Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del efecto de los impuestos ambientales aplicados a una economía en crecimiento utilizando teoría de control óptimo.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

César Enrique Suárez Franco

Asesorado por

Dr. Jorge Velázquez Castro

Puebla Pue.
Octubre del 2022

Título: Análisis del efecto de los impuestos ambientales aplicados a una economía en crecimiento utilizando teoría de control óptimo.
Estudiante: César Enrique Suárez Franco

COMITÉ

Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes
Presidente

Dr. Josue Zavaleta Gonzales
Secretario

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Vocal

Dr. José Fernando Rojas Rodríguez
Vocal

Dr. Jorge Velázquez Castro
Asesor

Agradecimientos

Esta ha sido una de las etapas más difíciles, pero a la vez satisfactorias de mi vida, agradezco la paciencia y el apoyo que mi familia me han dado desde que decidí estudiar física, agradezco a mi madre Mirtha Otilia Franco Figueroa por no dudar de mi ni de mis capacidades en ningún momento, agradezco el ejemplo y la educación que me ha dado toda mi vida, que han sido mi guía para esforzarme cada día por cumplir mis metas, ella es mi inspiración y mi ejemplo a seguir.

Agradezco también a mis hermanas Moni e Isis por confiar en mí y ayudarme en todo momento.

Quiero agradecer también a mis amistades que me acompañaron por el camino, a las que llegaron conmigo y a las que encontré. A Cristhi, Marcelo y Yetla por su compañía y apoyo cada día en la facultad, a nuestro equipo de Handball por ayudarme perseverar. A todos mis amigos y compañeros que siempre me brindaron su ayuda.

Agradezco también a mi asesor el Dr. Jorge Velázquez Castro por su guía y su paciencia, que fueron inagotables en el desarrollo de este trabajo, y agradezco su compromiso con la enseñanza que me inspiró cada día para estudiar y esforzarme por aprender. Siempre lo recordaré como uno de los mejores profesores de la facultad.

Y para finalizar quiero agradecer a Joss por creer en mi incluso cuando yo mismo no lo hacía, por siempre estar ahí para mí, por su comprensión y apoyo que significan todo cuando las cosas se ponen difíciles, apoyarme y animarme siempre en esta última etapa, por todo el amor y confianza que me brindó sin pedir nunca nada a cambio.

A todas y todos, muchas gracias.

Índice general

1. Resumen **1**

2. Introducción **3**
2.1. Planteamiento del problema. . . . 3
2.2. Justificación. . . . 5
2.3. Objetivos. . . . 7
2.4. Antecedentes. . . . 8

3. Marco Teórico **11**
3.1. Dinamica Económica 11
3.1.1. Funciones de producción. . . . 11
3.1.2. La función de producción Cobb-Douglas 13
3.1.3. Funciones de producción de dos factores. . . . 14
3.1.4. Función de producción Cobb-Douglas con dos factores. . . . 15
3.2. Principio del Máximo. . . . 15
3.2.1. Controles escalares. . . . 17
3.2.2. Optimización de descuentos. . . . 17
3.2.3. Controles interiores. . . . 17
3.2.4. Condiciones de transversalidad. . . . 18
3.2.5. Modelo económico Solow-Swan. . . . 18
3.2.6. Optimización estática. . . . 20
3.2.7. Versiones optimizadas del modelo Solow-Swan. . . . 21
3.2.8. Funciones de utilidad 23

4. Modelación de la protección del medio ambiente **27**
4.1. Modelación del impacto económico en el medio ambiente. . . . 27
4.2. Modelación del impacto ambiental en la economía. . . . 28
4.2.1. Disminución del valor de la amenidad 28
4.3. Modelo con disminución de utilidad. . . . 29
4.3.1. Optimización del modelo. . . . 29
4.3.2. Análisis del Modelo. . . . 29
4.3.3. Estado estacionario. . . . 30
4.3.4. Modelo con acumulación de contaminación. . . . 30
4.3.5. Análisis Estacionario. . . . 30

5. Modelación de impuestos ambientales. **33**
5.1. Modelo porcentual tributario. . . . 34
5.1.1. Análisis Estacionario. . . . 35
5.2. Modelo con inversión en mitigación. . . . 36
5.2.1. Modelo porcentual tributario con inversión en mitigación. . . . 38

Conclusión **42**

Glosario **47**

Índice de figuras

2.1. Emisiones anuales por país de 1792 a 2020. Fuente: OWID. 4
2.2. Especies de los principales grupos taxonómicos clasificadas en alguna categoría de riesgo en la NOM-059-SEMARNAT-2010. Fuente: SEMARNAT. 6
2.3. Impuestos ambientales en México como porcentaje del PIB. Fuente: OECD(1). 6

3.1. Modelo 1 19

4.1. Nivel de contaminación en relación con el capital máximo. 31

5.1. Metadato del cálculo de impuesto ambientales. Fuente: SEMARNAT. 34
5.2. Modelo 2. 36
5.3. Ecuación no lineal (5.44) que describe el comportamiento del capital estacionario en relación al parámetro Γ, que representa el daño ambiental. 40
5.4. Inversión en mitigación [T] en relación al capital estacionario alcanzado. 40
5.5. Flujo de contaminación en relación al capital estacionario. 41
5.6. Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con pequeña vulnerabilidad ambiental. 41
5.7. Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con una tasa de decaimiento pequeña. 42
5.8. Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con una tasa de contaminación pequeña. 42
5.9. Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$. 44

Capítulo 1

Resumen

Este trabajo es un análisis de un sistema económico con perspectivas ambientales que se compone por cuatro partes principales en las cuales iremos armando un modelo económico-ambiental para analizar las maneras en las que podemos mejorar la perspectiva ambiental mediante el uso de impuestos.

En la introducción se hace un breve repaso de las problemáticas actuales que tienen su raíz en la contaminación ambiental, para luego analizar los factores que vinculan a esta con el sistema económico y la actividad humana; posteriormente se mencionan algunas de las posibles soluciones a este problema dentro del mismo sistema, como pueden ser las medidas de adaptación ambiental y mitigación ambiental, también se hace una revisión de algunas de las razones por las cuales estas medidas no han sido completamente efectivas en nuestra región; para finalizar esta sección se mencionan algunos de los modelos económicos-ambientales más importantes para el estudio científico.

En el marco teórico exploramos los fundamentos de los modelos de la teoría económica neoclásica junto con modelos de crecimiento económico que se basan en el concepto de funciones de producción, concretamente la función de producción Cobb-Douglas. Posteriormente se describen las principales características de los modelos Solow-Swan y Solow-Ramsey mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicando el principio del máximo para la optimización de nuestros modelos y utilizando funciones de utilidad.

El capítulo 3 está enfocado en la modelación analítica de las relaciones entre la economía, y el medio ambiente, utilizando las herramientas vistas en la sección anterior, con un enfoque en la lucha contra la contaminación y el cambio climático.

En el cuarto capítulo nos enfocamos en las medidas de mitigación del daño ambiental que podemos añadir a nuestro modelo económico-ambiental, estos son los impuestos ambientales mencionados en párrafos anteriores. Posteriormente analizamos las distintas formas que podemos integrarlos al modelo de tal manera que sean efectivos contra la lucha con la contaminación y el cambio climático.

Para finalizar se hace un análisis del modelo completo tomando como principal objetivo la disminución del deterioro ambiental, esto nos lleva a la obtención de un parámetro cuantificable para la correcta aplicación de los impuestos ambientales dentro del propio modelo. Finalmente hacemos un análisis de las consecuencias de la aplicación del modelo dentro de nuestro contexto social tomando los parámetros de los modelos económico-ambientales discutidos en la introducción.

Capítulo 2

Introducción

2.1. Planteamiento del problema.

Uno de los problemas más grandes que enfrentamos en la actualidad es el cada vez más acelerado cambio climático. Este es un mecanismo bastante sencillo a simple vista; los gases de efecto invernadero atrapan la energía del Sol y la transfieren a nuestra atmósfera. Esto conduce a inviernos más cálidos y veranos más duros. Los lugares secos se vuelven más secos y los lugares húmedos más húmedos. Esta tendencia del calentamiento global observada desde mediados del siglo xx se le atribuye a la expansión humana del efecto invernadero, que se produce cuando ciertos gases de la atmosfera, como el CO2, atrapan el calor que se irradia desde la tierra hacia el espacio. Esto se explora más a detalle en el informe del Panel Intergubernamental del Cambio Climático, conocido por el acrónimo en inglés IPCC, publicado en 2012: 'Changes in Climate Extremes and their Impacts on the Natural Physical Environment'(35), donde se menciona que un clima cambiante conduce a cambios en la frecuencia, intensidad, extensión espacial, duración y momento de los extremos meteorológicos y climáticos. Estos se suman a cambios más graduales, como el aumento del nivel del mar y un aumento en la temperatura global promedio. Las regiones costeras bajas son las más afectadas, al igual que los lugares que ya experimentan temperaturas muy altas o muy bajas.

Es por esto que en los años recientes se ha visto un mayor interés por analizar los mecanismos que relacionan la actividad humana y el medio ambiente. Concretamente con nuestro sistema de producción. En el reporte: 'The Limits to Growth'(1972, Donella H. Meadows, Dennis L. Meadows, Jorgen Randers, y William W. Behrens III)(26), se exploran estos mecanismos y se hace un análisis crítico de la tendencia humana de apuntar a un crecimiento económico ilimitado por medio de recursos finitos, estos dos conceptos son naturalmente incompatibles, por lo que se ha generado una sobreexplotación de los recursos naturales y una degradación ambiental cada vez más evidente. La sociedad industrial moderna, tal como la construimos en los últimos 150 años, es inherentemente destructiva para el planeta.

Las emisiones globales de gases de efecto invernadero por persona han crecido significativamente en el último siglo y medio, y los países más ricos muestran los mayores aumentos. El siguiente gráfico de la página Our World in Data(OWID)(32), muestra el cambio en las emisiones por país durante los últimos 200 años.

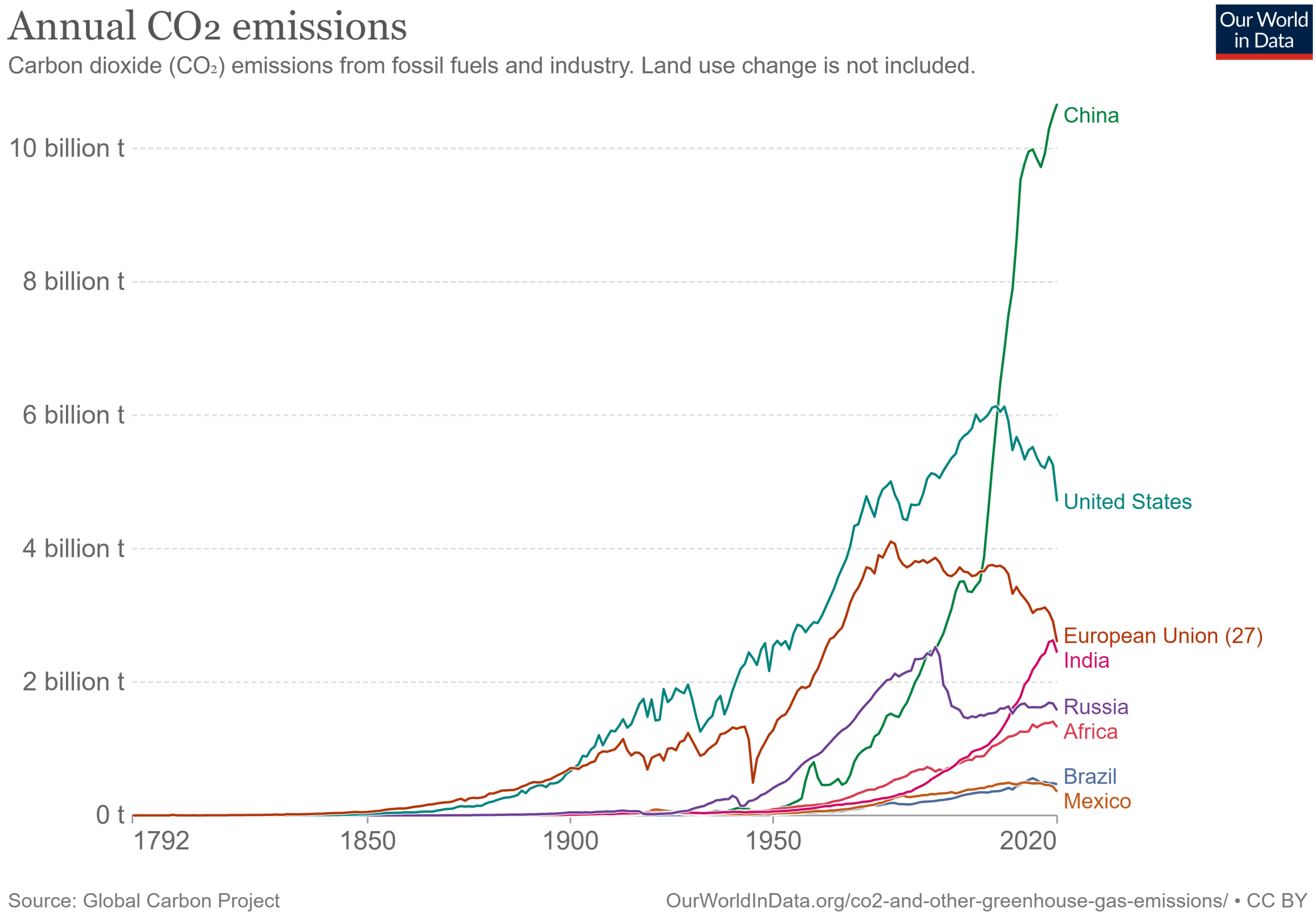

Figura 2.1: Emisiones anuales por país de 1792 a 2020. Fuente: OWID.

Desde los años 70 hasta nuestros días, muchos esfuerzos teóricos y empíricos se han realizado para advertirnos sobre esta concepción errónea de la economía de no tener presente los efectos nocivos al medio ambiente. Partiendo de estudios como los de Dasgupta, P. y Heal, G con su artículo sobre el manejo óptimo de recursos agotables(14), Hotelling, H, con su famosa 'Regla de Hotelling' para la explotación de recursos(18), hasta escritos más modernos, como el libro 'Scarcity and Growth Revisited: Natural Resources and the Environment in the New Millennium' de Simpson, D., Toman, M.A. y Ayres, R.U.(36) donde se hace un esfuerzo por analizar la relación entre nuestro sistema de producción económico y su impacto ambiental, así como en el libro 'Climate economics: The state of the art. Routledge Studies in Ecological Economics' de Ackerman, F., Stanton, E.(6) donde se hace un ensayo sobre los avances en la economía climática que hay hasta nuestros días.

Ahora bien, las consecuencias de ignorar estos trabajos de investigación son claramente apreciables hoy en día, prueba de ello es la gran cantidad de informes ambientales y ecológicos que se reportan por todo el mundo, siendo el más importante de ellos el reporte de evaluación ambiental realizado por el Intergovernmental Panel on Climate Change(IIPC)(25), los trece capítulos del informe proporcionan una evaluación de la evidencia actual sobre la ciencia física del cambio climático, la evaluación del conocimiento obtenido de las observaciones, los reanálisis, los archivos paleoclimáticos y las simulaciones de modelos climáticos, así como los procesos climáticos físicos, químicos y biológicos. El informe propone una perspectiva de cambio para evitar las peores consecuencias del cambio climático en el fututo, estas son enfocadas en su mayoría a reducir la emisión de gases de efecto invernadero dentro de una agenda a cumplir a 2030.

Por otra parte, también hay que considerar la diferencia de capacidades que existe entre los países con un alto PIB y aquellos que no lo tienen. En un estudio publicado en 1996 por parte de la revista 'European Journal of Political Economy' con el título: 'Pollution Abatement and Long-Term Growth'(37) se menciona que adoptar políticas amigables con el ambiente en países en desarrollo, como es el caso de México, puede resultar difícil dado que nuestro crecimiento económico está directamente ligado a la explotación de nuestros recursos naturales. Sin embargo, dado que una de las principales actividades económicas del país tiene base en su capital natural, adoptar dichas medidas ambientales puede impactar positivamente en el desarrollo económico del país. Es por todo esto que es de vital importancia este tipo de trabajos, para poder hacer la transición a una economía más limpia y ecológicamente sustentable. Un enfoque teórico nos puede ser de utilidad a la hora de desarrollar un modelo de crecimiento económico ecológicamente sustentable, tomando en cuenta que no es posible eliminar en su totalidad el impacto ambiental, podemos crear una propuesta de recaudación fiscal derivada del propio modelo para incentivar la protección del ambiente.

Lo que se busca con este trabajo es desarrollar una estrategia fiscal óptima, por medio de un modelo matemático correctamente enfocado.

2.2. Justificación.

El patrimonio biológico de México ha beneficiado históricamente a la población del país, pero su sobreexplotación ha traído como consecuencia el severo deterioro de los servicios ambientales de los cuales depende el ser humano para su bienestar. La sociedad mexicana obtiene bienes esenciales de los sistemas naturales como alimentos, forraje, madera y productos farmacéuticos. Estos bienes representan una parte importante de la economía nacional y de la de autoconsumo de no menos de 20 % de la población del país(34). México, sobre todo en su parte mesoamericana que comparte con Centroamérica, ha sido un centro mundial de cultivo y diversificación de plantas; el potencial de producción de bienes forestales no maderables es considerable. Se estima que México alberga entre 3000 y 6000 especies medicinales, pero la transformación, sobreexplotación y contaminación de los ecosistemas para obtener de ellos satisfactores sociales, así como el cambio climático, son causas directas de la pérdida de nuestro capital natural. En México, como en el resto del mundo, en los últimos dos siglos, la actividad humana se ha convertido en un factor de modificación profunda de la naturaleza y de los procesos ecológicos. La modificación de los ecosistemas por el ser humano para obtener un beneficio social conlleva un costo ambiental que no se toma en cuenta al momento de fijar los costos de producción de nuestro sistema económico, esto se conoce como 'externalidad negativa', en secciones posteriores abordaremos más a fondo este concepto.
Como se mencionó en la sección anterior, el cambio climático tiene una trayectoria de impacto importante en el futuro en todos los biomas del país, si bien es cierto que la transformación de los ecosistemas ha generado importantes beneficios económicos y sociales, ha provocado también la pérdida de biodiversidad y de otros servicios ecosistémicos. En el Programa Especial de Cambio Climático 2021-2024, publicado en noviembre pasado, se prevé una pérdida de un millón 300 mil hectáreas de bosques hasta el final del sexenio; es decir, alrededor de 216 mil hectáreas al año(27). El costo de la reparación de algunos de esos daños ambientales es previsiblemente muy alto; en ocasiones ese daño es irreversible, como en el caso de las especies que sabemos se han extinguido de nuestro territorio. De acuerdo con el informe de la situación del medio ambiente en México, publicado en 2019 por la SEMARNAT(4), para el año 2015 se reportaban 246 especies en peligro crítico, 401 en peligro y 484 en condición de vulnerabilidad. En el caso de las especies extintas, se enlistan 25 y seis especies como extintas en el medio silvestre, las cuales corresponden exclusivamente a fauna. Considerando el grupo taxonómico, en el país hay 382 especies de plantas en riesgo, 211 de anfibios, 179 de peces, 101 de mamíferos, 97 de reptiles, 93 de otros invertebrados, 61 de aves y siete de moluscos en alguna categoría de riesgo. Estos ejemplos reflejan un costo ambiental y de oportunidad considerables y los cálculos que hay de este costo son simplemente estimativos en el mejor de los casos. En términos económicos, se ha calculado que en México los costos monetarios del deterioro ambiental (incluyendo los desastres naturales) representan un promedio anual en el periodo 1996-2003 de aproximadamente 10.36 % del PIB(34). Siendo México un país tan dependiente de nuestro patrimonio natural, es indudable que requerimos metodologías e información más adecuadas para evaluar la efectividad de las políticas ambientales.

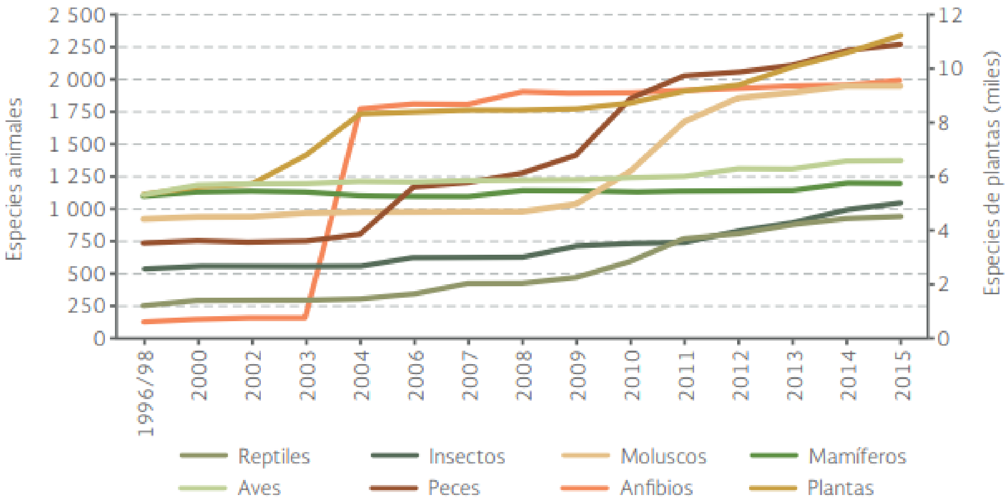

Figura 2.2: Especies de los principales grupos taxonómicos clasificadas en alguna categoría de riesgo en la NOM-059-SEMARNAT-2010. Fuente: SEMARNAT.

El capital natural de México ofrece un gran potencial para el desarrollo y la generación de beneficios para toda la población. A pesar de ello, las políticas históricas sobre la explotación de los recursos naturales no han favorecido la conservación de la biodiversidad ni su uso sustentable.

Una posible herramienta para frenar el deterioro ambiental son los impuestos ambientales, según la SEMARNAT, estos nacen de la intención de incluir en los precios los costos ambientales negativos de la producción o el uso de bienes, que además crean subsidios enfocados a la restauración del ambiente, sin embargo, pese a que los daños ambientales y la pérdida de biodiversidad han ido en aumento, los impuestos ambientales aplicados a la energía, transporte, explotación de recursos, y contaminación del aire y del agua, han fluctuado mucho a lo largo de los años. A continuación, se muestra una gráfica extraída de la página de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OECD por sus siglas en inglés, a la cual México pertenece desde el año 1994, en la que se muestra la evolución de los impuestos ambientales de México en los últimos 20 años(1).

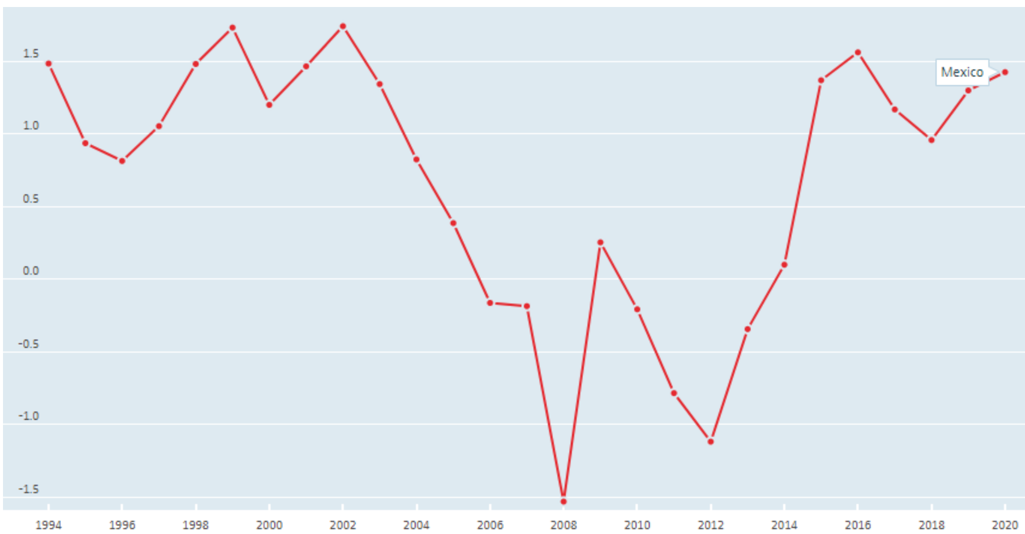

Figura 2.3: Impuestos ambientales en México como porcentaje del PIB. Fuente: OECD(1).

Cabe resaltar que los impuestos ambientales no siguen ninguna pauta aparente con respecto a la pérdida de biodiversidad que se mencionó anteriormente. Esto nos dice que los subsidios ambientales no han cumplido su función que es frenar el deterioro ambiental, más aún, existen casos en los cuales los subsidios han actuado de manera contraproducente al objetivo deseado, por ejemplo; el subsidio a las tarifas de electricidad para el bombeo de aguas de riego propicia la sobreexplotación de los acuíferos. En los últimos 30 años se triplicó el número de acuíferos sobreexplotados(34).

Reconociendo la importancia de los subsidios, éstos deben estar dirigidos a quienes realmente los necesitan de manera directa y sin distorsionar en su aplicación los mercados para no fomentar un incremento en el deterioro ambiental. La falta de criterios ecológicos en los sistemas de producción provoca graves daños a la biodiversidad, al agua, al suelo, a la salud pública. Las prácticas productivas en las actividades agrícolas, ganaderas, forestales y pesqueras que se han fomentado en el último medio siglo han buscado maximizar el beneficio monetario individual sin atender el daño ocasionado al medio ambiente y sin considerar la permanencia de la producción en el tiempo.

El cambio climático debe ser un factor determinante en el diseño de las políticas públicas de un país, la importancia de controlarlo y prevenirlo se puede notar al resaltar las consecuencias más importantes del cambio climático sobre nuestra región(5):

1. Lluvias torrenciales, huracanes y sequías, que llevan a una pérdida de la biodiversidad y del capital natural de México.
2. Vulnerabilidad de la producción agricultora y ganadera.
3. Crisis de seguridad alimentaria acompañada de sus efectos colaterales, tales como: aumento de los costes de los alimentos, malnutrición, entre otros.
4. Bajo o nulo acceso al agua limpia y potable debido al estrés hídrico que afecta a las regiones más secas del país.
5. Enfermedades crónicas y mortales en varios sectores de la población, así como riesgos de asentamientos debido a inundaciones o deslaves.
6. Desigualdad económica que tiene como consecuencia el aumento de las zonas marginadas o pobres.
7. Migración masiva de personas a nivel nacional e internacional.

De acuerdo con la OCDE(1), los gobiernos cuentan con una variedad de instrumentos económicos que pueden ser utilizados a fin de cumplir una meta predefinida con el menor costo social. Los impuestos ambientales son uno de estos instrumentos económicos que nacen de la intención de incluir en los precios los costos ambientales negativos de la producción o el uso de bienes. Permiten, por un lado, incidir en el comportamiento de los consumidores y productores desincentivando el consumo de productos o actividades que deterioran el ambiente, lo cual se ve reflejado en la utilidad del producto, que es un concepto que abordaremos más adelante.

Para que las políticas fiscales sean progresivas, las leyes sobre impuestos tienen que ser equitativas y justas. Se deben aplicar métodos eficientes para garantizar que los impuestos que las industrias deben al gobierno se paguen a como se debe. La economía de México es vulnerable al cambio ambiental, esto porque gran parte de nuestra industria se basa en la explotación de nuestros recursos naturales, con la perdida de la biodiversidad, perdemos también una gran parte de nuestro patrimonio nacional como se vio en el ejemplo anterior; pese a esto, se siguen adoptando políticas ambientales pobres que no han sido capaces de solucionar el problema al que nos dirigimos si no cambiamos la relación que existe entre nuestro desarrollo económico y el medio ambiente. Por ello aplicar un modelo de impuestos ambientales bien ejecutado puede ser fundamental para nuestros objetivos de desarrollo y sustentabilidad.

2.3. Objetivos.

Hay dos posibles soluciones que se le pueden dar al problema del cambio climático para nuestra sociedad: adaptación y mitigación. El Cuarto Informe de Evaluación del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático, IPCC por sus siglas en inglés(38), define la adaptación al cambio climático como 'un ajuste en los sistemas naturales o humanos en respuesta a los estímulos climáticos reales o previstos o a sus efectos, que modera el daño o aprovecha las oportunidades beneficiosas'. Por el contrario, la mitigación se define como 'una intervención antropogénica para reducir las fuentes o mejorar los sumideros de carbono'. El enfoque de este trabajo es una medida de mitigación: los impuestos ambientales.

Los impuestos ambientales tienen como fin reducir los contaminantes de las principales fuentes económicas por debajo de un valor predefinido que el gobierno fija para alcanzar en un periodo determinado. Sin embargo, cualquier reforma fiscal que se lleve a cabo en materia ambiental, debe estar diseñada de manera óptima, a fin de no generar distorsiones que pongan en riesgo el equilibrio macroeconómico. Por esta razón es que se debe partir de la condición de que este tipo de instrumentos deben ser utilizados para regular el comportamiento de todos los agentes que interactúan en la economía (empresas, individuos y gobierno) y así poder regular las fuentes de contaminación. Toda estructura tributaria debe estar sustentada por los aspectos de la economía positiva y normativa, es decir, hacer una descripción de los fenómenos económicos, evaluar las fuerzas motrices que afectan a la economía para luego definir criterios que guíen las decisiones económicas necesarias para alcanzar nuestros objetivos a corto y largo plazo. Ya que de esta forma se podrá garantizar la eficiencia fiscal sobre la estructura de los impuestos ambientales.

El objetivo final de esta tesis es desarrollar parámetros cuantificables para un modelo de crecimiento económico con una estructura tributaria enfocada en los impuestos verdes, y analizar tanto su impacto económico como ambiental.

2.4. Antecedentes.

La relación que existe entre nuestro sistema económico y el medio ambiente es un tema que ha sido ampliamente discutido, desde los inicios de la ciencia económica se han estudiado las diversas maneras en las que se pueden aprovechar de manera óptima los recursos disponibles(31). Por otro lado, desde las últimas dos décadas se han hecho varios trabajos de investigación que buscan enfrentar la problemática del cambio climático buscando la raíz del problema en nuestro sistema de producción económico.
A continuación se enlistan algunos de los modelos más usados en cuestión de economía ambiental:

- **Modelos deterministas del clima y la economía(DICE, RICE, WITCH).** El modelo DICE(Dynamic Integrated Model of Climate and the Economy)(29) es una versión ampliada de un modelo tradicional de crecimiento óptimo con un sector climático, en el que un único productor-consumidor mundial elige niveles óptimos de consumo corriente, inversión en capital productivo e inversión en la reducción de las emisiones contaminantes. El modelo DICE fue desarrollado por W. Nordhaus en 1994 y actualizado en 2007.
  El modelo RICE(Regional Integrated Model of Climate and the Economy)(28) desarrollado por Nordhaus y Yang es una versión regional del modelo DICE, prestando más atención al sector en donde se desarrolla la economía.
  El modelo WITCH(World Induced Technical Change Hybrid model)(9) está diseñado para ayudar en el estudio de las dimensiones socioeconómicas del cambio climático y para ayudar a los responsables políticos a comprender las consecuencias económicas de las políticas climáticas. Modifica características clave del modelo RICE con el fin de evaluar más detalladamente las respuestas óptimas de las economías regionales al cambio climático.

- **Modelos deterministas de economía energética(Global 2100, CETA, MERGE, ECLIPSE).** Global 2100 de Manne y Richels(1991)(24) es un modelo de economía energética que combina un modelo macroeconómico de la actividad económica global con un modelo energético-tecnológico. Considera cinco regiones del mundo con un único representante consumidor-productor en cada una de ellas.
  El modelo CETA(Climate Emissions Trajectory Assessment)(30), propuesto por Peck y Teisberg en 1992 es una versión agregada del modelo Global 2100. El CETA considera una región agregada, el mundo en su conjunto, e incluye los ciclos del carbono y el impacto del cambio climático.
  El modelo MERGE(Model for Evaluating Regional and Global Effects)(23) es una versión revisada del Global 2100, que se simula hasta el 2200. Se trata de un modelo de equilibrio general con cinco regiones del mundo, en las que los consumidores regionales toman decisiones de ahorro y consumo.
  El modelo ECLIPSE(Energy and Climate Policy and Scenario Evaluation)(44) tiene muchas características comunes con MERGE, pero incluye más detalles sobre la energía y la economía de once regiones del mundo. Fue diseñado para simular el impacto de los cambios en los precios de la energía.

- **Modelos integrados basados en escenarios(IMAGE, TARGETS).** El modelo IMAGE(Integrated Model to Assess the Greenhouse Effect)(7) enlaza seis módulos autónomos: modelo energético/económico mundial, modelo de química atmosférica, modelo de ciclos del carbono, modelo climático, modelo de aumento del nivel del mar y un modelo socioeconómico de los Países Bajos en 1990. El modelo está desarrollado para evaluar las estrategias a largo plazo para controlar los cambios climáticos globales.

El modelo TARGETS(Tool to Assess Regional and Global Environmental and Health Targets for Sustainability)(33) pretende analizar los cambios globales y el desarrollo sostenible desde una perspectiva sinóptica. Fue construido por Rotmans y de Vries en 1997. El modelo TARGETS consta de cinco módulos horizontales de modelización interconectados: modelo de población/salud, modelo de recursos/economía, modelo de biofísica, modelo de tierra/suelo y modelo de agua.

- **Modelos probabilísticos integrados (PAGE, ICAM).** El modelo PAGE(Policy Analysis of the Greenhouse Effect)(17) fue desarrollado por C. Hope con el apoyo de la Unión Europea en 1993. Se trata de un modelo probabilístico con énfasis en el análisis de decisiones. El modelo genera estimaciones de la concentración de la contaminación, la temperatura media global, la reducción y el coste de los daños para cuatro regiones del mundo.
  El modelo ICAM(Integrated Climate Assessment Model)(15) se desarrolló en la Carnegie Mellon University en la década de 1990. Investigadores de diversas disciplinas se centran en tres áreas principales de investigación en las que se destaca el papel de la incertidumbre: la modelización de la evaluación integrada, la toma de decisiones públicas y privadas, y la comunicación y elaboración de políticas nacionales e internacionales.

Estos modelos son usados generalmente como apoyo para la predicción a largo plazo de las consecuencias climáticas que más pueden perjudicar a nuestra sociedad, además son útiles como indicadores a la hora de invertir en nuevas tecnologías y políticas enfocadas a la adaptación ambiental.

Por otra parte, los impuestos ambientales también llevan tras de sí una larga trayectoria, en la economía ambiental se afirma que para corregir de forma óptima una externalidad de contaminación, se debe introducir una regulación que iguale el beneficio neto de emitir un contaminante al coste social neto. Si el planificador opta por imponer un precio al contaminante, en lugar de regular directamente las emisiones mediante un enfoque de mando y control, el impuesto óptimo es igual al coste social evaluado en el nivel de 'contaminación eficiente'(19). La recaudación tributaria ha demostrado ser un factor disuasorio para reducir la emisión de contaminantes mediante la mejora de rendimiento y eficiencia tecnológica. En Europa, la demanda de combustible habría sido el doble si no se hubiera seguido la política de altos impuestos sobre los combustibles(40).

En la Unión Europea, se comprobó que las industrias que reducen la contaminación aumentan su productividad de recursos y se fomenta en gran medida el cambio a fuentes renovables(16).

En Turquía, los beneficios económicos en las mejoras medioambientales mediante los impuestos tienen gran potencial tomando en cuenta que los combustibles importados son la principal fuente contaminación(20). El campo de trabajo en los impuestos verdes se ha vuelto voluminoso, es uno de los determinantes esenciales del desarrollo ecológico y económicamente viable para cualquier país. Sin embargo, la política fiscal medioambiental en la mayoría de los países en vías de desarrollo está todavía en una fase temprana y está en proceso de adquirir forma. El problema más grande al que nos enfrentamos es la cuantificación de rendición de cuentas de todos los vehículos contaminantes, incluidas las cuestiones relacionadas con la aplicación de impuestos. En estas circunstancias, los impuestos medioambientales serán una herramienta decisiva para satisfacer las demandas globales y locales de conservación del medio ambiente. Se prevé que los impuestos tendrán un efecto disuasorio inflexible sobre todas las medidas de control de la contaminación existentes y será motivadora para conservar el medio ambiente y otros recursos naturales, ya que este ha sido el resultado al aplicar medidas similares en otras regiones:

La Comisión Europea (CE) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) definieron un impuesto medioambiental como 'un impuesto cuya base es una unidad física de algo que tiene un impacto negativo específico en el medio ambiente'(16).

Muchos ecologistas y economistas sostienen que los impuestos sobre la contaminación son un instrumento eficaz para los objetivos medioambientales(8). Tanto los modelos de simulación como las experiencias prácticas indican que los impuestos verdes podrían ser eficaces para reducir los posibles impactos ambientales en el futuro(43).

Capítulo 3

Marco Teórico

Antes de comenzar, aclaremos que este es un trabajo enfocado a modelación matemática económica; la economía matemática no es una rama en si de la economía, más bien es una aproximación a un análisis económico, en el cual se hace uso de herramientas matemáticas como el algebra matricial, calculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, etc. Estos métodos están enfocados en describir fenómenos económicos.

Las principales diferencias entre economía matemática y economía tradicional son, en primer lugar, que las hipótesis, conclusiones y análisis están descritas en un leguaje matemático más que en frases o enunciados. En segundo lugar, contamos con una gran cantidad de herramientas matemáticas a nuestra disposición, que nos fuerzan a definir de manera clara las variables y argumentos que vamos a utilizar, además claro de que hace nuestro análisis más profundo.

Ahora bien, también es importante mencionar que la construcción de un modelo o teoría es algo complejo, y que para hacerlo de manera correcta tiene que estar cimentada sobre argumentos sólidos, verificables y lo más importante de todo, cuantificables.

Para hacer el análisis deseado, es necesario que construyamos primero un modelo de crecimiento económico que se adapte a las características que deseamos, para ello iremos desglosando poco a poco la teoría necesaria para construir el modelo, empezando por las funciones de producción.

3.1. Dinamica Económica

3.1.1. Funciones de producción.

Un sistema económico tiene su base en la compra-venta de bienes y servicios, y los agentes económicos que forman parte del sistema transforman los insumos(o factores) de producción en estos bienes y servicios, lo que veremos a continuación es el modelo de este proceso de transformación a partir de las funciones de producción.

Una función de producción que tiene la forma:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Esta representa la relación entre la producción del producto agregado y y los insumos productivos $x_1, ..., x_n$ que pueden incluir capital, capital humano, materias primas, recursos naturales (tierra, agua, minerales) entre otros factores. La salida y y las entradas x_i son indistinguibles en un sentido productivo, es decir que se miden todos bajo una misma escala de valor productivo.
La salida y de la función es el valor del producto neto luego del proceso de transformación, donde ya se toma en cuenta el valor de los insumos, además del valor agregado por la producción. Esta función nos sirve para analizar cada parte de la actividad empresarial, industrial, o cualquier actividad productiva (entiéndase, por actividad productiva aquella que combina los factores de la producción con el objetivo de obtener un resultado materializado en un bien, o en la prestación de un servicio).

Por ahora solo definiremos a la función $r(t) = f'(t)/f(t)$ como la tasa relativa de la función $f(t)$, y se denomina tasa de crecimiento de $f(t)$; esta tasa es calculada de manera empírica, se necesitan los datos del agente productivo que estemos estudiando para estimar su valor. Podemos ver que si r es constante, entonces $f(t) = Cexp(rt)$ con C siendo una constante.

Propiedades de las funciones de producción.

Una función de producción f debe satisfacer las siguientes propiedades para poder considerarla como tal(12).

1. Una de las propiedades más importantes es la **esencialidad de los insumos**, esto es: si al menos un $x_i = 0$, entonces $y = 0$, lo que nos dice que la producción no es posible sin alguno de los factores de producción.

2. Necesidad de **rendimientos positivos**, es decir: $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$, $i = 1, ..., n$, si un insumo aumenta su valor, el valor de la salida o producto debe aumentar también.

3. Veamos la matriz Hessiana de la función f:

$$H = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial {x_1}^2 & \dots & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 f/\partial x_n \partial x_1 & \dots & \partial^2 f/\partial {x_n}^2 \end{bmatrix}.$$

   Si esta es negativamente definida, quiere decir que hay **rendimientos decrecientes**, esto es, si un único factor de producción x_i aumenta y las demás entradas x_j, $j \neq i$, permanecen constantes, entonces la productividad de usar la entrada x_i disminuye.

4. Sea $f(x)$ una función homogénea de grado $\gamma > 0$, debe haber **rendimientos proporcionales a escala**, esto es:
$$f(l\mathbf{x}) = l^\gamma f(\mathbf{x}), \quad l \in R^1, \quad l > 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)\,.$$
   La función de producción $f(x)$ tiene rendimientos crecientes a escala con $\gamma > 1$, rendimientos decrecientes a escala con $\gamma < 1$, y rendimientos constantes a escala con $\gamma = 1$.
   Los rendimientos crecientes significan que un aumento del 1 % en los niveles de todos los insumos nos da un mayor que el aumento del 1 % de la salida y.
   En el caso de rendimientos constantes a escala, la función $f(x)$ es linealmente homogénea: $f(lx) = lf(x)$, y la salida aumenta linealmente con respecto a un aumento proporcional de todas las entradas: un 1 % de aumento en todos los insumos produce exactamente el 1 % incremento en la salida. En este caso, la condición 3 se reduce a:

$$\partial^2 f/\partial x_i^2 < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Características de las funciones de producción

A la hora de hacer un análisis preliminar de un modelo de producción, es de mucha utilidad fijarse en las características de su función de producción.
Las principales características para analizar de una función de producción son:

- La producción promedio $f(x_1, ..., x_n)/x_i$ de la i-ésima entrada es el producto por unidad de insumo x_i utilizado, i = 1,...,n.

- El producto marginal $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ del i-ésimo insumo describe la producción adicional obtenida debido al aumento del insumo en una unidad.

- La isocuanta es el conjunto de todas las combinaciones posibles de entradas $x = (x_1, ..., x_n)$ que producen el mismo nivel de producción $y = f(x)$. A lo largo de una isocuanta, el diferencial de la función $f(x)$ es cero: $\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_i = 0$.

- La relación marginal de sustitución entre los insumos i y j

$$h_{ij} = (\partial f/\partial x_i) \,/\, (\partial f/\partial x_j)\,.$$

  nos dice cuántas unidades de la j-ésima entrada se requieren para sustituir una unidad de la i-ésima entrada con el objetivo de producir el mismo nivel de la salida y.

- La elasticidad parcial de la producción con respecto a la entrada i:

$$\varepsilon_i(\mathbf{x}) = (\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i) \,/\, (f(\mathbf{x})/x_i) = \partial \ln f(\mathbf{x})/\partial \ln x_i.$$

  describe la relación entre el producto marginal y el producto medio del i-ésimo insumo. Esto nos dice el aumento de la salida y, cuando la i-ésima entrada aumenta en un 1 %.

- La elasticidad total de la producción $\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(x)$ nos dice cuánto es el aumento de la producción bajo un aumento proporcional de todos los insumos.

- La elasticidad de sustitución es una medida que nos cuantifica las posibles combinaciones de entradas para producir una misma salida:

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{d}\,(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} \times \frac{h_{ij}}{\mathrm{d}h_{ij}} = \frac{\mathrm{d}\ln(x_i/x_j)}{\mathrm{d}\ln h_{ij}}.$$

  Esta característica nos muestra la tasa de cambio x_i/x_j a lo largo de una isocuanta al cambiar su tasa marginal de sustitución en uno por ciento. Cuanto mayor sea la σ_{ij}, mayor será la sustituibilidad entre los dos insumos. Los insumos i y j son sustitutos perfectos en $\sigma_{ij} = \infty$ y no son sustituibles en absoluto en $\sigma_{ij} = 0$.

3.1.2. La función de producción Cobb-Douglas

Una de las formas más usadas para los modelos de producción es la función de producción estilo Cobb-Douglas.
Esta ecuación es una herramienta a la vez simple de entender y muy útil en lo referente a modelos aplicados a la macroeconomía.
Esta función de producción nació para dar respuesta a la pregunta: ¿qué función de producción concreta describe la manera en que las economías reales transforman el capital y el trabajo como únicos insumos en producción? La respuesta fue fruto de la colaboración entre el senador estadounidense Paul Douglas y el matemático Charles Cobb. Paul Douglas fue senador de Estados Unidos por Illinois desde 1949 hasta 1966. En 1927, cuando aún era profesor de economía, observó que la distribución de la renta nacional entre el capital y el trabajo se había mantenido más o menos constante durante un largo período. En otras palabras, a medida que la economía se había vuelto más próspera con el paso del tiempo, el precio de renta de los trabajadores (o sus ingresos P_L) y el precio de renta de los propietarios del capital (o sus utilidades P_K), había crecido casi exactamente a la misma tasa. Este fue el desencadenante que lo llevo a preguntarse en qué condiciones las participaciones de los factores se mantenían constantes.
Fue así como Douglas acudió a Cobb para saber si existía una función de producción que produjera participaciones constantes de los factores, si éstos siempre ganaban su producto marginal. Dicha función de producción Y necesitaría tener la siguiente propiedad:

$$P_K K = \alpha Y$$

$$P_L L = (1-\alpha)Y.$$

Siendo α una constante comprendida entre cero y uno que mide la participación del capital en la renta. Es decir, α determina la proporción de la renta que obtiene el factor capital K y la que obtiene el trabajo L. Con K y L mayores a cero. La función que cumple con esta propiedad es:

$$Y = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{3.1}$$

donde A es un parámetro mayor que cero que mide la productividad de la tecnología existente.
En su forma más general, esta función se escribe como:

$$Y = A{x_1}^{\alpha_1} \times \ldots \times {x_n}^{\alpha_n} \tag{3.2}$$

Siendo $x_1, ..., x_n$ los insumos productivos y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sus proporciones de renta.
A continuación se mencionan algunas de sus características más importantes:

- El producto marginal del i-ésimo insumo esta dado por: $\partial f/\partial x_i = \alpha_i\,(y/x_i)$.
- La relación marginal de los insumos i y j es: $h_{ij} = \alpha_j x_i/\alpha_i x_j$, con i, j desde 1 hasta n.
- La elasticidad parcial de la producción con respecto a la entrada i se puede expresar como: $\varepsilon_i = \alpha_i$.
- La elasticidad total de la producción queda entonces como: $\varepsilon = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.
- La elasticidad de sustitución es: $\sigma_{ij} = 1$.

Vemos que la elasticidad de sustitución para cualquier par (i, j) de insumos es igual a uno.

Los rendimientos a escala son crecientes en el caso $\alpha_1 + ... + \alpha_n > 1$, decrecientes en el caso $\alpha_1 + ... + \alpha_n < 1$, y constantes en $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.

Tomando el logaritmo de ambos lados de (3.2), obtenemos una expresión lineal:

$$\ln Y = \ln A + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i.$$

que después de la diferenciación se convierte en:

$$y'/y = \alpha_1 \left(x_1'/x_1\right) + \ldots + \alpha_n \left(x_n'/x_n\right).$$

Lo que nos dice que la tasa de crecimiento de la producción en la función de producción Cobb-Douglas es igual a la suma de todas las tasas de crecimiento de los insumos.

3.1.3. Funciones de producción de dos factores.

Comúnmente las funciones de producción tienen dos insumos, llamadas funciones de producción de dos factores, estas suelen escribirse como:

$$Q = F(K, L) \tag{3.3}$$

donde:

Q es la producción,

K es la cantidad de capital usado,

L es la cantidad de trabajo usado.

El capital K refleja el coste total de los equipos, máquinas, edificios, etc., utilizados en el proceso de producción. Estas funciones de producción se caracterizan por los valores únicos de la tasa marginal de sustitución h y la elasticidad de sustitución σ entre el capital y el trabajo.
La función de producción Cobb-Douglas fue pensada originalmente como una función de dos factores que relacionaba el capital y el trabajo, sin embargo, estas entradas pueden cambiar para adaptarse a la naturaleza del modelo.

El comportamiento de una función de producción de dos factores se puede analizar utilizando las isocuantas que se mencionaron, veamos pues una definición más concreta de estas.

Una isocuanta son todas las combinaciones de dos factores que producen el mismo nivel de producción.

Una función de producción de dos factores se llama función de producción neoclásica si satisface las siguientes propiedades:

1. Esencialidad de entradas:
$$F(K, 0) = F(0, L) = 0.$$

2. Rendimientos positivos y decrecientes:
$$\partial F/\partial K > 0, \quad \partial F/\partial L > 0, \quad \partial^2 F/\partial K^2 < 0, \quad \partial^2 F/\partial L^2 < 0.$$

3. Rendimientos constantes a escala: $F(K, L)$ es una función linealmente homogénea,
$$F(lK, lL) = lF(K, L), \quad para \;\; l > 0.$$

4. Las condiciones de Inada: los productos marginales del capital y del trabajo satisfacen:
$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{K\to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L\to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0.$$

En macroeconomía, las condiciones de Inada, llamadas así por el economista japonés Ken-Ichi Inada, garantizan la estabilidad de una trayectoria de crecimiento económico en un modelo de crecimiento neoclásico.
Las condiciones de Inada significan que la producción aumenta muy rápidamente si el insumo de producción (capital o trabajo) es bajo y aumenta lentamente, mientras que el aumento de la producción es

muy lento si el insumo de producción ya es abundante y se añade más. La propiedad 1 se mantiene si se cumplen las otras tres propiedades.

Variables per cápita: Per cápita es un término utilizado en el análisis económico y estadístico que significa *por persona*. Per cápita se usa cuando se compara una cierta métrica económica con una población; en el caso que nos ocupa, comparamos nuestras variables económicas con la fuerza laboral o capital humano. Para obtener las variables per cápita, en la condición 3, la función de producción (3.3) se puede reescribir como $Q = LF(K/L, 1)$ o en la llamada forma per cápita como:

$$q = f(k), \quad f(k) = F(k, 1). \tag{3.4}$$

donde:

$q = Q/L$ es la producción por trabajador, o la productividad.

$k = K/L$ es el capital por trabajador o la relación capital-trabajo.

Entonces, los productos marginales del capital y del trabajo quedan como:

$$\partial F/\partial K = f'(k), \quad \partial F/\partial L = f(k) - kf'(k)$$

y la tasa marginal de sustitución entre el trabajo y el capital es:

$$h = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)}$$

por último, las propiedades 1-4 de la función de producción neoclásica se convierten en

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

3.1.4. Función de producción Cobb-Douglas con dos factores.

La forma clásica de la función de producción Cobb-Douglas se escribe de la forma:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{3.5}$$

donde la productividad total de los factores A refleja el nivel de tecnología. En el caso general cuando $\alpha + \beta \neq 1$, la producción Cobb-Douglas no es neoclásica porque no satisface la propiedad 3 de los rendimientos constantes. La producción Cobb-Douglas con $\alpha + \beta = 1$ es neoclásica y puede presentarse en las formas estándar o per cápita:

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \text{ o } q = Ak^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Entonces, los productos marginales del capital y del trabajo de (3.5) son:

$$\partial Q/\partial K = \alpha Ak^{\alpha-1}, \quad \partial Q/\partial L = (1-\alpha)Ak^{\alpha}.$$

La tasa marginal de sustitución: $h = k(1-\alpha)/\alpha$.

La elasticidad de la producción del capital: $\epsilon_K = \alpha$.

La elasticidad de la producción total: $\epsilon = 1$.

La elasticidad de sustitución: $\sigma = 1$.

Como se mencionó anteriormente, la función de producción Cobb-Douglas fue creada específicamente como una función de dos factores para estudiar la relación que existe entre el capital y el trabajo, sin embargo estos resultados pueden extrapolarse a funciones con más variables.

3.2. Principio del Máximo.

Para analizar adecuadamente un modelo de crecimiento económico, no basta con solo plantear su función de producción, y encontrar las ecuaciones de la dinámica económica de sus insumos. A la hora de tomar decisiones es necesario que entremos en el terreno de la optimización del modelo, para así encontrar las trayectorias que maximicen los factores que nos interesan. Para ello haremos un repaso por la teoría de la optimización con el principio del máximo.

El principio del máximo es la más popular de las condiciones extremas para el control óptimo de ecuaciones diferenciales e integrales. A continuación, presentamos el principio de máximo estándar para el control óptimo de una ecuación diferencial ordinaria no lineal escalar, que se utiliza para analizar modelos de optimización dinámicos.

Consideremos el siguiente problema de optimización:
Encontrar la función de control $u(t) \in R^1$ y la correspondiente $x(t) \in R^1$, con $t \in [0, T)$, que maximicen

$$\max_{u,x} \int_0^T f(x(t), u(t), t)\mathrm{d}t \tag{3.6}$$

sujeta a la ecuación de estado:

$$x'(t) = g(x(t), u(t), t), \tag{3.7}$$

con las siguientes restricciones:

$$u_{\text{mín}}(t) \leq u(t) \leq u_{\text{máx}}(t),$$

y las condiciones iniciales y finales:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) \geq x_T.$$

Las funciones $f(x, u, t)$ y $g(x, u, t)$ son diferenciables en x y u y continuas en t. Denominamos al intervalo cerrado $U(t) = [u_{min}(t), u_{max}(t)] \subset R^1$ nuestra región de control del problema.

Definición: El Hamiltoniano del problema de control óptimo es la función

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) \tag{3.8}$$

donde:
λ es la variable dual(o variable adjunta).
La variable dual refleja el cambio en la función objetivo debido a los cambios en las restricciones.
La ecuación de estado (3.7) se puede reescribir como:

$$x'(t) = \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda, t)}{\partial \lambda}. \tag{3.9}$$

Principio del máximo de Pontryagin: Si la función $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, es una solución del problema de optimización (3.6), entonces:

(a) La variable dual $\lambda(t)$, $t \in [0, T]$, existe y satisface la ecuación dual:

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial x} \tag{3.10}$$

con las condiciones de transversalidad del extremo derecho $t = T$:

$$\lambda(T) \geq 0, [x(T) - x_T]\, \lambda(T) = 0. \tag{3.11}$$

(b) La variable de estado correspondiente $x(t)$, $t \in [0, T]$, se encuentra a partir de (3.7) para la $u^*(t)$ dada.

(c) Para cada $t \in [0, T]$, $u^*(t)$ maximiza $H(x, u, \lambda, t)$:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \max_{v \in U(t)} H(x(t), v(t), \lambda(t), t). \tag{3.12}$$

Condición necesaria y suficiente para un extremo: Si $H(x, u, \lambda, t)$ es una función cóncava en u y x para cada $t \in [0, T]$, entonces las condiciones (3.10)-(3.12) son también suficientes para que la función u sea una solución del problema de optimización (3.6). Las condiciones de extremo de la forma (3.10)-(3.12) se conocen como el principio del máximo porque reducen un problema de optimización a la maximización de la función H de una o varias variables.

3.2.1. Controles escalares.

El principio del máximo es útil cuando la variable de control es una función vectorial. En nuestro problema (3.6) con el control escalar u, la condición del máximo (3.10)-(3.12) puede resolverse fácilmente y conduce a la siguiente estructura del control óptimo:

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{mín}}(t) & \text{si } \frac{\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)}{\partial u} < 0 \\ u_{\text{mín}}(t) < \widetilde{u}(t) < u_{\text{máx}}(t) & \text{si } \frac{\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)}{\partial u} = 0 \\ u_{\text{máx}}(t) & \text{si } \frac{\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)}{\partial u} > 0 \end{cases}. \tag{3.13}$$

3.2.2. Optimización de descuentos.

Las ecuaciones de la forma (3.6) son comunes en diversos problemas de optimización tanto económicos como ambientales, donde la ecuación de estado (3.7) es autónoma, es decir, la región de control $[u_{min}, u_{max}]$ no depende de t, y el tiempo t aparece sólo en la función f de (3.6) como el factor e^{-rt}:

$$g(x,u,t) = \hat{g}(x,u), \quad f(x,u,t) = \mathrm{e}^{-rt}\hat{f}(x,u). \tag{3.14}$$

Entonces, el principio del máximo se puede simplificar introduciendo la variable dual de valor actual $\hat{\lambda}(t) = \lambda(t)e^{rt}$ y el Hamiltoniano del problema 3.6:

$$\hat{H}(x,u,\hat{\lambda}) = \hat{f}(x,u,t) + \hat{\lambda}g(x,u). \tag{3.15}$$

Entonces, la variable dual λ en (3.6) se llama variable dual de valor presente.

Principio del máximo para valor actual: Si el problema de control óptimo (3.6) es de la forma 3.15 y u es solución, entonces:

(a) La variable dual $\hat{\lambda}$, $t \in [0,T]$ satisface la ecuación dual:

$$\hat{\lambda}' - r\hat{\lambda} = -\frac{\partial \hat{H}(x,u,\hat{\lambda})}{\partial x}. \tag{3.16}$$

Con la condición de transversalidad en el extremo derecho $t = T$

$$\hat{\lambda}(T) \geq 0, \quad [x(T) - x_T]\,\mathrm{e}^{-rT}\hat{\lambda}(T) = 0. \tag{3.17}$$

(b) La correspondiente $x(t)$, $t \in [0,T]$, se encuentra a partir de (3.7).

(c) Para cada $t \in [0,T]$, $u(t)$ maximiza $\hat{H}(x,u,\hat{\lambda})$:

$$\hat{H}(x(t),u(t),\hat{\lambda}(t)) = \max_{v \in U} \hat{H}(x(t),v(t),\hat{\lambda}(t)). \tag{3.18}$$

En contraste con (3.10), la ecuación diferencial dual (3.16) es autónoma y mucho más fácil de resolver. El problema de maximización (3.18) es el mismo para todos los t.

3.2.3. Controles interiores.

En el caso de los controles interiores, el principio del máximo conduce a la siguiente condición de optimización más sencilla para los controles interiores.
Si a priori $u_{min}(t) < u(t) < u_{max}(t)$ para $t \in [0,T]$, entonces la $u(t)$ óptima satisface:

$$\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)/\partial u = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.19}$$

En el caso del problema (3.6), la condición (3.19) es:

$$\partial \hat{H}(x(t),u(t),\lambda(t))/\partial u = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.20}$$

3.2.4. Condiciones de transversalidad.

Para los problemas de control óptimo, una condición de transversalidad es una condición de frontera para los valores terminales de las variables económicas que se estén estudiando. Forman parte de las condiciones necesarias para los problemas de control óptimo de horizonte infinito, que se verán más adelante.

Las condiciones de transversalidad representan una parte necesaria de las condiciones de optimización. Su importancia depende de las características específicas del problema que se estudia.

Problemas con un extremo derecho fijo: Tomando $x(0) = x_0, \quad x(T) \geq x_T$, con $x(T) = x_T$ entonces el principio del máximo no impone la condición de transversalidad (3.11) sobre $\lambda(T)$.

Problemas con extremo derecho libre: Si el problema de optimización (3.6) no tiene una condición terminal en $x(T)$ ('el extremo derecho de x es libre'), entonces la condición de transversalidad (3.11) se convierte en:

$$\lambda(T) = 0. \tag{3.21}$$

Problemas sin extremo fijo: Si el punto límite derecho T en el problema de optimización (3.6) no está especificado, entonces la condición de transversalidad correspondiente es:

$$H(x(T), u(T), \lambda(T), T) = 0. \tag{3.22}$$

Horizonte de planificación infinito $[0, \infty)$**:** Si $T = \infty$ en el problema (3.6), entonces la condición de transversalidad correspondiente se convierte en:

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) \geq 0, \lim_{T\to\infty} [x(T) - x_T]\, \lambda(T) = 0. \tag{3.23}$$

3.2.5. Modelo económico Solow-Swan.

El modelo de crecimiento de Solow o modelo de Solow-Swan, también conocido como el modelo exógeno de crecimiento o modelo de crecimiento neoclásico(39) considera una economía descrita por las siguientes características dinámicas en el tiempo continuo t:

Q(t)=La producción al tiempo t.
C(t)=La cantidad de consumo(o ganancia) total.
I(t)=La cantidad de inversión bruta.
L(t)=La cantidad de fuerza laboral.
K(t)=La cantidad de capital.

El modelo de Solow-Swan establece que el crecimiento económico no es sólo función del trabajo y el capital, sino que también puede depender de otros insumos, como la materia prima que se transformará a través del proceso productivo para obtener el bien final, que podrá ser consumido o invertido.
La producción Q está determinada por una función de producción neoclásica del tipo Cobb-Douglas $F(K, L)$:

$$Q(t) = F(K(t), L(t)). \tag{3.24}$$

Luego, la producción total $Q(t)$ la distribuimos entre las variables $C(t)$, $I(t)$, siendo estas el CONSUMO y la INVERSIÓN; el consumo es la parte de la producción generada que no se reinvierte en el capital de producción.

$$Q(t) = C(t) + I(t). \tag{3.25}$$

También, a partir de la variable de inversión $I(t)$ construimos nuestra ecuación de cambio de capital $K(t)$.

$$K'(t) = I(t) - \mu K(t), \quad \mu = \text{const} > 0. \tag{3.26}$$

El capital $K(t)$ se deprecia a una tasa constante $\mu > 0$ (una fracción constante del capital sale de un proceso de producción en cada momento).

Solo resta obtener una ecuación para la variable $L(t)$.

$$L'(t) = \eta L(t), \quad \eta = \text{const} \geq 0. \tag{3.27}$$

El trabajo $L(t) = L_0 exp(\eta t)$ crece a una tasa exógena constante η.
Esta ecuación depende del tipo de modelo en el que estemos trabajando, que a su vez depende de la

naturaleza del agente económico que sea la base del modelo, ya sea que hablemos de una empresa, un país o región.

La estructura del modelo Solow-Swan se muestra en la figura (3.1). Ahora, definimos la parte de la inversión en el producto total como la tasa de ahorro:

$$s(t) = I(t)/Q(t). \tag{3.28}$$

La tasa de ahorro se supone constante en el modelo neoclásico de Solow-Swan, aunque esto puede no ser cierto para variaciones de este:

$$I(t) = sQ(t), \quad 0 < s < 1, \quad s = \text{const.} \tag{3.29}$$

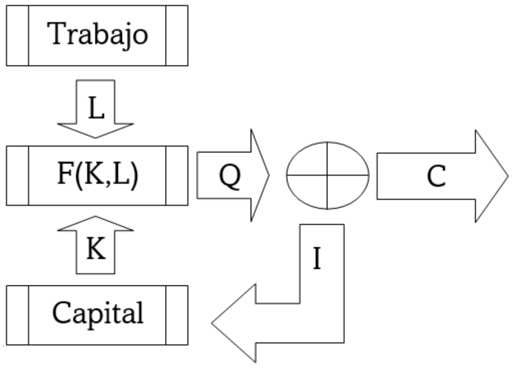

Figura 3.1: Modelo 1

Análisis del modelo.

Ecuación Fundamental del Modelo:

Se conoce como 'Ecuación fundamental' a la ecuación de movimiento que describe el cambio de capital K, en este caso hallaremos dicha ecuación para la variable per cápita.
Como la función de producción $F(K, L)$ es neoclásica y, por tanto, linealmente homogénea, entonces $F(K, L) = Lf(k)$ y la ecuación 3.26 conduce a:

$$K'(t)/L(t) = sf(k(t)) - \mu k(t)$$

donde el ratio capital-trabajo $k = K/L$ se define como en 3.4. Por otro lado, vemos que:

$$K(t)' = \frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = k\frac{\partial L}{\partial t} + L\frac{\partial k}{\partial t} = k(t)\eta + L(t)k'(t).$$

Es decir:

$$k'(t) = K'(t)/L(t) - \eta k(t). \tag{3.30}$$

Combinando las dos igualdades, obtenemos la ecuación fundamental del modelo Solow-Swan

$$k'(t) = sf(k) - (\mu + \eta)k(t). \tag{3.31}$$

Así, la dinámica del modelo se reduce a una ecuación diferencial autónoma(no dependiente de t explícitamente) con respecto a k.

Estado estacionario.

Para analizar las características del modelo, es de utilidad enfocarnos en los estados estacionarios del problema, lo que buscamos son:

Trayectorias estacionarias(las variables desconocidas son constantes en el tiempo).
Trayectorias de crecimiento equilibrado(todas las variables crecen a la misma tasa constante).

Busquemos y analicemos las posibles trayectorias de crecimiento equilibrado en el modelo. Es fácil ver

que las variables originales Q(t), C(t), I(t) y K(t) del modelo crecen con la misma tasa sólo si el ratio capital-trabajo k(t) es constante.
Veamos pues, que pasa cuando tomamos a k = const:

$$\begin{aligned}&K(t) = kL(t), \quad I(t) = (\mu+\eta)K(t), \quad Q(t) = (\mu+\eta)K(t)/s\\ &C(t) = Q(t) - I(t)\end{aligned}$$

todas estas funciones aumentan con la misma tasa η que el trabajo $L(t) = L_0 exp(\eta t)$. Por lo tanto, para encontrar estados estables, debemos suponer que $k(t) = const$. Entonces ${k_0}'(t) = 0$ y la ecuación (3.31) genera:

$$sf(k) = (\mu+\eta)k. \tag{3.32}$$

Para posibles estados estacionarios con $k \equiv cons$. Ahora, como $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$ y $lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ la ecuación (3.32) tiene una solución única $\hat{k} = \hat{k}(s) = cons > 0$ para cualquier valor $s > 0$. Se puede apreciar que el ratio capital-trabajo en estado estacionario $\hat{k}(s)$ aumenta cuando la tasa de ahorro s también aumenta.

3.2.6. Optimización estática.

Para una tasa de ahorro s dada, el consumo per cápita en estado estacionario c= C/L está determinado por la fórmula:

$$c(s) = f(\hat{k}(s)) - (\mu+h)\hat{k}(s) \tag{3.33}$$

donde la correspondiente relación capital-trabajo en estado estacionario $\hat{k}(s)$ viene determinada por (3.32). Como $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$ y $f''(k) < 0$, la función (3.33) aumenta para valores menores de s y disminuye para valores mayores de s. Entonces, podemos determinar la tasa de ahorro $s^* = cons$ y el correspondiente estado estacionario $k^* = \hat{k}(s^*)$ tal que maximicen el consumo per cápita (3.33):

$$\max_{0<s\leq 1} c(s) = f(\hat{k}(s)) - (\mu+\eta)\hat{k}(s).$$

La maximización de (3.33) es un problema de optimización con una variable escalar s. La condición de extremo necesaria que se da para $0 < s < 1$ es $c'(s) = 0$ ó:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}[f(\hat{k}(s)) - (\mu+\eta)\hat{k}(s)] =\\ &\frac{df(\hat{k}(s))}{ds} - (\mu+\eta)\frac{d\hat{k}}{ds} =\\ &\frac{df}{d\hat{k}}\frac{d\hat{k}}{ds} - (\mu+\eta)\frac{d\hat{k}}{ds} =\\ &\left(f'(\hat{k}) - (\mu+\eta)\right)\frac{\partial\hat{k}}{\partial s} = 0\end{aligned}.$$

Por lo tanto, la relación óptima entre capital y trabajo k* debe satisfacer

$$f'(k^*) = \mu + \eta. \tag{3.34}$$

A la relación (3.34) se le llama 'la regla de oro' de la acumulación de capital(13). Esta implica que el producto marginal del capital debe ser igual a la suma de las tasas de depreciación y de crecimiento del trabajo. Tras determinar el k* óptimo a partir de (3.34) la correspondiente tasa de ahorro de la regla de oro se encuentra a partir de (3.32) como:

$$s^* = (\mu+\eta)k^*/f(k^*) = k^* f'(k^*)/f(k^*) \tag{3.35}$$

la tasa de ahorro óptima s^* es igual a la elasticidad de la producción del capital ϵ_K para la correspondiente $k*$. Las fórmulas (3.34) y (3.35) para las tasas óptimas s^* y k^* se conocen como las fórmulas de la regla de oro del crecimiento económico.

En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, la función $f(k) = Ak^{\alpha}$ y la regla de oro es:

$$s^* = \alpha, \quad k^* = [As^*/(\mu+\eta)]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.36}$$

En el estado estacionario óptimo $(s*, k*)$ y el trabajo $L(t) = \bar{L}e^{\eta t}$ las variables originales Q(t), C(t), I(t) y K(t) del modelo crecen con la tasa η como:

$$K(t) = \bar{K}\mathrm{e}^{\eta t}, \quad I(t) = \bar{I}\mathrm{e}^{\eta t}, \quad Q(t) = \bar{Q}\mathrm{e}^{\eta t}, \quad C(t) = \bar{C}\mathrm{e}^{\eta t}. \tag{3.37}$$

A las constantes $\bar{K}$, $\bar{I}$, $\bar{Q}$, $\bar{C}$ en las funciones exponenciales de (3.37) se denominan en economía como las variables de nivel(13). En el caso de una fuerza de trabajo constante $L(t) = \bar{L}$ (es decir $\eta = 0$), el estado estacionario viene dado por:

$$\bar{K} = \bar{L}k^*, \quad \bar{I} = (\mu+\eta)\bar{L}k^*, \quad \bar{Q} = \frac{(\mu+\eta)Lk^*}{s}, \quad \bar{C} = \frac{(1-s)(\mu+\eta)\bar{L}k^*}{s} \quad . \tag{3.38}$$

Dado que la producción Q, el consumo C, la inversión I y el capital K aumentan con la misma tasa η que el trabajo exógeno L, el modelo Solow-Swan se conoce en la teoría económica como el modelo de crecimiento exógeno.

3.2.7. Versiones optimizadas del modelo Solow-Swan.

Introducimos la optimización dinámica en el modelo de Solow-Swan y consideramos sus dos versiones de optimización en períodos de planificación finito e infinito.

Optimización en un horizonte finito (modelo Solow-Shell)

El modelo Solow-Shell es el mismo modelo Solow-Swan pero considerado en un horizonte de planificación finito [0, T] tomando una tasa de ahorro $s = I/Q$ que depende del tiempo t y siendo una variable endógena. Ahora, para poder determinar la tasa s consideraremos el siguiente problema de optimización para un sector:

- Buscamos maximizar la siguiente expresión:

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-rt}c(t)\mathrm{d}t \tag{3.39}$$

para el consumo per cápita $c = C/L$ en un determinado horizonte finito [0, T], sujeto al modelo Solow-Swan y a ciertas condiciones iniciales y finales. En este problema, la tasa de descuento $r > 0$ refleja la tasa subjetiva del planificador sobre la utilidad decreciente de la producción en un futuro más lejano. Utilizamos las mismas variables agregadas del modelo Solow-Swan: la producción Q, el consumo C, el capital K, el trabajo L y la inversión I. Para simplificar, dejemos que el trabajo L(t) sea constante, es decir, $\eta = 0$ en (3.27). Cambiando el modelo Solow-Swan a las variables per cápita $k = K/L$, $q = Q/L$, $c = C/L$, $i = I/L$, y excluyendo q, c e i el problema de optimización que estamos analizando se convierte en:

- Debemos encontrar la función $s(t)$, con $0 \leq s(t) \leq 1$, y la correspondiente k(t), con $k(t) \geq 0$ $t \in [0, T]$, que maximicen

$$\max_{s,k} \int_0^T \mathrm{e}^{-rt}(1 - s(t))f(k(t))\mathrm{d}t. \tag{3.40}$$

con la siguiente restricción:

$$k'(t) = s(t)f(k(t)) - \mu k(t) \tag{3.41}$$

y las siguientes condiciones iniciales y finales

$$k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T. \tag{3.42}$$

El valor de k(T) no puede ser arbitrario porque la economía continuará después del final del período de planificación. La condición terminal $k(T) \geq k_T$ mantiene un nivel mínimo aceptable de capital al final del horizonte finito.

El problema Solow-Shell es un problema de control óptimo, en el que la función $s(t)$, $t \in [0, T]$, es la variable desconocida.

Estado estacionario:

Los resultados del análisis de estado estacionario del modelo Solow-Swan siguen siendo válidos para el modelo Solow-Shell porque la ecuación fundamental es la misma. En particular, significa que el problema de optimización dinámica posee la solución constante $s(t) = s^*$ y $k(t) = k^*$, si la condición inicial es $k_0 = k^*$ y el valor final es $k_T = k^*$ en (3.42). En el caso general cuando $k_0 \neq k^*$ y/o $k_T \neq k^*$, la solución del modelo tendrá una estructura más complicada.

Análisis dinámico:

Condición necesaria para un extremo: Si la función $s(t)$, $t \in [0, T]$, es una solución de (3.40), entonces:

1. Existe una función continua $\hat{\lambda}$, $t \in [0, T]$, llamada dual o adjunta que satisface la ecuación dual:

$$\hat{\lambda}'(t) = (\mu + r)\hat{\lambda}(t) - [1 - s(t) + \hat{\lambda}(t)s(t)]f'(k(t)). \tag{3.43}$$

   Con la siguiente condición de transversalidad:

$$[k(T) - k_T]\,\mathrm{e}^{-rT}\hat{\lambda}(T) = 0 \tag{3.44}$$

   donde la variable correspondiente $k(t)$, $t \in [0, T]$, se encuentra a partir de (3.41).

2. s(t) maximiza $[1 - s(t) + \hat{\lambda}]$ en cada punto $t \in [0, T]$.
   En concreto, el Hamiltoniano para el problema de optimización (3.40) se construye como:

$$\hat{H}(s, k, \hat{\lambda}) = f(k)(1 - s) + \hat{\lambda}[sf(k) - \mu k]. \tag{3.45}$$

Condición de extremos para una solución interior: El principio de máximos está construido específicamente para manejar el caso de soluciones de frontera: $s(t) = 0$ o $s(t) = 1$ en el dominio $0 \leq s(t) \leq 1$ para algunos instantes t. La posibilidad de soluciones de frontera complica la dinámica de control. Si se sabe que una solución es interior en el dominio, entonces las condiciones óptimas se vuelven más simples. En concreto, si $0 < s(t) < 1$, entonces s(t) satisface lo siguiente: $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$.
Utilicemos esta condición para el problema de optimización (3.40). Tomando la derivada de (3.45) en s, obtenemos $\frac{\partial \hat{H}}{\partial s} = f(k)(\hat{\lambda} - 1)$. Si se cumple que $0 < s(t) < 1$ para $t \in [0, T]$, entonces $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$ y, por tanto, $\hat{\lambda}(t) = 1$. Sustituyendo $\hat{\lambda}$ en (3.43), obtenemos:

$$0 = \mu + r - f'(k(t)). \tag{3.46}$$

Solución: Utilizando las condiciones (3.43) y (3.44), y sustituyendo en (3.45) tal que: $\hat{H}(s, k, \hat{\lambda}) = s(\hat{\lambda} - 1)f(k) - \hat{\lambda}\mu k + f(k)$, demostramos que $s(t) = 0$ maximiza $\hat{H}(s, k\hat{\lambda})$ en $\hat{\lambda}(t) < 1$ y tambien en $\hat{\lambda}(t) > 1$. Si $\hat{\lambda} = 1$, entonces $\hat{H}(s, k, \hat{\lambda})$ no depende de s y el óptimo k^* se encuentra a partir de (3.43), que es la misma que la regla de oro de la acumulación de capital. Por lo tanto la solución $s(t)$, $t \in [0, T]$, del problema de optimización es:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \hat{\lambda}(t) < 1 \\ s^* & \text{si} \quad \hat{\lambda}(t) = 1 \\ 1 & \text{si} \quad \hat{\lambda}(t) > 1 \end{cases} \tag{3.47}$$

donde $0 < s^* < 1$ es la tasa de ahorro óptima(regla de oro) en el modelo Solow-Swan. Cuando $s(t) = s^*$, la trayectoria correspondiente es $k(t) = k^*$, donde k^* se encuentra a partir de (3.36).

Optimización de horizonte infinito (modelo Solow-Ramsey)

El modelo Solow-Shell con la optimización sobre un horizonte de planificación infinito $[0, \infty)$ se conoce como el modelo de Solow-Ramsey con utilidad lineal. En concreto, consideramos el siguiente problema de optimización:

- Un planificador central determina la tasa de ahorro óptima $s(t)$, $t \in [0, \infty)$, para maximizar el valor presente del consumo per cápita c en el horizonte infinito de planificación $[0, \infty)$:

$$\max_{s} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt} c(t) \mathrm{d}t \tag{3.48}$$

  sujeta a la ecuación de estado (3.35) con la condición inicial $k(0) = k_0$. Para este problema no se imponen condiciones terminales en $t = \infty$.

Estado estacionario:
Los resultados del análisis de estado estacionario del modelo Solow-Ramsey siguen siendo los mismos que los del modelo Solow-Swan con una tasa de ahorro exógena constante.

Análisis Dinámico:
Para el análisis dinámico del modelo Solow-Ramsey tenemos que tomar en cuenta la convergencia de la integral impropia a lo largo de la trayectoria óptima c.
La condición para esta convergencia en nuestro modelo es simplemente:

$$r > \eta \tag{3.49}$$

donde η es la tasa de crecimiento del trabajo dada en (3.27).

Tomando (3.49), las condiciones de extremos siguen siendo las mismas que en el modelo Solow-Shell. Utilizando (3.43) y (3.47), podemos demostrar que la solución $s(t)$, $t \in [0, \infty)$, del problema (3.48) es:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{en} \quad 0 \leq t < \theta_1 \\ s^* & \text{en} \quad \theta_1 \leq t < \infty \end{cases} \tag{3.50}$$

$$k(t) = \begin{cases} k_{tr}(t) & \text{en} \quad 0 \leq t < \theta_1 \\ k^* & \text{en} \quad \theta_1 \leq t < \infty \end{cases} \tag{3.51}$$

con la tasa de ahorro de la regla de oro s^* y el capital per cápita k^* en el modelo Solow-Swan. Además, se puede demostrar que la condición de transversalidad (3.44) se reduce a la desigualdad (3.49). Así que la condición de transversalidad es menos importante en el problema de horizonte infinito en el sentido de que no afecta directamente a la dinámica de la solución.
La dinámica de transición del problema (3.47) sobre el intervalo $[0, \theta_1]$ es la misma que para el modelo Solow-Shell. La trayectoria óptima $(s(t), k(t))$ se aproxima al estado estacionario (s^*, k^*) y la dinámica de transición termina en el instante θ_1 tal que $k(\theta_1) = k^*$.
La dinámica a largo plazo es $s(t) \equiv s^*$, $k(t) \equiv k^*$ en $[\theta_1, \infty)$, es decir, la tasa óptima de ahorro $s(t)$ coincide con la tasa de ahorro constante de la regla de oro s^* en el modelo Solow-Swan a partir de θ_1.

3.2.8. Funciones de utilidad

Los problemas de optimización a menudo maximizan una variable llamada *utilidad individual* o *utilidad social* que depende de una forma no lineal del consumo, en lugar de la cantidad directa de la variable de consumo. Por ejemplo, el modelo de Solow-Ramsey con utilidad no lineal maximiza el valor presente de la utilidad del consumidor sobre $[0, \infty)$:

$$\max_s \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt} u(c(t)) \mathrm{d}t \tag{3.52}$$

en lugar de (3.48). La función no lineal $u(c)$ en (3.52) se denomina función de utilidad y describe el valor del producto de consumo futuro c para los consumidores. La función u(c) debe ser suave, creciente y cóncava hacia abajo: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$. Su concavidad refleja la propiedad de la utilidad marginal decreciente: el producto es más valioso cuando su cantidad es pequeña. Se dice que la función de utilidad satisface las condiciones de Inada si $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$ y $\lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$.
Las funciónes de utilidad más comunes son:

- La función de utilidad isoelástica (o de potencia) $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ donde $0 < \gamma < 1$.

- La función de utilidad logarítmica $u(c) = ln(c)$.

Las funciones de utilidad nos sirven como herramienta para enfrentarnos a los problemas de optimización vistos anteriormente, tomando especial atención a los problemas de horizonte infinito, ya que estos modelos tienden a introducir diversas complejidades con respecto a las condiciones de transversalidad. Ahora apliquemos una función de utilidad al modelo Solow-Ramsey, que será en el que trabajaremos de ahora en adelante.

Modelo Solow-Ramsey. La función de producción neoclásica Solow-Swan estándar se expresa como una salida Q(K,L) que depende del capital K y el trabajo L.

$$C(t) + I(t) = Q = F(K, L).$$

Siendo F una función linealmente homogénea con las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

Tomando las variables per cápita:

$$q = f(k), \text{ Con } f'(k) > 0 \text{ y } f(k)'' < 0.$$

Siendo $q = Q/L$ y $k = K/L$. Ahora, la salida Q esta asignada a un determinado valor de C y de I, si μ es la tasa de depreciación de capital, nuestra ecuación de cambio de K nos queda de la siguiente manera:

$$K' = I - \mu K = Y - C - \mu K.$$

Denotando al consumo per cápita como $c \equiv C/L$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{K'}{L} = y - c - \mu k. \tag{3.53}$$

La parte derecha de (3.53) está en términos per cápita, para arreglar a la parte izquierda de la misma manera, veamos que:

$$K' = \frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = k\frac{\partial L}{\partial t} + L\frac{\partial k}{\partial t}. \tag{3.54}$$

Si la tasa de aumento de población es:

$$\frac{dL/dt}{L} = \eta \text{ tal que } \frac{dL}{dt} = \eta L.$$

Así, la ecuación (3.54) se convierte:

$$K' = k\eta L + Lk' \quad \text{ó} \quad \frac{K\prime}{L} = k\eta + k'.$$

Sustituyendo esto en (3.53), obtenemos una ecuación completamente en términos per cápita:

$$k' = y - c - (\eta + \mu)k = q(k) - c - (\eta + \mu)k.$$

Ahora introduzcamos nuestra función de utilidad U en términos de variable per cápita, que cumpla:

$$U'(c) > 0 \;\; y \;\; U''(c) < 0$$

para eliminar las soluciones interiores, asumamos que:

$$\begin{array}{ll} U'(c) \to \infty & \text{con } c \to 0 \\ U'(c) \to 0 & \text{con } c \to \infty \end{array}.$$

Si ρ denota la tasa de descuento social y la población inicial la normalizamos a 1, la función objetivo queda como:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}L_0 e^{\eta t}dt = \int_0^\infty U(c)e^{-(\rho-\eta)t}dt \\ &= \int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt \quad \text{donde } r = \rho - \eta \end{aligned}.$$

La utilidad está asociada a una población que crece a una tasa constante η. Sin embargo si $r = \rho - \eta > 0$ entonces el modelo no es diferente a uno sin población con una tasa de descuento $r > 0$.

Ahora podemos escribir el problema de control óptimo de la siguiente manera:

$$\text{Max} \int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt. \tag{3.55}$$

Sujeto a $k' = q(k) - c - (\eta + \mu)k$ con $k(0) = k_0$ y $0 \leq c(t) \leq q(k)$. Donde k es nuestra variable de estado y c nuestra variable de control.

El hamiltoniano para este problema es:

$$H = U(c)e^{-rt} + \lambda[q(k) - c - (\eta + \mu)k].$$

Dado que H es una función cóncava en c, el máximo de H corresponde a una solución interior en la region $[0 < c < q(k)]$, por lo que podemos encontrar el máximo de H a partir de:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c) - \lambda = 0.$$

Es decir:

$$U'(c) = \lambda e^{rt}. \tag{3.56}$$

Usando el principio del máximo, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = q(k) - c - (\eta + \mu)k \\ \lambda' &= -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda \left[q'(k) - (\eta + \mu) \right] \end{aligned}.$$

Más adelante haremos un análisis más detallado, cuando tengamos una forma definida para la utilidad $U(c)$ y la función de producción.

Capítulo 4

Modelación de la protección del medio ambiente

4.1. Modelación del impacto económico en el medio ambiente.

Encontrar una solución a los daños ambientales implica conocer las causas y fuentes que provocan estos efectos dañinos en nuestro ecosistema. Para lograr esto se deben identificar los orígenes de estos contaminantes que, a grandes, rasgos podemos identificar de dos posibles fuentes, que son los *contaminantes naturales* y los *contaminantes antropogénicos*. De las dos fuentes, hay varios estudios que nos dicen que los que nos han llevado a la degradación ambiental actual son los de origen antropogénico, relacionando el aumento drástico de la concentración de dióxido de carbono y la temperatura global, con las actividades humanas desde industrialización con base en combustibles fósiles. A continuación mencionamos algunos de estos estudios y sus conclusiones más importantes.

Una de las conclusiones más importantes de estas investigaciones es que la subida masiva de temperatura global coincide con el momento en el que se empezaron a utilizar los combustibles fósiles para la producción económica(22), esto porque la concentración de dióxido de carbono en la atmosfera debido a la quema de combustibles fósiles y gas natural paso de las 200 partes por millón a más de 400, en los últimos 3 siglos(21).

Estas moléculas de dióxido de carbono atrapan la radiación infrarroja que emite la superficie terrestre, calentado esta misma aún más, con el conocido efecto invernadero.

Ahora bien, antes mencionamos que también existían contaminantes naturales, como la expulsión de gases de un volcán o la liberación de moléculas de dióxido de carbono que se encontraban dentro de glaciares. De hecho, a lo largo de la historia de la tierra se pueden identificar épocas con mayor concentración de dióxido de carbono que otras, y esto ocurre periódicamente de manera natural, sin embargo, existen pruebas de que la mayor parte de las moléculas de dióxido de carbono en la atmosfera actualmente son moléculas de carbono 12, que es el tipo de carbono mayoritario del que se compone la materia orgánica, como lo son los combustibles fósiles(42). Además de esto también la subida masiva de la concentración de dióxido corresponde a un aumento en el carbono 12(10).

Entonces podemos afirmar que las actividades humanas afectan al medio ambiente y a la subida de temperatura global mediante la concentración de dióxido de carbono en la atmosfera. Es una tarea altamente complicada relacionar cada una de las variables que contribuyen al aumento de contaminación atmosférica, sin embargo existen 2 características directas que podemos medir, estas son:

T(t) la temperatura global promedio.
P(t) la concentración de dióxido de carbono en la atmosfera.
Nos enfocaremos en la variable P(t), buscamos proponer una ley de movimiento con la que podamos relacionarla con alguna variable económica. El caso más simple que podemos proponer es una relación lineal:

$$P(t) = \gamma Q(t),$$

donde $Q(t)$ representa la producción económica y γ representa la 'suciedad' del proceso de producción. Este es el caso más simple posible, sin embargo, no hay ninguna dinámica en la ecuación, por lo que está incompleta. La mejor manera de proceder es suponer que la contaminación $P(t)$ se acumula como un stock(37):

$$P'(t) = \gamma Q(t), \quad P(0) = P_0.$$

Ahora bien, el ambiente es un sistema que se regenera por si mismo y disminuye la concentración de polución atmosférica, entonces nuestra ecuación de contaminación toma la siguiente forma:

$$P'(t) = \gamma Q(t) - \delta_P P, \quad P(0) = P_0, \tag{4.1}$$

donde $\delta_P > 0$ es una tasa de decaimiento constante de la contaminación. La primera parte de la ecuación (4.1) describe el flujo neto de contaminación resultante de las actividades productivas y refleja la suciedad ambiental de la economía. La emisión de contaminación crece con la producción $Q(t)$.
Según (4.1), el stock de contaminación P aumenta con el flujo de emisión de contaminación y decae a una tasa natural fija $\delta_P > 0$, por lo que se supone que si disminuimos nuestro flujo de contaminación, el daño ambiental disminuye lentamente debido a la capacidad de regeneración del medio ambiente.

Ahora que tenemos una manera de relacionar la contaminación con nuestras variables económicas, debemos encontrar una manera de hacerlo en el sentido inverso, es decir: como afecta la degradación ambiental a nuestra economía.

4.2. Modelación del impacto ambiental en la economía.

A pesar de que la economía del cambio climático es relativamente joven, existen varios enfoques analíticos que se han desarrollado para modelar el impacto negativo de cambios medioambientales indeseables en la economía y el bienestar humano. A continuación veremos uno de los enfoques más utilizados.

4.2.1. Disminución del valor de la amenidad

Un enfoque popular hace hincapié en que el calentamiento global provoca pérdidas directas de bienestar, el valor y la vida útil de la producción total. Entonces, definimos una la función de utilidad U que depende de la temperatura global T o de la concentración de gases de efecto invernadero P. Como se mencionó anteriormente utilizaremos la variable de contaminación P, entonces la función de utilidad se convierte en U = U(C, P), es decir, una función que depende de C y P. Para especificar el impacto negativo del medio ambiente y poder analizarlo mejor, es conveniente elegir que la utilidad U(C, P) sea aditivamente separable:

$$U(C, P) = U_1(C) - U_2(P), \tag{4.2}$$

donde $U_1(C)$ es una función de utilidad estándar, por ejemplo, la utilidad isoelástica $U_1(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ o la utilidad logarítmica $U_1(C) = ln(C)$. Luego suponemos que la función $U_2(P)$ aumenta en relación a P, y a su vez, la función de utilidad U(C,P) disminuye en relación P; esta propiedad se conoce como la desutilidad de la contaminación ambiental. Si $-U_2''(P) < 0$, entonces la función (4.2) describe una desutilidad marginal creciente de la contaminación. Podemos escribir a la función de utilidad U de la siguiente forma(41):

$$U(C, P) = \ln C - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta}, \tag{4.3}$$

donde el parámetro $\sigma > 0$ representa la vulnerabilidad medioambiental de la economía y el parámetro $\theta > 0$ refleja la desutilidad marginal creciente de la contaminación.

El parámetro σ hace referencia al tipo de producción que se está llevando a cabo, por ejemplo, las empresas especializadas en la producción de materias primas como las empresas madereras son más vulnerables que una empresa enfocada en telefonía móvil, y por lo tanto, su valor de σ es mayor.
Por otro lado, el parámetro θ describe como cambia la desutilidad con respecto a la variable P.

El objetivo de toda economía es crecer. Esto es posible modelarlo bajo un proceso de optimización, donde se elige una trayectoria por medio del principio del máximo, a partir de ahora todos los modelos que analizaremos, será por medio de la optimización, para simular los objetivos reales de los agentes económicos. Haremos uso de la función de utilidad para este propósito.

Ahora veremos un modelo con esta nueva definición de utilidad, tomando en cuenta también nuestra ecuación de contaminación.

4.3. Modelo con disminución de utilidad.

Buscamos plantear un modelo dinámico de un sistema económico-ambiental (un país o región) con capital físico y contaminación, debemos asumir que la calidad ambiental se caracteriza por la contaminación. Utilizaremos el marco de crecimiento de 2 sectores de Solow, en el que la economía utiliza una tecnología Cobb-Douglas con rendimientos constantes para producir un único bien final Q.

$$Q = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C(t) + I(t).$$

Tomando las variables per cápita y utilizando la función de utilidad (4.3), el planificador social busca maximizar el capital per cápita k en base a nuestra variable de costo per cápita c:

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-rt}\left(\ln c - \sigma\frac{P^{1+\theta}}{1+\theta}\right) \mathrm{d}t, \quad C(t) \geq 0. \tag{4.4}$$

Sujeto a $k' = q(k) - c - (\eta + \mu)k$ con $k(0) = k_0$ y $0 \leq c(t) \leq q(k)$, donde $r > 0$ es la tasa de descuento; $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$ son parámetros de la función de producción de Cobb Douglas que hemos mencionado anteriormente; a su vez $\mu \geq 0$ es la tasa de deterioro del capital físico K y η es la tasa de aumento laboral. En primera instancia, vamos a usar nuestra expresión de contaminación sin stock, esto es:

$$P(k) = \gamma q(k), \tag{4.5}$$

donde el factor de emisión γ >0 describe la suciedad ambiental de la economía. Es importante recalcar que la utilidad U depende del consumo y la contaminación.

4.3.1. Optimización del modelo.

En aras de la claridad, nos limitaremos al análisis de las trayectorias interiores del modelo. Significa que buscamos controles positivos de c, es decir, obviamos el hecho de que $c \geq 0$. Tenemos que el hamiltoniano de valor presente para el problema está dado por:

$$\begin{aligned} H &= U(c)e^{-rt} + \lambda[q(k) - c - (\eta + \mu)k], \\ H &= \left[ln\, c - \sigma\frac{(\gamma A k^{\alpha})^{1+\theta}}{1+\theta}\right] e^{-rt} + \lambda[Ak^{\alpha} - c - (\eta + \mu)k], \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde la variable dual λ está asociada con la ecuación de estado de k'. Las condición de extremo de primer orden para la variable c es: $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} U'(c) - \lambda &= 0, \\ \frac{e^{-rt}}{c} &= \lambda. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Luego, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ak^{\alpha} - c - (\eta + \mu)k, \\ \lambda' &= -\frac{\partial H}{\partial k} = e^{-rt}\sigma\gamma^{1+\theta}A^{1+\theta}\alpha k^{(1+\theta)\alpha-1} - \lambda\left[\alpha A k^{\alpha-1} - (\eta + \mu)\right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3.2. Análisis del Modelo.

Utilizando el hecho de que $\lambda = e^{-rt}/c$:

$$-r\lambda - \frac{c'}{c}\lambda = \lambda c\sigma\gamma^{1+\theta}\alpha k^{(1+\theta)\alpha-1} - \lambda[\alpha A k^{\alpha-1} - (\eta + \mu)].$$

Eliminando a λ obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} Ak^{\alpha} &= k' + c + (\eta + \mu)k, \\ \alpha A k^{\alpha-1} - c\xi k^{\alpha-1}k^{\theta\alpha} - \frac{c'}{c} &= r + \eta + \mu, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $\xi = \sigma\gamma^{1+\theta}A^{1+\theta}\alpha$. El sistema de ecuaciones no lineales (4.9) determina la dinámica óptima de las trayectorias interiores dependientes del tiempo $k(t)$ y $c(t)$.

Este modelo representa únicamente la contaminación emitida por la propia empresa, este puede ser una base para modificar el valor de la producción de la propia empresa al tomar en cuenta las negatividades de la contaminación en el proceso de producción.

4.3.3. Estado estacionario.

Podemos guiar nuestras observaciones del modelo en el estado estacionario del sistema, este es:

$$\begin{aligned} &Ak^{\alpha} = c + (\eta + \mu)k, \\ &k^{\alpha-1}(\alpha A - c\xi k^{\theta\alpha}) = r + \eta + \mu. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para aclarar como el modelo de disminución de utilidad afecta al consumo c, veamos los posibles valores de k.
Al analizar la segunda ecuación de (4.10) vemos que:

$$0 < k < (\frac{\alpha A}{c\xi}). \tag{4.11}$$

4.3.4. Modelo con acumulación de contaminación.

El análisis anterior es válido dentro del contexto de un mismo ente económico, como puede ser una empresa o una región cerrada. Esto porque la utilidad U solo se ve afectada por la contaminación que emite la propia producción en el momento t, sin embargo, en la realidad son pocos los escenarios en los que esto se cumple, como se mencionó en una sección anterior, la contaminación se va acumulando a partir de un valor inicia P_0, al introducir nuestra ecuación de stock de contaminación:

$$P' = \gamma q(k) - \delta_p P. \tag{4.12}$$

En nuestro modelo, tenemos que añadir otra ecuación de movimiento y su correspondiente variable dual, de manera que el hamiltoniano para este nuevo modelo nos queda como:

$$H = \left[ln\, c - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta} \right] e^{-rt} + \lambda_1[Ak^{\alpha} - c - (\eta + \mu)k] + \lambda_2[\gamma Ak^{\alpha} - \delta_p P]. \tag{4.13}$$

Haciendo un análisis similar al anterior, y tomando las siguientes condiciones de transversalidad: $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda_1'$, $\frac{\partial H}{\partial P} = 0$, obtenemos.

$$\lambda_1 = \frac{e^{-rt}}{c}, \qquad \lambda_2 = \frac{-\sigma P^{\theta} \lambda_1 c}{\delta_P}.$$

Lo cual nos lleva al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} &Ak^{\alpha} = k' + c + (\eta + \mu)k, \\ &\frac{1}{\gamma} - \frac{\sigma P^{\theta} c}{\delta_P} = \frac{k^{1-\alpha}}{\gamma A\alpha} \left(\frac{c'}{c} + r + \eta + \mu \right), \\ &P' = \gamma Ak^{\alpha} - \delta_P P. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Este último sistema de ecuaciones no lineales determina la trayectoria óptima de la dinámica interior de un modelo con acumulación de contaminación, encontrar la solución analítica para este problema es una cuestión compleja.
Más adelante haremos un análisis de los estados estacionarios del sistema. Por lo pronto se puede observar que el mayor cambio en el comportamiento se ve en la ecuación de movimiento del consumo c.

4.3.5. Análisis Estacionario.

Al igualar las variables k' y c' a cero, obtenemos el estado estacionario del sistema:

$$\bar{c} = A\bar{k}^{\alpha} - (\eta + \mu)\bar{k}. \tag{4.15}$$

$$\bar{P} = \frac{\gamma A\bar{k}^{\alpha}}{\delta_P}. \tag{4.16}$$

Podemos encontrar una expresión para $\bar{k}$ a partir de:

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{\sigma \bar{P}^{\theta} \bar{c}}{\delta_P} = \frac{\bar{k}^{1-\alpha}}{\gamma A\alpha} (r + \eta + \mu). \tag{4.17}$$

Al sustituir $\bar{c}$ y $\bar{P}$ vemos que $\bar{k}$ satisface que:

$$0 < \bar{k} < \left(\frac{\gamma^{1+\theta} A^{1+\theta} \sigma \alpha}{(r + \eta + \mu) \delta_P^{1+\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha(1+\theta)}}. \tag{4.18}$$

La figura 4.1 representa la relación entre la contaminación con el capital estacionario, los parámetros fueron extraídos del modelo DICE, en la página de su creador William D. Nordhaus(3). Podemos ver que se comporta asintóticamente creciente.

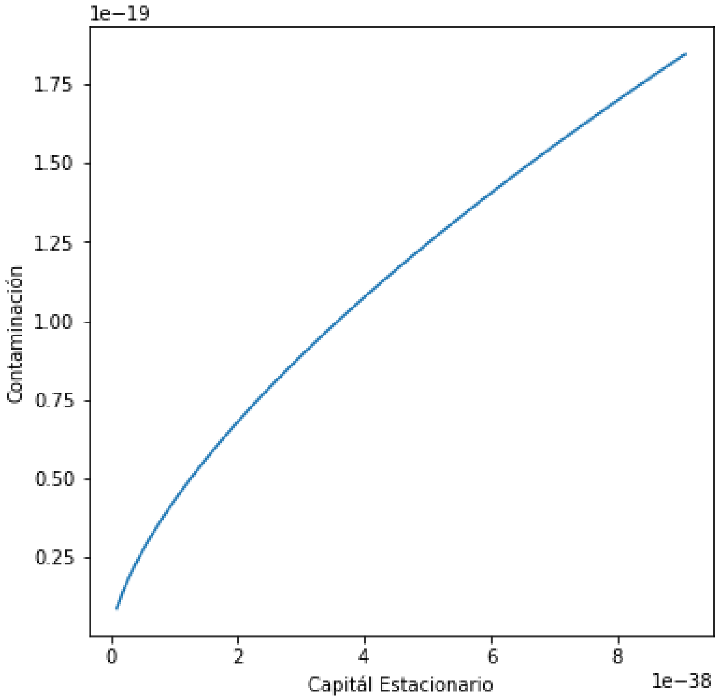

Figura 4.1: Nivel de contaminación en relación con el capital máximo.

Capítulo 5

Modelación de impuestos ambientales.

Antes de comenzar con este capítulo, es importante aclarar qué es lo que queremos modelar, y tener una idea de a donde queremos dirigir nuestro análisis económico-ambiental.

Cuando hablamos de modelos con impuestos, podemos hacer muchas aproximaciones al problema, en primer lugar, se tiene que definir el tipo de impuesto en el que vamos a trabajar, estos pueden ser impuestos sobre la renta, el trabajo o la producción, impuestos por salubridad, impuestos de servicios, impuestos tributarios, y en los que se centra este modelo: impuestos ambientales.
Estos son diferentes del resto de los impuestos, debido a que su implementación se realiza con fines distintos a los recaudatorios, como pueden ser: modificar el comportamiento de los consumidores o incentivar diferentes tecnologías o productos.

Según la SEMARNAT(2), los impuestos ambientales (también denominados 'impuestos verdes' o 'ecotributos') son instrumentos económicos que nacen de la intención de incluir en los precios los costos ambientales negativos de la producción o el uso de bienes. Permiten, por un lado, incidir en el comportamiento de los consumidores y productores desincentivando el consumo de productos o actividades que deterioran el ambiente, y por otro, aumentan la recaudación gubernamental haciendo posible destinar los recursos obtenidos hacia mejoras del sector ambiental.
Los instrumentos económicos con fines ambientales nacen en la ciencia económica para internalizar las externalidades negativas de tipo ambiental. Lo que se quiere decir con esto es que cuando un sujeto o entidad utiliza los recursos naturales o contamina, obtiene una ganancia, esto porque no asume el costo de limpieza o de la degradación ambiental, y por tanto, dicho costo no se ve reflejado en los precios y en el mercado, es decir, se queda externo al sistema de precios; a esto se le denomina externalidad negativa. Para corregir estas distorsiones, se proponen instrumentos económicos que internalicen la externalidad negativa en los precios y en el mercado, para que así estos reflejen el costo económico ambiental de la producción(11). Así, el agente contaminador asume la responsabilidad del costo ambiental, de aquí nace el principio de "el que contamina paga" que fue difundido por la OCDE en el año de 1974(16).

Ahora bien, con estos antecedentes podemos asumir algunas características que debe cumplir nuestro modelo. En primer lugar, hay que resaltar que su principal objetivo es calcular la trayectoria más eficaz para el funcionamiento de las empresas, basándose en la distribución óptima entre el consumo, la inversión y los impuestos. Se busca aumentar la recaudación tributaria por un lado y, por otro, garantizar el desarrollo continuo de las empresas.

Nuestro modelo también tiene que 'internalizar las externalidades negativas', esto lo podemos lograr a partir de las funciones de utilidad, que son un mecanismo ya utilizado en los modelos anteriores, sin embargo, no hemos tomado en cuenta el principio de 'el que contamina paga' por lo que es necesario modificar nuestro modelo de manera que una parte de la producción generada sea desviada a los impuestos.

Por último, se busca que los recursos obtenidos estén destinados exclusivamente a financiar programas de mitigación del cambio climático y a su prevención y gestión ambiental. En nuestro modelo, esto se traduce a que los impuestos deben modificar de manera positiva nuestra ecuación de contaminación y ayudar a reducirla de alguna manera.

Para que nuestro modelo se adapte a todas estas características hay 2 posibles propuestas que podemos tomar y que veremos a continuación.

5.1. Modelo porcentual tributario.

La forma tradicional del manejo de impuestos es tomar una parte de la producción total y luego invertir eso en medidas para controlar la degradación ambiental, en la siguiente tabla podemos ver que las políticas ambientales de México funcionan de esta manera:

Nombre:	Ingresos por impuestos ambientales.
Definición breve:	Porcentaje de los ingresos tributarios totales obtenidos por la federación y que corresponden a los impuestos asignados al consumo de la gasolina y diésel, a la compra de vehículos nuevos y a la tenencia vehicular.
Unidad de medida:	Porcentaje.
Objetivos y metas:	No aplica.
Definiciones y conceptos:	No aplica.
Método de medición:	El indicador se calcula como: PIA = (IA / IT) x 100, donde PIA = impuestos ambientales como porcentaje de los ingresos tributarios, IT = ingresos tributarios totales, y IA = impuestos ambientales, que se calcula como: IA = ISAN + IEPS_{gyd} + T+P+C, donde ISAN = impuesto sobre automóviles nuevos, IEPS_{gyd} = Impuesto Especial sobre Producción y Servicios (IEPS) sobre diésel y gasolina, y T = Tenencia vehicular. P= Impuesto sobre plaguicidas. C= Impuesto sobre carbono
Periodicidad:	Anual.
Limitaciones del indicador:	
Fuentes de datos:	Elaboración propia con datos de: SHCP. Estadísticas oportunas de las finanzas públicas de México. Disponible en: http://finanzaspublicas.hacienda.gob.mx/es/Finanzas_Publicas/Estadisticas_Oportunas_de_Finanzas_Publicas Fecha de consulta: julio 2016.
Referencias:	Moreno, G. (Comp.) *Impuestos ambientales. Lecciones en países OCDE y experiencias en México.* INE-SEMARNAT. 2002

Figura 5.1: Metadato del cálculo de impuesto ambientales. Fuente: SEMARNAT.

Los impuestos están dados por una tasa fija que se aplica sobre la cantidad de contaminantes emitidos, este valor es proporcional a la producción, por lo que el caso más simple que podemos modelar es que un porcentaje de la producción total se vea destinado a los impuestos ambientales, esto es:

$$F(K, L) = Q(K, L)(1 - \tau), \tag{5.1}$$

donde τ es el porcentaje de la producción que se desvía a impuestos. En México, para los impuestos ambientales por producción el valor de τ ronda el 10 %(2), aunque por ahora lo dejaremos expresado como un valor arbitrario.

Bien, ahora solo resta saber a dónde dirigiremos la contribución de los impuestos para la mitigación ambiental. Recordando que nuestra ecuación de contaminación se expresa como:

$$P' = \gamma Q - \delta_P P.$$

En primera instancia podríamos suponer que se debe multiplicar el primer término de la ecuación por $(1 - \tau)$ sin embargo hay que recordar que esto solo afecta a la producción total percibida por la empresa, por lo que en el sentido 'físico' la contaminación emitida por la producción sigue siendo la misma.

Tomando esto en cuenta, lo que si podemos afirmar es que la contribución a mitigación debe disminuir la contaminación emitida por la producción, esto se puede expresar como:

$$P\prime = \gamma Q - \tau Q - \delta_P P = (\gamma - \tau)Q - \delta_P P. \tag{5.2}$$

Esto se traduce en que los esfuerzos de mitigación van enfocados a reducir la propia emisión producida por el agente productivo, esto se puede lograr enfocando los recursos en tecnologías más limpias, o en el reciclaje de desperdicios. Cabe aclarar que solo se ve afectado el primer término de la ecuación porque es la parte de la contaminación que solo depende de la empresa, la tasa de regeneración global δ_P se ve inalterada, sería necesario un esfuerzo conjunto para lograr modificar este valor constante.

Muestro modelo para las variables per-cápita queda entones como:

$$\max_c \int_0^\infty e^{-rt}\left(\ln c - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta}\right) dt, \quad C(t) \geq 0. \tag{5.3}$$

Sujeto a las siguientes ecuaciones de estado:

$$P' = Ak^\alpha(\gamma - \tau) - \delta_p P. \tag{5.4}$$

$$k' = q(k)(1-\tau) - c - (\eta + \mu)k. \tag{5.5}$$

Con todo esto, obtenemos el siguiente hamiltoniano:

$$H = \left[ln\, c - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta}\right] e^{-rt} + \lambda_1[Ak^\alpha(1-\tau) - c - (\eta+\mu)k] + \lambda_2[Ak^\alpha(\gamma-\tau) - \delta_p P]. \tag{5.6}$$

Utilizando las condiciones de transversalidad: $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda_1'$ y $\frac{\partial H}{\partial P} = 0$ nos lleva al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
&Ak^\alpha(1-\tau) = k' + c + (\eta+\mu)k.\\
&\frac{1}{\gamma-\tau} - \frac{\sigma P^\theta c}{\delta_P} = \frac{k^{1-\alpha}}{(\gamma-\tau)A\alpha}\left(\frac{c'}{c} + r + \eta + \mu\right).\\
&P' = Ak^\alpha(\gamma-\tau) - \delta_P P.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.1. Análisis Estacionario.

Para este sistema, obtenemos expresiones definidas para cada una de las variables $\bar{c}$ y $\bar{P}$:

$$\bar{c} = Ak^\alpha(1-\tau) - (\eta+\mu)\bar{k} \tag{5.8}$$

$$\bar{P} = \frac{Ak^\alpha(\gamma-\tau)}{\delta_P}. \tag{5.9}$$

Luego utilizamos estas ecuaciones para obtener:

$$\frac{1}{\gamma-\tau} - \frac{\sigma \bar{P}^\theta \bar{c}}{\delta_P} = \frac{\bar{k}^{1-\alpha}}{(\gamma-\tau)A\alpha}(r+\eta+\mu). \tag{5.10}$$

De esta manera podemos obtener una expresión aproximada de k:

$$0 < \bar{k} < \left(\frac{(\gamma-\tau)^{1+\theta}A^{1+\theta}\sigma\alpha}{(r+\eta+\mu)\delta_P^{1+\theta}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha(1+\theta)}}. \tag{5.11}$$

El termino de impuestos τ únicamente logra reducir el nivel de capital máximo alcanzado, sin embargo, no afecta de ninguna manera a la ecuación de contaminación, salvo por el termino τ, que al ser constante solo disminuye su tasa de crecimiento. Mientras más grande sea el capital, mayor será la contaminación. A continuación, buscaremos un modelo en el cual podamos modificar directamente el comportamiento de la ecuación de contaminación.

5.2. Modelo con inversión en mitigación.

Lo que vamos a hacer ahora es construir un modelo en el cual los impuestos se vean directamente como una inversión en mitigación, lo que se quiere decir con esto es que en vez de afectar a la producción percibida por la empresa, vamos a destinar los recursos directamente en mitigación ambiental de una manera planificada, esto es:

$$\begin{aligned} Q(t) &= AK^{\alpha}(t)L^{1-\alpha} = I(t) + T(t) + C(t) \\ K'(t) &= I(t) - \mu K(t), \quad K(0) = K_0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

donde I es la inversión, C es el consumo y T es la inversión en mitigación. Ahora asumimos que la calidad ambiental se caracteriza por la contaminación P y utilizamos Cobb-Douglas para describir la producción. El planificador social maximiza la utilidad de descuento en un horizonte infinito:

$$\max_{I,C} \int_0^{\infty} e^{-rt} \left(\ln C - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta} \right) \mathrm{d}t, \quad I(t) \geq 0, C(t) \geq 0. \tag{5.13}$$

Suponemos de nuevo que la contaminación P se acumula como un stock. La emisión de contaminación sigue siendo proporcional a la producción Q y se reduce mediante T, pero de forma en que sea inversamente proporcional a la inversión en mitigación. Entonces, la ecuación de la contaminación queda como:

$$P'(t) = -\delta_P P(t) + \gamma Q(t)/T(t), \quad P(0) = P_0. \tag{5.14}$$

Ahora tenemos una ecuación de movimiento extra para la inversión en mitigación $T(t)$ y también se le debe añadir su correspondiente variable dual. Vamos a regresar nuestras variables per cápita a las variables originales para simplificar el análisis del modelo, ya que no tenemos una tasa explicita para $T(t)$. Más adelante volveremos a retomar nuestras variables per cápita para comparar nuestros modelos.

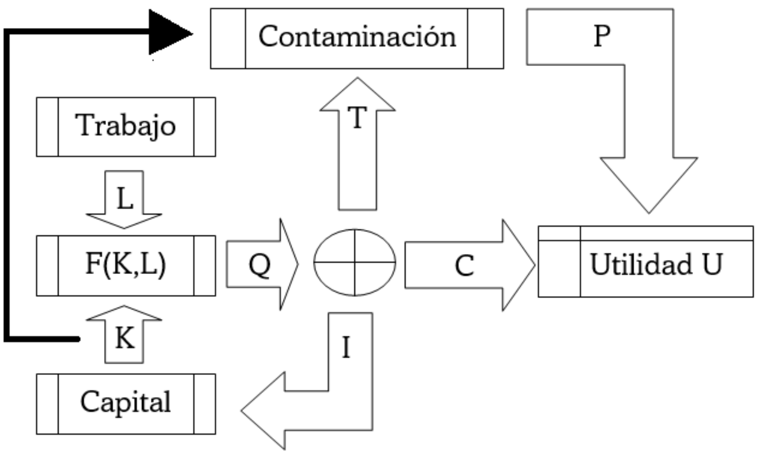

Figura 5.2: Modelo 2.

Análisis del modelo.

El Hamiltoniano de valor presente para el problema es:

$$\begin{aligned} H(C, I, K, T, P, t) =& e^{-rt} \left(\ln C - \sigma \frac{P^{1+\theta}}{1+\theta} \right) + \lambda_1 \left(AK^{\alpha} L^{1-\alpha} - I - T - C \right) \\ &+ \lambda_2 \left(-\delta_P P + \gamma AK^{\alpha} L^{1-\alpha}/T \right) + \lambda_3 (I - \mu K) \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde las variables duales λ_1, λ_2, λ_3 están asociadas a las ecuaciones de estado. Utilizando las condiciones de extremo de primer orden $\frac{\partial H}{\partial I} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial C} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial K} = -\lambda_3'$, $\frac{\partial H}{\partial T} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_2'$.
Las condiciones de extremo de primer orden para las dos variables de decisión I y C son:

$$-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{e^{-rt}}{C}.$$

Es decir

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{e^{-rt}}{C}. \tag{5.16}$$

Luego, las condiciones de primer orden para las variables de estado K, T y P son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
&\alpha\lambda_1 AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + \lambda_2\frac{\gamma}{T}\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \mu\lambda_3 = -\lambda_3',\\
&-\lambda_1 - \lambda_2\frac{\gamma}{T^2}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = 0,\\
&-\sigma P^{\theta}e^{-rt} - \delta_P\lambda_2 = -\lambda_2'.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Sustituyendo $\lambda_3 = \lambda_1$, en la primera ecuación, despejando λ_2 y sacando su derivada, podemos eliminar a las variables duales λ_1, λ_2, λ_3 de las ecuaciones, de esta manera obtenemos el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales para K, T, C y P:

$$AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \mu K + T + C + K'. \tag{5.18}$$

$$\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \alpha\frac{T}{K} - \frac{C'}{C} = \mu + r. \tag{5.19}$$

$$P' + \delta_P P = \gamma\frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{T}. \tag{5.20}$$

$$\sigma P^{\theta} = \frac{T}{\gamma AK^{\alpha}L^{1-\alpha}C}\left(T\left(\delta_P + r\right) + \alpha\frac{T}{K}K' + \frac{T}{C}C' - 2T'\right). \tag{5.21}$$

Tomando ahora las variables per cápita:

$$Ak^{\alpha} = (\mu + \eta)k + T + c + k'. \tag{5.22}$$

$$\alpha Ak^{\alpha-1} - \alpha\frac{T}{k} - \frac{c'}{c} = \eta + \mu + r. \tag{5.23}$$

$$P' + \delta_P P = \gamma\frac{Ak^{\alpha}}{T}. \tag{5.24}$$

$$\sigma P^{\theta} = \frac{T}{\gamma Ak^{\alpha}c}\left(T\left(\delta_P + \eta + r\right) + \alpha\frac{T}{k}k' + \frac{T}{c}c' - 2T'\right). \tag{5.25}$$

El sistema determina la dinámica interior óptima. Para los casos en los cuales $\sigma \to 0$, el sistema tiende al modelo Solow-Swan clásico.

El análisis del estado estacionario del problema de optimización conduce a las siguientes expresiones para los componentes de estado estacionario $\bar{T}$, $\bar{C}$, y $\bar{P}$:

$$\bar{T} = A\bar{k}^{\alpha} - \bar{k}(\eta + \mu + r)/\alpha. \tag{5.26}$$

$$\bar{c} = \bar{k}(\eta + \mu + r)/\alpha - \bar{k}(\mu + \eta). \tag{5.27}$$

$$\bar{P} = \frac{\gamma A}{\delta_P\left[A - \bar{k}^{1-\alpha}(\mu + \eta + r)/\alpha\right]}. \tag{5.28}$$

Luego sustituimos las componentes $\bar{T}$, $\bar{c}$, $\bar{P}$ en la ecuación (5.25):

$$\frac{\left[A - \bar{k}^{1-\alpha}(\eta + \mu + r)/\alpha\right]^{2+\theta}}{\bar{k}^{1-\alpha}} = \frac{\sigma\gamma^{1+\theta}A^{1+\theta}[((\eta + \mu + r)/\alpha) - \mu - \eta]}{\left(\delta_P + r + \eta\right)\delta_P{}^{\theta}}. \tag{5.29}$$

Ahora, para acotar el valor de $\bar{k}$ vemos que ni el numerador ni el denominador de la fracción en la parte izquierda de la ecuación pueden ser cero, esto nos dice que $\bar{k}$ cumple que:

$$0 \leq \bar{k} \leq (A\alpha/(\eta + \mu + r))^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{5.30}$$

5.2.1. Modelo porcentual tributario con inversión en mitigación.

Hemos mencionado el principio en el que se deben basar las políticas ambientales de impuestos, este es: 'el que contamina paga', sin embargo es necesario trazar los límites para que este principio no se convierta en 'pagar para contaminar', esto es una posibilidad muy plausible tanto en el modelo de impuestos tributarios porcentuales, como en el modelo de inversión directa en mitigación, ya que ninguno tiene medidas de control para que esto no ocurra; sin embargo una solución posible es combinar los dos modelos, ya que el modelo de mitigación busca una trayectoria óptima para la utilidad de la producción, y el tributario puede ser una medida para poder controlar el comportamiento de este último.

$$Q(t) = AK(t)^{\alpha}L^{1-\alpha}(1-\tau) = I(t) + T(t) + C(t). \tag{5.31}$$

Al igual que en el caso anterior, los impuestos solo afectan a la ganancia de producción percibida por la empresa, no afectan a la producción física real, por lo que no modifican a la ecuación.
El hamiltoniano entonces queda como:

$$\begin{aligned} H(C,I,K,T,P,t) =& e^{-rt}\left(\ln C - \sigma\frac{P^{1+\theta}}{1+\theta}\right) + \lambda_1\left(AK^{\alpha}L^{1-\alpha}(1-\tau) - I - T - C\right). \\ & + \lambda_2\left(-\delta_P P + (\gamma-\tau)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}/T\right) + \lambda_3(I-\mu K). \end{aligned} \tag{5.32}$$

De manera similar al caso anterior obtenemos las ecuaciones de trayectoria optima:

$$AK^{\alpha}L^{1-\alpha}(1-\tau) = \mu K + T + C + K'. \tag{5.33}$$

$$\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}(1-\tau) - \alpha\frac{T}{K} - \frac{C'}{C} = \mu + r. \tag{5.34}$$

$$P' + \delta_P P = (\gamma-\tau)\frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{T}. \tag{5.35}$$

$$\sigma P^{\theta} = \frac{T}{(\gamma-\tau)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}(1-\tau)C}\left(T\left(\delta_P + r\right) + \alpha\frac{T}{K}K' + \frac{T}{C}C' - 2T'\right). \tag{5.36}$$

Tomando ahora las variables per cápita:

$$Ak^{\alpha}(1-\tau) = (\mu+\eta)k + T + c + k'. \tag{5.37}$$

$$\alpha Ak^{\alpha-1}(1-\tau) - \alpha\frac{T}{k} - \frac{c'}{c} = \eta + \mu + r. \tag{5.38}$$

$$P' + \delta_P P = (\gamma-\tau)\frac{Ak^{\alpha}}{T}. \tag{5.39}$$

$$\sigma P^{\theta} = \frac{T^2}{(\gamma-\tau)Ak^{\alpha}(1-\tau)c}\left(\delta_P + \eta + r + \alpha\frac{k'}{k} + \frac{c'}{c} - 2\frac{T'}{T}\right). \tag{5.40}$$

Estas son las ecuaciones de trayectoria optima, si analizamos el estado estacionario de estas, obtenemos lo siguiente:

$$\bar{T} = A\bar{k}^{\alpha}(1-\tau) - \frac{\bar{k}}{\alpha}(\eta+\mu+r). \tag{5.41}$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{k}}{\alpha}(\eta+\mu+r) - \bar{k}(\mu+\eta). \tag{5.42}$$

$$\bar{P} = \frac{(\gamma-\tau)A\bar{k}^{\alpha}}{\delta_P\bar{T}}. \tag{5.43}$$

Luego sustituimos estas ecuaciones en (5.40) para obtener una expresión de $\bar{k}$ a partir de:

$$\sigma(1-\tau)\left(\frac{\mu+\eta+r}{\alpha} - (\mu+\eta)\right)\frac{(\gamma-\tau)^{1+\theta}A^{1+\theta}}{(\delta_P+\eta+r)\delta_P^{\theta}} = \frac{(A(1-\tau) - \frac{\bar{k}^{1-\alpha}}{\alpha}(\eta+\mu+r))^{2+\theta}}{\bar{k}^{1-\alpha}}. \tag{5.44}$$

Veamos que la ecuación (5.44) tiene una única solución, para esto vamos a introducir una nueva variable desconocida $x = \frac{\mu+r+\eta}{\alpha A(1-\tau)}\bar{k}^{1-\alpha}$, de esta manera obtenemos:

$$\Gamma = \frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}. \tag{5.45}$$

Con:

$$\Gamma = \sigma \left(\frac{\gamma - \tau}{\delta_P}\right)^{1+\theta} \frac{1 - \frac{\alpha(\mu+\eta)}{\mu+\eta+r}}{1 + \frac{\eta+r}{\delta_P}}. \tag{5.46}$$

La parte izquierda de la ecuación (5.45) $\Gamma = \frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ es estrictamente decreciente, que va desde ∞ en $x = 0$ hasta 0 en $x = 1$.
La función se intercepta con la recta Γ en algún punto x_1. Al ser estrictamente decreciente, solo puede haber un único x_1 y por tanto, al regresar a las variables originales, se concluye que solo puede haber un único $\bar{k}$ estacionario.

Así obtenemos una región para el estado estacionario de k.

$$0 < \bar{k} < (\frac{\alpha A(1-\tau)}{(\eta + \mu + r)})^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{5.47}$$

El extremo derecho de esta desigualdad representa el nivel máximo de capital, es decir, el tamaño que la economía con parámetros A, η, μ, r, α es capaz de alcanzar, considerando también el término de impuestos τ, podemos ver que no limita de ninguna manera la emisión de polución P, para esto, es necesario fijar un valor $\bar{P}$ para evitar una mayor degradación ambiental.

Podemos determinar algunas propiedades de la economía al analizar las ecuaciones (5.41)-(5.46). Para esto veamos cómo se comportan sus respectivas gráficas. Antes de comenzar es necesario que asignemos valores a los parámetros A, τ, η, μ, r, α, θ, σ, γ y δ_P.

Antes que nada, hay que definir adecuadamente las dimensiones de nuestros parámetros, primero, unidades económicas $[T], [C], [K], [Q]$ las dejaremos expresadas como $10^6\$$ es decir, las iremos tomando por millones, luego, en el modelo DICE $[P]$ tiene como unidad de medida $10^{12}tC$ con tC siendo, toneladas de Carbono, los parámetros α, μ y η son adimensionales, y $[r]$ se mide en s^{-1}, ahora, si nos fijamos en nuestra ecuación de contaminación (5.39) y la reescribimos como:

$$\frac{\gamma - \tau}{\delta_P} = (P + P'/\delta_P)\frac{T}{Q}.$$

De aquí podemos concluir que $[\delta_P] = s^{-1}$ y además $\left[\frac{\gamma-\tau}{\delta_P}\right] = [P] = 10^{12}tC$, por lo tanto: $[\gamma] = [\tau] = 10^{12}tC/s$, ahora, para estimar las unidades del parámetro σ veamos nuestra función de utilidad (4.3), y tomando al $ln(C)$ como adimensional, esto nos dice que: $[\sigma] = [P]^{(-1-\theta)} = 10^{12}tC^{(-1-\theta}$, por último, nuestro parámetro de productividad A, podemos reescribir la ecuación de producción, de manera que: $[A] = \frac{[Q]}{[K]^\alpha} = 10^6\$^{1-\alpha}$.
Ya con una estimación de las dimensiones de los parámetros, podemos empezar con la aproximación de sus valores.

Como se mencionó en secciones anteriores, en la literatura se suele tomar a $\alpha > 1 - \alpha$ por lo que le asignaremos el valor de $\alpha = 0.66$, luego dependiendo del país, el valor de los impuestos fijos τ puede variar, en el caso de México este valor ronda el 10 % por lo que $\tau = 0.1$, para A, μ, r, η y δ_P sacamos los valores directamente de los datos del modelo DICE 2016(3), de manera que: $A = 5.115$, $\mu = 0.1$, $r = 0.015$, $\eta = 0.134$, $\delta_P = 0.0001$, $\sigma = 0.00236$ y $\gamma = 0.016$, cabe resaltar que estos son valores propuestos para una economía global, aquí los utilizamos solamente para analizar el comportamiento de las gráficas, estos valores dependen de la región o tipo de economía sobre la cual se quiere modelar.

Ahora veamos el comportamiento de la parte derecha de la ecuación (5.44).

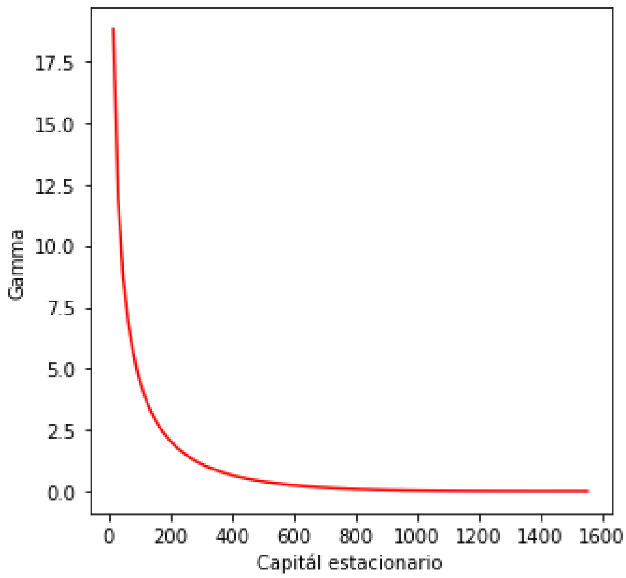

Figura 5.3: Ecuación no lineal (5.44) que describe el comportamiento del capital estacionario en relación al parámetro Γ, que representa el daño ambiental.

Primero, podemos ver en la figura (5.3) que para un menor valor de Γ, se incrementa el capital máximo de nuestra economía, el valor de Γ depende directamente de γ que representa la suciedad de la economía, por ende, para un menor valor de suciedad en la economía, se incrementa el tamaño máximo de nuestro capital estacionario $\bar{k}$.
Directamente de las ecuaciones (5.37) y (5.39) vemos que tenemos una menor inversión en mitigación $\bar{T}$ y también a un valor más pequeño en la contaminación $\bar{P}$. Por lo que invertir en una tecnología más limpia beneficia no solo al ambiente sino también a la economía.
Cuando γ tiende a cero, entonces $\bar{k}$ tiende a su máximo nivel: $\bar{k} = (\frac{\alpha A(1-\tau)}{(\eta+\mu+r)})^{\frac{1}{1-\alpha}}$, mientras que $\bar{T}$ y $\bar{P}$ tienden ambos a cero.

Luego, al graficar la ecuación (5.37):

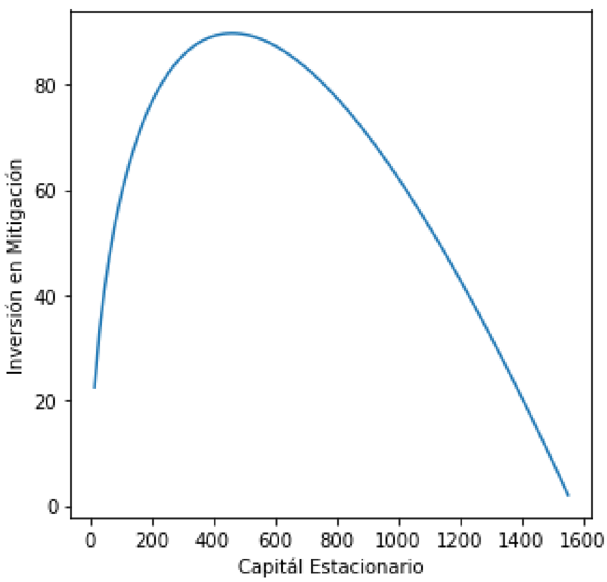

Figura 5.4: Inversión en mitigación [T] en relación al capital estacionario alcanzado.

Para una economía grande $\bar{k}$, la inversión en mitigación $\bar{T}$ es más pequeña. Lo que nos dice esto es que entre más grande sea una economía, cada vez es menos conveniente invertir en mitigación, pese a que les afecte directamente en la utilidad a largo plazo.

Ahora, observando la gráfica de (5.39) tenemos:

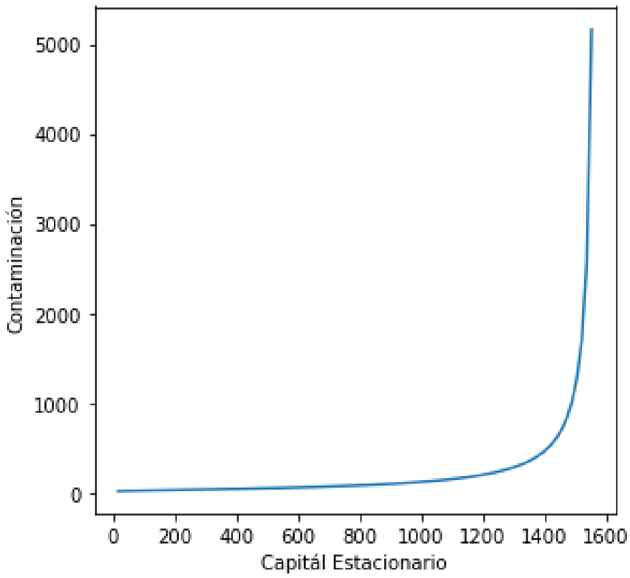

Figura 5.5: Flujo de contaminación en relación al capital estacionario.

Podemos ver que, para un capital estacionario grande, el nivel de contaminación estacionaria emitida crece, esto viene del término de vulnerabilidad ambiental, que entre más pequeño es, el punto estacionario de $\bar{k}$ está más cerca de su extremo derecho. Esto quiere decir que las economías grandes, y con poca vulnerabilidad ambiental, no se ven tan afectadas por las consecuencias climatológicas y por tanto no es necesario para estas, estabilizar sus emisiones o reducirlas.

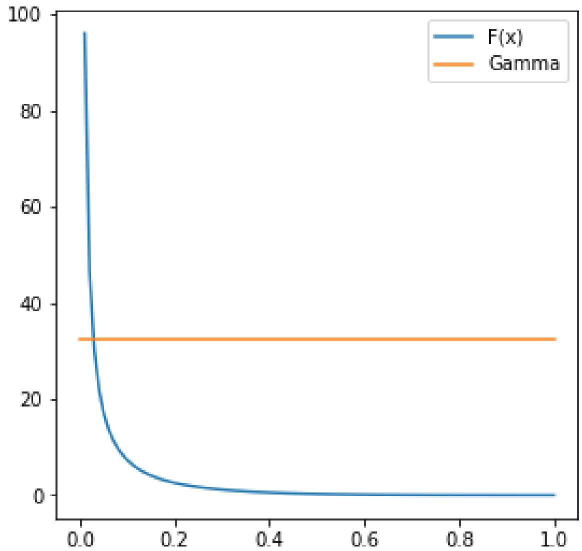

Figura 5.6: Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con pequeña vulnerabilidad ambiental.

Ahora, la economía también depende del decaimiento de contaminación δ_P. Entre más pequeño sea este valor, el valor estacionario $\bar{P}$ se incrementa y la economía $\bar{k}$ decrece.

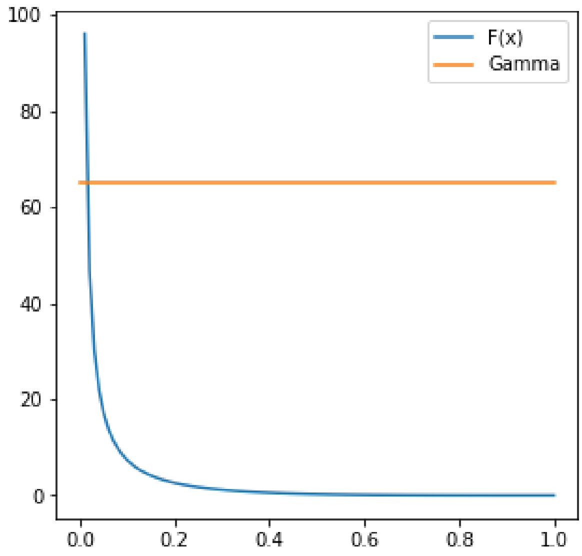

Figura 5.7: Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con una tasa de decaimiento pequeña.

Por último, el valor τ solo influye en hacer los límites de estos valores más pequeños, es decir el valor estacionario máximo de $\bar{k}$ es más pequeño, y por ende, el valor de contaminación estacionario también.

Podemos ver que los esfuerzos en mitigación solo logran mantener el valor emisión de contaminación estable, no es posible reducirlo a cero, la tasa de decaimiento δ_P juega un valor importante es este problema, ya que la única manera de hacer que la contaminación decrezca es incrementar este valor lo más posible. En la realidad, la regeneración del ambiente es muy lenta, ya que los gases de efecto invernadero permanecen mucho tiempo en la atmosfera, en definitiva, el mejor camino a tomar es invertir en tecnologías más limpias, así como en maneras de lograr acelerar la regeneración ambiental.
Ahora comparemos con el modelo que únicamente se centra en la inversión en mitigación, sin los impuestos tributarios τ:

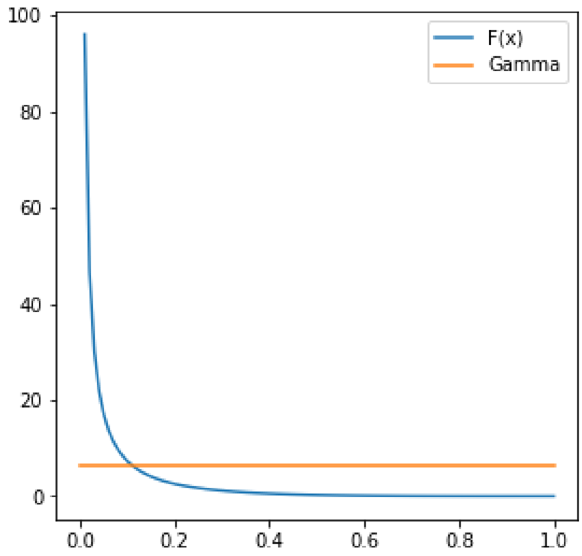

Figura 5.8: Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$ con una tasa de contaminación pequeña.

El valor Γ es muy importante para este propósito ya que nos dice la presión ambiental que hay sobre una región, relaciona la intensidad de la contaminación γ de la actividad económica con la tasa de decaimiento δ_P del stock de contaminación. Todo esto a su vez relacionado con el parámetro de vulnerabilidad de la economía σ.

Conclusión

Este trabajo pretende dar un paso para resolver un importante problema económico-ambiental: la sobreexplotación desmedida del ambiente para satisfacer las necesidades de nuestro sistema de producción. Si bien es cierto que nuestro estilo de vida es inherentemente destructivo con el ambiente, el avance tecnológico que ha habido en la última década nos ha permitido aprovechar cada vez más eficientemente los recursos naturales a nuestra disposición. Para incentivar a las empresas y a los sectores productivos a realizar el cambio a tecnologías más limpias es necesario hacer uso de las herramientas de las que disponen los agentes reguladores de dichos sectores; como se menciono anteriormente, los impuestos ambientales nos ayudaran a lograr este objetivo. Al comparar el modelo de impuestos con el modelo clásico que solamente se guía por el incremento de la empresa o sector productivo vemos que:

Si la tasa de decaimiento natural de la contaminación se hace más pequeña, entonces los niveles de contaminación crecen y el nivel de capital máximo baja, esto sucede al tomar en cuenta una utilidad que depende de la contaminación P para añadir el costo de las externalidades negativas dentro de la producción, en el caso en el que no se tomaran dichas consideraciones, el nivel de capital k no se verá afectado por el aumento de contaminación. El valor del capital óptimo $\bar{k}$ es lo que caracteriza el tamaño óptimo de la economía. Tomando en cuenta que los gases de efecto invernadero permanecen mucho tiempo en la atmosfera, la tasa de decaimiento es muy pequeña, y requiere mucho trabajo por parte de todas las naciones en una misma región para lograr alterar su valor.

La tasa de decaimiento es de suma importancia para el modelo, esto porque a pesar de que se tomen todas las medidas de impuestos, como se ve en el modelo tributario con inversión en mitigación, esto solo nos sirve para controlar la contaminación emitida, más no es de mucha ayuda para disminuir la contaminación actual. Esta es una conclusión que comparten otros modelos ambientales con una descripción más elaborada en los contaminantes específicos para cada tipo medio, como pueden ser modelos de contaminación de aire o de agua. A lo que se quiere llegar con este punto, es que no solo es necesario una correcta recaudación de impuestos y esfuerzos en mitigar la propia contaminación por la producción, sino que se necesitan de esfuerzos específicos para lograr que la tasa de decaimiento logre aumentar su valor, esto puede lograrse con programas ambientales que ayuden a la recuperación del ambiente, y otro punto a favor para este cometido es que esta acción también beneficiaria al crecimiento de la economía; tomando como referencia el modelo centrado en la mitigación vemos que para una tasa de contaminación γ pequeña, y una fuerte vulnerabilidad ambiental σ(como es el caso de varios sectores productivo en México que dependen del capital natural) se incrementa el nivel óptimo de la economía $\bar{k}$, esto lo podemos lograr al aumentar el valor de los impuestos tributarios τ, que a la larga no afectará el crecimiento económico, además esto también nos lleva a una menor inversión en mitigación $\bar{T}$ y a un nivel de emisión de contaminación $\bar{P}$ más bajo. Cuando $(\gamma - \tau)$ tiende a cero, el capital estacionario $\bar{k}$ tiende a su máximo nivel. Ahora, el significado de $(\gamma - \tau)$ es que se están haciendo esfuerzos para invertir en tecnologías más limpias, como se menciona en su respectiva sección, estos esfuerzo pueden incluir el uso de materias primas recicladas, maquinaria que use otro tipo de combustible aparte del fósil entre otros.

De igual manera se puede ver que para una economía grande, es decir, un valor de $\bar{k}$ grande, los esfuerzos en mitigación son menos necesarios, y en caso de una vulnerabilidad ambiental σ pequeña, el nivel de contaminación se dispara; este puede ser el caso de empresas petroleras o cualquier tipo de agente productivo que no dependa directamente del capital natural, en México, la gran mayoría de la producción depende de su capital natural, sin embargo, un buen porcentaje de su PIB depende de empresas petroleras. Una posible solución a este problema radica en la constante de presión ambiental Γ mencionada en la sección de mitigación con impuestos tributarios, ya podemos ajustar su valor para distintos valores de

σ por medio del término τ, de manera que limitemos las emisiones de estas empresas. En este sentido los impuestos τ se adaptarían para mantener el valor de Γ estable.

El parámetro Γ toma en cuenta la presión neta de la actividad humana sobre el medio ambiente, esto es, la tasa de contaminación γ de la actividad económica en comparación con la tasa de decaimiento natural δ_P de contaminación, y siendo equilibrada con vulnerabilidad de la economía, σ, y tomando en cuenta el porcentaje de impuestos τ, que nos sirve como medida de control, vemos que Γ combina tanto la presión de la economía sobre el medio ambiente $(\frac{\gamma-\tau}{\delta_P})$ como la presión de la calidad ambiental sobre la economía σ, el parámetro Γ es un indicador del daño ambiental.

Para lograr explicar este punto, vamos a plantear algunos escenarios hipotéticos con distintos valores para las constantes γ y σ.

Cabe mencionar que el parámetro θ nos dice que tan rápido afectara la variable P a la economía, este valor nos sirve para ajustar el parámetro Γ para distintas expectativas ambientales, que no es posible estimar por el momento, lo dejaremos como $\theta = 1$ ya que es un valor neutro.

Tomemos un valor arbitrario de $\Gamma = 1$, y los valores de las constantes económicas para las gráficas anteriores, es decir: $\alpha = 0.66$, $A = 5.115$, $\mu = 0.1$, $r = 0.015$, $\eta = 0.134$ y $\delta_P = 0.0002$.
Ahora, tomando un valor alto para la tasa de contaminación $\gamma = 0.5$ y una baja vulnerabilidad ambiental $\sigma = 0.00236$, para que Γ se mantenga en 1, esto nos daría una tasa de impuestos de $\tau = 0.3175$, esto nos da como resultado la siguiente gráfica:

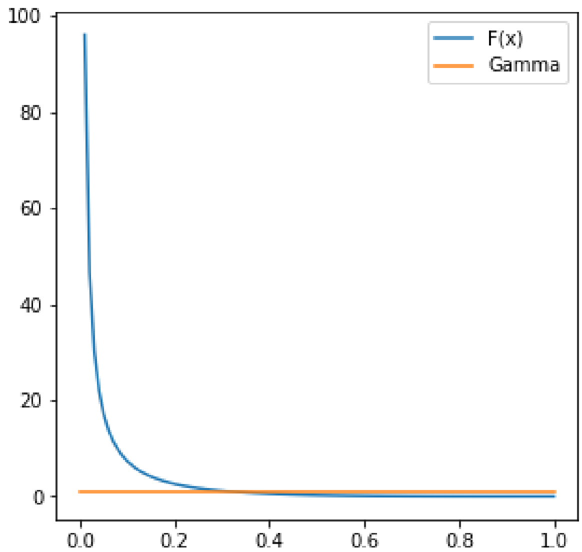

Figura 5.9: Punto estacionario de $\frac{(1-x)^{2+\theta}}{x}$.

Tomando ahora una tasa de contaminación pequeña $\gamma = 0.1$ y una vulnerabilidad ambiental grande $\sigma = 10$ el valor de τ es de 0.097, que ronda la tasa del 10 % aplicada actualmente.

También es posible que se presenten casos en el que tanto la vulnerabilidad como la tasa de contaminación sean grandes, esto nos da márgenes de impuestos de hasta el 50 %, como en el caso de que tengamos $\gamma = 0.5$ y $\sigma = 10$, es fácil ver que el factor de contaminación tiene más peso en el parámetro Γ.

Ahora, hay que señalar que el parámetro Γ funciona únicamente como indicador dentro del modelo de impuestos ambientales, es decir, nos indica el tamaño máximo de una economía de manera que el daño ambiental se estabilice a un estado estacionario, si el daño ambiental de una economía es muy grande, el parámetro Γ nos dice que la economía tiene que ser pequeña para que la contaminación emitida sea estable, por el contrario, si el parámetro Γ es pequeño quiere decir que la economía tiene más rango para crecer sin afectar a la contaminación emitida.

Al inicio de este trabajo se mencionó que una externalidad son todos los efectos dañinos para la sociedad, generados por actividades de producción o consumo, las cuales no están presentes en los costes, la contaminación se puede ver como una externalidad negativa, ya que las decisiones de una empresa pueden afectar negativamente tanto a los consumidores como a las demás empresas mediante las perdidas monetarias que ocasiona el cambio climático. Nuestra solución fue interiorizar esos costes por medio de las funciones de utilidad. Según el economista Hal Varian en su libro, 'Microeconomía intermedia'(45) al interiorizar los costes de la contaminación, se forma un mercado como consecuencia de la reasignación de los derechos para contaminar. Esto se puede hacer de varias maneras, una de ellas siendo la recaudación de impuestos como es nuestro caso, sin embargo, Hal Varian menciona un problema: se necesita establecer un nivel óptimo de contaminación para establecer dicho impuesto, justo como en nuestro modelo en donde tenemos que establecer un nivel de daño ambiental. Como se mencionó anteriormente, este parámetro de daño ambiental depende únicamente de los objetivos de la agencia reguladora. Idílicamente para cumplir con la agenda ambiental 2030 de la que México forma parte, el valor del parámetro de daño ambiental debería bajar paulatinamente un 30 % para entonces, sin embargo, las cuestiones políticas van más allá del objetivo de este trabajo. Si bien es cierto que son muchos los factores que desconocemos que afectan la relación entre nuestro sistema económico y el medio ambiente, esta propuesta pretende dar un paso más para alcanzar los objetivos a corto y largo plazo que necesitamos lograr en el futuro, mediante un modelo de impuestos ambientales bien enfocado y parámetros verificables y cuantificables.

Glosario

adaptación ambiental Es el proceso de ajuste al clima real o proyectado y sus efectos. En los sistemas humanos, la adaptación trata de moderar o evitar los daños o aprovechar las oportunidades beneficiosas. 1

agente productivo Es el encargado de tranformar los factores productivos en el producto por medio de su capitál. 11

biomas Segun el ecólogo Whittaker, un bioma es una agrupación de ecosistemas terrestres en un continente dado que son similares en estructura de vegetación o fisionomía, en las características principales del ambiente del cual esta estructura es una respuesta, y en algunas características de sus comunidades animales.. 5

capital Es el total de recursos físicos y financieros que posee una entidad económica. 11

capital humano Es la medida del valor económico de las habilidades profesionales de la mano de obra. 11

crecimiento exógeno El crecimiento exógeno es un principio clave de la teoría económica neoclásica, dice que el avance tecnológico independiente de las fuerzas económicas promueve el crecimiento. Tanto las teorías de crecimiento exógeno como las de crecimiento endógeno forman parte de los modelos de crecimiento neoclásicos. 21

endógena Una variable endógena es aquella cuyo valor está determinado por las relaciones establecidas dentro del modelo en el que está incluida. 21

externalidad negativa La externalidad negativa se refiere a todo tipo de efectos dañinos para la sociedad, generados por actividades de producción o consumo, las cuales no están presentes en sus costes. 5

grupos taxonómicos En Biología, es el nivel jerárquico en el que se clasifica científicamente a cada grupo de organismos o taxones, atendiendo a su semejanza o proximidad filogenética. Las categorías taxonómicas se estructuran en una jerarquía de inclusión, en la que un grupo abarca a otros menores y éste, a su vez, queda subordinado a uno mayor. De esta manera, los taxones quedan agrupados dentro de un rango taxonómico o categoría taxonómica que los incluye. 6

impuestos Es un tributo o carga que los agentes economicos están obligados a pagar a alguna organización(gobierno, rey, etc) sin que se le entregue o asegure un beneficio directo por su pago. 1

impuestos ambientales Los impuestos ambientales (también denominados 'impuestos verdes' o 'ecotributos') son instrumentos económicos o de mercado que nacen de la intención de incluir en los precios los costos ambientales negativos de la producción o el uso de bienes. 6, 7

insumos productivos Son aquellos bienes intermedios con los que se pueden producir otros bienes, es decir, productos semielaborados para producir otros. 11

macroeconomía Estudio económico que se centra en el comportamiento de una zona, país o grupo de países, considerada en su conjunto y empleando magnitudes colectivas o globales como la renta nacional, producción total, empleo, las inversiones o las importaciones y exportaciones. 13

materias primas Es todo bien que es transformado durante un proceso de producción hasta convertirse en un bien de consumo o producto agragado. 11

mitigación ambiental Intervención humana encaminada a reducir las fuentes o potenciar los sumideros de gases de efecto invernadero. 1

países en desarrollo Un país en desarrollo es un país en el que su economía se encuentra en pleno desarrollo económico. Es decir, una economía que, mediante un proceso acelerado de inversión y formación, consigue crecer a ritmos muy acelerados. 5

PIB El producto interior bruto o PIB, es un indicador económico que refleja el valor monetario de todos los bienes y servicios finales producidos por un territorio en un determinado periodo de tiempo. Se utiliza para medir la riqueza que genera un país. 5

producto agregado Resultado de un proceso de producción donde ya se toma en cuenta el valor agragado a los insumos productivos o materias primas. 11

producto marginal Producto adicional que se puede obtener empleando una unidad más de un factor productivo, manteniendo todos los demás factores productivos constantes. 12

renta nacional También llamando ingreso nacional, es una magnitud económica que expresa los ingresos que reciben los distintos factores productivos existentes durante un periodo de tiempo determinado. 13

sector productivo Un sector productivo(o sector económico) es el conjunto de actividades productivas o comerciales que reúnen una serie de características similares. Es decir, son negocios que cuentan con una naturaleza común. 43

subsidios Ayuda económica que una persona o entidad recibe de un organismo oficial para satisfacer una necesidad determinada. 6

sumideros de carbono Los principales sumideros naturales de carbono del planeta son los océanos, los bosques y los suelos fértiles. Los océanos son los principales captadores de carbono, a través del plancton y los corales, fundamentalmente. Absorben alrededor del 50 % del carbono atmosférico. 7

valor agregado Es el valor económico que el proceso de producción le suma a algún bien o servicio. 11

Referencias

[1] Home page - OECD, https://www.oecd.org/.

[2] IEPP 4.1.1. https://apps1.semarnat.gob.mx:8443/dgeia/indicadores$_v$erdes16/indicadores/04$_i$nnovacion/4.1.1.html.

[3] William D. Nordhaus, https://williamnordhaus.com/dicerice-models.

[4] Informe de la Situación del Medio Ambiente en México, edición 2018. Technical report, Semarnat, México, 2019.

[5] Impacto Económico del Cambio Climático en México. Technical report, CEDRSSA, Palacio Legislativo de San Lazaro. Ciudad de México, January 2020.

[6] Frank Ackerman and Elizabeth A Stanton. Climate Economics: The State of the Art. THE STATE OF THE ART, page 148.

[7] Joseph Alcamo, editor. Image 2.0. Springer Netherlands, Dordrecht, 1994.

[8] William J. Baumol and Wallace E. Oates. The theory of environmental policy. Cambridge University Press, Cambridge [Cambridgeshire] ; New York, 2nd ed edition, 1988.

[9] Valentina Bosetti, Carlo Carraro, Marzio Galeotti, Emanuele Massetti, and Massimo Tavoni. WITCH A World Induced Technical Change Hybrid Model. The Energy Journal, 27:13–37, 2006.

[10] D. Bozhinova, M. K. van der Molen, I. R. van der Velde, M. C. Krol, S. van der Laan, H. A. J. Meijer, and W. Peters. Simulating the integrated summertime ¹⁴CO₂ signature from anthropogenic emissions over Western Europe. Atmospheric Chemistry and Physics, 14(14):7273–7290, July 2014.

[11] Scott Callan and Janet M. Thomas. Environmental economics & management: theory, policy, and applications. South-Western Cengage Learning, Mason, OH, USA, edition 6 edition, 2013.

[12] Michael Ralph Caputo. Foundations of dynamic economic analysis: optimal control theory and applications. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2005. OCLC: ocm54767489.

[13] Alpha C. Chiang and Kevin Wainwright. Fundamental methods of mathematical economics. McGraw-Hill [u.a.], Boston, Mass., 4. ed., internat. ed., [repr.] edition, 2011.

[14] Partha Dasgupta. The Optimal Depletion of Exhaustible Resources 1,2. REVIEW OF ECONOMIC STUDIES, page 26.

[15] Hadi Dowlatabi. Scale and Scope in Integrated Assessment: Lessons from Ten Years with Integrated Climate Assessment Model (ICAM). Integrated Assessment, 3(2-3):122–134, 2010.

[16] Organisation for Economic Co-operation and Development, editor. Environmentally related taxes in OECD countries: issues and strategies. Environment. OECD, Paris, 2001.

[17] Chris Hope, John Anderson, and Paul Wenman. Policy analysis of the greenhouse effect. Energy Policy, 21(3):327–338, March 1993.

[18] Harold Hotelling. The Economics of Exhaustible Resources. Journal of Political Economy, 39(2):137–175, 1931.

[19] Charles D. Kolstad. Environmental economics. Oxford University Press, New York, 2nd ed edition, 2011. OCLC: ocn495996799.

[20] Gürkan Selçuk Kumbaroğlu. Environmental taxation and economic effects: a computable general equilibrium analysis for Turkey. Journal of Policy Modeling, 25(8):795–810, November 2003.

[21] Dieter Lüthi, Martine Le Floch, Bernhard Bereiter, Thomas Blunier, Jean-Marc Barnola, Urs Siegenthaler, Dominique Raynaud, Jean Jouzel, Hubertus Fischer, Kenji Kawamura, and Thomas F. Stocker. High-resolution carbon dioxide concentration record 650,000–800,000 years before present. Nature, 453(7193):379–382, May 2008.

[22] Michael E. Mann, Raymond S. Bradley, and Malcolm K. Hughes. Northern hemisphere temperatures during the past millennium: Inferences, uncertainties, and limitations. Geophysical Research Letters, 26(6):759–762, March 1999.

[23] Alan Manne, Robert Mendelsohn, and Richard Richels. A model for evaluating regional and global effects of GHG reduction policies. page 18, 2000.

[24] Alan S Manne. Global 2100: An Almost Consistent Model of CO2 Emission Limits. page 17.

[25] Masson-Delmotte, P. Zhai, V. , A. Pirani, S. L. Connors, C. Péan, S. Berger, N. Caud, Y. Chen, L. Goldfarb, M. I. Gomis, M. Huang, K. Leitzell, E. Lonnoy, J. B. R. Matthews, T. K. Maycock, O. Waterfield, R. Yelekçi, Yu Zhou, and B. Zhou, editors. Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2021.

[26] Donella H. Meadows, Jørgen Randers, and Dennis L. Meadows. The limits to growth: the 30-year update. Earthscan, London, reprint edition, 2009.

[27] Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales. Programa Especial de Cambio Climático 2021-2024.

[28] William Nordhaus. Evolution of modeling of the economics of global warming: changes in the DICE model, 1992–2017. Climatic Change, 148(4):623–640, June 2018.

[29] William D. Nordhaus and Zili Yang. A Regional Dynamic General-Equilibrium Model of Alternative Climate-Change Strategies. The American Economic Review, 86(4):741–765, 1996.

[30] Stephen C. Peck and Thomas J. Teisberg. CETA: A Model for Carbon Emissions Trajectory Assessment. The Energy Journal, 13(1):55–77, 1992.

[31] Neal Potter and Francis T. Christy. Trends in Natural Resource Commodities:. Soil Science, 94(5):349, November 1962.

[32] Hannah Ritchie, Max Roser, and Pablo Rosado. CO and Greenhouse Gas Emissions. Our World in Data, May 2020.

[33] Jan Rotmans and Bert De Vries, editors. Perspectives on global change: the TARGETS approach. Cambridge University Press, Cambridge [England], 1997.

[34] José Sarukhán, editor. Capital natural y bienestar social. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad CONABIO, México, 2006.

[35] Sonia I. Seneviratne, Neville Nicholls, David Easterling, Clare M. Goodess, Shinjiro Kanae, James Kossin, Yali Luo, Jose Marengo, Kathleen McInnes, Mohammad Rahimi, Markus Reichstein, Asgeir Sorteberg, Carolina Vera, Xuebin Zhang, Matilde Rusticucci, Vladimir Semenov, Lisa V. Alexander, Simon Allen, Gerardo Benito, Tereza Cavazos, John Clague, Declan Conway, Paul M. Della-Marta, Markus Gerber, Sunling Gong, B. N. Goswami, Mark Hemer, Christian Huggel, Bart van den Hurk, Viatcheslav V. Kharin, Akio Kitoh, Albert M.G. Klein Tank, Guilong Li, Simon Mason, William McGuire, Geert Jan van Oldenborgh, Boris Orlowsky, Sharon Smith, Wassila Thiaw, Adonis Velegrakis, Pascal Yiou, Tingjun Zhang, Tianjun Zhou, and Francis W. Zwiers. Changes in Climate Extremes and their Impacts on the Natural Physical Environment. In Christopher B. Field, Vicente Barros, Thomas F. Stocker, and Qin Dahe, editors, Managing the Risks of Extreme Events and Disasters to Advance Climate Change Adaptation, pages 109–230. Cambridge University Press, 1 edition, May 2012.

[36] Ralph David Simpson, Michael A. Toman, and Robert U. Ayres, editors. Scarcity and growth revisited: natural resources and the environment in the new millennium. Resources for the Future, Washington, DC, 2005.

[37] Sjak Smulders and Raymond Gradus. Pollution abatement and long-term growth. European Journal of Political Economy, 12(3):505–532, November 1996.

[38] Susan Solomon, Intergovernmental Panel on Climate Change, and Intergovernmental Panel on Climate Change, editors. Climate change 2007: the physical science basis: contribution of Working Group I to the

Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2007. OCLC: ocn132298563.

[39] Robert M. Solow. A Contribution to the Theory of Economic Growth. The Quarterly Journal of Economics, 70(1):65, February 1956.

[40] Thomas Sterner. Fuel taxes: An important instrument for climate policy. Energy Policy, 35(6):3194–3202, June 2007.

[41] Nancy L. Stokey. Are There Limits to Growth? International Economic Review, 39(1):1, February 1998.

[42] M. Stuiver, R. L. Burk, and P. D. Quay. ^{13} C/ ^{12} C ratios in tree rings and the transfer of biospheric carbon to the atmosphere. Journal of Geophysical Research, 89(D7):11731, 1984.

[43] Elizabeth Symons, John Proops, and Philip Gay. Carbon Taxes, Consumer Demand and Carbon Dioxide Emissions: A Simulation Analysis for the UK. Fiscal Studies, 15(2):19–43, May 1994.

[44] Hal Turton. ECLIPSE: An integrated energy-economy model for climate policy and scenario analysis. Energy, 33(12):1754–1769, December 2008.

[45] Hal R. Varian. Intermediate microeconomics: a modern approach. W.W. Norton & Co, New York, 8th ed edition, 2010. OCLC: ocn317920200.