



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Compacidad en \mathbb{R}^n

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Jessica Tlatelpa Panohaya

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Fernando Macías Romero

Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE.

28 de noviembre de 2025.

Agradecimientos

A mis directores de tesis Dr. Fernando Macias Romero y Dr. David Herrera Carrasco, por su guía, paciencia y valioso consejo; sus observaciones y conocimientos fueron fundamentales para la realización de este trabajo. A los profesores de la FCFM por compartirme su conocimiento y también deseo expresar mi gratitud a los integrantes del jurado, quienes con su experiencia brindaron comentarios valiosos para mejorar esta investigación. Gracias por su paciencia, sus aportaciones y por su tiempo a la evaluación de este proyecto. A mi familia por ser mi mayor fuente de fortaleza. A mis padres, por enseñarme el valor esfuerzo; a mis hermanos/as, por su cariño y comprensión, este logro no habría sido posible. A mi esposo, por creer en mí incluso cuando yo dudaba. Este logro también es tuyo. A mis hijos por ayudarme a cumplir mis metas.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Propiedades de funciones	1
1.2. Conjuntos numerables y no numerables	15
1.3. La norma de \mathbb{R}^n	16
1.4. Conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n	17
1.5. Conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n	20
1.6. Operadores: Cerradura, interior, frontera y derivado	21
1.7. Conjuntos perfectos	26
2. Compacidad	29
2.1. Compacidad en \mathbb{R}^n	29
2.2. Compacidad local	44
2.3. Conjunto de Cantor	46
Referencias	51
Índice alfabético	54

Introducción

La teoría de los espacios topológicos conexos y compactos contiene temas fascinantes con aplicaciones en muchas áreas de las Matemáticas. Como se puede ver en [1], [2], [3] y [5], la compacidad es una de las propiedades más importantes, específicamente en Topología y en Análisis Matemático. Muchos teoremas del Cálculo Diferencial existen gracias a la compacidad del dominio de las funciones mencionadas en dichos teoremas. Por lo tanto la compacidad es un concepto interesante, importante y muy útil, necesario de ser estudiado a fondo. En libros más especializados como [6] se puede apreciar como la compacidad es fundamental para el desarrollo de teorías más avanzadas como lo es la Teoría de Continuos. Este trabajo de tesis está dedicado precisamente a revisar el concepto de compacidad y sus propiedades más importantes en el espacio métrico \mathbb{R}^n . También se hace una revisión de propiedades relacionadas en un conjunto especial; el conjunto de Cantor. En el capítulo 1, se recuerda que es una norma en un espacio vectorial, para abordar a \mathbb{R}^n como espacio vectorial normado, dando lugar así a una función que mide la distancia entre cualquier par de puntos de \mathbb{R}^n . En este mismo capítulo, se puntualiza qué es una bola abierta, bola cerrada, conjunto abierto, conjunto cerrado y otros conceptos topológicos importantes como interior, frontera, cerradura y conjunto derivado. El capítulo 2 está dedicado a revisar la compacidad en \mathbb{R}^n , vemos su definición, ejemplos, propiedades básicas y lo relacionado al conjunto de Cantor. En este capítulo podemos encontrar también un estudio de conceptos relacionados como conjunto relativamente compacto, precompacidad, separabilidad, compacidad local y la propiedad Bolzano-Weierstrass.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo revisamos de manera detallada los conjuntos compactos en \mathbb{R}^n , por lo que dedicamos un primer capítulo para los preliminares y nociones básicas, tales como funciones, conjuntos numerables y no numerables, norma en \mathbb{R}^n , conjunto abierto, conjunto cerrado, interior, frontera, derivado, conjunto perfecto. Como es usual denotaremos por \mathbb{R} , \mathbb{N} y $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el conjunto de números reales, el conjunto de los números naturales y el conjunto de números reales positivos unión con el cero, respectivamente.

1.1. Propiedades de funciones

Comenzamos con una sección para recordar propiedades básicas de las funciones, ya que es uno de los conceptos más importantes y esenciales en cualquier área de Matemáticas, en particular en nuestro trabajo de compacidad en \mathbb{R}^n .

El producto cartesiano es una operación entre conjuntos, dando por resultado otro conjunto. En esta sección iniciamos con el producto cartesiano de dos conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos. Para cada $x \in A$ y cada $y \in B$ podemos considerar un nuevo objeto (x, y) que llamaremos **pareja ordenada**. Las parejas ordenadas están determinadas por la condición siguiente: $(x, y) = (z, w)$ si, y sólo si, $x = z$ y $y = w$. En particular, $(x, y) = (y, x)$ si, y sólo si, $x = y$. Al conjunto de parejas ordenadas (x, y) , donde $x \in A$ y $y \in B$ se le llama producto cartesiano de A y B , y lo denotamos por $A \times B$. En el caso

en que $A = B$, el conjunto $A \times B$ se denota también como A^2 . De manera más precisa, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos. El **producto cartesiano** de A con B , denotado por $A \times B$, es

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Es importante observar que si A es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \times A = \{(z, x) : z \in \emptyset, x \in A\} = \emptyset$, ya que la condición $z \in \emptyset$ no puede ser satisfecha. Un razonamiento análogo muestra que $A \times \emptyset = \emptyset$.

Si $(x, y) \in A \times B$, a x se le llama primera coordenada de (x, y) y a y segunda coordenada de (x, y) .

En el siguiente teorema establecemos resultados que relacionan al producto cartesiano de conjuntos con las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos.

Teorema 1.2. Si A , B y C son conjuntos, entonces se cumple lo siguiente

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

$$(2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

$$(3) A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Demostración. Demostraremos el inciso (1), los incisos (2) y (3) se demuestran de manera muy parecida. Sea $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Luego, $x \in A$ y $y \in B \cup C$. Tenemos que, $x \in A$ y ($y \in B$ o $y \in C$). Por la propiedad distributiva de la conjunción, ($x \in A$ y $y \in B$) o ($x \in A$ y $y \in C$). Así, $(x, y) \in A \times B$ o $(x, y) \in A \times C$. Por lo tanto, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. La otra contención se demuestra de manera similar. \square

El concepto de función surge de las relaciones que se dan entre variables (dependiente e independiente). Las funciones son importantes dentro de todas las áreas de Matemáticas, en particular dentro de la Topología de Espacios Métricos y el Análisis Matemático, donde juega un papel esencial, por lo que enunciamos a continuación su definición.

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. Una **función** de A en B es un subconjunto f de $A \times B$ con la propiedad de que para cada $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Sean A y B conjuntos. Si f es una función de A en B , este hecho suele escribirse así:

$$f : A \rightarrow B, \text{ o bien, } A \xrightarrow{f} B.$$

Si $x \in A$ y $f : A \rightarrow B$ es una función, al único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ lo denotaremos por $y = f(x)$. De este modo, $y = f(x)$ si y sólo si $(x, y) \in f$.

En toda función, siempre es importante tener bien claro como es su dominio y su imagen, por lo que recordamos a continuación su definición.

Definición 1.4. Sean A y B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. El **dominio** de f , denotado por Dom_f , es el conjunto A . El **codominio** de f , denotado por Cod_f , es el conjunto B . La **imagen** de f , denotado por Im_f , es el conjunto $\{y \in B : \text{existe } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in f\} = \{f(x) \in B : x \in A\}$.

Es preciso mencionar que la imagen de una función f también se conoce como el **rango** de f y, en este caso, es denotado por Ran_f .

Ejemplo 1.5. Para aclarar más el concepto de función tenemos lo siguiente.

- (1) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ y $f = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a)\}$. El subconjunto f de $A \times B$ no es función porque $(1, a) \in f$ y $(1, b) \in f$, es decir, el elemento $y \in B$ tal que $(1, y) \in f$ no es único.
- (2) Sean A y B conjuntos, $b \in B$ y $f = A \times \{b\} = \{(x, b) : x \in A\}$. El subconjunto f de $A \times B$ es una función tal que para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = b$. La función f se llama **función constante** b .
- (3) Sean B un conjunto y $f = \{(x, x) : x \in B\}$. El subconjunto f de $B \times B$ es una función tal que para todo $x \in B$, se tiene que $f(x) = x$. La función f se llama **función identidad** en B y se denota como 1_B o Id_B . Si $A \subset B$, entonces el subconjunto $g = \{(a, a) : a \in A\}$ de $B \times B$ es una función tal que para todo $a \in A$, se tiene que $g(a) = a$. La función g se llama **función inclusión** de A en B y se denota por i_A .
- (4) Sea X un conjunto. El **conjunto potencia** de X , denotado usualmente por $\mathcal{P}(X)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de X . Sea $f = \{(A, X \setminus A) : A \in \mathcal{P}(X)\}$. El subconjunto f de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ es una función tal que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, se tiene que $f(A) = X \setminus A$.

A partir de una función f se puede obtener otra función parecida a f , definida en un subconjunto del dominio de f ; dicha función se llama restricción de f .

Definición 1.6. Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. La **función restringida** de f a A , denotada por $f|_A$, es la función $f \cap (A \times Y)$.

La imagen directa de un subconjunto del dominio de una función y la imagen inversa de un subconjunto del codominio de una función, también son importantes dentro de la teoría de las funciones, por esta razón veamos cómo se define cada una de ellas.

Definición 1.7. Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. La **imagen de A bajo f** (o **imagen directa de A bajo f**), denotada por $f(A)$, es el conjunto

$$\{y \in Y : \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\} = \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

2. La **imagen inversa de B bajo f** , denotada por $f^{-1}(B)$, es el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si $a \in A$, entonces $f(a) \in f(A)$. Si $f(x) \in f(A)$, ¿entonces $x \in A$?

No siempre. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$. Tenemos que $f([1, 3]) = [1, 9]$, además, $f(-2) = (-2)^2 = 4 \in f([1, 3])$, pero $-2 \notin [1, 3]$.

Ahora, es conveniente recordar la noción de familia indexada, ya que se estará usando de manera frecuente de aquí en adelante.

Definición 1.8. Sean Ω y X conjuntos. Una **familia indexada** por Ω de elementos de X (o con índices en Ω), denotada por $\{x_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, es una función $f : \Omega \rightarrow X$ tal que $f(\omega) = x_\omega$.

La unión e intersección arbitraria de conjuntos también es fundamental para nuestro trabajo, por lo que recordamos a continuación su definición.

Definición 1.9. Sean X un conjunto no vacío y $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ una familia de subconjuntos de X . La **unión** de los elementos de $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ es

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = \{x \in X : \text{existe } \omega \in \Omega \text{ tal que } x \in A_\omega\}.$$

La **intersección** de los elementos de $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ es

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} A_\omega = \{x \in X : x \in A_\omega, \text{ para cada } \omega \in \Omega\}.$$

Algunas propiedades básicas de una función son las siguientes.

Teorema 1.10. Sean X y Y conjuntos, A y B subconjuntos de X , C y D subconjuntos de Y y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se cumple lo siguiente

- (1) $A = \emptyset$ si y sólo si $f(A) = \emptyset$.
- (2) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- (3) $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.
- (4) Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$.
- (5) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (6) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- (7) Si $C \subset D$, entonces $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
- (8) $f^{-1}(D \setminus C) = f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$.
- (9) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- (10) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Demostración. Veamos que se cumple (1). Supongamos que $A = \emptyset$ y que $f(A) \neq \emptyset$. Como $f(A) \neq \emptyset$, existe $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, lo cual es una contradicción porque $A = \emptyset$. Por lo tanto, $f(A) = \emptyset$ si $A = \emptyset$. Ahora supongamos que $f(A) = \emptyset$ y que $A \neq \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$, existe $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A)$, lo cual es una contradicción porque $f(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $A = \emptyset$ si $f(A) = \emptyset$.

Veamos que se cumple (3). Sea $y \in f(B) \setminus f(A)$. Existe $x \in B$ tal que $y = f(x) \in f(B)$ y $f(x) \notin f(A)$. Notemos que $x \notin A$, porque si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$, lo cual es una contradicción. Así, $x \in B \setminus A$ y por lo tanto $f(x) \in f(B \setminus A)$, es decir, $y \in f(B \setminus A)$. Por lo que concluimos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.

Veamos que se cumple (4). Supongamos que $A \subset B$ y sea $y \in f(A)$. Así, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A \subset B$, tenemos que $x \in B$. Así, $f(x) = y \in f(B)$. Por lo tanto, $f(A) \subset f(B)$.

Veamos que se cumple (7). Supongamos que $C \subset D$ y sea $x \in f^{-1}(C)$. Luego, $f(x) \in C$. Como $C \subset D$, tenemos que $f(x) \in D$. Así, $x \in f^{-1}(D)$. Por lo tanto, $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

Veamos que se cumple (8). Sea $x \in f^{-1}(D \setminus C)$. Esto significa que $f(x) \in D \setminus C$, es decir, $f(x) \in D$ y $f(x) \notin C$. Así, $x \in f^{-1}(D)$ y $x \notin f^{-1}(C)$, es decir, $x \in f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$. Por lo tanto, $f^{-1}(D \setminus C) \subset f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$. De manera análoga se puede probar que $f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D \setminus C)$. Así, $f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(B' \setminus A')$.

Los incisos (2), (5), (6), (9) y (10) se demuestran de manera similar. \square

Proposición 1.11. Sean X y Y conjuntos y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ familias de subconjuntos de X . Se cumple lo siguiente

$$(1) \quad X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).$$

$$(2) \quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).$$

$$(3) \quad \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{\mu \in M} (A_\lambda \cap B_\mu) \right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

$$(4) \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{\mu \in M} (A_\lambda \cup B_\mu) \right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

(5) Si $f : X \rightarrow Y$ es una función, entonces

$$f \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

(6) Si $f : X \rightarrow Y$ es una función, entonces

$$f \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

(7) Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $\{C_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ es una familia de subconjuntos de Y , entonces

$$f^{-1} \left(\bigcup_{\omega \in \Omega} C_\omega \right) = \bigcup_{\omega \in \Omega} f^{-1}(C_\omega).$$

(8) Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $\{C_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ es una familia de subconjuntos de Y , entonces

$$f^{-1} \left(\bigcap_{\omega \in \Omega} C_\omega \right) = \bigcap_{\omega \in \Omega} f^{-1}(C_\omega).$$

Demostración. Veamos que se cumple (2). Sea $x \in X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Esto equivale a que $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \notin A_{\lambda_0}$, es decir, $x \in X \setminus A_{\lambda_0}$. Luego, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$. La otra contención se obtiene de la misma forma, y así se tiene que $X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

Veamos que se cumple (3). Sea $C \subset X$. Primero veamos que $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Para esto, sea $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C$. Luego, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ y $x \in C$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$ y $x \in C$. Luego, $x \in A_{\lambda_0} \cap C$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Así, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$.

Ahora, sea $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0} \cap C$, es decir, $x \in A_{\lambda_0}$ y $x \in C$. Luego, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ y $x \in C$. Por lo tanto, $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C$. Así, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C) \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C$.

Por lo tanto, concluimos que $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$.

Ahora, usando el hecho de que $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C)$ con $C = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) &= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap C \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \right) \end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que $\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \cap A_\lambda = \bigcup_{\mu \in M} (B_\mu \cap A_\lambda)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(A_\lambda \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) \cap A_\lambda \right) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{\mu \in M} (B_\mu \cap A_\lambda) \right) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{\mu \in M} (A_\lambda \cap B_\mu) \right) \\ &= \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos finalmente que

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{\mu \in M} (A_\lambda \cap B_\mu) \right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

Veamos que se cumple (5). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de X . Mostraremos que $f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. Para esto, sea $y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$. Existe $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$ y $f(x) = y$. Esto significa que $y = f(x) \in f(A_{\lambda_0})$. Así, $y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. De manera análoga se obtiene

que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$, concluyéndose que

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

Los incisos (1), (4), (6), (7) y (8) se demuestran de manera similar. \square

Definición 1.12. Sean X y Y conjuntos con $X \neq \emptyset$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. La función f es **inyectiva** (o uno a uno) si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, se cumple que $f(x) \neq f(y)$. La función f es **suprayectiva** si $f(X) = Y$. La función f es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Teorema 1.13. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, con $X \neq \emptyset$. Las siguientes proposiciones son equivalentes

- (1) La función f es inyectiva.
- (2) Para cualesquiera $x, y \in X$, se cumple que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
- (3) Existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ (es decir, f tiene inversa izquierda).

- (4) Para cualquier conjunto Z y cualesquiera funciones $h, k : Z \rightarrow X$, tales que $f \circ h = f \circ k$ se cumple que $h = k$ (f es cancelable por la izquierda).
- (5) Para todo $A \subset X$, se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.
- (6) Para cualesquiera $A, B \subset X$, se tiene que $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.
- (7) Para cualquier $A \subset X$, se tiene que $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.
- (8) Para cualesquiera $A, B \subset X$, se tiene que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Demostración. El hecho de que (1) es equivalente a (2) es evidente.

Veamos que (1) implica (3). Supongamos que f es inyectiva. Sean $x_0 \in X$ (recordar que $X \neq \emptyset$) y $g : Y \rightarrow X$ definida, para cada $y \in Y$, por

$$g(y) = \begin{cases} x_0 & \text{si } y \notin f(X), \\ x & \text{si } y = f(x) \in f(X). \end{cases}$$

Primero veamos que g es una función bien definida. Para esto, sean $y, y' \in Y$ y supongamos que $g(y) \neq g(y')$. Veremos que $y \neq y'$. Tenemos cuatro casos

- (i) $y \in f(X)$ y $y' \in f(X)$.
- (ii) $y \in f(X)$ y $y' \notin f(X)$.
- (iii) $y \notin f(X)$ y $y' \in f(X)$.
- (iv) $y \notin f(X)$ y $y' \notin f(X)$.

Si se da el caso (i), es decir, si $y, y' \in f(X)$, entonces existen $x, x' \in X$ tales que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Por definición de g , tenemos que $g(y) = x$ y $g(y') = x'$. Además, por hipótesis $g(y) \neq g(y')$, es decir, $x \neq x'$. Como f es inyectiva, tenemos que $f(x) \neq f(x')$, es decir, $y \neq y'$.

Si se da el caso (ii), es decir, si $y \in f(X)$ y $y' \notin f(X)$, entonces obviamente $y \neq y'$. Si se da el caso (iii), también se tiene obviamente que $y \neq y'$. Si se da el caso (iv), es decir, si $y \notin f(X)$ y $y' \notin f(X)$, entonces $g(y) = x_0 = g(y')$, lo cual es una contradicción, porque por hipótesis $g(y) \neq g(y')$.

Así, tenemos que g es una función bien definida.

Ahora, probaremos que $g \circ f = \text{id}_X$. Para esto, sea $x \in X$. Luego, $f(x) \in f(X)$. Por como está definida g tenemos que $g(f(x)) = x$. Así, $(g \circ f)(x) =$

$g(f(x)) = x$, concluyéndose que $g \circ f =_X$.

Veamos que (3) implica (4). Sean Z un conjunto y $h, k : Z \rightarrow X$ funciones tales que $f \circ h = f \circ k$. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ tiene inversa a la izquierda g , es decir, $g \circ f =_X$. Notemos que $h =_X \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k =_X \circ k = k$. Así, $h = k$.

Veamos que (4) implica (5). Sean $A \subset X$ y $x \in f^{-1}(f(A))$. Luego, $f(x) \in f(A)$. Por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. Sean $h, k : \{1\} \rightarrow X$ funciones tales que $h(1) = x$ y $k(1) = a$. Así, $(f \circ h)(1) = f(x) = f(a) = (f \circ k)(1)$. Por hipótesis, $h = k$. Luego, $x = a$. Así, $x \in A$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Demuestre la otra contención para concluir que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Veamos que (5) implica (6). Sean $A, B \subset X$. Por (3) del teorema 1.10, sabemos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$. Sólo resta ver que $f(B \setminus A) \subset f(B) \setminus f(A)$. Sea $y \in f(B \setminus A)$. Existe $x \in B \setminus A$ tal que $f(x) = y$. Así, $x \in B$ y $x \notin A$. Por hipótesis, $A = f^{-1}(f(A))$. Por lo tanto, $x \in B$ y $x \notin f^{-1}(f(A))$. Así, $f(x) \notin f(A)$ y $f(x) \in B$, es decir, $f(x) \in f(B) \setminus f(A)$, concluyéndose que $f(B \setminus A) \subset f(B) \setminus f(A)$. Por Teorema 1.10, inciso (3), tenemos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$. Por lo tanto, $f(B) \setminus f(A) = f(B \setminus A)$.

Veamos que (6) implica (7). Sea $A \subset X$. Usando la hipótesis tenemos que $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$. Ahora, como $f(X) \subset Y$, tenemos que $f(X) \setminus f(A) \subset Y \setminus f(A)$. Así, $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

Veamos que (7) implica (8). Sean $A, B \subset X$. Por (6) del teorema 1.10, sabemos que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Así, es suficiente mostrar que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Sea $y \in f(A) \cap f(B)$. Existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Supongamos que $b \notin A$, es decir, $b \in X \setminus A$. Luego, $y = f(b) \in f(X \setminus A)$. Ahora, por hipótesis, tenemos que $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$, por lo que $y = f(b) \in Y \setminus f(A)$, es decir, $y \notin f(A)$, lo cual es una contradicción porque $y \in f(B) \cap f(A)$. Así, $b \in A \cap B$. Luego, $y = f(b) \in f(A \cap B)$, concluyéndose que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Por lo tanto, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Veamos que (8) implica (1). Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Luego, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Así, $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por hipótesis tenemos que $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$. Además, notemos que para todo $z \in X$, se tiene que

$f(\{z\}) = \{f(z)\}$. Luego, $f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}$. Por lo tanto, $\{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \emptyset$. Así, $f(x) \neq f(y)$. Por lo que f es inyectiva. \square

Teorema 1.14. Sean X y Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Las siguientes propiedades son equivalentes

- (1) La función f es suprayectiva.
- (2) Para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- (3) Existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$ (f tiene inversa derecha).
- (4) Para todo conjunto Z , si $h, k : Y \rightarrow Z$ son funciones y $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$ (f es cancelable por la derecha).
- (5) Para cualquier $B \subset Y$, se tiene que $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (6) Para todo $A \subset X$, se tiene que $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

Demostración. La equivalencia de los enunciados (1) y (2) es inmediata.

Veamos que (2) implica (3). Observemos que, como f es suprayectiva, $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$; además, para cualquier $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ y para cualquier $y' \in Y$, con $y' \neq y$, se tiene que $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$. Luego, la familia $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ es una partición del conjunto X . Por el Axioma de Elección (véase pág. ??), existe $B \subset X$ tal que para todo $y \in Y$, se tiene que $B \cap f^{-1}(y) = \{x_y\}$, para algún $x_y \in X$.

Sea $g : Y \rightarrow X$ definida, para cada $y \in Y$, por $g(y) = x_y$. Observemos que x_y es el único elemento que pertenece a $B \cap f^{-1}(y)$, por lo tanto g está bien definida. Además:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f(x_y) \\ &= y \\ &= \text{id}_Y(y). \end{aligned}$$

Luego, $f \circ g = \text{id}_Y$.

Veamos que (3) implica (4). Supongamos ahora que existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$. Sean Z un conjunto y $h, k : Y \rightarrow Z$ funciones tales que $h \circ f = k \circ f$. Tenemos que

$$\begin{aligned} h &= h \circ \text{id}_Y \\ &= h \circ (f \circ g) \\ &= (h \circ f) \circ g \\ &= (k \circ f) \circ g \\ &= k \circ (f \circ g) \\ &= k \circ \text{id}_Y \\ &= k. \end{aligned}$$

demostrándose así lo que se quería.

Veamos que (4) implica (5). Sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Supongamos que $f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$. Luego, $B \setminus f(f^{-1}(B)) \neq \emptyset$. Sean $h, k : Y \rightarrow \{1, 2\}$ funciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h(y) &= 1 \text{ para toda } y \in Y, \\ k(y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \notin B \setminus f(f^{-1}(B)), \\ 2 & \text{si } y \in B \setminus f(f^{-1}(B)). \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que h y k son distintas, porque existe al menos un $y \in B \setminus f(f^{-1}(B))$ tal que $h(y) = 1$ y $k(y) = 2$. Mostraremos a continuación que $h \circ f = k \circ f$. Sea $x \in X$. Tenemos dos casos: $x \in f^{-1}(B)$ o $x \notin f^{-1}(B)$.

Supongamos que $x \in f^{-1}(B)$. Entonces $f(x) \in f(f^{-1}(B))$, es decir, $f(x) \notin B \setminus f(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $k(f(x)) = 1 = h(f(x))$. Luego, $(k \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$, para toda $x \in f^{-1}(B)$.

Supongamos ahora que $x \notin f^{-1}(B)$. Luego, $f(x) \notin B$. Así, $f(x) \notin B \setminus f(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $k(f(x)) = 1 = h(f(x))$. Así, para toda $x \in X \setminus f^{-1}(B)$, se tiene que $(h \circ f)(x) = (k \circ f)(x)$.

De lo anterior, podemos concluir que $h \circ f = k \circ f$, y por hipótesis, tenemos que $h = k$, lo cual es una contradicción, pues ya hemos visto que estas dos funciones son diferentes. Por lo tanto, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Veamos que (5) implica (6). Para esto, sea $A \subset X$. Por hipótesis, $f(f^{-1}(Y)) = Y$. Como $f^{-1}(Y) = X$, tenemos que $f(X) = Y$. Luego, $Y \setminus f(A) = f(X) \setminus$

$f(A)$. Por (3) del teorema 1.10, tenemos que $f(X) \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$. Por lo tanto, $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

Veamos que (6) implica (1). Como $\emptyset \subset X$, por hipótesis, $Y \setminus f(\emptyset) \subset f(X \setminus \emptyset)$. Notemos que $f(X \setminus \emptyset) = f(X)$ y $Y \setminus f(\emptyset) = Y \setminus \emptyset = Y$. Luego, $Y \subset f(X)$. Como $f(X) \subset Y$, concluimos que $f(X) = Y$. Por lo tanto, f es suprayectiva. \square

Corolario 1.15. Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones. Se cumple lo siguiente

- (1) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- (2) Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.
- (3) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
- (4) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

Demostración. Veamos que se cumple (1). Sean f y g funciones inyectivas y $x, y \in X$. Por demostrar que si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, entonces $x = y$. Como g es inyectiva, tenemos que $f(x) = f(y)$. Ahora, por la inyectividad de f , tenemos que $x = y$. Así, $g \circ f$ es inyectiva.

veamos que se cumple (2). Por demostrar $Z = \text{Img}(g \circ f)$ Como g es suprayectiva para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Luego f es suprayectiva para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ Sustituyendo $y = f(x)$ en $g(y) = z$ obtenemos $g(f(x)) = z$, es decir, $g \circ f(x) = z$ entonces $z \in \text{Img}(g \circ f)$. Así $z \subset \text{Img}(g \circ f)$ por lo tanto $g \circ f$ es suprayectiva.

Veamos que se cumple (3). Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Por el inciso (3) del teorema 1.13, existe $h : Z \rightarrow X$ tal que $h \circ (g \circ f) = \text{id}_X$. Ahora, como $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, tenemos que $(h \circ g) \circ f = \text{id}_X$. Por el teorema 1.13, inciso (3), tenemos que f tiene inversa por la izquierda, y así f es inyectiva.

Veamos que se cumple (4). Supongamos que $g \circ f$ es suprayectiva. Por el inciso (3) del teorema 1.14, existe $h : Z \rightarrow X$ tal que $(g \circ f) \circ h = \text{id}_Z$. Ahora, como $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, tenemos que $g \circ (f \circ h) = \text{id}_Z$. Por el teorema 1.14, inciso (3), tenemos que g tiene inversa por la derecha, y así g es suprayectiva. \square

Teorema 1.16. Sean X y Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes

- (1) La función f es biyectiva.
- (2) Para cualquier $y \in Y$, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- (3) Para todo $A \subset X$, se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$ y para todo $B \subset Y$, se tiene que $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (4) Para cualquier $A \subset X$, se tiene que $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.
- (5) Existen funciones $g, h : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f = \text{id}_X$ y $f \circ h = \text{id}_Y$.
- (6) Existe una única función $m : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ m = \text{id}_Y$ y $m \circ f = \text{id}_X$ (la función m se denota por f^{-1}).

Demostración. Es una consecuencia de los Teoremas 1.13 y 1.14. \square

Sean X y Y conjuntos.

- (a) Si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva, por el inciso (3) del teorema 1.13, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$. Luego, por el teorema 1.14, inciso (3), tenemos que g es suprayectiva.
- (b) Si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva, entonces la función inyectiva $f|^{f(X)} : X \rightarrow f(X)$, definida para todo $x \in X$, por $f|^{f(X)}(x) = f(x)$, es una función biyectiva.
- (c) Si $f : X \rightarrow Y$ es suprayectiva, por el inciso (3) del teorema 1.14, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$. Luego, por el inciso (3) del teorema 1.13, tenemos que g es inyectiva.

1.2. Conjuntos numerables y no numerables

Las definiciones de conjunto finito, infinito, numerable e infinito numerable son importantes en nuestro estudio de los espacios métricos, por esta razón dedicamos esta sección a revisar lo más básico de estas clases de conjuntos.

Definición 1.17. Dos conjuntos X y Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \rightarrow Y$.

Si X y Y son equipotentes lo denotaremos por $X \sim Y$.

La cardinalidad de un conjunto es una característica importante, por lo que detallamos a continuación este concepto.

Definición 1.18. *Para cada conjunto X es asignado un número cardinal llamado la **cardinalidad** de X y es denotado por $|X|$.*

En [4, Corolario 9.53] se demuestra formalmente que a cada conjunto siempre se le puede asignar un número cardinal.

Podemos decir que el símbolo $|X|$ es la etiqueta que representa la cantidad de elementos que posee el conjunto X , por ejemplo, para el conjunto \emptyset , definimos que $|\emptyset| = 0$. Cuando decimos que \mathfrak{m} es un número cardinal es porque \mathfrak{m} representa la cardinalidad o el número de elementos de algún conjunto X y, obviamente, la de cualquier conjunto equipotente a X . Decimos que $|X| = |Y|$ si y sólo si X y Y son equipotentes. El conjunto $\{1, \dots, n\}$ se denota por J_n .

Definición 1.19. *Sean X y Y conjuntos. Decimos que $|X| \leq |Y|$ si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$. Si $|X| \leq |Y|$ y $|X| \neq |Y|$, entonces escribimos $|X| < |Y|$.*

Teorema 1.20. [4, Corolario 9.55] *El axioma de elección implica que para cualesquiera conjuntos A y B o bien $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$, es decir, el orden \leq es lineal.*

Así, si \mathfrak{m} y \mathfrak{n} son números cardinales, cuando escribimos $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ significa que al tomar conjuntos X y Y tales que $|X| = \mathfrak{m}$ y $|Y| = \mathfrak{n}$ siempre existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$. La expresión $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ significa que para los conjuntos X y Y existe una función inyectiva $f : X \rightarrow Y$, pero no existe una función biyectiva entre X y Y .

1.3. La norma de \mathbb{R}^n

Esta sección está dedicada a recordar como es la norma en \mathbb{R}^n y como a partir de ahí se puede obtener una función que mide la distancia entre cualquier par de puntos de \mathbb{R}^n .

Definición 1.21. *Sea V un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{R} . Una **norma** sobre V es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. Para todo $v \in V : \|v\| \geq 0$,
2. $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = \mathbf{0}$,
3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V : \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,
4. Para todo $v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Desigualdad del triángulo.

Cuando un espacio vectorial tiene definida una norma se llama espacio **vectorial normado**.

Ejemplo 1.22. El conjunto \mathbb{R}^n es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Por lo tanto, \mathbb{R}^n es un espacio vectorial normado.

El espacio vectorial \mathbb{R}^n es un conjunto muy especial, dado que se puede calcular la distancia entre cualesquiera puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si denotamos por $d(x, y)$ a la distancia entre x y y , tenemos que:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Observación 1.23. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Definición 1.24. Sea U un subconjunto de \mathbb{R} , $U \neq \emptyset$. Decimos que U es un intervalo si para cualquier $x, y \in U$ con $x \leq y$, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq t \leq y$, se tiene que $t \in U$.

1.4. Conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n

Como ahora tenemos una forma de calcular la distancia entre elementos de \mathbb{R}^n podemos definir un objeto similar a un intervalo abierto en \mathbb{R} ; la bola abierta en \mathbb{R}^n .

Definición 1.25. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, con $r \geq 0$. La **bola abierta** con centro en a y radio r es el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Definición 1.26. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un **conjunto abierto** de \mathbb{R}^n si para cada $a \in A$, existe un $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Observación 1.27. En el espacio vectorial \mathbb{R}^n se cumple lo siguiente.

- (a) Si $r = 0$, entonces $B(a, r) = \emptyset$.
- (c) \emptyset y \mathbb{R}^n son abiertos de \mathbb{R}^n .

Al conjunto $B(x, r) \setminus \{x\}$ le llamaremos **bola abierta agujerada**.

Teorema 1.28. Para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r \geq 0$, se cumple que $B(a, r)$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

Demostración. Si $r = 0$, entonces $B(a, r) = \emptyset$ y tenemos lo que se quiere por el inciso (c) de la observación 1.35. Supongamos que $r > 0$ y sea $p \in B(a, r)$. Tenemos que $s = r - \|p - a\| > 0$. Veamos que $B(p, s) \subset B(a, r)$. Sea $q \in B(p, s)$, entonces

$$\|q - a\| \leq \|q - p\| + \|p - a\| < s + \|p - a\| = r - \|p - a\| + \|p - a\| = r.$$

Así, $q \in B(a, r)$, concluyéndose que $B(p, s) \subset B(a, r)$. Por lo tanto, $B(a, r)$ es un abierto de \mathbb{R}^n . \square

Los siguientes son ejemplos de conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n :

Ejemplo 1.29. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $r > 0$, el intervalo $(x - r, x + r) = B(x, r)$ es abierto de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.30. En \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana, si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, el conjunto $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ es abierto de \mathbb{R}^n , conocido como **rectángulo abierto** en \mathbb{R}^n .

Ahora, un teorema con dos propiedades básicas de los conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.31. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Entonces

(a) El conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n .

(b) Si \mathcal{U} es finito, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n .

Demostración. (a) Sea $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Existe $U_{\lambda_p} \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U_{\lambda_p}$. Como U_{λ_p} es abierto de \mathbb{R}^n , existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset U_{\lambda_p}$. Como $U_{\lambda_p} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, tenemos que $B(p, r) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

(b) Sea $q \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $q \in U_\lambda$. Como cada U_λ es un abierto de \mathbb{R}^n , existe $r_\lambda > 0$ tal que $B(q, r_\lambda) \subset U_\lambda$. Como \mathcal{U} es finito, existe $r = \min\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\} > 0$. Luego, $B(q, r) \subset B(q, r_\lambda) \subset U_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Así, $B(q, r) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

□

En general, la intersección arbitraria de abiertos no necesariamente es un conjunto abierto, tal como se ve en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.32. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que I_n es un abierto de \mathbb{R} . Sin embargo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ no es un abierto de \mathbb{R} . Para ver esto, sea $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $-\frac{1}{n} < p < \frac{1}{n}$, o bien, $|p| < \frac{1}{n}$. Dado $r > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$. De esto, para cada $r > 0$, se cumple que $|p| < r$. Además, como es claro que

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

concluimos que $p = 0$. Por lo tanto,

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Además, para cada $r > 0$, $(-r, r) \not\subset \{0\}$. Por lo tanto, $\{0\}$ no es un conjunto abierto de \mathbb{R} y es intersección numerable de abiertos de \mathbb{R} .

1.5. Conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n

El objeto matemático similar a un intervalo cerrado en \mathbb{R} es la bola cerrada en \mathbb{R}^n .

Definición 1.33. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, con $r \geq 0$. La **bola cerrada** con centro en a y radio r es el conjunto

$$C(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}.$$

Definición 1.34. Un subconjunto F de \mathbb{R}^n es un cerrado de \mathbb{R}^n si su complemento, $\mathbb{R}^n \setminus F$, es un abierto de \mathbb{R}^n .

Observación 1.35. En el espacio vectorial \mathbb{R}^n se cumple que

- (a) Si $r = 0$, entonces $C(a, r) = \emptyset$.
- (b) $B(a, r) \subset C(a, r)$.
- (c) \emptyset y \mathbb{R}^n son cerrados de \mathbb{R}^n .

Al conjunto $C(x, r) \setminus \{x\}$ le llamaremos **bola cerrada agujerada**.

Ejemplo 1.36. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la bola cerrada $C(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^n .

A continuación un teorema con las propiedades básicas de conjuntos cerrados en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.37. Sea $\mathcal{F} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n . Entonces

- (a) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es un cerrado de \mathbb{R}^n ,
- (b) si \mathcal{F} es finito, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es un cerrado de \mathbb{R}^n .

Demostración. Veamos (a). Para esto sea $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n . Notemos que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{R}^n \setminus B_\lambda$. Como para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus B_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n , por el inciso (a) del teorema 1.31, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n . Luego, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es cerrado de \mathbb{R}^n .

Veamos (b). Sea $\mathcal{F} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia finita de conjuntos cerrados de \mathbb{R}^n . Notemos que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{R}^n \setminus B_\lambda$. Como para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus B_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n , por el inciso (b) del teorema 1.31, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es abierto de \mathbb{R}^n . Luego, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ es cerrado de \mathbb{R}^n . \square

1.6. Operadores: Cerradura, interior, frontera y derivado

Definición 1.38. Sean A y B subconjuntos de \mathbb{R}^n .

- (a) El **interior** de A en \mathbb{R}^n , denotado por $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$ (o por $\text{int}(A)$ o por A°), es el conjunto

$$\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subset A\},$$

- (b) La **cerradura** de A en \mathbb{R}^n , denotada por $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, es el conjunto

$$\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para cada } r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Propiedades importantes del interior y la cerradura se enlistan a continuación.

Teorema 1.39. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,

- (a) $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset A$,
- (b) $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es abierto de \mathbb{R}^n ,
- (c) A es abierto de \mathbb{R}^n si y sólo si $A = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$,
- (d) si $A \subset B$, entonces $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$,
- (e) si B es abierto de \mathbb{R}^n y $B \subset A$, entonces $B \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$,
- (f) $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es la unión de los subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n contenidos en A ,
- (g) $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A \cap B) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$,

$$(h) \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A \cup B).$$

Demostración. Por la definición de $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$, tenemos que (a) y (b) son obvios.

(c). Supongamos que A es abierto de \mathbb{R}^n . Por el inciso (a), bastara probar que $A \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Sea $a \in A$. Como A es abierto de \mathbb{R}^n , existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Entonces, $a \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Por lo tanto, $A = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. La suficiencia es inmediata del inciso (b).

(d). Sea $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A \subset B$. De esto, $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$. Por lo tanto, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$.

(e). Por el inciso (d), tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Como B es abierto de \mathbb{R}^n , por el inciso (b), sabemos que $B = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$. Por lo tanto $B \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$.

(f). Sea $\mathcal{U} = \{U \subset A : U \text{ es abierto de } \mathbb{R}^n\}$. Claramente $\bigcup \mathcal{U} \subset A$. Además, por el inciso (a) del teorema 1.31, sabemos que $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto de \mathbb{R}^n . Por el inciso (e), tenemos que $\bigcup \mathcal{U} \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$.

Por otro lado, dado $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Como $B(x, r)$ es abierto de \mathbb{R}^n , tenemos que $B(x, r) \in \mathcal{U}$. En consecuencia, $x \in B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \bigcup \mathcal{U}$.

(g). Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, por el inciso (d), se cumple que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A \cap B) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$. Por otro lado, por el inciso (a) sabemos que, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) \subset A \cap B$. Como $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B)$ es abierto de \mathbb{R}^n , por el inciso (e), tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A \cap B)$.

(h). Por el inciso (d) es claro este resultado. \square

Teorema 1.40. Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces

$$(a) \mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

$$(b) \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

Demostración. (a). Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Entonces $x \notin \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$, es decir, para cada $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \not\subset A$. Luego, para cada $r > 0$, $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. Así, $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Tomando los argumentos recíprocos llegamos a que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$.

(b). Sea $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Por el inciso (a), sabemos que

$$\mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Tomando complemento de ambos lados, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) = \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Como $B = \mathbb{R}^n \setminus A$, concluimos que $\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. \square

Teorema 1.41. *Si F, G son subconjuntos de \mathbb{R}^n , entonces*

- (a) $F \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$,
- (b) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$ es cerrado de \mathbb{R}^n ,
- (c) F es cerrado de \mathbb{R}^n si y sólo si $F = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$,
- (d) $F \subset G$ implica que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(G)$,
- (e) si G es cerrado de \mathbb{R}^n y $F \subset G$, entonces $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F) \subset G$,
- (f) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a F ,
- (g) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F \cup G) = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F) \cup \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(G)$,
- (h) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F \cap G) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(G)$.

Demostración. (a) Claramente se cumple.

- (b) Por el teorema 1.39 (b), sabemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus F)$ es abierto de \mathbb{R}^n . Luego, por el teorema 1.40 (b), tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$ es abierto de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$ es cerrado de \mathbb{R}^n .
- (c) Supongamos que F es cerrado de \mathbb{R}^n . Entonces $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto de \mathbb{R}^n . Luego, por el teorema 1.39 (c), sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus F = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus F)$. Usando el teorema 1.40 (b), concluimos que $\mathbb{R}^n \setminus F = \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$. Por lo tanto, $F = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(F)$. La suficiencia es inmediata del inciso (b). □

Otro concepto topológico importante es el de derivado de un conjunto.

Definición 1.42. *Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . El **derivado** de A , denotado por A' , es el conjunto*

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para cada } r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A los elementos del derivado de A les llamamos **puntos límite** de A , o **puntos de acumulación** de A .

El punto x es un **punto aislado** de A si $x \in A \setminus A'$.

Teorema 1.43. *Sea A, B son subconjuntos de \mathbb{R}^n . Entonces*

- (a) $A' \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$,
- (b) A' es cerrado de \mathbb{R}^n ,
- (c) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = A' \cup A$,
- (d) A es cerrado de \mathbb{R}^n si y sólo si $A' \subset A$,
- (e) si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$.
- (f) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)' = A'$.

Demostración. (a) Por la definición de A' y $\text{cl}_X(A)$ es claro que se cumple.

- (b) Por el teorema 1.41 (a), sabemos que $A' \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A')$. Sea $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A')$. Veamos que $x \in A'$. Para esto sea $r > 0$. Sabemos que $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap A' \neq \emptyset$. Así, existe $y \in A'$ tal que $\|y - x\| < \frac{r}{2}$. Si $x = y$, entonces $x \in A'$, obteniendo lo que deseamos. Supongamos que $x \neq y$. Entonces $\delta = \|y - x\| > 0$. Como $y \in A'$, existe $z \in (B(y, \delta) \setminus \{y\}) \cap A$. Notemos que $z \neq x$. Más aún,

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \delta + \|y - x\| = 2\|y - x\| < r.$$

De esto, $z \in (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A$. Así, $x \in A'$. Por lo tanto, $A' = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A')$. Por el teorema 1.41 (c), concluimos que A' es cerrado de \mathbb{R}^n .

- (c) Por el inciso (a) y el teorema 1.41 (a), tenemos que $A' \cup A \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Sea $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Supongamos que $x \notin A \cup A'$. Entonces $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ y existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \setminus \{x\} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Luego, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, o bien, $B(x, r) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice que $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$. De esto, $x \in A \cup A'$. Por lo tanto, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = A' \cup A$.
- (d) Usando el inciso (c) del teorema 1.41 y el inciso (c), obtenemos inmediatamente el resultado.
- (e) Por la definición de conjunto derivado es claro que ocurre la afirmación del inciso (e).

- (f) Por el teorema 1.41 (a) y el inciso (e), tenemos que $A' \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)'$. Sea $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)'$. Veamos que $x \in A'$. Para esto sea $r > 0$. Sabemos que $(B(x, \frac{r}{2}) \setminus \{x\}) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \neq \emptyset$. Así, existe $y \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ tal que $0 < d(y, x) < \frac{r}{2}$. Sea $\delta = \|y - x\| > 0$. Como $y \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, existe $z \in B(y, \delta) \cap A$. Notemos que $z \neq x$. Más aún,

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \delta + \|y - x\| = 2\|y - x\| < r.$$

De esto, $z \in (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A$. Así, $x \in A'$. Por lo tanto, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)' \subset A'$. \square

Definición 1.44. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . La **frontera** de A en \mathbb{R}^n , denotada por $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A)$, es el conjunto

$$\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

es decir,

$$\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para cada } r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

Teorema 1.45. Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces

- (a) $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es cerrado de \mathbb{R}^n ,
- (b) $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$,
- (c) $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) = \emptyset$,
- (d) $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A)$,
- (e) $\mathbb{R}^n = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$,
- (f) A es cerrado de \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset A$.

Demostración. (a). Como $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es la intersección de cerrados, por el teorema 1.37, tenemos que $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^n .

Por la definición de frontera es obvio (b).

(c). Notemos que $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(X \setminus A)$. Luego, por el teorema 1.40 (a), tenemos que $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset X \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Por lo tanto, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) = \emptyset$.

(d) Usando que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ y el teorema 1.40 (a), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{fr}_{\mathbb{R}^n}(A) &= \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup [\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)] \\ &= (\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) \cap (\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)) \\ &= \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap (\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A))) \\ &= \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap \mathbb{R}^n \\ &= \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A). \end{aligned}$$

(e) Usando el inciso (d) y el teorema 1.40 (b), el resultado es inmediato.

(f) Por el teorema 1.41 (c) y el inciso (d) se tiene esta equivalencia. \square

Ahora, algunos ejemplos del interior, la cerradura, el derivado y la frontera de algunos conjuntos.

Ejemplo 1.46. En \mathbb{R} , se tiene que $\text{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, porque si $x \in \mathbb{Q}$, para toda $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$, ya que existen números irracionales en el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Además, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Es claro que $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$. Ahora, para verificar la otra contención, obsérvese que si $x \in \mathbb{R}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\dot{B}(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, es decir, $x \in \mathbb{Q}'$.

También tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, ya que $\text{fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) \cap \text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Obsérvese que \mathbb{Q} no es abierto ni cerrado de \mathbb{R} .

1.7. Conjuntos perfectos

Definición 1.47. Sea A subconjunto de \mathbb{R}^n .

1. A es **denso** en \mathbb{R}^n si $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \mathbb{R}^n$,
2. A es **fronterizo** en \mathbb{R}^n si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es denso en \mathbb{R}^n ,
3. A es **denso en ninguna parte** en \mathbb{R}^n si $\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es denso en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.48. Como $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, tenemos que el conjunto \mathbb{Q} es denso y fronterizo en \mathbb{R} .

Teorema 1.49. Sean A, B y C subconjuntos de \mathbb{R}^n . Entonces

1. \mathbb{R}^n no es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n ni fronterizo en \mathbb{R}^n . El conjunto \emptyset es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n y fronterizo en \mathbb{R}^n .
2. A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es fronterizo en \mathbb{R}^n .
3. Si A es cerrado de \mathbb{R}^n y fronterizo en \mathbb{R}^n , entonces A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n .
4. Si A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n , entonces A es fronterizo en \mathbb{R}^n .
5. A es fronterizo en \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) = \emptyset$.
6. Si A es abierto de \mathbb{R}^n y fronterizo en \mathbb{R}^n implica que $A = \emptyset$.
7. A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \emptyset$.
8. Si $A \subset B$ y B es fronterizo en \mathbb{R}^n o denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n , entonces A es fronterizo en \mathbb{R}^n o denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n .

Demostración.

1. \mathbb{R}^n no es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n porque $\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\emptyset) \neq \mathbb{R}^n$. De manera análoga se pueden ver las otras afirmaciones del inciso 1.
2. Tenemos que A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \mathbb{R}^n$, lo cual equivale a que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ sea fronterizo en \mathbb{R}^n .
3. Si A es fronterizo en \mathbb{R}^n , entonces $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n$. Como A es cerrado de \mathbb{R}^n , tenemos que $A = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, por lo que $\mathbb{R}^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A))$. Así, A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n .
4. Como $A \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Como A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n , tenemos que $\mathbb{R}^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$, implicándose que A es fronterizo en \mathbb{R}^n .
5. Tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) = \emptyset$ si y sólo si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(A)$, lo cual equivale a que $\mathbb{R}^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ (véase la parte (a) de 1.40). Luego, $\mathbb{R}^n \setminus A$ es denso en \mathbb{R}^n . Así, A es fronterizo en \mathbb{R}^n .

6. Supongamos que A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n . Luego, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es fronterizo en \mathbb{R}^n , lo que equivale a que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \emptyset$.
7. Como A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n , tenemos que $\mathbb{R}^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A))$ (véase la parte (a) de 1.40). Lo cual implica que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \emptyset$.
- Recíprocamente, supongamos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \emptyset$, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \mathbb{R}^n$, por el inciso (a) de 1.40, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \mathbb{R}^n$, de donde tenemos que A es denso en ninguna parte en \mathbb{R}^n .
8. Supongamos que $A \subset B$, con B fronterizo en \mathbb{R}^n . Como $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(B) = \emptyset$, tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(A) = \emptyset$. Así, A es fronterizo en \mathbb{R}^n .

□

Definición 1.50. Sea A subconjunto de \mathbb{R}^n . Decimos que A es un **conjunto perfecto** si $A = A'$.

Ejemplo 1.51.

1. \mathbb{R} y $[a, b]$, con $a \neq b$, son perfectos.
2. Toda bola cerrada en \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$, es perfecta.

Teorema 1.52. Si X es un espacio métrico perfecto y completo, entonces X no es infinito numerable.

Demostración. Supongamos que X es infinito numerable. Como X es perfecto, tenemos que $X = X'$, es decir, para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap X$ tiene un número infinito de elementos. Luego, para todo $x \in X$ tenemos que $\text{int}_X(\{x\}) = \emptyset$. Por 5 del teorema 1.49, para todo $x \in X$, tenemos que $\{x\}$ es fronterizo en X . Ahora, como para todo $x \in X$, tenemos que $\text{cl}_X(\{x\}) = \{x\}$, por 7 del teorema 1.49, para todo $x \in X$, tenemos que $\{x\}$ es denso en ninguna parte en X . Como $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, concluimos que X es de la primera categoría. Esto es una contradicción, porque X es completo. Así, X no es infinito numerable. □

Corolario 1.53. Sean X un espacio métrico completo y A un subconjunto de X . Si A es perfecto, entonces A no es infinito numerable.

Demostración. Si A es perfecto, $A = A'$. Por 1.43 (b), A es cerrado de X . Así, A es completo. Por el teorema 1.52, tenemos que X no es infinito numerable. □

Capítulo 2

Compacidad

Un concepto topológico importante es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956). Posteriormente, E. Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n . El concepto de compacidad es de suma importancia en el Análisis Matemático, Cálculo Diferencial, Ecuaciones Diferenciales, por citar algunas áreas de Matemáticas, de ahí viene su importancia en las Matemáticas en general.

2.1. Compacidad en \mathbb{R}^n

Comenzamos esta sección con la definición que engloba los conceptos necesarios para definir conjunto compacto.

Definición 2.1. Sean A un subconjunto de \mathbb{R}^n y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

- (a) Decimos que \mathcal{U} es una **cubierta** de A si $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Si además cada elemento de \mathcal{U} es abierto de \mathbb{R}^n , decimos que \mathcal{U} es una **cubierta abierta** de A .
- (b) Una **subcubierta** de \mathcal{U} es un subconjunto \mathcal{V} de \mathcal{U} que también es una cubierta de A . Si \mathcal{V} es un conjunto finito, decimos que \mathcal{V} es una **subcubierta finita**.
- (c) Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **compacto** si cada cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.

El teorema siguiente nos muestra varios ejemplos de conjuntos compactos.

Teorema 2.2.

1. *Todo subconjunto finito de \mathbb{R}^n es compacto.*
2. *El conjunto $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.*
3. *El conjunto $(0, 1)$ no es compacto pero $[0, 1]$ sí lo es.*

Demostración. Veamos que las afirmaciones anteriores son verdaderas.

1. Sean A un subconjunto finito de \mathbb{R}^n y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de A . Como A es finito, tenemos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dado que $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$; para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $a_i \in U_i$. Sea $\mathcal{V} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Notemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Así, \mathcal{V} es una subcubierta finita de \mathcal{U} . Por lo tanto, A es compacto.

2. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de A . Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in U_0$. Como U_0 es abierto de \mathbb{R} , existe $r > 0$ tal que $(-r, r) \cap A \subset U_0$. Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$. Así, para cada $n \geq N$, tenemos que $\frac{1}{n} \in (-r, r) \cap A$. Luego, $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq N\} \subset U_0$. Por otro lado, para cada $n \in \{1, \dots, N-1\}$, existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_n$. Sea $\mathcal{V} = \{U_0, U_1, \dots, U_{N-1}\}$. Notemos que $A \subset \bigcup_{i=0}^{N-1} U_i$. Así, \mathcal{V} es una subcubierta finita de \mathcal{U} . Por lo tanto, A es compacto.

3. Mostraremos primero que $(0, 1)$ no es compacto. Para esto, sea

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}.$$

Veamos que \mathcal{U} es una cubierta abierta de $(0, 1)$. Sea $x \in (0, 1)$. Como $x > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $\frac{1}{N} < x$. Luego, $\frac{1}{N} < x < 1$, es decir, $x \in \left(\frac{1}{N}, 1 \right)$. Por lo tanto, $(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \left(\frac{1}{n}, 1 \right)$.

Así, \mathcal{U} es una cubierta abierta de $(0, 1)$.

Ahora, sea $\mathcal{V} = \left\{ \left(\frac{1}{n_1}, 1 \right), \dots, \left(\frac{1}{n_m}, 1 \right) \right\}$. Notemos que \mathcal{V} es una subcolección finita de \mathcal{U} . Tomando a $k = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, tenemos que para cada

$i \in \{1, \dots, m\}$, se cumple que $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{n_i}$. Así, tenemos que $\frac{1}{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^m (\frac{1}{n_i}, 1)$ y $\frac{1}{k+1} \in (0, 1)$. Luego, \mathcal{V} no es una cubierta de $(0, 1)$. Así, \mathcal{U} no admite una subcubierta finita. Por lo tanto, $(0, 1)$ no es compacto.

Ahora probaremos que $[0, 1]$ es compacto

Demostración. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $[0, 1]$ y $A = \{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ es un subconjunto de la unión de un número finito de elementos de } \mathcal{U}\}$. Notemos que existe $V_0 \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in V_0$, entonces $[0, 0] \subset V_0$, de ahí que $0 \in A$, por lo anterior $A \neq \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$ y $A \subset [0, 1]$ (ya que todo $x \in A$ cumple que $x \in [0, 1]$), A está acotado superiormente, donde 1 es una cota superior de A (dado que 1 es cota superior de $[0, 1]$). Además, existe $1 > \epsilon_1 > 0$ tal que $[0, \epsilon_1] \subset V_0$, entonces $(0, \epsilon_1) \subset A$. Por lo tanto si $p = \sup(A)$ cumple que $p > 0$, de ahí que $p \in (0, 1]$. Como $p \in (0, 1]$ entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $p \in V$, de ahí que existe $\epsilon_2 > 0$ donde $(p - \epsilon_2, p) \subset V$ y existe $x \in (p - \epsilon_2, p)$ tal que $x \in A$, es decir, existen $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ tales que $[0, x] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Como $x \in (p - \epsilon_2, p) \subset V$ entonces $x \in V$, de ahí que $[0, x] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup V$, pero $p \in V$, así, $[0, p] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup V$, que es la unión de un número finito de elementos de \mathcal{U} . De lo anterior podemos asegurar que $p \in A$. Notemos que $0 < p \leq 1$, entonces $p < 1$ o $p = 1$. Supongamos que $p < 1$. Si ocurre esto existe $\epsilon_3 > 0$ tal que $(p, p + \epsilon_3) \subset V$ y $p + \epsilon_3 < 1$, de ahí que $\frac{2p + \epsilon_3}{2} \in (p, p + \epsilon_3) \subset V$, donde $(p, \frac{2p + \epsilon_3}{2}) \subset V$. Entonces

$$\left[0, \frac{2p + \epsilon_3}{2}\right] = [0, p] \cup \left(p, \frac{2p + \epsilon_3}{2}\right) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup V$$

Es decir, $\frac{2p + \epsilon_3}{2} \in A$, pero $\frac{2p + \epsilon_3}{2} > p = \sup(A)$, entonces $\frac{2p + \epsilon_3}{2} \notin A$. Por lo tanto $p = 1$. Como $p = 1$ entonces $[0, 1] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup V$, donde $\{U_1, \dots, U_k, V\} \subset \mathcal{U}$ es un conjunto finito. De lo anterior, $\{U_1, \dots, U_k, V\}$ es una subcubierta finita de \mathcal{U} . Por lo tanto $[0, 1]$ es **compacto**. \square

Teorema 2.3. *Sea Y un subconjunto de \mathbb{R}^n y $K \subset Y$. Entonces K es compacto en Y si y sólo si K es compacto en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Supongamos que K es compacto en Y y veamos que K es compacto en \mathbb{R}^n . Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de K en \mathbb{R}^n . Para todo

$\lambda \in \Lambda$, tenemos que $V_\lambda \cap Y$ es un abierto de Y . Luego,

$$K \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \right) \cap Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap Y).$$

Así, $\{V_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de K en Y . Como K es compacto en Y , existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n (V_{\lambda_i} \cap Y) = \left(\bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i} \right) \cap Y$.

Por lo tanto, $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$, concluyéndose que K es compacto en \mathbb{R}^n .

Ahora supongamos que K es compacto en \mathbb{R}^n y veamos que K es compacto en Y . Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de K en Y . Para todo $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $V_\lambda \cap \mathbb{R}^n$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Luego,

$$K \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \right) \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap \mathbb{R}^n).$$

Así, $\{V_\lambda \cap \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de K en \mathbb{R}^n . Como K es compacto en \mathbb{R}^n , existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n (V_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n) = \left(\bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i} \right) \cap \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. Por lo tanto K es compacto en Y . \square

En Topología cuando sucede que 2 elementos de un espacio topológico se pueden aislar mediante 2 conjuntos abiertos disjuntos se dice que ese espacio topológico es Hausdorff. En nuestro caso, tenemos que \mathbb{R}^n cumple con tal propiedad y la enunciamos a continuación.

Lema 2.4. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos U y V de \mathbb{R}^n tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y$ y $\varepsilon = \|x - y\|$. Notemos que $\|x - y\| > 0$. Sean $U = B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ y $V = B(y, \frac{\varepsilon}{3})$. Notemos que $x \in B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ y $y \in B(y, \frac{\varepsilon}{3})$. Supongamos que existe $z \in U \cap V$. Luego, $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ y $z \in B(y, \frac{\varepsilon}{3})$. Así, $\|x - z\| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\|y - z\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Notemos que

$$\|x - y\| \leq \|(x - z) - (y - z)\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Luego, $\|x-y\| < \frac{2}{3}\|x-y\|$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $U \cap V = \emptyset$.
□

Teorema 2.5. *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ y K que es compacto, entonces K es cerrado de \mathbb{R}^n .*

Demostración. Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto de \mathbb{R}^n . Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Dado $y \in K$, por el Lema 2.4, existen U_y y V_y conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , ajenos, tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$. Como

$$K \subset \bigcup_{y \in K} V_y,$$

por la compacidad de K , existen $y_1, \dots, y_n \in K$ tales que $K \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Sea $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Como $V_{y_i} \cap W \subset V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$, tenemos que

$$K \cap W \subset (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \cap W = (V_{y_1} \cap W) \cup \dots \cup (V_{y_n} \cap W) = \emptyset.$$

Así, $W \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Como $x \in W$ y W es un abierto de \mathbb{R}^n , existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset W$. Luego, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto de \mathbb{R}^n . Así, K es cerrado de \mathbb{R}^n . □

Teorema 2.6. *Sean $F, K \subset \mathbb{R}^n$. Si $F \subset K$, con F cerrado (de \mathbb{R}^n o de K) y K es compacto, entonces F es compacto.*

Demostración. Sea F un conjunto cerrado en \mathbb{R}^n y K un conjunto compacto tal que $F \subset K \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta en \mathbb{R}^n de F . Como F es cerrado de \mathbb{R}^n , su complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto de \mathbb{R}^n . Luego, $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \cup (\mathbb{R}^n \setminus F)$. Como K es compacto, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i} \cup (\mathbb{R}^n \setminus F)$. Así, $F \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$, por lo tanto F es compacto. □

Corolario 2.7. *Sean F y K subconjuntos de \mathbb{R}^n . Si K es compacto y F es cerrado de \mathbb{R}^n , entonces $F \cap K$ es compacto.*

Demostración. Sean F y K subconjuntos de \mathbb{R}^n . Si K es compacto, por el teorema 2.5, tenemos que K es cerrado de \mathbb{R}^n . Luego, $F \cap K$ es cerrado de \mathbb{R}^n (véase el inciso (a) del teorema 1.37). Así, por el teorema 2.6, tenemos que $F \cap K$ es compacto. □

Teorema 2.8. Sea $\mathcal{F} = \{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia no vacía de conjuntos compactos en \mathbb{R}^n . Si \mathcal{F} tiene la propiedad de intersección finita (toda subfamilia finita de \mathcal{F} tiene intersección no vacía), entonces

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda = \emptyset$. Sea $K_1 \in \mathcal{F}$. Entonces $K_1 \cap$

$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}} K_\lambda\right) = \emptyset$. Sea $x \in K_1$. Tenemos que $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}} K_\lambda$, es decir, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}} (\mathbb{R}^n \setminus K_\lambda)$. Por lo tanto, $K_1 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}} (\mathbb{R}^n \setminus K_\lambda)$. Obsérvese que $\{\mathbb{R}^n \setminus K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}}$ es una cubierta abierta de K_1 . Como K_1 es compacto, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ tales que

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus K_{\lambda_i}) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^m K_{\lambda_i},$$

por lo que $K_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^m K_{\lambda_i}\right) = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tiene la propiedad de intersección finita. Así, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$. \square

Corolario 2.9. Si $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de intervalos cerrados contenidos en \mathbb{R} , con $I_n \supset I_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [a_n, b_n]$, con $I_n \supset I_{n+1}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$. Sean $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, luego existe $a = \sup A$. De manera análoga, como $B \neq \emptyset$ y B está acotado inferiormente, existe $b = \inf B$. Como $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $a \leq b$. Así, el intervalo $[a, b]$ es no vacío. Luego, existe x tal que $x \in [a, b] \subset [a_n, b_n] = I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Concluyendo que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. \square

Definición 2.10. Un subconjunto no vacío A de \mathbb{R}^n es **acotado** si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$, se tiene que $\|x - y\| \leq k$.

Teorema 2.11. *Toda bola abierta en \mathbb{R}^n es un conjunto acotado.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. El conjunto $B(x, r)$ es acotado porque para cualesquiera $p, q \in B(x, r)$, tenemos que

$$\|p - q\| \leq \|p - x\| + \|x - q\| < r + r.$$

□

Teorema 2.12. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Entonces se satisface lo siguiente:*

- (a) *Si B es acotado y $A \subset B$, entonces A es acotado.*
- (b) *A es acotado si y sólo si existe el supremo del conjunto*

$$\{\|x - y\| : x, y \in A\}.$$

- (c) *Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado.*
- (d) *La unión finita de conjuntos acotados en \mathbb{R}^n es un conjunto acotado.*

Demostración. Es claro que (a) y (b) son ciertos.

(c). Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como A y B son acotados, por el inciso (b), existen $k_1 = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}$ y $k_2 = \sup\{\|x - y\| : x, y \in B\}$. Definimos a $k = k_1 + d(a, b) + k_2$. Sean $x, y \in A \cup B$. Si $x, y \in A$ o $x, y \in B$ es claro que $\|x - y\| \leq k$. Supongamos que $x \in A$ y $y \in B$. Entonces

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - y\| \leq k_1 + \|a - b\| + k_2 = k.$$

Por lo tanto, $A \cup B$ es acotado.

Usando inducción matemática y el inciso (c) claramente obtenemos (d). □

Definición 2.13. *Sea A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n . El **diámetro** de A , denotado por $\text{diám}(A)$, es*

$$\text{diám}(A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}.$$

Teorema 2.14. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es acotado si y sólo si existen $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(p, r)$.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Supongamos que A es acotado. Sea $p \in A$ y $r = \text{diám}(A) + 1$. Dado $a \in A$, sabemos que $\|a - p\| \leq \text{diám}(A)$. Luego, $\|a - p\| < r$, es decir, $a \in B(p, r)$. Por lo tanto, $A \subset B(p, r)$.

Recíprocamente, supongamos que existen $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(p, r)$. Por el teorema 2.11, tenemos que $B(p, r)$ es un conjunto acotado. Luego, por el inciso (a) del teorema 2.12, tenemos que A es acotado. \square

Teorema 2.15. *Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Si A es acotado, entonces $\text{diám}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \text{diám}(A)$.*

Demostración. Sea $r > 0$. Dados $p, q \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, existen $a_p \in B(p, \frac{r}{2}) \cap A$ y $a_q \in B(q, \frac{r}{2}) \cap A$. Luego,

$$\|p - q\| \leq \|p - a_p\| + \|a_p - a_q\| + \|a_q - q\| < \frac{r}{2} + \text{diám}(A) + \frac{r}{2} = r + \text{diám}(A).$$

Así, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es un conjunto acotado, más aún, se tiene que $\text{diám}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) \leq r + \text{diám}(A)$. Ahora, por el inciso (a) del teorema 1.41, tenemos que $A \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Así, es claro que $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A))$. Luego, para cada $r > 0$, se tiene que

$$0 \leq \text{diám}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) - \text{diám}(A) \leq r.$$

Por lo tanto, $\text{diám}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)) = \text{diám}(A)$. \square

Definición 2.16. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **precompacto** o **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$, existen $a_1, \dots, a_k \in A$ tales que*

$$A \subset B(a_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(a_k, \varepsilon).$$

Teorema 2.17.

1. *Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , compacto y no vacío, entonces A es precompacto.*
2. *Todo subconjunto finito de \mathbb{R}^n es precompacto.*
3. *El hecho de que A sea precompacto no implica que A sea finito. Por ejemplo, $[0, 1]$ es precompacto pero no finito.*

Demostración. Veamos que las afirmaciones son verdaderas. 1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ y A es compacto, existen $a_1, \dots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \varepsilon)$. Así, A es precompacto.

2. Sea A un conjunto finito contenido en \mathbb{R}^n . Así, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tenemos que $a_i \in B(a_i, \varepsilon)$, claramente se cumple que $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset B(a_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(a_k, \varepsilon)$. Así, A es precompacto.

3. Es claro que $[0, 1]$ no es finito, Por teorema 2.2 inciso 3. Tenemos que $[0, 1]$ es compacto y por 2.17 inciso 1. tenemos que es precompacto. \square

Teorema 2.18. *Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Si A es precompacto, entonces A es acotado (en particular, los conjuntos compactos son acotados).*

Demostración. Como A es precompacto, para $\varepsilon = 1$, existen $a_1, \dots, a_k \in A$ tales que $A \subset B(a_1, 1) \cup \dots \cup B(a_k, 1)$. Sabemos que cada $B(a_i, 1)$ es un conjunto acotado y la unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado. Así, A es subconjunto de un conjunto acotado. Por el teorema 2.12, inciso (a), concluimos que A es acotado. \square

La precompactidad es una propiedad hereditaria.

Teorema 2.19. *Sea A un subconjunto precompacto de \mathbb{R}^n . Si B es un subconjunto no vacío de A , entonces B es precompacto.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es precompacto, existen $a_1, \dots, a_k \in A$ tales que $A \subset B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(a_k, \frac{\varepsilon}{2})$. Salvo reordenamiento, podemos suponer que $B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, B(a_m, \frac{\varepsilon}{2})$ son las únicas bolas que intersecan a B , para algún $m \leq k$. Notemos que $B \subset B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(a_m, \frac{\varepsilon}{2})$. Sea $b_i \in B \cap B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $i \leq m$. Veamos que

$$B \subset B(b_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(b_m, \varepsilon).$$

Sea $b \in B$. Entonces existe $i \leq m$ tal que $b \in B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Así,

$$\|b - b_i\| \leq \|b - a_i\| + \|a_i - b_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $b \in B(b_i, \varepsilon)$. Concluimos que $B \subset B(b_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(b_m, \varepsilon)$. Por lo tanto, B es precompacto. \square

Ahora hablemos de conjuntos densos y espacios métricos separables, para esto tenemos las siguientes definiciones y ejemplos.

Definición 2.20. Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **denso** en \mathbb{R}^n si $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) = \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.21. Los conjuntos \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en \mathbb{R} .

Definición 2.22. Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **separable** si contiene un conjunto denso y numerable.

Notemos que en realidad, el hecho de que un subconjunto A de \mathbb{R}^n sea separable significa que existe un conjunto $S \subset A$ tal que S es numerable y $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S) = A$.

Ejemplo 2.23. El conjunto \mathbb{R} es separable porque \mathbb{Q} es numerable y denso en \mathbb{R} .

Teorema 2.24. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Si A es separable, entonces toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta numerable.

Demostración. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de A . Como A es separable, existe un subconjunto numerable S de A tal que $A = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S)$. Supongamos que $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sea $H = \{B(x_n, \frac{1}{m}) : x_n \in S, m \in \mathbb{N}\}$. Notemos que H es un conjunto infinito numerable, por lo que podemos escribir $H = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como \mathcal{U} es una cubierta abierta de A , y cada B_n tiene radios suficientemente pequeños, el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_n \subset U\}$ es no vacío. Notemos que M es numerable. Para toda $n \in M$, sea $U_n \in \{U \in \mathcal{U} : B_n \subset U\}$. Demostraremos que $\{U_n\}_{n \in M}$ es una cubierta abierta de A .

Sea $x \in A$. Como \mathcal{U} es una cubierta abierta de A , existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como U es abierto de A , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Además, hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S)$, tenemos que $B(x, \frac{1}{m}) \cap S \neq \emptyset$. Así, sea $x_k \in B(x, \frac{1}{m}) \cap S$. Luego, $x \in B(x_k, \frac{1}{m})$, con $x_k \in S$. Denotaremos por B_k a $B(x_k, \frac{1}{m})$.

Se mostrará que $k \in M$. Sea $y \in B_k$. Luego,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|y - x_k\| + \|x_k - x\| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $y \in B(x, \varepsilon)$, por lo que $B_k \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. Luego, $k \in M$ y por lo tanto $\{U_n\}_{n \in M}$ es una cubierta abierta de A . De hecho, $\{U_n\}_{n \in M}$ es una subcubierta numerable de A . \square

Teorema 2.25. *Si A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n y toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta numerable, entonces A es separable.*

Demostración. Sea $C_k = \{B(x, \frac{1}{k}) : x \in A\}$ con $k \in \mathbb{N}$ alguna cubierta abierta de A , por hipótesis C_k tiene una subcubierta numerable: Sea $S_k = \{B(x_{k_i}, \frac{1}{k}) : i \in \mathbb{N}\}$ la cubierta numerable. Definimos $S = \{x_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$ por demostrar que S es denso en A : Sea $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos un k tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Entonces existe $B(x_{k_i}, \frac{1}{k})$ tal que $x \in B(x_{k_i}, \frac{1}{k})$, por lo que $x_{k_i} \in S \cap B(x, \varepsilon)$, luego $x \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S)$. por lo tanto S es separable. \square

Teorema 2.26. *Todo conjunto precompacto en \mathbb{R}^n es separable.*

Demostración. Sea A un subconjunto precompacto de \mathbb{R}^n . Para cada $m \in \mathbb{N}$, existen $a_1^m, \dots, a_{n_m}^m \in A$ tales que $A \subset B(a_1^m, \frac{1}{m}) \cup \dots \cup B(a_{n_m}^m, \frac{1}{m})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $S_m = \{a_1^m, \dots, a_{n_m}^m\}$. Consideremos

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m.$$

Notemos que S es numerable. Veamos que $A \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S)$. Sean $a \in A$ y $r > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{M} < r$. Como $A \subset B(a_1^M, \frac{1}{M}) \cup \dots \cup B(a_{n_M}^M, \frac{1}{M})$, tenemos que $a \in B(a_j^M, \frac{1}{M})$, para algún $j \in \{1, \dots, n_M\}$. Luego, $\|a - a_j^M\| < \frac{1}{M} < r$. Así, $a_j^M \in B(a, r) \cap S$. Luego, $a \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(S)$. Por lo tanto, A es separable. \square

El concepto de conjunto relativamente compacto es importante también, por lo que enunciamos a continuación su definición.

Definición 2.27. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **relativamente compacto** si $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto.*

El teorema siguiente nos muestra algunos ejemplos de conjuntos relativamente compactos.

Teorema 2.28.

1. *El intervalo $(0, 1)$ contenido en \mathbb{R} es relativamente compacto.*
2. *Todo conjunto compacto en \mathbb{R}^n es relativamente compacto.*
3. *Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Si B es relativamente compacto y $A \subset B$, entonces A es relativamente compacto.*

Demostración. Veamos la afirmación del inciso 1. Notemos que $(0, 1) \subset [0, 1]$ y que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}((0, 1)) = [0, 1]$. Por el inciso 3 del teorema 2.2, se sabe que $[0, 1]$ es compacto. Así, concluimos que $(0, 1)$ es relativamente compacto.

Verifiquemos ahora el inciso 2. Sea A un conjunto compacto en \mathbb{R}^n . Por el teorema 2.5, tenemos que A es cerrado de \mathbb{R}^n . Luego, por el inciso (c) del teorema 1.41, tenemos que $A = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$. Así, el conjunto $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto. Por lo tanto, A es relativamente compacto.

Finalmente, verifiquemos la afirmación 3. Si $A \subset B$, entonces por el inciso (d) del teorema 1.41, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(B)$. Ahora, como B es relativamente compacto, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(B)$ es compacto. Además, por el inciso (b) del teorema 1.41, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es cerrado en \mathbb{R}^n . Luego, por el teorema 2.6, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto. Así, A es relativamente compacto. \square

Teorema 2.29. *Todo conjunto relativamente compacto es precompacto.*

Demostración. Sea A un subconjunto relativamente compacto de X . Luego, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto. Por el inciso 1 del teorema 2.17, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es precompacto. Como $A \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, por el teorema 2.19, tenemos que A es precompacto. \square

Teorema 2.30. *Si A es cerrado de \mathbb{R}^n y relativamente compacto, entonces A es compacto.*

Demostración. Tenemos que A es cerrado es decir $A = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$, por otro lado A es relativamente compacto, es decir, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto. Así, por transitividad, A es compacto. \square

Definición 2.31. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n satisface la **propiedad de Bolzano-Weierstrass** (lo denotaremos por $B-W$), si todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A (es decir, para cualquier $T \subset A$, siendo T un conjunto infinito, se tiene que $T' \cap A \neq \emptyset$).*

Teorema 2.32. *Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n con la propiedad Bolzano-Weierstrass, entonces A es precompacto.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que A tiene la propiedad $B-W$ y que A no es precompacto. Luego, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, se tiene que $A \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_1)$.

Como $A \not\subset B(x_1, \varepsilon_1)$, existe $x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon_1)$. Pero $A \not\subset \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, \varepsilon_1)$, por lo que existe $x_3 \in A \setminus \left[\bigcup_{i=1}^2 B(x_i, \varepsilon_1) \right]$. Continuamos el proceso hasta tomar $x_n \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_1)$. Obsérvese que $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon_1$.

Sea $L = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Tenemos que $L \subset A$ y L es infinito. Como A tiene la propiedad B-W, tenemos que $L' \cap A \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in L' \cap A$. En el conjunto $B\left(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ existe un número infinito de puntos de L . Sean $x_i, x_j \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \cap L$ tales que $\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - x_0\| + \|x_j - x_0\| < \varepsilon_1$. Pero $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A es precompacto. \square

Teorema 2.33. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es compacto si y sólo si A tiene la propiedad Bolzano-Weierstrass.*

Demostración. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Supongamos que A es compacto y que no tiene la propiedad B-W. Entonces existe un subconjunto infinito T de A tal que $T' \cap A = \emptyset$. Luego, para toda $x \in A$, se tiene que $x \notin T'$. Así, existe ε_x para el cual $[B(x, \varepsilon_x) \setminus \{x\}] \cap T = \emptyset$. Por lo tanto, $|B(x, \varepsilon_x) \cap T| \leq 1$.

Notemos que $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$. Como A es compacto, existen $x_1, \dots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon_{x_i})$, así $T \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon_{x_i})$. Luego,

$$T = \left(\bigcup_{n=1}^m B(x, \varepsilon_x) \right) \cap T = \bigcup_{n=1}^m (B(x, \varepsilon_x) \cap T).$$

Como $T = \bigcup_{i=1}^m (B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \cap T)$, tenemos que T es la unión finita de conjuntos que tienen a lo más un punto. Entonces T tiene a lo más m elementos, lo cual contradice el hecho de que T sea infinito.

Supongamos ahora que A tiene la propiedad B-W. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de A en \mathbb{R}^n . Por el teorema 2.32, tenemos que A es precompacto. Por el teorema 2.26, tenemos que A es separable. Luego, por el teorema 2.24, tenemos que A tiene una subcubierta $\{B_1, B_2, \dots, B_k, \dots\}$ numerable de \mathcal{U} .

Mostraremos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $A \not\subset \bigcup_{i=1}^k B_i$. Sea $y_1 \in A$. Como $A \not\subset B_1$, tomamos $y_1 \in B_1$. Existe $y_2 \in A \setminus B_1$ y $A \not\subset B_1 \cup B_2$. Continuamos el proceso, tomando $y_n \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$, y construimos el conjunto infinito $T = \{y_1, \dots, y_n, \dots\} \subset A$. Entonces, existe $y_0 \in T' \cap A$. Sea $y_0 \in B_m$. Entonces, B_m tiene una infinidad de elementos de T , porque $y_0 \in T'$. Existe $l > m$ tal que $y_l \in B_m$, pero $y_l \in A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_m \cup B_{m+1} \cup \dots \cup B_{l-1})$. Por lo tanto, $y_l \notin B_m$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$, es decir, $\{B_1, \dots, B_k\}$ es una subcubierta finita de \mathcal{U} , concluyéndose que A es compacto. \square

Definición 2.34. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una n -celda es el producto cartesiano de n intervalos cerrados contenidos en \mathbb{R} .

Observación 2.35. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una n -celda se denota usualmente por I_n . Además, es claro que I_n es un subconjunto de \mathbb{R}^n .

Lema 2.36. Sea $\{I_m : m \in \mathbb{N}\}$ una colección de n -celdas. Si para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $I_{m+1} \subset I_m$, entonces $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset$.

Demostración. Como cada I_m es una n -celda, sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$I_m = [a_1^m, b_1^m] \times \dots \times [a_n^m, b_n^m].$$

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $A_i = \{a_i^m : m \in \mathbb{N}\}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, sabemos que $I_{m+1} \subset I_m$. Así,

$$a_i^m \leq a_i^{m+1} < b_i^{m+1} \leq b_i^m.$$

De esto, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que b_i^m es cota superior de A_i . Sea $x_i = \sup A_i$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $a_i^m \leq x_i \leq b_i^m$, es decir, $x_i \in [a_i^m, b_i^m]$. Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbf{x} \in [a_1^m, b_1^m] \times \dots \times [a_n^m, b_n^m]$. Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathbf{x} \in I_m$, es decir, $\mathbf{x} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$, por lo que $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset$. \square

Teorema 2.37. Sea $n \in \mathbb{N}$. Toda n -celda es un conjunto compacto en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sean $I_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $2\delta = \text{diám}(I_1)$. Para probar que I_1 es compacto procedamos por contradicción. Para esto, sea \mathcal{U} una cubierta abierta de I_1 que no admite subcubiertas finitas. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. Notemos que los intervalos $[a_i, c_i]$ y $[c_i, b_i]$ determinan 2^n n -celdas cuya unión es I_1 . De esto, al menos una de estas n -celdas, a la cual denotaremos por I_2 , no puede ser cubierto por una subcolección finita de \mathcal{U} , ya que en caso contrario \mathcal{U} tendría una subcubierta finita para I_1 . Además, $\text{diám}(I_2) = \frac{\delta}{4}$. Realizando este proceso de manera recursiva obtenemos una colección $\{I_m : m \in \mathbb{N}\}$ de n -celdas que satisface:

- (1) para cada $m \in \mathbb{N}$, $I_{m+1} \subset I_m$,
- (2) I_m no puede ser cubierto por una subcolección finita de \mathcal{U} y
- (3) $\text{diám}(I_m) = \frac{\delta}{2^m}$.

Por el Lema 2.36, existe $\mathbf{x} \in I_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathbf{x} \in I_1$, y por tanto, existe $U_{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}}$. Luego, $B(\mathbf{x}, r) \subset U_{\mathbf{x}}$, para algún $r > 0$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^m}\}_{m=1}^{\infty}$ converge a cero, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^M} < \frac{r}{\delta}$. Como $\mathbf{x} \in I_M$ y $\text{diám}(I_M) = \frac{\delta}{2^M}$, tenemos que $I_M \subset B(\mathbf{x}, r) \subset U_{\mathbf{x}}$, contradiciendo a (2). Por lo tanto, I_1 es compacto. \square

Teorema 2.38. (Heine-Borel) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si y sólo si K es acotado y cerrado de \mathbb{R}^n .

Demostración. La necesidad es obvia por el teorema 2.5 y el teorema 2.18. Supongamos que K es acotado y cerrado de \mathbb{R}^n . Por el teorema 2.14, existen $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $K \subset B(p, r)$. Sea

$$I = [p_1 - r, p_1 + r] \times \cdots \times [p_n - r, p_n + r].$$

Notemos que I es una n -celda que contiene a K , porque $B(p, r) \subset I$. Por el teorema 2.37, tenemos que K es un subconjunto cerrado del conjunto compacto I . Del Teorema 2.6, concluimos que K es compacto. \square

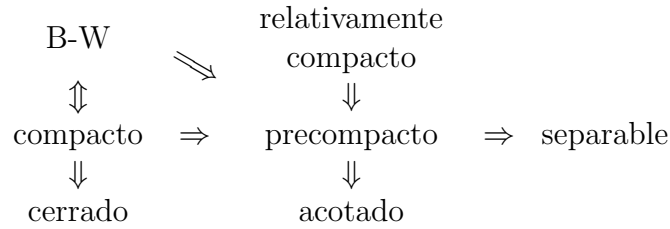
Teorema 2.39. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El intervalo (a, b) es precompacto.

Demostración. Por teorema 2.38, tenemos que $[a, b]$ es compacto. Luego, por la definición 2.27, tenemos que el intervalo (a, b) es relativamente compacto. Así, por teorema 2.29, tenemos que (a, b) es precompacto. \square

Teorema 2.40. *Si A es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , con $A \neq \emptyset$, entonces A es relativamente compacto.*

Demostración. Como A es acotado, existen $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = B$. Notemos que B es cerrado de \mathbb{R}^n . Luego, por los incisos (c) y (d) del teorema 1.41, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(B) = B$. Por el teorema 2.38, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(A)$ es compacto. Así, A es relativamente compacto. \square

Podemos resumir los conceptos que revisamos con el siguiente diagrama:



2.2. Compacidad local

Esta sección está dedicada a revisar la compacidad local, es decir, conjuntos que aunque no son compactos, tienen la propiedad de la compacidad en alguna vecindad.

Definición 2.41. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es **localmente compacto** si para cada $x \in A$, existe una vecindad V de x tal que V es compacto.*

Teorema 2.42. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in A$ existe una vecindad U de x tal que U es abierto de \mathbb{R}^n y $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(U)$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto de \mathbb{R}^n localmente compacto y sea $x \in A$. Por definición, existe una vecindad V de x tal que V es compacto. Luego, existe un conjunto U abierto de \mathbb{R}^n tal que $x \in U \subset V$. Como V es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , por el teorema 2.5, tenemos que V es cerrado de \mathbb{R}^n . Luego, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(U) \subset \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) = V$. Así, por el teorema 2.6, tenemos que $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(U)$ es compacto.

La proposición recíproca es obviamente verdadera. \square

Teorema 2.43. *Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in A$ existe un sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de x tal que para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ tenemos que V es compacto.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto de \mathbb{R}^n localmente compacto y sea $x \in A$. Sea U un conjunto abierto de \mathbb{R}^n con $x \in U$. Por definición, existe una vecindad V de x tal que V es compacto. Notemos que $U \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(V)$ es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n contenido en el conjunto compacto V . Existe un abierto W de V tal que $x \in W \subset \text{cl}_V(W) \subset U \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(V)$. Así, existe un abierto A de \mathbb{R}^n tal que $V \cap A = W$. Como V es una vecindad de x , tenemos que $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(V) \cap A \subset W \subset \text{cl}_V(W)$. Notemos que $\text{int}_X(V) \cap A$ es un abierto de X y $\text{cl}_V(W)$ es compacto. Luego, $\text{cl}_V(W)$ es una vecindad compacta de x contenida en U .

La proposición recíproca es obviamente verdadera. \square

Teorema 2.44. *Sean A un subconjunto de \mathbb{R}^n localmente compacto y Y un subconjunto de A .*

1. *Si Y es un abierto de A , entonces Y es localmente compacto.*
2. *Si Y es localmente compacto y $\text{cl}_A(Y) = A$, entonces Y es abierto de A .*

Demostración. 1. Sea $y \in Y$. Como A es localmente compacto, existe una vecindad V de y tal que V es compacto. Como Y es abierto de A , tenemos que $Y \cap V$ es una vecindad de y en A . Existe una vecindad compacta W de y en A tal que $W \subset Y \cap V$ (véase el teorema 2.43). Así, W es una vecindad compacta de y en Y . Por lo tanto Y es localmente compacto.

2. Sea $y \in Y$. Como Y es localmente compacto, existe una vecindad V de y en Y tal que V es compacto. Como V es vecindad de y en Y , existe un abierto U de Y tal que $y \in U \subset V \subset Y$. Como U es abierto de Y , existe un abierto W de A tal que $U = W \cap Y$. Veremos que $y \in W \subset Y$. Obviamente $y \in W$. Notemos que $\text{cl}_A(W \cap Y) \cap Y = \text{cl}_A(U) \cap Y = \text{cl}_Y(U)$. Como $\text{cl}_Y(U)$ es compacto, el conjunto $\text{cl}_A(W \cap Y) \cap Y$ también es compacto. Por el teorema 2.5, tenemos que $\text{cl}_A(W \cap Y) \cap Y$ es cerrado de A . Además, $W \cap Y \subset \text{cl}_A(W \cap Y) \cap Y$. Por lo tanto, $\text{cl}_A(W \cap Y) \subset \text{cl}_A(W \cap Y) \cap Y$. Así, $\text{cl}_A(W \cap Y) \subset Y$. Como $W \cap \text{cl}_A(Y) \subset \text{cl}_A(W \cap Y)$

y como $\text{cl}_A(Y) = A$, tenemos que $W \subset \text{cl}_A(W \cap Y) \subset Y$. Así, Y es abierto en A .

□

2.3. Conjunto de Cantor

Esta sección está dedicada a conocer un poco del conjunto de Cantor, revisamos como se define este famoso e importante conjunto así como algunas propiedades básicas.

Sea $C_1 = [0, 1]$.

Ahora, dividimos al intervalo $[0, 1]$ en tres subintervalos:

$$I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad J_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad J_{12} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$

Notemos que $[0, 1] = J_{11} \cup I_{11} \cup J_{12}$.

Sea $C_2 = [0, 1] \setminus I_{11} = J_{11} \cup J_{12}$.

Ahora, sean

$$I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$J_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad J_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \quad J_{23} = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \quad J_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Sea $C_3 = \bigcup_{k=1}^{2^2} J_{2k}$.

Podemos continuar el proceso hasta construir 2^n intervalos cerrados ajenos J_{n1}, \dots, J_{n2^n} . Notemos que cada uno de estos intervalos tienen longitud $\frac{1}{3^n}$. Así, $I_{(n+1)k}$ es el intervalo abierto con el mismo centro que J_{nk} y de longitud $\frac{1}{3^{n+1}}$. Luego, $J_{nk} \setminus I_{(n+1)k}$ es la unión de intervalos cerrados y ajenos $J_{(n+1)(2k-1)}$ y $J_{(n+1)2k}$ de longitud $\frac{1}{3^{n+1}}$. Obtenemos entonces

$$C_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} J_{nk} \subset C_n.$$

Definición 2.45. Al conjunto $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ le llamamos el **Conjunto de Cantor**.

Definición 2.46. Un espacio métrico X le llamamos **dendrita** si es: compacto, conexo, localmente conexo y sin ciclos.

Ahora veremos paso a paso cómo se contruye la dendrita de Gehman.

Paso 1: Sea E_1 la unión de los segmentos de recta que unen el punto $(1/2, 1)$ con los puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ del conjunto de Cantor.



Paso 1.

Paso 2: Ahora, sean x y y los puntos medios de los dos segmentos de E_1 y trazemos los segmentos $(1/3, 0)$ a x y $(2/3, 0)$ a y .



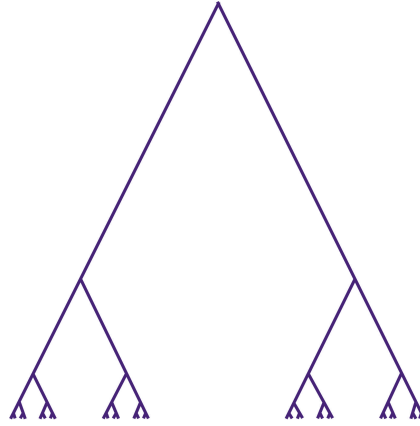
Paso 2.

Paso 3: Para construir E_3 nos fijamos en los puntos medios x_1 y y_1 de los segmentos formados en el paso anterior y también los puntos medios x_2 y y_2 de los segmentos $(0, 0)$ y $(1/3, 0)$, respectivamente. Unimos E_2 con los segmentos rectilíneos que van de x_1 a $(1/9, 0)$, de y_1 a $(2/9, 0)$, de x_2 a $(7/9, 0)$ y de y_2 a $(8/9, 0)$ para obtener D_3 .



Paso 3.

En el paso n , E_n se construye a partir de E_{n-1} de forma similar, tomando siempre como puntos extremos los elementos del conjunto de Cantor. Definamos $G_3 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$ como la dendrita de Gemahn.



Dendrita de Gehman

El conjunto de puntos extremos de la dendrita de Gehman coincide con el conjunto de Cantor.

Observación 2.47. Para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que $J_{nk} \not\subset C$. Además, los extremos de J_{nk} pertenecen a C .

Teorema 2.48. Sea C el conjunto de Cantor. Entonces C es compacto, perfecto y denso en ninguna parte en \mathbb{R} .

Demostración. Como para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que J_{nk} es cerrado de \mathbb{R} y C_n es la unión de ellos, entonces C_n es cerrado de \mathbb{R} . Luego, C es cerrado de \mathbb{R} , pues es la intersección de cerrados de \mathbb{R} .

Ahora, como $C \subset [0, 1]$ y $[0, 1]$ es compacto, entonces C es compacto.

Sea $x \in C$. Mostraremos que $x \in C'$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Notemos que existe $k_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $x \in J_{nk_n}$. Como los extremos de J_{nk_n} pertenecen a C y la longitud de J_{nk_n} es $\frac{1}{3^n}$, tenemos que $J_{nk_n} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Por lo tanto, los extremos de J_{nk_n} pertenecen a $C \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Luego, $x \in C'$. Como C es cerrado de \mathbb{R} , tenemos que $C' \subset C$. Así, $C = C'$ y por lo tanto C es perfecto.

Como C es cerrado de \mathbb{R} , basta mostrar que C es fronterizo para mostrar que es denso en ninguna parte en \mathbb{R} , es decir, $\text{int}_X(C) = \text{int}_X(\text{cl}_X(C)) = \emptyset$.

Supongamos que $\text{int}_X(C) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}_X(C)$. Existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset C$. Además, existe un natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$. Así, $(x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}) \subset (x - \delta, x + \delta) \subset C$. Ahora, como $x \in C_n$, existe un $k_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $x \in J_{nk_n}$. Como la longitud de J_{nk_n} es $\frac{1}{3^n}$, tenemos que $J_{nk} \subset (x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}) \subset C$, lo cual es una contradicción. Luego, $\text{int}_X(C) = \emptyset$, y así C es denso en ninguna parte en \mathbb{R} . \square

Teorema 2.49. *El conjunto de Cantor C es no numerable.*

Demostración. Para demostrarlo empleamos la representación de los reales en base 3, es decir, la notación ternaria en vez de la decimal. En base ternaria solo utilizamos los dígitos 0, 1 y 2. Así, el número $\frac{1}{3}$ en base ternaria se escribe como 0.1 (o 0.02222...) y $\frac{2}{3}$ como 0.2. Cuando borramos el intervalo central estamos eliminando todos aquellos puntos que poseen el dígito 1 como primer decimal. De la misma manera, en la segunda iteración, eliminamos todos los puntos que poseen, en su representación ternaria, el dígito 1 en su segundo decimal y así sucesivamente en cada etapa. Después de iterar infinitamente solo habrán sobrevivido aquellos puntos que no poseen el dígito 1 en ninguna posición de su representación ternaria. Es decir, C estará formado por todos los posibles decimales ternarios constituidos por combinaciones de los dígitos 0 y/o 2. ¿Son más o menos que los "puntos extremos" de los que hablábamos antes? Los puntos extremos de los intervalos poseen infinitos dígitos 2 o 0 consecutivos a partir de una determinada posición. Pero existen otras posibilidades como por ejemplo: 0.02002200022200002222... Tomemos el número $\frac{1}{4}$ como ejemplo. Este valor no es un punto extremo de uno de los intervalos eliminados (4 no es una potencia de 3). Su expansión decimal ternaria consta exclusivamente de dígitos 0 y 2 como puede calcularse. Así que no será eliminado y no es el extremo de un intervalo borrado. Si el conjunto de Cantor C estuviera formado solo por los valores extremos de los que hablábamos, entonces podríamos enumerarlos, puesto que podemos enumerar las iteraciones y cada una salva un número finito. ¿Podemos enumerar entonces todos los puntos del conjunto? En definitiva, ¿cuántos puntos hay en C ? Responder a esta pregunta es responder a cuántos valores decimales ternarios pueden representarse sin utilizar el dígito 1. Recurramos a la base binaria. Supongamos que representamos todos los números del intervalo $[0, 1]$ como decimales en base binaria. Podemos construir una biyección entre este conjunto y el conjunto de todos los decimales ternarios sin el dígito 1. Basta con asignar a cada decimal binario un ternario por el método de sustituir cada dígito 1 por el dígito 2. ¡De modo que no solo quedan puntos, sino que su número es

infinito no numerable! La biyección que hemos establecido entre todos y cada uno de los puntos del segmento real $[0, 1]$ en notación binaria (el dominio) y los elementos de C en notación terciaria (el rango) tiene una característica particular: puntos los decimales ternarios sin el dígito 1. Basta con asignar a cada decimal binario un ternario por el método de sustituir cada dígito 1 por el dígito 2. ¡De modo que no solo quedan puntos, sino que su número es infinito no numerable! La biyección que hemos establecido entre todos y cada uno de los puntos del segmento real $[0, 1]$ en notación binaria (el dominio) y los elementos de C en notación terciaria (el rango) tiene una característica particular: puntos cercanos en el dominio están cercanos en el rango. Los topólogos llaman a esta correspondencia homeomorfismo. Podemos extender este homeomorfismo a una función con todas las de la ley: la función de Cantor del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo. Para ello simplemente rellenamos las imágenes correspondientes a los intervalos eliminados con un valor siempre constante: el valor de los extremos del intervalo eliminado que es idéntico en notación binaria. Por ejemplo, todos los puntos del intervalo central eliminado $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ se hacen corresponder con $\frac{1}{2}$. El número $\frac{1}{3}$ en ternario es 0.0222... que asociamos con el número binario 0.0111... y $\frac{2}{3}$ en ternario es 0.2 que asociamos con el número binario 0.1. Pero ambos números binarios son iguales a $\frac{1}{2}$ en notación decimal. Así todos los puntos del intervalo se hacen corresponder al valor $\frac{1}{2}$. En la imagen inferior puedes observar una representación gráfica de la función de Cantor. \square

Proposición 2.50. *El número racional $\frac{1}{4}$ es un elemento de C .*

Demostración. Procedemos como en la demostración del teorema 2.49 y calculamos que la expansión decimal ternaria de $\frac{1}{4}$ consta exclusivamente de dígitos 0 y 2, $\frac{1}{4} = 0.02020202\dots_3$. Como no aparece el dígito 1 en la expansión ternaria $\frac{1}{4}$ es un elemento de C . \square

Ahora hablemos un poco de teoría de la medida y el conjunto de Cantor.

Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X . Una función de medida, representada usualmente por μ , es una función

$$\mu : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

que asigna un número a ciertos subconjuntos de un conjunto, generalizando conceptos como longitud, área, volumen o integral. En matemáticas, es una

forma de calcular la magnitud de estos subconjuntos, y es fundamental en teoría de la medida y teoría de la probabilidad, por ejemplo.

Teorema 2.51. *Sea μ la función de medida (longitud) en \mathbb{R} . Para el conjunto de Cantor C se cumple que $\mu(C) = 0$.*

Demostración. Notemos que

$$\mu([0, 1] \setminus C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{3^i}.$$

Sea $A = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$. Así,

$$1 + A = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

Notemos que $A + 1$ es una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$. Luego, $A + 1$ converge. De hecho,

$$A + 1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Luego, $A = 2$, y así, $\mu([0, 1] \setminus C) = \frac{1}{2}A = 1$. Además, $\mu([0, 1]) = 1$. Por lo tanto,

$$\mu(C) = 1 - \mu([0, 1] \setminus C) = 1 - 1 = 0.$$

□

Referencias

- [1] Casarrubias Segura Fidel, Tamariz Mascarúa Ángel, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, 2019.
- [2] Hernández Hernández Fernando, *Curso de topología un enfoque conjuntista*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. 43, Sociedad Matemática Mexicana, 2021.
- [3] Herrera Carrasco David, Macías Romero Fernando, Guerrero Méndez Luis Alberto, *La magia de los espacios métricos*, Manuales y Textos Ciencias Exactas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2025.
- [4] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (Una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, segunda edición, 2019.
- [5] Munkres James, *Topology*, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2014.
- [6] Nadler, Sam B. Jr., *Continuum Theory An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, 1992.

Índice alfabético

- n -celda, 42
- bola
 - abierta, 17
 - cerrada, 20
- bola abierta
 - agujerada, 18
- bola cerrada
 - agujerada, 20
- cardinalidad, 16
- cerradura, 21
- codominio, 3
- compacto, 29
- conjunto
 - abierto, 18
 - cerrado, 20
 - de Cantor, 47
 - denso, 38
 - perfecto, 28
 - potencia, 3
 - separable, 38
 - acotado, 34
- cubierta, 29
 - abierta, 29
- Dendrita, 47
- denso, 26
- denso en ninguna parte, 26
- derivado, 23
- diámetro, 35
- dominio, 3
- equipotentes, 15
- espacio normado, 17
- familia indexada, 4
- frontera, 25
- fronterizo, 26
- función, 3
 - biyectiva, 9, 15
 - constante, 3
 - identidad, 3
 - inclusión, 3
 - inyectiva, 9
 - restringida, 4
 - suprayectiva, 9
- imagen, 3, 4
 - directa, 4
 - inversa, 4
- interior, 21
- intersección, 5
- localmente
 - compacto, 44
- norma, 16
- pareja ordenada, 1
- precompacto, 36
- producto cartesiano, 2
- propiedad

- de Bolzano-Weierstrass, 40
- de intersección finita, 34
- punto
 - aislado, 23
 - de acumulación, 23
 - límite, 23
- rango, 3
- relativamente compacto, 39
- subcubierta, 29
 - finita, 29
- Teorema
 - de Heine-Borel, 43
- totalmente
 - acotado, 36
- unión, 5