



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRUPOS PARATOPOLÓGICOS

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

ALFREDO SÁNCHEZ JIMÉNEZ

Director de Tesis:

DR. OLEG OKUNEV

Puebla, Pue.

Diciembre del 2014



BUAP

DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

ALFREDO SÁNCHEZ JIMÉNEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 3 de DICIEMBRE de 2014, con la tesis titulada:

“Grupos paratopológicos”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 5 de diciembre de 2014


DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Dedicado a mis padres
Pedro Sánchez López,
Ma. Santo Jiménez López
y Hermanos, y a mi prometida
QFB. Noelia Pulido López.

Agradecimientos

A Dios...

Por la oportunidad que me dio de conocer y contribuir en esta rama de la Ciencia; por la capacidad que puso en mí para apropiarme de estos importantes conocimientos Matemáticos, lo cual permitió culminar con éxito la maestría; y por haber Guardado y Guiado mis pasos día con día en el transcurso de mi caminar.

“Tuya es, oh Jehová, la magnificencia y el poder, la gloria, la victoria y el honor; porque todas las cosas que están en los cielos y en la tierra son tuyas. Tuyo, oh Jehová, es el reino, y tú eres excelso sobre todos. Las riquezas y la gloria proceden de ti, y tú dominas sobre todo; en tu mano esta la fuerza y el poder, y en tu mano el hacer grande y dar poder a todos.

1 Crónicas 29:11-12”

A mis Padres y Hermanos...

A ustedes que continuamente me ayudaron a crecer y a ser lo que hoy soy.

Aunque estuve lejos de ustedes nunca me dejaron de mostrar todo su apoyo y confianza. Por ser simplemente lo mejor que Dios me ha regalado. ¡Si a ustedes! hoy dedico uno de mis logros mas anhelados.

A mi Prometida...

A la Q.F.B. Noelia Pulido López que siempre me ha motivado y apoyado incondicionalmente, quien pronto será mi esposa y a su familia que me han brindado su hermoso cariño desde que obtuve amistad con ellos.

A mis Amigos...

Por el apoyo recibido durante la carrera, la confianza brindada en los momentos difíciles y especiales; por lo cual no existen palabras que expresen lo que han significado en el transcurso de mis estudios. Mis más sinceros y profundos agradecimientos.

A mi Asesor...

¡Con mucho cariño y admiración al Dr. Oleg Okunev!

A usted que con mucha dedicación me brindo parte de sus conocimientos para poder realizar la tesis.

A usted que me dio la oportunidad de trabajar a su lado en el desarrollo de este proyecto.

Gracias a mis sinodales por observar, corregir y mejorar este trabajo. Por su gran disposición y sus múltiples sugerencias.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que me otorgó durante el desarrollo de mi maestría.

Introducción

Un *Grupo Paratopológico* es un grupo algebraico con una topología respecto a la cual la operación de multiplicación (adición) es continua (pero la continuidad de la operación de elemento inverso no se requiere). Un clásico ejemplo de grupo paratopológico que no es un grupo topológico es $(\mathbb{R}, +, \tau_S)$, donde τ_S es la topología de Sorgenfrey. El estudio de grupos paratopológicos está en gran parte concentrado en búsqueda de propiedades que puedan ser generalizados de la clase de grupos topológicos, en particular, de las propiedades topológicas que implican que un grupo paratopológico sea un grupo topológico.

Es por eso que nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cuándo un grupo paratopológico es un grupo topológico? Para responder esta pregunta sólo hay que ver bajo qué propiedades topológicas, la operación de elemento inverso es continua. Con el paso del tiempo, grandes personalidades contribuyentes en las matemáticas han dado varias respuestas a esta pregunta. Por ejemplo:

- Ellis demostró en [4], que todo grupo paratopológico compacto es un grupo topológico, este resultado consecuentemente fue generalizado en [3] y [1].
- Si un grupo paratopológico G es la imagen inversa bajo un homomorfismo perfecto de un grupo topológico, entonces G es también un grupo topológico.
- Si un grupo paratopológico H es la imagen de un grupo topológico totalmente acotado T en virtud de un homomorfismo continuo, entonces H también es un grupo topológico.

También, haremos notar algunas de las diferencias que hay entre los grupos paratopológicos y los grupos topológicos respecto a algunas propiedades topológicas. Es un teorema clásico que todo grupo topológico T_0 es completamente regular [6]; en el caso de grupos paratopológicos, hay ejemplos que distinguen las propiedades de separación T_0 , T_1 , T_2 y T_3 [2]. La cuestión si todo grupo paratopológico regular es de Tychonoff queda abierta.

Por ejemplo, $(\mathbb{R}^2, +, \tau)$ es un grupo paratopológico T_2 y no es regular, donde $+$ es la operación suma en \mathbb{R}^2 y τ es la *topología ladrillo*, que describiremos más adelante.

El clásico Teorema de Kakutani afirma que todo grupo topológico primero numerable es metrizable [6]. Este resultado no es cierto para grupos paratopológicos, en el capítulo I mostramos un contraejemplo. Un resultado reciente es que todo grupo paratopológico abeliano y primero numerable es submetrizable [5].

El objetivo de este trabajo es estudiar bajo qué propiedades topológicas es suficiente dotar al grupo paratopológico para que ahora sea un grupo topológico.

Para esto el trabajo se encuentra dividido en 3 capítulos. En el capítulo I se proporcionan y desarrollan algunos de los resultados que serán empleados a lo largo del trabajo. Así, en este capítulo se consideran los espacios topológicos, los axiomas de separación, propiedades de conjuntos densos en ninguna parte y algunas relaciones entre funciones continuas, entre otros temas. De igual manera, se considera un ligero estudio relacionado con la teoría de grupos. También, mostramos algunas definiciones y propiedades de los grupos topológicos. Además, presentaremos los resultados más importantes en los grupos topológicos que en los grupos paratopológicos no necesariamente son válidos, tales contraejemplos se estudian en el capítulo II.

El capítulo II se dedica al estudio de definiciones y propiedades de los grupos paratopológicos; para motivar el estudio presentaremos un grupo paratopológico que bajo ninguna operación de grupo es un grupo topológico. Uno de los resultados llamativos de los grupos paratopológicos es que se diferencian en los axiomas de separación T_0 , T_1 , T_2 y regular; es por ello que presentamos contraejemplos. También, presentaremos algunos resultados que serán de gran utilidad en el capítulo III, para cumplir parte del objetivo planteado.

Finalmente, en el capítulo III se definen dos tipos especiales de topologías asociadas a un grupo paratopológico, las cuales permiten que con estas nuevas topologías el grupo paratopológico ahora es un grupo topológico o es un grupo paratopológico con una topología mas gruesa.

En la última sección se establecen algunas propiedades topológicas anexadas a un grupo paratopológico con las cuales se tiene ya un grupo topológico. Con tales resultados daremos por cumplido nuestro objetivo.

Este trabajo es una somera introducción al tema de los grupos paratopológicos. En [1] y [2], por ejemplo, se puede obtener un amplio panorama sobre ellos, y visualizar una gran variedad de resultados que han fortalecido el interés en ellos.

Índice general

Introducción	i
1. Preliminares	1
1.1. Espacios Topológicos	1
1.1.1. Axiomas de Separación	3
1.2. Grupos	8
1.3. Grupos Topológicos	10
2. Grupos Paratopológicos	14
2.1. Definición y propiedades	14
2.2. Contraejemplos en Grupos Paratopológicos . .	19
2.2.1. Un Grupo Paratopológico que es T_0 y no es T_1	20
2.2.2. Un Grupo Paratopológico que es T_1 y no es T_2	21
2.2.3. Un Grupo Paratopológico que es T_2 y no es regular	23
3. Algunos Resultados	26
3.1. Cómo Asociar un Grupo Topológico	26
3.2. Algunos Resultados	34
Conclusión	52
Simbología	53
Bibliografía	55

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se proporcionan y desarrollan algunos de los resultados que serán empleados a lo largo del trabajo. Así, se consideran los espacios topológicos, los axiomas de separación, propiedades de conjuntos densos en ninguna parte y algunas relaciones entre funciones continuas, entre otros temas. De igual manera, se considera un ligero estudio relacionados en la teoría de grupos. También, mostramos algunas definiciones y propiedades de los grupos topológicos. Además, presentaremos los resultados mas importantes en los grupos topológicos que en los grupos paratopológicos no necesariamente son válidos, tales contraejemplos se estudian en el capítulo II.

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. (Topología) Una *topología* en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- (1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
- (2) Si \mathcal{U} es una colección de elementos en τ entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- (3) Si $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subseteq \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama un *espacio topológico*.

Así, un espacio topológico es un par ordenado (X, τ) , donde τ es una topología en X . También, diremos que un subconjunto U de X es un *conjunto abierto* en X si U pertenece a τ .

Un conjunto $A \subseteq X$ será un conjunto *cerrado* si $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X .

Definición 1.1.2. (Vecindad) Sean X un espacio topológico y $x \in X$, se dirá que U es una *vecindad* de x , si existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq U$. Diremos que U es una *vecindad abierta* si U pertenece a τ .

Definición 1.1.3. (Subconjunto Denso) Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X , se dirá que A es un *subconjunto denso* si $\overline{A} = X$.

Enseguida presentaremos algunas definiciones y propiedades en relación con las funciones continuas.

Definición 1.1.4. (Función continua) Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *continua* sobre X si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Definición 1.1.5. (Homeomorfismo) Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Si la función f y su inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un *homeomorfismo*.

Definición 1.1.6. (Función abierta y cerrada) Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función, se dice que f es:

- a) *Abierta* si para cada subconjunto U abierto en X , se tiene que el conjunto $f(U)$ es abierto en Y .

b) *Cerrada* si para cada subconjunto A cerrado en X , se tiene que el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y .

Teorema 1.1.7. Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, biyectiva se tendrá que:

a) Si f es abierta, entonces f es un homeomorfismo.

b) Si f es cerrada, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Ver Teorema 12.2, pág. 89 de [10]. \square

Definición 1.1.8. (Homogeneidad) Un espacio topológico X se dirá que es *homogéneo* si para cada $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ tal que $y = f(x)$.

Definición 1.1.9. (subconjunto G_δ) Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X , se dirá que A es un subconjunto G_δ si es la intersección numerable de subconjuntos abiertos en X .

1.1.1. Axiomas de Separación

En esta sección se introducen los llamados *axiomas de separación*. El objetivo de estos axiomas es dotar a los espacios topológicos que los posean de propiedades topológicas que permitan distinguirlos.

Definición 1.1.10. Sea X un espacio topológico. Se dirá que X es:

a) T_0 si se cumple que para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe una vecindad abierta U de x tal que $y \notin U$ o existe una vecindad abierta V de y tal que $x \notin V$

b) T_1 si se cumple que para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe una vecindad abierta U de x y una vecindad abierta V de y tal que $x \notin V$ y $y \notin U$.

- c) T_2 o un espacio de *Hausdorff*, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe una vecindad abierta U de x y una vecindad abierta V de y tal que $U \cap V = \emptyset$.
- d) $T_{2\frac{1}{2}}$ o un espacio de *Urysohn*, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe una vecindad abierta U de x y una vecindad abierta V de y tal que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- e) *Regular*, si para cada $x \in X$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen vecindades abiertas U y V tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- f) *Normal*, si para cualesquiera conjuntos cerrados disjuntos en X , A y B , existen abiertos U, V tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- g) *Completamente regular*, si para cada $x \in X$ y $F \subseteq X$, F un subconjunto cerrado tal que $x \notin F$, entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$, tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para cada $y \in F$.
- h) T_3 si X es T_1 y regular.
- i) $T_{3\frac{1}{2}}$ o un espacio de Tychonoff, si X es T_1 y completamente regular.

Teorema 1.1.11. Sea X un espacio topológico. X es un espacio T_1 si y sólo si para cada $x \in X$ el subconjunto $\{x\}$ es cerrado en X .

Demostración. ver la nota página 37 de [11]. □

Teorema 1.1.12. Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes: 1) X es regular.

2) Para toda $x \in X$ y para cada vecindad abierta U de x , existe una vecindad abierta V de x tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

3) Para cada $x \in X$ y A subconjunto cerrado que no contiene a x , existe una vecindad abierta V de x tal que $A \cap \bar{V} = \emptyset$.

Demostración. Ver 2.2 página 141 de [10]. □

Teorema 1.1.13. Sea X un espacio topológico. Si U es un subconjunto abierto, entonces $\overline{U \cap A} = \overline{U} \cap \overline{A}$, para cada $A \subseteq X$.

Demostración. Ver ejercicio 1.3.D inciso (a) el cual es una generalización del Teorema 1.3.6 de [11]. \square

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 1.1.14. Sea X un espacio topológico. Si U es un subconjunto abierto de X , entonces $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}$, para cada $A \subseteq X$.

Definición 1.1.15. (Compacto) Sea X un espacio topológico, diremos que X es *compacto* si para cada cubierta abierta \mathcal{U} de X existe una subcubierta finita de \mathcal{U} que también cubre a X .

Teorema 1.1.16. Si X es un espacio compacto Hausdorff y A un subconjunto cerrado de X , entonces A es compacto.

Demostración. Ver Teorema 3.1.2 de [11]. \square

Definición 1.1.17. (Función perfecta)

Una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es *perfecta* si f es sobreyectiva, cerrada y para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto en X .

Definición 1.1.18. (Denso en ninguna parte) Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . A es *denso en ninguna parte* si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Observación 1.1.19. Sea X un espacio topológico no vacío. Se tiene que X no es denso en ninguna parte y \emptyset es denso en ninguna parte.

Los siguientes resultados son inmediatos de la definición de conjunto denso en ninguna parte.

Lema 1.1.20. Sean X un espacio topológico, A y B unos subconjuntos de X . Si $A \subseteq B$ y B es denso en ninguna parte, entonces A es denso en ninguna parte.

Lema 1.1.21. Sea X un espacio topológico. Si A y B son subconjuntos de X densos en ninguna parte, entonces $A \cup B$ es denso en ninguna parte.

Proposición 1.1.22. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . A es denso en ninguna parte si y sólo si para todo subconjunto abierto U en X distinto del vacío, existe $V \subseteq U$ abierto y no vacío tal que $V \cap A = \emptyset$.

Corolario 1.1.23. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es denso en ninguna parte en X si y sólo si $X \setminus \bar{A}$ es denso en X .

Proposición 1.1.24. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Un subconjunto A es denso en ninguna parte en X si y sólo si $f(A)$ es denso en ninguna parte en Y .

Definición 1.1.25. (Topología cociente) Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, definimos $\tau_f = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$.

τ_f se llamará la Topología Cociente sobre Y , respecto a la función f .

Proposición 1.1.26. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces τ_f es una topología sobre Y , con la cual, f es continua.

Demostración. Ver 2.4 página 90 de [11]. □

Observación 1.1.27. Sean (Y, τ_Y) un espacio topológico, f una función como en la proposición anterior, y la topología τ_f correspondiente. Entonces se cumple que $\tau_Y \subseteq \tau_f$. Esto último se enuncia diciendo que τ_f es la mayor topología sobre Y que hace continua a la función f .

Definición 1.1.28. (Pseudocompacto) Un espacio topológico X se llama *pseudocompacto* si es un espacio de Tychonoff y toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua es acotada.

Teorema 1.1.29. Sea X un espacio topológico. X es pseudocompacto si y sólo si para cada sucesión decreciente $\{U_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos, entonces $\bigcap \{\overline{U_n} : n \in \omega\} \neq \emptyset$.

Demostración. Ver Teorema 3.10.23 de [11]. □

Definición 1.1.30. (Apenas compacto) Un espacio topológico se llama *apenas compacto* si para toda familia localmente finita de subconjuntos abiertos en X es finita.

Teorema 1.1.31. Sea X un espacio topológico de Tychonoff. X es apenas compacto si y sólo si X es pseudocompacto.

Demostración. Ver Teorema 3.10.22 de [11]. □

De la definición de espacios topológicos apenas compacto se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.32. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es apenas compacto, entonces Y es apenas compacto.

Definición 1.1.33. (Contablemente pracomacto) Un espacio topológico X se llama *contablemente pracomacto* si X contiene un subconjunto denso D tal que todo subconjunto infinito de D tiene un punto de acumulación en X .

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.34. Si X es un espacio topológico contablemente pracomacto, entonces X es apenas compacto.

Definición 1.1.35. (Baire) Un espacio topológico cumple la *propiedad de Baire* si para cada familia numerable $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos densos en ninguna parte en X , el subconjunto $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ tiene interior vacío en X .

1.2. Grupos

A continuación, se dará una ligera revisión de los conceptos de grupo, grupo topológico y de las funciones entre grupos llamadas homomorfismos. Este material será empleado en los capítulos II y III en los cuales se estudiarán los grupos paratopológicos.

Definición 1.2.1. (Grupo) Un *grupo* es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que satisface las siguientes propiedades:

1. La operación es asociativa, es decir,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

para cualesquiera $a, b, c \in G$.

2. Existe un elemento $e \in G$ que satisface

$$a \cdot e = a = e \cdot a, \quad \text{para toda } a \in G.$$

A este elemento e se le llamará el *elemento identidad* de G . Generalmente, emplearemos e_G para denotar al elemento identidad del grupo G .

3. Para cada elemento $a \in G$ existe un elemento $a' \in G$ tal que

$$a \cdot a' = e = a' \cdot a.$$

Al elemento a' se le llama el *elemento inverso* de a . Generalmente, si $a \in G$, a^{-1} denotará el elemento inverso de a .

Para enfatizar la importancia de la operación binaria en la definición de grupo, algunas veces lo denotaremos (G, \cdot) .

Se dirá que el grupo es *abeliano* o conmutativo si se cumple la propiedad $a \cdot b = b \cdot a$, para cada $a, b \in G$.

Definición 1.2.2. (Subgrupo) Un subconjunto H de un grupo G es un *subgrupo* si cumple:

1. $e_G \in H$.
2. Si $x, y \in H$, entonces $xy \in H$.
3. Si $x \in H$, entonces $x^{-1} \in H$.

Definición 1.2.3. (Subgrupo Normal) Sean (G, \cdot) un grupo y H un subgrupo de G . Se dirá que H es un *subgrupo normal* o *subgrupo invariante* de G denotado por $H \triangleleft G$, si $gH = Hg$ para cada $g \in G$.

En todo el resto de este trabajo, si G es un grupo y $a, b \in G$, su producto $a \cdot b$ se denotará simplemente por ab .

Definición 1.2.4. Sea (G, \cdot) un grupo, $U \subset G$ y $V \subset G$, entonces

1. $U \cdot V = \{u \cdot v \in G : u \in U \text{ y } v \in V\}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $U^n = \underbrace{U \cdot U \cdot U \cdots U}_{n\text{-veces}}$.
3. $U^{-1} = \{u^{-1} \in G : u \in U\}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, $U^{-n} = \underbrace{U^{-1} \cdot U^{-1} \cdots U^{-1}}_{n\text{-veces}}$.

Los subconjuntos anteriores son de gran utilidad en el estudio de los grupos topológicos y paratopológicos que definimos más adelante.

Definición 1.2.5. (Homomorfismo) Sean (G, \cdot) y $(H, *)$ dos grupos. Una función $f : G \rightarrow H$ es un *homomorfismo* si

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y),$$

para todo $x, y \in G$. Si f es biyectiva, entonces f es un isomorfismo.

También, definimos el *Kernel* de un homomorfismo $f : G \rightarrow H$ denotado $\text{Ker}(f)$, como

$$\text{Ker}(f) = \{g \in G : f(g) = e_H\}.$$

El siguiente resultado enuncia tres propiedades relevantes de los homomorfismos.

Proposición 1.2.6. Sean G, H dos grupos y $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces

- a) $f(e_G) = e_H$.
- b) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ para toda $x \in G$.
- c) $f(G)$ es un subgrupo de H .

Demostración. Ver Lema 2.5.2 y Lema 2.5.3 de [12] □

1.3. Grupos Topológicos

En esta sección daremos un pequeño repaso de las propiedades y definiciones en los grupos topológicos.

Definición 1.3.1. (Grupo topológico) Un *grupo topológico* es una terna (G, \cdot, τ) que cumple:

- 1) (G, \cdot) es un grupo.
 - 2) (G, τ) es un espacio topológico.
 - 3) las operaciones de grupo
- $$\cdot : G \times G \rightarrow G; (g, g_1) \mapsto g \cdot g_1 \text{ y}$$
- $$^{-1} : G \rightarrow G; g \mapsto g^{-1},$$

son continuas, donde $G \times G$ se supondrá siempre con la topología producto.

Las funciones l_g y r_g son las llamadas función traslación izquierda y derecha respectivamente, que definiremos a detalle para los grupos paratopológicos en el capítulo II; de la misma manera tales funciones se pueden definir para los grupos topológicos y así obtener el siguiente resultado.

Lema 1.3.2. Si (G, \cdot, τ) es un grupo topológico, y f es la operación inversa, entonces f, l_g, r_g son homeomorfismos para toda $g \in G$.

Demostración. Ver Teorema 1.3 de [14] □

Enseguida sugerimos dos pasos para construir una base local de e_G :

Sea (G, \cdot, τ) un grupo topológico,

1. Elijamos una base β para τ ;
2. Definamos $\beta(e_G) = \{U \in \beta : e_G \in U\}$, es claro que $\beta(e_G) \neq \emptyset$.

Entonces, $\beta(e_G)$ así definido es base local de e_G .

Definición 1.3.3. Sean G un grupo topológico, $g \in G$ y $V \subseteq G$, se definen: a) $gV = \{gv : v \in V\}$

b) $Vg = \{vg : v \in V\}$

Observemos que si G es conmutativo entonces $gV = Vg$.

Teniendo la definición anterior, podemos construir ahora una base local para cada $g \in G$, $g \neq e_G$.

Ejemplo 1.3.4. El conjunto $\beta(g) = \{gV : V \in \beta(e_G)\}$, es una base local para cada $g \in G$.

Definición 1.3.5. (Vecindad Simétrica) Sea G un grupo topológico, $x \in G$ y U una vecindad abierta de x , se dirá que U es una *vecindad simétrica* si $U^{-1} = U$.

Definición 1.3.6. Sea G un grupo topológico, definimos $\mathcal{N}(g)$ como la familia de todas las vecindades abiertas que contienen a g .

Con el siguiente resultado podemos construir otra base local para cada $g \in G$ de un grupo topológico G .

Lema 1.3.7. Si G es un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e_G constituyen una base local para e_G .

Demostración. Ver Lema 1.8 de [14]. \square

Lema 1.3.8. Sea G un grupo topológico.

- 1) Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe un $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^n \subseteq U$.
- 2) Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$ entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $\overline{V} \subseteq U$.
En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados en G .

Demostración. Ver Lema 1.9 de [14]. \square

Teorema 1.3.9. Sean G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G . Entonces:

- 1) Si O es abierto, entonces los conjuntos aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son abiertos.
- 2) Si A es cerrado, aA, Aa, A^{-1} son conjuntos cerrados.
- 3) Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1} .
- 4) Se cumple que $\overline{A} = \bigcap \{AW : W \in \mathcal{N}(e)\} = \bigcap \{WA : W \in \mathcal{N}(e)\}$.

Demostración. Ver Teorema 1.10 de [14]. \square

Proposición 1.3.10. Sean G un grupo topológico y $A, B \subseteq G$. Entonces,

- 1) $\overline{A}\overline{B} \subseteq \overline{AB}$.
- 2) $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$.
- 3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$.
- 4) Si $ab = ba$, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, entonces $ab = ba$ para todo $a \in \overline{A}$, para todo $b \in B$.

Demostración. Ver Proposición 1.24 de [14]. \square

Definición 1.3.11. (ω -acotado y totalmente acotado)

Sea G un grupo. G es ω -acotado si para cada vecindad abierta U del elemento identidad e en G existe un conjunto $A \subseteq G$ contable tal que $AU = UA = G$. Así mismo, G es *totalmente acotado* si para cada vecindad abierta U del elemento identidad e en G existe un conjunto $A \subseteq G$ finito tal que $AU = UA = G$.

Proposición 1.3.12. Sean G un grupo topológico y H, N subgrupos de G . Entonces:

- 1) \overline{H} es un subgrupo de G .
- 2) Si N es un subgrupo normal de G , entonces \overline{N} es un subgrupo normal de G .
- 3) H es abierto si y sólo si su interior no es vacío.
- 4) Si H es abierto, entonces $\overline{H} = H$.

Demostración. Ver Proposición 1.25 de [14]. □

En seguida mencionamos el clásico Teorema de Kakutani.

Teorema 1.3.13. (Kakutani) Todo grupo topológico primero numerable es metrizable.

Demostración. Ver [6]. □

Teorema 1.3.14. Sea G un grupo topológico. G es T_0 si y sólo si es un espacio de Tychonoff.

Demostración. Ver Teorema 4.14 de [14]. □

Lema 1.3.15. Sean G un grupo topológico y D un subconjunto denso de G . Si U es una vecindad abierta de e_G , entonces $DU = G = UD$.

Demostración. Ver Lema 1.43 de [14]. □

El siguiente resultado emplea la llamada función cardinal *peso red* la cual se describe a detalle en la definición 3.2.23.

Teorema 1.3.16. Si G es un grupo topológico con red contable, entonces G es ω -acotado.

Demostración. Como G tiene red contable, existe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(G)$ tal que $|\mathcal{N}| \leq \omega$. Sea $N \in \mathcal{N}$, si $N \neq \emptyset$, entonces elegimos $g \in N$, haciendo esto para cada $N \in \mathcal{N}$. Podemos definir el subconjunto D de G formado por esos elementos, es claro que D es denso en G y aplicando el lema anterior concluimos que G es ω -acotado. □

Capítulo 2

Grupos Paratopológicos

2.1. Definición y propiedades

En esta sección introduciremos la definición de grupos paratopológicos y mostraremos la importancia que tiene estudiarlos, para ello analizamos un grupo paratopológico que no es un grupo topológico, además de unos contraejemplos que hacen diferenciar los axiomas de separación T_0 , T_1 , T_2 y el axioma de regularidad. También, mostraremos algunas propiedades que se obtienen en los grupos paratopológicos las cuales, servirán de base para el desarrollo de algunos resultados que presentaremos en el capítulo III, con el fin de dar condiciones necesarias para que un grupo paratopológico sea un grupo topológico.

Definición 2.1.1. (Grupo paratopológico) Un *grupo paratopológico* es una terna (G, \cdot, τ) que cumple:

- (G, \cdot) es un grupo.
- (G, τ) es un espacio topológico.
- la operación de grupo $\cdot : G \times G \longrightarrow G; (g, g_1) \longmapsto g \cdot g_1$ es continua, donde $G \times G$ se supondrá siempre con la

topología producto.

Nota 2.1.2. La función $^{-1} : G \longrightarrow G$, $g \longmapsto g^{-1}$ no se requiere que sea continua.

Definición 2.1.3. Sean (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico y $g \in G$.

- La función $l_g : G \longrightarrow G$ dada por $l_g(x) = g \cdot x$ se llamará la *traslación izquierda* por el elemento g .
- La función $r_g : G \longrightarrow G$ dada por $r_g(x) = x \cdot g$ se llamará la *traslación derecha* por el elemento g .

Observemos que si G es un grupo conmutativo, entonces $l_g = r_g$, para todo $g \in G$.

El siguiente resultado ilustra algunas de las propiedades de la función traslación izquierda y derecha.

Lema 2.1.4. Sean (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico, $q, g \in G$. Entonces:

1. $l_q \circ l_g = l_{qg}$.
2. $r_q \circ r_g = r_{gq}$.
3. $(l_q)^{-1} = l_{q^{-1}}$.
4. $(r_q)^{-1} = r_{q^{-1}}$.
5. l_g es biyectiva, para todo $g \in G$.
6. r_g es biyectiva, para todo $g \in G$.
7. Si $x, y \in G$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = l_g(x)$.
8. Si $x, y \in G$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = r_g(x)$.

Demostración.

1. Notemos que $\text{dom}(l_q \circ l_g) = G = \text{dom} l_{qg}$, donde $\text{dom} f$ es el dominio de la función f . Además,

$$(l_q \circ l_g)(x) = l_q(l_g(x)) = l_q(gx) = q(gx) = (qg)x = l_{qg}(x)$$
 para todo $x \in G$.
2. La demostración es similar a 1.
3. Sea $g \in G$ y consideremos l_g la función traslación izquierda asociada al punto g . Como G es un grupo, entonces existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = e_G = g^{-1}g$, donde e_G es el elemento identidad de G . Ahora, tenemos que $l_g \circ l_{g^{-1}} = l_{gg^{-1}} = l_{e_G}$ y $l_{g^{-1}} \circ l_g = l_{g^{-1}g} = l_{e_G}$. Además, $l_{e_G}(x) = e_Gx = x$, para todo $x \in G$. Así, l_{e_G} es la función identidad de G . Por lo tanto, $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$.
4. La demostración es similar a 3.
5. Se cumple, ya que por (3) $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$ y por lo tanto l_g es biyectiva.
6. Por el inciso (4) de este lema, se tiene que r_g es biyectiva.
7. Sean $x, y \in G$. Tomando $g = yx^{-1}$ se tiene que

$$l_g(x) = gx = (yx^{-1})x = y(xx^{-1}) = y.$$
8. Sean $x, y \in G$. Si $g = x^{-1}y$, entonces

$$r_g(x) = xg = x(x^{-1}y) = (xx^{-1})y = y.$$

□

Similarmente que en los grupos topológicos, ahora sobre un grupo paratopológico G y $g \in G$, se define $\mathcal{N}(g)$ como la familia de todas las vecindades abiertas del punto g .

Siendo un grupo paratopológico un espacio topológico, la continuidad del producto puede ser enunciada de manera puntual, como lo ilustra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.5. Sean G un grupo y $P : G \times G \longrightarrow G$ la operación producto en G . Entonces P es continua si y sólo si para cada $x, y \in G$ y para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tal que $VW \subset U$.

Demostración. Ver pág. 2 de [14]. \square

Cuando tenemos un grupo paratopológico G , quisiéramos saber si existe algún homeomorfismo en sí mismo. El resultado siguiente nos mostrará que existen al menos dos tipos de homeomorfismos definidos en los grupo paratopológico.

Lema 2.1.6. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces l_g y r_g son homeomorfismos para toda $g \in G$.

Demostración. Para demostrar que l_g es un homeomorfismo, observemos que $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$, así que sólo basta demostrar que l_g es continua para todo $g \in G$. Sea $g \in G$ fijo, $l_g(x) = g \cdot x$ y $A = \{(g, x) \in G \times G : x \in G\}$.

Como la operación producto es continua sobre $G \times G$, entonces lo es también sobre A . Además, A es homeomorfo a G . Sea la función $\psi : G \longrightarrow A$ dada por $\psi(x) = (g, x)$ es un homeomorfismo. Sea P la operación producto sobre $G \times G$. Luego,

$$(P \circ \psi)(x) = P(\psi(x)) = P(g, x) = g \cdot x = l_g(x)$$

Como $P \circ \psi$ es continua, tenemos que l_g es continua, y esto para cada $g \in G$. Por lo tanto, l_g es un homeomorfismo.

De la misma manera se prueba que r_g es un homeomorfismo para toda $g \in G$. \square

Corolario 2.1.7. Sean G un grupo paratopológico y A subconjunto de G . Si A es denso en ninguna parte en G , entonces rA es denso en ninguna parte en G , para cada $r \in G$.

Demostración. El resultado se tiene aplicando el lema anterior y la Proposición 1.1.24. \square

Teorema 2.1.8. Sean G, H grupos paratopológicos y $f : G \rightarrow H$ una función cociente. Si f es un homomorfismo, entonces f es una función abierta.

Demostración. Sea U un conjunto abierto en G . Para probar que $f(U)$ es un conjunto abierto en H , por ser f una función cociente, basta verificar que $f^{-1}(f(U))$ es un conjunto abierto en G .

Afirmamos que $f^{-1}(f(U)) = \ker(f)U$. En efecto; si $g \in f^{-1}(f(U))$, entonces $f(g) \in f(U)$, se sigue que existe $u \in U$ tal que $f(g) = f(u)$. Usando que f es un homomorfismo tenemos que $f(gu^{-1}) = e_H$, es decir, $gu^{-1} \in \ker(f)$. Así, $g = gu^{-1}u \in \ker(f)U$. Entonces $f^{-1}(f(U)) \subseteq \ker(f)U$. Por otra parte, si $g \in \ker(f)U$, entonces existen $k \in \ker(f)$ y $u \in U$ tales que $g = ku$ luego, $f(g) = f(ku) = f(k)f(u) = e_H f(u) = f(u) \in f(U)$, es decir, $g \in f^{-1}(f(U))$. Así, $\ker(f)U \subseteq f^{-1}(f(U))$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(U)) = \ker(f)U$. Como G es un grupo paratopológico, entonces las funciones traslaciones izquierdas son homeomorfismos, por lo que se concluye que el conjunto $f^{-1}(f(U))$ es abierto en G . \square

Teorema 2.1.9. Sean (G, \cdot) un grupo y (G, τ) un espacio topológico. (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico si y sólo si las funciones l_g y r_g son homeomorfismos, para cada $g \in G$ y la operación producto es continua en (e, e) .

Demostración. Supongamos que (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, por el Lema 2.1.6 se tiene que las funciones l_g y r_g son homeomorfismos para cada $g \in G$. Por otra parte, como la operación producto es continua en $G \times G$, en particular es continua en (e, e) .

Recíprocamente, sean $xy \in G$ con $x, y \in G$ y W una vecindad abierta de xy . Entonces $e \in x^{-1}Wy^{-1}$. Por hipótesis existen unas vecindades abiertas U y V de e en G tales que $UV \subseteq x^{-1}Wy^{-1}$. Luego, $(xU)(Vy) = xUVy \subseteq W$. Los conjuntos xU y Vy son abiertos, ya que l_x y r_y son homeomorfismos. Además, $x \in xU$ y $y \in Vy$. Por lo tanto, la operación

2.2 Contraejemplos en Grupos Paratopológicos 19

producto es continua. Así, (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico. \square

Una característica de los grupos paratopológicos es que son homogéneos.

Lema 2.1.10. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces (G, \cdot, τ) es un espacio homogéneo.

Demostración. Sean $x, y \in G$, por la afirmación 7) del Lema 2.1.4 se tiene que $y = \ell_{yx^{-1}}(x)$ y por el teorema anterior, $\ell_{yx^{-1}}$ es un homeomorfismo. \square

Proposición 2.1.11. Sea G un grupo paratopológico y $A, B \subseteq G$. Entonces

- 1) $\overline{AB} \subset \overline{A\overline{B}}$.
- 3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$.

Demostración. Sea G un grupo paratopológico. Aplicando que la operación producto en G es continua y que las funciones de traslación derecha e izquierda son homeomorfismo, las conclusiones de esta proposición son inmediatas. \square

Definición 2.1.12. (Isomorfismo topológico) Sean G y H grupos paratopológicos y $f : G \rightarrow H$ una función biyectiva. Diremos que f es un *isomorfismo topológico* si f y f^{-1} son homomorfismos continuos.

2.2. Contraejemplos en Grupos Paratopológicos

En esta sección presentamos ejemplos que hacen diferenciar los axiomas de separación en los grupos paratopológicos de los grupos topológicos. Primero presentaremos un ejemplo de un grupo paratopológico que no es un grupo topológico.

2.2 Contraejemplos en Grupos Paratopológicos 20

Ejemplo 2.2.1. Sea $(\mathbb{R}, +)$ un grupo y \mathbb{R} con la topología (τ_S) de Sorgenfrey.

1. La función $+$: $(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_S)$ es continua. En efecto, si $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces $x + y \in \mathbb{R}$. Sea $W = [a, b)$ un conjunto abierto que contiene a $x + y$. Luego, tomemos $U = [x, \frac{b-y+x}{2})$ y $V = [y, \frac{b-x+y}{2})$. Ahora, probemos que $U + V \subseteq W$. Sean $p \in U$ y $q \in V$. Entonces $x \leq p < \frac{b-y+x}{2}$ y $y \leq q < \frac{b-x+y}{2}$, $a \leq x + y \leq p + q < b$, luego, $p + q \in W$. Por lo que, $U + V \subseteq W$.
2. La función g : $(\mathbb{R}, \tau_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_S)$ dada por $g(x) = -x$ no es continua. En efecto, si $U = [a, b)$ es abierto en (\mathbb{R}, τ_S) , $g^{-1}([a, b)) = (-b, -a]$ no es abierto en \mathbb{R} con esta topología.

Así, (\mathbb{R}, τ_S) es un grupo paratopológico y no es un grupo topológico.

Teorema 2.2.2. Sea (\mathbb{R}, τ_S) . Toda operación producto (\cdot) que sea un grupo en \mathbb{R} tal que la operación producto (\cdot) es continua. Entonces g : $(\mathbb{R}, \tau_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_S)$ dada por $g(x) = -x$ no es continua.

Demostración. Sea (\cdot) una operación con la cual (\mathbb{R}, \cdot) es un grupo y además la operación (\cdot) es continua. Supongamos que g es continua. Luego, $(\mathbb{R}, \cdot, \tau_S)$ es un grupo topológico y como (\mathbb{R}, τ_S) es primero numerable, entonces (\mathbb{R}, τ_S) es metrizable. Así, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ es metrizable, entonces es normal, lo cual es una contradicción. \square

2.2.1. Un Grupo Paratopológico que es T_0 y no es T_1

Ejemplo 2.2.3. Sea $\beta = \{(-\infty, n) \subseteq \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$. Es fácil probar que β es una base para una topología en \mathbb{Z} . Así, tomemos τ la topología generada por β . Luego,

- $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.
- (\mathbb{Z}, τ) es un espacio topológico T_0 y no es T_1 .
 Probemos que (\mathbb{Z}, τ) es un espacio topológico T_0 . Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \neq n$, sin pérdida de generalidad supon-
 gamos que $m < n$. Consideremos $B = (-\infty, n)$, se tiene
 que B es vecindad abierta de m y $n \notin B$.

Por otra parte, el espacio (\mathbb{Z}, τ) no cumple el axioma de separación T_1 . En efecto, si $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \neq n$ y $m < n$, entonces para toda vecindad abierta U de n se tiene que $m \in U$.

1. La función $+ : (\mathbb{Z}, \tau) \times (\mathbb{Z}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}, \tau)$ es continua. Pues, si $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entonces $m + n \in \mathbb{Z}$. Sea $W = (-\infty, k)$ un conjunto abierto que contiene a $m + n$. Luego, tomemos $U = (-\infty, n + 1)$ y $V = (-\infty, m + 1)$. Ahora, probemos que $U + V \subseteq W$. Sean $x \in U$ y $y \in V$ entonces $x \leq n$ y $y \leq m$, $x + y \leq m + n < k$. Así, $x + y \in W$. Por lo que, $U + V \subseteq W$.
2. $g : (\mathbb{Z}, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}, \tau)$ dada por $g(x) = -x$ no es conti-
 nua. En efecto, si g es continua, entonces $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ es un
 grupo topológico y como es T_0 , sería T_1 lo cual es una
 contradicción.

Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ es un grupo paratopológico que es T_0 y no es T_1 .

2.2.2. Un Grupo Paratopológico que es T_1 y no es T_2

Sea $X = \mathbb{Z}$, consideremos $k \in \mathbb{Z}$ y definamos los siguientes subconjuntos de X de la siguiente manera:

$$\{k\} \cup [n, \infty), \text{ con } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n > k$$

2.2 Contraejemplos en Grupos Paratopológicos 22

Notemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe una familia numerable de subconjunto que contienen a k . Así, sea β la familia formada por estos subconjuntos de X .

Probemos que β es una base para X :

1. Sea $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que $m \in [m, \infty) = \{m\} \cup [m+1, \infty)$.
Notemos que $B = [m, +\infty)$ es un elemento de β .
2. Consideremos $B_1, B_2 \in \beta$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$.
Por la construcción de β , existen $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m > p, n > q$ y $B_1 = \{p\} \cup [m, \infty)$, $B_2 = \{q\} \cup [n, \infty)$.
Caso I: Si $x = p$; sean $N = \max\{m, n\}$ y $B = \{x\} \cup [N, \infty)$ se tiene que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. El caso $x = q$ es similar.
Caso II: Si $x \neq p$ y $x \neq q$; sea $B = \{N\} \cup [N+1, \infty)$, luego $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Se concluye que β es una base sobre el conjunto X . Ahora, tomemos τ_β la topología sobre X generada por esta base. A continuación, observemos que (X, τ_β) es T_1 y no es T_2 .

- (X, τ_β) es T_1 . Ya que si $x, y \in X$ con $x \neq y$, si pérdida de generalidad supongamos que $x < y$. Así, definimos $B = \{x\} \cup [y+1, \infty)$ y $D = \{y\} \cup [y+1, \infty)$, se tiene que $x \in B, y \notin B$ y $x \notin D, y \in D$.
- (X, τ_β) no es T_2 . En efecto, se observa que si $B, D \in \beta$ y son no vacíos entonces $B \cap D \neq \emptyset$. En consecuencia, si $U, V \in \tau_\beta$ y son no vacíos, entonces $U \cap V \neq \emptyset$.

Ahora, sea $+$ la operación suma en \mathbb{Z} . Se tiene que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo. Probemos que $(\mathbb{Z}, +, \tau_\beta)$ es un grupo paratopológico. Basta probar que $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $x + y \in \mathbb{Z}$. Sea $B \in \beta$ una vecindad abierta de $x + y$, entonces existen $z, n \in \mathbb{Z}$ tales que $n > z$, $B = \{z\} \cup [n, \infty)$ y $x + y \in B$. Entonces se presentan los siguientes 2 casos:

Caso I: si $z = x + y$, entonces consideremos $B_1 = \{x\} \cup [n -$

$y, +\infty)$ y $B_2 = \{y\} \cup [n - x, +\infty)$. Se sigue que $B_1 + B_2 \subseteq B$.

Caso II: si $z \neq x + y$, entonces $x + y > n$. Así, definimos $B_1 = [x, +\infty)$ y $B_2 = [y, +\infty)$ es fácil verificar que $B_1 + B_2 \subseteq B$.

Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +, \tau_\beta)$ es un grupo paratopológico que es T_1 y no es T_2 . Además, no es un grupo topológico.

2.2.3. Un Grupo Paratopológico que es T_2 y no es regular

Ejemplo 2.2.4. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Consideremos los siguientes subconjuntos de X ; para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$, con $\epsilon > 0$, definimos:

$$B_\epsilon(x, y) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : x < p < x + \epsilon \text{ y } y < q < y + \epsilon\} \cup \{(x, y)\}.$$

Sea $\beta = \{B_\epsilon(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$. β es una base para una topología en \mathbb{R}^2 y tomemos τ la topología generada por β , la cual llamaremos la *topología ladrillo*.

1. $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo.
2. (\mathbb{R}^2, τ) es un espacio topológico T_2 . Ya que, se observa que la topología usual (τ_u) en \mathbb{R}^2 está contenida en τ y como (\mathbb{R}^2, τ_u) es T_2 , entonces (\mathbb{R}^2, τ) es T_2 .
3. (\mathbb{R}^2, τ) no es regular. Ya que, para el conjunto abierto $B_1(0, 0)$ y el punto $(0, 0) \in B_1(0, 0)$ no existe un conjunto abierto V con $(0, 0) \in V$ tal que $\bar{V} \subseteq B_1(0, 0)$.
4. $(\mathbb{R}^2, +, \tau)$ es un grupo paratopológico. Primero probemos que la función $+$: $(\mathbb{R}^2, \tau) \times (\mathbb{R}^2, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau)$ es continua en $((0, 0), (0, 0))$. Pues, si $((0, 0), (0, 0)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, entonces $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Sea $W = B_\epsilon(0, 0)$ un conjunto abierto que contiene a $(0, 0)$. Luego, tomemos $U = B_{\frac{\epsilon}{2}}(0, 0)$ y $V = B_{\frac{\epsilon}{2}}(0, 0)$. Ahora, probemos que $U + V \subseteq W$.

Sean $(x, y) \in U$ y $(p, q) \in V$ sin pérdida de generalidad

2.2 Contraejemplos en Grupos Paratopológicos 24

supongamos que $(x, y) \neq (0, 0)$ y $(p, q) \neq (0, 0)$ entonces $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$ y $0 < p < \frac{\epsilon}{2}$, $0 < y < \frac{\epsilon}{2}$ y $0 < q < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, $0 < x + p < \epsilon$ y $0 < y + q < \epsilon$. Así, $(x + p, y + q) \in W$. Por lo que, $U + V \subseteq W$.

Por otra parte, verifiquemos que para cada punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la función traslación izquierda $l_{(a,b)} : (\mathbb{R}^2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2)$ definida por $l_{(a,b)}(x, y) = (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$ es continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y consideremos $B_\epsilon(x, y)$. Notemos que la siguiente relación se cumple:

$$l_{(a,b)}^{-1}(B_\epsilon(x, y)) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : l_{(a,b)}(p, q) \in B_\epsilon(x, y)\} = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) + (p, q) \in B_\epsilon(x, y)\} = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : (a + p, b + q) \in B_\epsilon(x, y)\} = B_\epsilon(x - a, y - b).$$

Así, la imagen inversa de elementos de la base β sobre las funciones traslaciones izquierdas son abiertas. Como la base β genera a τ se tiene que son continuas. Dado que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano se sigue que las funciones traslaciones derechas son continuas. Por la propiedad 3) del Lema 2.1.4 se concluye que las funciones traslaciones derechas e izquierdas son homeomorfismos. Por el Teorema 2.1.9 concluimos que $(\mathbb{R}^2, +, \tau)$ es un grupo paratopológico.

5. $g : (\mathbb{R}^2, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau)$ dada por $g(x, y) = (-x, -y)$ no es continua. En efecto; si suponemos que es continua, entonces $(G, +, \tau)$ es un grupo topológico y por ser Hausdorff se concluye que es un grupo topológico regular, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^2, +, \tau)$ es un grupo paratopológico que es T_2 y no es regular.

Nota 2.2.5. Con el Ejemplo 2.2.3 podemos notar que si un grupo paratopológico G es T_0 no necesariamente implica que G sea un espacio de Tychonoff. Tal resultado sí se cumple en los grupos topológicos (ver Teorema 1.3).

Observación 2.2.6. Recordando el clásico Teorema 1.3.13 de Kakutani afirma que todo grupo topológico primero numerable es metrizable. Sin embargo, el ejemplo 2.2.1 prueba que en los grupos paratopológicos tal resultado no se tiene. Pues, $(\mathbb{R}, +, \tau_S)$ es un grupo paratopológico que es primero numerable y no es metrizable.

Observación 2.2.7. Recordando la Proposición 1.3.12 se tiene que si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces \overline{H} es un subgrupo de G ; pero esta consecuencia no necesariamente se cumple si G es un grupo paratopológico. El siguiente contraejemplo lo prueba.

Considerando el Ejemplo 2.2.1 tenemos que $(G = \mathbb{Z}, +, \tau_\beta)$ es un grupo paratopológico, donde la topología τ_β está generada por la base $\beta = \{(-\infty, n) \subseteq \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora, tomemos $K = \{0\}$, claramente, K es un subgrupo de G . Afirmamos que $\overline{K} = [0, +\infty)$. En efecto; dado $m \in \mathbb{Z}^+$, para toda vecindad abierta U de m existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $B = (-\infty, n)$ y $m \in B \subseteq U$. Es obvio que $0 \in B$, así $\emptyset \neq K \cap B \subseteq K \cap U$. Por lo que $m \in \overline{K}$. Por otra parte, si $m \in \mathbb{Z}^-$ podemos considerar una vecindad abierta $B = (-\infty, 0)$ de m que cumple $m \in B$ y $K \cap B = \emptyset$. Así, tenemos que $m \notin \overline{K}$. Se sigue que \overline{K} no es un subgrupo de G , ya que para todo elemento positivo de \overline{K} su elemento inverno no es elemento de \overline{K} .

El contraejemplo anterior nos brinda aún más información, pues se observa que K es un subgrupo normal de G pero \overline{K} no es un subgrupo normal de G . Lo cual en los grupos topológicos sí es cierto como lo indica la Proposición 1.3.12.

Capítulo 3

Algunos Resultados

Finalmente, en este capítulo primero empezaremos por definir dos tipos especiales de topologías asociadas a un grupo paratopológico, las cuales permiten que con estas nuevas topologías el grupo paratopológico ahora es un grupo topológico o es un grupo paratopológico con una topología más gruesa. En la última sección se establecen algunas propiedades topológicas anexadas a un grupo paratopológico con las cuales se tiene ya un grupo topológico. Con tales resultados daremos por cumplido nuestro objetivo.

3.1. Cómo Asociar un Grupo Topológico

Sea (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico con el elemento identidad e . Entonces definimos

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

A continuación, presentamos algunos resultados que se obtienen en relación a τ^{-1} .

Proposición 3.1.1. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces τ^{-1} es una topología sobre G .

Demostración.

- Como $G^{-1} = G$ y $\emptyset^{-1} = \emptyset$, entonces G y \emptyset son elementos de τ^{-1} .
- Sea $\{U_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau^{-1}$. Basta probar que se cumple lo siguiente $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha^{-1} = (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)^{-1}$. En efecto, sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha^{-1}$. Existe $k \in I$ tal que $x \in U_k^{-1}$, es decir, $x^{-1} \in U_k$. Luego, $x^{-1} \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ o bien $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)^{-1}$. Similarmenete, se obtiene la otra contención. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha^{-1} \in \tau$.
- Sean $U^{-1}, V^{-1} \in \tau^{-1}$, veamos que $U^{-1} \cap V^{-1} = (U \cap V)^{-1}$. Efectivamente; $x \in U^{-1} \cap V^{-1}$ si y sólo si $x \in U^{-1}$ y $x \in V^{-1}$ si y sólo si $x^{-1} \in U$ y $x^{-1} \in V$, se sigue que $x^{-1} \in U \cap V$ si y sólo si $x \in (U \cap V)^{-1}$. Por lo tanto, $U^{-1} \cap V^{-1} \in \tau^{-1}$.

□

Definición 3.1.2. (La Topología conjugada) Sea G un grupo paratopológico con la topología τ . Definimos

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

La topología τ^{-1} es la *topología conjugada* de G .

Lema 3.1.3. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces (G, \cdot, τ^{-1}) es un grupo paratopológico.

Demostración. Sean $x, y \in G$ y sea $W^{-1} \in \tau^{-1}$ tal que $xy \in W^{-1}$. Entonces $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} \in W$. Como (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, existen $U, V \in \tau$ tales que $y^{-1} \in U$, $x^{-1} \in V$ y $UV \subseteq W$. Luego, $x \in V^{-1}$, $y \in U^{-1}$ y $V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1} \subseteq W^{-1}$. Por lo tanto, la operación producto es continua en $(G, \cdot, \tau^{-1}) \times (G, \cdot, \tau^{-1})$. □

Nota 3.1.4. La función $\varphi : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau^{-1})$ dada por $\varphi(g) = g^{-1}$ es un homeomorfismo.

Como una consecuencia de que τ y τ^{-1} son unas topologías sobre G , podemos construir la siguiente familia de subconjuntos de G :

$$\mathfrak{D} = \{U \cap V^{-1} : U, V \in \tau\}.$$

Enseguida presentamos algunos resultados relacionados con \mathfrak{D} que serán de gran utilidad.

Proposición 3.1.5. \mathfrak{D} es una subbase para una topología sobre G .

Demostración. Basta verificar que \mathfrak{D} cubre a G . Sea $g \in G$ y consideremos $W = G \cap G^{-1}$, donde, es claro que $g \in W$ y $W \in \mathfrak{D}$. \square

Definición 3.1.6. Sea (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico, definimos τ^* la topología generada por la subbase \mathfrak{D} .

Notemos que $U \in \tau^*$ si es una unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos en \mathfrak{D} .

Proposición 3.1.7. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces $\tau \subseteq \tau^*$.

Demostración. Sea $U \in \tau$, notemos que $U = U \cap G^{-1} = U \cap G$. Así, $U \in \mathfrak{D}$ y por lo tanto, $U \in \tau^*$. \square

Lema 3.1.8. $\beta(e) = \{U \cap U^{-1} : U \in \tau \text{ y } e \in U\}$ es una base local de e en τ^* .

Demostración. Sean $e \in G$ y $Q \in \tau^*$ tal que $e \in Q$. Por construcción de τ^* existe $W \in \tau^*$ tal que $e \in W \subseteq Q$ y además:

$$W = (U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap (V_0^{-1} \cap V_1^{-1} \cap \dots \cap V_n^{-1}),$$

para algún $n \in \omega$ con $U_i \in \tau$ y $V_i^{-1} \in \tau^{-1}$ para cada $0 \leq i \leq n$. Luego, consideremos $P_1 = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$, $P_2 = V_0^{-1} \cap V_1^{-1} \cap \dots \cap V_n^{-1}$ y tomemos $U = P_1 \cap P_2$. Así, se tiene que

$$U \cap U^{-1} = (P_1 \cap P_2) \cap (P_1 \cap P_2)^{-1} \subseteq W.$$

Por otra parte se tiene que $e \in U$ y $U \in \tau$. Por lo tanto, $U \cap U^{-1} \in \beta(e)$. \square

Proposición 3.1.9. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces (G, \cdot, τ^*) es un grupo topológico.

Demostración.

Probemos que la función $\cdot : (G, \cdot, \tau^*) \times (G, \cdot, \tau^*) \longrightarrow (G, \cdot, \tau^*)$ es continua. Sean $xy \in G$ con $x, y \in G$ y $W \in \tau^*$ tal que $xy \in W$. Por construcción de τ^* existen $W_1, W_2 \in \tau$ tales que $xy \in W_1 \cap W_2^{-1} \subseteq W$, entonces $xy \in W_1$ y $xy \in W_2^{-1}$.

Como (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, existen $U_1, V_1 \in \tau$ tales que $x \in U_1, y \in V_1$ y $U_1V_1 \subseteq W_1$. Similarmente, por ser (G, \cdot, τ^{-1}) un grupo paratopológico, existen $U_2^{-1}, V_2^{-1} \in \tau^{-1}$ tales que $x \in U_2^{-1}, y \in V_2^{-1}$ y $U_2^{-1}V_2^{-1} \subseteq W_2^{-1}$. Ahora, consideremos $U = U_1 \cap U_2^{-1}$ y $V = V_1 \cap V_2^{-1}$; entonces tenemos que $x \in U, y \in V$ y $UV = (U_1 \cap U_2^{-1})(V_1 \cap V_2^{-1}) \subseteq (U_1V_1) \cap (U_2^{-1}V_2^{-1}) \subseteq W_1 \cap W_2^{-1} \subseteq W$.

Ahora, probemos que la función $h : (G, \cdot, \tau^*) \longrightarrow (G, \cdot, \tau^*)$ dada por $h(g) = g^{-1}$ es continua. Mostremos que si $W_1 \cap W_2^{-1} \in \mathfrak{D} \subseteq \tau^*$, entonces $h^{-1}(W_1 \cap W_2^{-1})$ es un elemento de τ^* . En efecto, sea $W_1 \cap W_2^{-1} \in \mathfrak{D} \subseteq \tau^*$, es claro que $h^{-1}(W_1 \cap W_2^{-1}) = W_1^{-1} \cap W_2 = W_2 \cap W_1^{-1} \in \mathfrak{D} \subseteq \tau^*$. Esto es suficiente para que h sea continua. Por lo tanto, (G, \cdot, τ^*) es un grupo topológico. \square

En adelante, G^* será lo mismo que (G, \cdot, τ^*) .

Lema 3.1.10. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico T_0 , entonces (G, \cdot, τ^*) es un grupo topológico de Tychonoff.

Demostración. Como (G, \cdot, τ) es un espacio T_0 y $\tau \subseteq \tau^*$ se sigue que (G, \cdot, τ^*) es un espacio T_0 . Luego, por ser (G, \cdot, τ^*) un grupo topológico se concluye que es un espacio de Tychonoff. \square

A continuación, desarrollaremos algunas definiciones y propiedades en los grupos paratopológicos (G, \cdot, τ) para obtener una topología τ' mas gruesa que τ tal que (G, \cdot, τ') es un grupo paratopológico.

Definición 3.1.11. (Abierto regular) Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto U de X se llama *abierto regular* si $U = \text{int}(\overline{U})$.

Nota 3.1.12. Todo subconjunto abierto regular en X es un conjunto abierto en X .

Sea (X, τ) un espacio topológico, es claro que se cumple $U \subseteq \text{int}(\overline{U})$.

Sea $\beta = \{U \in \tau : U \text{ es un subconjunto abierto regular en } X\}$.

Proposición 3.1.13. β es una base sobre X .

Demostración.

- Sea $p \in X$, como $X = \text{int}(\overline{X})$, entonces $p \in X$ y $X \in \beta$.
- Sean $B_1, B_2 \in \beta$ y $y \in B_1 \cap B_2$. Consideremos $B = B_1 \cap B_2$, probemos que el subconjunto B es abierto regular, es decir, $B = \text{int}(\overline{B})$. Sea $p \in \text{int}(\overline{B})$, existe $U \in \tau$ tal que $p \in U \subseteq \overline{B} = \overline{B_1 \cap B_2} \subseteq \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$. Así, $p \in U \subseteq \overline{B_1}$ es decir $p \in \text{int}(\overline{B_1}) = B_1$ y $p \in U \subseteq \overline{B_2}$ o bien $p \in \text{int}(\overline{B_2}) = B_2$ entonces $p \in B_1 \cap B_2 = B$. Además, es claro que $B \subseteq \text{int}(\overline{B})$. Por lo tanto, $y \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ y $B \in \beta$.

□

Definición 3.1.14. (La Topología semiregular) Dado un espacio topológico (X, τ) , denotamos por τ' la topología en X generada por la base β , la topología τ' es la *topología semiregular* sobre X .

El espacio (X, τ') se dice que es la *semiregularización* de (X, τ) y se denota por X_{sr} . Se tiene que los espacios topológicos (X, τ) y (X, τ') tienen los mismos subconjuntos abiertos regulares, esto se prueba en la Proposición 3.1.18.

Observación 3.1.15. Se tiene que $\tau' \subseteq \tau$. Esto es claro por la nota 3.1.12.

Lema 3.1.16. Sean (X, τ) un espacio topológico, U un subconjunto abierto de X y sea $W = \text{int}(\overline{U})$. Entonces W es un subconjunto abierto regular.

Demostración. Probemos que $W = \text{int}(\overline{W})$. Si $U = \emptyset$ es claro que $W = \emptyset$ es un subconjunto abierto regular. Ahora, si $U \neq \emptyset$; sea $p \in \text{int}(\overline{W})$ entonces existe $V \in \tau$ tal que

$$p \in V \subseteq \overline{W} = \overline{\text{int}(\overline{U})} \subseteq \overline{\overline{U}} = \overline{U}.$$

Entonces $p \in \text{int}(\overline{U}) = W$ es decir, $\text{int}(\overline{W}) \subseteq W$. Por otra parte se cumple que $W \subseteq \text{int}(\overline{W})$. Por lo tanto $W = \text{int}(\overline{W})$. \square

Nota 3.1.17. Sea (X, τ) un espacio topológico la expresión $\text{int}_\tau(\overline{U}^\tau)$ significa que el conjunto interior y la cerradura se consideran respecto a la topología τ .

La nota anterior sirve para facilitar entender las expresiones usadas en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.18. Los espacios topológicos (X, τ) y (X, τ') tienen los mismos subconjuntos abiertos regulares.

Demostración.

Sean U un subconjunto abierto regular en (X, τ) , es decir, $U = \text{int}_\tau(\overline{U}^\tau)$. Por demostrar que $U = \text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'})$, sólo falta probar que $\text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'}) \subseteq U$. Supongamos lo contrario, sea $p \in \text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'})$ tal que $p \notin U$ entonces existe $W \in \tau'$ tal que $p \in W$ y $W \subseteq \overline{U}^{\tau'}$, por la Observación 3.1.15 tenemos que $W \in \tau$. Por lo que $p \in \text{int}_\tau(\overline{U}^\tau)$. Como $p \in U$, entonces $U \neq \text{int}_\tau(\overline{U}^\tau)$ pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $U = \text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'})$.

Recíprocamente, Sea $U \in \tau'$ un subconjunto abierto regular, es

decir, $U = \text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'})$. Por demostrar que $U = \text{int}_{\tau}(\overline{U}^{\tau})$, sea $p \in \text{int}_{\tau}(\overline{U}^{\tau})$, existe $W \in \tau$ tal que $p \in W \subseteq \overline{U}^{\tau}$. Notemos que si $\tau' \subseteq \tau$, entonces $\overline{U}^{\tau} \subseteq \overline{U}^{\tau'}$. Así, consideremos $W = \text{int}_{\tau}(\overline{U}^{\tau})$ y por el Lema 3.1.16 se cumple que $W \in \tau'$. Luego, como $p \in W$ existe una vecindad abierta V en τ' de p tal que $p \in V \subseteq \overline{W}^{\tau'} \subseteq \overline{U}^{\tau} \subseteq \overline{U}^{\tau'}$. Entonces $p \in \text{int}_{\tau'}(\overline{U}^{\tau'}) = U$. Por lo tanto, $U = \text{int}_{\tau}(\overline{U}^{\tau})$, es decir, U es un subconjunto abierto regular en (X, τ) . \square

Proposición 3.1.19. Sean (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico y U un subconjunto abierto regular de G . Entonces gU y Ug son subconjuntos abiertos regulares de G , para cada $g \in G$.

Demostración. Sean $r \in G$ y U un subconjunto abierto regular de G . Probemos que $gU = \text{int}(g\overline{U})$.

Sea $g \in \text{int}(g\overline{U})$, entonces existe una vecindad abierta W de g tal que $p \in W \subseteq g\overline{U}$. Por otro lado, de la Proposición 2.1.11 tenemos que $g\overline{U} = \overline{gU}$. Así, $p \in W \subseteq g\overline{U}$ si y sólo si $g^{-1}p \in g^{-1}W \subseteq \overline{U}$. Como (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, la función traslación izquierda $l_{g^{-1}}$ es un homeomorfismo, entonces $l_{g^{-1}}(W) = g^{-1}W$ es abierto en G . Así, $g^{-1}p \in \text{int}(\overline{U}) = U$, entonces $g^{-1}p \in U$ si y sólo si $p \in gU$. Por lo tanto, $gU = \text{int}(g\overline{U})$.

Similarmente, se prueba que Ug es un subconjunto abierto regular de G . \square

Proposición 3.1.20. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico, entonces G_{sr} es un grupo paratopológico.

Demostración. Sean G un grupo paratopológico y U un subconjunto abierto regular vecindad del elemento identidad e de G . Entonces U es abierto en G_{sr} . Ahora, como G es un grupo paratopológico y U es también abierto en G , entonces existe una vecindad abierta V de e en G tal que $V^2 = VV \subseteq U$. Por la continuidad del producto se tiene que $\overline{V}^2 \subseteq \overline{U}$.

Observemos que $(\text{int}(\overline{V}))^2 \subseteq \text{int}(\overline{V}^2)$. En efecto, sean $x, y \in$

$\text{int}(\overline{V})$ entonces existen Z y T vecindades abiertas en G de x e y respectivamente, tales que $Z \subseteq \overline{V}$ y $T \subseteq \overline{V}$. Así, $xy \in ZT \subseteq \overline{V}^2$, es decir, $xy \in \text{int}(\overline{V}^2)$. Luego, $(\text{int}(\overline{V}))^2 \subseteq \text{int}(\overline{V}^2) \subseteq \text{int}(\overline{U}) = U$. Tomemos $W = \text{int}(\overline{V})$ y por Lema 3.1.16, W es un conjunto abierto en G_{sr} .

Ahora, como $e \in V \subseteq W \subseteq W^2 \subseteq U$ se concluye que la operación producto sobre $G_{sr} \times G_{sr}$ es continua en (e, e) .

A continuación, probemos que la función traslación izquierda $l_g : G_{sr} \rightarrow G_{sr}$ es un homeomorfismo. Como $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ sólo basta verificar que si $U \in \tau'$ entonces $l_g^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto regular, para cada $g \in G$. En efecto, sea $U \in \tau'$ por el Lema 2.1.4 y Lema 3.1.19 entonces $l_g^{-1}(U) = l_{g^{-1}}(U) = g^{-1}U$ es un subconjunto abierto regular. Por lo que, l_g es un homeomorfismo.

Similarmente, la función traslación derecha r_g es un homeomorfismo. Por lo tanto, por el Teorema 2.1.9 se concluye que (G, \cdot, τ') es un grupo paratopológico. \square

Teorema 3.1.21. La semiregularización G_{sr} de un grupo paratopológico arbitrario G es también un grupo paratopológico. Además, G_{sr} es un espacio regular. Por lo tanto, si G es Hausdorff, entonces G_{sr} es un grupo paratopológico T_3 .

Demostración. Sea (G, \cdot, τ) un grupo paratopológico, de la proposición anterior, se tiene que G_{sr} es un grupo paratopológico. Probemos ahora, que G_{sr} es un espacio regular. En efecto, denotemos por β la familia de todos los subconjuntos abiertos regulares de G que contienen a e . Se tiene que β es una base local para e en G_{sr} (esto es claro del Lema 3.1.16). Tomemos un elemento arbitrario $U \in \beta$, como G_{sr} es un grupo paratopológico existe $V \in \beta$ satisfaciendo que $V^2 = VV \subseteq U$.

Por la continuidad de la operación producto (\cdot) en $G_{sr} \times G_{sr}$ se cumple la siguiente relación: $\cdot(\overline{V} \times \overline{V}) \subseteq \cdot(\overline{V} \times \overline{V})$ luego $\overline{V} \cdot \overline{V} \subseteq \overline{V\overline{V}}$. Así, $V\overline{V} \subseteq \overline{U}$. Entonces $\overline{V} \subseteq \text{int}(\overline{U}) = U$. Ahora, sean $x \in G$ y $W \in \tau'$ un subconjunto abierto regular tal que $x \in W$. Entonces $e \in x^{-1}W$ por lo anterior como $x^{-1}W$ es

un conjunto abierto regular, existe $V \in \tau'$ tal que $\overline{V} \subseteq x^{-1}W$. Así, $x\overline{V} = x\overline{V} \subseteq W$. Por lo tanto, G_{sr} es regular.

Por otra parte, si G es Hausdorff, entonces G_{sr} es T_1 . En efecto, sean $x, y \in G$ con $x \neq y$. Como G es Hausdorff existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Consideremos $W = \text{int}(\overline{U})$ y $T = \text{int}(\overline{V})$, por el Lema 3.1.16 se concluye que W y T son elementos de τ' . Además,

- $x \in W$ y $y \notin W$ (pues $y \notin \overline{U}$).
- $y \in T$ y $x \notin T$ (ya que $x \notin \overline{V}$).

Por lo tanto, G_{sr} es regular y T_1 , es decir, G_{sr} es T_3 . \square

Teorema 3.1.22. Todo grupo paratopológico G admite un grupo paratopológico regular con una topología más gruesa. En particular, si G es Hausdorff, entonces admite un grupo paratopológico T_3 con topología más gruesa y es, por lo tanto, un espacio de Urysohn.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior. \square

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 3.1.23. Si G es un grupo paratopológico Hausdorff, entonces G es un espacio de Urysohn.

3.2. Algunos Resultados

Algunas condiciones suficientes que podemos anexar al grupo paratopológico, para que sea un grupo topológico se puede obtener con la ayuda de los siguientes lemas.

Lema 3.2.1. Sea G un grupo paratopológico y una vecindad abierta U del elemento identidad e en G . Entonces, $\overline{M} \subseteq MU^{-1}$, para cada subconjunto M de G .

Demostración. Sea $M \subseteq G$, consideremos

$$F = G \setminus \bigcup \{gU : g \in G, gU \cap M = \emptyset\}$$

Se tiene que F es un subconjunto cerrado de G y $M \subseteq F$, entonces $\overline{M} \subseteq F$. Sea $y \in F$, entonces $yU \cap M \neq \emptyset$, es decir, $yh = m$ para algún $h \in U$ y $m \in M$. Así, $y = mh^{-1} \in MU^{-1}$. Luego, $\overline{M} \subseteq F \subseteq MU^{-1}$. Por lo tanto, $\overline{M} \subseteq MU^{-1}$. \square

Lema 3.2.2. Sea G un grupo paratopológico y no un grupo topológico. Entonces, existe una vecindad abierta U del elemento identidad e en G tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte.

Demostración. Por hipótesis tenemos que la operación de elemento inverso en G no es continua, entonces es discontinua en e . Así, podemos elegir una vecindad abierta W de e tal que $e \notin \text{int}(W^{-1})$. Como la multiplicación en G es continua, elegimos una vecindad abierta U de e tal que $U^3 \subseteq W$.

Afirmamos que el conjunto $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en G .

Supongamos lo contrario, es decir, $\text{int}(\overline{U \cap U^{-1}}) \neq \emptyset$. Entonces existe un conjunto abierto V no vacío tal que $V \subseteq \overline{U \cap U^{-1}}$. Por el Lema 3.2.1, se sigue que $V \subseteq \overline{U \cap U^{-1}} \subseteq (U \cap U^{-1})U^{-1} \subseteq U^{-1}U^{-1} = U^{-2}$.

Luego, $VU^{-1} \subseteq U^{-2}U^{-1} = U^{-3} \subseteq W^{-1}$. Como $V \neq \emptyset$ y $V \subseteq \overline{U \cap U^{-1}}$, entonces $\emptyset \neq (U \cap U^{-1}) \cap V \subseteq U \cap V$ luego $U \cap V \neq \emptyset$ y como el conjunto VU^{-1} es abierto en G . Así, $e \in VU^{-1} \subseteq \text{int}(W^{-1})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en G . \square

Lema 3.2.3. Sea G un grupo paratopológico tal que $e \in \overline{\text{int}(U^{-1})}$, para toda vecindad abierta U del elemento identidad e en G . Entonces, G es un grupo topológico.

Demostración. Supongamos que G no es un grupo topológico, por el Lema 3.2.2 existe una vecindad abierta U del elemento identidad e en G tal que $\text{int}(\overline{U \cap U^{-1}}) = \emptyset$. Afirmamos que $e \notin$

$\overline{\text{int}(\overline{U^{-1}})}$. En efecto, si suponemos que $e \in \overline{\text{int}(\overline{U^{-1}})}$, entonces para toda vecindad abierta W del elemento identidad e en G , se tiene que $\text{int}(\overline{U^{-1}}) \cap W \neq \emptyset$. En particular, $\text{int}(\overline{U^{-1}}) \cap U \neq \emptyset$. Sea $p \in U$ y $p \in \text{int}(\overline{U^{-1}})$. Luego, existe una vecindad abierta V de p tal que $V \subseteq \overline{U^{-1}}$. Así, por el Colrolario 1.1.14 se tiene que $U \cap V \subseteq U \cap \overline{U^{-1}} \subseteq \overline{U \cap U^{-1}}$, como $U \cap V$ es vecindad abierta de p entonces $\text{int}(\overline{U \cap U^{-1}}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo que $e \notin \overline{\text{int}(\overline{U^{-1}})}$ pero esto es una contradicción con la hipótesis del lema. \square

Sea G un grupo paratopológico y M un subgrupo invariante (normal) de G . Entonces podemos obtener el grupo cociente G/M . Así, al espacio G/M le asociamos la topología cociente asignada del mapeo natural cociente $\pi : G \rightarrow G/M$ definida por $\pi(g) = gM$. Los lemas siguientes muestran resultados relacionados con el grupo cociente G/M que serán de gran utilidad para demostrar el Teorema de Ellis.

Lema 3.2.4. Si G un grupo paratopológico y M un subgrupo invariante de G , entonces G/M es un grupo paratopológico.

Demostración. Notemos que claramente la función π es un homomorfismo. Sean $gM, qM \in G/M$ y una vecindad abierta W de gqM . Por ser π una función cociente se tiene que $\pi^{-1}(W)$ es un conjunto abierto en G además, $\pi^{-1}(W)$ es una vecindad abierta de gq . Como G es un grupo paratoplógico se sigue que existen vecindades abiertas U y V de g y q respectivamente, tal que $UV \subseteq \pi^{-1}(W)$. Usando que π es sobreyectiva se tiene que $\pi(\pi^{-1}(W)) = W$, por otra parte es fácil verificar que $\pi(UV) = \pi(U)\pi(V)$. Así,

$$\pi(U)\pi(V) = \pi(UV) \subseteq \pi(\pi^{-1}(W)) = W$$

Aplicando el Teorema 2.1.8 se obtiene que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son conjuntos abiertos en G/M y por lo tanto, concluimos que G/M es un grupo paratopológico. \square

Lema 3.2.5. Sea G un grupo paratopológico y M un subgrupo invariante de G . Si M y el grupo paratopológico cociente G/M son grupos topológicos, entonces G también lo es.

Demostración. Ver la prueba de Ravsky en el Lema 4 de [7]. \square

Lema 3.2.6. Sea G un grupo paratopológico y $\mathcal{N}(e)$. Entonces $K = \bigcap \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$ cumple lo siguiente:

1. K es un subgrupo de G .
2. K es un subgrupo invariante (normal) de G .

Demostración.

1. Como $e \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}(e)$ se tiene que $e \in U \cap U^{-1}$. Así, $e \in K$.

Sean $x, y \in K$, es decir, $x, y \in U \cap U^{-1}$ para toda $U \in \mathcal{N}(e)$. Por ser la operación producto en G continua entonces existe una vecindad abierta U del elemento identidad e en G tal que $VV \subseteq U$. Por lo que $xy \in VV \subseteq U$ y $xy \in V^{-1}V^{-1} \subseteq U^{-1}$ para toda $U \in \mathcal{N}(e)$. Así, $xy \in K$.

Sea $x \in K$ se tiene que $x \in U \cap U^{-1}$ para toda $U \in \mathcal{N}(e)$. Entonces $x \in U$ y $x \in U^{-1}$. Luego, $x^{-1} \in U^{-1}$ y $x^{-1} \in U$, es decir, $x^{-1} \in U \cap U^{-1}$ para toda $U \in \mathcal{N}(e)$. Por lo tanto, $x^{-1} \in K$.

2. Sea $g \in G$. Observemos que basta de mostrar la siguiente afirmación: si $\mathcal{M} = \{gUg^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$, entonces $\mathcal{N}(e) = \mathcal{M}$.

Sea $U \in \mathcal{N}(e)$. Como las funciones de traslación derecha e izquierda son abiertas se tiene que el conjunto $W = g^{-1}Ug$ es una vecindad abierta de e en G . Por lo que $U = gWg^{-1}$ es un elemento de \mathcal{M} . La otra contención es clara.

Por otro lado, dado que las funciones de traslación derecha e izquierda son biyecciones se tiene que para cada $g \in G$.

$$gKg^{-1} = \bigcap \{g(U \cap U^{-1})g^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\} = \bigcap \{(gUg^{-1}) \cap (gU^{-1}g^{-1}) : U \in \mathcal{N}(e)\} = \bigcap \{(gUg^{-1}) \cap (gUg^{-1})^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\} = K.$$

Por lo tanto, K es un subgrupo invariante de G .

□

Lema 3.2.7. Si G es un grupo paratopológico, entonces K hereda la topología antidiscreta como subespacio de G .

Demostración. Sea W un conjunto abierto en G no vacío tal que $W \cap K \neq \emptyset$, es decir, existe $p \in W \cap K$. Sea $q \in K$, como $p \in K$ y K es un subgrupo de G se tiene que $p^{-1} \in K$. Entonces $p^{-1}q \in K$. Por otra parte, dado que $p \in W$ se tiene que $p^{-1}W \in \mathcal{N}(e)$. Así, $p^{-1}q \in p^{-1}W$ o bien $q \in W$. Por lo que $K \subseteq W$. Por lo tanto, lo anterior prueba que K hereda la topología antidiscreta como subespacio de G . □

Teorema 3.2.8. (Ellis) Si G es un grupo paratopológico compacto, entonces es un grupo topológico.

Demostración. Sean G un grupo paratopológico compacto y $K = \bigcap \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$, por los Lemas 3.2.6 y 3.2.7 se tiene que K es un grupo topológico con la topología antidiscreta que hereda como subespacio de G .

Por otro lado, del Lema 3.2.4 tenemos que G/K es un grupo paratopológico cociente. Afirmamos que G/K es un espacio T_0 . En efecto, notemos que sólo basta probar que para $y \in G/K$ y $\bar{e} \in G/K$ el elemento identidad en G/K tal que $y \neq \bar{e}$, existe una vecindad abierta U conteniendo sólo uno de los puntos.

Sea $y \in G/K$ distinto de \bar{e} , se sigue que existe $x \in G$ con

$\pi(x) = y$, donde $\pi : G \rightarrow G/K$ es el homomorfismo cociente. Entonces $x \notin K$, así existe $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $x \notin U \cap U^{-1}$. Por ser G un grupo paratopológico, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \notin U$, entonces $y = \pi(x) \notin \pi(V)$ de lo contrario $x \in xK \in VK \subseteq VV \subseteq U$. Si $x \notin U^{-1}$, entonces $\bar{e} \notin \pi(xV)$ de lo contrario $e \in K \in xVK \subseteq xV^2 \subseteq xU$ y por lo tanto $x \in U^{-1}$. Llegamos a la conclusión que, o bien $\bar{e} \in \pi(V)$ y $y \notin \pi(V)$ o $y \in \pi(V)$ y $\bar{e} \notin \pi(V)$. Por el Teorema 2.1.8 se obtiene que $\pi(V)$ es un conjunto abierto en G/K . Por lo tanto, G/K es un espacio T_0 .

Ya que el grupo paratopológico G/K es compacto y T_0 . Entonces G/K es un grupo topológico (ver Teorema 2.4 de [9]) y por el Lema 3.2.7 K es un grupo topológico. Finalmente, aplicando el Lema 3.2.5 se obtiene que G es un grupo topológico. \square

Lema 3.2.9. Sea G un grupo paratopológico T_1 , pero no un grupo topológico. Entonces, para cada subconjunto compacto F de G tal que $e \notin F$, existe una vecindad abierta $O(F)$ de F y una vecindad abierta $O(e)$ de e tal que $O(F) \cap (O(e))^{-1} = \emptyset$.

Demostración. Para cada $x \in F$ seleccionamos una vecindad abierta V_x de e tal que $x^{-1} \notin V_x^2$ (esto se puede obtener, ya que para cada $x \in F$ se tiene que $x \neq e$ o bien $x^{-1} \neq e$, por ser G un espacio T_1 existen vecindades abiertas U y W tales que $x^{-1} \in U$, $e \notin U$ y $e \in W$, $x^{-1} \notin W$. Dado que la operación producto es continua existe V_x una vecindad abierta de e en G tal que $V_x V_x = V_x^2 \subseteq W$, así $x^{-1} \notin V_x^2$). Luego, $V_x x \cap V_x^{-1} = \emptyset$. Como $\mathcal{P} = \{V_x x : x \in F\}$ es una familia de conjuntos abiertos en G que cubre al subconjunto compacto F , entonces existe un subconjunto finito K de F tal que $F \subseteq \bigcup \{V_x x : x \in K\}$. Tomemos $O(e) = \bigcap \{V_x x : x \in K\}$ y $O(F) = \bigcup \{V_x x : x \in K\}$. Entonces $O(e)$ es una vecindad abierta de e , $O(F)$ es una vecindad abierta de F y $O(F) \cap (O(e))^{-1} = \emptyset$. En efecto, si $p \in O(F) \cap (O(e))^{-1}$, luego $p \in O(F)$ y $p \in (O(e))^{-1}$, existe $k \in K \subseteq F$ tal que $p \in V_k k$ y $p \in V_x^{-1}$ para cada $x \in K$. Así, $p \in V_k k$ y $p \in V_k^{-1}$ entonces $V_k k \cap V_k \neq \emptyset$, lo cual es una

contradicción. \square

Teorema 3.2.10. Sea f un homomorfismo perfecto de un grupo paratopológico G Hausdorff a un grupo topológico H . Entonces, G es también un grupo topológico.

Demostración. Supongamos que G no es un grupo topológico. Entonces, por el Lema 3.2.3 existe una vecindad abierta U de elemento identidad e en G tal que $e \notin \text{int}(U^{-1})$. Sea $F = f^{-1}(f(e))$ y $F_1 = F \setminus U$. Como G es Hausdorff y F es compacto, entonces F_1 es compacto y $e \notin F_1$, por el Lema 3.2.9, existe una vecindad abierta $O(F_1)$ de F_1 y una vecindad abierta $O(e)$ de e tal que $O(F_1) \cap (O(e))^{-1} = \emptyset$. Tenemos que $W = O(F_1) \cup U$, es una vecindad abierta de F y f es una función cerrada, entonces existe una vecindad abierta V de $f(e)$ en H tal que $f^{-1}(V) \subseteq W$, podemos también asumir que $V^{-1} = V$, pues H es un grupo topológico. Entonces $(f^{-1}(V))^{-1} = f^{-1}(V^{-1}) = f^{-1}(V) \subseteq W$. Finalmente, pongamos $W_0 = f^{-1}(V) \cap O(e) \cap U$. Se tiene que W_0 es una vecindad abierta de e contenida en U . También, tenemos que $W_0^{-1} \subseteq (f^{-1}(V))^{-1} \subseteq W$ y $W_0^{-1} \subseteq (O(e))^{-1}$. Como $O(F) \cap (O(e))^{-1} = \emptyset$, se sigue que $W_0^{-1} \subseteq U$. Por lo tanto, $e \in W_0 \subseteq \text{int}(U^{-1})$, lo cual es una contradicción. \square

Usando el teorema anterior mostraremos otra demostración al teorema 3.2.8 si el grupo paratopológico compacto G es Hausdorff.

Corolario 3.2.11. Todo grupo paratopológico G Hausdorff compacto es un grupo topológico.

Demostración. Consideremos $H = \{0\}$ el espacio que sólo consta de un elemento identidad 0 de un grupo arbitrario. Claramente, H es un grupo y la única topología que podemos asociar al espacio H es la topología discreta. Así, H es un grupo topológico. Consideremos $f : G \rightarrow H$ definida por $f(g) = 0$. Observemos que f es un homomorfismo perfecto. Por lo tanto, del Teorema 3.2.10 se tiene que G es un grupo topológico. \square

A continuación, presentamos el Teorema de Arhangel'skii y Reznichenko.

Teorema 3.2.12. (Arhangel'skii y Reznichenko) Sea G un grupo paratopológico tal que G es un subespacio denso G_δ de un espacio pseudocompacto X . Entonces G es un grupo topológico.

Demostración. Supongamos que G no es un grupo topológico, por el Lema 3.2.2 existe una vecindad abierta U del elemento identidad e en G tal que $\text{int}(\overline{U \cap U^{-1}}) = \emptyset$. Como G es un grupo paratopológico regular, existe una vecindad abierta W de e en G tal que $\overline{WW} \subseteq U$. Consideremos $O = W \setminus \overline{U \cap U^{-1}}$ se tiene que:

- $O \neq \emptyset$. Ya que si $O = \emptyset$, entonces $e \in W \subseteq \overline{U \cap U^{-1}}$, lo cual es una contradicción.
- $O \subseteq W \subseteq \overline{O}$. En efecto, sea $p \in W$ veamos que $p \in \overline{O}$. Sea V una vecindad abierta de p , como $W \cap V$ es una vecindad abierta de p , por el corolario 1.1.23 $\emptyset \neq V \cap W \cap (\overline{U \cap U^{-1}})^c \subseteq V \cap W \cap (\overline{U \cap U^{-1}})$. Así, $V \cap O \neq \emptyset$, por lo que $p \in \overline{O}$. Además, es claro que $O \subseteq W$.
- $O^{-1} \cap U = \emptyset$. Supongamos lo contrario, si $p \in O^{-1} \cap U$, entonces $p \in O^{-1}$ y $p \in U$, o bien, $p^{-1} \in O$ y $p^{-1} \in U^{-1}$. Como $O \subseteq W$ entonces $p^{-1} \in W \subseteq \overline{WW} \subseteq U$. Así, $p^{-1} \in U \cap U^{-1} \subseteq \overline{U \cap U^{-1}}$. Luego, $p^{-1} \notin O$, pero esto es una contradicción.

Como G es un subconjunto G_δ , fijemos una sucesión $\{M_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X tal que $G = \bigcap \{M_n : n \in \omega\}$. Ahora, definamos una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X y una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de elementos en G tal que $x_n \in U_n$ de la siguiente manera:

- Para $n = 0$. Sean $U_0 = M_0$ y $x_0 \in O$.

- Para $n = 1$. Ya que $e \in W \subseteq \overline{O}$, tenemos que $x_0 \in x_0\overline{O} = \overline{x_0O}$. Dado que U_0 es vecindad abierta de x_0 , resulta que $U_0 \cap (x_0O) \neq \emptyset$. Así, elegimos $x_1 \in U_0 \cap (x_0O)$, notemos que $x_1 \in G$ (pues $x_0O \subseteq G$).

Por otra parte, por ser x_0O un conjunto abierto en G existe K_0 un conjunto abierto en X tal que $x_0O = K_0 \cap G$. Como X es regular y $x_1 \in U_0 \cap M_0 \cap K_0$, existe U_1 vecindad abierta de x_1 en X tal que $\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap M_0 \cap K_0$ y $U_1 \cap G \subseteq K_0 \cap G = x_0O$.

- Hacemos el procedimiento anterior para $k = n$. Ilustramos el caso $k = n + 1$. Como $x_n \in \overline{x_nO}$ y U_n es vecindad abierta de x_n , resulta que $U_n \cap (x_nO) \neq \emptyset$. Así, elegimos $x_{n+1} \in U_n \cap (x_nO)$, notemos que $x_{n+1} \in G$.

Por otra parte, por ser x_nO un conjunto abierto en G existe K_n un conjunto abierto en X tal que $x_nO = K_n \cap G$. Como X es regular y $x_{n+1} \in U_n \cap M_n \cap K_n$, existe U_{n+1} vecindad abierta de x_{n+1} en X tal que $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n \cap M_n \cap K_n$ y $U_{n+1} \cap G \subseteq K_n \cap G = x_nO$.

Así, es como garantizamos que existe y construimos la sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ y una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de elementos en G y se tiene que cumplen lo siguiente:

1. $\overline{U_n} \subseteq U_m$ siempre que $m < n$.
2. $x_n \in U_n$ para cada $n \in \omega$.
3. $x_{n+1} \in x_nO$ para cada $n \in \omega$.

Ahora, definimos $F = \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$. Claramente, $F \subseteq G$ (ya que $F = \bigcap \{U_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap \{U_n \cap M_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap \{M_n : n \in \omega\} = G$) y también, por ser X pseudocompacto y de la construcción de la sucesión U_n se tiene que $F = \bigcap \{\overline{U_n} : n \in \omega\} \neq \emptyset$, (pues, $\bigcap \{\overline{U_n} : n \in \omega\} = \bigcap \{\overline{U_n} : n \in \omega - \{0\}\} \cap \overline{U_0} \subseteq \bigcap \{U_n : n \in \omega - \{0\}\} \cap \overline{U_0} \subseteq \bigcap \{U_n : n \in \omega\} = F$ y claramente

$F \subseteq \bigcap \{\overline{U_n} : n \in \omega\}$). Además, por el Teorema 1.1.29 se tiene que $F \neq \emptyset$.

Notemos que el conjunto FW es una vecindad abierta de F en G . Definimos $P = \overline{FW}$ y $H = \overline{X \setminus P}$ considerando las cerraduras en X . Afirmamos que $H \cap F = \emptyset$. En efecto, supongamos lo contrario sea $x \in H \cap F$, es decir, $x \in H$ y $x \in F$. Como FW es una vecindad abierta de F , existe una vecindad abierta $O(x)$ en X tal que $x \in O(x)$ y $O(x) \cap G \subseteq FW$. Observemos que $O(x) \subseteq P = \overline{FW}$ (ya que si $a \in O(x)$ y tomamos una vecindad abierta V en X del elemento a , entonces $O(x) \cap V$ es también una vecindad de a . Dado que $a \in X = \overline{G}$, $\emptyset \neq O(x) \cap V \cap G \subseteq V \cap FW$ esto implica que $a \in \overline{FW} = P$). Por otra parte, $O(x) \cap (X \setminus P) = \emptyset$, entonces $x \notin \overline{X \setminus P} = H$, lo cual es una contradicción.

Ahora, del Teorema 1.1.29 y de la definición de F se sigue que $U_k \cap H = \emptyset$, para algunos $k \in \omega$. Entonces $U_k \subseteq P$ (pues como $U_k \cap X \setminus P \subseteq U_k \cap \overline{X \setminus P} = U_k \cap H = \emptyset$). Como $x_k \in U_k \cap G$ se sigue que $x_k \in P = \overline{FW}$. Sin embargo, por construcción de la sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ tenemos la siguiente relación:

$$F \subseteq U_{k+2} \cap G \subseteq x_{k+1}O \subseteq x_{k+1}W$$

Luego,

$$FW \subseteq x_{k+1}WW \text{ y } x_k \in \overline{FW} \subseteq x_{k+1}\overline{WW}.$$

También, por construcción de la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ tenemos que $x_{k+1} \in x_kO$. Así, $x_{k+1}\overline{WW} \subseteq x_k\overline{OWW}$. Entonces $x_k \in x_k\overline{OWW}$ o bien, $e \in \overline{OWW} \subseteq OU$. Por lo tanto, $O^{-1} \cap U \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción. \square

Teorema 3.2.13. Sean G un grupo topológico, H un grupo paratopológico y $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo continuo. Supongamos también que al menos alguna de las siguientes condiciones se cumple:

1. G es totalmente acotado.
2. H es de Baire y G es ω -acotado.

Entonces H es un grupo topológico.

Demostración. Supongamos que H no es un grupo topológico. Por el Lema 3.2.2, existe una vecindad abierta U del elemento identidad e_H de H tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en H .

Como φ es un homomorfismo continuo, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es una vecindad abierta del elemento identidad e_G de G y por ser G un grupo topológico, existe W una vecindad abierta de e_G tal que $W \subseteq \varphi^{-1}(U)$ y $W = W^{-1}$. Luego, $\varphi(W) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(U)) \subseteq U$.

- Caso I: Supongamos que G es totalmente acotado, entonces existe un subconjunto A de G tal que A es finito y $G = AW$. Entonces $\varphi(W) = \varphi(W) \cap \varphi(W) = \varphi(W) \cap \varphi(W^{-1}) = \varphi(W) \cap [\varphi(w)]^{-1} \subseteq U \cap U^{-1}$. Por el Lema 1.1.20 se tiene que $\varphi(W)$ es denso en ninguna parte en H . Luego, $\varphi(A)\varphi(W) = \varphi(AW) = \varphi(G) = H$ y dado que A es finito también lo es $\varphi(A)$. Así, por el Lema 1.1.21 y Corolario 2.1.7 se concluye que H es denso en ninguna parte, lo cual es una contradicción, pues H no es denso en ninguna parte.
- Caso II: supongamos que G es ω -acotado y que H cumple la propiedad de Baire. Entonces existe un conjunto numerable $A \subseteq G$ tal que $G = AW$. Similarmente, que en el caso I se tiene que $\varphi(W)$ es denso en ninguna parte en H . Luego, $\varphi(A)\varphi(W) = \varphi(AW) = \varphi(G) = H$. Así, H es una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y como el $\text{int}(H) \neq \emptyset$. Entonces H no cumple la propiedad de Baire, pero esto es una contradicción.

□

El siguiente resultado se deduce del Teorema 3.2.12 de Arhangel'skii y Reznichenko.

Teorema 3.2.14. Supongamos que un grupo paratopológico H es homeomorfo a un subespacio denso G_δ de un espacio T_3 apenas compacto. Entonces H es un grupo topológico.

Corolario 3.2.15. Todo grupo paratopológico T_3 apenas compacto es un grupo topológico.

Una consecuencia inmediata del Lema 1.1.34 y corolario anterior prueba el siguiente resultado.

Corolario 3.2.16. Todo grupo paratopológico G T_3 contablemente pracomacto es un grupo topológico.

Demostración. Aplicando la Proposición 1.1.34 y Teorema 3.2.14 se tiene el resultado. \square

Sean (G, \cdot, τ_1) y $(H, *, \tau_2)$ grupos paratopológicos y $f : (G, \cdot, \tau_1) \rightarrow (H, *, \tau_2)$ una función. Si τ es otra topología tal que $(H, *, \tau)$ es un grupo paratopológico, entonces definimos $f_\tau : (G, \cdot, \tau_1) \rightarrow (H, *, \tau)$ dada por $f_\tau(g) = f(g)$.

En seguida, presentamos algunos resultados relacionados con esta nueva función f_τ .

Observación 3.2.17. Sean (G, \cdot, τ_1) y $(H, *, \tau_2)$ grupos paratopológicos y $f : (G, \cdot, \tau_1) \rightarrow (H, *, \tau_2)$ un homomorfismo. Entonces f_τ es también un homomorfismo.

Proposición 3.2.18. Sea $f : G \rightarrow (H, \cdot, \tau)$ un homomorfismo continuo de un grupo topológico G a un grupo paratopológico H . Entonces $f_{\tau^{-1}} : G \rightarrow (H, \cdot, \tau^{-1})$ es un homomorfismo continuo.

Demostración. Usando la observación anterior sólo falta probar que $f_{\tau^{-1}}$ es continua. Sea W^{-1} un conjunto abierto en (H, τ^{-1}) . Por la Proposición 1.2.6 se tiene que

$$f_{\tau^{-1}}^{-1}(W^{-1}) = [f_{\tau^{-1}}^{-1}(W)]^{-1} = [f^{-1}(W)]^{-1}$$

Consideremos $U = [f^{-1}(W)]^{-1}$. Dado que f es continua se sigue que $f^{-1}(W)$ es abierto en G y por ser G un grupo topológico, la función de elemento inverso es continua. Así, el conjunto U es abierto en G . Por lo tanto, $f_{\tau^{-1}}$ es continua. \square

Teorema 3.2.19. Sea $f : G \longrightarrow (H, \cdot, \tau)$ un homomorfismo continuo de un grupo topológico G a un grupo paratopológico H . Entonces $f_{\tau^*} : G \longrightarrow (H, \cdot, \tau^*)$ es un homomorfismo continuo.

Demostración. Notemos que para probar que f_{τ^*} es continua basta verificar que $f_{\tau^*}(W)$ es abierto en G , donde W es elemento de la subbase $\mathfrak{D} = \{U \cap V^{-1} : U, V \in \tau\}$ que genera la topología τ^* .

Sea $W \in \mathfrak{D}$ entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $W = U \cap V^{-1}$. Luego, $f_{\tau^*}^{-1}(W) = f_{\tau^*}^{-1}(U \cap V^{-1}) = f_{\tau^*}^{-1}(U) \cap f_{\tau^*}^{-1}(V^{-1}) = f^{-1}(U) \cap f_{\tau^{-1}}^{-1}(V^{-1})$.

Donde $f^{-1}(U)$ y $f_{\tau^{-1}}^{-1}(V^{-1})$ son conjuntos abiertos en G , pues, f es continua y por la proposición anterior se tiene que $f_{\tau^{-1}}$ es continua. Por lo tanto, $f_{\tau^*}^{-1}(W)$ es un conjunto abierto en G . \square

Teorema 3.2.20. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continua de un grupo topológico G apenas compacto a un grupo paratopológico H . Entonces H es un grupo topológico.

Demostración. Primero asumamos que H satisface el axioma de separación T_0 . Entonces el grupo topológico asociado H^* es un espacio de Tychonoff. Por los Teoremas 3.2.19, 1.1.32 y 1.1.31 se tiene que H^* es pseudocompacto. Aplicando el Teorema 3.2.12 tenemos que H es un grupo topológico.

En general, sea $K = \bigcap \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$, de la demostración del Teorema 3.2.8 tenemos que H/K es un espacio T_0 y similarmente a lo anterior se prueba que el grupo topológico $(H/K)^*$ es pseudocompacto y por lo tanto, H/K es un grupo topológico. Luego, por el Lema 3.2.7 tenemos que

K es un espacio antidiscreto y así, K es un grupo topológico. Finalmente, del Lema 3.2.5 se concluye que H es un grupo topológico. \square

Sea X un espacio topológico y $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ la diagonal en $X \times X$. Un subconjunto P de $X \times X$ se llama *semiabierto* si el conjunto $P_x = \{y \in X : (x, y) \in P\}$ es abierto en X , para cada $x \in X$.

Definición 3.2.21. (Δ -Baire) Un espacio topológico X es Δ -Baire si para cada subconjunto semiabierto P en $X \times X$ conteniendo Δ , existe un conjunto abierto W no vacío en X tal que $W \times W \subseteq \overline{P}$.

Teorema 3.2.22. Todo grupo paratopológico G regular Δ -Baire es un grupo topológico.

Demostración. Sea U una vecindad abierta del elemento identidad e de G . Por ser la operación producto continua y G regular. Entonces existe una vecindad V del elemento identidad e tal que $\overline{V^2} \subseteq U$. Consideremos $E(V) = \{(g, q) \in G \times G : g^{-1}q \in V\}$. Observemos que el conjunto $E(V)$ cumple lo siguiente:

1. $\Delta \subseteq E(V)$. En efecto, si $(g, g) \in \Delta$, entonces $g^{-1}g = e \in V$. Así, $(g, g) \in E(V)$.
2. $E(V)$ es un subconjunto semiabierto de $G \times G$. Ya que para $g \in G$ se tiene que $E(V)_g = \{p \in G : (g, p) \in E(V)\} = \{p \in G : g^{-1}p \in V\} = \{p \in G : p \in gV\} = gV$. Como la función traslación izquierda l_g es un homeomorfismo obtenemos que $E(V)_g = gV$ es un conjunto abierto en G .
3. $\overline{E(V)} \subseteq E(U)$, donde $\overline{E(U)}$ se define similarmente que $E(V)$. Sea $(g, p) \in \overline{E(V)}$ supongamos por contradicción que $(g, p) \notin E(U)$, es decir, $g^{-1}p \notin U$. Entonces $g^{-1}p \notin \overline{V^2}$. Luego, existe una vecindad abierta O del elemento identidad e tal que $(g^{-1}pO) \cap V^2 = \emptyset$. Así, $(V^{-1}g^{-1}pO) \cap$

$V = \emptyset$ esto implica que $(gV \times pO) \cap \overline{E(V)} = \emptyset$ pero esto es una contradicción, pues $(g, p) \in \overline{E(V)}$. Por lo tanto, $(g, p) \in E(U)$.

Finalmente, como G es Δ -Baire entonces existe un conjunto abierto W en G tal que $W \times W \subseteq \overline{E(V)} \subseteq E(U)$. Tomemos $P = W^{-1}W$ se sigue que claramente P cumple:

- $P \subseteq U$.
- P es una vecindad abierta de e en G .
- $P^{-1} = P$.

Por lo tanto, $P^{-1} = P \subseteq U$. Así, G es un grupo topológico. \square

En seguida, definimos una de las funciones cardinales que en conjunto con otras propiedades sobre el grupo paratopológico implica ser un grupo topológico.

Definición 3.2.23. (Peso red) Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ se dirá que \mathcal{N} es una red de X si cada conjunto abierto de X es la unión de elementos de \mathcal{N} (Observemos que una base en X es una red). $n\omega(X)$ se llamará el *peso de la red* y se define por:

$$n\omega(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red de } X\} + \omega.$$

La demostración del lema siguiente es inmediata de la definición anterior.

Lema 3.2.24. Si (G, \cdot, τ) es un grupo paratopológico que tiene red contable, entonces (G, \cdot, τ^{-1}) tiene red contable.

Lema 3.2.25. Si G es un grupo paratopológico que tiene red contable, entonces G^* tiene red contable.

Demostración. Ver Corolario 4.3 de [13]. \square

Teorema 3.2.26. Sea G es un grupo paratopológico con la propiedad de Baire que tiene red contable. Entonces G es un grupo topológico.

Demostración. Sea G^* el grupo topológico asociado a G y definamos $f : G^* \rightarrow G$ como la función identidad, es claro que f es un isomorfismo continuo. Por el Lema 3.2.25 se tiene que G^* tiene red contable. Como G^* es un grupo topológico con red contable aplicando el Teorema 1.3.16 se tiene que G^* es ω -acotado.

Como G es de Baire y aplicando el Teorema 3.2.13 se concluye que G es un grupo topológico. \square

Teorema 3.2.27. Si (G, τ) es un grupo paratopológico, entonces la diagonal $\Delta_G = \{(g, g) : g \in G\}$ es un subgrupo de $(G, \cdot, \tau) \times (G, \cdot, \tau^{-1})$, y el mapeo natural $p : \Delta_G \rightarrow G^*$ definido por $p(g, g) = g$, para cada $g \in G$, es un isomorfismo topológico de Δ_G sobre el grupo topológico asociado G^* . Si en G adicionamos que es un espacio T_1 , entonces Δ_G es cerrado en $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$.

Demostración. Es claro que Δ_G es un subgrupo de $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$. Ahora, probemos que p es un isomorfismo topológico. Para esto primero veamos que es un isomorfismo: sea $(g, g), (q, q) \in \Delta_G$ se sigue que

$$p((g, g)(q, q)) = p(gq, gq) = gq = p(g, g)p(q, q)$$

Así, p es un homomorfismo. Además, es fácil ver que p es biyectiva. A continuación, verifiquemos que p es un homeomorfismo: sea $U \cap V^{-1}$ un elemento de $\mathcal{D} = \{U \cap V^{-1} : U, V \in \tau\}$ donde \mathcal{D} es la subbase que genera la topología τ^* . Tenemos que

$$\begin{aligned} p^{-1}(U \cap V^{-1}) &= \{(g, g) \in \Delta_G : p(g, g) \in U \cap V^{-1}\} = \\ &= \{(g, g) \in \Delta_G : g \in U \cap V^{-1}\} = (U \times V^{-1}) \cap \Delta_G. \end{aligned}$$

Como el lado derecho de la última igualdad es un subconjunto abierto en Δ_G se sigue que $p^{-1}(U \cap V^{-1})$ es abierto en Δ_G , lo anterior es suficiente para que se concluya que p es continua. Por otra parte, como p es biyectiva podemos definir $p^{-1} : G^* \rightarrow \Delta_G$ dada por $p^{-1}(g) = (g, g)$.

Sea $(U \times V^{-1}) \cap \Delta_G$ un conjunto abierto en Δ_G observemos que

$$(p^{-1})^{-1}((U \times V^{-1}) \cap \Delta_G) = \{g \in G : p^{-1}(g) \in (U \times, V^{-1}) \cap \Delta_G\} = \{g \in G : (g, g) \in (U \times, V^{-1}) \cap \Delta_G\} = U \cap V^{-1}.$$

Por lo anterior se tiene que p^{-1} es continua así, p es un homeomorfismo. Además, es fácil verificar que la función p^{-1} es un homomorfismo. Por lo tanto, p es un isomorfismo topológico. Ahora, consideremos que G es un espacio T_1 , entonces probaremos que Δ_G es cerrado en $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$. Supongamos por contradicción que Δ_G no es cerrado, es decir, existe $(g, q) \in \overline{\Delta_G} \setminus \Delta_G$. Entonces $g \neq q$ o bien $gq^{-1} \neq e$, como G es un espacio T_1 se tiene que existen vecindades abiertas U y V de gq^{-1} y e , respectivamente. Tales que $e \notin U$ y $gq^{-1} \notin V$. Usando que G es un grupo paratopológico se sigue que existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de g y q^{-1} , respectivamente. Tales que $V_1V_2 \subseteq U$ y $e \notin V_1V_2$.

Afirmamos que $(V_1 \times V_2^{-1}) \cap \Delta_G = \emptyset$. Supongamos lo contrario, sea $(a, a) \in (V_1 \times V_2^{-1}) \cap \Delta_G$ se tiene que $a \in V_1$ y $a \in V_2^{-1}$ o bien $a \in V_1$ y $a^{-1} \in V_2$. Luego, $e = aa^{-1} \in V_1V_2$ lo cual es una contradicción. Además, como $g \in V_1$ y $q^{-1} \in V_2$. Entonces $(g, q) \notin \overline{\Delta_G}$ pero esto es una contradicción. \square

Teorema 3.2.28. Si G es un grupo paratopológico T_1 , entonces Δ_G es un grupo topológico con la topología que hereda como subespacio de $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$.

Demostración. Aplicando el teorema anterior, definimos el isomorfismo topológico $p : \Delta_G \rightarrow G^*$ dado por $p(g, g) = g$. En particular, p es un homeomorfismo; como G es un espacio T_1 , entonces G^* es un espacio T_2 . Así, Δ_G es también T_2 . Además, es fácil probar que p es una función perfecta. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.2.10 se tiene que Δ_G es un grupo topológico. \square

El siguiente lema es un corolario de los dos teoremas anteriores.

Lema 3.2.29. Para todo grupo paratopológico G que es T_1 , existe un grupo topológico H homeomorfo a un subespacio cerrado de $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$ y existe un isomorfismo continuo j de H sobre (G, τ) .

A continuación, presentaremos una definición que será de gran utilidad para el último teorema que analizaremos en este trabajo. Sea X un espacio topológico, definimos el *extent* de X denotado $e(X)$, como

$$e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ es discreto y cerrado } \}.$$

Teorema 3.2.30. Sea G un grupo paratopológico T_1 con la propiedad de Baire tal que $e((G, \tau) \times (G, \tau^{-1}))$ es contable. Entonces G es un grupo topológico.

Demostración. Por el lema anterior se tiene que existe un grupo topológico H que es homeomorfo a un subespacio cerrado de $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$ y existe un isomorfismo continuo $j : H \rightarrow (G, \tau)$. Por otra parte, como el *extent* de $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$ es contable, entonces el *extent* de H es contable y por ser H un grupo topológico se tiene que H es ω -acotado (ver [8]). Aplicando el Teorema 3.2.13 se sigue que G es un grupo topológico. \square

Conclusión

El estudio de los grupos paratopológicos es una línea de investigación que aún está activa, en el capítulo II se observa la importancia que tiene analizar a los grupos paratopológicos en relación a los axiomas de separación T_0 , T_1 , T_2 y regular.

En el capítulo III se tiene que si el espacio topológico satisface algún axioma de separación o alguna propiedad topológica, tal como la compacidad, entre otras. Se obtiene que el grupo paratopológico dotado con estas propiedades es un grupo topológico. Por ejemplo, podemos mencionar los resultados siguientes, ver Lema 3.2.3, Teoremas 3.2.8, 3.2.10, 3.2.12, 3.2.13, 3.2.22, etc.

El material que abarca el presente trabajo es apenas una pequeña visión del amplio desarrollo que han tenido los grupos paratopológicos, tanto en sus propiedades como en las relaciones de las funciones cardinales sobre los grupos paratopológicos.

La siguiente pregunta aún sigue abierta ¿si G es un grupo paratopológico regular será G Tychonoff?

Simbología

Simbolo	Definición
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto potencia de X .
$ A $	Cardinalidad del conjunto A .
τ^{-1}	Topología conjugada.
$\beta(x)$	Base local de x .
\overline{A} o \overline{A}^τ	Cerradura del conjunto A en el espacio topológico (X, τ) .
$int_G(A)$ o $int(A)$	Conjunto de puntos interiores de A sobre el espacio topológico (G, τ) .
$G \times H$	Producto cartesiano de G y H .
ω	Cardinalidad de los números naturales.
$X \setminus A$ o A^c	Complemento del conjunto A respecto a X .
$A \subset X$ o $A \subseteq X$	A subconjunto de X .
\emptyset	Conjunto vacío.
e_G	Elemento identidad del grupo G .
$\mathcal{N}(x)$	Familia de vecindades abiertas de x .
$K \triangleleft G$	K es un subgrupo normal o invariante de G .
π	Función natural sobre un grupo cociente.

Índice alfabético

- Δ -Baire, 47
- ω -acotado, 12
- Abierto regular, 30
- Apenas compacto, 7
- Baire, 7
- Compacto, 5
- Completamente regular, 3
- Contablemente pracompacto, 7
- Denso en ninguna parte, 5
- Espacio T_0 , 3
- Espacio T_1 , 3
- Espacio T_2 , 3
- Espacio de Tychonoff, 3
- Función abierta, 2
- Función cerrada, 2
- Función continua, 2
- Función perfecta, 5
- Función traslación, 15
- Grupo, 8
- Grupo paratopológico, 14
- Grupo topológico, 10
- Homeogeneidad, 3
- Homeomorfismo, 2
- Homomorfismo, 9
- Isomorfismo topológico, 19
- Normal, 3
- Peso red, 48
- Pseudocompacto, 7
- Regular, 3
- subconjunto G_δ , 3
- Subconjunto denso, 2
- Subgrupo, 9
- Subgrupo normal, 9
- Topología conjugada, 27
- Topología semiregular, 30
- Topología, 1
- Topología cociente, 6
- Totalmente acotado, 12
- Vecindad, 2
- Vecindad simétrica, 11

Bibliografía

- [1] A. V. Arhangel'skii, E. A. Reznichenko, "Paratopological and semitopological groups versus topological groups", *General Topology and its Applications* 151 33-47, 2005.
- [2] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, "Topological Groups and Related Structures", Springer, 2008.
- [3] A. Bouziad, "Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group", *Proc. Amer. Math. Soc.* 24 953-959, 1998.
- [4] Ellis, R., "A note on the continuity of the inverse", *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 372-373, 1957.
- [5] F. Lin, Ch. Liu, "On paratopological groups", arXiv:1302.4190v1 [Math.GN], 2013.
- [6] L. S. Pontryagin, "Topological Groups", Gordon and Breach, 1966.
- [7] O. Ravsky, "On H-closed paratopological groups", *Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mat.-Mekh.* 59 (2001), 96-101.
- [8] W. Roelke, S. Dierolf, "Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients", McGraw-Hill, New York, 1981.

-
- [9] S. Romaguera, M. Sanchis, “Continuity of the inverse in pseudocompact paratopological groups”, *Algebra Colloq.* 14 no. 1 (2007), pp. 167-175.
- [10] Dugundji, James. “Topology”. Allyn Bacon, Inc. 1966.
- [11] Engelking, Ryszard, “General Topology”, Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma series in pure mathematics; vol 6), ISBN 3-88538-006-4.
- [12] Herstein, I.N. “Álgebra Abstracta”. Grupo Editorial Iberoamérica. 1988.
- [13] M. Tkachenko, “Paratopological and Semitopological Groups Versus Topological Groups”, pp. 825-882 en: “Recent Progress in General Topology III”, K. P. Hart., J. van Mill., P. Simon (eds.), Atlantis Press, 2014.
- [14] Tkachenko, Mikhail., Villegas, Luis Miguel., Hernández García, Constancio., Rendón Gómez, Oscar. J. “Grupos Topológicos”. Universidad Autónoma Metropolitana. 1997.