu(b) \leq \nu(a)$. Concluimos con $b \rightarrow \nu(a) \leq \nu(b) \rightarrow \nu(a)$. Para la otra desigualdad, como la operación de Heyting es antitona en la primera variable, obtenemos $\nu(b) \rightarrow \nu(a) \leq b \rightarrow \nu(a)$.

□

De esta forma tenemos la siguiente correspondencia entre núcleos sobre L y sublocales de L .

Proposición 2.4.6. *Sea L un locale. Para cada núcleo $\nu : L \rightarrow L$, $\nu[L]$ es un sublocale. Por otro lado, para cada sublocale S la asignación $\nu_S : L \rightarrow L$ definida por $\nu_S(a) = \bigwedge \{s \in S : a \leq s\}$ es núcleo.*

En particular, existe una correspondencia biyectiva entre núcleos sobre L y sublocales de L .

Demostración. Sea ν un núcleo y sea $a_i = \nu(b_i) \in \nu[L]$, entonces

$$\nu \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) \leq \bigwedge_{i \in I} \nu(a_i) = \bigwedge_{i \in I} \nu \nu(b_i) = \bigwedge_{i \in I} \nu(b_i) = \bigwedge_{i \in I} a_i.$$

Ahora si $a \in L$ y $s = \nu(b) \in \nu[L]$ entonces $a \rightarrow s = \nu(a \rightarrow s) \in \nu[L]$. De esta forma concluimos que $\nu[L]$ es sublocale.

Por otro lado veamos que $\nu_S(a) = \bigwedge \{s \in S : a \leq s\}$ es núcleo.

- Es claro que para cada $a \in L$ $a \leq \bigwedge \{s \in S : a \leq s\} = \nu_S(a)$.
- Dados $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ entonces $\nu_S(a) = \bigwedge \{s \in S : a \leq s\} \leq \bigwedge \{s \in S : b \leq s\} = \nu_S(b)$.
- Dado $a \in L$ y denotamos por $\bar{a} = \bigwedge \{s \in S : a \leq s\}$, luego notamos que $\bigwedge \{s \in S : \bar{a} \leq s\} = \bar{a}$ pues $\bar{a} \in S$.
- Dados $a, b \in L$, notamos que $\bigwedge \{s \in S : a \wedge b \leq s\} \leq \bigwedge \{s \in S : a \leq s\} \wedge \bigwedge \{s \in S : b \leq s\}$, esto es $\nu_S(a \wedge b) \leq \nu_S(a) \wedge \nu_S(b)$. Por otro lado tenemos

$$a \wedge b \leq \nu_S(a \wedge b) \iff a \leq b \rightarrow \nu_S(a \wedge b)$$

entonces tenemos $a \leq \nu_S(b) \rightarrow \nu_S(a \wedge b) \iff a \wedge \nu_S(b) \leq \nu_S(a \wedge b)$. Repitiendo obtenemos

$$\nu_S(b) \wedge a \leq \nu_S(a \wedge b) \iff \nu_S(b) \leq a \rightarrow \nu_S(a \wedge b)$$

por lo tanto $\nu_S(b) \leq \nu_S(a) \rightarrow \nu_S(a \wedge b) \iff \nu_S(a) \wedge \nu_S(b) \leq \nu_S(a \wedge b)$.

Por lo tanto ν_S es núcleo.

Además notamos que $\nu_S[L] = S$ pues $\nu_S(a) \in S$ (dado que S es sublocale) y para cada $s \in S$ tenemos $\nu_S(s) = s$.

Por otro lado para $a \in L$, $\nu_{\nu}(a) = \bigwedge \{\nu(b) : a \leq \nu(b), b \in L\} = \nu(a)$. □

Con esto, notamos que los supremos en cada sublocale $S \subseteq L$ son dados por

$$\bigvee_{i \in I}^S a_i = \nu_S \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right).$$

En efecto, notemos que $\nu_S (\bigvee_{i \in I} a_i) \in S$ y para cada $i \in I$, $a_i \leq \nu_S (\bigvee_{i \in I} a_i)$. Si existiese $b \in S$ tal que para cada $i \in I$ $a_i \leq b$ entonces $\bigvee_{i \in I} a_i \leq b$ entonces $\nu_S (\bigvee_{i \in I} a_i) \leq \nu_S(b)$.

Demos dos ejemplos de núcleos y su respectivos sublocales. Para un tratamiento más específico de estos nucleos se recomienda leer [Joh82].

1. Sea L un locale y $a \in L$, entonces la asignación $c(a) = a \vee _$ es núcleo. Su sublocale correspondiente es $a \uparrow$.
2. Sea L un locale y $a \in L$, entonces la asignación $o(a) = a \rightarrow _$ es núcleo. Su sublocale correspondiente es $\{a \rightarrow x : x \in L\} = \{x \in L : a \rightarrow x = x\}$.

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.7. *Sea L un locale, $a \in L$. Entonces $o(a)$ y $c(a)$ son complementos en $S(L)$.*

Recordemos que dos sublocales S, R son complementos si y solo si $S \vee R = L$ y $S \wedge R = O$.

Demostración. Si $y \in c(a) \cap o(a)$ entonces $a \leq a \rightarrow x = y$ para algún $x \in L$ entonces tenemos

$$a \leq a \rightarrow x \iff a \leq x \iff a \rightarrow x = 1$$

esto es, $a \rightarrow x = 1 = O$.

Por otro lado para cada $x \in L$ tenemos $x = (x \vee a) \wedge (a \rightarrow x)$ así $x \in c(a) \vee o(a)$, esto es, $L = c(a) \vee o(a)$. $\square$

Inmediatamente tenemos que $a \leq b \iff c(b) \subseteq c(a) \iff o(a) \subseteq o(b)$.

Proposición 2.4.8. *Sea L un locale y $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, $a, b \in L$, entonces tenemos:*

1. $\bigcap_{i \in I} c(a_i) = c(\bigvee_{i \in I} a_i)$,
2. $c(a) \vee c(b) = c(a \wedge b)$,

$$3. \bigvee_{i \in I} o(a_i) = o\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right),$$

$$4. o(a) \cap o(b) = o(a \wedge b).$$

Demostración. Mostremos los primeros dos incisos, los últimos dos se satisfacen por las leyes de Morgan.

1. Tenemos

$$x \in \bigcap_{i \in I} c(a_i) \iff \text{para cada } i \in I, x \geq a_i \iff x \geq \bigvee_{i \in I} a_i \iff x \in c\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right).$$

2. Notemos que $c(a) \vee c(b) = \{x \wedge y : x \geq a, y \geq b\} = c(a \wedge b)$.

□

Asimismo, de una manera sencilla podemos notar $o(0) = O$, $o(1) = L$. Como además se cumple que $o(a \wedge b) = o(a) \cap o(b)$ y $o\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigvee_{i \in I} o(a_i)$, podemos pensar que el sistema de los sublocales abiertos constituyen en L una especie de topología, llamado ocasionalmente como topología reticular”[APP24]. Así podemos pensar a cada locale como espacio topológico de la siguiente forma:

$$(L, \{o(a) : a \in L\}).$$

Capítulo 3

Axiomas de separación

En topología y campos matemáticos afines, existen varias restricciones que suelen aplicarse a los tipos de espacios topológicos que se desean considerar. Algunas de estas restricciones vienen dadas por los axiomas de separación.

Los axiomas de separación no son axiomas fundamentales como los de la teoría de conjuntos, sino que definen propiedades que pueden especificarse para distinguir ciertos tipos de espacios topológicos.

Antes de la definición general actual de espacio topológico, se ofrecían muchas definiciones, algunas de las cuales asumían (lo que ahora consideramos) algunos axiomas de separación. Por ejemplo, la definición dada por Felix Hausdorff en 1914 es equivalente a la definición moderna más el axioma de separación de Hausdorff.

Los axiomas de separación, como grupo, adquirieron importancia en el estudio de la metrizabilidad: la cuestión de a qué espacios topológicos se les puede dar la estructura de un espacio métrico. Los espacios métricos satisfacen todos los axiomas de separación; Pero, de hecho, estudiar espacios que satisfacen sólo algunos axiomas ayuda a desarrollar la noción de metrizabilidad completa.

3.1. Una aproximación al axioma T_1

El axioma T_1 establece una condición fundamental para la distinción de puntos en un espacio topológico, asegurando que puntos distintos puedan ser diferenciados topológicamente, esta capacidad de separación es crucial para muchas construcciones y demostraciones en topología, ya

que permite trabajar con puntos individuales con mayor precisión. Una consecuencia directa del axioma T1 es que todos los conjuntos unitarios, es decir, aquellos que contienen un único punto, son conjuntos cerrados esta propiedad simplifica diversas demostraciones y facilita la definición de otros conceptos topológicos.[PP21]

Además, el axioma T1 sirve como base para otros axiomas de separación más fuertes, como el axioma de Hausdorff (T2), que desempeña un papel esencial en análisis y geometría en este sentido, T1 actúa como un escalón fundamental en la jerarquía de axiomas de separación los espacios T1 exhiben propiedades topológicas deseables que los hacen más manejables y útiles en diversas aplicaciones por ejemplo, la noción de convergencia de sucesiones se comporta de manera más intuitiva en estos espacios.

El axioma T_1 en topología clásica es el siguiente:

Definición 3.1.1 (T_1). *Un espacio topológico es T_1 si dados $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces existe un abierto U tal que $y \notin U \ni x$.*

Una forma más cómoda de enunciar este axioma es como sigue

$$\forall x \in X, \quad \overline{\{x\}} = \{x\}$$

es decir, que los conjuntos unipuntuales, consecuentemente tenemos que *todos los conjuntos finitos son cerrados*.

Con esto dicho, buscamos una definición libre de puntos, lo cual inmediatamente tenemos, dado que cada $\{x\}$ es cerrado, implica que $X \setminus \{x\}$ es abierto, y es un elemento máximo distinto de X en la retícula de abiertos $\Omega(X)$ y dado que siempre $X \setminus \overline{\{x\}}$ podemos pensar en la siguiente representación *Cada elemento $\wedge$ -irreducible distinto de 1 es máximo*.

Sin embargo, esto evidentemente no es un axioma "sin puntos" pues, hacemos uso explícito de los puntos en el aspecto de que cada unipuntual es cerrado. Además, si X no es un espacio sobrio, podría fallar la definición.

Ejemplo 3.1.2. *Sea X un conjunto infinito. La topología cofinita sobre X se define como:*

$$\tau = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$$

Para ver que es T_1 , tomemos $x \neq y$ en X . Definimos:

$$U = X \setminus \{y\}, \quad V = X \setminus \{x\}.$$

Ambos son abiertos, pues sus complementos son finitos. Además:

$$x \in U, \quad y \notin U; \quad y \in V, \quad x \notin V.$$

Por tanto, X es T_1 . Equivalentemente, los conjuntos unitarios son cerrados. Sin embargo no todos los elementos $\wedge$ -irreducibles son máximos. A saber, sea $U = \emptyset$, U es $\wedge$ -irreducible, pero no es máximo, por lo tanto no cumple la definición de T_1 en el lenguaje de locales.

Para esto uno podría usar el siguiente axioma:

Definición 3.1.3 (Simetría). *Sea X un espacio topológico, decimos que es simétrico si para todo $x, y \in X$, $x \in \overline{\{y\}} \iff y \in \overline{\{x\}}$*

En otras palabras

$$\text{si } x \in \overline{\{y\}} \quad \text{entonces } \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$$

Con esto podemos notar lo siguiente:

Proposición 3.1.4. *Bajo T_0 , simetría es equivalente al axioma T_1 .*

Demostración. Sea X un espacio topológico. Si asumimos que es simétrico y dado $x \in \overline{\{y\}}$, luego tenemos $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, luego por T_0 , $x = y$.

Por otro lado, si asumimos T_1 y $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $x = y$ y trivialmente, $y \in \overline{\{x\}}$. □

Además tenemos la siguiente caracterización de la simetría.

Proposición 3.1.5. *Sea Y un espacio topológico T_0 . Es simétrico si y solo si para cualquier espacio X y funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ tenemos $f^{-1}[U] \subset g^{-1}[U]$ para todo abierto $U \subseteq Y$ solamente si $f = g$.*

Demostración. Sea Y simétrico y $f^{-1}[U] \subseteq g^{-1}[U]$ para todo $U \in \Omega(Y)$. Supongamos que para algún $U \in \Omega(Y)$, $f^{-1}[U] \subset g^{-1}[U]$ estrictamente, elegimos $x \in g^{-1}[U] \setminus f^{-1}[U]$. Entonces $f(x) \notin U$, $g(x) \in U$, luego $g(x) \notin \overline{\{f(x)\}}$ y por simetría $f(x) \notin \overline{\{g(x)\}}$. Entonces existe un V tal que $g(x) \notin V$, $f(x) \in V$, de esta forma tenemos que $f^{-1}[V] \not\subseteq g^{-1}[V]$. Así $f^{-1}[U] = g^{-1}[U]$ luego, por 2.1.2, $f = g$.

Por otro lado, así asumimos la implicación y sea $x \in \overline{\{y\}}$. Definimos X como el subespacio $\{x, y\}$ de Y , $g : X \rightarrow Y$ la inclusión y $f : X \rightarrow Y$ como la función constante $f(x) = x$ para cada $x \in X$, entonces tenemos que $f^{-1}[U] \subseteq g^{-1}[U]$ para cada abierto $U \in \Omega(Y)$, entonces $f = g$ y concluimos que $x = y$. □

Definición 3.1.6. Decimos que un marco L es simétrico si para cada par de morfismos de marcos $h_1, h_2 : L \rightarrow M$ tal que $h_1 \leq h_2$ entonces $h_1 = h_2$.

3.1.1. Axioma subfit

Ahora buscamos una definición en topología sin puntos que se aproxime al axioma T_1 en espacios topológicos, para esto introducimos el siguiente axioma.

Definición 3.1.7. Sea L un locale. Decimos que L es subfit si dados $a, b \in L$ con $a \not\leq b$ entonces existe $c \in L$ tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$.

Decimos que un espacio topológico X es subfit si lo es su retícula de abiertos $\Omega(X)$.

Notemos que, a través de este axioma, en un sentido topológico, estamos "separando" abiertos de otros, sin embargo, esto no solo es en un sentido "reticular", sino, tenemos la siguiente caracterización en espacios topológicos.

Teorema 3.1.8. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es subfit si y solo si para cada $x \in X$ y cada $U \in \Omega(X)$ con $x \in U$ existe $y \in \overline{\{x\}}$ tal que $\overline{\{y\}} \subseteq U$.

Demostración. Sea X subfit, $x \in X$ y sea $U \in \Omega(X)$ tal que $x \in U$, entonces $U \not\subseteq U \setminus \overline{\{x\}}$, luego por subfit existe un $W \in \Omega(X)$ tal que se cumple

$$U \cup W = X \neq (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W \quad (*)$$

entonces existe $y \notin (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W$ y notamos que

$$y \notin W \quad \text{y} \quad y \notin U \setminus \overline{\{x\}} \quad (**)$$

de esta forma $y \in \overline{\{x\}}$.

Sea $z \in \overline{\{y\}}$ tal que $z \notin U$. Entonces por (*), $z \in W$ y dado que W es abierto, $y \in W$, contradiciendo (**).

Para el recíproco, asumiendo la condición, sea $U \not\subseteq V$, tomamos $x \in U \setminus V$ y un y de la condición, entonces para $W = X \setminus \overline{\{y\}}$ tenemos $U \cup W = X$ y $y \notin W \cup V$.

□

Recordemos que un espacio topológico X es T_D si para cada $x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \setminus \{x\}$ es abierto. Entonces tenemos el siguiente resultado para espacios topológicos.

Proposición 3.1.9. T_D y subfit coinciden con T_1 .

Demostración. Sea X un espacio topológico T_1 , $x \in X$, $U \in \Omega(X)$ tal que $x \in U$, entonces $\overline{\{x\}} \subseteq U$, luego el único elemento de $\overline{\{x\}}$ es x mismo, cumpliendo la condición de subfit. Para T_D , sea $U \in \Omega(X)$ tal que $x \in U$, luego $U \setminus \{x\} = U \setminus \overline{\{x\}}$ que es abierto.

Recíprocamente, si X es T_D y subfit entonces para cada $x \in X$ elegimos $U \in \Omega(X)$ tal que $x \in U$ y $U \setminus \{x\}$ es abierto entonces por subfit existe un $W \in \Omega(X)$ tal que

$$W \cup U = X \neq W \cup (U \setminus \{x\})$$

Notamos que $W \cup (U \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$, por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, es decir $\{x\} = \overline{\{x\}}$, concluyendo que X es T_1 . □

Ejemplo 3.1.10. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros y consideramos $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ su espectro. $X = \{\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z} : \mathfrak{p} \text{ es ideal primo}\}$. Lo dotamos de la topología de Zariski donde los cerrados son dados por $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X : I \subseteq \mathfrak{p}\}$ donde I es ideal de $\mathbb{Z}$. Dado $f \in \mathbb{Z}$ se tiene como base de abiertos a los conjuntos $D(f) = X \setminus V(\langle f \rangle) = \{\mathfrak{p} \in X : f \notin \mathfrak{p}\}$.

Tenemos que $\mathfrak{p}$ es punto cerrado si y solo si $\mathfrak{p}$ es ideal máximo. Como $\mathbb{Z}$ es dominio de ideales principales, todo ideal generado por un número primo es máximo, sin embargo, el ideal generado por el 0 no es cerrado pues su clausura es todo X , entonces no es T_1 .

Afirmamos que X es subfit. Sea $\mathfrak{p} \in X$

- Si $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle$, consideramos $U \in \Omega(X)$ tal que $\langle 0 \rangle \in U$, como U es unión de abiertos principales (básicos) existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $\langle 0 \rangle \in D(f)$. Recordemos que $\overline{\{\langle 0 \rangle\}} = X$, entonces considero $\mathfrak{q} \in X$ tal que $f \notin \mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{q} \in D(f)$, luego $\overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq D(f)$.
- Si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$, consideramos $U \in \Omega(X)$ tal que $\mathfrak{p} \in U$, como U es unión de abiertos principales existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{p} \in D(f)$. Como $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$, considero $y = \mathfrak{p}$ y trivialmente se cumple la condición.

Por lo tanto X es subfit, pero no T_1 .

Pese a la equivalencia en espacios topológicos, a nivel de locales, no necesariamente el axioma T_1 implica subfit tal como se nota en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.11. Sea L un locale sin puntos, consideramos

$$M = \{(a, b) : a, b \in L, a \leq b\}$$

con el orden coordenada a coordenada. Afirmamos que M no tiene puntos. En efecto, si $(p, q) \in M$ fuera un punto entonces $p = q$ y $p \in L$ seria un punto, lo cual no puede ser. Por vacuidad es T_1 pero no es subfit. Para ver esto basta considerar $(0, 1) \not\leq (0, 0)$ pero si

$$(0, 1) \vee (c_1, c_2) = (1, 1)$$

con $c_1 \leq c_2$ entonces $(c_1, c_2) = (1, 1)$.

Por otro lado, podemos debilitar este axioma de la siguiente forma.

Definición 3.1.12. *Un locale L es débilmente subfit si para cada $a \in L$ distinto de 0 existe $c \in L$ distinto de 1 tal que $a \vee c = 1$.*

Naturalmente subfit implica débilmente subfit.

Notamos que un espacio topológico X , $\Omega(X)$ es débilmente subfit si y solo si para cada abierto no vacío, contiene un cerrado no vacío, es decir:

$$\forall U \in \Omega(X), U \neq \emptyset, \exists x \in U : \overline{\{x\}} \subseteq U$$

Esto por la caracterización del axioma subfit en espacios topológicos. Mas aun, tenemos la siguiente caracterización en locales.

Proposición 3.1.13. *Un locale L es subfit si y solo si cada sublocale cerrado de L es débilmente subfit.*

Demostración. Sea L subfit y $c(b)$ un sublocale cerrado de L y $a \in c(b)$ tal que $a \neq 0_{c(b)} = b$. Como $a, b \in L$ por subfit existe $c \in L$ tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$. Luego consideramos el núcleo asociado a $c(b)$, denotado por $\nu_{c(b)}$ y obtenemos

$$a \vee \nu_{c(b)}(c) = a \vee (b \vee c) = a \vee c = 1$$

Por otro lado, si $a \neq b$ en $c(b)$ entonces consideramos $a \vee b > 0_{c(b)}$ entonces existe $c \neq 1$, $c \geq b$ tal que

$$(a \vee b) \vee c = a \vee c = 1$$

y $b \vee c = c \neq 1$.

□

Teorema 3.1.14. *Un locale es débilmente subfit si y solo si la fórmula de pseudocomplemento es dada por*

$$a^* = \bigwedge \{x \in L : a \vee x = 1\}$$

Demostración. Sea $u = \bigwedge\{x : a \vee x = 1\}$. Si $a \vee x = 1$ entonces tenemos que

$$a^* = a^* \wedge (a \vee x) = a^* \wedge x$$

entonces $a^* \leq u$.

Si suponemos que $a \wedge u \neq 0$ entonces por débilmente subfit existe $x \neq 1$ tal que $(a \wedge u) \vee x = (a \vee x) \wedge (u \vee x) = 1$. De esta forma tenemos que $a \vee x = 1$ y así $x \geq u$, por lo tanto $x = u \vee x = 1$ lo que es una contradicción, entonces $u \wedge a = 0$, por lo tanto $u \leq a^*$. De esto, tenemos $a^* = \bigwedge\{x \in L : a \vee x = 1\}$.

Por otro lado, si L no es débilmente subfit entonces existe un $a \neq 0$ tal que $a \vee x = 1 \iff x = 1$, entonces $u = \bigwedge\{x : a \vee x = 1\} = 1$ y $a \wedge u = a \neq 0$. □

Con esto, obtenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.1.15. *Un locale es subfit si y solo si la operación de Heyting está dada por*

$$a \rightarrow b = \bigwedge\{x \in L : a \vee x = 1, x \geq b\}$$

Demostración. Si L es subfit, entonces $c(b)$ es débilmente subfit y tenemos

$$a \rightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow b) = (a \vee b) \rightarrow b$$

como $a \vee b \geq b$, denotamos $(a \vee b)^{*b}$ el pseudocomplemento de $a \vee b$ calculado en $c(b)$, de esta forma obtenemos

$$a \rightarrow b = (a \vee b)^{*b} = \bigwedge\{x : a \vee b \vee x = 1, x \geq b\} = \bigwedge\{x : a \vee x = 1, x \geq b\}$$

lo que se buscaba.

Por otro lado, si L no es subfit entonces existe algún $b \in L$ tal que su sublocale cerrado $c(b)$ no es débilmente subfit y por el resultado anterior, existe $a \geq b$ tal que

$$a^{*b} \neq \bigwedge\{x : a \vee x = 1, x \geq b\}$$

es decir $a \rightarrow b \neq \bigwedge\{x : a \vee x = 1, x \geq b\}$. □

Un aporte a la teoría es la generalización del ejemplo ??.

Proposición 3.1.16. *Sea A un dominio de ideales principales. Entonces $X = \text{Spec}(A)$ es subfit.*

Demostración. Sea $X = \text{Spec}(A)$ con A dominio de ideales principales, entonces consideramos $U \uparrow$ para $U \in \Omega(X)$, como A es dominio de ideales principales, entonces $U = X \setminus V(f)$ con $f \in A$, esto es $U = D(f)$, entonces tomamos $V \in U \uparrow$ distinto de U , entonces existe $g \in A$ tal que $V = D(f) \cup D(g)$. Consideramos $W = D(f) \cup D(g+1)$ y notamos que $V \cup W = D(f) \cup D(g) \cup D(g+1)$ pero como g y $g+1$ son coprimos entonces $D(g) \cup D(g+1) = X$ por lo tanto $V \cup W = X$, es decir $U \uparrow$ es sublocale cerrado débilmente subfit, como fue arbitrario, X es subfit. $\square$

Retomaremos, algunos aspectos de los locales subfit posteriormente.

3.2. Locales T_2

El axioma T_2 establece una condición de separación más fuerte que T_1 , requiriendo que para cualquier par de puntos distintos en un espacio topológico, existan entornos abiertos disjuntos que los contengan esta propiedad asegura que los puntos puedan ser separados de manera clara y precisa, lo que tiene implicaciones importantes en muchas áreas de las matemáticas la capacidad de separar puntos con entornos disjuntos es crucial para la definición de convergencia única de sucesiones y para la construcción de espacios topológicos bien comportados.

Los espacios que satisfacen el axioma T_2 se denominan espacios de Hausdorff, y poseen propiedades topológicas deseables que los hacen especialmente útiles en análisis y geometría por ejemplo, en espacios de Hausdorff, los límites de sucesiones convergentes son únicos, lo que simplifica muchas demostraciones y facilita la definición de conceptos como continuidad la propiedad de Hausdorff también es esencial para la definición de variedades topológicas y otras estructuras geométricas importantes.

Recordemos que un espacio topológico es Hausdorff si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos $U, V \in \Omega(X)$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Para el estudio de una versión libre de puntos, dependiendo del propósito que uno pueda adoptar, se obtienen distintos resultados, es por ello que se presentan distintas aproximaciones a este concepto.

3.2.1. Debilmente Hausdorff

Primeramente, presentamos algunas versiones débiles de T_2 en locales.

Definición 3.2.1 (dH). *Un locale es debilmente Hausdorff si $a \vee b = 1$ con $a, b \neq 1$, entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.*

Damos una definición ligeramente mas fuerte que la anterior

Definición 3.2.2 (dH'). *Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$ entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ con $u \wedge v = 0$.*

E incluso, una versión más fuerte y geoméricamente intuitiva

Definición 3.2.3 (dH''). *Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$ entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $u \leq b$, $v \leq a$ con $u \wedge v = 0$.*

Pese a esta variedad, cabe aclarar que las condiciones no son conservativas, esto pues en una cadena la premisa de no comparabilidad es vacía, entonces las condiciones son trivialmente satisfechas.

Por otro lado, considerando un locale subfit, las tres condiciones son equivalentes, tal como lo mostramos a continuación

Proposición 3.2.4. *Bajo subfit, las condiciones dH, dH', dH'' son equivalentes en locales.*

Demostración. Veamos que dH implica dH'. Sea L un locale subfit. Si es dH y $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$, entonces por subfit existe un $c \in L$ tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$. En particular $a \not\leq b \vee c$, de lo contrario, por transitividad $1 = a \vee c \leq b \vee c$, lo cual es una contradicción. Notemos que $a \vee (b \vee c) = 1$ entonces por dH existen u, v tal que $u \not\leq a$, $v \not\leq b \vee c$, en particular, nuevamente por transitividad, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$ y de esta forma L es dH'.

Si L es dH', subfit y $a \not\leq b$, $b \not\leq a$, usando nuevamente subfit existen c_1, c_2 tales que

$$a \vee c_1 = 1 \neq b \vee c_1 \quad a \vee c_2 \neq 1 = b \vee c_2$$

de esto tenemos

$$b \vee c_1 \not\leq a \vee c_2 \quad a \vee c_2 \not\leq b \vee c_1$$

en efecto, si asumimos que $b \vee c_1 \leq a \vee c_2$, por transitividad $b \leq a \vee c_2$ entonces $1 = b \vee c_2 \leq a \vee c_2$ lo cual es una contradicción. La otra desigualdad se sigue con un razonamiento similar.

Ahora por dH' tenemos u', v' tales que $u' \not\leq a \vee c_2$, $v' \not\leq b \vee c_1$ con $u' \wedge v' = 0$ entonces definimos $u = u' \wedge b$. Notemos que $u \not\leq a$, de lo contrario obtenemos

$$u' = u' \wedge 1 = u' \wedge (b \vee c_2) = (u' \wedge b) \vee (u' \wedge c_2) = u \vee (u' \wedge c_2) \leq a \vee (u' \wedge c_2) \leq a \vee c_2,$$

Lo cual es una contradicción. De manera análoga definimos $v = v' \wedge a$ y notamos que $v \not\leq b$. Finalmente $u \wedge v = 0$ por asociatividad.

Para verificar que dH" implica dH, basta considerar que si $a, b \neq 1$ y $a \vee b = 1$ entonces $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$ pues de otra forma $a \vee b = a$ o $a \vee b = b$. De ahí se sigue de forma directa la implicación.

□

3.2.2. Hausdorff

Ahora, dado nuevamente un espacio topológico (X, τ) definimos

$$U \sqsubset V \iff U \subseteq V, \overline{U} \cup V \neq X (**)$$

Con esto, obtenemos la siguiente equivalencia

Proposición 3.2.5. *Un espacio topológico T_0 X es Hausdorff si y solo si*

$$\forall V \in \Omega(X), V \neq X, \quad V = \bigcup \{U \mid U \sqsubset V\}$$

Demostración. Sea X Hausdorff, $V \in \Omega(X)$ con $V \neq X$. Veamos por contenciones. Si $x \in \bigcup \{U : U \sqsubset V\}$ entonces existe U_0 tal que $x \in U_0$ con $U_0 \sqsubset V$, entonces $x \in U_0 \subseteq V$, luego $x \in V$ por lo tanto $\bigcup \{U : U \sqsubset V\} \subseteq V$. Por otro lado, sea $x \in V$. Como $V \neq X$ entonces existe $y \in X$ con $y \notin V$, luego $x \neq y$ por Hausdorff existen abiertos disjuntos U, W tal que $x \in U, y \in W$, luego $\overline{U} \cap W = \emptyset$, podemos asumir $U \subseteq V$. Entonces $y \notin \overline{U} \cup V$, por lo tanto $\overline{U} \cup V \neq X$, es decir $V \subseteq \bigcup \{U : U \sqsubset V\}$, luego, la igualdad.

Para el recíproco, sean $x, y \in X$ con $y \neq x$, por T_0 $x \notin \overline{\{y\}}$ y tenemos

$$x \in X \setminus \overline{\{y\}} = \bigcup \{U : U \sqsubset X \setminus \overline{\{y\}}\}$$

y entonces existe $U \ni x$ tal que $U \subseteq X \setminus \overline{\{y\}}$, y un $z \notin \overline{U} \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$. En particular $z \notin \overline{U}$ y existe un $V \ni z$ tal que $V \cap U = \emptyset$. Pero también $z \notin X \setminus \overline{\{y\}}$, esto es $z \in \overline{\{y\}}$ y entonces $y \in V$.

□

Tenemos obviamente que $\overline{U} \cup V \neq X$ si y solo si $X \setminus \overline{U} \not\subseteq V$ asi que podemos reescribir la formula (***)

$$U \sqsubset V \iff U \subseteq V, U^* \not\subseteq V$$

Entonces podemos introducir una condición mas general tipo Hausdorff en locales de la siguiente manera

Definición 3.2.6 (T2). *Si $a \neq 1$ entonces $a = \bigvee \{u : u \sqsubset a\}$ donde $u \sqsubset a \iff (u \leq a, u^* \not\leq a)$.*

Tenemos la siguiente caracterización

Proposición 3.2.7. *Sea L un locale, son equivalentes:*

1. L es T_2
2. Si $1 \neq a \not\leq b$, entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

Demostración. Si L es T_2 y consideramos $a, b \in L$ con $1 \neq a \not\leq b$ entonces existe $w \sqsubset a$ tal que $w \leq a$ y $w \not\leq b$, entonces definimos $u = w^*$ y $v = w$. Es claro que satisfacen la condición.

Para el reciproco si consideramos $a \in L$ con $a \neq 1$ y $b = \bigvee \{x : x \sqsubset a\}$ es claro que $b \leq a$. Si suponemos que $b < a$ entonces $1 \neq a \not\leq b$, luego existen $u, v \in L$ con $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$, entonces tenemos que $u \leq v^*$. Si $v^* \leq a$ entonces $u \leq a$ lo cual no puede suceder, entonces $v^* \not\leq a$, por lo tanto $v \sqsubset a$, es decir $v \leq b$ lo que es una contradicción. De esta forma no se tiene la desigualdad estricta, entonces L es T_2 . $\square$

Entonces esta ultima condición es la que tomaremos como T_2 .

Por otro lado, tenemos el siguiente axioma.

Definición 3.2.8 (S2). *Si $1 \neq a \not\leq b$, entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.*

Entonces tenemos que las dos definiciones son equivalentes.

Proposición 3.2.9. *S2 y T2 son equivalentes.*

Demostración. Trivialmente, T2 implica S2. Ahora sea L un locale S2. Si $a = a \wedge a \not\leq b$, entonces $a \not\leq a \rightarrow b$ y existe u, v con $u \wedge v = 0$, $u \not\leq a$ y $v \not\leq a \rightarrow b$, así $v' = v \wedge a \not\leq b$ y tenemos $v' \leq a$. $\square$

Además observemos lo siguiente

Proposición 3.2.10. *$S2$ implica dH' y dH' y $sfit$ implica $S2$.*

Demostración. Lo primero es trivial, si $b \not\leq a$ entonces $a \neq 1$.

Ahora sea L subfit con dH' y sea $1 \neq a \not\leq b$ entonces tenemos un c tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$. Entonces $b' = b \vee c \not\leq a$ pues si $b \vee c \leq a$ entonces $a = a \vee c = 1$, y $a \not\leq b'$ pues si $a \leq b \vee c$ entonces $1 = a \vee c \leq b \vee c$. Aplicando dH' para a, b' , si $v \not\leq b \vee c$ entonces $v \not\leq b$. □

Así dada la equivalencia anterior, podemos acordar la versión *canónica* del axioma Hausdorff en un lenguaje libre de puntos como

Definición 3.2.11 (H). *Para cualquier $1 \neq a \not\leq b$ existen u, v tal que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.*

Esto es

Para cualquier $1 \neq a \not\leq b$ existe un u tal que $u \not\leq a$ y $u^ \not\leq b$.*

Notamos que X es Hausdorff si y solo si $\Omega(X)$ es Hausdorff, es decir, esta propiedad es conservativa.

Veamos un ejemplo clásico.

Ejemplo 3.2.12. *Consideremos a los reales $\mathbb{R}$ con la siguiente base: $\mathcal{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(a, b) \setminus K : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ donde $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos que esta topología es más fina que la topología usual, por lo tanto es Hausdorff. Posteriormente veremos que no es regular.*

Además, como en topología clásica tenemos

Proposición 3.2.13. *Un sublocale de un Hausdorff es Hausdorff*

Demostración. Sean $a, b \in S$ con $1 \neq a \not\leq b$, así podemos encontrar $x, y \in L$ con $x \wedge y = 0$, $x \not\leq a$, $y \not\leq b$ entonces sea $u = v_S(x)$ y $v = v_S(y)$ en S , claramente $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = v_S(x \wedge y) = 0_s$. □

3.2.3. Punto Hausdorff

Recordemos que un elemento $p \in L$ es primo si $a \wedge b \leq p$ implica que $a \leq p$ o $b \leq p$ y estos elementos son los puntos espectrales de L . Ahora un elemento p es semiprimo si $a \wedge b = 0$ implica que $a \leq p$ o $b \leq p$. Obviamente todo elemento primo es semiprimo.

Con esto, tenemos la siguiente equivalencia

Teorema 3.2.14. *Un espacio T_0 X es Hausdorff si y solo si todos los elementos semiprimos $P \in \Omega(X)$ son máximos.*

Demostración. Sea X Hausdorff y $P \in \tau$ un semiprimo y supongamos que hay x_1, x_2 que no están en P . Entonces existen $U_1 \ni x_1$, $U_2 \ni x_2$ disjuntos, entonces al menos uno de ellos, digamos U_1 que está contenido en P , luego $x_1 \in P$, una contradicción.

Por otro lado, sea X no Hausdorff, entonces hay x_1, x_2 distintos tales que para $U_1, U_2 \in \tau$ con $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $P = X \setminus \{x_1, x_2\}$. Supongamos que $U \cap V = \emptyset$ y $U \not\subseteq P$. Dado que U es abierto, significa que algun x_i esta en el. Supongamos que x_1 , entonces $x_1 \notin V$, pero $x_2 \notin V$, por asumsion de x_1, x_2 . Así $V \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$ y dado que es abierto, $V \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$ y $V \subseteq P$. Entonces P es semiprimo, y dado que X es T_0 , $P \neq X \setminus \{x_1\}$ $P \neq X \setminus \{x_2\}$, luego no es máximo. $\square$

Esto, nos lleva a la siguiente definición

Definición 3.2.15 (pH). *Un locale L es punto-Hausdorff si todo semiprimo es máximo.*

Por el teorema anterior, notamos que bajo T_0 , este axioma es conservativo. Además, tenemos que:

Proposición 3.2.16. *Todo locale L Hausdorff es punto Hausdorff.*

Demostración. Sea L un locale Hausdorff y $p \in L$ un elemento semiprimo. Si p no es máximo, entonces tenemos un $a \in L$ tal que $p < a \neq 1$ y por ser Hausdorff, existen $u, v \in L$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq p$ y $u \wedge v = 0$. Ahora como $v \not\leq p$ tenemos que $u \leq p < a$, una contradicción. $\square$

Pese a que es bien comportado en una cuestión categórica este axioma, cabe recalcar que no es un axioma libre de puntos en su totalidad pues tal como en T_1 bastaría considerar un locale sin elementos semiprimos para que el axioma se cumpla por vacuidad.

3.3. Locales fit

Proposición 3.3.1. *Sea L un locale subfit. Entonces para cada sublocale $S \neq L$ existe un sublocale cerrado no vacío $c(a)$ tal que $c(a) \cap S = O$*

Demostración. Sea $S \subseteq L$ disjunto de un sublocale cerrado no vacío. Consideremos ν_S el núcleo asociado a S , entonces si $\nu_S(a) = 1$ tenemos que $a = 1$, de lo contrario, tendríamos $a \uparrow \cap S = O$ con $a \uparrow \neq O$.

Sea $x \in L$ y consideramos $c \in S$ tal que $c \vee \nu_S(x) = 1$. Dado que $1 = c \vee \nu_S(x) \leq \nu_S(c \vee x)$, tenemos que $c \vee x = 1$. Entonces, por subfit, $\nu_S(x) \leq x$ y obtenemos que $\nu_S(x) = x$, pero como x es arbitrario, concluimos que $S = L$. □

Teorema 3.3.2. *Las siguientes condiciones sobre un locale L son equivalentes:*

1. L es subfit
2. El único sublocale de L que no es disjunto de un sublocale cerrado no vacío es L mismo
3. Todo sublocale abierto en L es supremo de sublocales cerrados

Demostración. La primera implicación se sigue de la proposición 3.3.1. Ahora, si asumimos 2), para un sublocale $o(a)$, con $a \in L$, considero $S = \bigvee \{c(b) : c(b) \subseteq o(a)\}$. Tenemos primeramente que $S \subseteq o(a)$, veamos la siguiente contención. Sea $c(x)$ un sublocale disjunto de $c(a) \vee S$, entonces $c(x \vee a) = c(x) \cap c(a) = O$ y además $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \subseteq S$ y $c(x) \cap S$, entonces $c(x) = O$ y por 2) $c(a) \vee S = L$, entonces $S \subseteq o(a)$ y concluimos que $S = o(a)$. Para la ultima implicación, recordemos que

$$c(a) \subseteq o(b) \iff a \vee b = 1$$

Ahora, si $a \not\leq b$ entonces $o(a) \not\subseteq o(b)$, así existe $x \in L$ de forma que $c(x) \subseteq o(a)$ pero $c(x) \not\subseteq o(b)$, entonces $x \vee a = 1 \neq x \vee b$. □

Veamos entonces una "dualidad".

Teorema 3.3.3. *Todo sublocale cerrado en L es intersección de sublocales abiertos si y solo si se cumple*

$$\forall a, b \in L, a \not\leq b \Rightarrow \exists c, a \vee c = 1, c \rightarrow b \neq b$$

Demostración. Sean $a, b \in L$ con $a \not\leq b$ entonces $b \notin c(a)$ pero como $c(a)$ es intersección de sublocales abiertos entonces existe $x \in L$ tal que $b \notin o(x)$ pero $c(a) \subseteq o(x)$, entonces $b \rightarrow x \neq b$ y $a \vee x = 1$.

Por otro lado, si asumimos la condición, queremos demostrar

$$c(a) = \bigcap \{o(x) : a \vee x = 1\}$$

Notemos que si $c(a) \subseteq o(x)$ para cada x tal que $a \vee x = 1$ entonces $c(a) \subseteq \bigcap \{o(x) : a \vee x = 1\}$ por lo que basta mostrar que

$$c(a) \supseteq \bigcap \{o(x) : a \vee x = 1\}$$

lo que es equivalente a que si $a \vee x = 1$ y $x \rightarrow b = b$ entonces $a \leq b$, esto es, si $a \not\leq b$ existe x tal que $a \vee x = 1$ y $x \rightarrow b \neq b$. $\square$

Con esto, introducimos el siguiente axioma.

Definición 3.3.4. Sea L un locale, decimos que es fit si para cada $a, b \in L$ de forma que $a \not\leq b$, existe $c \in L$ tal que $a \vee c = 1$ y $c \rightarrow b \neq b$.

Un resultado esperado es el siguiente.

Proposición 3.3.5. Si L es un locale fit, entonces es subfit.

Demostración. Si L es un locale fit y $a \not\leq b$ y tomamos c de la condición fit pero $b \vee c = 1$, entonces obtenemos

$$b = 1 \rightarrow b = (b \vee c) \rightarrow b = (b \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) = 1 \wedge (b \rightarrow c) = b \rightarrow c,$$

una contradicción. $\square$

Ahora, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.6. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sean u, v dos elementos distintos con $u, v \notin \mathbb{N}$. Para $t = u, v$ y $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$B(t, m) = \{t\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$$

y consideramos la siguiente base

$$\mathcal{B} = \{U \mid U \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{B(t, m) \mid t = u, v; m \in \mathbb{N}\}.$$

Denotamos por X a $\mathbb{N} \cup \{u, v\}$.

Afirmamos que X es fit. Usamos la caracterización: L es fit si para todo $A \not\leq B$ existen C, D tales que

$$A \cup C = X, \quad C \cap D \subseteq B, \quad D \not\subseteq B.$$

Si $A \cap \mathbb{N} \not\subseteq B$ consideramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in A \setminus B$ y consideramos $C = X \setminus \{m\}$ y $D = \{m\}$. Es claro que satisfacen la condición.

Por otro lado, si $A \not\subseteq B$ pero $A \cap \mathbb{N} \subseteq B$, entonces consideramos $u \in A$ con $u \notin B$, entonces $B(u, m) \subseteq A$ para algun $m \in \mathbb{N}$ y consideramos $C = X \setminus \{u\}$ y $D = B(u, m)$, entonces tenemos

$$D \cap C = \{n : n \geq m\} \subseteq B$$

Pero $D \not\subseteq B$.

Veamos el comportamiento de este axioma en sublocales.

Teorema 3.3.7. *Cada sublocale de un locale fit es fit.*

Demostración. Sea $S \subseteq L$ sublocale de L . Si $a \not\leq b$ en S , lo es en L , entonces existe $c \in L$ tal que $a \vee c = 1$ y $c \rightarrow b \neq b$. Considero $c' = \nu_S(c)$, entonces tenemos que

$$1 = a \vee c \leq a \vee c' \leq a \vee_S c'.$$

Por otro lado, $c' \rightarrow b = c \rightarrow b \neq b$.

□

Mas aun, tenemos la siguiente equivalencia.

Teorema 3.3.8. *Un locale es fit si y solo si sus sublocales son subfit*

Demostración. Basta ver la otra implicación. Supongamos que cada sublocale de L es subfit, pero L no es fit, entonces existen $a \not\leq b$ tal que para cada u que cumpla $a \vee u = 1$, $u \rightarrow b = b$. Entonces definimos

$$S = \{x : a \vee u = 1 \Rightarrow u \rightarrow x = x\}$$

Afirmamos que es sublocale.

- S es no vacío pues $1 \in S$ y si tenemos $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq S$ y $a \vee u = 1$, entonces $u \rightarrow x_i = x_i$ para cada $i \in I$, luego, $u \rightarrow \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} (u \rightarrow x_i) = \bigwedge_{i \in I} x_i$, es decir, S es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.
- Sea $x \in S$, y arbitrario y $a \vee u = 1$ entonces

$$u \rightarrow (y \rightarrow x) = y \rightarrow (u \rightarrow x) = y \rightarrow x,$$

entonces S es cerrado bajo implicación de Heyting.

Entonces S es sublocale, luego por hipótesis, es subfit. Notamos que $a, b \in S$, entonces existe $c \in L$ tal que $a \vee_S c = 1 \neq b \vee_S c$.

Ahora, si $a \vee u = 1$, entonces

$$u \rightarrow (a \vee c) = \bigwedge \{z \in L : u \vee z = 1, x \geq a \vee c\} = a \vee c,$$

entonces $a \vee c \in S$, luego $a \vee c = a \vee_S c$. Así $a \vee c = 1$, pero $1 = c \rightarrow c = c$, una contradicción. Por lo tanto, L es fit.

□

3.4. Espacios Regulares y Normales

Recordemos que un espacio topológico X es regular si para cada $x \in X$ y cerrado $A \subseteq X$ tal que $x \notin A$, existen abiertos disjuntos $U, V \in \Omega(X)$ tal que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Para traducir este axioma al lenguaje de locales, primeramente, definimos la siguiente relación en la retícula de abiertos $\Omega(X)$ de un espacio topológico X . Para cada $U, V \in \Omega(X)$ decimos que U está por debajo de V si y solo si $\overline{U} \subseteq V$ y lo denotamos por $U \prec V$.

Dado que $U^* = X \setminus \overline{U}$, podemos notar que

$$U \prec V \iff \overline{U} \subseteq V \iff U^* \cup V = X$$

De esta forma damos el axioma de regularidad en terminos de abiertos

Teorema 3.4.1. *Sea X un espacio topológico, X es regular si para cada $U \in \Omega(X)$ se cumple que*

$$U = \bigcup \{V \in \Omega(X) : V \prec U\}.$$

Demostración. Si X es regular y tomamos $U \in \Omega(X)$. Para cada $x \in U$ consideramos $A = X \setminus U$ entonces por regularidad tenemos abiertos $V_x \ni x$ y $W \supseteq A$ disjuntos, luego notamos

$$A \subseteq W \Rightarrow X = A \cup U \subseteq W \cup U$$

por lo tanto $W \cup U = X$, es decir $V_x \prec U$ y finalmente

$$U = \bigcup \{V_x : x \in U\} \subseteq \{V : V \prec U\} \subseteq U.$$

y entonces cumple la condición.

Para el reciproco si asumimos la condición y tomamos $x \in X$ y $A \subseteq$ cerrado con $x \notin A$, entonces $x \in U = X \setminus A$ y por la condición tenemos que existe $V \in \Omega(X)$ con $x \in V \prec U$ y tenemos que $A \subseteq W = X \setminus \overline{V}$ y por lo tanto $V \cup W = \emptyset$.

□

Ejemplo 3.4.2. *El ejemplo en 3.2.12 no es regular pues K es cerrado y $0 \notin K$, sin embargo, no pueden ser separados.*

De esto, tenemos la siguiente definición en terminos de locales.

Definición 3.4.3. *Sea L un locale, decimos que es regular si para cada $a \in L$ se cumple que*

$$a = \bigvee \{b \in L : b \prec a\}$$

donde $b \prec a \iff$ existe c tal que $b \wedge c = 0$ y $c \vee a = 1$.

Tenemos el siguiente ejemplo en el que comparamos la definición clásica con su versión libre de puntos.

Ejemplo 3.4.4. Sea B un álgebra booleana completa, consideramos $X = \text{Spec}(B) := \{F \subseteq B : F \text{ es ultrafiltro}\}$. Definimos los siguientes conjuntos $U_a := \{F \in X : a \in F\}$ para cada $a \in B$ y definimos la siguiente base $\mathcal{B} := \{U_a : a \in B\}$. Notamos que es una base de cerrados, en efecto para cada básico tenemos que

$$X \setminus U_a = \{F \in X : a \notin F\} = \{F \in X : a^c \in F\} = U_{a^c}.$$

Afirmamos que es regular en el sentido clásico. Sea $F \in X$ un punto y C cerrado en X tal que $F \notin C$, entonces $F \in X \setminus C$. Como $X \setminus C$ es abierto entonces existe $a \in B$ tal que $F \in U_a \subseteq X \setminus C$, además tenemos que

$$U_a \subseteq X \setminus C \Rightarrow X \setminus U_a \supseteq C$$

es decir $C \subseteq U_{a^c}$. Trivialmente obtenemos que $U_a \cap U_{a^c} = \emptyset$.

El espacio construido aquí es el arquetipo de los llamados espacios de Stone.

Ahora con la versión libre de puntos.

Ejemplo 3.4.5. Mas generalmente, como en el ejemplo anterior, afirmamos que las álgebras booleanas completas B son regulares. Sea $a \in B$, veamos que

$$a = \bigvee \{x \in B : x \prec a\}.$$

Como los pseudocomplementos en álgebras booleanas coinciden con los complementos, tenemos que $a \prec a$ pues $a^* \vee a = 1$ y $a^* \wedge a = 0$. Ahora notemos que para cada $x \in B$ tal que $x \prec a$, $x \leq a$. Supongamos lo contrario, que $x \prec a$ pero $x \not\leq a$, entonces $a^* \not\leq x^*$, entonces $1 = a \vee a^* \not\leq a \vee x^*$ lo cual es una contradicción, entonces $x \leq a$, por lo tanto a es cota superior de todo elemento que esta por debajo de a , luego B es regular.

Esta condición es más fuerte que la regularidad usual pues como se ha mencionado antes, existen álgebras booleanas que no tienen elementos $\wedge$ -irreducibles, es decir, no son espaciales.

Veamos el siguiente resultado

Proposición 3.4.6. Sea L un locale, entonces es regular si y solo si para todo $a, b \in L$ tal que $a \not\leq b$ existe c tal que $a \vee c = 1$ y $c \rightarrow 0 \not\leq b$.

Demostración. Si L es regular y $a, b \in L$ con $a \not\leq b$ entonces existe $x \prec a$. En particular $x \leq a$ pero $x \not\leq b$, entonces existe c con $x \wedge c = 0$ y $a \vee c = 1$, veamos que $c \rightarrow 0 \neq b$. Supongamos que $c \rightarrow 0 \leq b$, notamos que $c \rightarrow 0 = c^*$ entonces $x \leq c^*$, luego por transitividad $x \leq b$, lo que es una contradicción, entonces $c \rightarrow 0 \not\leq b$, luego la desigualdad. Por lo tanto, se cumple la condición.

Para el recíproco, dado $a \in L$ y denotando $b = \bigvee \{x : x \prec a\}$ sabemos que $b \leq a$. Si suponemos la desigualdad estricta entonces $a \not\leq b$ luego existe $c \in L$ tal que $a \vee c = 1$ y $c \rightarrow 0 \neq b$. Notamos que $c \rightarrow 0 \wedge c = 0$, es decir $c \rightarrow 0 \prec a$ por lo tanto $c \rightarrow 0 \leq b$ lo cual no puede suceder. Luego tenemos que $a = \bigvee \{x : x \prec a\}$. □

Notemos que regular implica fit. Sea L regular, $a, b \in L$ tales que $a \not\leq b$, luego existe c tal que

$$a \vee c = 1 \quad c \rightarrow 0 \neq b$$

Afirmamos que $c \rightarrow b \neq b$. Si suponemos que $c \rightarrow b = b$ entonces

$$0 = (c \rightarrow 0) \wedge c \leq b \iff c \rightarrow 0 \leq c \rightarrow b = b$$

lo cual no puede suceder por regularidad.

Sin embargo, el ejemplo en 3.3.6 refleja que fit no implica regular

Ejemplo 3.4.7. *Veamos ahora que el espacio X en 3.3.6 es T_1 , pero no es regular.*

Si $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $X \setminus \{m\} = \{n \mid n < m\} \cup B(u, m) \cup B(v, m)$ es abierto.

Por otro lado, si $u \notin \mathbb{N}$, $X \setminus \{u\} = B(v, 0)$ es abierto. Análogamente para $v \notin \mathbb{N}$, Por lo tanto, todo punto es cerrado y X es T_1 .

Veamos que no es regular, considero $u, v \in X$, por lo antes mencionado $\overline{\{v\}} = \{v\}$ y $u \notin \{v\}$. Sean U, V abiertos tales que $u \in U$ y $\{v\} \subseteq V$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $B(u, m) \subseteq U$ y $B(v, n) \subseteq V$. Luego

$$U \cap V \supseteq B(u, m) \cap B(v, n) \supseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \max(m, n)\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, no es regular. Con el mismo razonamiento, no es T_2 .

Ahora procedemos con el siguiente axioma de separación.

Recordemos que un espacio topológico X es normal si para cada par de cerrados disjuntos $A, B \subseteq X$ existe abiertos disjuntos U, V tal que $A \subseteq U, B \subseteq V$.

Reformulamos la normalidad como sigue en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.8. *Un espacio topológico X es normal si y solo si para cada par de abiertos S, T tal que $S \cup T = X$, existen abiertos disjuntos, U, V tal que $S \cup U = X = T \cup V$.*

Demostración. Asumamos normalidad. Sean S, T abiertos en X tales que $S \cup T = X$, consideramos entonces los cerrados $A = X \setminus S, B = X \setminus T$ y notamos que $A \cap B = \emptyset$, por normalidad existen abiertos disjuntos $U, V \in \Omega(X)$ tal que $A \subseteq U, B \subseteq V$. Como $A \cup S = X$, entonces $U \cup S = X$. Procedemos de forma similar para notar que $V \cup T = X$.

Por otro lado, asumiendo la condición, sean A, B cerrados disjuntos en X y consideramos $S = X \setminus A, T = X \setminus B$. Notamos que $S \cup T = X$, entonces por la condición, existe abiertos disjuntos $U, V \in \Omega(X)$ tal que $S \cup U = X = T \cup V$. Como $A \subseteq X = S \cup U$, pero $S = X \setminus A$, entonces $A \subseteq U$. De manera análoga $B \subseteq V$, es decir, X es normal. $\square$

Entonces, definimos normalidad en locales

Definición 3.4.9. *Sea L un locale. Decimos que es normal si para cada $a, b \in L$ tal que $a \vee b = 1$, entonces existe $u, v \in L$ con $u \wedge v = 0$, tal que $a \vee u = 1 = b \vee v$.*

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.4.10. *Sea $X = \mathbb{N}_{\geq 2}$ y definimos los siguientes básicos: $U_a := \{x \in X : x \mid a\}$ para $a \in X$. Afirmamos que X es normal.*

Para esto dados dos abiertos propios U y V nunca sucede que $U \cup V = X$. Si $U \cup V = X$, consideramos $a \in X \setminus U, b \in X \setminus V$ y $m = MCM(a, b)$, tenemos que $m \in X$ entonces $m \in U$ o $m \in V$. Si $m \in U$ entonces existe $x \in X$ con $m \in U_x$ esto sucede si y solo si $m \mid x$ pero $a \nmid m$, por lo tanto $a \nmid x$ entonces $a \in U_x \subseteq U$, o que es una contradicción. Análogamente llegamos a que $b \in V$, lo cual no puede ser entonces $U \cup V \neq X$. Entonces por vacuidad X es normal.

Notamos que considerando el axioma subfit junto a normalidad, podemos implicar regularidad.

Teorema 3.4.11. *Sea L un locale subfit y normal, entonces L es regular.*

Demostración. Sea $u \in L$ tal que

$$u \neq \bigvee \{v \in L : v \prec u\}.$$

Como L es subfit, existe $w \in L$ tal que

$$u \vee w = 1 \neq w \vee \left(\bigvee \{v \in L : v \prec u\} \right)$$

Por normalidad, dado que $u \vee w = 1$, entonces existen $u_1, u_2 \in L$ tales que $u \vee u_1 = 1 = w \vee u_2$ y $u_1 \wedge u_2 = 0$. Como $u_1 \leq u_2^*$, entonces $1 = u \vee u_1 \leq u \vee u_2^*$, luego $u_2 \prec u$. De esta forma obtenemos que $u_2 \leq \bigvee \{v \in L : v \prec u\}$, por lo tanto $1 = w \vee u_2 \leq w \vee (\bigvee \{v \in L : v \prec u\})$, una contradicción, por lo tanto L es normal.

□

Para el caso donde $L = \Omega(X)$ para un espacio topológico X , notamos que no es necesario que X sea T_1 y normal para implicar regularidad.

Conclusión

El presente trabajo de tesis ha realizado un estudio riguroso y sistemático de los axiomas de separación clásicos en topología y su contraparte en teoría de marcos y locales, estableciendo de esta forma un puente formal y detallado entre estas dos perspectivas de un mismo fenómeno.

Esta exploración ha confirmado la solidez de la teoría de locales como una base viable y rigurosa para la topología general, al tiempo que ha iluminado las sutiles distinciones que emergen al prescindir de la noción de punto.

Se hace hincapié en la formulación de condiciones de separación en un espíritu meramente algebraico, tal como se abordaron en el capítulo 3. Se confirmó que la traducción del axioma T_1 a través de la propiedad de sus elementos $\wedge$ -irreducibles resulta insatisfactoria para una teoría *libre de puntos* recurriendo a aproximaciones como tal fue el caso del axioma *subfit* tomando como referencia el espectro de anillos conmutativos que bajo ciertas condiciones cumple este último axioma.

Asimismo, el estudio del axioma Hausdorff (T_2) reveló que su versión localica se descompone en varias condiciones no necesariamente equivalentes en el contexto libre de puntos, lo cual reafirma la riqueza estructural de la categoría de locales. Finalmente, en el contexto de regularidad se destaca la diversidad de equivalencias que tiene este axioma pues de ser una propiedad ligada íntimamente al concepto de punto y de cerrado, se puede traducir de forma natural haciendo uso de la relación "estar por debajo" y de esta forma retraducir esta propiedad haciendo uso de los pseudocomplementos y al mismo tiempo, de forma canónica, estar relacionado con los axiomas *fit* y *subfit*, formando así, otra jerarquía.

Mas aun, se retoma el objetivo de clarificar y sistematizar una teoría avanzada, logrando dos aportes clave. Primero, se presentan nuevas demostraciones detalladas de los teoremas que definen los axiomas locale, creando un recurso pedagógico valioso. Segundo, se incorpora un análisis aplicado de ejemplos clásicos de topología, lo que ayuda a entender

cómo se manifiestan las propiedades topológicas en el álgebra, desde una perspectiva sin puntos.

Este trabajo de tesis realizado no solo cierra el círculo de los objetivos propuestos, sino que da apertura a líneas de investigación futuras. Entre ellas está el ampliar la teoría de axiomas de separación hacia el contexto de estructuras categóricas relacionadas, tal es el caso de la teoría de topos de Grothendieck. Esta transición es natural, dado que los topos son concebidos como espacios topológicos generalizados, cuya lógica interna se modela a través de los locales.

En conclusión, esta tesis confirma la elegancia de la topología sin puntos como un área fértil para la investigación matemática contemporánea, dejando una base sólida para futuros desarrollos.

Bibliografía

- [1] Igor Arrieta, Jorge Picado y Ales Pultr. «Notes on the spatial part of a frame». En: *Categories and General Algebraic Structures with Applications* 20.1 (2024), págs. 105-129.
- [2] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra: Volume 3, Sheaf Theory*. Vol. 3. Cambridge university press, 1994.
- [3] Brian A Davey e Hilary A Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press, 2002.
- [4] Jean Alexandre Dieudonne y Alexandre Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique*. Vol. 166. Springer Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [5] Felix Hausdorff. *Grundzüge der mengenlehre*. Vol. 7. von Veit, 1914.
- [6] John R Isbell. «Atomless parts of spaces». En: *Mathematica Scandinavica* 31.1 (1972), págs. 5-32.
- [7] Peter T Johnstone. *Stone spaces*. Vol. 3. Cambridge university press, 1982.
- [8] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Vol. 6. OUP Oxford, 2002.
- [9] James S Milne. «Fields and Galois theory». En: *Courses Notes, Version 4* (2003).
- [10] Jorge Picado y Aleš Pultr. *Frames and Locales: topology without points*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [11] Jorge Picado y Aleš Pultr. *Separation in point-free topology*. Springer, 2021.
- [12] Graciela Salicrup, Javier Rosenblueth y Carlos Prieto. *Introducción a la Topología*. Vol. 1. Sociedad Matemática Mexicana, 1993.
- [13] Marshall Harvey Stone. «Applications of the theory of Boolean rings to general topology». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 41.3 (1937), págs. 375-481.

- [14] Marshall Harvey Stone. «The theory of representation for Boolean algebras». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 40.1 (1936), págs. 37-111.
- [15] Marshall Harvey Stone. «Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics». En: *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 67.1 (1938), págs. 1-25.