BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TEORÍA DE CATEGORÍAS Y PRUEBAS DE CONSISTENCIA

TESIS

que para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

ANA MARGARITA CARRANZA LOAIZA

Director de Tesis:
Iván Martínez Ruiz

Puebla, PUE. JULIO 2015

Introducción

El problema de la consistencia e independencia de las proposiciones matemáticas aparece cuando se intenta axiomatizar la matemática. Paul Cohen desarrolla la técnica llamada forcing para la construcción de modelos de extensiones de ZFC. Por otra parte, F. W. Lawvere en su investigación para una axiomatización de la categoría de conjuntos da la definición de un topos tal y como la conocemos hoy en día, que básicamente es una categora en la que son posibles las construcciones más básicas con las que se trabaja en matemáticas.

Por su parte la teoría de Categorías desde su nacimiento ha mostrado ser una herramienta bastante útil para la comprensión y generalización de relaciones entre los objetos matemáticos, aportando claridad y sencillez en su desarrollo, aunque con una carga de abstracción detrás de ello.

En el siguiente trabajo se estudia el material necesario para entender y realizar pruebas de consistencia categóricas lo cual se hace dentro del ambiente de la teoría de topos. En particular nuestro estudio se centra en los topos de Grothendieck que son categorías de gavillas definidas sobre un sitio de Grothendieck.

Iniciamos con unos preliminares muy cortos que pretenden puntualizar ciertas nociones que aparecerán de manera recurrente durante el trabajo. En el capítulo 1 se expone a detalle todo lo relacionado con la categoría de pegavillas y realizamos las construcciones necesarias para ver que es un topos. Las pregavillas serán de suma importancia durante nuestro estudio porque todo el trabajo está centrado en gavillas, que son pregavillas con propiedades adicionales. Por otra parte, algunas de las construcciones en las categorías de gavillas se inspiran en las construcciones hechas en pregavillas.

El capítulo 2 sirve de motivación al capítulo 3 para aminorar el impacto de su abstracción, nuestra intención ha sido que una vez leído el capíulo 2, los conceptos que aparecen en el capítulo 3 sean más accesibles y puedan cobrar algún sentido con el ejemplo del capítulo 2.

Finalmente en el capítulo 4 revisamos de manera rápida algunas nociones lógicas como la de lenguaje de una teoría formal, interpretación y la relación de forzamiento y terminamos haciendo una aplicación de la teoría previa mostrando un breve ejemplo de la consistencia de la negación del Axioma de Elección con ZF, tomando en cuenta los topos que son modelos para la Teoría de Conjuntos.

Contenido

Capítulo 0

Preliminares

En esta sección presentamos los conceptos básicos que creemos necesarios para la lectura del trabajo, sin embargo, para una exposición a fondo de los conceptos y demostraciones de algunos de los resultados se pueden consultar [CT] y [CWM].

Consideramos que la notación utilizada en este trabajo es la común a cualquier texto de categorías, pero para evitar confusiones cabe señalar que $Ob(\mathcal{C})$ hace referencia a la clase de objetos de la categoría $\mathcal{C}$, mientras que $Mor(\mathcal{C})$ es la clase de morfismos de la categoría $\mathcal{C}$, o bien, $\mathcal{C}(A, B)$ denotará el conjunto de morfismos de A en B en la categoría $\mathcal{C}$. En general omitimos el símbolo $\circ$ para denotar la composición de funciones, escribiendo fg para $f \circ g$, con el objetivo de hacer menos largas las cuentas. De igual manera, cuando evaluamos un funtor F en algún objeto A, $F(A)$, o en algún morfismo f, $F(f)$, en la mayoría de los casos también se omiten los paréntesis, salvo cuando pueda dar lugar a confusiones.

0.1. Nociones límite

Definición 0.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. Un objeto $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$ es **terminal** , si para cada objeto C de $\mathcal{C}$, existe exactamente un morfismo $C \to \mathbf{1}$.

2. Un objeto $\mathbf{0}$ de $\mathcal{C}$ es **inicial** , cuando para cada objeto C de $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo $\mathbf{0} \to C$.

Definición 0.2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor.

1. Un **cono** de F es una pareja $(C, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ donde C es un objeto de $\mathcal{C}$ y para cada objeto D en $\mathcal{D}$, $p_D : C \to FD$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, de tal forma que dado $d : D \to D' \in Mor(D)$ se cumple que $p_{D'} = Fd \circ p_D$.

2. Un **(cono) límite** de F es un cono $(L, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ de F tal que para cualquier otro cono $(M, \{q_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ sobre F, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$ el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_D"'] & L \arrow[d, "p_D"] \\ & FD \end{tikzcd}$$

Se denota al límite $L = \varprojlim_{D \in Ob(\mathcal{D})} FD$.

Las nociones de cocono y cono colímite son las duales a cono y cono límite, basta con intercambiar el sentido de las flechas que aparecen en las definiciones.

Observación 0.3. Enunciamos algunas propiedades básicas de los límites, las pruebas son sencillas y pueden ser consultadas en cualquier libro introductorio de teoría de categorías.

1. Si un funtor F admite un límite, éste es único salvo isomorfismos.

2. Si $(L, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es un límite del funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, dos morfismos $f, g : M \to L$ son iguales si y sólo si para cada $D \in Ob(\mathcal{D})$, $p_D \circ f = p_D \circ g$.

Ejemplo 0.4. En la categoría de conjuntos Set, el **producto cartesiano** de conjuntos $A \times B$ es un límite.

Ejemplo 0.5. Sean $\mathcal{C}$ una categoría, I un conjunto y $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$. Un **producto** de $\{C_i\}_{i \in I}$ es $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ donde $P \in Ob(\mathcal{C})$ y para cada $i \in I$, $p_i : P \to C_i$ es morfismo en $\mathcal{C}$, además cumple que dado cualquier otro $(Q, \{q_i\}_{i \in I})$ del funtor $F : I \to \mathcal{C}$, éste se factoriza a través de P, es decir, para cada $i \in I$, existe un único $r : Q \to P$ tal que

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_i"'] & P = \prod C_i \arrow[d, "p_i"] \\ & C_i \end{tikzcd}$$

El producto de la familia $\{C_i\}$ es usualmente denotado por $\prod_{i \in I} C_i$. El producto de familias arbitrarias es un ejemplo de límite. En Set este producto corresponde al producto cartesiano de una familia.

Los objetos anteriormente definidos se caracterizan por cumplir una propiedad "universal", esto es, si tenemos varios objetos que cumplen una cierta propiedad, dado cualquiera de ellos debe factorizarse a través del objeto límite, en este sentido, el objeto límite cumple una propiedad universal. Existen muchos ejemplos de objetos o parejas de objetos y morfismos que cumplen propiedades universales.

Definición 0.6. Consideremos $f, g : A \to B$ morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. Un **igualador** de f y g es una pareja (E, e) donde E es un objeto de $\mathcal{C}$ y $e : E \to A$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ e = g \circ e$. Además dada cualquier otra pareja (M, m) con $M \in Ob(\mathcal{C})$ y $m : M \to A \in Mor(\mathcal{C})$ tal que $f \circ m = g \circ m$, existe un único $n : M \to E$ tal que $m = e \circ n$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dashed, "n"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

La noción de **coigualador** es dual a igualador y se obtiene intercambiando el sentido de las flechas.

Definición 0.7. Sean$f : A \to C$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Un **producto fibrado** de f y g es (P, f', g') donde:

i) $P \in Ob(\mathcal{C})$.

ii) $f' : P \to B$ y $g' : P \to A$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $f \circ g' = g \circ f'$.

y cumple que para cualquier otro (Q, f'', g'') tal que $Q \in Ob(\mathcal{C})$ y $f'' : Q \to B$, $g'' : Q \to A \in Mor(\mathcal{C})$ tales que $f \circ g'' = g \circ f''$, existe un único $r : Q \to P$ de tal forma que: $f'' = f' \circ r$ y $g'' = g' \circ r$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "!r"] \arrow[drr, "f''"] \arrow[ddr, "g''"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Observación 0.8. Para una categoría $\mathcal{C}$ son equivalentes:

1. $\mathcal{C}$ tiene productos fibrados y objeto terminal

2. $\mathcal{C}$ tiene productos finitos e igualadores

3. $\mathcal{C}$ tiene límites finitos

La demostración puede leerse en [CT, pág 89, 92].
Por supuesto, se tienen las equivalencias para las nociones duales de productos cofibrados, objeto inicial, coproductos, coigualadores y colímites.

Definición 0.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. $\mathcal{C}$ es **completa** cuando cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, tiene un cono límite.

2. $\mathcal{C}$ es **finitamente completa** cuando cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{D}$ una categoría finita, tiene un cono límite.

Observación 0.10. Como corolario se tiene que si una categoría $\mathcal{C}$ tiene igualadores de todas las parejas de flechas y tiene todos los productos de familias pequeñas, entonces $\mathcal{C}$ es completa. Se puede consultar la prueba de este hecho en [CWM, pág 109].

0.2. Funtores Adjuntos

Definición 0.11. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtor y B un objeto de $\mathcal{B}$. Una **reflexión** de B a través de F es una pareja (R_B, η_B) donde:

1. R_B es objeto de $\mathcal{A}$ y $\eta_B : B \to FR_B$ es un morfismo en $\mathcal{B}$

2. Si A es objeto de $\mathcal{A}$ y $b : B \to FA$ morfismo en $\mathcal{B}$, existe un único $a : R_B \to A$ morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $Fa \circ \eta_B = b$.

$$\begin{tikzcd} R_B \arrow[d, dotted, "a"'] \\ A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "b"'] & FR_B \arrow[d, dotted, "Fa"] \\ & FA \end{tikzcd}$$

Observación 0.12. Si la reflexión de B a través de F existe es única salvo isomorfismo. Además, si para cada objeto B en $\mathcal{B}$ existe una reflexión (R_B, η_B), entonces existe un único funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $R(B) := R_B$ para cada B objeto de $\mathcal{B}$ y además

$$\{\eta_B : B \to FRB\}_{B \in Ob(\mathcal{B})}$$

es una transformación natural, es decir, se está definiendo $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ R$.

Definición 0.13. Un funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ se llama **adjunto izquierdo** a $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cuando existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ R$ tal que para cada objeto B en $\mathcal{B}$, (RB, η_B) es una reflexión de B a través de F. Escribiremos $R \dashv F$ para denotar que R es un adjunto izquierdo a F.

De manera dual se tienen los conceptos de correflexión y adjunto derecho.

Será frecuente utilizar alguna de las siguientes equivalencias para verificar adjunciones.

Teorema 0.14. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. Entonces son equivalentes:*

1. $G \dashv F$
2. *Existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ G$ y $\epsilon : G \circ F \Rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ tales que los siguientes triángulos son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta\star F"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "F\star\epsilon"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "G\star\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "\epsilon\star G"] \\ & G \end{tikzcd}$$

3. *Para cada objeto A en $\mathcal{A}$ y para cada objeto B en $\mathcal{B}$ existe una biyección natural en A y B*
$$\Theta_{A,B} : \mathcal{A}(GB, A) \cong \mathcal{B}(B, FA)$$
4. $F \vdash G$

Demostración. Haremos sólo un bosquejo de la prueba, dejamos verificar los detalles al lector.

$1 \Rightarrow 2$ Por definición existe $\eta : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow FG$. Resta definir ϵ. Sea $A \in Ob(\mathcal{A}$, para $FA \in Ob(\mathcal{B})$ consideremos su reflexión (GFA, η_{FA}). Para 1_{FA}, existe un único morfismo $\epsilon_A : GFA \to A$, tal que $F\epsilon_A \circ \eta_{FA} = 1_{FA}$.

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[d, dotted, "\epsilon_A"'] \\ A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_{FA}"] \arrow[dr, "1_FA"'] & FGFA \arrow[d, dotted, "F\epsilon_A"] \\ & FA \end{tikzcd}$$

Afirmación: $\epsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ es transformación natural y el segundo triángulo también conmuta.

$2 \Rightarrow 3$ Sea $a : GB \to A$ morfismo en $\mathcal{A}$, definimos $\Theta_{A,B}(a) = Fa \circ \eta_B$, y para cada morfismo $b : B \to FA$ en $\mathcal{B}$ definimos $\Phi_{A,B}(b) = \epsilon_A \circ Gb$. De la conmutatividad en los triángulos se tiene que $\Phi_{A,B} \circ \Theta_{A,B} = 1$ y $\Theta_{A,B} \circ \Phi_{A,B} = 1$. Además Θ es natural en ambas variables.

$3 \Rightarrow 1$ Sea $B \in Ob(\mathcal{B})$. Se puede verificar que $(GB, \Theta_{GB,B}(1_{GB}))$ es una reflexión para B.

$3 \Leftrightarrow 4$ Se obtiene dualizando .

□

A la transformaciones naturales η y ϵ del teorema anterior se les denominan **unidad** y **counidad** de la adjunción respectivamente.

Definición 0.15. Un funtor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ **preserva límites** cuando para cada categoría pequeña $\mathcal{D}$ y cada funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$, si el límite $(L, \{p_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ de G existe, entonces $(FL, \{Fp_D\}_{D \in Ob(\mathcal{D})})$ es el límite de $F \circ G$.

Observación 0.16. Si un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene adjunto izquierdo (derecho respectivamente) entonces F preserva todos los límites (colímites respectivamente) que existen en $\mathcal{A}$.

Definición 0.17. Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son **equivalentes** si existen funtores $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ tales que G es adjunto izquierdo de F y la unidad y counidad de la adjunción, η y ϵ, son isomorfismos. A F se le llama una **equivalencia de categorías**.

Observación 0.18. Existen otras condiciones equivalentes para tener una equivalencia de categorías.

1. F es fiel y pleno y tiene adjunto izquierdo G fiel y pleno.

2. F es fiel y pleno y cada B objeto de $\mathcal{B}$ es isomorfo a algún objeto FA con A objeto de $\mathcal{A}$.

0.3. Lema de Yoneda

Definición 0.19. Sean $\mathcal{C}$ una categoría, Set la categoría de conjuntos y $C \in Ob(\mathcal{C})$. Se define el **funtor representable covariante** como sigue:

$$\mathcal{C}(C, \_) : \mathcal{C} \to Set$$

$$B \mapsto \mathcal{C}(C, B)$$
$$f : A \to B \mapsto \mathcal{C}(C, f)$$

donde

$$\mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$$
$$g \mapsto f \circ g$$

El **funtor representable contravariante** $\mathcal{C}(\_, C)$ simplemente invierte la composición. A un funtor se le llama **representable** cuando es isomorfo a algún funtor representable.

Observación 0.20. Los funtores representables covariantes preservan todos los límites y los funtores representables contravariantes mandan colímites en límites. [CWM, pág 112]

Lema de Yoneda 0.21. *: Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $F : \mathcal{A} \to Set$ un funtor y para cada A objeto en $\mathcal{A}$ consideremos el funtor representable $\mathcal{A}(A, \_) : \mathcal{A} \to Set$, entonces existe una biyección*

$$\Theta_{F,A} : \mathcal{NAT}(\mathcal{A}(A, \_), F) \longrightarrow FA$$

natural en A.
Si $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña entonces $\Theta_{F,A}$ también es natural en F.

Demostración. Sea $\alpha : \mathcal{A}(A, \_) \Rightarrow F$ transformación natural. Definimos

$$\Theta_{F,A}(\alpha) := \alpha_A(1_A).$$

Sea $\tau : FA \to NAT(\mathcal{A}(A, \_), F)$ definida para cada $a \in FA$ por $\tau_a : \mathcal{A}(A, \_) \Rightarrow F$ tal que para cada B objeto de $\mathcal{A}$, $\tau_a(B) : \mathcal{A}(A, B) \to FB$ es una función que asigna a cada morfismo $f : A \to B$, un elemento en FB de la siguiente manera

$$\tau_a(B)(f) := Ff(a).$$

- τ_a es transformación natural. Se sigue de la definición de τ_a.

- τ es la inversa de $\Theta_{F,A}$. En efecto, tomemos $a \in FA$ entonces

$$\Theta_{F,A} \circ \tau(a) = \Theta_{F,A}(\tau_a) = \tau_a(A)(1_A) = F(1_A)(a) = a.$$

  Por otra parte, si $\alpha : \mathcal{A}(A, \_) \Rightarrow F$, B es un objeto de $\mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{A}(A, B)$ entonces

$$\tau \circ \Theta_{F,A}(\alpha)(B)(f) = \tau(\Theta_{F,A}(a))(B)(f) = \tau(\alpha(1_A))(B)(f) = Ff(\alpha_A(1_a)) = \alpha_B(f).$$

- $\Theta_{F,A}$ es natural en A. Definimos el funtor $N : \mathcal{A} \to Set$ como $NA = NAT(\mathcal{A}(A, \_), F)$. Entonces $\Theta_{F,}: N \Rightarrow F$ es transformación natural pues para $f : A \to B$ tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} NA \arrow[r, "\Theta_{F,A}"] \arrow[d, "Nf"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ NB \arrow[r, "\Theta_{F,B}"'] & FB \end{tikzcd}$$

$\square$

Capítulo 1

Categorías de funtores

Gran parte de las construcciones de objetos matemáticos dependen más que de los elementos de dichos objetos, de los morfismos entre sus elementos.

Un “topos” es una categoría en la que es posible desarrollar las construcciones matemáticas más básicas tales como productos fibrados, exponenciales, clasificador de subobjetos, etc. En el capítulo 4 daremos una definición formal de topos, pero a manera de introducción, iniciaremos revisando la categoría de conjuntos, Set, y haremos las construcciones necesarias para que sea un topos.

Mencionaremos diversas categorías estrechamente relacionadas con Set y que se comportan de manera similiar porque heredan sus construcciones. En particular, revisaremos a detalle la categoría de pregavillas $Set^{\mathcal{C}^{op}}$. La importancia de su estudio radica en el hecho de que muchas categorías, incluida Set, pueden verse como una categoría de pregavillas y por tal motivo, es suficiente con trabajar en esta categoría.

1.1. La categoría Set

La categoría de conjuntos Set es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y dados A y B conjuntos, los morfismos de A en B son las funciones $f : A \to B$.

1.1.1. Categorías con propiedades similares a Set

- $Set \times Set$
  Los objetos en esta categoría son parejas (A, B) con A, B objetos en Set y los

morfismos son de la forma $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ donde $f \in Set(A, A')$ y $g \in Set(B, B')$.

- Set^n
  Aquí los objetos son de la forma $(A_1, ..., A_n)$ donde para cada $i \in \{1, ..., n\}$, A_i es un objeto de Set y los morfismos son $(f_1, ..., f_n) : (A_1, ..., A_n) \to (B_1, ...B_n)$ tal que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $f_i : A_i \to B_i$.

- G-Set para G un grupo.
  Esta es la categoría de acciones del grupo G en conjuntos, es decir, para G un grupo fijo, los objetos son parejas (A, α) donde A es un conjunto y
  $$\alpha : G \times A \to A$$
  tal que para cada $a \in A$ y para cada $g, h \in G$, si e es el neutro del grupo G, se cumple que:
  $$\alpha(e, a) = a \quad y \quad \alpha(g, \alpha(h, a)) = \alpha(gh, a).$$
  Los morfismos son de la forma $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ donde $f : A \to B$ y para cada $a \in A$ y $g \in G$
  $$f(\alpha(g, a)) = \beta(g, f(a)).$$
  Se acostumbra denotar a la acción de un elemento g del grupo en uno a del conjunto por $\alpha(g, a) = g \cdot a$.

- $Set^{\mathbb{N}}$
  Los objetos son sucesiones de funciones entre conjuntos $X_1, X_2, X_3...$ de la forma
  $$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} ...$$
  y los morfismos son sucesiones de funciones $h_1, h_2, h_3, ...$ que hacen conmutar el diagrama:
  $$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & X_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & ... \\ Y_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & Y_3 \arrow[r, "g_3"'] & ... \end{tikzcd}$$

Lo que hace a las categorías mencionadas anteriormente similares a Set, a la categoría de pregavillas y a la de gavillas que veremos en el siguiente capítulo es el hecho de que cumplen las siguientes propiedades:

1. Tienen límites y colímites finitos

2. Tienen objetos exponenciales

3. Tienen un clasificador de subobjetos $v : \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$

Una categoría que cumple con estas propiedades será llamada un topos elemental. El objetivo de este trabajo es realizar estas construcciones básicas en las categorías típicas.

Como todos los ejemplos anteriores son casos particulares de la categoría de pregavillas $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ que analizaremos después, será suficiente para nuestro estudio examinar las pregavillas. Sin embargo, haremos primero las construcciones básicas en Set, por ser el ejemplo más sencillo y porque además nos serán de ultilidad a la hora de trabajar con pregavillas ya que muchas construcciones se hacen de manera puntual.

En el capítulo 0 mencionamos un ejemplo de objeto límite formado por objetos y morfismos, el producto fibrado.

Ejemplo 1.1. En Set si $f : A \to C$ y $g : B \to C$, el producto fibrado de f y g es

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}.$$

Note que $g'(a, b) = a$ y $f'(a, b) = b$. Si $B \subseteq C$, es decir, $i : B \hookrightarrow C$ entonces

$$P = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y) = y\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \cong f^{-1}[B].$$

Si $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ y $C \overset{g}{\hookrightarrow} B$ el producto fibrado de f y g es

$$P = \{(x, y) \in A \times B \mid x = f(x) = g(y) = y\} = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\} \cong A \cap B.$$

Proposición 1.2. *Set tiene productos fibrados y objeto terminal.*

Demostración. Del ejemplo (1.1), para $A, B, C \in Ob(Set)$ y $f : C \to B$, $g : A \to B$, (P, π_1, π_2) es el producto fibrado de f y g donde

$$P = \{(a, b) \in A \times C \mid g(a) = f(b)\}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 : P &\to A & \qquad \pi_2 : P &\to C \\ (a, b) &\mapsto a & \qquad (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

Los conjuntos singulares $\{*\}$ son los objetos terminales en Set. □

Por la observación (0.8) se sigue que Set tiene productos finitos e igualadores.

Definición 1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y fijemos $A \in Ob(\mathcal{C})$ arbitrario. Se define el **funtor producto** como sigue:

$$A \times \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

$$B \mapsto A \times B$$

$$f : B \to C \mapsto 1_A \times f : A \times B \to A \times C$$

$$(a, b) \mapsto (a, f(b))$$

Definición 1.4. 1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos. Para un objeto fijo A en $\mathcal{C}$, siempre que $A\times\_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tiene adjunto derecho , este adjunto se denota por $(\ )^A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y decimos que A es un objeto **exponenciable** de $\mathcal{C}$ y para cada B objeto de $\mathcal{C}$, B^A se llama el exponencial de A en B.

2. Una categoría con productos finitos $\mathcal{C}$ es **cerrada cartesiana** si todos sus objetos son exponenciables, es decir, para cada A objeto de $\mathcal{C}$, $A \times \_$ tiene adjunto derecho.

Observación 1.5. Por el teorema (0.14), $(\ )^A \vdash A \times \_$ significa que para B y C objetos de $\mathcal{C}$, hay una correspondencia biyectiva de las flechas

$$\frac{C \to B^A}{A \times C \to B}$$

Ejemplo 1.6. Set es cerrada cartesiana. Para A y B conjuntos, el exponencial de A en B es el conjunto

$$B^A = \{f \mid f : A \to B \textit{ es función}\},$$

y la adjunción está dada por las biyecciones conocidas

$$g : C \to B^A \longmapsto h : A \times C \to B$$

$$(a, c) \mapsto h(a, c) = g(c)(a)$$

y

$$h : A \times C \to B \longmapsto g : C \to B^A$$

$$c \mapsto h(\_, c) : A \to B.$$

De este hecho y la observación (0.16) se sigue que $(Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X$ ya que $(\ )^X$ preserva límites, que en el caso de Set están dados por los productos.

1.1.2. Funciones características y clasificador de subobjetos

Definición 1.7. Sea D un objeto en $\mathcal{C}$. Dados dos monomorfismos $f : A \to D$ y $g : B \to D$ para A y B objetos en $\mathcal{C}$ definimos la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \textit{ si y sólo si existe } h : A \to B \textit{ isomorfismo tal que } f = g \circ h.$$

Un **subobjeto** de D es una clase de equivalencia de monomorfismos sobre D . Se denota por

$$Sub(D) := \{\textit{monomorfismos con codominio} D\}/ \sim,$$

a la clase de representantes de subobjetos de D.

En $Sub(D)$ hay un orden parcial definido como sigue. Para $f : A \to D$, $g : B \to D \in Sub(D)$

$$f \leq g \textit{ si y sólo si existe un único } h : A \to B : f = g \circ h.$$

Una categoría $\mathcal{C}$ es **bien potenciada** si para cada objeto C de $\mathcal{C}$, $Sub(C)$ es un conjunto.

En la práctica suele llamarse subobjeto de D a la pareja (A, f) donde $f : A \to D$ es monomorfismo aunque el subobjeto es la clase de equivalencia a la cual representa f. En Set esta noción se relaciona con la de subconjunto, en otro tipo de categorías con la de subespacio o subestructura.

En Set un subconjunto $S \subseteq X$ puede ser descrito de dos formas distintas: como el monomorfismo $S \hookrightarrow X$ dado por la inclusión, o bien, como una función característica ϕ_s definida de manera usual para elementos $x \in X$ como:

$$\phi_s(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in S \\ 1 & \textit{si } x \notin S \end{cases}$$

Consideremos el siguiente monomorfismo al cual le llamaremos "verdad"

$$v : \{0\} = \mathbf{1} \longrightarrow \{0, 1\} = 2$$

$$0 \longmapsto 0$$

Con esto, cada subconjunto S puede recuperarse a partir del producto fibrado de su función característica ϕ_s con v, es decir,

$$\begin{tikzcd}
\phi_s^{-1}(\{0\}) = S \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"'] & \{0\} = \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\
X \arrow[r, dashed, "\phi_s"'] & \{0,1\} = 2
\end{tikzcd}$$

En resumen, dado $S \subseteq X$, tenemos los monomorfismos $i : S \rightarrowtail X$ y $v : \mathbf{1} \rightarrowtail 2$ y la única flecha de S al objeto terminal $\mathbf{1}$, $S \to \mathbf{1}$, entonces podemos definir a ϕ_s, llamada la función característica, como la única función tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"'] & \{0\} = \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\
X \arrow[r, dashed, "\phi_s"'] & \{0,1\} = 2
\end{tikzcd}$$

Inversamente, si tenemos $v : \mathbf{1} \rightarrowtail 2$ y $\phi : X \to 2$, el producto fibrado de v con ϕ nos da un subconjunto de X, $\phi^{-1}(\{0\})$, que es único salvo isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(\mathbf{1}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & \{0\} = \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\
X \arrow[r, "\phi"'] & \{0,1\} = 2
\end{tikzcd}$$

Veremos que los subobjetos en las categorías típicas tienen funciones características similares que, si bien no toman valores en $\{0,1\}$, si lo hacen en algún objeto adecuado Ω de “valores de verdad”.

Definición 1.8. En una categoría $\mathcal{C}$ con límites finitos, un **clasificador de subobjetos** es un monomorfismo verdad $v : \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$ tal que para cada monomorfismo $c : S \rightarrowtail X$ en $\mathcal{C}$, existe una única flecha ϕ_c que junto con v forma un diagrama producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail, "c"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\
X \arrow[r, dashed, "\phi_c"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Observación 1.9. Si $\mathcal{C}$ es una categoría bien potenciada, podemos definir un funtor contravariante representable, llamado **funtor subobjeto** como sigue:

$$Sub(\ ) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Set$$

$$C \longmapsto Sub(C)$$
$$f : A \to B \longmapsto Sub(f) : Sub(B) \to Sub(A)$$

donde $Sub(f)$ está dado por el producto fibrado de f con m para cada $m \in Sub(B)$ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed, "m'"'] & C \arrow[d, tail, "m"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces $Sub(f)(m) = m'$ y como m es monomorfismo, m' también lo es y $Sub(f)$ está bien definido.

Proposición 1.10. *Una categoría $\mathcal{C}$ con límites finitos y localmente pequeña tiene clasificador de subobjetos $v : \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$ si y sólo si existe un objeto Ω y un isomorfismo $\Theta_C : Sub(C) \cong \mathcal{C}(C, \Omega)$ natural en C.*
Cuando esto se cumple, $\mathcal{C}$ es bien potenciada.

Demostración.

"$\Rightarrow$" Sea $v : \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$ el clasificador de subobjetos de $\mathcal{C}$. Definimos para cada C objeto de $\mathcal{C}$,

$$\Theta_C : Sub(C) \to \mathcal{C}(C, \Omega)$$
$$m \mapsto \phi_m$$

donde ϕ_m es la única función característica tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\ C \arrow[r, dashed, "\phi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

· Θ_C es inyectiva por definición.

·· Θ_C es sobreyectiva. Tomemos $\phi \in \mathcal{C}(C, \Omega)$ y hagamos el producto fibrado de v con ϕ que por hipótesis existe,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "m_\phi"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\ C \arrow[r, "\phi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces obtenemos $m_\phi \in Sub(C)$ pues m_ϕ es monomorfismo porque v lo es y además cumple que $\Theta_C(m_\phi) = \phi$.

Por tanto Θ_C es un isomorfismo.

··· $\Theta : Sub(\ ) \to \mathcal{C}(\_, \Omega)$ es natural en C. Tomemos $f : C \to D$ morfismo en $\mathcal{C}$ y $m \in Sub(D)$, tomando el producto fibrado de m con f obtenemos

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "n"'] & M \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "v"] \\ C \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "\phi_n"'] & D \arrow[r, "\phi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como los dos cuadrados interiores son productos fibrados, el rectángulo exterior es un producto fibrado y por tanto:

$$\mathcal{C}(f, \Omega) \circ \Theta_D(m) = \mathcal{C}(f, \Omega)(\phi_m) = \phi_m \circ f = \phi_n = \Theta_C(n) = \Theta_C \circ Sub(f)(m).$$

Así, Θ es natural en C.

"$\Leftarrow$" Supongamos que para cada C objeto de $\mathcal{C}$, $\Theta_C : Sub(C) \cong \mathcal{C}(C, \Omega)$ y Θ_C es natural en C. En particular, para el objeto Ω tenemos el isomorfismo $\Theta : Sub(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega, \Omega)$. Como $1_\Omega \in \mathcal{C}(\Omega, \Omega)$ entonces existe $t_0 : \Omega_0 \to \Omega \in Sub(\Omega)$ tal que $\Theta_\Omega(t_0) = 1_\Omega$.
Afirmación: $t_0 : \Omega_0 \rightarrowtail \Omega$ es el clasificador de subobjetos de $\mathcal{C}$. Tomemos $n : N \rightarrowtail C$ un monomorfismo en $\mathcal{C}$, por el isomorfismo $Sub(C) \overset{\cong}{\to} \mathcal{C}(C, N)$ tenemos la asig-

nación $n \mapsto \phi_n : C \to \Omega$. Por la naturalidad de Θ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Sub(\Omega) \arrow[r, "\Theta_\Omega"] \arrow[d, "Sub(\phi_n)"'] & \mathcal{C}(\Omega,\Omega) \arrow[d, "\mathcal{C}(\phi_n,\Omega)"] \\ Sub(C) \arrow[r, "\Theta_c"'] & \mathcal{C}(C,\Omega) \end{tikzcd}$$

Entonces, para $t_0 \in Sub(\Omega)$, $Sub(\phi_n)(to) = n : N \rightarrowtail C$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "n"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\ C \arrow[r, "\phi_n"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado por definición de $Sub(\ )$, lo cual nos da un morfismo $N \to \Omega_0$.

Resta ver que Ω_0 es un objeto terminal en $\mathcal{C}$. De la construcción anterior, si ahora en particular tomamos $n = 1_C$, tenemos que para cada objeto C, existe un morfismo $C \to \Omega_0$ dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "1_c"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\ C \arrow[r, "\phi_{1_c}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Veamos que este morfismo es único. Si $\psi, \psi' : C \to \Omega_0$ entonces los siguientes cuadrados son productos fibrados porque t_0 es monomorfismo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_c"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\ C \arrow[r, "t_0\circ\psi"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "1_c"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\ C \arrow[r, "t_0\circ\psi'"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Pero la biyectividad de Θ nos dice que ϕ_{1_c} es única, es decir, $t_0 \circ \psi = t_0 \circ \psi'$ y como t_0 es monomorfismo, se sigue que $\psi = \psi'$. Con esto hemos demostrado que para

cada objeto C, existe un único morfismo $C \to \Omega_0$, es decir, Ω_0 es objeto terminal de $\mathcal{C}$ y por tanto, $t_0 : \Omega_0 \to \Omega$ es un clasificador de subobjetos de $\mathcal{C}$.
Esto prueba además que cuando el clasificador de subobjetos existe, este es único salvo isomorfismo.

$\square$

Ejemplo 1.11. En Set, $v : \mathbf{1} = \{0\} \to \Omega = \{0,1\}$ considerado como al principio de esta sección, es un clasificador de subobjetos, pues dado un monomorfismo $c : S \rightarrowtail C$ (una inclusión), podemos definir la función característica $\phi_s : C \to \Omega$.

1.1.3. Colímites

Como en el caso dual de límites, para ver que una categoría $\mathcal{C}$ tiene colímites finitos basta con verificar que tiene objeto inicial y productos cofibrados.

En Set el objeto inicial $\mathbf{0}$ es el conjunto vacío, ya que para cada conjunto X, existe exactamente una función $\emptyset \to X$.

Por otra parte, el producto cofibrado de dos funciones f y g con dominio común X

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, dashed, "i"] \\ Y \arrow[r, dashed, "i"'] & Q \end{tikzcd}$$

es el conjunto

$$Q = Y \coprod_X Z = \{c \in Y \coprod Z \mid c = f(x) = g(x) \textit{ para } x \in X\}.$$

1.2. La categoría de pregavillas

Nuestro objetivo en esta sección es hacer las construcciones que hacen a la categoría de pregavillas un topos.

Consideremos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ es una categoría donde los objetos son funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y los morfismos entre dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son transformaciones naturales del tipo $\alpha : F \Rightarrow G$. Categorías construidas de esta forma son llamadas **categorías de funtores**.

Las categorías de funtores tienen muchas utilidades como veremos en esta sección, entre ellas, se cumple que si $\mathcal{D}$ es una categoría completa entonces $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ también lo es (la prueba de este hecho se encuentra en [CWM, pág 112]).

Otro uso importante de las categorías de funtores es una aplicación del Lema de Yoneda mediante el cual podemos encajar cualquier categoría $\mathcal{C}$ en la categoría de funtores Set-valuados, obteniendo una extensión de $\mathcal{C}$ con la estructura suficiente para hacer construcciones que no pueden hacerse en $\mathcal{C}$.

Definición 1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es la categoría cuyos objetos son los funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ en Set (funtores Set-valuados), en la cual si $P, P' : \mathcal{C}^{op} \to Set$ son funtores entonces un morfismo entre ellos es la transformación natural $\theta : P \Rightarrow P'$ que asigna a cada objeto C en $\mathcal{C}$, una función $\theta_C : P(C) \to P'(C)$ en Set, tal que para cada C, D objetos de $\mathcal{C}$ y para cada $f : C \to D$ el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} PD \arrow[r, "\theta_D"] \arrow[d, "Pf"'] & P'D \arrow[d, "P'f"] \\ PC \arrow[r, "\theta_C"'] & P'C \end{tikzcd}$$

A los funtores $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ se les llama **pregavillas** sobre $\mathcal{C}$ y por tanto $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es la categoría de pregavillas sobre $\mathcal{C}$.

Observación 1.13. Los ejemplos anteriores de categorías similares a la categoría de conjuntos pueden verse como categorías de pregavillas, incluida Set, de la siguiente forma:

- $Set = Set^{\{*,* \xrightarrow{1_*} *\}}$. Es decir, en este caso $\mathcal{C} = \{*, * \xrightarrow{1_*} *\}$ es la categoría con un único objeto $*$ y un único morfismo el morfismo identidad para $*$.
- $Set \times Set = Set^{\{0,1,1_0,1_1\}}$, $\{0, 1, 1_0, 1_1\}$ es la categoría discreta de dos objetos, 0 y 1, cuyos únicos morfismos son los morfismos identidad.
- G-Set= Set^G. Recordar que un grupo $(G, \cdot)$ puede verse como una categoría de un único elemento, los morfismos son los elementos del grupo G y la ley de composición está dada por la operación $\cdot$ del grupo.

- $Set^{\mathbb{N}}$ es una categoría de pregavillas considerando $(\mathbb{N}, \leq)$ como categoría con el orden inverso, es decir, para $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n \leq m \textit{ si y sólo si } m \to n.$$

Otros ejemplos de pregavillas utilizados de manera frecuente están dados por los funtores representables. En particular tenemos el siguiente funtor.

Definición 1.14. El **encaje de Yoneda** es el funtor $Y : \mathcal{C} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ que a cada objeto C asigna el funtor representable contravariante,

$$YC = \mathcal{C}(\_, C) : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

y a cada morfismo $f : C \to D$ asigna la transformación natural

$$Yf = \mathcal{C}(\_, f) : \mathcal{C}(\_, C) \Rightarrow \mathcal{C}(\_, D)$$

En particular, a las pregavillas de esta forma se les llama **pregavillas representables**.

Teorema 1.15. *El encaje de Yoneda es un funtor fiel y pleno.*

Demostración. Es un corolario de lema (0.21) y se puede consultar la demostración en [CT, pág 165]. □

Observación 1.16. Se sigue del lema de Yoneda y el teorema anterior que:

1. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña entonces $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es localmente pequeña y por tanto, para una pregavilla F, $NAT(YC, F)$ es un conjunto.

2. Dados A y B objetos en cualquier categoría localmente pequeña $\mathcal{C}$,

$$YA \cong YB \textit{ implica que } A \cong B.$$

   Esta es una de las formas más usuales de aplicar el Lema de Yoneda cuando queremos mostrar que dos objetos A y B son isomorfos, basta con probar que YA y YB son isomorfos en la categoría de pregavillas.

Proposición 1.17. *$Set^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene productos fibrados y objeto terminal.*

Demostración. La construcción del producto fibrado es puntual. Sean $F, G, H : \mathcal{C}^{op} \to Set$ funtores y $\alpha : F \Rightarrow H, \beta : G \Rightarrow H$ transformaciones naturales , queremos construir una pregavilla $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ tal que el diagrama de abajo a izquierda sea un producto fibrado de α con β. Pero para cada objeto C de $\mathcal{C}$ tenemos las funciones $\alpha_C : FC \to HC$ y $\beta_C : GC \to HC$ en Set y como en Set existen los productos fibrados obtenemos un diagrama de producto fibrado como el de abajo a derecha. Entonces P es el funtor que manda a cada objeto C de $\mathcal{C}$ al conjunto PC de tal manera que PC es el producto fibrado en Set de α_C con β_C :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, Rightarrow, dashed, "\alpha'"] \arrow[d, Rightarrow, dashed, "\beta'"'] & G \arrow[d, Rightarrow, "\beta"] \\ F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PC \arrow[r, dashed, "\alpha'_c"] \arrow[d, dashed, "\beta'_c"'] & GC \arrow[d, "\beta_c"] \\ FC \arrow[r, "\alpha_c"'] & HC \end{tikzcd}$$

Primero note que α' y β' son transformaciones naturales. Tomemos $h : C \to C'$ entonces tenemos el siguiente diagrama que conmuta porque α y β son naturales

$$\begin{tikzcd} PC' \arrow[dr, dashed, "Ph"] \arrow[drr, bend left, "Gh\circ\alpha'_{c'}"] \arrow[ddr, bend right, "Fh\circ\beta'_{c'}"'] & & \\ & PC \arrow[r, "\alpha'_c"'] \arrow[d, "\beta'_c"] & GC \arrow[d, "\beta_c"] \\ & FC \arrow[r, "\alpha_c"'] & HC \end{tikzcd}$$

Del diagrama se sigue que $Gh \circ \alpha'_{c'} = \alpha'_C \circ Ph$ y $Fh \circ \beta'_{c'} = \beta'_C \circ Ph$. Por tanto, α' y β' son transformaciones naturales. Que (P, α', β') cumple la propiedad universal del producto fibrado se sigue de que en cada objeto C se cumple dicha propiedad, lo cual nos da la transformación natural deseada.
El objeto terminal en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es el funtor $\mathbf{1} : \mathcal{C}^{op} \to Set$, cuyo valor en cada objeto C es un objeto terminal de Set de la forma $\{*\}$. Entonces dada una pregavilla $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$, para cada C objeto de $\mathcal{C}$ existe una única función $\alpha_c : PC \to \{*\}$ lo que nos da $\alpha : P \Rightarrow \mathbf{1}$ transformación natural. $\square$

Estudiemos ahora el clasificador de subobjetos y la función característica en el caso general $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.

Definición 1.18. Sean P y Q pregavillas. Q es **subfuntor** de P si para cada C objeto de

$\mathcal{C}$, $QC \subseteq PC$ y para cada $f : D \to C$, Qf es la restricción de Pf a QC y QD, es decir,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"'] \\ C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} QC \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Qf"'] & PC \arrow[d, "Pf"] \\ QD \arrow[r, hook, "i"'] & PD \end{tikzcd}$$

Observación 1.19. Si $\Theta : Q \Rightarrow P$ es un monomorfismo en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ entonces para cada C objeto de $\mathcal{C}$, $\Theta_C : QC \rightarrowtail PC$ es monomorfismo en Set, es decir, es una inclusión. Por tanto, cada monomorfismo en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es un subfuntor.
Ahora, si tenemos un subfuntor $Q \overset{\alpha}{\hookrightarrow} P$ entonces α es monomorfismo en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, ya que cada $\alpha_C : QC \hookrightarrow PC$ es monomorfismo (por ser una inclusión), y por tanto, cada subfuntor Q es un subobjeto de P.

Definición 1.20. Sea C un objeto de una categoría $\mathcal{C}$. Una **criba** sobre C es un conjunto S_c de morfismos en $\mathcal{C}$ con codominio C que cumple:

Si $f \in S_c$ y $f \circ g$ está definida entonces $f \circ g \in S_c$.

Proposición 1.21. *Para cada objeto C de $\mathcal{C}$, hay una correspondencia biyectiva entre los subfuntores de $\mathcal{C}(\_, C)$ y las cribas que se pueden definir sobre C.*

Demostración.

- Sea $Q \subseteq \mathcal{C}(\_, C)$ subfuntor, definimos el conjunto

  $$S_Q = \{f : A \to C \mid A \textit{ es algún objeto en } \mathcal{C} \textit{ y } f \in Q(A) \subseteq \mathcal{C}(A, C)\}.$$

  Afirmación: S_Q es una criba sobre C.
  Tomemos $f \in S_Q$ y supongamos que $f \circ g$ está definida. Como $f \in S_Q$, existe A objeto de $\mathcal{C}$ tal que $f : A \to C$ y $f \in QA$. Sea B objeto de $\mathcal{C}$ tal que $g : B \to A$. Entonces $f \circ g : B \to C$. Como $Q \subseteq \mathcal{C}(\_, C)$ entonces $QA \subseteq \mathcal{C}(A, C)$ y Q es la restricción del representable $\mathcal{C}(\_, C)$, entonces para $f \in QA$ tenemos

  $$f \circ g = \mathcal{C}(g, C) = \mathcal{C}(g, C) \circ i(f) = i \circ Q(g)(f) = Q(g)(f) \in Q(B).$$

  Por tanto, $f \circ g \in S_Q$ y así S_Q es una criba sobre C.

- Sea S una criba sobre C, definimos el funtor $Q_S : \mathcal{C}^{op} \to Set$ tal que para cada objeto A de $\mathcal{C}$,

  $$Q_S(A) = \{f : A \to C \mid f \in S\}$$

y para $g : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$

$$Q_S(g) : Q_S(B) \to Q_S(A)$$

es tal que $Q_S(g) = \mathcal{C}(g, C) \restriction_{Q_S(B)}$.
Afirmación: $Q_S \subseteq \mathcal{C}(\_, C)$ subfuntor.
Es fácil verificar que $Q_S(1_A) = 1_{Q_S(A)}$. Veamos que Q_S invierte la composición. Sean f, g morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D$, entonces tenemos los siguientes cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} Q_S(B) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Q_S(f)"'] & \mathcal{C}(B, C) \arrow[d, "\mathcal{C}(f,C)"'] \\ Q_S(A) \arrow[r, hook, "i"] & \mathcal{C}(A, C) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} Q_S(D) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Q_S(g)"'] & \mathcal{C}(D, C) \arrow[d, "\mathcal{C}(g,C)"'] \\ Q_S(B) \arrow[r, hook, "i"] & \mathcal{C}(B, C) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} Q_S(D) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Q_S(gf)"'] & \mathcal{C}(D, C) \arrow[d, "\mathcal{C}(gf,C)"] \\ Q_S(A) \arrow[r, hook, "i"] & \mathcal{C}(A, C) \end{tikzcd}$$

Sea $h \in Q_S(D)$, entonces $h : D \to C \in S$ y por tanto $h \circ g : B \to C \in S$, lo cual implica que $h \circ g \in Q_S(B)$, entonces de los cuadrados anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned} Q_S(f) \circ Q_S(g)(h) &= Q_S(f)(\mathcal{C}(g, C)(h)) = Q_S(f)(h \circ g) = \mathcal{C}(f, C)(h \circ g) \\ &= h \circ g \circ f = \mathcal{C}(g \circ f, C)(h) = Q_S(g \circ f)(h). \end{aligned}$$

□

1.2.1. Construcciones típicas

Definamos algunos objetos especiales en la categoría de pregavillas. Empecemos con el objeto

$$\Omega : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

definido para cada objeto C de $\mathcal{C}$ como

$$\Omega C = \{S \mid S \textit{ es criba en } C\}$$

y para cada morfismo $g : C' \to C$ en $\mathcal{C}$,

$$\Omega g : \Omega C \to \Omega C'$$

$$S \mapsto \Omega g(S) = g^*(S) = \{h \mid g \circ h \in S\}$$

Para un objeto C de $\mathcal{C}$, definimos la **criba maximal** como

$$t_C = \{f \mid f : A \to C \in \mathcal{C}\}.$$

Es claro que t_C es una criba sobre C pues para $f \in t_C$ y $g : dom(g) \to dom(f)$ se tiene que $f \circ g : dom(g) \to C \in t_C$.

Observación 1.22. Una criba es maximal si y sólo si contiene a la identidad. En efecto, es claro que si una criba S es maximal sobre un objeto C, entonces $1_C : C \to C \in t_C = S$. Ahora, si $1_C \in S$, entonces para cualquier morfismo $f : A \to C \in t_C$ se tiene que $f = 1_C \circ f \in S$ pues S es criba, luego $t_C \subseteq S \subseteq t_C$.

Definimos la pregavilla

$$\mathbf{1} : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

$$C \mapsto \{t_C\}$$

y para cada morfismo $g : C \to C'$, $\mathbf{1}(g) : \{t'_C\} \to \{t_C\}$ es la asignación obvia $t'_C \mapsto t_C$.

Observación 1.23. $\mathbf{1}$ es objeto terminal en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.
Sea P objeto de $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ y sea C objeto de $\mathcal{C}$, definimos

$$\alpha_C : PC \to \mathbf{1}C$$

$$a \mapsto t_C$$

Entonces $\alpha : P \Rightarrow \mathbf{1}$ es una transformación natural ya que si $f : A \to B$ y $a \in PB$ entonces

$$\mathbf{1}f(\alpha_B)(a) = t_A = \alpha_A \circ Pf(a).$$

La unicidad de α es inmediata pues sólo hay una criba maximal para cada objeto de $\mathcal{C}$.

Ahora definamos para cada objeto C de $\mathcal{C}$,

$$v(C) : \mathbf{1}C \hookrightarrow \Omega C$$

$$t_C \mapsto t_C$$

Afirmación: $v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ es transformación natural.
En efecto, sea $f : Z \to W$ morfismo en $\mathcal{C}$ y veamos que $\Omega f(t_W) = t_Z$.

$$\Omega f(t_W) = f^*(t_W) = \{h \mid h : dom(h) \to Z \textit{ es morfismo en } \mathcal{C}, f \circ h \in t_W\} \subseteq t_Z.$$

Por otra parte, si $h : B \to Z \in t_Z$, entonces $f \circ h : B \to W \in t_W$, luego $h \in f^*(t_W)$.

Proposición 1.24. *$v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ es el clasificador de subobjetos de $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.*

Demostración. Sean P y Q pregavillas con $Q \subseteq P$ subfuntor. Queremos encontrar $\phi : P \Rightarrow \Omega$ natural tal que el cuadrado siguiente sea un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{1} \arrow[d, Rightarrow] \\ P \arrow[r, Rightarrow, dashed] & \Omega \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Definamos para cada objeto C de $\mathcal{C}$

$$\phi_C : PC \to \Omega C$$
$$x \mapsto \{f \mid cod(f) = C, Pf(x) \in Q(dom(f))\}$$

Veamos que $\phi_C(x)$ es una criba de C. Sea $f \in \phi_C(X)$ y tomemos $h : dom(h) \to dom(f)$. Entonces $f \circ h : dom(h) \to C$ y $Pf(x) \in Q(dom(f))$, como Q es subfuntor de P:

$$P(f \circ h)(x) = (Ph \circ Pf)(x) = Ph(Pf(x)) = Qh(Pf(x)) \in Q(dom(h)).$$

Por tanto, $f \circ h \in \phi_C(x)$ y hemos visto que $\phi_C(x) \in \Omega C$.
Más aún, $\phi_C(x)$ es criba maximal si y sólo si $x \in QC$. En efecto, si $\phi_C(x) = t_C$ entonces para todo $f : dom(f) \to C$ se cumple que $Pf(x) \in Q(dom(f))$. En particular, si tomamos $1_C : C \to C$, $x = 1_{PC}(x) = P(1_C)(x) \in QC$. Por otra parte, si $x \in QC$ tomemos $f : dom(f) \to C$ entonces $Pf(x) = Qf(x) \in Q(dom(f))$ y de esta forma $\phi_C(x) = t_C$.
Resta ver que ϕ es natural. Sea $g : C \to C'$ y $x \in PC$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega g \circ \phi'_C(x) &= g^*(\phi'_C(x)) \\ &= \{f \mid cod(f) = dom(g) = C, g \circ f \in \phi'_C(x)\} \\ &= \{f \mid cod(f) = C, cod(g \circ f) = C', P(g \circ f)(x) \in Q(dom(g \circ f))\} \\ &= \{f \mid cod(f) = C, cod(g \circ f) = C', Pf \circ Pg(x) \in Q(dom(f))\} \\ &= \phi_C(Pg(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, $\phi : P \Rightarrow \Omega$ es natural.
Por último, debemos ver que el diagrama (1.1) es un producto fibrado. Como la definición es puntual, debemos verificar que para cada objeto C de $\mathcal{C}$, el diagrama siguiente es un producto fibrado en Set:

$$\begin{tikzcd} QC \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{1}C \arrow[d, hook] \\ PC \arrow[r, "\phi_c"'] & \Omega C \end{tikzcd}$$

Como $a \in QC$ si y sólo si $\phi_C(a) = t_C$, tenemos que $QC = \{x \in PC \mid \phi_C(x) = t_C\}$, es decir, el diagrama anterior es un producto fibrado.
Resta ver que ϕ es única con tal propiedad. Supongamos que $\alpha : P \Rightarrow \Omega$ tal que

$$\begin{tikzcd} QC \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{1}C \arrow[d, hook, "v"] \\ PC \arrow[r, "\alpha_c"'] & \Omega C \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

es un producto fibrado y veamos que $\alpha = \phi$. Sea C objeto de $\mathcal{C}$ y $x \in PC$. Como (1.2) es un producto fibrado, entonces

$$QC = \{x \in PC \mid \alpha_C(x) = v(t_C) = t_C\}.$$

Entonces es claro que $\phi_C(x) = \alpha_C(x)$, para cada $x \in PC$, por tanto, $\phi_C = \alpha_C$ para cada objeto C y así obtenemos la unicidad de ϕ. $\square$

No todas las categorías tienen clasificador de subobjetos, un ejemplo de esto es la categoría Ab de los grupos abelianos pequeños.

Ahora revisaremos un poco sobre los colímites en la categoría de pregavillas. Para empezar, el objeto inicial está dado por el funtor

$$\mathbf{0} : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

$$C \mapsto \emptyset$$

Entonces es claro, que para cada pregavilla $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ hay una transformación natural $\alpha : F \Rightarrow \mathbf{0}$, definida para cada objeto C como $\alpha_C = \emptyset$, la función vacía.

Definición 1.25. Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $F : \mathcal{A} \to Set$ un funtor. Definimos la **categoría de elementos** de F, $Elts(F)$ como sigue:

- Los objetos son parejas (A, a) donde A es un objeto de $\mathcal{A}$ y $a \in FA$.
- Los morfismos son $f : (A, a) \to (B, b)$ donde $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $Ff(a) = b$.
- La composición es como en $\mathcal{A}$.

Observación 1.26. Se tiene una proyección natural de la categoría de $Elts(F)$ en la categoría $\mathcal{A}$ por medio del funtor que olvida $U : Elts(F) \to \mathcal{A}$.

Teorema 1.27. *Sean $\mathcal{C}$ categoría pequeña, $\mathcal{E}$ categoría cocompleta y $A : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ un funtor. Entonces el funtor $R : \mathcal{E} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ que a cada objeto E de $\mathcal{E}$ le asigna la pregavilla*

$$R(E) : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

$$C \mapsto R(E)(C) = \mathcal{E}(AC, E)$$

tiene adjunto izquierdo

$$L : Set^{\mathcal{C}^{op}} \to \mathcal{E}$$

$$P \mapsto Colim(A \circ U)$$

Demostración. Sean P una pregavilla y E objeto de $\mathcal{E}$ y verifiquemos el siguiente isomorfismo

$$Nat(P, RE) \cong \mathcal{E}(LP, E).$$

Sea $\alpha : P \Rightarrow RE$ transformación natural entonces para cada objeto C de $\mathcal{C}$, tenemos un morfismo $\alpha_C : PC \to \mathcal{E}(AC, E)$ tal que para cada $p \in PC$, $\alpha_C(p) : AC \to E$, de tal manera que para cada morfismo $g : C' \to C$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
PC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Pg"'] & \mathcal{E}(AC, E) \arrow[d, "\mathcal{E}(Ag,E)"] \\
PC' \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & \mathcal{E}(AC', E)
\end{tikzcd}$$

Entonces podemos considerar a α como una familia de flechas de $\mathcal{E}$

$$\{\alpha_{(C,p)} = \alpha_C(p) : AC \to E\}_{(C,p) \in Ob(Elts(P))}.$$

Si tomamos $g : (C', p') \to (C, p)$, es decir, $g : C' \to C$ y $Pg(p) = p'$, por la naturalidad de α el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
AU((C,p)) = AC \arrow[r, "\alpha_{(C,p)}"] & E \\
AU((C',p')) = AC' \arrow[u, "AUg=Ag"] \arrow[ur, "\alpha_{(C',p')}"'] &
\end{tikzcd}$$

Con esto tenemos que $\{\alpha_{(C,p)} : AC \to E\}_{(C,p)\in Ob(Elts(P))}$ es un cocono de AU. Como LP se define como el colímite de AU, existe una única flecha $h_\alpha : LP \to E$ tal que para cada objeto (C, p),

$$\alpha_{(C,p)} = h_\alpha \circ j_{(C,p)}$$

donde $\{j_{(C,p)} : AU((C, p)) \to LP\}_{(C,p)\in Ob(Elts(P))}$ es la familia de morfismos que hacen de LP un cocono de AU.

Afirmación: $h : Nat(P, RE) \to \mathcal{E}(LP, E)$ dada por $h(\alpha) = h_\alpha$ para cada $\alpha : P \Rightarrow RE$, es un isomorfismo natural.
h es inyectiva porque LP es el colímite de AU. Veamos que h es sobreyectiva. Sea $f : LP \to E$ y para C objeto de $\mathcal{C}$ y $p \in PC$ tomemos el morfismo $j_{(C,p)} : AU((C, p)) \to LP$. Para cada objeto C de $\mathcal{C}$ definimos el morfismo $\alpha_f(C) : PC \to \mathcal{E}(AC, E)$ tal que $\alpha_f(C)(p) = f \circ j_{(C,p)}$, entonces $\alpha_f : P \Rightarrow RE$ es una transformación natural porque $\{j_{(C,p)} : AU((C, p)) \to LP\}_{(C,p)\in Ob(Elts(P))}$ es cocono de AU y además por la unicidad de $h(\alpha_f)$ se tiene que $h(\alpha_f) = f$. Se puede verificar que h es natural en P y E. □

Proposición 1.28. *Cada pregavilla es el colímite de pregavillas representables.*

Demostración. Se sigue como corolario del teorema anterior tomando al funtor $A = Y$ el encaje de Yoneda y $\mathcal{E} = Set^{\mathcal{C}^{op}}$ que es cocompleta porque Set lo es [CT, pág 168]. □

Proposición 1.29. *Para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$, $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es cerrada cartesiana.*

Demostración. De la proposición 1.17 sabemos que $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene objeto terminal y productos binarios. Resta ver que todo objeto P en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ es exponenciable, es decir, $\_ \times P : Set^{\mathcal{C}^{op}} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene adjunto derecho. Recordemos que el producto binario de dos pregavillas se obtiene haciendo el producto puntualmente, sin embargo, el exponencial no será posible definirlo de manera puntual. Tomemos P en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ y definamos

$$(\quad)^P : Set^{\mathcal{C}^{op}} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$$

$$Q \mapsto Q^P$$

de tal forma que para cada objeto C de $\mathcal{C}$,

$$Q^P(C) = NAT(YC \times P, Q)$$

donde Y es el encaje de Yoneda, es decir, $YC = \mathcal{C}(\_, C)$ y para cada morfismo $f : C' \to C$,

$$Q^P(f) : NAT(YC \times P, Q) \to NAT(YC' \times P, Q)$$

que asigna a cada $\tau : YC \times P \Rightarrow Q$ transformación natural, una transformación natural $Q^P(f)(\tau) : YC' \times P \Rightarrow Q$ tal que para cada D objeto de $\mathcal{C}$, $g : D \to C'$ y $x \in PD$,

$$Q^P(f)(\tau)(D)(g, x) = \tau(D)(fg, x).$$

Veamos que para cada pregavilla P, $(\,)^P \vdash \_\times P$. Tomemos Q objeto de $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ y definamos una correflexión de Q a través de $\_ \times P$, esto es, $e : Q^P \times P \Rightarrow Q$ transformación natural tal que para cada objeto C de $\mathcal{C}$,

$$e_C : Q^P(C) \times PC \to QC$$

$$(\alpha, y) \mapsto \alpha_C(1_C, y)$$

Sea $\phi : R \times P \Rightarrow Q$ cualquier morfismo de pregavillas, debemos ver que existe un único $\phi' : R \Rightarrow Q^P$ tal que $e \circ (\_ \times 1_P)(\phi') = \phi$. Para cada C objeto de $\mathcal{C}$, $\phi_C : RC \times PC \to QC$, entonces podemos definir

$$\phi'_C : RC \to Q^P(C)$$

$$u \mapsto \phi'_C(u)$$

donde $\phi'_C(u) : YC \times P \Rightarrow Q$ tal que para cada objeto D de $\mathcal{C}$ se tiene el morfismo

$$\phi'_C(u)(D) : \mathcal{C}(D, C) \times PD \to QD$$

$$(f, x) \mapsto \phi_D(Rfu, x)$$

Entonces ϕ' es transformación natural. En efecto, sea $g : C \to C'$ y veamos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
RC' \arrow[r, "\phi'_{C'}"] \arrow[d, "Rg"'] & Q^P(C') \arrow[d, "Q^P(g)"] \\
RC \arrow[r, "\phi'_C"'] & Q^P(C)
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in RC'$ entonces $\phi'_C(Rg(x)) : \mathcal{C}(\_, C) \times P \Rightarrow Q$ tal que a cada objeto D en $\mathcal{C}$ asigna el morfismo

$$\phi'_C(Rg(x))(D) : \mathcal{C}(D, C) \times PD \to QD$$

$$(f, y) \mapsto \phi_D(Rf(Rg(x)), y)$$

Por otra parte, para cada D objeto de $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}(Q^P(g) \circ \phi'_{C'}(x))(D) : \mathcal{C}(D, C) \times PD &\to QD \\ (f, y) &\mapsto \phi'_{C'}(x)(D)(gf, y)\end{aligned}$$

y

$$\phi'_{C'}(x)(D)(gf, y) = \phi_D(R(gf)(x), y).$$

Además para cada objeto C, el siguiente triángulo también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Q^P(C) \times PC \arrow[r, "e_C"] & QC \\ RC \times PC \arrow[u, "\phi'_C \times 1_P"] \arrow[ur, "\phi_C"'] & \end{tikzcd}$$

ya que para $(u, x) \in RC \times PC$

$$\begin{aligned} e_C \circ (\phi'_C \times 1_P)(u, x) &= e_C(\phi'_C(u), x) = \phi'_C(u)(C)(1_C, x) = \phi_C(R(1_C(u)), x) \\ &= \phi_C(1_{RC}(u), x) = \phi_C(u, x). \end{aligned}$$

La conmutatividad del triángulo anterior y la naturalidad de ϕ' nos dan su unicidad. $\square$

1.3. Álgebras de Heyting

Para terminar esta sección revisemos la relación entre álgebras de Heyting y las categorías similares a Set mencionadas al principio, utilizando la categoría de pregavillas.

Definición 1.30. Un **álgebra de Heyting** (aH) es un conjunto parcialmente ordenado con todos los productos y coproductos finitos que es cerrada cartesiana.

Es decir, un álgebra de Heyting es una retícula con elementos mínimo **0** y máximo **1**, tal que para cada par de objetos x, y hay un exponencial y^x, denotado usualmente por $x \Rightarrow y$, a esta operación suele llamársele implicación.
Por definición, el exponencial queda caracterizado por la adjunción

$$z \leq (x \Rightarrow y) \textit{ si y sólo si } z \wedge x \leq y$$

para x, y, z elementos del álgebra.

Observación 1.31. Se siguen directamente de la adjunción $x \Rightarrow \_ \vdash \_ \wedge x$ las siguientes propiedades:

1. $(x \Rightarrow y) \wedge x \leq y$ y $y \leq x \Rightarrow (y \wedge x)$
2. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$ porque $x \Rightarrow \_$ preserva productos por tener adjunto izquierdo.
3. $(x \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$ porque $\_ \wedge x$ tiene adjunto derecho. Es decir, la retícula subyacente a cualquier álgebra de Heyting es **distributiva** .
4. Además por las propiedades del orden se sigue que $y \leq x \Rightarrow y$.
5. El funtor $\_ \Rightarrow y : H^{op} \to H$ es un funtor contravariante que tiene por adjunto izquierdo al funtor $\_ \Rightarrow y : H \to H^{op}$. En efecto, tomemos $x \in H$ y $z \in H^{op}$, entonces $x \Rightarrow y \leq^{op} z$ si y sólo si $z \leq x \Rightarrow y$, equivalentemente, $z \wedge x \leq y$, o bien, $x \leq z \Rightarrow y$.
   Como $\_ \Rightarrow y : H \to H^{op}$ es adjunto izquierdo entonces preserva los coproductos, pero los coproductos en H^{op} son los productos en H entonces se cumple que:
   $$(x \vee z) \Rightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow y).$$

Definición 1.32. Un **álgebra de Heyting completa** (aHc) es un álgebra de Heyting que es completa como retícula, es decir, existen supremos e ínfimos arbitrarios.

Observación 1.33. En un aHc A se cumple para $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ y $b \in A$:

$$\bigvee_{i \in I}(b \wedge a_i) = b \wedge \bigvee_{i \in I} a_i \tag{1.3}$$

Observación 1.34. Si A es una retícula en la que existen supremos arbitrarios y satisfacen la identidad (1.3), entonces A tiene estructura de aHc definiendo

$$b \Rightarrow c = \bigvee\{a \mid a \wedge b \leq c\}.$$

Ejemplo 1.35. Para todo conjunto X no vacío, $\mathbf{P}(X)$ con el orden dado por la inclusión de conjuntos es un aHc, definiendo para $a, b \subseteq X$,

$$b^a = (X \setminus a) \cup b.$$

Ejemplo 1.36. Sea X espacio topológico no vacío y

$$H = \{U \in \mathbf{P}(X) \mid U \textit{ es abierto en } X\}$$

es un aH que no es completa porque la intersección arbitraria de abiertos no necesariamente es abierto. Para ver que es cerrada cartesiana basta con definir para $U, V \in H$,

$$U \Rightarrow V = \bigcup \{W \mid W \cap U \subseteq V\}$$

porque la intersección es distributiva sobre uniones arbitrarias.

Definición 1.37. Sean L una retícula con **0** y **1** y $x \in L$. Un **complemento** de x es un elemento $a \in L$ tal que

$$x \wedge a = \mathbf{0} \quad y \quad x \vee a = \mathbf{1}.$$

Observación 1.38. En una retícula distributiva un complemento, cuando existe, es único. Denotamos al complemento de x por $\neg x$.

Definición 1.39. Un **álgebra booleana** es una retícula distributiva con elemento mínimo **0** y máximo **1**, en la cual cada elemento tiene un complemento.

Observación 1.40. Cualquier álgebra booleana tiene exponenciales definidos por:

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y.$$

En efecto, $z \leq \neg x \vee y$ implica que

$$z \wedge x \leq (\neg x \vee y) \wedge x = (\neg x \wedge x) \vee (y \wedge x) = \mathbf{0} \vee (y \wedge x) = y \wedge x \leq y.$$

Por otra parte, si $z \wedge x \leq y$ entonces

$$z = z \wedge \mathbf{1} = z \wedge (\neg x \vee x) = (z \wedge \neg x) \vee (z \wedge x) \leq \neg x \vee y.$$

Es decir, hemos verificado que el funtor $\_ \wedge x$ tiene adjunto derecho $x \Rightarrow \_$ para cada x en el álgebra, y por tanto $x \Rightarrow y$ como lo definimos es el exponencial y^x.
Con esto, cada álgebra booleana es un álgebra de Heyting.

Definición 1.41. En un álgebra de Heyting definimos la **negación** de un elemento x como

$$\neg x = (x \Rightarrow 0).$$

Observación 1.42. Se sigue de la propiedad de adjunción del exponencial que

$$y \leq \neg x \quad \textit{si y sólo si} \quad y \wedge x = \mathbf{0}.$$

Además se tienen las siguientes propiedades:

1. $x \leq \neg\neg x$
2. $x \leq y$ implica que $\neg y \leq \neg x$
3. $\neg x = \neg\neg\neg x$
4. $\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$.

Proposición 1.43. *En un álgebra de Heyting, si un elemento x tiene un complemento, éste debe ser $\neg x$.*
Por tal motivo a $\neg x$ se le llama ***pseudocomplemento*** *.*

Demostración. Supongamos que x tiene un complemento a con $x \wedge a = \mathbf{0}$ y $x \vee a = \mathbf{1}$. Entonces por la observación 1.42 $a \leq \neg x$. Además

$$\neg x = \neg x \wedge (x \vee a) = (\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge a) = \mathbf{0} \vee (\neg x \wedge a) = \neg x \wedge a.$$

Por tanto, $\neg x \leq a$ y así $a = \neg x$. $\square$

Proposición 1.44. *En un álgebra de Heyting H la implicación "$\Rightarrow$" satisface las siguientes identidades para todo $x, y, z \in H$:*

1. $(x \Rightarrow x) = \mathbf{1}$

2. $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y \quad \textit{y} \quad y \wedge (x \Rightarrow y) = y$

3. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

*Inversamente, en cualquier retícula L con **0** y **1**, una operación que satisface (1), (2) y (3) debe ser la implicación de una estructura de álgebra de Heyting sobre la retícula L.*

Demostración. Sean H un álgebra de Heyting, $x, y, z \in H$ entonces:

1. Como $y \wedge x \leq x$, de la definición de la implicación $\mathbf{1} \wedge x = x \leq x$ si y sólo si $1 \leq x \Rightarrow x$. Por tanto, $x \Rightarrow x = 1$.

2. Como $y \leq x \Rightarrow y$ esto implica que $x \wedge y \leq x \wedge (x \Rightarrow y)$. Por otra parte, de la observación 1.31 $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x$ y $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$, por tanto $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq x \wedge y$. Además $y = y \wedge y \leq y \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$, luego $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$.

3. Es 2 de la observación 1.31.

Ahora veamos que para cualquier retícula L que tiene una operación binaria "⇒" que cumple 1, 2 y 3, esta operación necesariamente satisface la definición de exponencial. Sean $x, y, z \in L$. Supongamos que $z \leq x \Rightarrow y$ esto implica que

$$z \wedge x \leq (x \Rightarrow y) \wedge x \stackrel{2}{=} x \wedge y \leq y.$$

Ahora supongamos que $z \wedge x \leq y$. Note que 3 establece que la operación $x \Rightarrow \_$ preserva productos, por tanto preserva desigualdades. Entonces

$$z \stackrel{2}{=} z \wedge (x \Rightarrow z) \leq x \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge \mathbf{1} \stackrel{1}{=} (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow x) \stackrel{3}{=} x \Rightarrow (z \wedge x) \leq x \Rightarrow y.$$

□

Proposición 1.45. *Sea H álgebra de Heyting H, entonces son equivalentes:*

1. *H es booleana*
2. *Para cada $x \in H$, $\neg\neg x = x$*
3. *Para cada $x \in H$, $x \vee \neg x = \mathbf{1}$.*

Demostración. Supongamos que H es booleana, como el complemento es único, para $x \in H$, x es el complemento de $\neg x$. Entonces $\neg\neg x = x$. Inversamente, en cualquier álgebra de Heyting tenemos

$$\neg(x \vee y) = (x \vee y) \Rightarrow \mathbf{0} = (x \Rightarrow \mathbf{0} \wedge (y \Rightarrow \mathbf{0}) = \neg x \wedge \neg y.$$

Ahora si $\neg\neg x = x$ para todo $x \in H$, entonces:

$$x \vee \neg x = \neg\neg(x \vee \neg x) = \neg(\neg x \wedge \neg\neg x) = \neg\mathbf{0} = 1$$

y como en cualquier álgebra de Heyting se cumple que $x \wedge \neg x = \mathbf{0}$, entonces H es booleana ya que $\neg x$ es el complemento de x. □

Finalmente veamos que la relación entre álgebras de Heyting y los ejemplos típicos de categorías vistos en este capítulo, descansa en el hecho de que el conjunto parcialmente ordenado de subobjetos de un objeto dado en alguna de estas categorías es un álgebra de Heyting.

Proposición 1.46. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y P un objeto en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, el conjunto parcialmente ordenado $Sub(P)$ de los subobjetos de P es un álgebra de Heyting.*

Demostración. Sea C un objeto de la categoría pequeña $\mathcal{C}$, recordemos que la colección $Sub(D)$ de subobjetos de D tiene asociado un orden parcial natural definido para $f : A \to D$ y $g : B \to D \in Sub(D)$ como:

$$[f] \leq [g] \textit{ si y sólo si existe } h : A \to B \textit{ tal que } f = gh.$$

Para cada objeto C de $\mathcal{C}$ y para $S, T \in Sub(P)$, definimos las siguientes operaciones en $Sub(P)$:

$$(S \vee T)(C) = SC \cup TC \subseteq PC$$
$$(S \wedge T)(C) = SC \cap TC \subseteq PC$$

y para cualquier morfismo f en $\mathcal{C}$, $(S \vee T)(f)$ y $(S \wedge T)(f)$ son la restricción de Pf a los respectivos dominio y codominio.

Es claro que las pregavillas $S \vee T, S \wedge T : \mathcal{C}^{op} \to Set$ son el supremo y el ínfimo, respectivamente, de $Sub(P)$. Verifiquemos que el $S \vee T$ es el supremo de $Sub(P)$, tomemos C objeto de $\mathcal{C}$, entonces $SC, TC \subseteq SC \cup TC$ y por tanto, $S, T \hookrightarrow S \vee T$. Además, si $R \in Sub(P)$ tal que $S \leq R$ y $T \leq R$ entonces para cada objeto C de $\mathcal{C}$ se tiene que $SC \subseteq RC$ y $TC \subseteq RC$, luego $SC \cup TC \subseteq RC$, es decir, $S \vee T \leq R$ y de esta forma, $S \vee T$ es el supremo de S y T. Para el ínfimo la demostración es análoga.

El subobjeto más grande de $Sub(P)$ es P y el mínimo es la pregavilla

$$\mathbf{0} : \mathcal{C}^{op} \to Set$$
$$C \mapsto \emptyset$$

La implicación se define como:

$$(S \Rightarrow T)(C) = \{x \in PC \mid \forall f : D \to C : Pf(x) \in SD \textit{ implica que } Pf(x) \in TD\}$$

Veamos que $S \Rightarrow T \in Sub(P)$. Tomemos $f : D \to C$ morfismo en $\mathcal{C}$ y $x \in (S \Rightarrow T)(C)$, entonces queremos ver que $(S \Rightarrow T)(f)(x) \in (S \Rightarrow T)(D)$. Sea $g : E \to D$ tal que $Pg((S \Rightarrow T)(f)(x)) \in SE$. Como $fg : E \to C$ y $P(fg)(x) = Pg(Pf(x)) = Pg((S \Rightarrow T)(f)(x) \in SE$ entonces $P(fg)(x) \in TE$, es decir, $Pg((S \Rightarrow T)(f)(x)) \in TE$. Por tanto, $(S \Rightarrow T)(f)$ es la restricción de Pf a $(S \Rightarrow T)(C)$ y $(S \Rightarrow T)(D)$ respectivamente, es decir, $S \Rightarrow T \hookrightarrow P$ como subfuntor.

Resta verificar que esta definición de la implicación cumple la adjunción requerida. Sean $S, T, Q \in Sub(P)$.

- Supongamos que $S \leq T \Rightarrow Q$ y tomemos C objeto de $\mathcal{C}$ y $x \in SC \cap TC$. Como $x \in SC \subseteq (T \Rightarrow Q)(C)$ y $x \in TC$ entonces para $1_C : C \to C$ se tiene que $P(1_C)(x) = T(1_C)(x) \in TC$ luego $x = P(1_C)(x) \in QC$. Con esto hemos visto que $S \wedge T \leq Q$.

- Ahora supongamos que $S \wedge T \leq Q$, tomemos un objeto C, $x \in SC$ y veamos que $x \in (T \Rightarrow Q)(C)$. Sea $f : D \to C$ tal que $Pf(x) \in TD$, entonces $Pf(x) \in SD \cap TD \subseteq QD$ pues $x \in SC$. Con esto se tiene que $S \leq T \Rightarrow Q$.

Por tanto, la implicación definida cumple la propiedad necesaria para ser el exponencial en $Sub(P)$ y con esto, $Sub(P)$ es un álgebra de Heyting. $\square$

Definición 1.47. Decimos que un topos es **booleano** cuando para cada objeto E del topos, el álgebra de Heyting $Sub(E)$ es un álgebra Booleana.

Observación 1.48. En la observación 1.9 habíamos definido el funtor subobjeto. Así para un morfismo de pregavillas $F : X \to Y$, denotemos por F^* a la imagen de F bajo este funtor subobjeto, es decir,

$$F^* : Sub(Y) \to Sub(X)$$
$$S \mapsto F^*(S)$$

donde $F^*(S) : \mathcal{C}^{op} \to Set$ es un subobjeto de X obtenido de hacer producto fibrado de F con el monomorfismo $S \rightarrowtail Y$, como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F^*(S) \arrow[r] \arrow[d, tail] & S \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, tal que para cada objeto C,

$$F^*(S)(C) = \{x \in X(C) \mid F(C)(X) \in S(C)\}.$$

Este funtor F^* conmuta con la estructura de Heyting de $Sub(Y)$.

Además, F^* tiene adjunto izquierdo $\exists_F$ y adjunto derecho $\forall_F$ definidos como sigue:

$$\exists_F : Sub(X) \to Sub(Y)$$

es tal que a cada S subobjeto de X, $\exists_F(S) : \mathcal{C}^{op} \to Set$ es una pregavilla definida para cada objeto C como sigue:

$$\exists_f(S)(C) = \{y \in YC \mid \textit{ existe } x \in S(C) \textit{ tal que } F(C)(x) = y\}$$

y

$$\forall_F : Sub(X) \to Sub(Y)$$

a cada subobjeto S de X, asigna una pregavilla $\forall_F(S) : \mathcal{C}^{op} \to Set$ definida para cada objeto C como:

$$\forall_F(S)(C) = \{y \in YC \mid \forall u : D \to C \textit{ en } \mathcal{C} \textit{ y } x \in X(D) : \textit{si } F(D)(x) = Y(u)(y) \\ \textit{entonces } x \in S(D)\}.$$

Capítulo 2

Gavillas de conjuntos

En este capítulo estudiamos el concepto de gavilla sobre un espacio topológico. Una gavilla es una forma de describir una clase de funciones sobre un espacio X que se comportan "bien", en el sentido de que una función definida sobre algún abierto U de X puede restringirse a funciones $f \restriction_V$ sobre subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ y después recuperar f al juntar estas restricciones. Esta descripción en términos de restricción y pegado se aplica también a otras estructuras matemáticas que puedan definirse "localmente" sobre un espacio .

La categoría $Sh(X)$ de todas las gavillas de conjuntos sobre un espacio dado X tiene todas las propiedades de un topos. Pretendemos que este capítulo sirva de introducción a los posteriores, así que sólo expondremos de manera breve dichas propiedades y algunas de las pruebas serán omitidas ya que en el capítulo 3 se examinarán gavillas sobre espacios más generales y se hacen a detalle todas las construcciones.

2.1. Gavillas

Si X es un espacio topológico podemos definir funciones continuas sobre X. Denotemos por $O(X)$ a la colección de abiertos de X. La continuidad de cada función $f : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ puede determinarse "localmente", lo cual permite que:

1. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es continua y $V \subseteq U$ es abierto, entonces la función f restringida a V es continua.
2. Si U es cubierto por abiertos U_i y las funciones $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $i \in I$, entonces existe a lo más una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $f \restriction_{U_i} = f_i$ para cada i.

Más aún, dicha f existe si y sólo si las f_i son compatibles, es decir, para cada $i, j \in I$ y $x \in U_i \cap U_j$, $f_i(x) = f_j(x)$.

La propiedad (2) nos dice que las funciones continuas f_i tienen una única forma de amalgamarse.

Al conjunto parcialmente ordenado $O(X)$ podemos verlo como categoría de la manera usual, en donde los objetos son los subconjuntos abiertos de X y $W \subseteq U$ nos da un único morfismo $W \to U$. Pensemos en una asignación C tal que para cada U en $\mathcal{O}(X)$,

$$C(U) := \{f \mid f : U \to \mathbb{R} \textit{ es continua } \},$$

entonces por (1), cada $V \subseteq U$ abierto induce una función

$$c : C(U) \to C(V)$$

$$f \mapsto f \restriction_V$$

que además cumple para $W \subseteq V \subseteq U$, $(f \restriction_V) \restriction_W = f \restriction_W$. Lo que hemos hecho es definir un funtor

$$\begin{array}{rcc} C : \mathcal{O}(X)^{op} \to & & Set \\ U & \mapsto & C(U) \\ V \subseteq U & \mapsto & c \end{array}$$

donde $c : C(U) \to C(V)$ está definida como antes.

Es decir, tenemos una pregavilla sobre $\mathcal{O}(X)$. Dadas una cubierta $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}(X)$ de algún abierto U, esto es, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, una familia indexada de funciones continuas $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ es un elemento del $\prod_{i\in I} C(U_i)$, mientras que las asignaciones

$$\{f_i\}_{i\in I} \mapsto \{f_i \restriction_{U_i \cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I} \quad y \quad \{f_i\}_{i\in I} \mapsto \{f_j \restriction_{U_i \cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I}$$

definen dos funciones

$$p, q \ : \ \prod_{i\in I} C(U_i) \ \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j).$$

La propiedad (2) nos dice que el morfismo

$$e : CU \to \prod_{i\in I} C(U_i)$$

$$f \mapsto \{f \restriction_{U_i}\}_{i\in I}$$

es el igualador de los morfismos p y q, es decir, $p\circ e = q\circ e$ y además es la flecha universal:

$$CU \overset{e}{\dashrightarrow} \prod_{i\in I} CU_i \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} C(U_i \cap U_j) \tag{2.1}$$

Una gavilla se definirá como un funtor C tal que (2.1) es un diagrama igualador para todas las cubiertas $\{U_i\}_{i\in I}$ de U.

Una **pregavilla de conjuntos** P sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante $P : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$. Cada inclusión $V \subseteq U$ de abiertos de X determina una función

$$\begin{array}{rccc} P(V\subseteq U): & PU & \to & PV \\ & t & \mapsto & t\restriction_V \end{array}$$

y si $W \subseteq V \subseteq U$ entonces $(t \restriction_V) \restriction_W = t \restriction_W$.

Definición 2.1. Una **gavilla** de conjuntos F sobre un espacio topológico X es un funtor $F : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$ tal que para cada cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de un conjunto U abierto en X, tenemos el diagrama igualador

$$FU \overset{e}{\dashrightarrow} \prod_{i\in I} FU_i \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

donde e es el igualador tal que para $t \in FU$, $e(t) = \{t \restriction_{U_i}\}_{i\in I}$, y para una familia $\{t_i \in FU_i\}_{i\in I}$:

$$p(\{t_i\}_{i\in I}) = \{t_i \restriction_{U_i\cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I} \quad y \quad q(\{t_i\}_{i\in I}) = \{t_j \restriction_{U_i\cap U_j}\}_{(i,j)\in I\times I}.$$

Observación 2.2. Es posible reemplazar la categoría Set por cualquier categoría con productos de familias pequeñas $\mathcal{C}$ y definir gavillas $F : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$-objetos sobre un espacio X.

Observación 2.3. De la definición se sigue que cada gavilla manda al conjunto vacío $\emptyset$ sobre un conjunto singular $\{*\}$.

Observación 2.4. Si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, una **familia compatible** para P es una colección $\{x_i \in PU_i\}_{i\in I}$ tal que

$$x_i \restriction_{U_i\cap U_j} = x_j \restriction_{U_i\cap U_j}.$$

Entonces podemos decir que P es una gavilla si y sólo si toda familia compatible tiene una única amalgama.

Observación 2.5. Si S es subfuntor de F entonces toda familia compatible en S lo es también en F.

Como cada gavilla es una pregavilla, un morfismo de gavillas es una transformación natural entre funtores. *Sh(X)* denotará la **categoría de gavillas de conjuntos** sobre el espacio X .

Definición 2.6. Una **subgavilla** G de una gavilla F sobre X se define como un subfuntor de F tal que G es una gavilla.

El caracter local de una gavilla se exhibe en la siguiente descripción de una subgavilla.

Proposición 2.7. *Sea F una gavilla sobre un espacio toplógico X, entonces el subfuntor $S \subseteq F$ es gavilla si y sólo si para cada $U \in \mathcal{O}(X)$, para toda $f \in FU$ y para toda cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, se tiene que*

$$f \in SU \text{ si y sólo si para cada } i \in I : f \restriction_{U_i} \in SU_i. \qquad (*)$$

Demostración.

- [$\Rightarrow$] Supongamos que S es una gavilla y tomemos $U \in \mathcal{O}(X)$, $f \in FU$ y $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq O(X)$ tal que $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
  Si $f \in SU$, como S es pregavilla y para cada $i \in I$, $U_i \subseteq U$ entonces $S(U_i \subseteq U)(f) = f \restriction_{U_i} \in SU_i$.
  Ahora supongamos que para cada $i \in I$, $f \restriction_{U_i} \in SU_i$, entonces $\{f \restriction_{U_i} \in SU_i\}$ es una familia compatible para S pues como S es pregavilla se tiene que

  $$(f \restriction_{U_i}) \restriction_{U_i \cap U_j} = f \restriction_{U_i \cap U_j} = (f \restriction_{U_j}) \restriction_{U_i \cap U_j} .$$

  Como S es gavilla, existe una única $g \in SU$ tal que $g \restriction_{U_i} = f \restriction_{U_i} \in SU_i \subseteq FU_i$ ya que $S \subseteq F$. Pero $g \in SU \subseteq FU$, F es gavilla y además $\{f \restriction_{U_i} \in SU_i\}$ es también familia compatible para F, se tiene que tanto f como g son amalgamas para la familia $\{f \restriction_{U_i}\}$ de F, entonces $f = g \in SU$ porque la amalgama es única.

- [$\Leftarrow$] Supongamos que se satisface la propiedad $(*)$ y veamos que S es gavilla. Sea $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ y $\{s_i \in SU_i\}_{i\in I}$ familia compatible en S. Como S es subfuntor de F, entonces $\{s_i \in SU_i \subseteq FU_i\}_{i\in I}$ es familia compatible en F y dado que F es gavilla, existe un único $s \in FU$ tal que para todo $i \in I$, $s \restriction_{U_i} = s_i \in SU_i$, por $(*)$ tenemos que $s \in SU$.
  La unicidad de s en SU se sigue de que si existe $s' \in SU$ tal que $s' \restriction_{U_i} = s_i$ entonces $s' \in FU$ pero por ser F gavilla la amalgama es única, por tanto $s' = s$.

$\square$

2.2. Cribas y gavillas

Dado X un espacio topológico, cada abierto U en X determina una pregavilla

$$\mathcal{O}(X)(\_, U) : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$$

tal que para cada V abierto en X,

$$\mathcal{O}(X)(\_, U)(V) = \begin{cases} \{*\} & \textit{si } V \subseteq U \\ \emptyset & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$\mathcal{O}(X)(\_, U)$ es una gavilla pues en el diagrama de igualador las evaluaciones en $\mathcal{O}(X)(\_, U)$ dan como resultado a lo más $\mathbf{1} = \{*\}$.

Recordemos que a una criba S sobre U le podemos asociar un subfuntor de $YU = \mathcal{O}(X)(\_, U)$, entonces también podemos describir una criba sobre U como un subconjunto $S \subseteq \mathcal{O}(U)$ de objetos tales que si $V_0 \subseteq V \in S$ implica que $V_0 \in S$. Entonces cada criba S queda determinada por

$$S = \{V \subseteq U : SV = 1\}.$$

Cada familia $A = \{V_i \subseteq U\}_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de U, genera una criba S_A sobre U de la siguiente forma:

$$S_A = \{V \in \mathcal{O}(X) \mid \exists i \in I : V \subseteq V_i\}.$$

Definición 2.8. Decimos que una criba S sobre un abierto U es una **criba cubriente** para U si $U = \bigcup\{V \mid V \in S\}$.

Entonces en la definición de gavilla podemos reemplazar la noción de cubierta abierta por la de criba cubriente, tal como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.9. *Sea P una pregavilla sobre X. Entonces P es gavilla si y sólo si para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ y para cada S criba cubriente sobre U, la inclusión de funtores $i_S : S \hookrightarrow YU$ induce un isomorfismo $NAT(S, P) \cong NAT(YU, P)$ de tal forma que el triángulo conmuta*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & P \\ \mathcal{O}(X)(\_, U) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Demostración.

[$\Rightarrow$] Sea P una gavilla y tomemos $U \in \mathcal{O}(X)$, S una criba cubriente sobre U y $\tau : S \Rightarrow P$ transformación natural. Entonces $U = \bigcup\limits_{V \in S} V$ y como $S \hookrightarrow YU$, para cada $V \in S$ sabemos que $SV = 1$, luego

$$\tau(V) : SV = \{x\} \to PV$$

$$x \mapsto x_V$$

Entonces $\{x_V \in PV\}_{V \in S}$ es familia compatible de P. En efecto, sean $V, W \in S$, entonces $V \cap W \subseteq V$ implica que $V \cap W \in S$ entonces $x_{V \cap W} = x_V \upharpoonright_{V \cap W}$ y $x_{V \cap W} = x_W \upharpoonright_{V \cap W}$ porque τ es natural, de lo cual se sigue que $x_V \upharpoonright_{V \cap W} = x_W \upharpoonright_{V \cap W}$.
Como P es gavilla, existe un único $x \in PU$ tal que $x \upharpoonright_V = x_V$. Del lema de Yoneda sabemos que existe un isomorfismo $NAT(\mathcal{O}(X)(\_, U), P) \cong PU$, entonces para $x \in PU$, existe una única transformación natural $\alpha : \mathcal{O}(X)(\_, U) \Rightarrow P$ correspondiente a x que cumple para cada $V \in S$ que $\alpha_V(V \subseteq U)(x) = x \upharpoonright_V$ y por tanto el triángulo siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} SV \arrow[r, "\tau_V"] \arrow[d, hook, "i"'] & PV \\ \mathcal{O}(X)(V,U) \arrow[ur, "\alpha_V"'] & \end{tikzcd}$$

[$\Leftarrow$] Ahora veamos que P es gavilla. Sea $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ y $\{x_i \in PU_i\}_{i \in I}$ familia compatible para P. Entonces la criba $S = \{V \mid \exists i \in I : V \subseteq U_i\}$ es la generada por la cubierta $\{U_i\}$ y S es una criba cubriente de U, con esto tenemos el subfuntor $S \hookrightarrow \mathcal{O}(X)(\_, U)$.
Note que para cada $V \in S$, como $V \subseteq U_i$ para algún $i \in I$, para cada $x_i \in PU_i$ obtenemos la restriccón $x_i \upharpoonright_V$. Definamos la transformación natural $\tau : S \Rightarrow P$ para cada $V \in S$ de tal forma que al único elemento de SV le asigna $x_V := x_i \upharpoonright_V$. Si $W \subseteq V \in S$ entonces se cumple que $(x_i \upharpoonright_V) \upharpoonright_W = x_i \upharpoonright_W$ y por tanto τ es natural.
Se sigue de la hipótesis que existe una transformación natural $\alpha : \mathcal{O}(X)(\_, U) \Rightarrow P$ entonces para cada $V \in S$, $\alpha(V) : \mathcal{O}(X)(V, U) \to PV$ es un morfismo que asigna al único morfismo de V en U el elemento x_V.
Por Yoneda, para α existe un único $x \in PU$ asociado a ésta. Note que $x \upharpoonright_{U_i} = x_i$ pues como α es natural $x \upharpoonright_{U_i} = x_{U_i} = x_i \upharpoonright_{U_i} = x_i$. Por tanto $x \in PU$ es la única amalgama para la familia $\{x_i \in PU_i\}_{i \in I}$.

□

Proposición 2.10. *$Sh(X)$ es completa y el funtor inclusión $Sh(X) \hookrightarrow Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ preserva todos los límites.*

Demostración. En el capítulo 3 se da la demostración de este hecho de manera general. □

Corolario 2.11. *Un subobjeto de una gavilla F en la categoría de gavillas $Sh(X)$ es isomorfo a una subgavilla de F.*

Demostración. Sea $m : H \rightarrowtail F$ un monomorfismo que representa a un subobjeto de F en $Sh(X)$, entonces tenemos el siguiente producto fibrado en $Sh(X)$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & H \arrow[d, "m"] \\ H \arrow[r, "m"'] & F \end{tikzcd}$$

De la proposición anterior sabemos que el funtor inclusión $i : Sh(X) \hookrightarrow Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ preserva límites, por tanto, el diagrama anterior es un producto fibrado en la categoría de pregavillas $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$, luego para cada $U \in O(X)$, $m(U) : HU \rightarrowtail FU$ es monomorfismo, lo cual implica que HU es isomorfo a algún subconjunto SU de FU. De esta forma conseguimos un subfuntor $S \hookrightarrow F$ de tal forma que $H \cong S$. Como H es una gavilla entonces S también es gavilla y por tanto S es una subgavilla de F isomorfa a H. □

Observación 2.12. El **objeto terminal** en $Sh(X)$ es $\mathbf{1} : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$ que manda a cada abierto de X al objeto terminal $\{*\}$ de Set.

Proposición 2.13. *Sea X espacio topológico entonces hay un isomorfismo $\mathcal{O}(X) \cong Sub_{Sh(X)}(\mathbf{1})$.*

Demostración. Sea $W \in O(X)$, definimos un funtor $S_W : \mathcal{O}(X) \to Set$ tal que a cada abierto U de X asigna

$$S_W(U) = \begin{cases} 1 & \textit{si } U \subseteq W \\ \emptyset & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que S_W es una gavilla y además es un subfuntor de $\mathbf{1}$, por tanto S_W es una subgavilla de $\mathbf{1}$.

Ahora tomemos una subgavilla de $\mathbf{1}$. Para cada abierto U, SU es 1 o $\emptyset$. Como S es funtor, existe algún U tal que $SU = 1$ y si $V \subseteq U$ entonces $SV = 1$. Si $\{U_i\}$ es una cubierta abierta para U y $SU_i = 1$ para cada i entonces $SU = 1$ por la condición de igualador en la definición de gavilla. Así que si hacemos $W = \bigcup_{SU=1} U$, se cumple que para cada $U \in O(X)$, $SU = 1$ si y sólo si $U \subseteq W$, esto es, $S = S_W$, por tanto la asignación $W \mapsto S_W$ nos da la biyección deseada. $\square$

Se tiene una generalización para el resultado anterior en el capítulo 3. Lo que hemos mostrado es que el conjunto parcialmente ordenado de los subconjuntos abiertos de un espacio topológico X puede recuperarse de la categoría de gavillas sobre el espacio $Sh(X)$, dado por el conjunto de subobjetos del objeto terminal **1** de $Sh(X)$. Es por esto que se dice que la categoría de gavillas de conjuntos sobre un espacio X determina la topología sobre X.

2.3. Gavillas y secciones transversales

El propósito de esta sección es construir el funtor gavilla asociada que nos da para cada pregavilla su "mejor aproximación" a una gavilla.

Recordemos que dada una categoría $\mathcal{C}$ y A un objeto en ella, se define la **categoría de rebanadas** $\mathcal{C}/A$ como:

- Sus objetos son los morfismos f en $\mathcal{C}$ tales que $cod(f) = A$.
- Si $f : Y \to A$ y $g : Z \to A$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces un morfismo de f a g en $\mathcal{C}/A$, es un morfismo $h : Y \to Z$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ h = f$.

Definición 2.14. Sea X un espacio topológico fijo.

1. Un **haz** sobre X es una aplicación continua $p : Y \to X$.
2. Si $p : Y \to X$ es un haz sobre X, una **sección transversal** de p es una aplicación continua $s : X \to Y$ tal que $p \circ s = 1_X$.

Observación 2.15. Con la notación anterior

1. Un haz $p : Y \to X$ es un objeto en la categoría de rebanadas Top/X.
2. Una sección transversal de p, $s : X \to Y$ es un morfismo en Top/X entre 1_X y p.

Observación 2.16. Sea X un espacio topológico, $p : Y \to X$ un haz sobre X y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto. Entonces podemos restringir p al subespacio $p^{-1}(U) \subseteq Y$ para obtener un haz $p_u : p^{-1}(U) \to U$ sobre U.

Una sección transversal de p_u es una aplicación continua $s : U \to Y$ tal que $p \circ s = inc_X : U \hookrightarrow X$. Entonces tenemos el siguiente diagrama de producto fibrado en la categoría Top:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, hook, "i_y"] \arrow[d, "p_u"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "i_x"'] \arrow[ur, "s"] & X \end{tikzcd}$$

Denotemos por $\Gamma_p(U) = \{s : U \to Y \mid \textit{s es sección transversal del haz } p_u\}$.

Si $V \subseteq U$ es un subconjunto abierto y $s : U \to Y$ es una sección transversal de p_u entonces $s \restriction_V : V \to Y$ es una sección transversal de p_v. Entonces la asignación

$$\Gamma_p(U) \to \Gamma_p(V)$$

$$s \mapsto s \restriction_V$$

nos da el siguiente funtor contravariante

$$\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$$

Teorema 2.17. *Para cada haz $p : Y \to X$, la pregavilla Γ_p es una gavilla.*

Demostración. Sea U un abierto de X y $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U. Para cada $s \in \Gamma_p(U)$ denotemos por $s_i = s \restriction_{V_i} : V_i \to Y$, entonces para cada $i \in I$, $s_i \in \Gamma_p(V_i)$. Además, para $i, j \in I$, $s_i \restriction_{V_i \cap V j}, s_j \restriction_{V_i \cap V_j} \in \Gamma_p(V_i \cap V_j)$. Definimos

$$f,\ g \quad : \prod_{i \in I} \Gamma_p(V_i) \longrightarrow \prod_{i,j \in I} \Gamma_p(V_i \cap V_j)$$

$$\{\sigma_i : V_i \to Y\}_{i \in I} \overset{f}{\longmapsto} \{\sigma_i \restriction_{V_i \cap V_j}\}_{i,j \in I}$$

$$\{\sigma_i : V_i \to Y\}_{i \in I} \overset{g}{\longmapsto} \{\sigma_j \restriction_{V_i \cap V_j}\}_{i,j \in I}$$

y

$$e \ : \ \Gamma_p(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \Gamma_p(V_i)$$

$$s \longmapsto \{s_i\}_{i \in I}$$

Sean $s \in \Gamma_p(U)$, $i, j \in I$ y $z \in V_i \cap V_j$, como $z \in V_i \subseteq U$ y $z \in V_j \subseteq U$, tenemos que:

$$s_j \restriction_{V_i \cap V_j} (z) = s_i(z) = s(z) = s_j(z) = s_i \restriction_{V_i \cap V_j} (z).$$

Por tanto,

$$\Gamma_p(U) \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} \Gamma_p(V_i) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} \Gamma_p(V_i \cap V_j)$$

es un diagrama igualador en Top y con esto Γ_p es una gavilla de conjuntos en X. $\square$

En el teorema anterior, $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$ es llamada la **gavilla de secciones transversales del haz** p y con esto hemos visto que cada haz $p : Y \to X$ produce una gavilla sobre X.

Entonces la asignación

$$\Gamma : Top/X \to Sh(X)$$

$$p \mapsto \Gamma_p$$

es un funtor con asignación en morfismos como sigue. Dados $p : Y \to X$ y $q : Z \to X$ haces sobre X y $h : Y \to Z$ un morfismo entre ellos, es decir, $q \circ h = p$, $\Gamma_p \Rightarrow \Gamma_q$ es la transformación natural tal que para cada $U \subseteq X$ abierto,

$$\Gamma_p(U) \to \Gamma_q(U)$$

$$s \mapsto h \circ s$$

que está bien definida porque $h \circ s : U \to Z$ es una aplicación continua y además

$$q \circ (h \circ s) = p \circ s = i_X : U \hookrightarrow X.$$

Veamos ahora que cada gavilla es una gavilla de secciones transversales de algún haz adecuado. Para ello necesitamos introducir el concepto de germen de una funció.

Definición 2.18. Sean $P : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$ una pregavilla sobre un espacio X, $x \in X$, U y V dos vecindades abiertas de x y dos elementos $s \in PU$ y $t \in PV$. Decimos que s y t tienen el mismo **germen** en x, cuando existe algún abierto $W \subseteq U \cap V$ con $x \in W$ y $s \restriction_W = t \restriction_W \in PW$.

La relación "tener el mismo germen en x" es una relación de equivalencia en la colección $\cup\{PU \mid U \in O(X), x \in U\}$. En efecto fijemos $x \in X$ y tomemos $U \in O(X)$ tal que $x \in U$, entonces para cada $t \in PU$, $t = t \restriction_U$ y por tanto la relación es reflexiva. La simetría es clara. Ahora tomemos $U, V, W \in O(X)$ con $X \in U \cap V \cap W$, $t \in PU$, $s \in PV$ y $r \in PW$ tales que existen $W_1, W_2 \in O(X)$ con $x \in W_1 \cap W_2$, $W_1 \subseteq U \cap V$ y $W_2 \subseteq V \cap W$ tales que $t \restriction_{W_1} = s \restriction_{W_1}$ y $s \restriction_{W_2} = r \restriction_{W_2}$. Si tomamos $W_3 = W_1 \cap W_2$

entonces $x \in W_3$, $W_3 \subseteq U \cap W$ y además $t \upharpoonright_{W_3} = s \upharpoonright_{W_3} = r \upharpoonright_{W_3}$. Por tanto, t y r tienen el mismo germen en x.

A la clase de equivalencia de algún $s \in PU$ se le llama el **germen de** s **en** x, que se denota por $germ_x s$ o $[s \in PU]_x$.

Definimos para cada $x \in X$,

$$P_x = \{[s \in PU]_x : U \in O(X), x \in U\}$$

el conjunto de gérmenes de x.

Las funciones

$$germ_x : PU \to P_x$$
$$s \mapsto germ_x s$$

forman un cocono sobre el funtor P restringido a las vecindades abiertas de x, pues si $V \subseteq U$ entonces el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
PV \arrow[dr, "germ_x"'] & & PU \arrow[ll] \arrow[dl, "germ_x"] \\
& P_x &
\end{tikzcd}$$

ya que para $x \in V$, $s \in PU$ se tiene que $germ_x s = germ_x(s \upharpoonright_V)$. Si $\{\tau_U : PU \to L\}_{U \in O(X), x \in U}$ es otro cocono sobre la restricción de P, entonces podemos definir la función

$$\tau : P_x \to L$$
$$[s \in PU]_x \mapsto \tau_U(s)$$

Notar que τ está bien definida ya que si $[s \in PU]_x = [t \in PV]_x$, se sigue de la definición que existe $W \in O(X)$ con $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $s \upharpoonright_W = t \upharpoonright_W$, luego

$$\tau_U(S) = \tau_W(s \upharpoonright_W) = \tau_W(t \upharpoonright_W) = \tau_V(t).$$

$$\begin{tikzcd}
& PU \arrow[d] \arrow[ddl, "\tau_U"'] \arrow[ddr, "germ_x"] & \\
& PV \arrow[dl, "\tau_V"] \arrow[dr] & \\
L & & P_x \arrow[ll, dashed, "\tau"]
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $P_x = \varinjlim_{U \ni x} PU$ el colímite de los PU para $U \in O(X)$ tal que $x \in U$.

Para cada $x \in X$, P_x es llamado el **tallo** de P en x.

Proposición 2.19. *Sean $P, Q : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$ y $x \in X$. Para cada $h : P \Rightarrow Q$ transformación natural, existe una única función $h_x : Px \to Qx$ tal que el siguiente cuadrado conmuta:*

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "germ_x"'] & QU \arrow[d, "germ_x"] \\ P_x \arrow[r, dashed, "h_x"'] & Q_x \end{tikzcd}$$

Demostración. Note que las composiciones $germ_x \circ h_U : PU \to Q_x$ para cada $U \in O(X)$ tal que $x \in U$, forman un cocono de la restricción de P. En efecto, si $V \subseteq U$, como h es natural se tiene que para $s \in PU$

$$h_V(s \restriction_V) = h_U(s) \restriction_V,$$

pero Q_x es el colímite de los QU entonces

$$germ_x(h_U(s)) = germ_x(h_U(s) \restriction_V).$$

Por tanto,

$$germ_x(h_U(s)) = germ_x(h_V(s \restriction_V)).$$

Como P_x es el colímite de las PU, existe una única función $h_x : P_x \to Q_x$ tal que

$$h_x \circ germ_x = germ_x \circ h_U.$$

$\square$

Con lo anterior podemos definir un funtor

$$\begin{aligned} H : Set^{\mathcal{O}(X)^{op}} &\longrightarrow Set \\ P &\longmapsto P_x \\ h : P \Rightarrow Q &\longmapsto h_x : P_x \to Q_x \end{aligned}$$

Definición 2.20. Sean X un espacio topológico y P una pregavilla de conjuntos sobre X. Definimos

$$\Lambda_P = \bigsqcup_{x \in X} P_x$$

y

$$\begin{aligned} p \ : \ \Lambda_P &\longrightarrow X \\ [s \in PU]_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Observación 2.21. Cada $s \in PU$ determina una función

$$\dot{s} : U \to \Lambda_P$$
$$x \mapsto [s \in PU]_x$$

con la propiedad de que para cada $x \in U$,

$$(p \circ \dot{s})(x) = p(\dot{s}(x)) = p([s \in PU]_x) = x = i(x).$$

Por tanto, $\dot{s}$ es una sección de p sobre U.

Proposición 2.22. *La colección* $\mathbf{B} = \{\dot{s}(U) \mid U \in O(X),\ s \in PU\}$ *es una base para una topología del espacio* Λ_P *que hace continuas a* p *y a* $\dot{s}$.

Demostración. Es claro que $\Lambda_P = \bigcup \mathbf{B}$. Sean $U, V \in O(X)$, $s \in PU$, $t \in PV$ y $q \in \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$ y encontremos $W \in O(X)$ y $r \in PW$, $q \in \dot{r}(W) \subseteq \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$.

Como $q \in \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$, existen $x \in U$, $y \in V$ tales que $q = [s \in PU]_x$ y $q = [t \in PV]_y$, luego existe $W \in O(X)$ con $W \subseteq U \cap V$ y $x \in W$ tal que $s \restriction_W = t \restriction_W \in PW$.

Note que para $x \in W \subseteq U$,

$$(s \dot{\restriction}_W)(x) = [s \restriction_W \in PW]_x = [s \in PU]_x = q.$$

Finalmente veamos que $(s \dot{\restriction}_W)(W) \subseteq \dot{s}(U)$ y $(s \dot{\restriction}_W)(W) \subseteq \dot{t}(V)$. Sea $y \in W$ entonces

$$(s \dot{\restriction}_W)(y) = [s \restriction_W \in PW]_y = [s \in PU]_y = \dot{s}(y) \in \dot{s}(U).$$

La otra inclusión es análoga. Con esto hemos probado que $\mathbf{B}$ es una base para una topología de Λ_P.

Sea $U \in O(X)$ y veamos que $p^{-1}(U)$ es un abierto de Λ_P. Observe que $p^{-1}(U) = \bigcup_{s \in PU} \dot{s}(U)$ pues para cada $s \in PU$, $p \circ \dot{s}(U) = U$, por tanto $p^{-1}(U)$ es abierto en Λ_P por ser unión de abiertos.

Resta ver que cada $\dot{s} : U \to \Gamma_P$ es continua. Tomemos un abierto básico en Γ_P, es decir, sea $V \in O(X)$ y $t \in PV$ y veamos que $\dot{s}^{-1}(\dot{t}(V))$ es abierto en U. Sea $x \in \dot{s}^{-1}(\dot{t}(V))$ entonces $\dot{s}(x) \in \dot{t}(V)$, luego $\dot{s}(x) = \dot{t}(x)$, es decir, $[s \in PU]_x = [t \in PV]_x$, lo cual implica que existe $W \in O(X)$ con $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $s \restriction_W = t \restriction_W$. Veamos que $W \subseteq \dot{s}^{-1}(\dot{t}(V))$, es decir, veamos que $\dot{s}(W) \subseteq \dot{t}(V)$, pero como $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$,

$$\dot{s}(W) = (s \dot{\restriction}_W)(W) = (t \dot{\restriction}_W)(W) \subseteq \dot{t}(V).$$

Por tanto, $\dot{s}$ es continua. $\square$

Observación 2.23. De la definición se sigue que $\dot{s}$ es abierta para toda $s \in PU$ y para cada abierto U de X.
Además se sigue de la proposición que p es un haz. Por tanto, $\dot{s}$ es una sección transversal del haz p.

Lo que hemos hecho hasta ahora es construir, para una pregavilla dada P, un espacio Λ_P y un haz $p : \Lambda_P \to X$.

Definición 2.24. Definimos un funtor

$$\Lambda : Set^{\mathcal{O}(X)^{op}} \to Top/X$$

$$P \mapsto p : \Lambda_P \to X$$

tal que a cada morfismo de pregavillas $\Theta : P \Rightarrow Q$ asigna una función $\Lambda_\Theta : \Lambda_P \to \Lambda_Q$ inducida por los morfismos $\Theta_x : Px \to Q_x$ en cada $x \in X$ como en 2.19. Entonces el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_P = \coprod_{x\in X} P_x \arrow[rr, "\Lambda_\Theta"] \arrow[dr, "p"'] & & \Lambda_Q = \coprod_{x\in X} Q_x \arrow[dl, "q"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la gavilla Γ_{Λ_P} de secciones transversales del haz $p : \Lambda_P \to X$. Podemos definir una transformación natural

$$\eta : P \Rightarrow \Gamma_{\Lambda_P}$$

tal que para cada subconjunto U de X,

$$\eta_U : PU \to \Gamma_{\Lambda_P}(U)$$

$$s \mapsto \dot{s}$$

Si $V \subseteq U$ y $s \in PU$ entonces

$$\eta_V(s \restriction_V) = (s \dot{\restriction}_V) = \dot{s} \restriction_V = (\eta_U(s)) \restriction_V$$

pues $[s \in PU]_x = [s \restriction_V \in PV]_x$ y por tanto η es transformación natural.

Teorema 2.25. *Si la pregavilla P es una gavilla entonces η es un isomorfismo.*

Demostración. Sean P una gavilla sobre X y $U \in O(X)$.

- η_U es inyectiva: Sean $s, t \in PU$ y supongamos que $\dot{s} = \dot{t}$. Entonces para cada $x \in U$, $[s \in PU]_x = [t \in PU]_x$, luego existe un abierto $V_x \subseteq U$ con $s \upharpoonright_{V_x} = t \upharpoonright_{V_x}$ para cada $x \in U$. Con esto tenemos una cubierta abierta para U, $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$. Entonces en $e : PU \to \prod_{x \in V_x} PV_x$, s y t tienen la misma imagen pues $\{s \upharpoonright_{V_x}\}_{x \in U} = \{t \upharpoonright_{V_x}\}_{x \in U}$, como P es gavilla sabemos que la amalgama es única, por tanto, $s = t$.

- η_U es sobreyectiva: Sea $h : U \to \Lambda_P$ una sección transversal del haz $p : \Lambda_P \to X$, para algún $U \in O(X)$. Entonces para cada $x \in U$, existe un abierto U_x con $x \in U_X$ y un elemento $s_x \in PU_x$ tal que $h(x) = [s_x \in PU_x]_x \in \dot{s_x}(U_x)$. Como h es continua y $\dot{s_x}(U_x)$ es abierto en Λ_P, existe un abierto $V_x \subseteq U$ tal que $x \in V_x$, $h(V_x) \subseteq \dot{s_x}(U_x)$, esto es, $h = \dot{s_x}$ sobre V_x.
  Entonces tenemos una cubierta de U por abiertos V_x y un elemento $s_x \upharpoonright_{V_x}$ en cada PV_x. Además para cada $x, y \in U$ se tiene que si $z \in V_x \cap V_y$, $\dot{s_x}(z) = h(z) = \dot{s_y}(z)$, es decir, $\dot{s_x}$ y $\dot{s_y}$ coinciden en $V_x \cap V_y$. Como η_U es inyectiva se tiene que $s_x \upharpoonright_{V_x \cap V_y} = s_y \upharpoonright_{V_x \cap V_y}$. Con esto tenemos una familia $\{s_x \in PV_x\}_{x \in U}$ compatible y como P es gavilla, existe un único $s \in PU$ con $s \upharpoonright_{V_x} = s_x$. Entonces en cada $x \in V_x$, $h(x) = [s_x \in PV_x]_x = [s \in PU]_x = \dot{s}(x)$. Por tanto, $h = \dot{s}$ y así, cualquier sección transversal es imagen de algún s bajo η_U.

Por tanto, η es isomorfismo. □

En otras palabras este teorema dice que cada gavilla es una gavilla de secciones transversales. En el siguiente teorema veremos que para cualquier pregavilla P, el morfismo de pregavillas $\eta : P \Rightarrow \Gamma_{\Lambda_P}$ es universal desde P a gavillas, esto es, Γ_{Λ_P} es la gavilla "más cercana" a la pregavilla P.

Teorema 2.26. *Sean P una pregavilla, F una gavilla y $\Theta : P \Rightarrow F$ cualquier morfismo de pregavillas, entonces existe una única transformación natural $\sigma : \Gamma_{\Lambda_P} \Rightarrow F$ tal que el triángulo conmuta:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\Theta"'] & & \Gamma_{\Lambda_P} \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean P pregavilla y F una gavilla. Por el teorema anterior, sabemos que $\eta : F \Rightarrow \Gamma_{\Lambda_F}$ es un isomorfismo. Definamos $\sigma : \Gamma_{\Lambda_P} \Rightarrow F$ como $\sigma := \eta^{-1} \circ \Gamma(\Lambda_\Theta)$.

Entonces el triángulo inferior en el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Theta"'] & \Gamma\Lambda_P \arrow[d, "\Gamma\Lambda_\Theta"] \arrow[dl, "\sigma"] \\ F \arrow[r, "\eta"'] & \Gamma\Lambda_F \end{tikzcd}$$

y como η es natural, el cuadrado exterior conmuta. Por tanto,

$$\sigma \circ \eta = \eta^{-1} \circ \Gamma\Lambda_\Theta \circ \eta = \eta^{-1} \circ \eta \circ \Theta = \Theta.$$

Veamos que σ es única con dicha propiedad. Sea $\tau : \Gamma\Lambda_P \to F$ tal $\tau \circ \eta = \Theta$. Sea $U \in O(X)$ y $h \in \Gamma\Lambda_P(U)$. Para $x \in U$, $h(x) \in \Lambda_P(U)$, entonces existe $V_x \in O(X)$ con $x \in V_x$ y $s_x \in PV_x$ tal que $h(x) = [s_x \in PV_x]_x$. Como en el teorema anterior, existe un abierto U_x de V_x con $x \in U_x$ tal que $h \restriction_{U_x} = \dot{s_x} \restriction_{U_x} = \eta_{U_x}(s_x)$. Entonces

$$\sigma(h) \restriction_{U_x} = \sigma(h \restriction_{U_x}) = \sigma(\eta_{U_x}(s_x)) = \Theta_{U_x}(s_x) = \tau(\eta_{U_x}(s_x)) = \tau(h \restriction_{U_x}) = \tau(h) \restriction_{U_x} .$$

Pero $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ y como F es una gavilla se sigue que $\sigma(h) = \tau(h)$ para toda sección h de $\Gamma\Lambda_P$, por tanto, $\sigma = \tau$. $\square$

Corolario 2.27. *Para cada espacio topológico X, $Sh(X)$ es una subcategoría reflexiva de la categoría de pregavillas $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ sobre X.*

Demostración. Ser subcategoría reflexiva significa que el funtor inclusión $Sh(X) \rightarrowtail Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ tiene adjunto izquierdo. Sin embargo, en el teorema anterior hemos mostrado que dicho adjunto es precisamente el funtor $\Gamma\Lambda$, donde el morfismo η es la unidad de la adjunción. $\square$

El funtor $\Gamma\Lambda : Set^{\mathcal{O}(X)^{op}} \to Sh(X)$ es conocido como el **funtor gavilla asociada** que nos da para cada pregavilla P su “mejor aproximación” por una gavilla $\Gamma\Lambda_P$. En el capítulo 3 se construye este funtor para el caso general y la construcción particular nos sirve como ejemplo introductorio. Además $\Gamma\Lambda$ por ser adjunto izquierdo preserva todos los colímites existentes en $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ por tanto, $Sh(X)$ tiene todos los colímites pequeños.

2.4. Construcciones típicas

En esta sección descibiremos de manera breve las construcciones que faltan para ver que $Sh(X)$ es un topos, mismas que se exponen a detalle en el capítulo 3.

En el capítulo 1 se describe la pregavilla exponencial F^P en la proposición 1.29 tal que a cada abierto U de X, $F^P(U) = NAT(YU \times P, F)$ donde $YU = Hom(\_, U)$ es el representable contravariante. Además como los valores de F^P dependen sólo de los abiertos contenidos en U, $F^P(U) \cong Hom(P\restriction_U, F\restriction_U)$. Resta ver que F^P es gavilla cuando F lo es, la prueba la dejaremos para el capítulo 3.

Por otra parte, se define la pregavilla sobre X

$$\Omega : \mathcal{O}(X)^{op} \to Set$$

tal que a cada abierto U de X le asigna

$$\Omega(U) = \{W \in O(X) \mid W \subseteq U\}$$

y si $V \subseteq U$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega(U) &\to \Omega(V) \\ W &\mapsto W \cap V \end{aligned}$$

Proposición 2.28. *La pregavilla Ω es una gavilla sobre X.*

Demostración. Sean $U \in O(X)$, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ con $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq O(X)$ y una familia $\{V_i \in \Omega(U_i)\}_{i\in I}$ compatible, es decir, para cada $i \in I$, $V_i \subseteq U_i$ y para $i, j \in I$, $V_i \cap (U_i \cap U_j) = V_j \cap (U_i \cap U_j)$, pero $V_i \cap U_j = V_j \cap U_i \subseteq U_i \cap U_j$. Sea $V = \bigcup_{i\in I} V_i$, es claro que $V \subseteq U$, entonces $V \in \Omega(U)$ y además para cada $i \in I$, $V\restriction_{U_i} = V \cap U_i = V_i$, por tanto Ω es una gavilla. $\square$

Teorema 2.29. *El morfismo $v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ es un clasificador de subobjetos para $Sh(X)$, donde a cada abierto U de X, $v_U(*) = U$.*

Demostración. Sean F una gavilla y $S \subseteq F$ subgavilla. Debemos encontrar una transformación ϕ tal que el siguiente cuadrado sea un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{1} \arrow[d, hook] \\ F \arrow[r, dashed, "\phi"'] & \Omega \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Se propone para cada $U \in O(X)$,

$$\phi(U) : FU \to \Omega U$$

$$x \mapsto W = \cup\{V \subseteq U \mid x \restriction_V \in SV\}$$

Si $V \subseteq U$, note que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FU \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d] & \Omega U \arrow[d] \\ FV \arrow[r, "\phi_V"'] & \Omega V \end{tikzcd}$$

ya que si $x \in FU$ entonces

$$\phi_U(x) \cap V = \bigcup\{U_i \cap V \subseteq U \mid x \restriction_{U_i} \in SU_i\} = \bigcup\{V_i \subseteq V \mid x \restriction_{V_i} \in SV_i\} = \phi_V(x \restriction_V).$$

Por tanto, ϕ es natural.

Por otra parte, sea $U \in O(X)$. El producto fibrado de ϕ_U y v_U es la colección $\{(x, *) \in FU \times \mathbf{1}U \mid \phi_U(x) = U\}$, pero como S y F son gavillas se cumple que $x \in SU$ si y sólo si $\phi_U(x) = U$. De esta forma 2.2 es un diagrama de producto fibrado. Además ϕ así definida es la única con tal propiedad, y así $v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ es un clasificador de subobjetos para $Sh(X)$. $\square$

En el capítulo 3 se da una demostración más general y detallada del teorema anterior.

Con esto hemos visto que $Sh(X)$ tiene límites y colímites finitos, exponenciales y un clasificador de subobjetos, por tanto es un topos elemental.

Capítulo 3

Topologías de Grothendieck y gavillas

En el capítulo anterior hemos presentado la noción de gavilla en términos de cubiertas y amalgamas sobre espacios topológicos usuales. En este capítulo desarrollaremos un concepto más general de "topología" y de gavillas sobre estas topologías.

3.1. Topologías de Grothendieck

Las vecindades abiertas U de un punto en un espacio topológico X, son monomorfismos topológicos $U \rightarrowtail X$, es decir, inclusiones. La definición de topología de Grothendieck reemplaza las inclusiones por morfismos más generales para definir "cubiertas abiertas", motivándose principalmente en la analogía encontrada por Grothendieck, entre grupos de Galois sobre un campo y el grupo fundamental de un espacio topológico. Ahora una cubierta por conjuntos abiertos para un espacio X, será sustituida por un nuevo tipo de cubierta, dada por una familia de morfismos de tipo $C \to X$ no necesariamente mónicos. Dicha construcción puede hacerse en cualquier categoría $\mathcal{C}$ con productos fibrados.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ la categoría de funtores , Y el encaje de Yoneda para $\mathcal{C}$ que asigna a cada objeto C el funtor representable

$$Y(C) := \mathcal{C}(\_, C).$$

Una criba S sobre un objeto C está dada por una familia de morfismos en $\mathcal{C}$, todos con codominio C de tal forma que $f \in S$ implica que $f \circ g \in S$ para todo morfismo g en $\mathcal{C}$ tal que $cod(g) = dom(f)$. También habíamos visto en el capítulo anterior que una criba S sobre un objeto C es un subobjeto $S \subseteq Y(C)$ en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.

Si S es criba sobre C y $h : D \to C$ es morfismo en $\mathcal{C}$,

$$h^*(S) = \{g \mid cod(g) = D \text{ y } h \circ g \in S\}$$

es criba sobre D. En efecto, si $g \in h^*(S)$ y f es otro morfismo tal que $g \circ f$ esté definida, entonces $h \circ g \in S$ y como S es criba, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in S$. Así, $g \circ f \in h^*(S)$.

Definición 3.1. Una **topología de Grothendieck** sobre una categoría $\mathcal{C}$ es una función J que asigna a cada objeto C de $\mathcal{C}$ una colección de cribas sobre C tal que:

(i) La criba maximal $t_C = \{f \mid cod(f) = C\}$ está en $J(C)$.

(ii) Axioma de estabilidad: Si $S \in J(C)$ entonces para toda flecha $h : D \to C$, $h^*(S) \in J(C)$.

(iii) Axioma de transitividad: Si $S \in J(C)$ y R es cualquier criba sobre C tal que para toda flecha $h : dom(h) \to C$, $h^*(R) \in J(domh)$, entonces $R \in J(C)$.

Recordar que una criba sobre C es maximal si y sólo si contiene a la flecha 1_C.

Observación 3.2. Si $S \in J(C)$ entonces cualquier criba R sobre C tal que $S \subseteq R$ es también miembro de $J(C)$.
En efecto, sean $S \in J(C)$, R criba sobre C tal que $S \subseteq R$, $h : D \to C$ en S y veamos que $h^*(R) \in J(D)$. Note que $1_D \in h^*(S)$ pues $h \circ 1_D = h \in S$, esto implica que $h^*(S)$ es la criba maximal sobre D.
Por otra parte, como $S \subseteq R$,

$$h^*(S) = \{g \mid cod(g) = D \text{ y } h \circ g \in S\} \subseteq \{g \mid cod(g) = D \text{ y } h \circ g \in R\} = h^*(R)$$

por maximalidad $h^*(R) = h^*(S) \in J(D)$ por axioma (i). Aplicando el axioma de transitividad (iii) se sigue que $R \in J(C)$.

De esta observación se sigue que:

(iii') Si $S \in J(C)$ y si para cada $f : dom(f) \to C$ en S existe una criba $R_f \in J(dom(f))$, entonces el conjunto

$$T = \{f \circ g \mid f \in S \text{ y } g \in R_f\}$$

está en $J(C)$.

Definición 3.3. Un **sitio (de Grothendieck)** es una pareja $(\mathcal{C}, J)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y J es una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$.

Si $S \in J(C)$, decimos que S es una **criba cubriente** o que S cubre C.

Además diremos que una criba S sobre C cubre una flecha $f : D \to C$, si $f^*(S)$ cubre D, es decir , si $f^*(S) \in J(D)$.

Observación 3.4.

1. Una criba S sobre C cubre C si y sólo si S cubre la flecha identidad sobre C.
   Se sigue del hecho de que
   $$1_C^*(S) = \{g \mid cod(g) = C \text{ y } 1_C \circ g \in S\} = S.$$

2. Si S es criba sobre C y $f : D \to C$ está en S. Entonces $f^*(S) = t_D$.
   Es claro que $f^*(S) \subseteq t_D$. Tomemos $: E \to D \in t_D$, como S es criba y $f \in S$, $f \circ g \in S$. Por tanto, $g \in f^*(S)$ y así $f^*(S) = t_D$.

3. Si S es criba sobre C, $g : E \to D$ y $f : D \to C$ entonces
   $$(f \circ g)^*(S) = g^*(f^*(S)).$$
   En efecto, tomemos $h \in (f \circ g)^*(S)$ entonces $cod(h) = dom(f \circ g) = E$ y cumple que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \in S$, luego $g \circ h \in f^*(S)$, así $h \in g^*(f^*(S))$.
   Ahora sea $h \in g^*(f^*(S))$ entonces $cod(h) = dom(g) = E$ y $g \circ h \in f^*(S)$, es decir, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \in S$, luego $h \in (f \circ g)^*(S)$.

Con esta notación, los axiomas para una topología de Grothendieck pueden formularse como sigue:

(ia) Si S es criba sobre C y $f \in S$ entonces S cubre f.

(iia) Estabilidad: Si S cubre una flecha $f : D \to C$, S también cubre la composición $f \circ g$ para cualquier flecha $g : E \to D$.

(iiia) Transitividad: Si S cubre $f : D \to C$ y R es una criba sobre C que cubre todas las flechas de S, entonces R cubre f.

Proposición 3.5. *Los axiomas* $(i) - (iii)$ *son equivalentes a* $(ia) - (iiia)$.

Demostración. 1. Supongamos los axiomas $(i) - (iii)$.

(ia) Sean S una criba sobre C y $f : D \to C \in S$. Veamos que $f^*(S) \in J(D)$. Como S es criba, $f^*(S) = \{g \mid cod(g) = D \wedge f \circ g \in S\} = t_D$, por axioma (i) $t_D \in J(D)$ y así $f^*(S) \in J(D)$.

(iia) Supongamos que S cubre a la flecha $f : D \to C$ y sea $g : E \to D$. Veamos que $(f \circ g)^*(S) \in J(E)$. Como $f^*(S) \in J(D)$, para $g : E \to D$ por axioma (ii) y la observación anterior $(f \circ g)^*(S) \in J(E)$.

$(iiia)$ Supongamos que S cubre $f : D \to C$ y R es criba sobre C que cubre a toda flecha de S. Veamos que R cubre f. Notar que:

a) $f^*(S)$ es criba sobre D y además $f^*(S) \in J(D)$.

b) $f^*(R)$ es criba sobre D pues R es criba sobre C y $f : D \to C$.

c) Para todo $h \in f^*(S)$, $h^*(f^*(R)) \in J(dom(h))$, es decir, la criba $f^*(R)$ cubre a toda flecha $h \in f^*(S)$.
En efecto, sea $h \in f^*(S)$ entonces $cod(h) = D$ y $f \circ h \in S$. Como R cubre toda flecha de S, en particular, $(f \circ h)^*(R) \in J(dom(f \circ h)) = J(dom(h))$, es decir, $h^*(f^*(R)) \in J(dom(h))$.

De (a), (b), (c) y aplicando axioma (iii), $f^*(R) \in J(D)$, es decir, R cubre f.

2. Supongamos $(ia), (iia), (iiia)$.

(i) Veamos que la criba maximal t_C está en $J(C)$ para cada objeto C en $\mathcal{C}$. Como t_C es criba sobre C y $1_C \in t_C$, por axioma (ia) tenemos que t_C cubre 1_C. Por la observación anterior, t_C cubre C, es decir, $t_C \in J(C)$.

(ii) Supongamos que $S \in J(C)$ y veamos que para todo $h : D \to C$, $h^*(S) \in J(D)$. Como $S \in J(C)$, S cubre 1_C, aplicando axioma (iia), S también cubre $1_c \circ h = h$ para toda $h : D \to C$, es decir, $h^*(S)$ cubre D para toda $h : D \to C$.

(iii) Supongamos que $S \in J(C)$ y R es criba sobre C tal que para toda $h : D \to C \in S$, $h^*(R) \in J(D)$. Veamos que $R \in J(C)$. Como $S \in J(C)$, S cubre 1_C, aplicando axioma $(iiia)$, R cubre 1_C, o equivalentemente, R cubre C, es decir, $R \in J(C)$.

$\square$

Observación 3.6. Se sigue de los axiomas que cualesquiera dos cubiertas tienen un refinamiento común.

(iv) Si $R, S \in J(C)$ entonces $R \cap S \in J(C)$.

En efecto, sean $R, S \in J(C)$ y tomemos $f : D \to C$ en R, por axioma (ii), $f^*(S) \in J(D)$ pues $S \in J(C)$. Note que:

$$\begin{aligned} f^*(S) &= \{g \mid cod(g) = D \text{ y } f \circ g \in S\} \\ &= \{g \mid cod(g) = D \text{ y } f \circ g \in R \cap S\} \\ &= f^*(R \cap S) \end{aligned}$$

pues R es criba y $f \in R$. Por tanto, $f^*(S \cap R) = f^*(S) \in J(D)$ para todo $f : D \to C \in R$, por axioma (iii) tenemos que $S \cap R \in J(C)$.

(iva) Si R y S cubren $g : D \to C$ entonces $R \cap S$ cubre g.

Note que:

$$\begin{aligned} g^*(R \cap S) &= \{h \mid cod(h) = D \wedge g \circ h \in R \cap S\} \\ &= \{h \mid cod(h) = D \text{ y } g \circ h \in R\} \cap \{h \mid cod(h) = D \text{ y } g \circ h \in S\} \\ &= g^*(R) \cap g^*(S). \end{aligned}$$

Usando esta igualdad y (iv) tenemos que $g^*(R) \cap g^*(S) \in J(D)$ pues $g^*(R)$ y $g^*(S)$ están en $J(D)$.

Ejemplo 3.7. Un espacio topológico X con la noción usual de cubierta nos da un sitio de la siguiente forma. Tomamos el conjunto parcialmente ordenado $O(X)$ visto como categoría. Una criba sobre $U \in O(X)$ es una familia

$$S = \{V \subseteq U \mid V abierto : V' \subseteq V \textit{ implica que } V' \in S\}.$$

Además, S cubre U si y sólo si $U \subseteq \bigcup_{V \in S} V$. S cubre la flecha $W \subseteq U$ si y sólo si $W \subseteq \bigcup_{V \in S} V$. Veamos que se cumplen los axiomas para una topología de Grothendieck. Sean $U \in O(X)$ y $J(U)$ colección de cribas sobre U.

(i) Sea S criba sobre U y $W \subseteq U$ con $W \in S$. Es claro que S cubre $W \subseteq U$.

(ii) Estabilidad: Supongamos que S cubre $W \subseteq U$ y sea $T \subseteq W$. Veamos que S cubre $T \subseteq U$. Por hipótesis, $W \subseteq \bigcup\limits_{V \in S} V$, entonces $T \subseteq \bigcup\limits_{V \in S} V$ y por tanto S cubre $T \subseteq U$.

(iii) Transitividad: Supongamos que S cubre $W \subseteq U$ y R es otra criba sobre U que cubre a cada $V \subseteq U$ tal que $V \in S$. Veamos que R cubre $W \subseteq U$. Como S cubre $W \subseteq U$ entonces $W \subseteq \bigcup\limits_{V \in S} V$. Por otra parte, para cada $V \in S$, $V \subseteq \bigcup\limits_{T \in R} T$ entonces

$$W \subseteq \bigcup_{V \in S} = \bigcup_{V \in S} \bigcup_{T_V \in R} (V \cap T_V),$$

pero cada $V \cap T_V \subseteq T_V \in R$ entonces $V \cap T_V \in R$ pues R es criba y así W está contenido en una unión de elementos de R. Por tanto, R cubre $W \subseteq U$.

Para un espacio topológico usual, una cubierta abierta de algún abierto U se describe como una familia $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq O(U)$ tal que $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$; dicha familia no necesariamente es una criba pero si genera una, "la colección de todos los abiertos $V \subseteq U$ con $V \subseteq U_i$ para algún U_i. De manera similar, definiremos una forma para generar una criba cubriente para una categoría arbitraria con productos fibrados, en términos de bases para una topología de Grothendieck.

Definición 3.8. Una **base** para una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathcal{C}$ con productos fibrados es una función K que asigna a cada objeto C en $\mathcal{C}$, una colección $K(C)$ de familias de morfismos con codominio C tal que:

(i') Si $f : C' \to C$ es un isomorfismo entonces $\{f : C' \to C\} \in K(C)$.

(ii') Si $\{f_i : C_i \to C\}_{i \in I} \in K(C)$ entonces para cualquier morfismo $g : D \to C$, la familia de productos fibrados $\{\pi_2 : C_i \times_C D \to D\}_{i \in I}$ está en $K(D)$. Para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd} C_i \times_C D \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C_i \arrow[d, "f_i"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

(iii') Si $\{f_i : C_i \to C\}_{i \in I} \in K(C)$ y para cada $i \in I$ tenemos una familia de morfismos $\{g_{ij} : D_{ij} \to C_i\}_{j \in I_i} \in K(C_i)$, entonces la familia de composiciones $\{f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \to C\}_{i \in I, j \in I_i}$ está en $K(C)$.

La familia $(\mathcal{C}, K)$ se llama **sitio** y los elementos R del conjunto $K(C)$ son llamados **familias cubrientes** o cubiertas para el sitio.

Observación 3.9. Por (i'), una topología J no es una base aunque si satisface (ii') y (iii').

Proposición 3.10. *Si K es una base sobre $\mathcal{C}$, entonces K genera una topología J de la siguiente forma:*

$$S \in J(C) \quad \textit{si y sólo si existe} \quad R \in K(C) : R \subseteq S.$$

Es decir, una criba es J-cubierta si y sólo si contiene una $K-$cubierta. Veamos que la topología J generada por la base K es topología de Grothendieck.

Demostración.

(i) Sea C objeto en $\mathcal{C}$. Como $1_C : C \to C$ es isomorfismo entonces de (i') se tiene que $\{1_C\} \in K(C)$ y $\{1_C\} \subseteq t_C$.

(ii) Estabilidad. Sea $S \in J(C)$ y $g : D \to C$, entonces existe $R \in K(C)$ tal que $R \subseteq S$. Por axioma (ii'), tomemos $T \in K(D)$ la K-cubierta de D obtenida haciendo producto fibrado para cada $f \in R$ a lo largo de g, es decir, T consta de todos los morfismos $h : D \times_C C' \to$ para $f : C' \to C \in R$. Entonces para cada $f \in R$ tenemos

$$\begin{tikzcd} D \times_C C' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

de este cuadrado conmutativo se sigue que

$$T \subseteq g^*(S) = \{h \mid cod(h) = D \wedge g \circ h \in S\},$$

así que $g^*(S) \in J(D)$.

(iii) Transitividad. Sean $S \in J(C)$ y R criba sobre C tal que para cada $h : D \to C$ en S, $h^*(S) \in J(D)$. Veamos que $R \in J(C)$. Por hipótesis, existe $S_0 \in K(C)$ tal que $S_0 \subseteq S$. Además, para cada $h : D \to C \in S_0$, existe $S_h \in K(D)$ tal que $S_h \subseteq h^*(R)$. Aplicando axioma (iii')

$$R_0 = \{h \circ l : dom(l) \to C \mid l \in S_h \subseteq h^*(R)\}_{h \in S} \in K(C).$$

Notar que $R_0 \subseteq R$ pues si tomamos $h \circ l \in R_0$, entonces $h \in S_0$ y $l \in S_h \subseteq h^*(R)$, luego $l \in h^*(R)$ lo cual implica que $h \circ l \in R$.
Por tanto, $R \in J(C)$.

□

Proposición 3.11. *Si J es una topología dada sobre $\mathcal{C}$, existe una base maximal K que genera J dada por:*

$$R \in K(C) \text{ si y sólo si } (R) \in J(C)$$

donde $(R) = \{f \circ g \mid f \in R \text{ y } cod(g) = dom(f)\}$. A (R) se le llama la criba generada por la familia R.

Demostración. Dada una familia $R = \{f : C_i \to C\}_{i \in I}$, es claro que (R) es criba sobre $cod(f_i) = C$. Veamos que K definida de esta forma es base para la topología de Grothendieck.

(i') Sea $f : C' \to C$ isomorfismo, entonces $(\{f\}) = \{f \circ g \mid dom(f) = cod(g)\} \in J(C)$ ya que $1_C \in (\{f\})$ porque f es retracción, así que existe $g : C \to C'$ tal que $1_C = f \circ g$; esto implica que $(\{f\})$ es la criba maximal sobre C que siempre está en $J(C)$. Por tanto, $\{f\} \in K(C)$.

(ii') Sea $R = \{f_i : C_i \to C\}_{i \in I} \in K(C)$ y $g : D \to C$.

$$\begin{tikzcd} C_i \times_C D \arrow[r, "\pi_{1_i}"] \arrow[d, "\pi_{2_i}"'] & C_i \arrow[d, "f_i"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Veamos que $S = \{\pi_2 : C_i \times_C D \to D\}_{i \in I} \in K(D)$.
Como $R \in K(C)$ si y sólo si $(R) \in J(C)$ y J es topología de Grothendieck, por axioma de estabilidad, $g^*((R)) \in J(D)$.
Afirmamos que $(S) = g^*((R))$.
Tomemos $\pi_{2_i} \circ k \in (S)$, por el diagrama anterior, $g \circ (\pi_{2_i} \circ k) = f_i \circ (\pi_{1_i} \circ k) \in (R)$, luego $\pi_{2_i} \circ k \in g^*((R))$. Ahora sea $h \in g^*((R))$, entonces $cod(h) = D$ y $g \circ h \in (R)$. Esto implica que $g \circ h = f_i \circ l$ para algún $f_i \in R$ y l tal que $cod(l) = dom(f_i)$. Por la propiedad del producto fibrado, existe una única flecha $r : dom(h) = dom(l) \to C_i \times_C D$ tal que $h = \pi_{2_i} \circ r \in (S)$.
De la afirmación se sigue que $(S) \in J(D)$, lo cual equivale a que $S \in K(D)$.

(iii') Sea $S = \{f_i : C_i \to C\}_{i \in I} \in K(C)$ y para cada $i \in I$ tomemos una familia $S_i = \{g_{ij} : D_{ij} \to C_i\}_{j \in I_i} \in K(C_i)$. Veamos que la familia

$$R = \{f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \to C\}_{i \in I, j \in I_i} \in K(C).$$

Tomemos $f_i \in S$ y h tal que $cod(h) = dom(f_i)$, entonces $f_i \circ h : dom(h) \to C \in (S) \in J(C)$.
Como (R) es criba sobre C y $f_i : C_i \to C$, $f_i^*((R)) \in J(C_i)$ por axioma (ii). Como $f_i^*((R))$ es criba sobre C_i y $h : dom(h) \to C_i$, nuevamente aplicando axioma (ii), $h^*(f_i^*((R))) \in J(dom(h))$. Por la observación (3.4), $(f_i \circ h)^*((R)) = h^*(f_i^*((R))) \in J(dom(h))$, por axioma (iii) tenemos que $(R) \in J(C)$.

De $(i'), (ii')$ y (iii') se sigue que K es una base para J.
Tomemos K' otra base que genera a J, es decir, $S \in J(C)$ si y sólo si existe $R \in K'(C)$ tal que $R \subseteq S$. Note que para cada objeto C de $\mathcal{C}$ y $R \in K'(C)$ se cumple que $R \subseteq (R)$ ya que si $f \in R$ entonces $f = f \circ 1_{dom(f)} \in (R)$ y como $(R) \in J(C)$, se sigue que $R \in K(C)$. □

Definición 3.12. Diremos que una familia $\{f_i : C_i \to C\}_{i \in I}$ refina otra familia $\{g_j : D_j \to C\}_{j \in I'}$ si cada f_i se factoriza a través de algún g_j.

Proposición 3.13. (iv') *Dadas dos cubiertas* $R, P \in K(C)$*, existe un refinamiento común en* $K(C)$*.*

Demostración. Sea J una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$ generada por K. Como $R, P \in K(C)$, entonces $(R), (P) \in J(C)$ y por (iv), $(R) \cap (S) \in J(C)$ si y sólo si existe $T \in K(C)$ tal que $T \subseteq (R) \cap (P)$.
Note que $T \subseteq (R)$ significa que T refina R ya que $(R) = \{f \circ g \mid f \in R \wedge dom(f) = cod(g)\}$, entonces al tomar $t \in T$, $t?f \circ g$ con $f \in R$. De la misma forma T refina P y así T es el refinamiento común de R y P. □

Ejemplo 3.14. Sea $\mathcal{C}$ cualquier categoría, la **topología trivial** sobre $\mathcal{C}$ es aquella en la que para cada objeto C en $\mathcal{C}$, la única criba cubriente es la maximal t_C, es decir, $J(C) = \{t_C\}$.

Ejemplo 3.15. Sea T una categoría pequeña de espacios topológicos cerrada bajo límites finitos y bajo subespacios abiertos (por ejemplo, T puede ser la categoría de espacios Hausdorff separables). Se define una base K sobre T como: $\{f_i : Y_i \to X\}_{i \in I} \in K(X)$ si y sólo si para cada $i \in I$, $Y_i \subseteq X$ es subespacio abierto y f_i es el correspondiente encaje con $\bigcup\limits_{i \in I} = X$.
Esta es la **topología de cubiertas abiertas** sobre la categoría T de espacios.

Ejemplo 3.16. Como vimos en la sección 1.3 un álgebra de Heyting (aH) A es una retícula distributiva con una operación "⇒" que cumple para cada $a, b, c \in A$

$$a \leq (b \Rightarrow c) \textit{ si y sólo si } a \wedge b \leq c.$$

Además sabemos que en un aHc A se tiene la identidad (1.3) para $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ y $b \in A$:

$$\bigvee_{i\in I}(b \wedge a_i) = b \wedge \bigvee_{i\in I} a_i$$

Ahora sea A un aHc y considerémosla como categoría. A puede equiparse con una base para una topología de Grothendieck K de la siguiente forma: para cada $c \in A$,

$$\{a_i : i \in I\} \in K(c) \textit{ si y sólo si } \bigvee_{i\in I} a_i = c,$$

es decir,

$$K(c) = \{\{a_i \to c\}_{i\in I} \mid \bigvee_{i\in I} a_i = c\}.$$

Afirmación: K es una base de Grothendieck sobre el álgebra de Heyting A .

(i') Sea $c' \to c$ isomorfismo entonces $\{c' \to c\} \in K(c)$ pues $c' \leq c$ y $c \leq c'$, luego $c = c'$ y así $\vee c' = \vee c = c$.

(ii') Sean $\{a_i \to c\}_{i\in I}$ tal que $\bigvee_{i\in I} a_i = c$ y $b \to c$, entonces por (1.3) tenemos

$$\bigvee_{i\in I}(b \wedge a_i) = b \wedge \bigvee_{i\in I} a_i = b \wedge c = b$$

luego $\{b \wedge a_i \to b\}_{i\in I} \in K(b)$.

(iii') Sean $\{a_i \to c\}_{i\in I}$ tal que $\bigvee_{i\in I} a_i = c$ y para cada $i \in I$, $\{b_{ij} \to a_i\}_{j\in Ii}$ es tal que $\bigvee_{j\in I_i} b_{ij} = a_i$. Entonces $\{b_{ij} \to c\}_{i\in I, j\in Ii}$ cumple que $\bigvee_{i\in I, j\in Ii} b_{ij} = c$ pues

$$\bigvee_{i\in I, j\in Ii} b_{ij} = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in Ii} b_{ij} = \bigvee_{i\in I} a_i = c,$$

por tanto, $\{b_{ij} \to c\}_{i\in I, j\in Ii} \in K(c)$.

Notar que una criba S sobre $c \in A$ es un conjunto

$$S = \{b \mid b \leq c \text{ y } a \leq b \textit{ implica que } a \in S\}.$$

Entonces una criba S sobre c cubre c si y sólo si $c = \bigvee S$, es decir, c es el supremo de los elementos de S. Por lo anterior, esta topología también es llamada la **topología supremo** .

En particular, si en el ejemplo anterior A es el álgebra de los subconjuntos abiertos de un espacio topológico X, ésta es la topología de cubiertas abiertas usual. En este sentido,gavillas sobre un aHc generalizan las gavillas usuales sobre un espacio topológico.

Ejemplo 3.17. Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Para $p \in P$, un subconjunto $D \subseteq \{q \in P \mid q \leq p\}$ es denso por abajo de p, si para cualquier $r \leq p$, existe $q \in D$ con $q \leq r$.
Las cribas densas forman una topología J sobre P de la siguiente manera:

$$J(p) = \{D \mid \forall q \in D : q \leq p \textit{ y D es una criba densa por abajo de } p\}.$$

Las familias cubrientes $D \in J(p)$ constan de flechas $q \to p$ pero las identificamos con elementos $q \in P$ tal que $q \leq p$.
Entonces J es una topología sobre P llamada la **topología densa**.
En efecto, sea $p \in P$.

(i) La criba maximal sobre p es el conjunto $t_p = \{q \in P \mid q \leq p\}$. Tomemos $r \leq p$ entonces $r \in t_p$ y $r \leq r$ porque el orden es reflexivo, así $t_p \in J(p)$.

(ii) Sean $D \in J(p)$ y $r \leq p$. Veamos que $r^*(D)$ es densa por abajo de r. Sea $t \leq r$, como D es denso por abajo de p y $t \leq r \leq p$, existe $q \in D$ con $q \leq t$. Entonces $q \leq r$ y $q \in D$, luego $q \in r^*(D)$ y además $q \leq t$. Por tanto, $r^*(D) = \{s \leq r \mid s \in D\}$ es densa por abajo de r y así $r^*(D) \in J(r)$.

(iii) Tomemos $D \in J(p)$ y E una criba sobre p tal que para todo $q \leq p$, $q^*(E) \in J(q)$. Veamos que $E \in J(p)$. Sea $r \leq p$ entonces $r^*(E) = \{s \leq r \mid s \in E\} \in J(r)$ por hipótesis, como $r^*(E)$ es denso por abajo de r, para $r \leq r$, existe $q \in r^*(E)$ tal que $q \leq r$, es decir, existe $q \in E$ con $q \leq r$ y por tanto, E es denso debajo de p y así $E \in J(p)$.

La topología densa puede definirse para una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ de la siguiente forma. Para una criba S sobre un objeto C de $\mathcal{C}$, sea

$$S \in J(C) \textit{ si y sólo si para todo } f : D \to C, \textit{ existe } g : E \to D \textit{ tal que } f \circ g \in S.$$

Entonces J es topología sobre $\mathcal{C}$. Sea C objeto en $\mathcal{C}$.

(i) Sea $f : D \to C$, como $1_D : D \to D$ y $f \circ 1_D = f \in t_C$, entonces $t_C \in J(C)$.

(ii) Sea $S \in J(C)$ y $h : D \to C$. Sea $g : B \to D$, como $S \in J(C)$, para $h : D \to C$, existe $k : E \to D$ tal que $h \circ k \in S$, luego

$$k \in h^*(S) = \{g \mid cod(g) = D \textit{ y } h \circ g \in S\},$$

así $k \circ 1_E \in h^*(S)$ y por tanto, $h^*(S) \in J(D)$.

(iii) Sea $S \in J(C)$, R criba sobre C tal que para todo $h : dom(h) \to C \in S$, $h^*(S) \in J(dom(h))$. Tomemos $f : dom(f) \to C$, como $S \in J(C)$, existe $k : dom(k) \to dom(f)$ tal que $f \circ k \in S$. Entonces

$$(f \circ k)^*(R) = \{s \mid f \circ k \circ s \in R\} \in J(dom(k)),$$

luego para $1_{dom(k)}$ existe $g : dom(g) \to dom(k)$ tal que $1_{dom(k)} \circ g = g \in (f \circ k)^*(R)$. Luego $(f \circ k) \circ g \in R$, o bien, $f \circ (k \circ g) \in R$ con $k \circ g : dom(k) \to dom(f)$. De esta forma, $R \in JC()$.

A la topología densa también se le llama **topología** $\neg\neg$.

3.2. Gavillas sobre un sitio

Definición 3.18. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, J una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$ y $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ una pregavilla. Si S es una criba cubriente para un objeto C en $\mathcal{C}$, es decir, $S \in J(C)$, una **familia plegable** para S de elementos de P es una función que asigna a cada elemento $f : D \to C$ de S, un elemento $x_f \in PD$ de tal forma que para todo $g : E \to D$ en $\mathcal{C}$

$$Pg(x_f) = x_{fg}.$$

Una **amalgama** de una familia plegable es un elemento $x \in PC$ tal que para todo $f \in S$: $Pf(x) = x_f$.

Definición 3.19. Sea $(\mathcal{C}, J)$ un sitio de Grothendieck, $P \in Ob(Set^{\mathcal{C}^{op}})$ es una **gavilla** si y sólo si para cada C objeto de $\mathcal{C}$, cada familia plegable de cualquier criba cubriente S de C tiene una única amalgama.

Observación 3.20. Se ha visto en capítulos anteriores que una criba S puede verse como un subfuntor del representable $YC = Hom(\_, C)$. Entonces una familia plegable $f \mapsto x_f$ para S puede verse como una transformación natural $S \Rightarrow P$, dada por la asignación

$$S(B) \to PB$$

$$f \mapsto x_f$$

Entonces una pregavilla P es gavilla si y sólo si para cada C objeto de $\mathcal{C}$ y para cada criba cubriente de C, cualquier transformación natural $S \Rightarrow P$ tiene una única extensión a YC como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, tail] & P \\ YC \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

En otras palabras, P es gavilla si y sólo si para toda criba cubriente S sobre C, la inclusión $S \rightarrowtail YC$ induce un isomorfismo

$$Hom(S, P) \cong Hom(YC, P).$$

La expresión con diagramas de la definición es como sigue: para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$ y para cada $S \in J(C)$ el diagrama

$$PC \longrightarrow \prod_{f \in S} P(dom(f)) \underset{a}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f \in S \\ dom(f)=cod(g)}} P(dom(g))$$

es un igualador de conjuntos.

Sea $(\mathcal{C}, J)$ un sitio. Las gavillas sobre $(\mathcal{C}, J)$ forman una categoría, donde los morfismos son morfismos de pregavillas, es decir, transformaciones naturales. La **categoría de gavillas** $Sh(\mathcal{C}, J)$ es una subcategoría plena de la categoría de funtores $Set^{\mathcal{C}^{op}}$.

Definición 3.21. Un **topos de Grothendieck** es una categoría que es equivalente a la categoría $Sh(\mathcal{C}, J)$ para algún sitio $(\mathcal{C}, J)$.

Proposición 3.22. *Sean $(\mathcal{C}, J)$ un sitio y $F : I \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ un funtor, si para cada $i \in I$, $F(i)$ es una gavilla, entonces el límite de F también es una gavilla.*

Demostración. Sea $P = \varprojlim_{i \in I} F(i)$ el límite en la categoría $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, como vimos en capítulos anteriores, esto implica que para cada objeto C de $\mathcal{C}$, $P(C) = \varprojlim_{i \in I} F(i)(C)$ y supongamos que para cada $i \in I$, $F(i)$ es una gavilla. Sean C objeto de $\mathcal{C}$ y $S \in J(C)$, para cada i tenemos el diagrama igualador

$$F(i)(C) \xrightarrow{e_i} \prod_{f \in S} F(i)(dom(f)) \underset{a}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f \in S \\ dom(f)=cod(g)}} F(i)(dom(g))$$

Tomando el límite de todos estos igualadores tenemos de nuevo un igualador de la forma

$$PC \xrightarrow{e} \prod_{f\in S} P(dom(f)) \underset{a}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f\in S \\ dom(f)=cod(g)}} P(dom(g))$$

□

3.3. El funtor gavilla asociada

Dadas $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y J una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$, el propósito de esta sección es construir el adjunto izquierdo al funtor inclusión $Sh(\mathcal{C}, J) \rightarrowtail Set^{\mathcal{C}^{op}}$, dicho adjunto es llamado el funtor gavilla asociada.

Sea $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ una pregavilla. Recordemos que P es separada si una familia plegable tiene a lo más una amalgama. Es decir, P es **separada** si y sólo si para cada objeto C en $\mathcal{C}$, para toda $S \in J(C)$, para todo $f \in S$ y para cualesquiera $x, y \in PC$, si $Pf(x) = Pf(y)$ entonces $x = y$.

Entonces una pregavilla separada satisface la condición de unicidad de la definición de gavilla pero no necesariamente la existencia. En efecto, si P es separada, tomemos una familia plegable $\{x_f \in P(dom(f))\}_{f\in S}$ para alguna cubierta S de elementos de P, ($S \in J(C)$ para algún objeto C de $\mathcal{C}$). Supongamos que existen $x, y \in PC$ amalgamas de la familia, entonces para todo $f \in S$, $Pf(x) = x_f = Pf(y)$. Como P es separada, esto implica que $x = y$, es decir, la amalgama es única cuando existe.

Observación 3.23. Si P es gavilla entonces para cualquier cubierta R de un objeto C, una familia plegable $\{x_f\}_{f\in R}$ de elementos de P deben representar un único elemento de $P(C)$. Más aún, si P es gavilla y $S \in J(C)$ es un refinamiento de R, entonces la subfamilia $\{x_f\}_{f\in S}$ que es una familia plegable para la cubierta S, debe representar al mismo elemento de $P(C)$.
En efecto, como P es gavilla, para la familia plegable $\{x_f\}_{f\in R}$, existe un único $x \in PC$ tal que para todo $f \in R$, $Pf(x) = x_f$ y por otra parte, para la familia plegable $\{x_g\}_{g\in S}$ existe un único $y \in PC$ tal que para todo $g \in S$ se cumple que $Pf(y) = x_g$; en particular, para cada $f \in S \subseteq R$, $Pf(x) = x_f = Pf(y)$, esto implica que $x = y$ pues son únicos con tal propiedad.

Dada una pregavila $P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ vamos a construir una nueva pregavilla P^+. Veremos que la pregavilla P^+ es separada y que P^+ es gavilla si y sólo si P es separada.

Definimos P^+ para cada objeto C como :

$$P^+(C) = \lim_{\overrightarrow{R \in J(C)}} Match(R, P)$$

donde $Match(R, P)$ denota el conjunto de familias plegables para la cubierta R de C y el colímite es tomado sobre todas las cribas cubrientes de C, ordenadas por la inclusión inversa. Es decir, un elemento de $P^+(C)$ es una clase de equivalencia de familias plegables de la forma $\{x_f\}_{f\in R}$ con $x_f \in P(dom(f))$ y para cualquier $k : dom(k) \to dom(f)$, $Pk(x_f) = x_{fk}$, donde dos familias plegables $\{x_f\}_{f\in R}$ y $\{y_g\}_{g\in S}$ son equivalentes cuando existe un refinamiento común $T \subseteq R \cap S$ con $T \in J(C)$ tal que para todo $t \in T$: $x_t = y_t$.

Entonces P^+ tiene estructura de pregavilla , donde la restricción para $h : C' \to C$ en $\mathcal{C}$,

$$P^+(h) : P^+(C) \to P^+(C')$$

está dado por

$$P^+(h)(\{x_f\}_{f\in R}) := \{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)}.$$

Veamos que la restricción está bien definida sobre clases de equivalencia.

Primero note que $\{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)}$ es una familia plegable para $h^*(R)$ criba cubriente de C', ya que si tomamos $f' \in h^*(R)$, entonces $hf' \in R$, luego x_{hf} está en la familia plegable $\{x_f\}_{f\in R}$, entonces $x_{hf'} \in P(dom(f'))$ y además para cualquier $g : dom(g) \to dom(f')$ tenemos que $hf'g \in R$, así que $Pg(x_{hf'}) = x_{hf'g}$.

Ahora tomemos $x = \{x_f\}_{f\in R}$ y $y = \{y_g\}_{g\in S}$ familias plegables equivalentes y veamos que $P^+(x) = P^+(y)$, es decir, queremos ver que existe $T' \in J(C')$ con $T' \subseteq h^*(R) \cap h^*(S)$ tal que para todo $k \in T'$ se cumple que $x_{hk} = y_{hk}$. Como x y y son equivalentes, existe $T \in J(C)$ tal que $T \subseteq R \cap S$ y para cada $t \in T$, $x_t = y_t$. Entonces $h^*(T) \in J(C')$, $h^*(T) \subseteq h^*(R \cap S) = h^*(R) \cap h^*(S)$ y además si tomamos $k \in h^*(T)$, esto implica que $hk \in T$, luego $x_{hk} = y_{hk}$ y así

$$\{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)} \sim \{y_{hg'}\}_{g'\in h^*(S)}.$$

Por otra parte note que la asignación $P \mapsto P^+$ define un endofuntor en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, pues si tomamos P, Q pregavillas y $\phi : P \Rightarrow Q$ entonces se induce una transformación natural $\phi^+ : P^+ \Rightarrow Q^+$ de la siguiente forma: para cada objeto C de $\mathcal{C}$, $\phi^+_C : P^+C \to Q^+C$

$$\phi^+_C(\{x_f \in P(dom(f))\}_{f\in R}) = \{\phi_{dom(f)}(x_f) \in Q(dom(f))\}_{f\in R} \in Q^+C.$$

Es claro que la familia asignada es una familia plegable sobre R de elementos de Q ya que para $f : dom(f) \to C \in R$, si $g : dom(g) \to dom(f)$ entonces $fg \in R$ y $Pg(x_f) = x_{fg}$ y como ϕ es natural se cumple que $\phi_{dom(g)}(x_{fg}) = \phi_{dom(g)}(Pg(x_f)) = Qg(\phi_{dom(f)}(x_f)$.

Además la asignación no depende del representante. En efecto, tomemos $\{x_f\}_{f\in R}$ y $\{y_g\}_{g\in S}$ familias plegables equivalentes en P^+C, entonces existe $T \subseteq R \cap S$ con $T \in J(C)$ tal que para todo $t \in T$ se cumple que $x_t = y_t$. Como ϕ es transformación natural, cada $\phi_{dom(t)}$ es una función de $P(dom(t))$ en $Q(dom(t))$, luego $\phi_{dom(t)}(x_t) = \phi_{dom(t)}(y_t)$, para cada $t \in T$. Así

$$\{\phi_{dom(f)}(x_f)\}_{f\in R} \sim \{\phi_{dom(g)}(y_g)\}_{g\in S}.$$

Por último veamos que ϕ^+ es natural. Tomemos $h : C' \to C$ y $X = \{x_f\}_{f\in R}$ un representante en P^+C. Entonces

$$Q^+h \circ \phi^+_C(X) = Q^+h(\{\phi_{dom(f)}(x_f)\}_{f\in R}) = \{\phi_{dom(f)}(x_{hf'})\}_{f'\in h^*R} = \phi^+_{C'} \circ P^+h(X).$$

También existe una asignación canónica de pregavillas $\eta : P \to P^+$ definida para cada $x \in P(C)$ como la clase de equivalencia de la familia plegable $\eta_C(x) = \{Pf(x)\}_{f\in t_C}$.

Observe que η es natural:

$$\begin{aligned} P^+h(\eta_{C'}(x)) &= P^+h(\{Pf(x)\}_{f\in t_{C'}}) = \{P(hf')(x)\}_{f'\in h^*(t_{C'})} \\ &= \{Pf' \circ Ph(x)\}_{f'\in t_C} = \{Pf(Ph(x))\}_{f\in t_C} \\ &= \eta_C \circ Ph(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lema 3.24. *1. P es pregavilla separada si y sólo si $\eta : P \to P^+$ es un monomorfismo.*

2. Una pregavilla P es gavilla si y sólo si $\eta : P \to P^+$ es un isomorfismo.

Demostración.

1. Sean C un objeto de $\mathcal{C}$ y $x, y \in PC$ tales que $\eta_C(x) = \eta_C(y)$, es decir, para todo $f \in t_C$, $Pf(x) = Pf(y)$. Como P es separada, lo anterior implica que $x = y$

y así η_C es monomorfismo. Por otra parte, supongamos que η es monomorfismo, entonces para cada C objeto de $\mathcal{C}$, si $S \in J(C)$, $f \in S \subseteq t_C$ y $x, y \in PC$ son tales que $Pf(x) = Pf(y)$, es decir, $\eta_C(x) = \eta_C(y)$ entonces $x = y$ por ser η_C monomorfismo y así P es separada.

2. Supongamos que P es gavilla. Como P es pregavilla, por (1) sabemos que η es monomorfismo. Veamos que η es epimorfismo. Sea C objeto de $\mathcal{C}$ y tomemos $\{x_f\}_{f\in R}$ familia plegable en P^+C. Como P es gavilla, existe un único $x \in PC$ tal que para todo $f \in R$, $Pf(x) = x_f$, entonces

$$\eta_C(x) = \{Pf(x)\}_{f\in t_C} = \{x_f\}_{f\in R},$$

la última igualdad es de clases de equivalencia.
Ahora supongamos que η es isomorfismo y tomemos C objeto de $\mathcal{C}$, $S \in J(C)$ y $\{x_f\}_{f\in S}$ familia plegable para S de elementos de P, como η_C es epimorfismo existe $x \in P(C)$ tal que $\eta_C(x) = \{x_f\}_{f\in S}$, es decir, $\{Pf(x)\}_{f\in t_C} = \{x_f\}_{f\in S}$, por tanto la amalgama existe. Por ser η monomorfismo, P es pregavilla separada y por lo tanto la amalgama es única.

$\square$

Lema 3.25. *Si F es gavilla y P es pregavilla, entonces cualquier morfismo de pregavillas $\phi : P \Rightarrow F$ se factoriza de manera única a través de η como en el diagrama.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\phi"'] & P^+ \arrow[d, Rightarrow, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea C un objeto de $\mathcal{C}$ y tomemos un elemento de P^+C representado por una familia plegable $\{x_f\}_{f\in R}$ de elementos de P para alguna criba cubriente R de C. Entonces, para cada $h : dom(h) \to C \in R$l la definición de η nos dice que

$$\eta_{dom(h)}(x_h) = \{Pk(x_h)\}_{k\in t_{dom(h)}}.$$

Por otra parte, $P^+h(\{x_f\}_{f\in R} = \{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)}$. Como $h \in R$ entonces $h^*(R) = t_{dom(h)}$, como $\{x_f\}_{f\in R}$ es plegable tenemos:

$$\eta_{dom(h)}(x_h) = \{Pk(x_h)\}_{k\in t_{dom(h)}} = \{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)} = P^+h(\{x_f\}_{f\in R}). \qquad (\star)$$

De existir $\tilde{\phi}$ como en el diagrama, debe ser tal que $\tilde{\phi}_C(\{x_f\}_{f\in R}) = y \in FC$ de tal forma que

$$\begin{aligned} Fh(y) = Fh(\tilde{\phi}_C(\{x_f\}_{f\in R})) &\overset{*}{=} \tilde{\phi}_{dom(h)}(P^+h(\{x_f\}_{f\in R})) \overset{(\star)}{=} \tilde{\phi}_{dom(h)}(\eta_{dom(h)}(x_h)) \\ &\overset{**}{=} \phi_{dom(h)}(x_h). \end{aligned}$$

Debe cumplirse $(*)$ porque $\tilde{\phi}$ debe ser transformación natural y $(**)$ es el triángulo conmutativo del lema.

Note que $\{\phi_{dom(h)}(x_h)\}_{h\in R}$ es familia plegable de F pues si $g : dom(g) \to dom(h)$ entonces

$$Fg(\phi_{dom(h)}(x_h)) = \phi_{dom(g)} \circ Pg(x_h) \overset{(\star\star)}{=} \phi_{dom(g)}(x_{hg})$$

donde $(\star\star)$ se cumple porque $\{x_f\}_{f\in R}$ es familia plegable de elementos de P. Entonces, como F es gavilla, existe un único $y \in FC$ tal que $Fh(y) = \phi_{dom(h)}(x_h)$, obteniendo así la transformación natural deseada. □

Lema 3.26. *Para cualquier pregavilla P, P^+ es una pregavilla separada.*

Demostración. Sean C objeto de $\mathcal{C}$, $X = \{x_f\}_{f\in R}, Y = \{y_g\}_{g\in S} \in P^+C$ tales que $P^+h(X) = P^+h(Y)$ para toda $h \in Q$ con Q criba cubriente de C. Entonces para toda $h \in Q$ tenemos que $\{x_{hf'}\}_{f'\in h^*(R)} = \{y_{hg'}\}_{g'\in h^*(S)}$, lo cual significa que existe $T_h \in J(dom(h))$ tal que $T_h \subseteq h^*(R) \cap h^*(S)$ y para todo $t \in T_h$: $x_{ht} = y_{ht}$.

Aplicando el axioma de transitividad (iii'), $T = \{ht \mid h \in Q \text{ y } t \in T_h\} \subseteq R\cap S$ es una criba cubriente de C. Además para cada $ht \in T$ se cumple que $t \in T_h$, luego $x_{ht} = y_{ht}$. Por tanto, hemos visto que $X \sim Y$. □

Lema 3.27. *Si P es pregavilla separada entonces P^+ es gavilla.*

Demostración. Tomemos una familia plegable de elementos de P^+ dada por una cubierta $R \in J(C)$ y elementos $\{\bar{x}_f\}_{f\in R}$ con $\bar{x}_f \in P^+(dom(f))$, entonces para cada $f \in R$, $\bar{x}_f$ es una clase de equivalencia de familias plegables de elementos de P, es decir, un representante de $\bar{x}_f$ es de la forma $\{x_{f,g}\}_{g\in S_f}$ con $x_{f,g} \in P(dom(g))$ para alguna cubierta $S_f \in J(dom(f))$.

Que $\{\bar{x}_f\}_{f\in R}$ sea plegable significa que para cada $h : dom(h) \to dom(f)$ tenemos que $P^+h(\bar{x}_f) = \bar{x}_{fh}$ como elementos de $P^+(dom(h))$, es decir,

$$\{x_{f,hg'}\}_{g'\in h^*(S_f)} \sim \{x_{fh,g}\}_{g\in S_{fh}},$$

entonces existe una criba cubriente de $dom(h)$, $T_{f,h} \subseteq h^*(S_f) \cap S_{fh}$ tal que para todo

$$k \in T_{f,h} : x_{f,hk} = x_{fh,k}. \qquad (\star)$$

Sea Q la criba $\{fg \mid f \in R \wedge g \in S_f\}$. Como $R \in J(C)$ y $S_f \in J(dom(f))$, por axioma de transitividad (iii'), $Q \in J(C)$.

Definimos una familia $\bar{y} \in P^+C$ para la criba Q como:

$$\bar{y} = \{y_{fg}\}_{fg \in Q} \quad \text{donde} \quad y_{fg} = x_{f,g}.$$

Note que el hecho de que $\{x_{f,g}\}_{g \in S_f}$ sea familia plegable de elementos de P para la criba S_f significa que $x_{f,g} \in P(dom(g))$ y para todo $h : dom(h) \to dom(g)$: $Ph(x_{f,g}) = x_{f,gh}$.

Veamos que la definición es independiente de la elección de la factorización $f \circ g$. Supongamos que para $f, f' \in R$ y $g \in S_f$, $g' \in S'_f$, $fg = f'g'$. Aplicando $(\star)$ a los morfismos g y g' respectivamente, obtenemos $T_{f,g}$ y $T_{f',g'}$ cribas cubrientes de $dom(g) = dom(g')$, luego $T_{f,g} \cap T_{f',g'}$ también está en $J(dom(g))$. Sea $k \in T_{f,g} \cap T_{f',g'}$ entonces

$$Pk(x_{f,g}) \overset{*}{=} x_{f,gk} \overset{\star}{=} x_{fg,k} = x_{f'g',k} \overset{\star}{=} x_{f',g'k} \overset{**}{=} Pk(x_{f',g'}).$$

Las igualdades $(*)$ y $(**)$ se dan porque $\{x_{f,g}\}$ y $\{x_{f',g'}\}$ son familias plegables.

Como P es separada por hipótesis, lo anterior implica que $x_{f,g} = x_{f',g'}$, entonces $y_{fg} = y_{f'g'}$ y así $\bar{y}$ está bien definida.

Además $\bar{y}$ es una familia plegable de elementos de P para la criba Q ya que cada $\bar{x}_f = \{x_{f,g}\}_{g \in S_f}$ es familia plegable y para cualquier $k : dom(k) \to dom(h)$ se cumple que

$$Pk(y_h) = Pk(x_{f,g}) = x_{f,gk} = y_{hk},$$

por tanto $\bar{y} \in P^+C$.

Afirmación: $\bar{y}$ es una amalgama de la familia plegable dada $\{\bar{x}_f\}_{f \in R}$.
Debemos ver que para cada $f : dom(f) \to C \in R$, $P^+f(\bar{y}) = \{y_{fh}\}_{h \in f^*Q}$ y $\bar{x}_f = \{x_{f,g}\}_{g \in S_f}$ representan al mismo elemento de $P^+(dom(f))$. Note que $S_f \subseteq f^*(Q)$ ya que $Q = \{fg \mid f \in R \wedge g \in S_f\}$, entonces para $g \in S_f$, $y_{fg} = x_{f,g}$ por definición de $\bar{y}$ y por tanto, $P^+f(\bar{y}) \sim \bar{x}_f$. De esta forma, $\bar{y}$ es una amalgama de $\{\bar{x}_f\}_{f \in R}$.

Como P^+ es separada por el lema (3.26) la amalgama es única y así P^+ es una gavilla.
$\square$

Ahora es fácil deducir el siguiente teorema.

Teorema 3.28. *El funtor inclusión* $i : Sh(\mathcal{C}, J) \rightarrowtail Set^{\mathcal{C}^{op}}$ *tiene adjunto izquierdo* $a : Set^{\mathcal{C}^{op}} \to Sh(\mathcal{C}, J)$ *llamado el* ***funtor gavilla asociada****.*
Más aún, el funtor conmuta con límites finitos.

Demostración. Basta con definir para cada pregavilla P,

$$a(P) = (P^+)^+.$$

Como vimos al inicio de la sección , esta asignación define un funtor y por los lemas (3.26) y (3.27), $(P^+)^+$ es una gavilla.

Por otra parte, el morfismo $\eta : P \to P^+$ definido anteriormente para C objeto de $\mathcal{C}$ y $x \in PC$ como $\eta_C(x) = \{Pf(x)\}_{f \in t_C}$, nos da un morfismo compuesto de P a la gavilla $a(P)$

$$P \xrightarrow{\eta_P} P^+ \xrightarrow{\eta_{P^+}} (P^+)^+$$

Aplicando dos veces el lema 3.25, esta composición es universal entre las flechas de la pregavilla P a una gavilla F.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[dr, "\phi"'] & P^+ \arrow[r, "\eta_{P^+}"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\phi}_{P^+}"] & (P^+)^+ = i \circ a(P) \arrow[dl, dashed, "\phi_{P^{++}}"] \\
 & F = i(F) &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, a es el adjunto izquierdo a la inclusión de gavillas en pregavillas donde la composición $\eta_{P^+} \circ \eta_P$ es la unidad de la adjunción.

Resta ver que el funtor gavilla asociada preserva límites finitos. Para ello, veamos que la construcción $P \mapsto P^+$ los preserva. Observe que para un objeto fijo C de $\mathcal{C}$, una criba cubriente fija $R \in J(C)$ y para cualquier funtor $P : I \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ de una categoría indexada I a pregavillas se tiene que

$$Match_C(R, \lim_{\leftarrow} P_i) \cong \lim_{\leftarrow} Match_C(R, P_i)$$

Ya que para cada pregavilla por la observación (3.20), se tiene un isomorfismo natural $Match_C(R, P) \cong Set^{\mathcal{C}^{op}}(R, P)$ y el funtor representable $Hom(R, \_)$ preserva límites. Como P^+C es definido como el colímite de Match sobre todas las cubiertas de C ordenadas por la inclusión inversa y este orden parcial es filtrado, por un resultado general sabemos que colímites filtrados conmutan con límites finitos y por tanto $P \mapsto P^+$ preserva límites finitos.

$\square$

Observación 3.29. Notar que si partimos de P una pregavilla separada, entonces sólo es necesaria una aplicación de la construcción $^+$.

Por otra parte, si P es gavilla, la unidad de la adjunción anterior es un isomorfismo por el lema 3.24. Es decir, la composición $a \circ i : Sh(\mathcal{C}, J) \to Sh(\mathcal{C}, J)$ es naturalmente isomorfo al funtor identidad.

3.4. Algunas propiedades de la categoría de gavillas

En esta sección realizaremos las construcciones básicas que hacen de la categoría de gavillas sobre un sitio de Grothendieck un topos elemental.

En lo sucesivo, $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña fija equipada con una topología de Grothendieck.

De la sección anterior sabemos que $Sh(\mathcal{C}, J)$ tiene límites pequeños y además son preservados por el funtor inclusión i que tiene por adjunto izquierdo al funtor gavilla asociada.

El objeto terminal **1** en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ definido para cada objeto C de $\mathcal{C}$ como $\mathbf{1}(C) = \{0\}$ es una gavilla. En efecto, sea C un objeto de $\mathcal{C}$, $S \in J(C)$ y $\{x_f\}_{f \in S}$ una familia plegable para S de elementos de **1**, entonces para cada $f \in S$, $x_f \in \mathbf{1}(dom(f)) = \{0\}$. Es claro que existe un único $x \in \mathbf{1}(C) = \{0\}$ tal que $\mathbf{1}f(x) = x_f$.

Como un morfismo de gavillas $\phi : F \Rightarrow G$ no es más que un morfismo de pregavillas, por la adjunción $i \vdash a$, ϕ es monomorfismo de gavillas si y sólo si ϕ es monomorfismo de pregavillas, es decir, que i preserva y refleja monomorfismos. En el caso de epimorfismos se sigue cumpliendo que $\phi : P \Rightarrow Q$ es epimorfismo en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ si y sólo si para cada objeto C en $\mathcal{C}$, $\phi_C : PC \to QC$ es epimorfismo. Sin embargo, no se cumple la propiedad análoga para gavillas como veremos más adelante.

Otra consecuencia de la adjunción es que todos los colímites pequeños existen en $Sh(\mathcal{C}, J)$. Si para cada $j \in I$ con I un conjunto, F_j es gavilla, primero calculamos el colímite $\varinjlim i(F_j)$ en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, después hacemos el proceso de gavillificación y obtenemos la gavilla asociada a este colímite $a(\varinjlim i(F_j))$. Finalmente usando el hecho de que adjuntos izquierdos preservan colímites obtenemos

$$a(\varinjlim i(F_j)) \cong \varinjlim a \circ i(F_j) \cong \varinjlim F_j.$$

Ahora veremos que $Sh(\mathcal{C}, J)$ tiene exponenciales. Note que de existir dichos exponenciales, deben construirse de la misma forma que los exponenciales de pregavillas, es decir, si F y G son gavillas y G^F existe en $Sh(\mathcal{C}, J)$ entonces debe cumplirse que $i(G^F) \cong i(G)^{i(F)}$.

Entonces, si suponemos que G^F es gavilla, como $a \dashv i$ y a preserva límites finitos, dada una pregavilla P tenemos:

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow i(G^F) \\ \hline a(P) \Rightarrow G^F \\ \hline F \times a(P) \Rightarrow G \\ \hline a \circ i(F) \times a(P) \Rightarrow G \\ \hline a(i(F) \times P) \Rightarrow G \\ \hline i(F) \times P \Rightarrow i(G) \\ \hline P \Rightarrow i(G)^{i(F)} \end{array}$$

Haciendo una aplicación del lema de Yoneda (ver observación 1.16) obtenemos $i(G^F) \cong i(G)^{i(F)}$.

Proposición 3.30. *Sean P, F objetos en $Set^{\mathcal{C}^{op}}$. Si F es gavilla entonces la pregavilla exponencial F^P también es gavilla.*

Demostración. En el capítulo 1 habíamos definido la pregavilla exponencial $F^P : \mathcal{C}^{op} \to Set$ para cada objeto C de $\mathcal{C}$ como

$$F^P(C) = NAT(YC \times P, F).$$

Si $\tau \in NAT(YC \times P, F)$ entonces para cada objeto D en $\mathcal{C}$ tenemos un morfismo

$$\tau_D : \mathcal{C}(D, C) \times PD \to FD$$

y que τ sea natural significa que para cualquier $h : E \to D$ y para todo $g \in \mathcal{C}(D, C)$ y para todo $x \in PD$

$$(Fh \circ \tau_D)(g, x) = \tau_E \circ (\mathcal{C}(\_, C) \times P)(h)(g, x) = \tau_E(gh, Ph(x)). \tag{3.2}$$

Como F^P es funtor entonces para $f : C' \to C$ tenemos

$$F^P(f) : NAT(YC \times P, F) \to NAT(YC' \times P, F)$$

entonces para $\tau : YC \times P \Rightarrow F$ y para cada D objeto de $\mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}(D, C')$ y $x \in PD$

$$(F^P(f)(\tau))_D(g, x) = \tau_D(fg, x). \tag{3.3}$$

(i) Veamos que la pregavilla F^P es separada si F es separada. Sean C objeto de $\mathcal{C}$, $S \in J(C)$ y $\tau, \sigma \in NAT(YC \times P, F)$ tales que para toda $f : C' \to C \in S$ se cumple que $F^P(f)(\tau) = F^P(f)(\sigma)$. Es decir, para cada D objeto de $\mathcal{C}$ y para todo $g' \in \mathcal{C}(D, C')$ y $x \in PD$ tenemos que

$$(F^P(f)(\tau))_D(g', x) = (F^P(f)(\sigma))_D(g', x)$$

o bien por (3.3),

$$\tau_D(f \circ g', x) = \sigma_D(f \circ g', x).$$

Si en particular tomamos $g' = 1_C$ entonces

$$\tau_{C'}(f, x) = \sigma_{C'}(f, x) \tag{3.4}$$

para cada $f : C' \to C \in S$ y para cada $x \in PC'$.
Queremos ver que $\tau = \sigma$. Para ello tomemos D cualquier objeto en $\mathcal{C}$, un morfismo $k : D \to C$ y $x \in PD$ y veamos que $\tau_D(k, x) = \sigma_D(k, x)$. Observe que para todo $g' \in k^*(S)$, $kg' \in S$ entonces

$$\begin{aligned} F(g')(\tau_D)(k, x) &\overset{(3.2)}{=} \tau_{dom(g')}(kg', Pg'(x)) \overset{(3.4)}{=} \sigma_{dom(g')}(kg', Pg'(x)) \\ &\overset{(3.2)}{=} Fg'(\sigma_D)(k, x). \end{aligned}$$

Como $k^*(S) \in J(D)$, $g' \in k^*(S)$ y F es separada se sigue que

$$\tau_D(k, x) = \sigma_D(k, x)$$

y como k y x son arbitrarios podemos conlcuir que $\tau = \sigma$.

(ii) Ahora probemos que el exponencial F^P es gavilla si F lo es. Note que solo necesitamos ver que existen las amalgamas de familias plegables pues por la parte (i) tenemos la unicidad.
Tomemos $S \in J(C)$ y supongamos que para cada $f : D \to C \in S$ tenemos una transformación natural $\tau_f : YD \times P \Rightarrow F$ de tal manera que $\{\tau_f\}_{f \in S}$ es una familia plegable de elementos de F^P, esto significa que para cada $g : E \to D$,

$$F^P(g)(\tau_f) = \tau_{fg},$$

por tanto por (3.3) para cada $h : E' \to E$ y $x \in PE'$

$$\tau_{fg}(h, x) = F^P(g)(\tau_f)(h, x) = \tau_f(gh, x). \tag{3.5}$$

Para encontrar una amalgama de $\{\tau_f\}_{f\in S}$ construiremos a partir de la cubierta S una transformación natural $\tau' : YC \times P \Rightarrow F^+$ tal que para todo $f : D \to C \in S$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} YD \times P \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d, "Yf\times 1"'] & F \arrow[d, "\eta"] \\ YC \times P \arrow[r, "\tau'"'] & F^+ \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Tomemos B un objeto de $\mathcal{C}$, $k : B \to C$ y $x \in PB$ y definimos

$$\tau'_B(k,x) = \{\tau_{kh}(1, Ph(x))\}_{h\in k^*(S)}.$$

Afirmación: $\tau'_B(k,x)$ es una familia plegable de elementos de F para la cubierta $k^*(S)$ de B.
En efecto, tomemos $h \in k^*(S)$ y consideremos cualquier morfismo m tal que hm esté definido, entonces

$$\begin{aligned} Fm(\tau_{kh}(1, Ph(x))) &\overset{(3.2)}{=} \tau_{kh}(1\circ m, Pm(Ph(x))) = \tau_{kh}(m, P(hm)(x)) \\ &\overset{(3.5)}{=} \tau_{khm}(1, P(hm)(x)). \end{aligned}$$

De esta forma τ' está bien definida. Por otra parte, es claro que τ' es una transformación natural. Tomemos $m : D \to D'$, $g : D' \to C$ y $x \in PD'$ entonces:

$$\begin{aligned} F^+m \circ \tau'_{D'}(g,x) &= F^+m(\{\tau_{gh}(1, Ph(x))\}_{h\in g^*S}) \\ &= \{\tau_{gmh'}(1, P(mh'(x)))\}_{h'\in m^*(g^*S)} \\ &= \tau'_D(gm, Pm(x)) \\ &= \tau'_D \circ (Ym \times Pm)(g,x) \end{aligned}$$

y por tanto τ' es natural.
Como F es gavilla, η es isomorfismo, entonces $\eta^{-1}\circ\tau' \in NAT(YC\times P, F)$.
Más aún, el diagrama (3.6) conmuta. Sea $f : D \to C \in S$ entonces $f^*S = t_D$. Entonces para cualquier objeto B en $\mathcal{C}$ y cualquier elemento $k \in Hom(B,D)$ y

$x \in PB$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tau' \circ (Yf \times 1)(k, x) &= \tau'(fk, x) \\
&= \{\tau_{fkh}(1, Ph(x))\}_{h \in (fk)^* S} \\
&\stackrel{(*)}{=} \{\tau_{fkh}(1, Ph(x))\}_{h \in t_B} \\
&\stackrel{(3.5)}{=} \{\tau_{fk}(h, Ph(x))\}_{h \in t_B} \\
&\stackrel{(3.2)}{=} \{Fh(\tau_{fk}(1, x))\}_{h \in t_B} \\
&= \eta(\tau_{fk}(1, x)) \\
&= \eta \circ \tau_F(k, x),
\end{aligned}$$

se cumple $(*)$ porque $(fk)^*(S) = k^*(f^*S) = k^*(t_D) = t_B$ pues $k \in t_D$.
Así se tiene que (3.6) conmuta y con esto hemos probado que $\eta^{-1} \circ \tau'$ es una amalgama para la familia plegable dada.

$\square$

Ejemplo 3.31. Sea A un álgebra de Heyting completa y F, G gavillas sobre A. Si $a \in A$ entonces el ideal generado por a

$$\downarrow (a) = \{b \in A \mid b \leq a\}$$

considerado como una categoría tiene una topología de Grothendieck heredada de A, en la cual cubiertas son supremos. Más aún, F y G se restringen a gavillas $F \restriction_a$ y $G \restriction_a$ sobre $\downarrow (a)$.
El exponencial G^F es la gavilla sobre A con elementos las transformaciones naturales $\tau : Hom(\_, a) \times F \Rightarrow G$. Como $Hom(b, a) = \emptyset$ a menos que $b \leq a$ en cuyo caso es un conjunto de un elemento, τ es una familia de funciones $\tau_b : F_b \to G_b$, una por cada $b \leq a$ y es natural en b.
En otras palabras, G^F es la gavilla tal que $G^F(a) = Hom(F \restriction_a, G \restriction)$ donde Hom es el conjunto de transformaciones naturales en $Sh(\downarrow (a), J)$. Notar además que $\downarrow (a)$ es un aHc.

3.5. Clasificador de subobjetos para sitios

Considere un sitio arbitrario $(\mathcal{C}, J)$. Recordemos que para una criba M sobre un objeto C y una flecha $f : D \to C$,

$$f \in M \text{ si y sólo si } f^*M \text{ es la criba maximal sobre } D.$$

Definición 3.32. Una criba M es **cerrada** para J si y sólo si para cada $f : D \to C$ en $\mathcal{C}$,

$$M \text{ cubre } f \text{ implica que } f \in M;$$

o equivalentemente, para cada $f : D \to C$,

$$f^*M = \{h : E \to D \mid fh \in M\} \text{ cubre } D \text{ implica que } f \in M.$$

Observación 3.33. La noción "ser criba cerrada" es estable bajo productos fibrados en el sentido de que para cualquier criba M sobre C y cualquier morfismo $h : B \to C$,

$$M \text{ es cerrada implica que } h^*M \text{ es cerrada.}$$

En efecto, supongamos que h^*M cubre un morfismo $f : D \to C$ en $\mathcal{C}$, es decir, $f^*(h^*M)) \in J(D)$, o bien $(h \circ f)^*(M) \in J(D)$, esto significa que M cubre $h \circ f$ y como M es cerrada se sigue que $hf \in M$, o equivalentemente, $f \in h^*M$ y por tanto h^*M es cerrada.

Con lo anterior, podemos definir un funtor $\Omega : \mathcal{C}^{op} \to Set$ tal que para cada objeto C,

$$\Omega(C) := \text{El conjunto de todas las cribas cerradas sobre } C$$

y cuya restricción para cualquier morfismo $h : B \to C$ está dada por

$$\Omega h : \Omega C \to \Omega B$$

$$M \mapsto h^*M$$

Observación 3.34. Para una criba dada S sobre un objeto C construimos una criba $\bar{S}$ sobre C como sigue:

$$\bar{S} = \{h \mid cod(h) = C \text{ y } S \textit{ cubre } h\}$$

Notar que $\bar{S}$ es una criba. Tomemos $h \in \bar{S}$ y $g : dom(g) \to dom(h)$. Por axioma de estabilidad (iia), como S cubre h, S cubre la composición hg, por tanto $hg \in \bar{S}$ y así $\bar{S}$ es criba.

Además, $\bar{S}$ es cerrada. Supongamos que $\bar{S}$ cubre un morfismo g, de la definición de $\bar{S}$ se sigue que S cubre toda flecha de $\bar{S}$, aplicando el axioma de transitividad (iiia) para flechas se sigue que S cubre g, por tanto, $g \in \bar{S}$.

Por último, $\bar{S}$ es la criba cerrada más pequeña sobre C que contiene a S. Es claro que $S \subseteq \bar{S}$ ya que si tomamos $f \in S$ entonces f^*S es la criba maximal sobre $dom(f)$, por tanto, S cubre f y de esta forma $f \in \bar{S}$. Ahora tomemos T otra criba cerrada sobre C tal que $S \subseteq T$ y $f \in \bar{S}$, entonces S cubre f, es decir, $f^*S \in J(dom(f))$. Como $f^*S \subseteq f^*T$ entonces $f^*T \in J(dom(f))$, es decir, T cubre f y como T es cerrada, esto implica que $f \in T$. Así, $\bar{S} \subseteq T$.

Por lo anterior, $\bar{S}$ es llamada la **cerradura** de S.

Observación 3.35. La operación cerradura es natural en el sentido de que para todo $g : D \to C$,

$$\overline{g^*S} = g^*(\bar{S})$$

En efecto, como $S \subseteq \bar{S}$, $g^*S \subseteq g^*\bar{S}$ y como$\bar{S}$ es cerrada entonces $g^*\bar{S}$ es cerrada, luego $\bar{g^*S} \subseteq g^*\bar{S}$. Por otra parte, si $f \in g^*\bar{S}$ entonces $gf \in \bar{S}$, luego S cubre gf, o bien, g^*S cubre f y así, $f \in \overline{g^*S}$.

Lema 3.36. *La pregavilla Ω es una gavilla.*

Demostración.

- Ω es separada. Sean C un objeto de $\mathcal{C}$, $S \in J(C)$ y $M, N \in \Omega C$ tales que para toda $g \in S$, $\Omega g(M) = \Omega g(N)$, es decir, $g^*M = g^*N$. Entonces $M \cap S = N \cap S$, ya que si $h \in M \cap S$, entonces $h^*M = h^*N$ es la criba maximal sobre $dom(h)$, lo cual implica que $h \in N \cap S$. Se verifica de manera análoga que $N \cap S \subseteq M \cap S$.
  Veamos que $M \subseteq N$. Sea $f \in M$, entonces M cubre f pues $f^*M = t_{dom(f)} \in J(dom(f))$ y S cubre f por el axioma (ii) de estabilidad, entonces $M \cap S$ cubre f. Pero $M \cap S = N \cap S \subseteq N$, luego N cubre f y por tanto $f \in N$ pues N es cerrada. Siguiendo un argumento similar se muestra que $N \subseteq M$ y así $M = N$. Por tanto, Ω es separada.

- Veamos que familias plegables de Ω tienen amalgamas. Sean $S \in J(C)$ y $\{M_f \in \Omega D\}_{f \in S}$ familia plegable de cribas cerradas, es decir, $g^*(M_f) = \Omega g(M_f) = M_{fg}$ para cada $f \in S$ y para cada g que pueda componerse con f. Consideremos la criba

  $$M = \{f \circ g \mid g \in M_f \text{ y } f \in S\},$$

  entonces M no necesariamente es cerrada pero afirmamos que $\overline{M}$ es la amalgama requerida para $\{M_f\}_{f \in S}$.

  - Para cada $f \in S$, $f^*M = \Omega f(M) = M_f$. En efecto, note que si $g \in M_f$ entonces $fg \in M$ y por tanto, $g \in f^*M$. Por otra parte, si tomamos $g \in f^*M$ tenemos que $fg \in M$, luego, existen $f' \in S$ y $g' \in M_{f'}$ tales que $fg = f'g'$. Esto implica que $M_{fg} = M_{f'g'}$, si y sólo si, $g^*(M_f) = g'^*(M_{f'})$. Pero $g' \in M_{f'}$ entonces $g'^*(M_{f'})$ es la criba maximal, por tanto, $g^*(M_f)$ es la criba maximal y así, $g \in M_f$.
  - $\Omega f(\overline{M}) = f^*(\overline{M}) = \overline{f^*M} = \overline{M_f} = M_f$ porque M_f es cerrada.

Así, $\bar{M}$ es una amalgama de $\{M_f\}_{f\in S}$.

□

Lema 3.37. *Sean F una gavilla sobre $\mathcal{C}$ y $G \subseteq F$ un subfuntor de F. Entonces G es gavilla si y sólo si para cada objeto C de $\mathcal{C}$, para cada $x \in FC$ y para toda cubierta S de C se cumple que:*

$$\textit{si para toda } f : D \to C \in S,\ Ff(x) \in GD \textit{ entonces } x \in GC.$$

Demostración. Si suponemos que G es gavilla y tomamos C objeto de $\mathcal{C}$, $x \in FC$, $S \in J(C)$ tales que para toda $f : D \to C \in S$, $Ff(x) \in GD$, entonces $\{Ff(x)\}_{f\in S}$ es una familia plegable de elementos de G para la cubierta S, ya que si tomamos $g : E \to D$, como $Ff(x) \in GD$ se cumple que

$$Gg(Ff(x)) = Fg(Ff(x)) = F(fg)(x).$$

Entonces existe un único $y \in GC \subseteq FC$ tal que para cada $f \in S$, $Gf(y) = Ff(x) \in GD$. Pero $Gf(y) = Ff(y)$ para cada $f \in S$, luego $Ff(x) = Ff(y)$ para cada $f \in S$, lo cual implica que $x = y$ porque F es separada y por tanto $x \in GC$.
Recíprocamente, si ahora tomamos una familia plegable de elementos de G, $\{x_f \in GD \mid f : D \to C \in S\}$, entonces también es una familia plegable de elementos de F pues $G \subseteq F$ y como F es gavilla, existe un único $x \in FC$ tal que para cada $f \in S$, $Ff(x) = x_f \in GD$, entonces por hipótesis, $x \in GC$ y por tanto, G es gavilla. □

Observación 3.38. Para cada objeto C, la criba maximal t_C es cerrada, ya que si t_C cubre f entonces $f^*(t_C) \in J(dom(f))$ pero $f^*(t_C)$ es la criba maximal de $dom(f)$, si y sólo si, $f \in t_C$.
Entonces, para todo $g : D \to C$, $g^*(t_C) = t_D$.

Con lo anterior podemos definir una transformación natural $v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ tal que para cada C objeto de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} v_C : \mathbf{1}C = \{*\} &\to \Omega C \\ * &\mapsto t_C \end{aligned}$$

Proposición 3.39. *La transformación natural $v : \mathbf{1} \Rightarrow \Omega$ es un clasificador de subobjetos para la categoría $Sh(\mathcal{C}, J)$.*

Demostración. Sea F una gavilla sobre $\mathcal{C}$ y $G \subseteq F$ una subgavilla. Proponemos una función característica $\chi_G : F \Rightarrow \Omega$ definida para cada objeto C y $x \in FC$ como:

$$(\chi_G)_C(x) = \{f : D \to C \mid Ff(x) \in GD\}.$$

Note que $(\chi_G)_C(x)$ es una criba cerrada sobre C. En efecto, tomemos $g : D \to C$ tal que $g^*((\chi_G)_C(x)) \in JD$. Veamos que $g \in (\chi_G)_C(x)$. Como $G \subseteq F$, para el objeto D y $Fg(x) \in FD$, y para cada $f : E \to D \in g^*((\chi_G)_C(x))$, se cumple que $Ff(Fg(x)) = F(gf)(x) \in GE$ porque $gf \in (\chi_G)_C(x)$. Aplicando el lema (3.37) se tiene que $Fg(x) \in GD$.
Más aún, χ_G es transformación natural. Sea $g : B \to C$ morfismo de $\mathcal{C}$, entonces tenemos que:

$$
\begin{array}{rll}
f \in (\chi_G)_B(Fg(x)) & \textit{si y sólo si} & Ff(Fg(x)) \in G(dom(f)) \\
& \textit{si y sólo si} & F(gf(x)) \in G(dom(f)) \\
& \textit{si y sólo si} & gf \in (\chi_G)_C(x) \\
& \textit{si y sólo si} & f \in g^*((\chi_G)_C(x)) \\
& \textit{si y sólo si} & f \in \Omega g((\chi_G)_C(x))
\end{array}
$$

Resta verificar que cumple la condición del producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{1} \arrow[d, Rightarrow, "v"] \\
F \arrow[r, Rightarrow, "\chi_G"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \textit{es decir, para cada objeto } C \qquad
\begin{tikzcd}
GC \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} = \{*\} \arrow[d, "v_c"] \\
FC \arrow[r, "(\chi_G)_c"'] & \Omega C
\end{tikzcd}
$$

Note que $x \in GC$ si y sólo si $(\chi_G)_C(x) = t_C$ pues $F(1_C)(x) = G(1_C)(x) \in GC$, por tanto, $1_C \in (\chi_G)_C(x)$. De esto se sigue que el cuadrado de la derecha conmuta. Además por la equivalencia anterior χ_G es única, ya que para cualquier $f : D \to C$, $x \in GC$ si y sólo si

$$t_D = f^*(t_C) = \Omega f(t_C) = \Omega f((\chi_G)_C)(x) = (\chi_G)_D(Ff(x)),$$

si y sólo si $1_D \in (\chi_G)_D(Ff(x))$, si y sólo si $Ff(x) = F(1_D)(Ff(x)) \in GD$, si y sólo si $f \in (\chi_G)_C(x)$. $\square$

3.6. Subgavillas

Sean $(\mathcal{C}, J)$ un sitio fijo y $Sh(\mathcal{C}, J)$ el topos de Grothendieck asociado. Para cada gavilla $E : \mathcal{C}^{op} \to Set$, sea $Sub(E)$ el conjunto de subobjetos de E en $Sh(\mathcal{C}, J)$. Entonces cada $A \in Sub(E)$, puede representarse de forma única por un funtor $A : \mathcal{C}^{op} \to Set$ tal que

(i) Para cada ojeto C de $\mathcal{C}$, $AC \subseteq EC$.

(ii) Para cada $h : C' \to C$ morfismo de $\mathcal{C}$, $Ah : AC \to AC'$ es la restricción de Eh a AC y AC'.

(iii) Para cada objeto C de $\mathcal{C}$, cada cubierta S de C y cada $e \in EC$ se cumple que:

$$\text{si para cada } f : D \to C \in S,\ Ef(e) \in AD \text{ entonces } e \in AC.$$

Los subobjetos de E son ordenados en la forma usual, esto es, para $A, B \in Sub(E)$,

$$A \leq B \textit{ si y sólo si para cada objeto } C : AC \subseteq BC.$$

Notar que E es el elemento más grande de $Sub(E)$. Además, si A y B son subobjetos de E, podemos definir el **ínfimo** de A con B en cada objeto C como:

$$(A \wedge B)(C) = A(C) \cap B(C)$$

y para cualquier familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subobjetos de E tenemos

$$(\bigwedge_i A_i)(C) = \bigcap_i A_i(C) \in Sub(E).$$

Sabemos que los supremos pueden describirse en términos de ínfimos de la siguiente forma

$$\bigvee_i A_i = \bigwedge \{B \mid \forall i : A_i \subseteq B\}.$$

Sin embargo, para el presente caso de $Sh(\mathcal{C}, J)$ también podemos describir explícitamente a los supremos de la siguiente forma. Para C objeto de $\mathcal{C}$ y $e \in E(C)$,

$$e \in (\bigvee_i A_i)(C) \textit{ si y sólo si } \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C) \tag{3.7}$$

Note que para cualquier $g : C' \to C$, $e \in (\bigvee_i A_i)(C)$ si y sólo si $S = \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A(D)\} \in J(C)$, por axioma de estabilidad esto implica que $g^*(S) \in J(C')$, pero

$$\begin{aligned} g^*(S) &= \{h : D \to C' \mid gh \in S\} \\ &= \{h : D \to C' \mid \exists i \in I : E(gh)(e) \in A_i(D)\} \\ &= \{h : D \to C' \mid \exists i \in I : Eh(Eg(e)) \in A_i(D)\} \end{aligned}$$

entonces $Eg(e)$ satisface el lado derecho de (3.7) y así podemos definir

$$(\bigvee_i A_i)(g)(e) = Eg(e) \in (\bigvee_i A_i)(C')$$

y con esto es claro que $\bigvee_i A_i$ es subfuntor de E.
Finalmente veamos que $\bigvee_i A_i$ cumple (iii). Para ello, tomemos un objeto C, una cubierta $R \in J(C)$ y $e \in EC$ tales que para cada $g : C' \to C \in R$, $Eg(e) \in (\bigvee_i A_i)(C')$ y veamos que $e \in (\bigvee_i A_i)(C)$, esto es, veamos que $S = \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C)$. Note que para cada $g : C' \to C \in R$, $g^*(S) \in J(C')$, pues por hipótesis $Eg(e) \in (\bigvee_i A_i)(C')$, aplicando el axioma de transitividad tenemos que $S \in J(C)$.
De lo anterior tenemos que $\bigvee_i A_i$ es un subobjeto de E y además cumple que para cada objeto C y para cada $i \in I$, $A_i(C) \subseteq (\bigvee_i A_i)(C)$ pues si $e \in A_{i_0}(C)$ para algún $i_0 \in I$, se tiene que

$$t_C = \{f : D \to C \mid Ef(e) \in A_{i_0}(D)\} \subseteq \{f_D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C)$$

y con esto, $e \in (\bigvee_i A_i)(C)$. Hemos probado que para cada $i \in I$, $A_i \leq \bigvee_i A_i$. Además es el subobjeto de E más pequeño que cumple la propiedad de ser mayor que cada A_i, ya que si $G \in Sub(E)$ es tal que para cada $i \in I$, $A_i \leq G$, entonces para cada objeto C, si $e \in (\bigvee_i A_i)(C)$, esto implica que $S = \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C)$, luego para cada $f \in S$, existe algún $i_0 \in I$ tal que $Eg(e) \in A_{i_0}(D) \subseteq G(D)$, aplicando la condición (iii) a G se tiene que $e \in GC$. Así, $\bigvee_i A_i \leq G$ y de esta forma $\bigvee_i A_i$ es el **supremo** de los A_i.
Con lo anterior tenemos que $Sub(E)$ es una retícula completa

Proposición 3.40. *Dada cualquier gavilla E sobre un sitio $(\mathcal{C}, J)$, la retícula $Sub(E)$ de todas las subgavillas sobre E, es un álgebra de Heyting completa.*

Demostración. De los comentarios previos ya tenemos a los supremos e ínfimos definidos. Veamos que se cumple la ley distributiva. Sean $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq Sub(E)$ y $B \in Sub(E)$, veamos que

$$B \wedge (\bigvee_i A_i) = \bigvee_i (B \wedge A_i).$$

Sean C un objeto de $\mathcal{C}$ y $e \in E(C)$ tal que $e \in BC \cap (\bigvee_i A_i)(C)$. Entonces

$$S = \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C).$$

Luego, para cada $f \in S$, existe $i_0 \in I$ tal que $E(f)(e) \in (B \wedge A_{i_0})(D)$, así,

$$S \subseteq \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in (B \wedge A_i)(D)\} \in J(C),$$

con lo cual $e \in \bigvee_i (B \wedge A_i)(C)$.
Ahora tomemos $e \in E(C)$ tal que $e \in \bigvee_i (B \wedge A_i)(C)$, por definición tenemos que

$$S = \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in (B \wedge A_i)(D)\} \in J(C).$$

Entonces para cada $f \in S$, $Ef(e) \in BD$ y existe algún $i_0 \in I$, tal que $Ef(e) \in A_{i_0}(D)$. Porque B es subgavilla de E se obtiene de (iii) que $e \in BC$ y además $S \subseteq \{f : D \to C \mid \exists i \in I : Ef(e) \in A_i(D)\} \in J(C)$, es decir, también se tiene que $e \in (\bigvee_i A_i)(C)$.

Por tanto, la retícula distributiva completa $Sub(E)$ es un álgebra de Heyting definiendo "$\Rightarrow$" como sigue. Dados $A, B \in Sub(E)$, C objeto de $\mathcal{C}$ y $e \in EC$,

$$e \in (A \Rightarrow B)(C) \text{ si y sólo si para cada } f : D \to C,\ Ef(e) \in AD \text{ implica que } Ef(e) \in BD.$$

Por la forma en que se ha definido "$\Rightarrow$ " se cumple para cada objeto C que $(A \Rightarrow B)(C) \subseteq EC$. Entonces sea $f : D \to C$ y $e \in (A \Rightarrow B)(C)$, luego $e \in EC$ y definiendo $(A \Rightarrow B)(f)(e) = Ef(e) \in ED$ veamos que $Ef(e) \in (A \Rightarrow B)(D)$. Para ello tomemos $g : D' \to D$ tal que $Eg(Ef(e)) \in AD'$, entonces $fg : D' \to C$ y $E(fg)(e) \in AD'$ y como $e \in (A \Rightarrow B)(C)$ se tiene que $E(fg)(e) \in BD'$, es decir, $Eg(Ef(e)) \in BD'$ y de esta forma $Ef(e) \in (A \Rightarrow B)(D)$. Con esto tenemos que $A \Rightarrow B$ es subfuntor de E.

Veamos ahora que $A \Rightarrow B$ satisface (iii). Tomemos C objeto de $\mathcal{C}$, una criba $S \in J(C)$ y $e \in EC$ y supongamos que para cada $f : D \to C \in S$ se cumple que $Ef(e) \in (A \Rightarrow B)(D)$. Queremos ver que $e \in (A \Rightarrow B)(C)$. Sea $g : C' \to C$ tal que $Eg(e) \in AC'$ y veamos que $Eg(e) \in BC'$. Por el axioma (ii) de estabilidad tenemos que $g^*S \in J(C')$. Tomemos $h : D \to C' \in g^*S$, es decir, $gh : D \to C \in S$, luego $E(gh)(e) \in (A \Rightarrow B)(D)$, lo cual implica que para $1_D : D \to D$, $E(gh)(e) = E(1_D)(E(gh)(e)) \in BD$ pues $Eh(Eg(e)) = Ah(Eg(e)) \in AD$. Hemos visto que para cada $h : D \to C' \in g^*S$ se tiene que $Eh(Eg(e)) \in BD$, aplicando (iii) para el subobjeto B de E conlcuimos que $Eg(e) \in BC'$.

Por tanto, $A \Rightarrow B$ es un subobjeto de E.

Ahora veamos que " $\Rightarrow$" describe la operación implicación en $Sub(E)$ y para esto basta con probar que cumple la propiedad que caracteriza a la implicación en un álgebra de Heyting: para $A, B, U \in Sub(E)$

$$U \leq (A \Rightarrow B) \textit{ si y sólo si } U \wedge A \leq B.$$

Sea C objeto de $\mathcal{C}$ y supongamos que $UC \subseteq (A \Rightarrow B)(C)$. Tomemos $e \in UC \cap AC$ y veamos que $e \in BC$. Como $e \in (A \Rightarrow B)(C)$, para $1_C : C \to C$ se cumple que $E(1_C)(e) = 1_{EC}(e) = e \in AC$, luego $e \in BC$. Por tanto, $U \wedge A \leq B$.
Ahora supongamos que $UC \cap AC \subseteq BC$ y tomemos $e \in UC$. Debemos ver que $e \in (A \Rightarrow B)(C)$. Sea $f : D \to C$ tal que $Ef(e) \in AD$. Note que para D objeto de $\mathcal{C}$,

$UD \cap AD \subseteq BD$, entonces para $e \in UC$ se cumple que $Ef(e) = Uf(e) \in UD$. Por tanto, $Ef(e) \in UD \cap AD \subseteq BD$ y de esta forma $e \in (A \Rightarrow B)(C)$. $\square$

Ejemplo 3.41. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Heyting completa con la topología de Grothendieck natural y considere el topos $Sh(\mathcal{A})$. Una subgavilla del objeto terminal $\mathbf{1}$ es un funtor $F : \mathcal{A}^{op} \to Set$ tal que para cada $a \in \mathcal{A}$, $F(a) \subseteq \mathbf{1}(a) = \{0\}$. Más aún, F es tal que si una criba $\{a_i\}_{i \in I}$ cubre un objeto $a \in \mathcal{A}$, es decir, $a = \vee\{a_i\}_{i\in I}$, entonces para $0 \in \mathbf{1}(a)$ se cumple que si para cada $i \in I$, $\mathbf{1}(a_i \leq a)(0) = 0 \in F(a_i)$ entonces $0 \in F(a)$. Así que F queda completamente determinada por $s = \vee\{a \mid 0 \in F(a)\}$ y la asignación $s \mapsto F$ nos da el isomorfismo $\mathcal{A} \cong Sub(\mathbf{1})$.

Por tanto, cada álgebra de Heyting completa puede ser descrita como una retícula de subobjetos en un topos de Grothedieck.

Ahora consideremos un sitio arbitrario $(\mathcal{C}, J)$. Si E es una gavilla sobre $\mathcal{C}$, el elemento minimal $0 \in Sub(E)$ no necesariamente es el funtor vacío pues este funtor no siempre es una gavilla, ya que puede darse el caso en que un objeto C tenga una cubierta vacía, es decir, $\emptyset \in J(C)$, entonces una familia plegable de elementos de E para la cubierta $\emptyset$, es una función definida sobre el conjunto vacío, es decir, hay sólo una función que es la función vacía y por vacuidad es plegable.
Sin embargo, para el funtor vacío $\emptyset : \mathcal{C}^{op} \to Set$, no hay algún elemento que sea amalgama para la familia $\emptyset$ y por tanto, este funtor no es gavilla.
No obstante, para una gavilla dada E sobre $Sh(\mathcal{C}, J)$ y un objeto C, $\emptyset \in J(C)$ implica, por la existencia de la amalgama única, que existe exactamente un elemento $x \in EC$, entonces el subfuntor $\mathbf{0} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ definido para cada objeto C como:

$$\mathbf{0}(C) = \begin{cases} \{x \in EC\} & \textit{si } \emptyset \in J(C) \\ \emptyset & \textit{si } \emptyset \notin J(C) \end{cases}$$

es una gavilla y es la subgavilla de E más pequeña.

Si ahora consideramos cualquier subgavilla B de una gavilla dada E, por definición, su pseudocomplemento $\neg B$ es la subgavilla más grande U de E tal que $U \wedge B = \mathbf{0}$, es decir,

$$\neg B = \bigvee\{U \in Sub(E) \mid U \wedge B = \mathbf{0}\} = B \Rightarrow \mathbf{0}$$

Entonces $\neg B$ puede describirse explícitamente para cada C objeto de $\mathcal{C}$ y para cada $x \in EC$,

$x \in \neg BC$ si y sólo si para toda $f : D \to C$, $Ef(x) \in BD$ implica que $\emptyset \in J(D)$.

Ejemplo 3.42. Consideremos el caso especial de la topología densa. Recordemos que la topología densa se define para S criba sobre C:

$$S \in J(C) \textit{ si y sólo si } \forall f : D \to C, \exists g : E \to D \textit{ tal que } fg \in S.$$

Note que la familia vacía nunca es densa así que en este caso, dada una gavilla E el elemento mínimo de $Sub(E)$ **0** es el funtor vacío. Por tanto, si B es una subgavilla de la gavilla E, la subgavilla $\neg B$ puede ser descrita para cualquier objeto C de $\mathcal{C}$ por

$$\neg BC = \{x \in EC \mid \textit{ para todo} f : D \to C, Ef(x) \notin BD\}.$$

Ahora sea $x \in EC$ y

$$S_x = \{f : D \to C \mid Ef(x) \in BD \textit{ o } Ef(x) \in \neg BD\}.$$

Entonces S_x es densa debajo de C, ya que si tomamos cualquier morfismo $f : C' \to C$,entonces, o existe $g : D \to C'$ tal que $E(fg)(x) \in BD$ y con esto $fg \in S_x$, o bien, para todo $g : D \to C'$, $E(fg)(x) \notin BD$, es decir, $Ef(x) \in \neg BC'$ y por tanto, $f \in Sx$. Por tanto, S_x es densa por debajo de C. De lo anterior se cumple que $B \vee \neg B = E$. En efecto, sea C un objeto de $\mathcal{C}$, veamos que $EC \subseteq BC \vee \neg BC$. Tomemos $x \in EC$, entonces como acabamos de ver, la criba $S_x = \{f : D \to C \mid Ef(x) \in BD \textit{ o } Ef(x) \in \neg BD\} \in J(C)$, esto es, $x \in BC \vee \neg BC \subseteq EC$.
Así que en este caso, $Sub(E)$ es un álgebra Booleana y por tanto, el topos $Sh(\mathcal{C}, \neg\neg)$ es un topos booleano.

Capítulo 4

Lógica Categórica

En este capítulo interpretaremos un fragmento de la lógica de primer orden de tipos múltiples en categorías regulares, llamado fragmento regular o lógica regular, que estrictamente hablando se refiere sólo al fragmento $\exists - \wedge$ de la lógica de primer orden pero extenderemos esta interpretación a una lógica de primer orden plena. Dicha extensión puede hacerse en cualquier categoría regular $\mathcal{C}$ en la cual la retícula de subobjetos de cualquier objeto C, $Sub(C)$, sea un álgebra de Heyting, como lo son las categorías trabajadas en los capítulos previos.

Definición 4.1. Una categoría $\mathcal{C}$ es llamada **regular** si cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{C}$ tiene todos los límites finitos,
2. Para cada flecha f, si

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

   es un diagrama de producto fibrado, entonces existe el coigualador de p_0 y p_1.

3. Los epimorfismos regulares (coigualadores) son estables bajo productos fibrados, esto es, es un cuadrado de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

   si f es epimorfismo regular entonces a lo es también.

4.1. Interpretación del lenguaje de primer orden

Un **lenguaje** $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ (o simplemente $\mathcal{L}$) consta de un conjunto $\mathcal{S}$ (llamado en ocasiones signatura) de tipos básicos $S, T, ...$, una colección numerable $x_1^S, x_2^S, ...$ de variables de tipo S para cada tipo, símbolos funcionales $f : S_1, ..., S_n \to S$ y símbolos relacionales $R \subseteq S_1, ..., S_n$. Los casos $n = 0$ para símbolos funcionales las pensamos como constantes c^S de tipo S y para símbolos relacionales como proposiciones atómicas. A continuación definimos recursivamente los términos de tipo S y fórmulas.

Definición 4.2. Los **términos** de tipo S se definen como:

(i) x^S es un término de tipo S si x^S es una variable de tipo S.

(ii) Si $t_1, ..., t_n$ son términos de tipo $S_1, ..., S_n$ respectivamente y $f : S_1, ..., S_n \to S$ es un símbolo funcional del lenguaje, entonces $f(t_1, ..., t_n)$ es un término de tipo S.

Las **fórmulas** se definen por:

(i) La constante "verdad" $\top$ es una fórmula.

(ii) Si t y s son términos del mismo tipo entonces $t = s$ es una fórmula.

(iii) Si $R \subseteq S_1, ..., S_m$ es un símbolo relacional y $t_1, ..., t_m$ son términos de tipo $S_1, ..., S_m$ respectivamente, entonces $R(t_1, ..., t_m)$ es una fórmula.

(iv) Si φ y ψ son fórmulas entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ y $\neg\varphi$ son fórmulas.

(v) Si ϕ es una fórmula y x^S es una variable de tipo S, entonces $\exists x^S \varphi$ y $\forall x^S \varphi$ son fórmulas.

Para una fórmula φ, $FV(\varphi)$ denota el conjunto de variables libres de φ. Una **teoría** T formulada en $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ es un conjunto de implicaciones $\varphi \Rightarrow \psi$ donde φ y ψ son fórmulas del lenguaje.

Una **interpretación** de dicho lenguaje en alguna categoría regular $\mathcal{C}$, se define escogiendo para cada tipo S un objeto $\|S\|$ de $\mathcal{C}$, para cada símbolo funcional $(f : S_1, ..., S_n \to S)$ del lenguaje, una flecha $\|f\| : \|S_1\| \times ... \times \|S_n\| \to \|S\|$ en $\mathcal{C}$ y para cada símbolo relacional $(R \subseteq S_1, ..., S_m)$ un subobjeto $\|R\|$ de $\|S_1\| \times ... \times \|S_m\|$. Con esto, definimos interpretaciones $\|t\|$ para términos t y $\|\varphi\|$ para fórmulas φ como sigue.

Haremos $\|FV(t)\| = \|S_1\| \times ... \times \|S_n\|$ si $FV(t) = \{x_1^{S_1}, ..., x_n^{S_n}\}$ y de igual forma para $\|FV(\varphi)\|$, tomando una copia de $\|S\|$ para cada variable de tipo S. Si $FV(t) = \emptyset$

entonces $\|FV(t)\| = \mathbf{1}$ el objeto terminal de la categoría.

Definición 4.3. La interpretación de un término t de tipo S es un morfismo $\|t\| : \|FV(t)\| \to \|S\|$ definido bajo las siguientes condiciones:

(i) $\|x^S\|$ es la identidad sobre $\|S\|$, si x^S es una variable de tipo S,

(ii) Dados $\|t_i\| : \|FV(t_i)\| \to \|S_i\|$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y un símbolo funcional $(f : S_1, ..., S_n \to S)$ del lenguaje, $\|f(t_1, ..., t_n)\|$ es el morfismo

$$\|FV(f(t_1, ..., t_n))\| \xrightarrow{(\widetilde{t_i})_i} \prod_i \|S_i\| \xrightarrow{\|f\|} \|S\|$$

donde cada $\widetilde{t_i}$ es la composición

$$\|FV(f(t_1, ...t_n))\| \xrightarrow{\pi_i} \|FV(t_i)\| \xrightarrow{\|t_i\|} \|S_i\|$$

en donde π_i es la proyección adecuada correspondiente a la inclusión $FV(t_i) \subseteq FV(f(t_1, ..., t_n))$.

Definición 4.4. Interpretaremos las fórmulas φ como un subobjeto $\|\varphi\|$ de $\|FV(\varphi)\|$ como sigue:

(i) $\|\top\|$ es el subobjeto maximal de $\|FV(\top)\| = \mathbf{1}$,

(ii) $\|t = s\| \to \|FV(t = s)\|$ es el igualador de

$$\|FV(t = s)\| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \|FV(t)\| \\ \|FV(s)\| \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\|t\|} \\ \xrightarrow[\|s\|]{} \end{array} \|T\|$$

(iii) Para un símbolo funcional $(R \subseteq S_1, ..., S_n)$ y términos $t_1, ..., t_m$ de tipos $S_1, ..., S_m$ respectivamente, sea $\bar{t} : \|FV(R(t_1, ..., t_m))\| \to \prod_{i=1}^m \|S_i\|$ la composición

$$\|FV(R(t_1, ..., t_m))\| \longrightarrow \prod_{i=1}^m \|FV(t_i)\| \xrightarrow{\prod_i \|t_i\|} \prod_{i=1}^m \|S_i\|$$

Entonces $\|R(t_1, ..., t_m)\| \to \|FV(R(t_1, ..., t_m))\|$ es el subobjeto $(\bar{t})^*(\|R\|)$, definido por producto fibrado a lo largo de $\bar{t}$.

(iv) Si tenemos $\|\varphi\| \to \|FV(\varphi)\|$ y $\|\psi\| \to \|FV(\psi)\|$ y

$$\begin{tikzcd}
\|FV(\varphi \wedge \psi)\| \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \|FV(\varphi)\| \\
& \|FV(\psi)\|
\end{tikzcd}$$

son las proyecciones adecuadas, entonces

$$\|(\varphi \wedge \psi)\| = \pi_1^*(\|\varphi\|) \wedge \pi_2^*(\|\psi\|) \text{ en } Sub(\|FV(\varphi \wedge \psi)\|)$$
$$\|(\varphi \vee \psi)\| = \pi_1^*(\|\varphi\|) \vee \pi_2^*(\|\psi\|) \text{ en } Sub(\|FV(\varphi \wedge \psi)\|)$$
$$\|(\varphi \to \psi)\| = \pi_1^*(\|\varphi\|) \to \pi_2^*(\|\psi\|) \text{ en } Sub(\|FV(\varphi \wedge \psi)\|)$$
$$\|\neg\varphi\| = \|\varphi\| \to \top \text{ en } Sub(\|FV(\varphi)\|).$$

Observe que $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi \to \psi)$.

(v) Si tenemos $\|\varphi\| \to \|FV(\varphi)\|$ y la proyección $\pi : \|FV(\varphi)\| \to \|FV(\exists x^S \varphi)\|$, sea $\|FV'(\varphi)\|$ el producto de las interpretaciones de los tipos de las variables en $FV(\varphi) \cup \{x^S\}$, es decir, si x^S ocurre libre en φ, $\|FV'(\varphi)\| = \|FV(\varphi)\|$, si x^S no ocurre libre en φ entonces $\|FV'(\varphi)\| = \|FV(\varphi)\| \times \|S\|$.
Escribimos $\pi' : \|FV'(\varphi)\| \to \|FV(\varphi)\|$.
Entonces tomamos $\|\exists x^S \varphi\| \to \|FV(\exists x^S \varphi)\|$ como la imagen de la composición

$$(\pi')^*(\|\varphi\|) \to \|FV'(\varphi)\| \xrightarrow{\pi\pi'} \|FV(\exists x^S \varphi)\|$$

y

$$\|\forall x^S \varphi\| = \forall_{\pi\pi'}((\pi')^*(\|\varphi\|)).$$

Básicamente, una fórmula φ es verdadera bajo esta interpretación si $\varphi \to \|FV(\varphi)\|$ es el subobjeto maximal. Como hemos formulado la lógica en términos de secuentes, resta definir cuando un secuente es verdadero bajo la interpretación.

Definición 4.5. Un **secuente etiquetado** es una expresión de la forma $\psi \vdash_\sigma \varphi$ o $\vdash_\sigma \varphi$, donde ψ y φ son las fórmulas del secuente, aunque ψ puede no aparecer y σ es un conjunto finito de variables que incluyen todas las variables que ocurren libres en una fórmula del secuente.

Sea $\|\sigma\| = \|S_1\| \times ... \times \|S_n\|$ si $\sigma = \{x_1^{S_1}, ..., x_n^{S_n}\}$. Se tienen las proyecciones $\|\sigma\| \xrightarrow{\pi_\sigma} \|FV(\varphi)\|$ y en caso de que exista ψ se tiene $\|\sigma\| \xrightarrow{\pi_\psi} \|FV(\psi)\|$. Decimos que el secuente $\psi \vdash_\sigma \varphi$ es verdadero para la interpretación si

$$(\pi_\psi)^*(\|\psi\|) \leq (\pi_\varphi)^*(\|\varphi\|)$$

como subobjetos de $\|\sigma\|$, y $\vdash_\sigma \varphi$ es verdadero si $(\pi_\phi)^*(\|\varphi\|)$ es el subobjeto maximal de $\|\sigma\|$.

Decimos además que φ es **verdadera** si $\vdash_{FV(\varphi)} \varphi$ es verdadera.

En la siguiente sección veremos lo que esto significa en el topos $Sh(\mathcal{C}, J)$ en términos de una definición de "forzamiento".

Definición 4.6. Dado un lenguaje, un conjunto T de secuentes etiquetados de dicho lenguaje es llamado una **teoría** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones (los paréntesis que encierran una fórmula ψ indican que ψ puede estar o no presente):

(i) $\vdash \top$ está en T,

$\vdash_x x = x$ está en T para cada variable x,

$x = y \vdash_{\{x,y\}} y = x$ está en T para variables x, y del mismo tipo,

$(x = y) \wedge (y = z) \vdash_{\{x,y,z\}} x = z$ está en T para variables x, y, z del mismo tipo,

$R(x_1, ..., x_m) \vdash_{\{x_1,...,x_m\}} R(x_1, ..., x_m)$ está en T,

(ii) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ está en T entonces $(\varphi) \vdash_\tau \varphi$ está en T siempre que $\sigma \subseteq \tau$,

(iii) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ está en T y $FV(\phi) \subseteq \sigma$ entonces $(\psi\wedge)\phi \vdash_\sigma \varphi$ y $\phi(\wedge\psi) \vdash_\sigma \phi$ están en T,

(iv) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ y $(\psi) \vdash_\sigma \phi$ están en T entonces $(\psi) \vdash_\sigma \varphi \wedge \phi$ está en T,

(v) Si $\psi \vdash_\sigma \varphi$ está en T y x es una variable que no aparece en φ entonces $\exists x\psi \vdash_{\sigma \setminus \{x\}} \varphi$ está en T,

(vi) Si x aparece en φ y $(\psi) \vdash_\sigma \varphi[t/x]$ está en T entonces $(\psi) \vdash_\sigma \exists x\varphi$ está en T,

Si x no aparece en φ, $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ y $(\psi) \vdash_\sigma \exists x(x = x)$ están en T, entonces $(\psi) \vdash_\sigma \exists x\varphi$ está en T,

(vii) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ está en T entonces $(\psi[t/x]) \vdash_{\sigma\setminus\{x\}\cup FV(t)} \varphi[t/x]$ está en T,

(viii) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi[t/x]$ y $(\psi) \vdash_\sigma t = s$ están en T entonces $(\psi) \vdash_\sigma \varphi[s/x]$ está en T,

(ix) Si $(\psi) \vdash_\sigma \varphi$ y $\varphi \vdash_\sigma \phi$ están en T entonces $(\psi) \vdash_\sigma \phi$ está en T

Podemos ver cada una de las condiciones anteriores como una regla y una teoría es un conjunto de secuentes cerrado bajo cada una de estas reglas. Por tanto, la intersección de cualquier colección de teorías es una teoría, esto hace que tenga sentido hablar de la teoría generada por un conjunto de secuentes S,

$$[S] = \cap\{T \mid T \textit{ es una teoría y } S \subseteq T\}.$$

Teorema de Robustez 4.7. Supongamos que $T = [S]$ y todos los secuentes de S son verdaderos bajo la interpretación en la categoría $\mathcal{C}$. Entonces todos los secuentes de T son verdaderos bajo dicha interpretación.

Demostración. La prueba puede consultarse en [BCT, pág 36]. □

4.2. Un ejemplo

Ahora haremos una aplicación de la teoría previa, trabajando con un modelo de P. Freyd que muestra que en topos donde se cumple la lógica clásica, el axioma de elección no necesariamente es válido. Para ello, construiremos un topos $\mathcal{F}$ booleano y una colección E indexada en $\mathbf{N}_J$ (el o. n. n. de $Sh(\mathcal{C}, \neg\neg)$) no vacía se subconjuntos del potencia de $\mathbf{N}_J$ que no admite una función de elección.

La interpretación es como sigue. Tomamos gavillas $\|S\|$ como interpretación de los tipos S y subgavillas como interpretación de los símbolos relacionales. Para una fórmula φ, $\|\varphi\|$ es un subobjeto (subgavilla) de $FV(\varphi)$, por tanto tenemos un morfismo clasificador

$$\{\varphi\} : \|FV(\varphi)\| \to \Omega$$

con componentes

$$\{\varphi\}_C : \|FV(\varphi)\|(C) \to \Omega C$$

para $(a_1, ..., a_n) \in \|FV(\varphi)\|(C)$, $\{\varphi\}_C(a_1, ..., a_n)$ es una criba sobre C.

Definición 4.8. Para una fórmula φ con variables libres $x_1, ..., x_n$, C un objeto de $\mathcal{C}$ y $(a_1, ..., a_n) \in \|FV(\varphi)\|(C)$, la notación $C \Vdash \varphi(a_1, ..., a_n)$ significa que $\{\varphi_C\}(a_1, ..., a_n)$ es la criba maximal sobre C y se lee como C "fuerza" $\varphi(a_1, ..., a_n)$.
Además utilizando la caracterización de estructura de Heyting de $Sh(\mathcal{C}, J)$ podemos dar una definición recursiva de esta noción.

- $C \Vdash (t = s)(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si $\|t\|_C(a_1, ..., a_n) = \|s\|_C(a_1, ..., a_n)$
- $C \Vdash R(t_1, ..., t_k)(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si
$$(\|t_1\|_C(a_1, ..., a_n), ..., \|t_k\|_C(a_1, ..., a_n)) \in \|R\|(C)$$
- $C \Vdash (\varphi \wedge \psi)(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si
$$C \Vdash \varphi(a_1, ..., a_n) \text{ y } C \Vdash \psi(a_1, ..., a_n)$$
- $C \Vdash (\varphi \vee \psi)(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si la criba
$$\{g : C' \to C \mid C' \Vdash \varphi(\|S_1\|(g)(a_1), ..., \|S_n\|(g)(a_n)) \text{ o } C' \Vdash \psi(\|S_1\|(g)(a_1), ..., \|S_n\|(g)(a_n))\}$$
cubre C
- $C \Vdash (\varphi \to \psi)(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si para cada flecha $f : C' \to C$,
$$\text{si } C' \Vdash \varphi(\|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n)) \text{ entonces } C' \Vdash \psi(\|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n))$$
- $C \Vdash \neg\varphi(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si para ninguna flecha $f : C' \to C$,
$$C' \Vdash \varphi(\|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n))$$
- $C \Vdash \exists x^S \varphi(x, a_1, ..., a_n)$ si y sólo si la criba
$$\{g : C' \to C \mid \text{ existe } x \in \|S\|(C') : C' \Vdash \varphi(x, \|S_1\|(g)(a_1), ..., \|S_n\|(g)(a_n))\}$$
cubre C
- $C \Vdash \forall x^S \varphi(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si para cada flecha $f : C' \to C$ y cada $a \in \|S\|(C')$,
$$C' \Vdash \varphi(a, \|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n))$$

Observación 4.9. 1. Si $C \Vdash \varphi(a_1, ..., a_n)$ entonces para toda flecha $f : C' \to C$,
$$C' \Vdash \varphi(\|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n))$$

2. Si R es una criba cubriente sobre C y para toda flecha $f : C' \to C$ en R tenemos que $C' \Vdash \varphi(\|S_1\|(f)(a_1), ..., \|S_n\|(f)(a_n))$, entonces $C \Vdash \varphi(a_1, ..., a_n)$.

Definición 4.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal. Un objeto $\mathbb{N}$ de $\mathcal{C}$ se llama **objeto números naturales** si cumple lo siguiente:

(i) Existen flechas $\mathbf{1} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$

(ii) Para cualquier objeto C en $\mathcal{C}$ y flechas $\mathbf{1} \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C$, existe una única flecha $h : N \to C$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "f"'] & C \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.11. En la categoría de conjuntos Set tenemos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ junto con las siguientes flechas

$$\mathbf{1} = \{*\} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \qquad\qquad \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$
$$* \longmapsto 0 \qquad\qquad n \longmapsto n+1$$

Entonces dado un conjunto X, $h : \mathbb{N} \to X$ definida como

$$h(0) = f(*) \qquad y \qquad h(n+1) = g(h(n))$$

hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\ \{*\} \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Proposición 4.12. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ toposes de Grothendieck. Supongamos que $\mathcal{E}$ tiene objeto números naturales $\mathbb{N}$ y que el funtor $G : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tiene adjunto derecho y preserva el objeto terminal, entonces $\mathcal{F}$ también tiene objeto números naturales.*

Demostración. Es suficiente con mostrar que para cualquier objeto X de $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd} G(\mathbf{1}^{\mathcal{E}}) \arrow[r, "G(0)"] \arrow[d, equal] & G(\mathbb{N}) \arrow[r, "G(s)"] \arrow[d, dashed] & G(\mathbb{N}) \arrow[d, dashed] \\ \mathbf{1}^{\mathcal{F}} \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

es el diagrama buscado.

Supongamos que F es el adjunto derecho de G, entonces para cada objeto X de $\mathcal{F}$ y Y de $\mathcal{E}$ se tiene el isomorfismo

$$\mathcal{F}(GY, X) \cong \mathcal{E}(Y, FX). \tag{4.1}$$

Note que $F(\mathbf{1}^{\mathcal{F}})$ es objeto terminal en $\mathcal{E}$ pues para cada objeto E de $\mathcal{E}$, el conjunto $\mathcal{F}(GE, \mathbf{1}^{\mathcal{F}})$ tiene sólo un elemento porque $\mathbf{1}^{\mathcal{F}}$ es terminal en $\mathcal{F}$ y por el isomorfismo (4.1) hay exactamente un morfismo $E \to F(\mathbf{1}^{\mathcal{F}})$. Entonces como $\mathcal{E}$ tiene objeto números naturales $\mathbb{N}$, para f' y g' las respectivas asignaciones de f y g mediante el isomorfismo (4.1), se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1}^{\mathcal{E}} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\ F(\mathbf{1}^{\mathcal{F}}) \arrow[r, "f'"'] & FX \arrow[r, "g'"'] & FX \end{tikzcd}$$

y para $\mathbb{N}$ en $\mathcal{E}$ y X en $\mathcal{F}$ se tiene el isomorfismo $\mathcal{F}(G\mathbb{N}, X) \cong \mathcal{E}(\mathbb{N}, FX)$, esto induce la asignación $h \longmapsto H$ y por tanto

$$\begin{tikzcd} G(\mathbf{1}^{\mathcal{E}}) \arrow[r, "G(0)"] \arrow[d, equal] & G(\mathbb{N}) \arrow[r, "G(s)"] \arrow[d, dashed, "H"] & G(\mathbb{N}) \arrow[d, dashed, "H"] \\ \mathbf{1}^{\mathcal{F}} \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Así $G(\mathbb{N})$ es el objeto números naturales del topos $\mathcal{F}$.

□

Proposición 4.13. *Para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$ hay una adjunción*

$$\begin{tikzcd} Set^{\mathcal{C}^{op}} \arrow[r, shift left, "\Gamma"] \arrow[r, phantom, "\top"] & Set \arrow[l, shift left, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

donde Δ es el funtor pregavilla constante.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \Delta : Set &\longrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}} \\ X &\longmapsto \Delta(X) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta(X) : \mathcal{C}^{op} &\longrightarrow Set \\ C &\longmapsto \Delta(X)(C) = X \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma : Set^{\mathcal{C}^{op}} &\longrightarrow Set \\ P &\longmapsto \Gamma P = Set^{\mathcal{C}^{op}}(\mathbf{1}, P) \end{aligned}$$

Tomemos X un conjunto y P una pregavilla y verifiquemos el siguiente isomorfismo

$$Set(X, \Gamma P) \cong Set^{\mathcal{C}^{op}}(\Delta X, P).$$

Si $f : X \to \Gamma P$, tenemos para cada $x \in X$, una transformación natural $f(x) : \mathbf{1} \Rightarrow P$, definimos $\Theta f : \Delta X \Rightarrow P$ tal que a cada objeto C de $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \Theta f(C) : \Delta X(C) = X &\longrightarrow PC \\ x &\longmapsto f(x)(C)(*) \end{aligned}$$

Si ahora tomamos una transformación natural $\alpha : \Delta X \Rightarrow P$, definimos

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) : X &\longrightarrow \Gamma P \\ x &\longmapsto \Phi(\alpha)(x) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha)(x)(C) : \mathbf{1}C &\longrightarrow PC \\ * &\longmapsto \alpha(C)(x) \end{aligned}$$

Entonces $(\Phi \circ \Theta)(f) = f$ y $(\Theta \circ \Phi)(\alpha) = \alpha$ pues

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta f)(x)(C) : \mathbf{1} = \{*\} &\longrightarrow PC \\ * &\longmapsto \Theta f(C)(x) = f(x)(C)(*) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Theta(\Phi(\alpha))(C) : \Delta X(C) = X &\longrightarrow PC \\ x &\longmapsto \Phi(\alpha)(x)(C)(*) = \alpha(C)(x) \end{aligned}$$

□

Corolario 4.14. *Las categorías de pregavillas y gavillas sobre un sitio tienen objeto número naturales.*

Demostración. Para pregavillas se sigue de las dos proposiciones anteriores ya que $\Delta : Set \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene adjunto derecho y además preserva el objeto terminal de Set, por tanto, como Set tiene objeto números naturales $\mathbb{N}$, la categoría de pregavillas también lo tiene y es la pregavilla constante con valor $\mathbb{N}$.

Por otra parte, por el teorema 3.28 el funtor gavilla asociada **a** : $Set^{\mathcal{C}^{op}} \to Sh(\mathcal{C}, J)$ preserva el objeto números naturales de pregavillas, entonces el objeto números naturales de la categoría de gavillas sobre un sitio se obtiene aplicando la construcción $^+$ a la pregavilla (que es separada) $\Delta(\mathbb{N})$. Denotaremos por $\mathbf{N}_J$ al objeto número naturales de $Sh(\mathcal{C}, J)$. □

Observación 4.15. Se puede mostrar que para la interpretación estándar del lenguaje de la aritmética en $\mathbf{N}_J$, una sentencia es verdadera si y sólo si es verdadera en el modelo estándar (clásico) de los números naturales.

Lo que haremos en seguida es estudiar el modelo de Freyd que muestra un topos booleano en donde el Axioma de Elección falla.

Ejemplo 4.16. Definamos la siguiente categoría $\mathbb{F}$. Sus objetos son $\bar{n}$ para cada número natural n, y un morfismo $f : \bar{m} \to \bar{n}$ es una función $\{0, ..., m\} \to \{0, ..., n\}$, tal que para cada $i \in \{0, ..., n\}$: $f(i) = i$, es decir, no hay morfismos $\bar{m} \to \bar{n}$ si $m < n$. Note que $\bar{0}$ es objeto terminal en $\mathbb{F}$.

Sobre $\mathbb{F}$, sea $\neg\neg$ la topología densa, entonces una criba R sobre $\bar{m}$ cubre $\bar{m}$ si y sólo si para cada flecha $g : \bar{n} \to \bar{m}$, existe una flecha $h : \bar{k} \to \bar{n}$ tal que $gh \in R$.

Trabajaremos en el topos $\mathcal{F} = Sh(\mathbb{F}, \neg\neg)$ el topos de Freyd. Denotaremos por E_n el objeto $\mathbf{a}(Y_{\bar{n}})$, la gavilla resultante de aplicar el funtor gavilla asociada **a** a la pregavilla representable sobre $\bar{n}$, $Y_{\bar{n}} := \mathbb{F}(\_, \bar{n})$.

Lema 4.17. *La topología $\neg\neg$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Cada criba cubriente es no vacía.*
2. *Cada criba no vacía sobre $\bar{0}$ es una cubierta.*
3. *Cada pregavilla representable es separada.*
4. *$Y_{\bar{0}}$ tiene sólo dos subobjetos cerrados.*

Demostración. 1. Sean $\bar{m}$ un objeto de $\mathbb{F}$ y R una criba que cubre a $\bar{m}$, entonces para $1_{\bar{m}}$, existe $h : \bar{k} \to \bar{m}$ tal que $h = 1_{\bar{m}} \circ h \in R$. Por tanto, $R \neq \emptyset$.

2. Sean S una criba sobre $\bar{0}$ y $f : \bar{k} \to \bar{0}$ en S. Como $\bar{0}$ es terminal, para cualquier $g : \bar{m} \to \bar{0}$ y cualesquiera morfismos $h' : \overline{m+k} \to \bar{k}$ y $h : \overline{m+k} \to \bar{m}$ el cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} \overline{m+k} \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "h"'] & \bar{k} \arrow[d, "f"] \\ \bar{m} \arrow[r, "g"'] & \bar{0} \end{tikzcd}$$

Por tanto, para cualquier $g : \bar{m} \to \bar{0}$, existe $h : \overline{m+k} \to \bar{m}$ tal que $gh = fh' \in S$ porque S es criba y $f \in S$, de esta forma S es una cubierta de $\bar{0}$.

3. Sean $\bar{n}$ un objeto de $\mathbb{F}$ y tomemos la pregavilla representable $Y_{\bar{n}} = \mathbb{F}(\_, \bar{n})$. Sean $\bar{k}$ objeto de $\mathbb{F}$ y $g, g' \in \mathbb{F}(\_, \bar{n})(\bar{k})$ tales que para una cubierta R de $\bar{k}$ se cumple que $Y_{\bar{n}}(f)(g) = Y_{\bar{n}}(f)(g')$ para cada $f \in R$, es decir, $gf = g'f$. Veamos que $g = g'$. Para cada $i \leq k$, definamos $h : \overline{k+1} \to \bar{k}$ tal que $h(k+1) = i$.
Como R cubre $\bar{k}$, por definición de la topología densa, existe $u : \bar{l} \to \overline{k+1}$ tal que $hu \in R$. Entonces $ghu = g'hu$, es decir,

$$g(i) = ghu(k+1) = g'hu(k+1) = g'(i).$$

Esto lo podemos hacer con cada i, por tanto $g = g'$.

4. Supongamos que R es una criba cerrada sobre $\bar{0}$. Si $R \neq \emptyset$ entonces por (2), R es criba cubriente de $\bar{0}$, luego para cada $f : \bar{m} \to \bar{0}$, existe $h : \bar{n} \to \bar{m}$ tal que $fh \in R$, es decir, R cubre f y como R es cerrada, esto implica que $f \in R$. Por tanto, R es la criba maximal sobre $\bar{0}$. Así, las únicas cribas cerradas sobre $\bar{0}$ son $\emptyset$ y la criba maximal.

$\square$

Proposición 4.18. *El único morfismo que existe $E_n \to \mathbf{1}$ es epimorfismo.*

Demostración. Sabemos que el objeto terminal en $\mathcal{F} = Sh(\mathbb{F}, \neg\neg)$ es $\mathbf{1} = \mathbf{a}(Y_{\bar{0}})$ pues la pregavilla $Y_{\bar{0}} : \mathbb{F}(\_, \bar{0}) \to Set$ que manda a cada objeto $\bar{m}$ de $\mathbb{F}$ al singular $\mathbb{F}(\bar{m}, \bar{0})$ es el objeto terminal de $Set^{\mathbb{F}^{op}}$, por el lema 4.17 (4), $\mathbf{a}(Y_{\bar{0}})$ tiene sólo dos subobjetos y como $Y_{\bar{n}} : \mathbb{F}(\_, \bar{n}) \to Set$ no es vacío, entonces la imagen de cada $\alpha_{\bar{m}} : \mathbf{a}(Y_{\bar{n}})(\bar{m}) \Rightarrow \mathbf{1}(\bar{m}) = \{*\}$ es $\mathbf{1}$, por tanto α es epimorfismo. $\square$

Proposición 4.19. *Si $n > m$ entonces $E_n(\bar{m}) = \emptyset$.*

Demostración. Como $Y_{\bar{n}}$ es separada por (3) del lema 4.17, $E_n = \mathbf{a}(Y_{\bar{n}}) = (Y_{\bar{n}})^+$, por tanto $E_n(\bar{m}) = (Y_{\bar{n}})^+(\bar{m})$ es una clase de equivalencia de familias plegables , es decir, transformaciones naturales $\tau : S \Rightarrow Y_{\bar{n}}$ en $Set^{\mathbb{F}^{op}}$ para una cubierta S de $\bar{m}$ (por la observación 3.20).
Afirmamos que no existe alguna τ de ese tipo. Como S es no vacía, podemos elegir $s : \bar{k} \to \bar{m}$ en S y sea $f = \tau_{\bar{k}}(s)$, esto es,

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{k}} \,:\, S_{\bar{k}} \quad &\longrightarrow \quad Y_{\bar{n}}(\bar{k}) = \mathbb{F}(\bar{k}, \bar{n}) \\ s : \bar{k} \to \bar{m} &\longmapsto f : \bar{k} \to \bar{n} \end{aligned}$$

Sean $g, h : \overline{k+1} \to \bar{k}$ tales que $g(k+1) = n$ y $h(k+1) = s(n) \leq m < n$. Entonces $sg = sh$. En efecto, sea $i \in \{0, ..., k\}$ entonces $s(g(i)) = s(i) = s(h(i))$ y $s(g(k+1)) = s(n) = s(s(n)) = s(h(k+1))$. Por tanto,

$$fg = \tau_{\bar{k}}(s)g = \tau_{\overline{k+1}}(sg) = \tau_{\overline{k+1}}(sh) = \tau_{\bar{k}}(s)h = fh.$$

sin embargo, $fg(k+1) = f(n) = n$ mientras que $fh(k+1) = f(s(n)) = s(n) < n$, lo cual es una contradicción y por tanto no existen $\tau : S \Rightarrow Y_{\bar{n}}$. $\square$

Corolario 4.20. *La gavilla producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es vacía.*

Demostración. Supongamos que $(\prod_n E_n)(\bar{m}) \neq \emptyset$ para algún $\bar{m}$ en $\mathbb{F}$, aplicando la proyección $\prod_n E_n \to E_{m+1} = \mathbf{a}(\mathbb{F}(\overline{m+1}, \bar{n}))$ se tiene que $E_{m+1}(\bar{m}) \neq \emptyset$ pero esto contradice la proposición anterior. $\square$

Observación 4.21. En un topos $\mathcal{E}$ suele denotarse por $\mathcal{P}(B)$ al objeto potencia de B y se define como el exponencial Ω^B, donde Ω es el clasificador de subobjetos del topos, entonces de acuerdo con la construcción explícita que hacemos en la categoría de pregavillas tenemos para un objeto C del topos

$$\Omega^B(C) = Nat(YC, \Omega^B) \cong NAT(YC \times B, \Omega)$$

tal isomorfismo debe cumplirla el exponencial por adjunción.
Además por la proposición 1.10 sabemos que el clasificador de subobjetos Ω cumple para cada objeto C que

$$Sub(C) \cong \mathcal{E}(C, \Omega).$$

Finalmente, que $\mathcal{P}(B)$ se defina como Ω^B y por el isomorfismo anterior tenemos

$$\mathcal{E}(A, PB) \cong \mathcal{E}(B \times A, \Omega) \cong Sub(B \times A).$$

Entonces $\mathcal{P}(B)(C) = \Omega^B(C) \cong Sub(YC \times B)$.

Proposición 4.22. *Para cada n existe un monomorfismo $E_n \to \mathcal{P}(\boldsymbol{N}_J)$.*

Demostración. Como $E_n = \mathbf{a}(Y_{\bar{n}})$ y $\mathcal{P}(\mathbf{N}_J)$ es una gavilla, basta con construir un monomorfismo $Y_{\bar{n}} \rightarrowtail \mathcal{P}(\mathbf{N}_J)$, que da la única extensión a un morfismo desde E_n; como **a** preserva monomorfismos, la extensión será monomorfismo si el morfismo dado lo es.
Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración 1-1 de las flechas en $\mathbb{F}$ con codominio $\bar{n}$. Para cada g_i, sea C_i la criba cerrada más pequeña sobre $\bar{n}$ que coniene a g_i.
Por la observación anterior, $\mathcal{P}(\mathbf{N}_J)(\bar{m}) \cong Sub(Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)$, así que los elementos de $(Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)(\bar{k})$ son parejas $(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ donde $h : \bar{k} \to \bar{m}$ y $\{S_i\}$ es una colección indexada en $\mathbb{N}$ de cribas sobre $\bar{k}$, tales que para $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ y $\cup_i S_i$ cubre $\bar{k}$.
Definimos

$$\mu_{\bar{m}} : Y_{\bar{n}}(\bar{m}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N}_J)(\bar{m})$$
$$f : \bar{m} \to \bar{n} \longmapsto \mu_{\bar{m}}(f) \in Sub(Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)$$

de tal forma que

$$(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in \mu_{\bar{m}}(f)(\bar{k}) \quad \textit{si y sólo si para cada} \quad i \in \mathbb{N} : \quad S_i \subseteq (fh)^*(C_i).$$

Veamos que está bien definida. Sea $\bar{k} \in \mathbb{F}$, es claro que $\mu_{\bar{m}}(f)(\bar{k}) \subseteq (Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)(\bar{k})$ por definición. Ahora tomemos una cubierta S de $\bar{k}$ y $(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in (Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)(\bar{k})$ tal que para toda $g : \bar{t} \to \bar{k} \in S$, $(Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)(g)(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in \mu_{\bar{m}}(f)(\bar{t})$ y veamos que $(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in \mu_{\bar{m}}(f)(\bar{k})$. Sea $i \in \mathbb{N}$, debemos mostrar que $S_i \subseteq (fh)^*(C_i) = \{r \mid fhr \in C_i\}$. Sea $g : \bar{t} \to \bar{k} \in S_i \subseteq S$, por hipótesis

$$(hg, \{g^*(S_i)\}_{i\in\mathbb{N}}) = (Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)(g)(h, \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in \mu_{\bar{m}}(f)(\bar{t}). \tag{4.2}$$

Note que como $g \in S_i$, entonces $g^*(S_i)$ es la criba maximal sobre $\bar{t}$, además $g^*(S_i) \subseteq (fhg)^*(C_i)$ por (4.2), así que $(fhg)^*(C_i)$ es también la criba maximal sobre $\bar{t}$, lo cual equivale a que $fhg \in C_i$, o bien, $g \in (fh)^*(C_i)$ y por tanto $S_i \subseteq (fh)^*(C_i)$. Por tanto, $\mu_{\bar{m}}(f) \in Sub(Y_{\bar{m}} \times \mathbf{N}_J)$.
Veamos que μ es transformación natural. Sea $g : \bar{l} \to \bar{m}$, para $h' : \bar{k} \to \bar{l}$ queremos ver que $(Y_g \times 1_{\mathbf{N}_J})^*(\mu_{\bar{m}}(f))(\bar{k}) = \mu_{\bar{l}}(fg)(\bar{k})$. Pero tenemos que:

$$\begin{aligned} & (h', \{S_i\}_i) \in (Y_g \times 1_{\mathbf{N}_J})^*(\mu_{\bar{m}}(f))(\bar{k}) \\ \textit{si y sólo si} \quad & (gh', \{S_i\}_i) \in \mu_{\bar{m}}(f)(\bar{k}) \\ \textit{si y sólo si} \quad & \forall i(S_i \subseteq (fgh')^*(C_i)) \\ \textit{si y sólo si} \quad & (h', \{S_i\}_i) \in \mu_{\bar{l}}(fg)(\bar{k}). \end{aligned}$$

Resta ver que μ es monomorfismo. Supongamos que $\mu_{\bar{m}}(f) = \mu_{\bar{m}}(f')$ para $f, f' : \bar{m} \to \bar{n}$. Sean j, j' tales que en nuestra enumeración $f = g_j$ y $f' = g_{j'}$. Consideremos la pareja

$\xi = (1_{\bar{m}}, \{S_i\}_i)$ donde S_i es la criba vacía si $i \neq j$ y $S_j = t_{\bar{m}}$ la criba maximal sobre $\bar{m}$. Entonces ξ es un elemento de $\mu_{\bar{m}}(f)(\bar{m})$, ya que si $i \neq j$, $S_i = \emptyset \subseteq g_j^*(C_i)$ y C_j es la criba cerrada más pequeña sobre $\bar{n}$ que contiene a g_j, por tanto $g_j^*(C_j)$ es la maximal sobre $\bar{m}$ y de esta forma contiene a S_j. Pero además ξ también es un elemento de $\mu_{\bar{m}}(f')(\bar{m})$, lo cual implica que $f' \in C_j$ y como $f' = g_{j'} \in C_{j'}$, se tiene que $C_j \cap C_{j'} \neq \emptyset$. Entonces para cualquier morfismo $h : \bar{l} \to \bar{m}$ en $\mathbb{F}$ se tiene que $fh = f'h$, por tanto $f = f'$.

$\square$

Conclusiones

Se desarrolló la teoría necesaria para entender pruebas de consistencia categóricas y aunque el ejemplo final es bastante breve, el trabajo hecho puede servir como base para la revisión de pruebas más elaboradas, que por cuestiones de tiempo y espacio no fue posible incluir aquí, por ejemplo, la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo con ZFC, o bien, la Hipótesis de Souslin.

Cabe señalar también que otro camino que se puede tomar es revisando topologías de Lawvere-Tierney pero no es el objetivo de este trabajo. Por otra parte, tampoco nos enfocamos mucho en la cuestión de la fundamentación de la matemática con teoría de topos y aún cuando parece ser un área bastante interesante, nuestro objetivo era más la utilización de la teoría de topos como herramienta para hacer pruebas de consistencia por considerar a la teoría de categorías, una rama de las matemáticas que clarifica y generaliza conceptos y con ello tiende a facilitar muchos cálculos en otras ramas, y aunque quizás en este caso podría parecer que tiende a complicar las cosas, pensamos que el esfuerzo inicial que debe imprimirse para la comprensión de los conceptos se ve recompensado al final con la elegancia de las pruebas.

Bibliografía

[CT] Awodey, S., CATEGORY THEORY, Oxford Logic Guides 49, (2006)

[CWM] Mac Lane, S., CATEGORIES FOR THE WORKING MATEMATICIAN, Springer-Verlag, New York, (1971)

[SGL] Mac Lane, S., Moerdijk, I., SHEAVES IN GEOMETRY AND LOGIC, Springer, New York, (1992)

[TT] Moerdijk, I., Van Oosten, J., TOPOS THEORY, Utrecht University, (2007)

[BCT] Van Oosten, J., BASIC CATEGORY THEORY, Utrecht University, (2002)

Índice alfabético