



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

**PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE FUENTES EN
LA CORTEZA CEREBRAL DE TIPO DIPOLAR ASOCIADAS A
FOCOS EPILÉPTICOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M.C. CLAUDIA NETZAHUALCOYOTL BAUTISTA

DIRECTORES DE TESIS:

**DR. JOSÉ JACOBO OLIVEROS OLIVEROS
DRA. MARÍA MONSERRAT MORÍN CASTILLO**

Puebla, Puebla, 2020.



DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

CLAUDIA NETZAHUALCOYOTL BAUTISTA

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 25 de junio de 2020, con la tesis titulada:

***“PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE FUENTES EN
LA CORTEZA CEREBRAL DE TIPO DIPOLAR ASOCIADAS A
FOCOS EPILEPTICOS”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 9 de octubre de 2020

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



D*PDS/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A Jorge, Jorge Andrés y Helena

Mi agradecimiento a todos los miembros de mi jurado de tesis, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. José Julio Conde Mones, Dra. Blanca Bermúdez Juárez, Dr. Gregorio García Aguilar, Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia, por sus observaciones y correcciones para el mejoramiento de este trabajo.

A mis asesores, Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros y Dra. María Monserrat Morín Castillo, les agradezco su confianza, apoyo y paciencia durante este tiempo que me permitieron trabajar con ustedes.

También extendo mi gratitud al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante el período en que realicé mis estudios de Doctorado, así como a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 1 |
| I. Introducción | 3 |
| I.1 El cerebro humano | 3 |
| I.1.1 Corteza cerebral | 3 |
| I.2 Técnicas para el diagnóstico de enfermedades en el cerebro | 4 |
| I.2.1 Electroencefalograma | 4 |
| I.2.2 LORETA | 5 |
| I.2.3 Magnetoencefalografía | 6 |
| I.2.4 Tomografía computarizada | 6 |
| I.3 Algunas enfermedades en el cerebro | 7 |
| I.3.1 Epilepsia | 7 |
| I.4 Descripción de algunos resultados conocidos | 8 |
| I.5 Problema de estudio y resultados del trabajo | 10 |
| I.5.1 Problemas de estudio | 10 |
| I.5.2 Resultados obtenidos | 10 |
| I.6 Estructura de la tesis | 11 |
| 1. Conceptos para el análisis del problema de contorno | 13 |
| 1.1. Problemas inversos y mal planteados | 13 |
| 1.2. Regularización de Tijonov | 14 |
| 1.3. La ecuación de Laplace | 15 |
| 1.4. Fórmulas de Green | 16 |
| 1.5. Potenciales de superficie | 17 |
| 1.6. Espacios de Sobolev | 17 |
| 1.7. Traza de funciones | 21 |
| 1.8. Operadores compactos y autoadjuntos | 23 |
| 2. Problema de identificación para una fuente ubicada en la corteza cerebral | 26 |
| 2.1. Modelo matemático para fuentes sobre la corteza cerebral | 26 |
| 2.2. Solución clásica del PCS | 27 |
| 2.3. Solución débil del PCS | 33 |
| 2.4. Planteamiento operacional | 34 |

| | |
|---|-----------|
| 2.5. Unicidad de solución para problema inverso del PCS | 35 |
| 2.6. Representación matemática de la fuente en la superficie de la corteza cerebral | 35 |
| 2.7. Problema de contorno superficial en dos dimensiones | 37 |
| 2.8. PCS dependiente del tiempo | 41 |
| 2.9. Generación de EEG sintético en dos dimensiones | 47 |
| 2.10. Problema de contorno superficial en tres dimensiones | 54 |
| 2.11. Modelo en tres dimensiones dependiente del tiempo | 59 |
| 2.12. Obtención del EEG sintético en tres dimensiones | 60 |
| 3. Modelo con fuentes en la corteza cerebral | 64 |
| 3.1. Fuente ubicada en el volumen de la corteza cerebral | 64 |
| 3.2. Fuente en el volumen y superficie de la corteza cerebral | 70 |
| Conclusiones, resultados y perspectivas | 72 |
| Apéndice | 74 |
| A. Solución del problema de contorno superficial | 74 |
| A.1. Problema directo en dos dimensiones | 74 |
| A.2. Problema inverso en dos dimensiones | 77 |
| A.3. Obtención del momento dipolar | 79 |
| A.4. Problema directo en tres dimensiones | 82 |
| A.5. Problema inverso en tres dimensiones | 85 |
| B. Solución asociada al problema de contorno volumétrico | 87 |
| B.1. Solución del problema directo en dos dimensiones | 87 |
| B.2. Solución del problema directo en tres dimensiones | 90 |
| C. Publicaciones y asistencias a congresos | 94 |
| C.1. Artículos publicados | 94 |
| C.2. Congresos | 94 |
| Bibliografía | 97 |

Resumen

En este trabajo se estudió el problema inverso de identificación de fuentes en la corteza cerebral de tipo dipolar asociadas a focos epilépticos, a partir del electroencefalograma (EEG) medido sobre el cuero cabelludo. La electroencefalografía es una de las técnicas más conocidas de investigación no invasiva del cerebro y consiste en el registro de potenciales por medio de electrodos colocados sobre el cuero cabelludo; estos potenciales provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre dos electrodos, uno llamado electrodo explorador y el otro electrodo de referencia ([72]). Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentran que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no invasiva además de económica. Por medio de esta técnica se han detectado posibles anomalías en el cerebro (daños, mal funcionamiento, etc.) y una de sus principales aplicaciones se encuentra en el diagnóstico y detección de focos epilépticos ([4], [58], [44], [49], [23], [24], [35]). Las aplicaciones del EEG no han sido totalmente alcanzadas todavía. Una muestra de ello es que actualmente se utiliza para estudios de conectividad funcional y de procesos cognitivos.

Se han desarrollado herramientas que permiten la visualización de las fuentes a partir del EEG que se basan en modelos matemáticos que permiten establecer correlaciones entre la actividad bioeléctrica del cerebro y el EEG ([53], [52]). Estos modelos se han usado para el análisis del problema de identificación de fuentes y campos eléctricos a partir del EEG y consideran a la cabeza como un medio dividido en capas conductoras. Las fuentes bioeléctricas y los potenciales se representan por elementos de espacios matemáticos que se elige apropiadamente a fin de que en estos elementos, se representen las características fundamentales del fenómeno. Se ha mostrado, con base a datos experimentales ([43],[55], [22]), que se puede aplicar la aproximación cuasiestática de las ecuaciones de Maxwell para establecer una relación entre las fuentes bioeléctricas y el EEG; todo esto a través de un problema de contorno y considerando condiciones apropiadas en las fronteras de empalme de las capas. Se ha demostrado que aun cuando la fuente se expresa como la suma de dos funciones: una armónica y la otra no armónica, en términos generales la componente armónica es la única que puede ser identificada a partir del EEG [37].

En esta tesis se propuso un modelo para representar focos epilépticos localizados en la corteza cerebral y se construyó un algoritmo estable para identificar los parámetros de la fuente de tipo dipolar. Este algoritmo se implementó considerando que la región de estudio se representa por círculos y esferas concéntricas, además se desarrollaron, de manera original, ejemplos sintéticos y programas en MATLAB para tal implementación. Al modelo que se utiliza para el estudio de este problema, el cual es un modelo cuasi-estático, se le agrega el tiempo para poder emular la variación temporal de las fuentes y de los potenciales y con ello generar

EEG sintéticos que permitan determinar a las fuentes por medio del algoritmo propuesto en este trabajo. Entre los resultados que se obtuvieron se encuentran las demostraciones de la existencia y unicidad de la solución clásica del problema de contorno que establece las correlaciones entre las fuentes corticales y el EEG, así como la unicidad de solución del problema inverso de identificación de fuentes en la corteza cerebral, estos teoremas así como el algoritmo propuesto, son resultados originales de este trabajo de tesis y están publicados en ([38]). Se considera el caso de fuentes de tipo dipolar y se propone un modelo original para éstas junto con un algoritmo, también original, que como primer paso obtiene el centro y como segundo paso al llamado momento dipolar (parámetros con los que se define a la fuente dipolar). Esto, como se dijo arriba, es un resultado original de la tesis y fue publicado en ([39]).

Introducción

En este capítulo se presentan los elementos básicos que permiten la modelación del problema que se aborda en esta tesis. Entre esos elementos se encuentra una breve descripción del cerebro, de la corteza cerebral, de las técnicas que se utilizan para su análisis, haciendo hincapié en la técnica que proporciona la electroencefalografía. Se hace una breve descripción de algunas de las enfermedades del cerebro que pueden ser analizadas por medio de esta técnica. También se describen el contenido, los resultados conocidos sobre el tema, los problemas de estudio, los resultados obtenidos y las aportaciones de la tesis.

I.1 El cerebro humano

El cerebro humano es un órgano encargado de controlar y regular la mayoría de funciones del cuerpo, su peso promedio se encuentra entre 1.3 y 1.6 kilogramos ([25], [50]). El cerebro se divide en dos partes principales, a saber, interior (volumen) y la corteza cerebral, esta última alberga unos 20,000 billones de neuronas ([57]). El metabolismo celular genera la energía bioquímica que utiliza el cerebro para desencadenar las reacciones neuronales, la energía es recibida por las dendritas y emitida en los axones en forma de sustancias químicas que reciben el nombre de neurotransmisores ([50]).

El cerebro funciona a través de la transmisión de información entre las neuronas mediante impulsos eléctricoquímicos y esta transmisión se produce durante la sinapsis, en las que neuronas y células se ponen en contacto y mediante descargas químicas e impulsos eléctricos se intercambian neurotransmisores que son los encargados de excitar o inhibir la acción de la otra célula ([25], [41], [50], [57]).

I.1.1 Corteza cerebral

La corteza o cortex cerebral es la sustancia gris que cubre la superficie de los hemisferios cerebrales, compuesta por una fina capa de neuronas y conexiones neuronales, que no es homogénea y está formada a su vez por seis capas de células, cada una de ellas con funciones específicas ([50]). El espesor cortical varía entre 1.5 a 4 mm según las zonas ([50], [57]), ésta a su vez se divide en neocorteza,

paleocorteza y arquicorteza ([50]) que a continuación se describen brevemente ([57], [7]):

1. La neocorteza se encarga de los procesos de raciocinio;
2. La paleocorteza alberga las terminaciones de las vías olfatorias, encontrándose aquí el cerebro olfatorio de las personas;
3. La arquicorteza se encarga de aquellas respuestas automáticas y mecanismos fisiológicos responsables de la supervivencia.

Además de la división por capas, la corteza cerebral puede ser dividida según sus diferentes áreas funcionales, a saber: áreas sensitivas, motoras o de asociación ([50], [57]).

I.2 Técnicas para el diagnóstico de enfermedades en el cerebro

I.2.1 Electroencefalograma

La actividad eléctrica se produce con amplitud de microvoltios, se recoge mediante el uso de electrodos colocados en el cuero cabelludo o en la corteza cerebral, dando lugar a los llamados electroencefalogramas (EEG), es decir, un EEG está formado por un conjunto relativamente pequeño de señales eléctricas, medidas en microvoltios, que han sido grabadas por diferentes sensores que se colocan en el exterior del cuero cabelludo. Se pueden grabar electroencefalogramas con sensores que tengan contacto directo con la piel o incluso con el encéfalo, tanto a nivel superficial como profundo. El número de electrodos utilizados puede variar, desde la decena hasta el orden de trescientos ([1]).

Existen numerosos protocolos para la medición de EEG, pero hay uno que destaca sobre los demás debido a que es el más extendido, aquél con el cual se han realizado más bases de datos y que es el mejor contrastado, es el sistema internacional 10-20, se basa en la relación existente entre la localización de un electrodo y la región del cerebro que hay bajo la misma. Los números 10 y 20 hacen referencia a la forma en la que se toman las distancias entre electrodos adyacentes, que son o el 10 % o el 20 % de la distancia total de delante a atrás (es decir, entre los puntos nasón e inión) o desde la derecha a la izquierda (es decir, entre los puntos preauriculares) en el cráneo ([1], [13]).

Para colocar los electrodos caben dos posibilidades: Realizar las medidas correspondientes en el sujeto y colocar cada electrodo de forma individual, ayudados de varias cintas que faciliten su fijación, o bien se utiliza un gorro flexible, que

tiene un orificio en cada uno de los nodos pertinente, donde se colocan cada uno de los electrodos. En ambos casos es necesario que se aplique un cierto gel conductor que permita un contacto completo entre cabeza y electrodo.

Se asume que el EEG recoge la actividad eléctrica que se propaga perpendicularmente (o casi perpendicularmente) al cráneo. A pesar de esta importante limitación, resulta que dicha actividad eléctrica ha demostrado contener información sustancial para la comprensión de numerosos aspectos relacionados con nuestros procesos neurocognitivos y de hecho, puede ser utilizada para el diagnóstico (y el tratamiento) de diversos desórdenes o trastornos mentales ([1],[13]).

La actividad eléctrica se clasifica principalmente por ondas en el EEG, atendiendo a su comportamiento en frecuencias. Estos grupos tiene asignada una letra griega. Así se tienen las ondas, θ que varía entre 4 y 8 Hz. Las ondas α varían entre 8 y 13 Hz. Las ondas del ritmo sensoriomotor (SMR) se encuentra entre 12 y 16 Hz, este ritmo también se denomina β -bajo. Las ondas β varían entre 12 y 21 Hz. Las ondas β -altas se encuentran entre 20 y 32 Hz, ([1]). Las ondas γ varían entre 38 y 42 Hz, la actividad en torno a 40 Hz, [13], [50].

I.2.2 LORETA

Las técnicas de neuroimagen tienen como objetivo representar la estructura o el funcionamiento del cerebro, permiten visualizar el sistema nervioso central y, en particular, al cerebro. Algunos ejemplos son el fMRI por sus siglas en inglés (functional Magnetic Resonance Imaging), TAC (Tomografía Axial Computarizada), MEG (Magnetoencefalografía). Un método para analizar la actividad del cerebro fue publicado en 1994 por Pascual-Marqui, Michel y Lehman; éste permite localizar la actividad eléctrica en el cerebro basado en los potenciales del cuero cabelludo a partir de la grabación de EEG de múltiples canales. Este método resuelve el problema de identificación de fuentes (problema inverso): convertir las mediciones en información sobre un objeto físico o sistema observado. A esta técnica la llamaron LORETA (tomografía electromagnética cerebral de baja resolución) y puede entenderse como una técnica de neuroimagen basada en EEG. LORETA calcula una distribución tridimensional de 2394 vóxeles de 7x7x7 mm de actividad neuronal eléctrica generadora en la materia gris. Una ventaja de esta técnica es que no está restringida a un cierto número de electrodos o ubicaciones de electrodos y, por lo tanto, se adapta a casi todas las configuraciones de los dispositivos ([53]).

Algunas actualizaciones de LORETA son:

sLORETA: tomografía electromagnética cerebral estandarizada de baja resolución. No tiene sesgo de localización en presencia de medición y ruido biológico ([52]).

eLORETA: tomografía electromagnética cerebral de baja resolución exacta. La primera solución lineal, discreta, distribuida en 3D para el problema inverso de

EEG/MEG con localización exacta (error de localización cero) ([51]).

El análisis de LORETA de banda de frecuencia limitada se puede usar para determinar que regiones del cerebro se activan durante diferentes estados o tareas mentales, lo que ayuda a determinar si el cerebro está funcionando de manera óptima eléctricamente.

Los vóxeles de LORETA se encuentran en posiciones fijas dentro de la materia gris del cerebro. Otro aspecto de interés consiste en analizar no sólo la activación en vóxeles únicos, sino en regiones enteras asociadas a ciertas funciones cerebrales. Actualmente es una técnica de análisis de EEG extendida, su versatilidad y el hecho de que el número de canales de EEG y la ubicación de canales no son fijos, hace posible utilizar esta técnica con casi todos los sensores del EEG y configuraciones experimentales ([53], [52], [51]).

I.2.3 Magnetoencefalografía

La Magnetoencefalografía (MEG) es una prueba médica no invasiva que utiliza un dispositivo superconductor de interferencia cuántica y una computadora para medir la actividad neuromagnética adentro del cerebro. La MEG detecta, graba y analiza los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas en el cerebro. La distribución de estos campos magnéticos es superpuesta a una imagen anatómica del cerebro para ayudar a identificar la fuente de la actividad en el cerebro. Un estudio por MEG es una medición directa de la función cerebral y uno de los métodos para grabar y evaluar el cerebro mientras está funcionando activamente ([33]).

La MEG se utiliza para identificar las áreas funcionales del cerebro incluyendo actividades de lenguaje, áreas sensoriales, motoras y la memoria, además de la localización de la fuente de crisis epilépticas. La MEG crea un mapa del cerebro que es útil para el planteamiento preoperatorio, para el tratamiento de personas con epilepsia.

Una de las principales ventajas del MEG es que su señal no se degrada por el paso a través de los diferentes tejidos, como ocurre con las corrientes de volumen que capta el electroencefalograma, y por tanto, puede medir en tiempo real (milisegundos) y de forma directa las señales neuronales ([33],[74]).

I.2.4 Tomografía computarizada

La Tomografía Computarizada (TC) es un procedimiento computarizado de imágenes por rayos X en el que se proyecta un haz delgado de rayos X a un paciente y se gira rápidamente alrededor del cuerpo, produciendo señales que son procesadas por la computadora de la máquina, para generar imágenes transversales o cortes del cuerpo, que se llaman imágenes tomográficas y contienen información más detallada que los rayos X convencionales. Una vez que la computadora de

la máquina recolecta varios cortes sucesivos, se amplían digitalmente para formar una imagen tridimensional del paciente que permita más fácilmente la identificación y ubicación de las estructuras básicas, así como posibles tumores o anomalías. Una gran ventaja respecto a otras técnicas de exploración es la rapidez con que se realiza la prueba. Un inconveniente es que al utilizar radiones ionizantes en el paciente, éste recibe una dosis de radiación ([9], [54]).

I.3 Algunas enfermedades en el cerebro

En este trabajo se está interesado en la detección de fuentes en el cerebro, en particular, de fuentes que pueden generar una anomalía como una crisis epiléptica. El interés se centra en las crisis epilépticas focalizadas. A continuación se dan algunos elementos que sirven para la modelación sobre la epilepsia.

I.3.1 Epilepsia

La epilepsia es una enfermedad crónica caracterizada por un exceso de actividad eléctrica recurrente en el transcurso de la vida del individuo. La causa de estas crisis es una descarga neuronal anormal en el cerebro, durante las cuales se pueden presentar diversos síntomas que comprenden manifestaciones neurológicas motoras o sensitivas. Existen dos tipos fundamentales de crisis epilépticas: las crisis generalizadas y las crisis parciales también llamadas crisis epilépticas focales; el que se produzcan unas u otras depende de que el grupo de neuronas que se irrite sea más o menos amplio ([42]). A veces en una persona con epilepsia pueden aparecer distintos tipos de crisis epilépticas, dependiendo de la extensión de la descarga epiléptica.

En las crisis epilépticas generalizadas, la descarga epiléptica afecta al mismo tiempo a toda la superficie del cerebro y en las crisis epilépticas parciales o focales, la descarga epiléptica comienza en una zona reducida de la superficie del cerebro ([42], [14]). Se llama foco epiléptico (FE) precisamente a la zona de neuronas alteradas donde comienzan las crisis epilépticas parciales o focales. Pasa que muchas veces en que la descarga de un foco epiléptico o de una crisis epiléptica parcial o focal se extiende por toda la superficie del cerebro y se transforma en una crisis epiléptica generalizada, por lo que en términos absolutos, las crisis epilépticas parciales o focales son más frecuentes que las generalizadas.

Dentro de las crisis parciales (focales) existen tres clasificaciones principales ([42], [14]):

1. Crisis parciales simples, las cuales no implican una pérdida de conciencia y cuyos síntomas pueden incluir sacudidas de los miembros, distorsiones en la percepción visual o auditiva, sensaciones de miedo.

2. Crisis parciales complejas, en las cuales hay alteraciones de la conciencia (pérdida de la memoria y de la comprensión de los eventos implicados) e incluyen actos motores automáticos complejos.
3. Crisis parciales complejas con evolución a crisis secundariamente generalizadas. Al inicio de una crisis parcial algunos individuos experimentan una sensación de aviso o alerta llamada aura. Estas sensaciones varían de persona a persona y pueden ser entre otras: temor, un olor determinado, temperatura o un sonido musical.

Las causas más frecuentes de epilepsia en el mundo son: traumatismo de cráneo, infecciones del cerebro y epilepsia idiopática ([42]). El FE está constituido por un pequeño grupo de neuronas que desencadenan una excitabilidad potenciada (epileptiforme) que origina una actividad eléctrica anormal, la cual puede ser consecuencia de diferentes factores como variaciones de las propiedades celulares o de las conexiones sinápticas como por ejemplo una cicatriz local, un coágulo de sangre o un tumor. Es en el FE, donde se originan las crisis parciales. Las fases de desarrollo de esta última, se pueden dividir en un periodo interictal, sincronización neuronal, propagación de la crisis y generalización secundaria, cada una de éstas afectadas por diversos factores ([42]).

I.4 Descripción de algunos resultados conocidos

Como se comentó anteriormente, el cerebro ha sido estudiado por diferentes técnicas, en particular la Electroencefalografía. Con ella, varios autores han realizado aportaciones que abonan en el entendimiento de las diferentes vertientes que componen la problemática asociada con el cerebro. Antes de indicar la contribución de este trabajo, se describen algunas. En ([37], [48], [20], [26], [12]) se estudia el problema inverso de identificación de fuentes, usando planteamientos operacionales que permiten establecer correlaciones entre las fuentes y el EEG a través de operadores actuando entre espacios de Hilbert apropiados. Se demuestra que es posible recuperar la componente armónica de la fuente a través del EEG sobre el cuero cabelludo y también que hay infinitas configuraciones que producen el mismo EEG. En [37] se consideran por separado los siguientes casos:

1. Fuentes ubicadas en la corteza cerebral.
2. Fuentes ubicadas en el interior del cerebro.

Para llegar a los planteamientos operacionales, se utiliza un modelo que considera a la cabeza dividida en capas conductoras con conductividad constante y conocida en cada capa. Se utiliza la aproximación cuasiestática de las ecuaciones de Maxwell y se llega a un problema de contorno en un medio no homogéneo compuesto por capas conductoras con conductividad constante en cada una de ellas.

Sobre las interfaces de separación, se proponen condiciones de frontera apropiadas dependiendo de cada caso. Para los trabajos mencionados arriba se supone que el EEG se conoce sobre todo el cuero cabelludo (que puede lograrse por medio de una interpolación apropiada de EEG medido sobre el cuero cabelludo ([53])). Mediante algunas suposiciones, basadas en hechos experimentales, se llega a un problema de contorno en un medio no homogéneo que relaciona la fuente con la medición. El análisis de este problema de contorno permite establecer un planteamiento operacional y proponer algoritmos de identificación. En el caso en el que la fuente se encuentra concentrada en la corteza cerebral, se utiliza un modelo simplificado junto con técnicas de la teoría de potencial para proponer un algoritmo estable de identificación para recuperar tanto al potencial como a la fuente. Para llegar a este algoritmo se estudia la solubilidad del problema de contorno asociado al modelo y se prueba que su solución puede buscarse como suma de un potencial de capa simple y uno de capa doble. Como un resultado adicional se demuestra que la identificación de las densidades con que se definen tales potenciales de superficie es estable. En [40] se presenta una simplificación del problema inverso electroencefalográfico para llevar el caso de varias capas conductoras a una región homogénea con condición de Neumann nula. De esta forma, la fuente se determina a partir de la ecuación de Poisson con una condición de contorno de Neumann nula y un dato adicional sobre la frontera de la región homogénea, el cual se obtiene de la medición. Esto es válido para regiones generales con fronteras suficientemente suaves. Adicionalmente, para el caso de esferas concéntricas, se plantea el problema inverso electroencefalográfico para una fuente dipolar (que representa a focos epilépticos) usando esta simplificación y la técnica de la función de Green.

En [46], se analiza el caso de fuentes dipolares ubicadas en la corteza cerebral usando técnicas de teoría de potencial y la teoría de funciones generalizadas (o distribuciones). Esto lleva a un sistema de ecuaciones integrales definido sobre un espacio de funciones generalizadas con la cual se puede proponer un algoritmo estable de solución del problema directo electroencefalográfico. Se encuentra un teorema de unicidad para el problema inverso. En [46], se identifican los parámetros de la fuente dipolar a partir del EEG sobre el cuero cabelludo usando la simplificación. Para el análisis teórico se utilizan los resultados desarrollados para una región homogénea. En [45], se establece la unicidad de recuperación de la componente normal de la fuente de corriente neuronal sobre la corteza cerebral, a partir del EEG sobre el cuero cabelludo y se prueba que el potencial electrostático producido por fuentes corticales se expresa como una suma de potenciales de simple capa con densidades definidas sobre la superficie de separación de las capas conductoras.

I.5 Problema de estudio y resultados del trabajo

I.5.1 Problemas de estudio

En este trabajo se estudió el problema de determinar, a partir del EEG sobre el cuero cabelludo, la fuente dipolar ubicada sobre la corteza cerebral que produce dicho EEG. Estas fuentes dipolares están asociadas a actividad epiléptica focalizada. Se propone una expresión que considera a la distribución delta de Dirac junto con un momento dipolar como en el caso volumétrico, pero en vez de buscar la divergencia, que es lo que se hace en ese caso, se busca la componente normal de la fuente (se resta una constante para que se cumpla que la integral de la fuente sea cero, es decir, la llamada condición de compatibilidad que se explica en el capítulo 2). Se considera esta fuente en el problema de contorno que se ha usado para modelar este problema. Se estudia la solubilidad de este problema y se propone un algoritmo para identificar las fuentes.

I.5.2 Resultados obtenidos

Se desarrolló e implementó un algoritmo estable para identificar fuentes localizadas en la interfaz de separación de dos medios homogéneos con característica eléctrica constante y diferente entre sí, uno encerrado en el otro. Este algoritmo se puede aplicar en general a medios que cumplan con las características señaladas anteriormente. En particular, se utiliza para fuentes bioeléctricas ubicadas sobre la superficie de la corteza cerebral, que puede interpretarse como la frontera de separación de la región ocupada por el cerebro y el resto de la cabeza. En este caso, el algoritmo toma como datos de entrada a las mediciones del EEG y devuelve a la fuente localizada sobre superficie de la corteza cerebral. Para definir el algoritmo se consideró un problema de contorno elíptico que se deduce de la aproximación cuasiestática de las ecuaciones de Maxwell ([63], [22]). Para este problema de contorno se había probado la existencia y unicidad (salvo constantes) de la solución débil del problema. En este trabajo, se probó la existencia y unicidad (salvo constantes) de la solución clásica, el cual es un resultado original y se encuentra publicado en ([38]). Se propuso una expresión para representar a fuentes dipolares localizadas sobre la superficie de la corteza cerebral y se implementó su localización con el algoritmo señalado al inicio de este párrafo y se encuentra publicado en ([39]). Como se mencionó, se demostró la existencia y la unicidad de la solución clásica del problema de contorno, así como la unicidad del problema de identificación con respecto a la medición sobre la frontera de la región, que en el caso del problema de fuentes en el cerebro, corresponde al cuero cabelludo. Estos resultados, se encuentran publicados en ([38]). Además, para el problema de identificación de los parámetros de la fuente de tipo dipolar, se propuso separar el problema no lineal en dos problemas lineales para los cuales se usó el método de regularización de Tijonov y se demostró, por medio de pruebas numéricas, que puede usarse el mismo parámetro de regularización para

cada uno de ellos, siendo estos resultados originales de este trabajo. El problema directo se resuelve analíticamente para el caso de círculos concéntricos y esferas concéntricas. Siguiendo la forma en que se ha aproximado la delta de Dirac, en este trabajo se le aproxima por medio de funciones campana normalizadas. El algoritmo determina primero el centro y ancho de la campana ([38]) y después el momento dipolar ([39]). Adicionalmente se propone que al modelo descrito en el trabajo se le incluya el tiempo, es decir, por cada instante de tiempo, se resuelve el problema de contorno y con ello, se puede generar y visualizar a la medición producida por la fuente, obteniendo un EEG sintético, el cual es un resultado original de este trabajo. Este resultado permite que más adelante se pueda aplicar el algoritmo para las mediciones obtenidos por el especialista. Al resultado del EEG sintético se le agregan artefactos oculares y musculares ([62], [61]), para después ser filtrados mediante los filtros denominados ICA Y LPF por sus siglas en inglés (Independent Component Analysis y Low Pass Filter) ([62], [61]), el resultado que se obtiene es al que se le aplica el algoritmo que se presenta en el trabajo. Se agregaron los artefactos musculares y oculares con el fin de emular un registro de EEG. El filtrado se utiliza para obtener un EEG limpio, que es como se le denomina a un EEG después de que se le aplican los diferentes filtros. Para el caso de la fuente definida sobre la superficie de separación, se resolvieron tanto el problema directo como el inverso en dos y tres dimensiones. En ambos casos, en forma analítica y numérica. Se usaron los armónicos circulares y esféricos, para dos y tres dimensiones, respectivamente. Los correspondientes resultados numéricos se presentan en los Capítulos 2, 3 y 4.

I.6 Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en: resumen, introducción, cuatro capítulos, tres apéndices, conclusiones y bibliografía. En la Introducción, se incluye información del cerebro humano que se utiliza para la modelación, algunas técnicas para el diagnóstico de enfermedades en el cerebro, la importancia del problema de estudio y contribuciones con respecto a otros trabajos así como los resultados del trabajo. En el Capítulo 1, se incluyen los elementos básicos que permiten la modelación matemática del problema de estudio, los cuales son todos conocidos. En el Capítulo 2, se presenta el modelo matemático en donde se consideran fuentes ubicadas en la superficie de la corteza cerebral, se realiza un planteamiento operacional del problema, se demuestra, como resultado original, la existencia y unicidad de la solución clásica del problema de contorno que se usa para establecer correlaciones entre las fuentes en la corteza y el EEG medido sobre el cuero cabelludo., Se demuestra la unicidad de solución para de identificación de fuentes en la corteza. Se propone una representación matemática de la fuente que representa a un foco epiléptico sobre la corteza cerebral. En este capítulo, se resuelven, como primer paso, el problema directo e inverso en dos dimensiones; para el problema inverso se determinan los parámetros de la fuente dipolar, que se aproxima por medio de

funciones campana y un momento dipolar. Se obtiene como primer paso, el centro de la función campana y con ello el centro aproximado de la delta de Dirac; como segundo paso, se determina el momento dipolar conociendo el centro. Al modelo se le agrega el tiempo, es decir, para cada instante de tiempo se van resolviendo tanto el problema directo como el inverso. Con ello, se pueden generar los EEGs sintéticos para el caso de dos dimensiones. Después se considera la solución del problema directo e inverso para tres dimensiones, en donde se obtiene el centro de la fuente en el problema inverso y se agrega el tiempo al modelo para poder generar el EEG sintético. En el Capítulo 3, se presentan la solución del problema directo en dos y tres dimensiones cuando la fuente se ubica en el volumen de la corteza cerebral. En el Capítulo 4, se tiene el resultado del problema directo tanto en dos como en tres dimensiones cuando la fuente se encuentra tanto en el volumen como en la superficie de la corteza cerebral. Se incluyen apéndices para el trabajo sea más robusto. En el Apéndice A, se tienen las soluciones analíticas de los modelos, dados en el Capítulo 2. En el Apéndice B, se tiene la solución teórica del modelo descrito en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Conceptos para el análisis del problema de contorno

En este capítulo se presenta el resumen de resultados para el análisis del problema de estudio.

1.1. Problemas inversos y mal planteados

Los problemas inversos consisten en encontrar una propiedad desconocida de un objeto o de un medio a partir de las observaciones de una respuesta de este objeto o medio de una señal de prueba. Por lo tanto, los problemas inversos proporcionan una base teórica para la detección lejana y la evaluación no destructiva. Podemos considerar a los problemas directos como aquellos en los que se tiene información sobre las causas que describen un proceso en un medio y la solución del problema nos conduce a descubrir el efecto producido por dichas causas, mientras que en los problemas inversos se tiene una información parcial sobre los resultados o efectos producidos en el medio por ciertas causas que se desea descubrir a partir del análisis de dichos resultados. Para ampliar el concepto de problemas inversos se sugiere la lectura de [30], [15], [70], [17], [68], [11]. Hadamard clasificó a los problemas físicos que son representados por un modelo matemático en el siguiente sentido [30]:

Definición 1 Sean X y Y espacios normados, $A : X \rightarrow Y$ un operador continuo (lineal o no lineal). La ecuación operacional

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

es llamada bien planteada si cumple:

1. *Existencia:* Para cada $y \in Y$ existe (al menos uno) $x \in X$ tal que (1.1).
2. *Unicidad:* Para cada $y \in Y$ existe a lo más un $x \in X$ tal que (1.1).

3. *Estabilidad: La solución x depende continuamente de y , es decir, para toda sucesión $(x_n) \subset X$ con $Ax_n \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$), se sigue que $(x_n \rightarrow x)$ ($n \rightarrow \infty$).*

Las ecuaciones que no cumplan alguna de estas propiedades son llamadas mal planteadas.

Las propiedades 1 y 2 pueden resumirse diciendo que el operador A es biyectivo y la propiedad 3 diciendo que es bicontinuo.

1.2. Regularización de Tijonov

El método de regularización de Tijonov es ampliamente utilizado para encontrar soluciones aproximadas numéricamente estables de la ecuación de la primera especie $Ax = y$, donde A es un operador lineal compacto entre espacios de Hilbert X y Y y si en vez de y se conoce una aproximación y^δ con $\|y - y^\delta\| < \delta$. El funcional de Tijonov está dado por

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad (1.2)$$

donde $\alpha > 0$ y $\alpha\|x\|^2$ es un término de penalización para el funcional de mínimos cuadrados. El funcional de Tijonov tiene un único mínimo que depende continuamente del lado derecho de la ecuación, el cual está dado por

$$A^*Ax^\alpha + \alpha Ix^\alpha = A^*y. \quad (1.3)$$

El siguiente teorema permite elegir el parámetro de regularización α [30]:

Teorema 1 *Sea A un operador compacto, lineal e inyectivo entre dos espacios de Hilbert X, Y separables. Si la ecuación $Ax = y$, tiene solución exacta para datos exactos \bar{y} , entonces el ínfimo $x^{\alpha(\delta)}$ del funcional de Tijonov correspondiente a la ecuación $Ax = y^\delta$ donde $\|y^\delta - \bar{y}\| \leq \delta$ cumple que si toma $\alpha(\delta) > 0$, $\delta > 0$ con $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, y $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces $\|x^{\alpha(\delta)} - \bar{x}\| \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$.*

En el caso en que se tenga información a priori se tiene los siguientes resultados. Supongamos que A es uno a uno con rango denso en Y . Consideremos la ecuación operacional $Ax = y$ con $x \in X$, $y \in Y$, $y^\delta \in Y$, tal que $\|y^\delta - y\| \leq \delta < \|y^\delta\|$. Sea $x^{\alpha(\delta)}$ la solución de Tijonov que satisface $\|Ax^\delta - y^\delta\| = \delta$ para toda $\delta \in (0, \delta_0)$. Entonces

- $x_{\alpha(\delta)}^\delta \rightarrow x$ para $\delta \rightarrow 0$, es decir, el principio de discrepancia admisible.
- Sea $x = A^*z \in A^*(Y)$ con $\|z\| < E$, entonces $\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}$. Por lo tanto, el principio de discrepancia es una estrategia de regularización optimal bajo la información de que $\|(A^*)^{-1}x\| \leq E$.

Los resultados anteriores pueden encontrarse en [6], [30] y [31].

1.3. La ecuación de Laplace

Sea X un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . El operador de Laplace o Laplaciano se denota con Δ y se define sobre $C^2(X)$ como sigue:

$$\Delta u = 0.$$

Notemos que Δ es un operador lineal y que el núcleo no está formado sólo por el cero. Esto muestra que existen funciones armónicas no nulas. La función

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & n = 2, \\ \frac{1}{4\pi|x-y|}, & n = 3, \end{cases}$$

es llamada solución fundamental de la ecuación de Laplace. Para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, esta función es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. La ecuación de Laplace de una función escalar u en coordenadas cartesianas en dos y tres dimensiones está dada, respectivamente, por:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

y

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Como la cabeza se modela por dos esferas concéntricas, resulta conveniente utilizar el sistema de coordenadas esféricas.

Definición 2 *Se dice que una función de valor real u de dos variables reales x y y que tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en un dominio D y satisface la ecuación de Laplace es armónica en D .*

La relación entre el sistema de coordenadas esféricas y rectangulares está dado por: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, donde $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. De aquí se halla que la ecuación de Laplace de la función escalar u en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) es:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Teorema 2 *Supongamos que la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D . Entonces las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son armónicas en D .*

La demostración del Teorema 2 puede revisarse en ([75])

A continuación, se dan ejemplos de funciones armónicas. En particular, se da un ejemplo de una función analítica en todo el plano complejo. Esto se puede deducir de que su partes real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemannn y de que las derivadas parciales son funciones continuas. Se demuestra para este caso que las partes real e imaginaria son funciones armónicas.

Ejemplo 1: La función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ es armónica, es decir, satisface la ecuación de Laplace. Esto se deduce de que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy - 5, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -6x,\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Ejemplo 2: La función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ es analítica en todo el plano complejo. Se obtienen las derivadas parciales de $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Para u se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2,\end{aligned}$$

de donde se tiene $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Análogamente, se tiene que $v(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0.$$

1.4. Fórmulas de Green

Sea Ω un dominio acotado de clase C^1 y sea n el vector unitario normal a $\partial\Omega$ dirigido hacia el exterior de Ω . Las siguientes igualdades se conocen como fórmulas de Green. Para $u \in C^1(\bar{\Omega})$ y $v \in C^2(\bar{\Omega})$ se cumple la primera fórmula de Green ([71])

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\partial\Omega.$$

Para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ se cumple la segunda fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\partial\Omega.$$

Las fórmulas de Green permiten dar la definición de solución débil y deducir la llamada condición de compatibilidad (2.6), la cual nos garantiza la existencia y unicidad del problema de contorno (2.1)-(2.5); dicha condición es considerada en el Capítulo 2.

1.5. Potenciales de superficie

Los potenciales de superficie representan una herramienta fundamental para el estudio de la solubilidad de problemas de contorno asociados a la ecuación de Laplace. En particular, estos potenciales de superficie se utilizan en la demostración de la existencia y unicidad de la solución clásica del problema de contorno (2.1)-(2.5), el cual se utiliza para establecer correlaciones entre las fuentes bioeléctricas definidas sobre la superficie de la corteza cerebral y el EEG sobre el cuero cabelludo. Estos resultados se encuentran en el Teorema (11) y es un resultado original de este trabajo y se encuentra publicado en [38].

Definición 3 Dadas las funciones $\rho, \mu \in C(\partial\Omega)$, las funciones:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \rho(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega, \quad (1.4)$$

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega, \quad (1.5)$$

donde $\Phi(x, y)$ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace y $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ denota la derivada normal de Φ , son llamadas potencial de capa simple y capa doble con densidades ρ y μ respectivamente.

Es conocido que tanto el potencial de capa simple como el potencial de capa doble, son soluciones de la ecuación de Laplace, es decir, representan funciones armónicas en Ω y en $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ para cualquier par de densidades ρ y μ que sean continuas sobre $\partial\Omega$.

De la definición de estas funciones, notamos que para los puntos x sobre $\partial\Omega$ las integrales llegan a ser singulares, lo cual da lugar a las fórmulas de salto de las cuales se habla más adelante. El material de esta sección puede consultarse en ([31], [67]).

1.6. Espacios de Sobolev

Para el estudio del problema de identificación de fuentes desarrollado en este trabajo, se utilizan fuertemente los llamados espacios de Sobolev. A continuación

se dan algunos elementos básicos antes de dar su definición.

Para cada subconjunto Ω abierto y acotado del espacio euclidiano \mathbb{R}^n , consideremos las siguientes clases de funciones:

$C(\bar{\Omega})$: Funciones complejas y continuas definidas sobre $\bar{\Omega}$.

$C^m(\bar{\Omega})$: Funciones complejas, con derivadas continuas sobre Ω hasta el orden m , todas las cuales pueden ser prolongadas continuamente a $\bar{\Omega}$ ($1 \leq m \leq \infty$).

El soporte de una función f definida sobre Ω y con valores en \mathbb{C} es el complemento en Ω del mayor subconjunto abierto donde f se anula. Esto es, para $f \in \Omega$ el soporte de f es la cerradura en Ω del $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ y se denota con $\text{supp} f$.

Con $C_0(\Omega)$ denotamos al subconjunto de aquellas funciones en Ω con soporte compacto contenido en Ω . Similarmente:

$$\begin{aligned} C_0^m(\Omega) &= C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega), m \geq 1 \text{ y} \\ C_0^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega). \\ &= \{f \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } f \text{ es compacto y está contenido en } \Omega\} \end{aligned}$$

Si $f : A \rightarrow B$ y $C \subset A$, denotamos con $f|_C$ la restricción de f a C . Mediante $L_p(\Omega)$ denotaremos la clase de todas las funciones complejas medibles $u(x)$ definidas sobre Ω tales que:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

Es conocido que la aplicación [36]

$$|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

es una norma en $L_p(\Omega)$ que provee a este conjunto de funciones de una estructura de espacio de Banach.

Una función medible $u(x)$ definida sobre Ω se llama localmente sumable en Ω si para cualquier abierto Ω_1 tal que $\bar{\Omega}_1 \supset \Omega$, se cumple que

$$\int_{\Omega_1} |u(x)| dx < \infty.$$

En general se dice que $u(x)$ es localmente sumable en $L_p(\Omega)$ (en símbolos, $u(x) \in L_{p,loc}(\Omega)$), si para cualquier abierto Ω_1 tal que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, se cumple que la restricción de u a Ω_1 pertenece a $L_p(\Omega_1)$.

Diremos que la frontera $\partial\Omega$ de la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ pertenece a la clase C^k ($k \geq 1$), si para cualquier punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe una vecindad $V(x_0)$ de x_0 y un homeomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow V(x_0) \cap \partial\Omega,$$

tal que $f \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$.

Diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto con frontera regular o suave, si $\partial\Omega$ es una variedad de clase C^∞ y dimensión $n - 1$ y además Ω es una variedad orientable.

Para los abiertos Ω con frontera $\partial\Omega$ de clase C^k , se cumple la fórmula de Ostrograski-Gauss, que se formula de la forma siguiente. Sea $u_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, funciones pertenecientes a la clase $C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in C^k$ ($k \geq 1$) y $m = (m_1, \dots, m_n)$ el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

Entonces

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n u_j m_j ds,$$

donde ds denota el elemento de área en $\partial\Omega$. Esta fórmula también se escribe en la forma reducida

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot m ds,$$

donde $u = (u_1, \dots, u_n)$ y el símbolo $u \cdot m$ representa el producto escalar de vectores en \mathbb{R}^n .

Sean $w, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Poniendo

$$u_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq r, \\ wv & \text{si } j = r, \end{cases}$$

en la fórmula de Ostrogradski-Gauss, se obtiene la siguiente relación de integración por partes

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_r} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_r} dx + \int_{\partial\Omega} w v m_r ds. \quad (1.6)$$

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de enteros no negativos con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, denotamos con D^α la derivada parcial:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

A continuación se da la definición de los llamados espacios de Sobolev que son subespacios de $L_2(\Omega)$ y que juegan un papel importante en la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales. En particular, son fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Definición 4 Se llama Espacio de Sobolev de orden k con $k \in \mathbb{N}$ y se denota por $H^k(\Omega)$ al completamiento del espacio lineal $C^k(\overline{\Omega})$, provisto de la norma

$$\|\varphi\|_{2,k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Utilizaremos las notaciones

$$D^0\varphi = \varphi, \quad H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

$H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para cada k . En particular, $H^1(\Omega)$ es muy importante para el estudio que se realiza en este trabajo.

Si una función $u(x)$ pertenece a la clase $C^1(\bar{\Omega})$, entonces por la fórmula de integración por partes (1.6), tenemos

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx,$$

para cualquier función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si $u(x) \in C^k(\bar{\Omega})$, entonces aplicando la fórmula de integración por partes k veces obtendremos

$$\int_{\Omega} \varphi(x) D^\alpha u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx,$$

para cualquier función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Es natural utilizar esta última igualdad como base para la definición de la derivada en sentido de Sobolev $D^\alpha u$ de la función u .

Definición 5 (*Derivada en sentido de Sobolev para funciones localmente sumables*) La función $v(x)$ localmente sumable en Ω se llama α -ésima derivada en sentido de Sobolev de la función localmente sumable $u(x)$ en Ω y se denota por $v = D^\alpha u$, si para cualquier función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se satisface la igualdad

$$\int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx. \quad (1.7)$$

La función $v(x)$ que satisface la relación (1.7) es única y la demostración de este hecho puede consultarse en ([18]). De la definición dada vemos que si $u(x) \in C^k(\bar{\Omega})$, entonces $u(x)$ posee en Ω derivadas en sentido de Sobolev hasta el orden k que coinciden con sus derivadas en sentido usual ([18], [36]). Sin embargo, hay funciones para las cuales existe la derivada en sentido de Sobolev sin ser derivables en el sentido usual. Notemos también que, a diferencia de la definición clásica de derivadas, la derivada en sentido de Sobolev $D^\alpha u$ de orden α se define por la igualdad (1.7), independientemente de las derivadas generalizadas de orden inferior.

A continuación se enuncian los siguientes teoremas relativos a las propiedades de los espacios de Sobolev. Al final de cada teorema se da la referencia para consultar su demostración.

Teorema 3 *Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y $m \geq 0$. Entonces $f \in H^m(\Omega)$ si y sólo si existe una sucesión f_n en $C^m(\bar{\Omega})$ tal que, para cada α con $|\alpha| \leq m$, la sucesión D_n^α es de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$. En este caso tenemos que $D^\alpha f_n \rightarrow D^\alpha f$ en $L^2(\Omega)$ ([65]).*

Corolario 1 $H^m(\Omega) \subset H^k(G) \subset L^2(\Omega)$ cuando $m \geq k \geq 0$ y si $f \in H^m(\Omega)$ entonces $D^\alpha f \in L^2(G)$ para toda $|\alpha| \leq m$ ([65]).

Teorema 4 (Densidad de $C^\infty(\bar{\Omega})$ en $H^m(\Omega)$). Supongamos que la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω pertenece a la clase C^m . El conjunto de funciones de clase $C^\infty(\bar{\Omega})$ y por tanto $C^m(\bar{\Omega})$ es siempre denso en el espacio $H^m(\Omega)$ ([36]).

El teorema siguiente nos muestra una útil caracterización de los espacios $H^k(\Omega)$ mediante la noción de derivada en sentido de Sobolev.

Teorema 5 Para todo $k \in \mathbb{N}$, $H^k(\Omega)$ está constituido por todas las funciones $\psi \in L^2(\Omega)$ para las cuales existen las derivadas en sentido generalizado de orden $|\alpha|$ de ψ , y pertenecen a $L^2(\Omega)$ para todo $\|\alpha\| \leq k$ ([18]).

Teorema 6 (Compacidad de la inmersión entre espacios de Sobolev). Sea Ω una región acotada de \mathbb{R}^n con frontera regular y $k_1 > k_2 \geq 0$. Entonces la inmersión $H^{k_1}(\Omega) \rightarrow H^{k_2}(\Omega)$, es compacta, es decir, todo conjunto acotado en $H^{k_1}(\Omega)$ es relativamente compacto en $H^{k_2}(\Omega)$ ([18]).

Corolario 2 (Regularidad de las funciones de $H^k(\Omega)$). Supongamos que Ω es una región acotada de \mathbb{R}^n con frontera regular y que $k > n/2 + m$, m entero, $m > 0$. Entonces tiene lugar la inclusión: $H^k(\Omega) \subseteq C^m(\bar{\Omega})$. Además la inmersión $H^k(\Omega) \rightarrow C^m(\bar{\Omega})$ es compacta si se considera en $C^m(\bar{\Omega})$ la norma $\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_\infty$ ([18]).

1.7. Traza de funciones

En esta sección se dan los elementos básicos para definir la traza de una función de $H^1(\Omega)$ a la frontera de la región que es, precisamente, la extensión del concepto de restricción de una función. Esto permite que podamos relacionar a las fuentes con la traza a la frontera de la región Ω de la solución del problema de contorno (2.1)-(2.5) pues esta traza será identificada con la medición (EEG).

Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n , una superficie $n - 1$ dimensional S puede ser por ejemplo un plano en \mathbb{R}^3 intersectado con Ω , una línea en \mathbb{R}^2 intersectado con Ω , $S = \partial\Omega$. Llamaremos traza $f|_S$ de la función f de $C(\bar{\Omega})$ sobre una superficie $n - 1$ dimensional S al valor que toma en esta superficie una función continua en $\bar{\Omega}$ la cual casi siempre coincide con f (es decir, por traza de una función continua en S entenderemos su valor extendido unívocamente según la continuidad en S), en este caso, la igualdad de funciones se entiende, como la igualdad en casi todo punto en el sentido de la medida $(n - 1)$ dimensional.

El concepto de traza de una función en S se puede introducir también para las funciones pertenecientes a algunos espacios provistos de normas integrales, en particular, para las funciones de los espacios $H^m(\Omega)$ cuando $m \geq 1$. Puesto que todos

los $H^m(\Omega)$, para $m \geq 1$, están contenidos en $H^1(\Omega)$, es suficiente introducir este concepto para las funciones de $H^1(\Omega)$.

Sea $f \in H^1(\Omega)$, del Teorema (3) ([36]), se deduce que existe una sucesión de funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ de $C^1(\bar{\Omega})$ que converge en la norma de $H^1(\Omega)$ hacia f . Para las funciones $f_n - f_m$, se cumple la desigualdad

$$\|f_n - f_m\|_{L^2(S)} \leq C \|f_n - f_m\|_{H^1(\Omega)},$$

como $\|f_n - f_m\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, también $\|f_n - f_m\|_{L^2(S)} \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$. Esto significa que la sucesión de las trazas de las funciones f_n en S es de Cauchy en $L^2(S)$. En vista de que $L^2(S)$ es completo, existe una función $f_S(x) \in L^2(S)$ tal que hacia ella converge la sucesión de las trazas $f_n|_S$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pasando en la ecuación anterior al límite, obtenemos

$$\|f_n - f_S\|_{L^2(S)} \leq C \|f_n - f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Veamos que la función $f_S(x)$ no depende de cómo se elige la sucesión $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, que en la norma de $H^1(\Omega)$ aproxima la función $f(x)$. En efecto, sea \tilde{f}_n , $n = 1, 2, \dots$, otra sucesión de funciones en $C^1(\bar{\Omega})$ para la cual $\|f - \tilde{f}_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y sea $\tilde{f}_S(x)$ el límite en la norma de $L^2(S)$ para la sucesión $\tilde{f}_n|_S$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces, de las desigualdades anteriores

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_S - f_S\|_{L^2(S)} &\leq \|f_S - f_q\|_{L^2(S)} + \|\tilde{f}_q - f_q\|_{L^2(S)} + \|\tilde{f}_S - \tilde{f}_q\|_{L^2(S)} \leq \\ &C \|f_q - f\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{f}_q - \tilde{f}_S\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Puesto que en el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero cuando $q \rightarrow \infty$, resulta que $f_S = \tilde{f}_S$.

Definición 6 La función $f_S(x)$ (como elemento de $L^2(S)$) se llama traza de la función $f(x)$ en $H^1(\Omega)$ en la superficie S y la designaremos por el símbolo $f|_S$ ($\|f|_S\|_{L^2(S)}$ la designaremos mediante $\|f\|_{L^2(S)}$).

Este concepto es realmente una generalización del concepto del valor de una función en una superficie $n - 1$ dimensional, es decir, la restricción de una función f a una superficie S .

Teorema 7 Si la función f pertenece tanto a $C(\bar{\Omega})$ como a $H^1(\Omega)$, su traza, como la traza de una función de $C(\bar{\Omega})$, y su traza, como la traza de una función de $H^1(\Omega)$, coinciden ([36]).

Denotemos por $H_0^m(\Omega)$ la cerradura en $H^m(\Omega)$ de $C_0^\infty(\Omega)$. Generalmente, $H_0^m(\Omega)$ es un subespacio propio de $H^m(\Omega)$.

Teorema 8 Sea Ω un subconjunto abierto acotado en R^n que cae sobre un lado de su frontera, $\partial\Omega$, la cual asumimos que es de clase C^1 . Entonces existe una única función lineal y continua $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ tal que para cada $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\gamma_0(u)$ es la restricción de u a $\partial\Omega$. El kernel de γ_0 es $H_0^1(\Omega)$ y su rango es denso en $L_2(\partial\Omega)$ ([65]).

1.8. Operadores compactos y autoadjuntos

Un operador lineal entre espacios normados E y F es una aplicación $T : E \rightarrow F$ tal que: $T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u) \forall u, v \in E$ y $\forall \alpha, \beta \in K$, donde K es un campo (\mathbb{C} o \mathbb{R}).

Para un operador lineal $T : E \rightarrow F$ son equivalentes:

1. T es continuo.
2. T es continuo en un punto.
3. T es continuo en cero.
4. Existe una constante $M > 0$ tal que: $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.
5. T es acotado (T transforma conjuntos acotados de E en acotados de F).
6. $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < \infty$.

Denotamos por $L(E, F)$ al conjunto de operadores lineales y continuos de E en F . Si $T \in L(E, F)$ entonces el número $\|T\|$ es una norma en $L(E, F)$ y el espacio normado así obtenido resulta ser completo si F lo es.

Sea A un operador que actúa de un espacio de Banach X en si mismo. Definimos el conjunto resolvente de A como:

$$R(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe en todo } X \text{ y es continuo}\}.$$

Llamamos espectro $\sigma(A)$ del operador A al conjunto $\mathbb{C} \setminus R(A)$, es decir, el espectro de un operador es el complemento en \mathbb{C} de su conjunto resolvente:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ no existe o existe pero no es continuo}\}.$$

El espectro de un operador continuo A es un conjunto compacto no vacío de \mathbb{C} . Un subconjunto importante del espectro $\sigma(A)$ del operador A es

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ no es inyectivo}\}.$$

A los elementos de $\sigma_p(A)$ se le llama valores propios de A .

Definición 7 Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador entre dos espacios de Banach. Diremos que A es un operador compacto o totalmente continuo si transforma cada subconjunto acotado B de X en un subconjunto relativamente compacto de Y .

De la definición se obtiene que todo operador compacto T es también continuo. Como Y es un espacio métrico, el operador T es compacto si y sólo si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en X la sucesión $\{T(x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente en Y .

El conjunto $K(X, Y)$ formado por todos los operadores compactos de X en Y es

un subespacio cerrado de $L(X, Y)$.

En un espacio normado X de dimensión infinita el operador identidad I no es un operador compacto. Como la composición de un operador compacto y un operador continuo es siempre un operador compacto se tiene que en un espacio normado de dimensión infinita un operador compacto no puede tener un inverso acotado.

Teorema 9 *El espectro de un operador compacto contiene a lo sumo un conjunto numerable de puntos que no tienen puntos de acumulación excepto posiblemente el punto $\lambda = 0$ que en ese caso también pertenece al espectro. Cada punto distinto del cero es un valor propio.*

Sea H un espacio de Hilbert y A un operador continuo de H en sí mismo. Se define el operador adjunto (conjugado) de A , denotado por A^* , como el operador que actúa de H en sí mismo y además satisface la identidad: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ para todo $x, y \in H$. A se llama autoadjunto si $A^* = A$.

Teorema 10 (Hilbert-Schmidt). *Para cualquier operador lineal autoadjunto y compacto A en un espacio de Hilbert H , existe un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ de vectores propios correspondientes a sus valores propios $\{\lambda_n\}$ tal que cada elemento ξ del espacio se puede escribir de manera única en la forma*

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi',$$

donde el vector ξ' verifica la condición $A(\xi') = 0$,

$$A(\xi) = \sum \lambda_k c_k \varphi_k,$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Un tipo importante de operadores compactos en el espacio de $L^2(\Omega)$ son los llamados operadores integrales de Hilbert-Schmidt. Estos operadores actúan en la forma:

$$A(\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \varphi(y) dy, \quad (1.8)$$

donde el núcleo $K(x, y)$ satisface: $\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 < \infty$ (Ω es un dominio finito en \mathbb{R}^m).

El operador conjugado A^* de A es también un operador integral con el núcleo $K^*(x, y) = \overline{K(x, y)}$.

Otro tipo importante de operador compacto en $L^2(\Omega)$ son los operadores con singularidades débiles. Se definen tales operadores a continuación.

Sea Ω un dominio finito de un espacio m -dimensional y $K(x, y)$ un kernel definido en $\Omega \times \Omega$.

Definición 8 El kernel $K(x, y)$ es llamado un kernel con singularidad débil si existe una constante α , $0 \leq \alpha \leq m$ tal que el producto $r^\alpha K(x, y)$ es continuo. Por lo tanto, un kernel con singularidad débil puede ser representado en la forma

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{r^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq m,$$

donde $A(x, y)$ es una función continua. Si $K(x, y)$ es un kernel con singularidad débil, entonces el operador A definido en (1.8) se llama operador integral débilmente singular.

Sea Ω acotada con frontera de clase C^2 . Entonces el operador integral débilmente singular (1.8) es compacto en $C(\overline{\Omega})$. Muchos problemas en las aplicaciones se reducen al estudio de ecuaciones del tipo:

$$x - A(x) = y,$$

donde A es un operador compacto, x, y pertenecen a un espacio de Hilbert. El análisis de la solución de esta ecuación conduce a los teoremas de alternativa de Fredholm. Establezcamos explícitamente estos resultados.

Para ello consideramos además, la ecuación homogénea asociada

$$x - Ax = 0, \tag{1.9}$$

y las correspondientes ecuaciones para el operador conjugado:

$$\mu - A^* \mu = v, \tag{1.10}$$

$$\mu - A^* \mu = 0. \tag{1.11}$$

Se tienen los siguientes resultados que son conocidos como Teoremas alternativos de Fredholm:

1. Cuando $\lambda = 1$ es el valor propio del operador A , la ecuación no homogénea (1.8) tiene solución si y sólo si el miembro derecho es ortogonal a toda solución de la ecuación homogénea conjugada (1.11).
2. Si $\lambda = 1$ no es un valor propio del operador A , entonces la ecuación (1.8) tiene solución única para cualquiera que sea $y \in H$ la cual depende continuamente de y .
3. Las ecuaciones homogéneas (1.9) y (1.11) tienen el mismo número, además finito, de soluciones lineales independientes.

El material de esta sección puede consultarse en [17], [31].

Capítulo 2

Problema de identificación para una fuente ubicada en la corteza cerebral

A partir de los conceptos descritos en el Capítulo 1, se sabe que la corteza cerebral tiene un pequeño volumen, por lo que se pueden plantear tres modelos matemáticos para la ubicación de la fuente, a saber, cuando la fuente se encuentra sobre la superficie de la corteza cerebral, cuando la fuente se ubica en el volumen de la corteza cerebral y cuando está tanto en el volumen como en la corteza cerebral. En este capítulo se desarrolla el caso de la fuente ubicada en la corteza cerebral.

2.1. Modelo matemático para fuentes sobre la corteza cerebral

En el caso en que sólo se consideren fuentes en la superficie de la corteza cerebral, la presencia de dichas fuentes se refleja sobre la condición de frontera asociada al flujo de las corrientes normales, en este caso la fuente aparece como un salto en el flujo de las componentes normales de la corriente. Si denotamos por g a la densidad de corriente cortical, entonces el problema de estudio es

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1, \quad (2.1)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \quad (2.2)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad S_1, \quad (2.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g \quad \text{sobre} \quad S_1, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre} \quad S_2, \quad (2.5)$$

donde $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$ representa a la cabeza, Ω_1 el cerebro, Ω_2 el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 respectivamente, las cuales se suponen constantes en cada región, g es la fuente, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ y u representa el potencial eléctrico en Ω , el símbolo Δ representa el operador laplaciano. Las condiciones de frontera (2.3)-(2.4) corresponden a la continuidad del potencial y a la condición de salto de la componentes normales de la corriente; la condición de frontera (2.5), se obtiene al considerar que la conductividad de Ω^c es cero (la conductividad del aire). S_1 representa la superficie de la corteza cerebral, S_2 el cuero cabelludo y g definida sobre la interfaz S_1 que separa a las región Ω_1 y Ω_2 . La fuente g representa a la actividad biológica de conglomerados de neuronas que se activan en la corteza cerebral. En particular, puede representar la actividad debida a una crisis epiléptica, a un foco epiléptico o la activación de un proceso cognitivo. Cabe señalar que para el análisis de existencia y unicidad de solución del problema (2.1)- (2.5) se debe cumplir la siguiente condición:

$$\int_{S_1} g(x)dx = 0. \quad (2.6)$$

A (2.6) se le conoce como condición de compatibilidad y se obtiene de las fórmulas de Green.

Al problema de contorno (2.1)-(2.5) se le llamará **Problema de Contorno Superficial (PCS)**. Este problema ha sido estudiado en [37], [40], [48], [46], [20], [21], [45], [19]. A continuación se presentan dos definiciones que son fundamentales para el desarrollo de este capítulo.

Definición 9 *Dada g sobre S_1 , el problema directo asociado al PCS consiste en hallar la medición $v = u|_{S_2}$, donde u es la solución del PCS.*

Definición 10 *Dada una función v definida en S_2 , el problema inverso consiste en determinar una fuente g definida sobre S_1 de forma que la solución u del problema directo correspondiente a g satisfaga $u|_{S_2} = v$.*

2.2. Solución clásica del PCS

Una función u tal que

$$u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^1(\overline{\Omega_1}) \cap C^1(\overline{\Omega_2})$$

es solución clásica del problema (2.1)-(2.5), si se satisfacen las relaciones en el sentido clásico de diferenciación.

Teorema 11 *Dada $g \in C(S_1)$, la condición de compatibilidad (2.6), es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad (salvo constantes) de la solución clásica del problema (2.1)-(2.5).*

Demostración (existencia y unicidad de la solución clásica).

Se propone la solución como una suma de potenciales de capa simple

$$u(x) = \int_{S_1} \rho_1(y) \Phi(x, y) dy + \int_{S_2} \rho_2(y) \Phi(x, y) dy, \quad (2.7)$$

donde ρ_1 y ρ_2 son densidades definidas en S_1 y S_2 respectivamente y

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|},$$

es la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

Consideremos la condición de frontera sobre S_1 correspondiente al flujo de corriente

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \quad (2.8)$$

sustituyendo la expresión (2.7) en (2.8) y considerando que la derivada normal de Φ es calculada con respecto a la variable x [31], se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \left\{ -\frac{1}{2} \rho_1(x) + V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy + \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \right\} = \\ & \sigma_2 \left\{ \frac{1}{2} \rho_1(x) + V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy + \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \right\} + g, \end{aligned}$$

donde $V.P$ denota el valor principal de Cauchy. Para la igualdad anterior se considera el vector unitario normal dirigido hacia el interior en el caso de S_1 y se considera al vector unitario exterior a S_2 .

Desarrollando las expresiones tenemos

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 + \sigma_2) \rho_1(x) + 2(\sigma_2 - \sigma_1) V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \\ & + 2(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy = 2g. \end{aligned}$$

Dividiendo entre $(\sigma_1 + \sigma_2)$ hallamos

$$\begin{aligned} & \rho_1(x) + \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \\ & + \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy = 2g. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se definen los siguientes operadores

$$\begin{aligned} & K_{11} : C(S_1) \rightarrow C(S_1) \\ & \rho_1(x) \rightarrow \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy, \end{aligned}$$

$$K_{12} : C(S_2) \rightarrow C(S_1)$$

$$\rho_2(x) \rightarrow \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy,$$

que permiten que la ecuación (2.9) se escriba en la forma

$$\rho_1(x) + K_{11}(\rho_1)(x) + K_{12}(\rho_2)(x) = 2g.$$

Pasemos ahora a la condición $\frac{\partial u}{\partial n_2} = 0$ en S_2 . Haciendo un análisis similar al anterior obtenemos

$$\frac{1}{2}\rho_2(x) + V.P. \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy + \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy = 0, \quad (2.10)$$

donde $V.P.$ denota el valor principal de Cauchy. Se definen los operadores

$$K_{21} : C(S_1) \rightarrow C(S_2),$$

$$\rho_1 \rightarrow 2 \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy = 0.$$

$$K_{22} : C(S_2) \rightarrow C(S_2),$$

$$\rho_2 \rightarrow 2V.P. \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy = 0.$$

Con esta notación, (2.10) se expresa en la forma:

$$\rho_2(x) + K_{21}(\rho_1)(x) + K_{22}(\rho_2)(x) = 0.$$

Así, el sistema se escribe en la forma

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual nos lleva a

$$(I + K) \vec{\rho} = \vec{g}, \quad (2.11)$$

donde

$$I : C(S_1) \times C(S_2) \rightarrow C(S_1) \times C(S_2),$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix},$$

es el operador identidad actuando sobre

$$C(S_1) \times C(S_2), \quad \vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (2.11) es una ecuación de Fredholm de la segunda especie actuando sobre el espacio de Banach $C(S_1) \times C(S_2)$, provisto de la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right\|_{1,2} := \max\{\|\rho_1\|_{C(S_1)}, \|\rho_2\|_{C(S_2)}\},$$

con lo cual el operador matricial

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

es compacto. Note que los operadores K_{ij} , $i, j = 1, 2$ son compactos de $C(S_j)$ en $C(S_i)$ considerando estos espacios con la norma del supremo, las cuales estamos considerando en la norma $\|\cdot\|_{1,2}$. Probemos la compacidad de K . Sea B un conjunto acotado en $C(S_1) \times C(S_2)$. Debemos demostrar que $K(B)$ es relativamente compacto en $C(S_1) \times C(S_2)$.

Como B es acotado, existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right\|_{1,2} \leq M.$$

Esto significa que para cada par $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \in B$.

$$\begin{aligned} \|\rho_1\|_{C(S_1)} &\leq M, \\ \|\rho_2\|_{C(S_2)} &\leq M, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \max_{S_1} |\rho_1|_{C(S_1)} &\leq M, \\ \max_{S_2} |\rho_2|_{C(S_2)} &\leq M. \end{aligned}$$

Sea $\begin{pmatrix} \rho_1^n \\ \rho_2^n \end{pmatrix}$ una sucesión acotada. Se debe demostrar que

$$\begin{pmatrix} K_{11}\rho_1^n & K_{12}\rho_2^n \\ K_{21}\rho_1^n & K_{22}\rho_2^n \end{pmatrix}$$

tiene una subsucesión convergente. Como K_{11} es compacto de $C(S_1)$ en $C(S_1)$, existe una subsucesión de ρ_1^n que converge, que será denotada por $\rho_1^{n_k}$. Similarmente K_{12} es compacto de $C(S_2)$ en $C(S_1)$ y, por lo tanto existe una subsucesión de $\rho_2^{n_j}$ de ρ_2^n que converge. De la misma forma existen otras subsucesiones de ρ_1^n y ρ_2^n que tienen subsucesiones convergentes para los operadores $K_{i,j}$, $i, j = 1, 2$. Para ver esto tomemos de la sucesión $\rho_2^{n_k}$ una subsucesión $\rho_1^{n_j}$ tal que $K_{21}(\rho_1^{n_j})$ converja.

Siguiendo el mismo procedimiento podemos hallar una subsucesión n_i de n_j tal que $K_{12}(\rho_2^{n_j})$ y $K_{22}(\rho_2^{n_j})$ converjan. De esta forma hemos probado que el operador K es compacto. Podemos entonces aplicar el teorema de alternativa de Fredholm en sistemas duales.

Consideremos la siguiente forma bilineal no degenerada sobre $(C(S_1) \times C(S_2)) \times (C(S_1) \times C(S_2))$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S_1} \rho_1(x) \tilde{\rho}_1(x) dx + \int_{S_2} \rho_2(x) \tilde{\rho}_2(x) dx.$$

La forma bilineal es no degenerada. Para ver esto tenemos que probar que para cada $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \in (C(S_1) \times C(S_2))$ con $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \neq 0$, existe $\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \in (C(S_1) \times C(S_2))$ tal que

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \neq 0. \quad (2.12)$$

La forma bilineal actúa sobre el producto de $(C(S_1) \times C(S_2))$ consigo mismo. Sea $0 \neq \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \in (C(S_1) \times C(S_2))$. Tenemos $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S_1} \rho_1^2(x) dx + \int_{S_2} \rho_2^2(x) dx \neq 0,$$

ya que $\rho_1 \neq 0$ o $\rho_2 \neq 0$.

Denotemos por $X = (C(S_1) \times C(S_2))$, $\langle X, X \rangle$ forma un sistema dual con respecto a la forma bilineal no degenerada definida arriba. Para poder aplicar los teoremas de alternativa en sistemas duales necesitamos calcular el adjunto K^* de K con respecto al sistema dual $\langle X, X \rangle$. Como

$$K : X \rightarrow X,$$

para el operador adjunto se tiene

$$K^* : X \rightarrow X.$$

Procedemos por el cálculo directo

$$\begin{aligned} \left\langle K \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} K_{11}\rho_1 + K_{12}\rho_2 \\ K_{21}\rho_1 + K_{22}\rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{S_1} K_{11}\rho_1(x) \tilde{\rho}_1(x) dx + \int_{S_1} K_{12}\rho_2(x) \tilde{\rho}_1(x) dx \\ &\quad + \int_{S_2} K_{21}\rho_1(x) \tilde{\rho}_2(x) dx + \int_{S_2} K_{22}\rho_2(x) \tilde{\rho}_2(x) dx. \end{aligned}$$

Analicemos cada una de las integrales por separado

$$\begin{aligned} \int_{S_1} K_{11}\rho_1(x)\tilde{\rho}_1(x)dx &= \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \left[\frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} V.P \int_{S_1} \rho_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{S_1} \rho_1(y) \left[\frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} V.P \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(y, x) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Así $K_{11}^*(\tilde{\rho}_1)(y) = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} V.P \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(y, x) dx$, $y \in S_1$.

Pasemos a la segunda integral

$$\begin{aligned} \int_{S_1} K_{12}\rho_2(x)\tilde{\rho}_1(x)dx &= \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \left[\frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} \int_{S_2} \rho_2(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{S_2} \rho_2(y) \left[\frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(y, x) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Así $K_{12}^*(\tilde{\rho}_1)(y) = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} \int_{S_1} \tilde{\rho}_1(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \Phi(y, x) dx$, $y \in S_2$.

Para el caso de los operadores K_{21} y K_{22} , siguiendo un análisis similar al anterior hallamos que los operadores adjuntos K_{21}^* y K_{22}^* están dados por:

$$\begin{aligned} K_{21}^* : C(S_2) &\rightarrow C(S_1) \\ \tilde{\rho}_2 &\rightarrow 2 \int_{S_2} \tilde{\rho}_2(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(y, x) dy, \quad x \in S_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K_{22}^* : C(S_2) &\rightarrow C(S_2) \\ \tilde{\rho}_2 &\rightarrow 2V.P \int_{S_2} \tilde{\rho}_2(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(y, x) dy, \quad x \in S_2. \end{aligned}$$

Así

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Los teoremas de alternativa de Fredholm en espacios duales garantizan que el sistema $(I + K)\vec{\rho} = \vec{\Psi}$ tiene solución si y sólo si

$$\left\langle \vec{\Psi}, \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

para $\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix}$ soluciones del sistema homogéneo adjunto

$$(1 + K^*) \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hallemos las soluciones de la ecuación anterior. Antes de ello, nótese que, por el primer teorema de alternativa de Fredholm, el espacio de soluciones tiene dimensión uno ya que esa es la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación homogénea

$$(I + K)\vec{\rho} = 0,$$

lo cual se deduce del hecho de que sus soluciones son constantes. Así, basta hallar una solución particular diferente de cero, para hallar el núcleo de $(I + K^*)$.

Tenemos $\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ un vector constante. Veamos para qué valores de C_1 y C_2 este vector constante es solución de

$$(I + K^*) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K_{11}^*(C_1)(x) + K_{21}^*(C_2)(x) + C_1 = 0 \quad x \in S_1,$$

$$K_{12}^*(C_1)(x) + K_{22}^*(C_2)(x) + C_2 = 0 \quad x \in S_2,$$

$$\begin{aligned} K_{11}^*(C_1)(x) &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 + \sigma_1} C_1, \\ K_{21}^*(C_2)(x) &= C_2, \\ K_{12}^*(C_1)(x) &= 0, \\ K_{22}^*(C_2)(x) &= -C_2. \end{aligned}$$

De esta forma hallamos

$$C_2 = \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} - 1 \right] C_1 = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} C_1.$$

Tomemos $C_1 = 1$. Así $C_2 = -\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$.

La solución particular es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{pmatrix}.$$

La prueba para el caso tridimensional es similar, considerando la solución fundamental para este caso, lo cual está dada por $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$.

2.3. Solución débil del PCS

Consideremos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ formado por las funciones de $L_2(\Omega)$ que tienen derivada débil y que pertenece a $L_2(\Omega)$. Se tiene la siguiente

Definición 11 Dada $g \in L_2(S_1)$, que satisface la condición (2.6), a la función $u \in H^1(\Omega)$, se le llama solución débil del problema (2.1)-(2.5), si se satisface que

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v d\Omega = \int_{S_1} g v ds,$$

para cada $v \in H^1(\Omega)$.

La demostración del siguiente Teorema sobre la existencia y unicidad de la solución débil puede encontrarse en [19].

Teorema 12 La condición de compatibilidad de la función g es necesaria y suficiente para la existencia de la solución débil del problema (2.1)-(2.5). Hay una única solución débil u que satisface $\int_{\Omega} u(x) dx = \langle u, 1 \rangle_{L_2(\Omega)} = 0$ y además

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_2(S_1)}, \quad (2.13)$$

donde la constante C no depende de g .

2.4. Planteamiento operacional

Se consideran los espacios

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ g \in L_2(S_1) : \int_{S_1} g dS_1 = 0 \right\} = L_2(S_1)/\mathbb{R}, \\ \mathcal{V} &= \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u d\Omega = 0 \right\} = H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \\ \mathcal{W} &= \left\{ v \in L_2(S_2) : \int_{S_2} v dS_2 = 0 \right\} = L_2(S_2)/\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se define el operador $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, definido por $T(g) = u$. La composición del operador continuo T y el operador compacto traza $Tr : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, define el operador compacto $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$, dada por $A = Tr \circ T$, es decir, $A(g) = u|_{S_2}$, el cual es inyectivo, además por la continuidad de T y la compacidad de Tr se tiene que A es compacto. Usando este operador estudiaremos el problema de identificación de fuentes definidas en S_1 a partir del EEG sobre el cuero cabelludo.

El operador inverso A^{-1} no es continuo y conduce a la inestabilidad numérica, el cual es la causa del mal planteamiento del problema. Para manejar la inestabilidad numérica, se considera el método de regularización de Tikhonov.

El siguiente resultado es importante para el análisis del problema presentado en esta sección.

Teorema 13 $Im(A)$ es denso en $L_2(S_2)$.

Ya que A es inyectivo, se tiene que A^* es inyectivo. De la igualdad $\ker(A^*) = 0 = \left[\overline{\text{Im}(A)} \right]^\perp$, se obtiene el resultado.

El problema inverso de la Definición 10 puede ser expresado de la siguiente forma:

Dada una función $V \in \mathcal{W}$ encontrar una fuente $g \in \mathcal{U}$ tal que $A(g) = V$.

2.5. Unicidad de solución para problema inverso del PCS

Teorema 14 *Dada una medición v definida sobre S_2 , si existe una fuente g definida sobre S_1 que satisface la condición de compatibilidad (2.6) y que es solución del problema inverso, entonces esta solución es única.*

Demostración: Supongamos que existen dos fuentes \hat{g} y \tilde{g} que producen los potenciales \hat{u} y \tilde{u} respectivamente y que generan la misma medición v . Sea $u = \hat{u} - \tilde{u}$, se tiene que u es armónica en Ω_2 y que sobre S_2 los datos de Cauchy son nulos, es decir, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ y $u = 0$. Debido a la unicidad de solución de este problema se encuentra que u es cero en Ω_2 . Por continuidad $u = 0$ sobre S_1 y ya que u es armónica en Ω_1 , se halla que u es cero en Ω_1 . Aplicando las condiciones de frontera (2.4) se encuentra que $\hat{g} - \tilde{g} = 0$. Esto concluye la prueba.

2.6. Representación matemática de la fuente en la superficie de la corteza cerebral

Se sabe que en el cerebro la corriente total J se expresa como la suma de dos corrientes

$$J = J^p + \sigma_i E,$$

donde J^p es la corriente primaria o impresa y es debida a la actividad biológica de las neuronas, $\sigma_i E$, $i = 1, 2$, se llama corriente óhmica y es debida a la corriente eléctrica en el medio, donde σ_i representa la conductividad en cada región.

La corriente J^p puede estar concentrada tanto en la corteza como en el volumen cerebral. En las regiones restantes que componen la cabeza sólo puede haber corrientes óhmicas.

Se está interesado en el caso en el que la fuente corresponde a un foco epiléptico ubicado sobre la superficie de la corteza cerebral. La representación matemática

se hará, siguiendo la idea del caso volumétrico, por medio de las funciones generalizadas o distribuciones, [30], [31]. Más precisamente, se considera que un foco epiléptico concentrada en el punto $a \in S_1$ se puede representar en la forma:

$$j^p(x) = \vec{p}\delta(x - a),$$

donde \vec{p} es el momento dipolar, el cual determina la intensidad y orientación del dipolo y $\delta(x - a)$ representa a la distribución delta de Dirac concentrada en a . Así, se propone la representación de la fuente de la siguiente manera:

$$g(x) = j^p(x) \cdot n_1,$$

donde n_1 representa la normal exterior sobre S_1 .

A la función $\delta(x - a)$ se le aproxima mediante la función campana $e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}$, donde a representa el foco epiléptico (activación de un conglomerado de neuronas) y β el ancho de la función campana.

La Figura (2.1) muestra a la corteza cerebral, de donde se puede apreciar tanto la superficie como el volúmen de la corteza cerebral [56].

En lo que sigue, se muestran la solución del problema directo e inverso del pro-

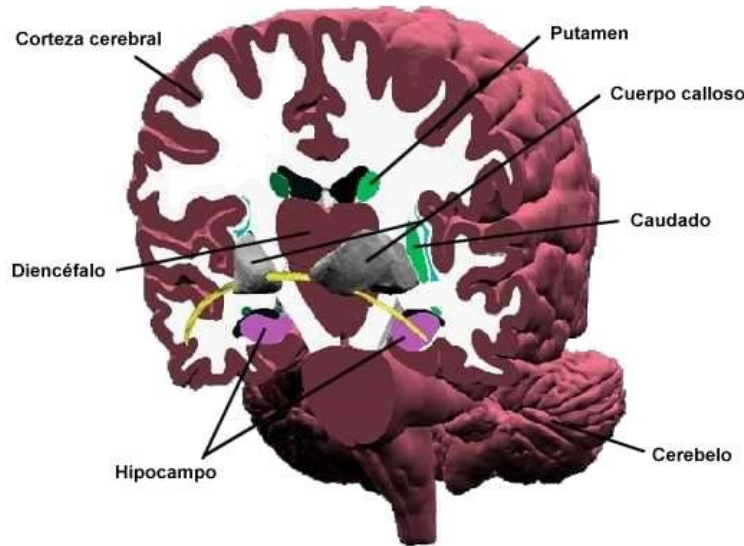


Figura 2.1: Corte del cerebro en donde se puede apreciar a la corteza cerebral.

blema (2.1)-(2.5) en dos y tres dimensiones así como los resultados numéricos.

2.7. Problema de contorno superficial en dos dimensiones

En esta sección se presentan resultados numéricos considerando la solución del problema directo (ver A.4) e inverso (ver A.2) del modelo (2.1)-(2.5).

Tomando la fuente en la forma.

$$g(x) = \vec{\mathbf{p}} f_\beta(x) \cdot n_1,$$

y considerando

$$f_\beta(x) = \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{\int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}},$$

donde $x = (x_1, x_2) = (R_1 \cos \theta, R_1 \sin \theta)$, $a = (a_1, a_2) = (R_1 \cos \theta_0, R_1 \sin \theta_0)$ que representa el centro de la función campana, $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2)$ que representa el momento dipolar y n_1 representa la normal exterior sobre a frontera S_1 que será tomado como $n_1 = (R_1 \cos \theta, R_1 \sin \theta)$ y $\beta > 0$, representa el ancho de la función campana. Así, la fuente $g(x)$ puede aproximarse por

$$g_N(x) = f_\beta(x) \vec{\mathbf{p}} \cdot n_1 - c_\beta,$$

donde c_β es el término constante del desarrollo en series de Fourier de f_β , es decir,

$$c_\beta = \frac{1}{2} \int_{S_1} g(x) dx.$$

Siguiendo el desarrollo que se tiene al inicio del Apéndice A para la solución del problema directo, se sustituye a $g(x, y)$ por $g_N(x, y)$ en el PCS. Los coeficientes de Fourier de $g_N(x, y)$ se calculan utilizando la función `quadl` de MATLAB que calcula integrales utilizando la cuadratura de Lobatto. A continuación se muestran los siguientes resultados: en la Figura (2.2) se tienen las gráficas de la fuente exacta (2.14) y de la fuente aproximada (2.14) con $N = 30$ coeficientes de Fourier. En la Figura (2.3), se muestran la gráficas de la medición (A.11) (que se produce a partir de la fuente) y de la medición con error que se obtiene al agregar un error aleatorio (A.12). La Figura (2.4) muestra la gráfica de la solución regularizada del problema inverso, que se obtiene a partir de la medición con error con lo cual se obtiene la fuente, que fue obtenida por medio del Método de Regularización de Tijonov (A.14). Para los parámetros se tomaron los valores $\beta = \sqrt{0.1}$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $(a_1, a_2) = (0, 1)$, $(p_1, p_2) = (1, 1)$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1.2$, $\delta = 0.1$ y el parámetro de regularización $\alpha(\delta) = 0.001$ [6], [31]. Cabe mencionar que la norma entre la medición exacta y la medición con error es menor que δ .

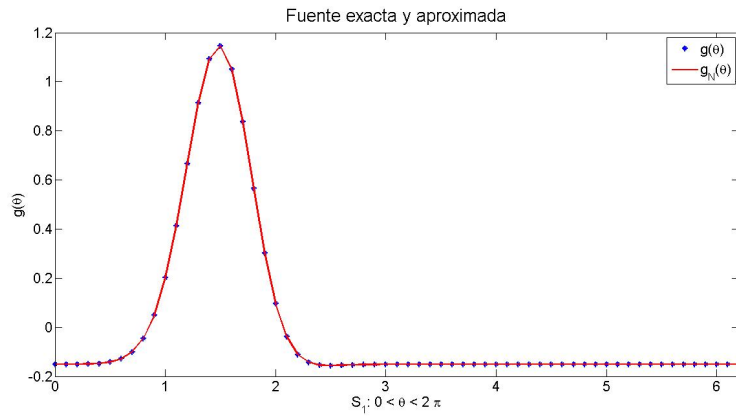


Figura 2.2: Gráfica de la fuente $g(\theta)$ y la fuente aproximada por coeficientes de Fourier $g_N(\theta)$.

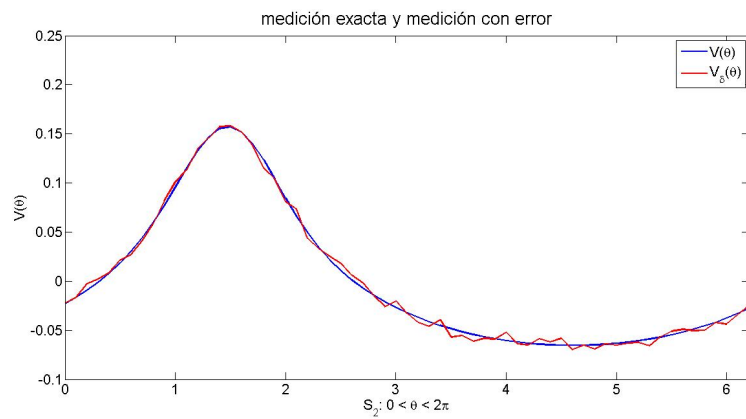


Figura 2.3: Medición sobre todo el cuero cabelludo producida por la fuente y medición con un error aleatorio.

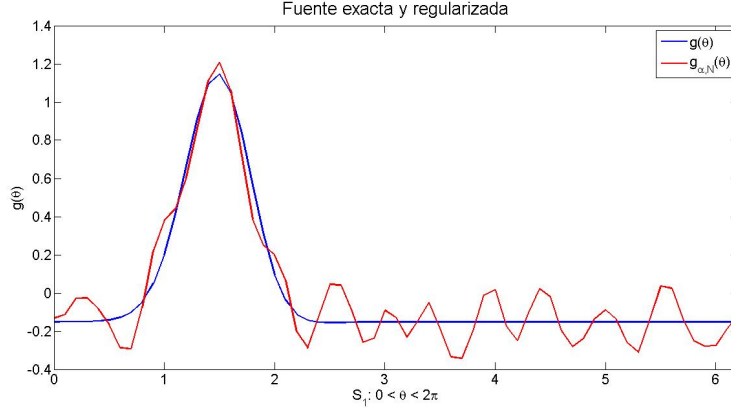


Figura 2.4: Comparación de la fuente exacta y la fuente regularizada que se obtiene a partir de la medición con error.

Para obtener el valor de $a = (a_1, a_2)$ se considera el valor máximo de $g_N(x)$; para este ejemplo $a = 1.6$, entonces $(a_1, a_2) = (\cos 1.6, \sin 1.6) = (-0.0291, 0.9995)$. Recordar que para generar la medición se tomó a $a = (0, 1)$, por lo que se pueden obtener los errores absoluto y relativo de a y de $\vec{\mathbf{p}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 E_R(a_{\alpha(\delta)}, a) &= \|a_{\alpha(\delta)} - a\|_{\mathbb{R}^2} / \|a\|_{\mathbb{R}^2} \\
 E_A(a_{\alpha(\delta)}, a) &= \|a_{\alpha(\delta)} - a\|_{\mathbb{R}^2}, \\
 E_R(V_\delta, V) &= \|V_\delta - V\|_{L_2(S_2)} / \|V\|_{L_2(S_1)}, \\
 E_A(V_\delta, V) &= \|V_\delta - V\|_{L_2(S_2)}, \\
 E_R(\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)}, \vec{\mathbf{p}}) &= \|\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)} - \vec{\mathbf{p}}\|_{\mathbb{R}^2} / \|\vec{\mathbf{p}}\|_{\mathbb{R}^2} \\
 E_A(\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)}, \vec{\mathbf{p}}) &= \|\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)} - \vec{\mathbf{p}}\|_{\mathbb{R}^2}.
 \end{aligned}$$

Como ya se tiene el centro de la función campana, lo que sigue es obtener el momento dipolar a partir de la expresión (A.15). En la Tabla (2.1), se muestran los resultados de $\vec{\mathbf{p}}$, considerando $a = (0, 1)$, $\vec{\mathbf{p}} = (1, 1)$ y distintos valores de δ , donde $\alpha(\delta)$ es el parámetro de regularización de $g_{\alpha(\delta), N}$ y $\alpha_1(\delta)$ es el parámetro de regularización de $\vec{\mathbf{p}}$. En la Tabla (2.2), se muestran los resultados para distintos valores del centro a y del momento dipolar $\vec{\mathbf{p}}$ para el error $\delta = 0.1$

| δ | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|--|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $E_A(V_\delta, V)$ | 0 | 1.1212×10^{-4} | 1.1594×10^{-2} | 1.1637×10^{-2} |
| $E_R(V_\delta, V)$ | 0 | 5.6663×10^{-4} | 5.8590×10^{-2} | 5.8809×10^{-2} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | (-0.029,0.999) | (-0.029,0.999) | (-0.029,0.999) | (-0.029,0.999) |
| $E_A(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} |
| $E_R(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)}$ | (0.985,0.999) | (0.984,0.999) | (0.980,1.000) | (0.883,0.987) |
| $E_A(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.4929×10^{-2} | 1.5120×10^{-2} | 1.9765×10^{-2} | 1.1681×10^{-1} |
| $E_R(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.0556×10^{-2} | 1.0692×10^{-2} | 1.3976×10^{-2} | 8.2597×10^{-2} |

Tabla 2.1: Resultados numéricos considerando el centro $a = (0, 1)$ y diferentes valores de δ con $\vec{\mathbf{p}} = (1, 1)$.

| a | (-1,0) | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | (1,0) |
|--|-------------------------|--|-------------------------|
| $\vec{\mathbf{p}}$ | (1,1) | $(\frac{1}{2}, 2)$ | (2,1) |
| $E_A(V_\delta, V)$ | 9.7065×10^{-2} | 1.8806×10^{-2} | 2.0093×10^{-2} |
| $E_R(V_\delta, V)$ | 4.9057×10^{-2} | 5.3766×10^{-2} | 5.0776×10^{-2} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | (-0.9824,0.1862) | (0.6967,0.7173) | (0.999,0.029) |
| $E_A(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 1.8702×10^{-1} | 1.4601×10^{-2} | 2.9017×10^{-2} |
| $E_R(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 1.8702×10^{-1} | 1.4601×10^{-2} | 2.9017×10^{-2} |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| $\vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)}$ | (0.9913,0.9921) | (0.5765,1.9505) | (2.0119,1.0044) |
| $E_A(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.1751×10^{-2} | 9.1058×10^{-2} | 1.2751×10^{-2} |
| $E_R(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{p}}_{\alpha_1(\delta)})$ | 8.3096×10^{-2} | 4.4169×10^{-2} | 5.7024×10^{-2} |

Tabla 2.2: Resultados numéricos considerando diferentes centros y momentos dipolares para $\delta = 0.1$.

Conclusiones: Se usó un modelo matemático que permite establecer correlaciones entre fuentes y potenciales, en particular se usa una fuente que permita emular un foco epiléptico ubicado en la superficie de la corteza cerebral. Se propone un algoritmo para recuperar a los parámetros de la fuente, ya que al tratarse de una fuente dipolar, ésta caracterizada por ellos. Para ilustrar dicho algoritmo se considera una región no homogénea que se construye con dos círculos concéntricos, la conductividad eléctrica es constante en cada una de las regiones que se forman. Más explícitamente, se considera un foco epiléptico en la superficie de la corteza cerebral, se obtiene la solución del problema directo e inverso en dos dimensiones, se propone la fuente como el momento dipolar multiplicada por una

función campana, a partir de la cual se representan la fuente exacta y la fuente aproximada por sus respectivas series de Fourier cuyos coeficientes se determinan de la medición (sobre todo el cuero cabelludo) con un error, la cual se obtiene al agregar un error aleatorio a la medición teórica. Se muestran resultados de la fuente regularizada y la obtención del momento dipolar conociendo el centro de la campana. En la Tabla (2.1) se considera el centro $a = (0, 1)$ y $p = (1, 1)$ se toman diferentes valores de δ para mostrar que los resultados que se obtienen son buenos. En la Tabla (2.2) se consideran diferentes valores de a y de \vec{p} con $\delta = 0,1$; en ambas tablas se muestran los errores relativo y absoluto entre el centro, momento dipolar y la medición.

2.8. PCS dependiente del tiempo

El modelo que se ha utilizado para establecer correlaciones entre las fuentes y el EEG, es un modelo cuasi-estático, el cual se deduce de la ecuación de continuidad y del hecho de las variaciones temporales de la densidad de carga en el cerebro varían muy poco [22]. Por ello, para reproducir la variación temporal del EEG, se debe resolver este modelo estacionario en cada instante de tiempo, es decir, vamos a considerar el PCS junto con el tiempo y se hará de la siguiente manera:

$$\Delta u_1(x, t) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1, \quad (2.14)$$

$$\Delta u_2(x, t) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_2, \quad (2.15)$$

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad \text{sobre} \quad S_1, \quad (2.16)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1}(x, t) = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1}(x, t) + g(x, t) \quad \text{sobre} \quad S_1, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2}(x, t) = 0 \quad \text{sobre} \quad S_2, \quad (2.18)$$

esto es para cada t -fijo. Se propone que

$$g(x, t) = \left(\sum_{k=1}^N a_k(t) \right) f(x).$$

Problema directo dependiente del tiempo

La solución del problema (2.14)-(2.18) se realiza de la misma manera que en la subsección (A.1), es decir, se propone la fuente como

$$g(\theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^1(t) \cos k\theta + g_k^2(t) \sin k\theta.$$

Se considera la solución en la forma

$$u_1(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1(t) r^k \cos k\theta + b_k^1(t) r^k \sin k\theta,$$

$$u_2(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(t) r^k + b_k^2(t) r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2(t) r^k + d_k^2(t) r^{-k}) \sin k\theta$$

y se utilizan las condiciones (2.16)-(2.18) para hallar los coeficientes. La restricción de dicha solución a la frontera S_2 , que corresponde a la evaluación de la solución del problema de contorno en $r = R_2$, da la solución del problema directo que se denota por $V(\theta, t)$ y corresponde al EEG registrado sobre el cuero cabelludo:

$$EEG(g) = V(\theta, t) = \tag{2.19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^1(t) R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \right) \cos k\theta$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^2(t) R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \right) \sin k\theta,$$

donde R_1 representa el radio del cerebro, R_2 representa el radio de la cabeza, $g_k^1(t)$ y $g_k^2(t)$ son los coeficientes de Fourier de $g(\theta, t)$ para cada instante de tiempo, σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 , respectivamente.

Problema inverso dependiente del tiempo

Para la solución del problema inverso se prosigue como en la sección (A.2) sólo que se considera el tiempo para la solución (A.14), es decir, para cada instante de tiempo se resuelve el problema inverso, después a todos los resultados dependientes del tiempo se les interpola para obtener una solución continua. De esta forma se halla

$$g^\alpha(\theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2 a_k}{R_2 (a_k)^2 + \alpha R_1} [V_{k,\delta}^1(t) \cos k\theta + V_{k,\delta}^2(t) \sin k\theta], \tag{2.20}$$

donde

$$a_k = \frac{2R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]}.$$

Para la obtención del momento dipolar se considera la solución (A.15) que al considerar el tiempo, lleva a la siguiente expresión:

$$\vec{P}(t) = (B^t B + \alpha C^t C)' B^t \vec{V}(t). \tag{2.21}$$

Sobre la variación temporal del EEG

En el modelo anterior se considera al tiempo como una variable real. Para la simulación numérica vamos a proceder de la manera siguiente. Consideremos que $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T\}$ es una partición del intervalo $[0, T]$, $T > 0$ que se elige adecuadamente en función del EEG que se registra y que se desea emular. Llamemos a los subintervalos de esta partición "ventanas de tiempo". La partición debe elegirse de forma que se garantiza que se recogen en el EEG las características básicas generadas por las fuentes. A manera de ilustrar la acción sobre el EEG de la actividad de una o varias fuentes, entre las cuales puede haber una fuente relacionada con la epilepsia, mostraremos el siguiente ejemplo: supongamos que en la ventana $[t_0, t_1]$ se activa un foco epiléptico focalizado. En ese intervalo tendremos que

$$g(x, t) = \mathbf{p}(t) \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cdot n_1,$$

donde $M_\beta = \int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}$ es una constante de normalización para garantizar que tenemos unidades aproximativas a la función campana. En la ventana de tiempo $[t_0, t_1]$ podemos determinar los parámetros de la fuente $g(x, t)$, es decir, a $\mathbf{p}(t)$ y al centro a .

Se considera a $\mathbf{p}(t)$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}(t) = e^{-\frac{|t-t_e|^2}{2\gamma^2}},$$

donde t_e es el centro de la función campana en un instante t , γ es el ancho de la campana en un instante de tiempo en la ventana $[t_0, t_1]$ y β es el ancho de la campana espacial.

Vamos a suponer que las fuentes están ordenadas de acuerdo al momento de su activación. Si dos o más de ellas se activaron simultáneamente podemos elegir el orden con permutaciones de ellas.

Resultados numéricos

Se presentan los resultados numéricos considerando los valores $a = (0, 1)$, $\beta = \sqrt{0.1}$, para la campana espacial, $R_1 = 1$, $R_2 = 1.2$, $\delta = 0.1$, $N = 30$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha = 0.000001$, se toma el tiempo $t \in [0.5, 1.5]$ con intervalos de paso $h = 0.1$, en esta ventana de tiempo se considera un episodio epiléptico centrado en $t_e = 1$ y ancho $\gamma = 0.001$, $\theta \in [0, 2\pi]$ con tamaño de paso 0.01 y $\theta_1 \in [0, \pi]$ con tamaño de paso $\frac{\pi}{18}$, θ_1 indica la posición de cada electrodo sobre el cuero cabelludo, para este ejemplo se consideran 19 electrodos para emular el sistema 10-20.

En la Figura(2.5) se muestra la fuente exacta, para compararla con la fuente regularizada (2.20) considerando $\alpha = 0.000001$, los demás valores se toman como se mencionó anteriormente. Utilizando la expresión (2.19) se obtiene la medición que depende del tiempo, este resultado se muestra en la Figura (2.6), el resultado de la fuente regularizada se muestra en la Figura (2.7). En la Figura (2.8) se muestra el resultado del corte de la fuente regularizada en $t = 1$, donde se puede ver que el centro de la campana espacial toma los valores $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$.

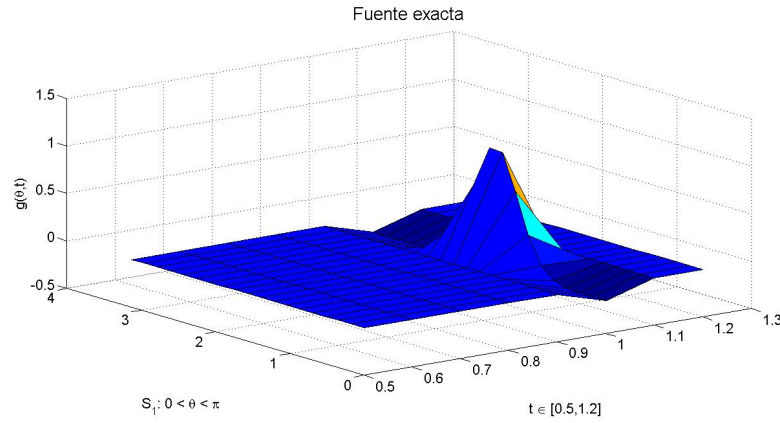


Figura 2.5: Fuente exacta dependiente del tiempo con $t \in [0.5, 1.2]$ y centro de la campana temporal en $t = 1$.

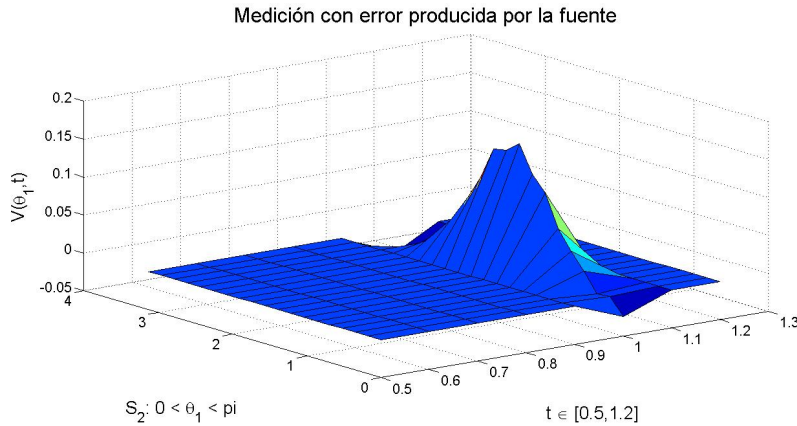


Figura 2.6: Medición producida por la fuente en el tiempo $t \in [0.5, 1.2]$, y la posición de los electrodos $\theta_1 \in [0, \pi]$ con tamaño de paso $\pi/18$, en donde se consideran 19 electrodos para emular el sistema 10-20.

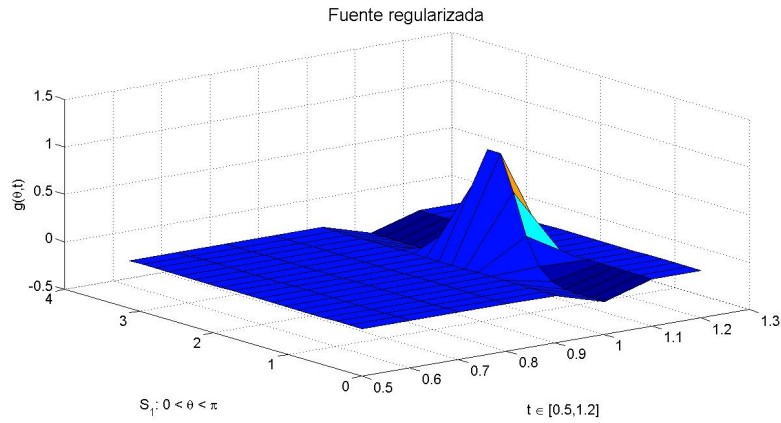


Figura 2.7: Fuente regularizada con $t \in [0.5, 1.2]$.

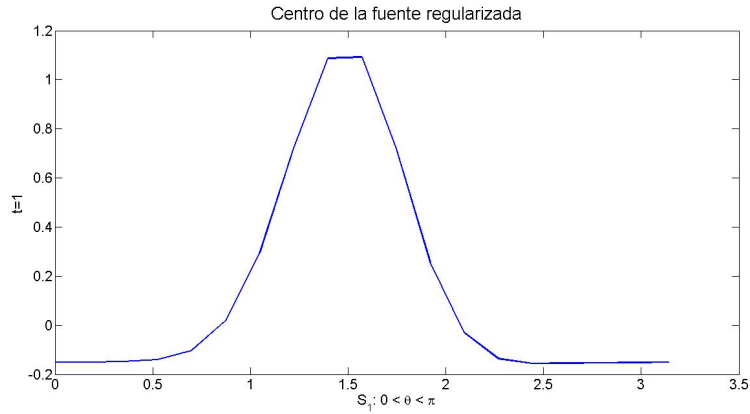


Figura 2.8: Corte de la fuente regularizada en $t = 1$ de donde se obtiene $\theta_0 = \pi/2$. De esto, se halla que el centro de la función campana espacial está en $a = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) = (0, 1)$.

Con el valor de θ_0 se encuentra el valor del centro de la función campana espacial como se describió arriba; el paso siguiente consiste en hallar a $\vec{\mathbf{p}}$ mediante (2.21), para con ello obtener a toda la fuente $g(\theta, t)$. En la Figura (2.9) se muestra el momento dipolar exacto \mathbf{p}_1 y el aproximado $\mathbf{p}_{1,N}$, y en la Figura (2.10) se muestra a \mathbf{p}_2 y a $\mathbf{p}_{2,N}$. Se observa de estas figuras que las aproximaciones dan buenos resultados.

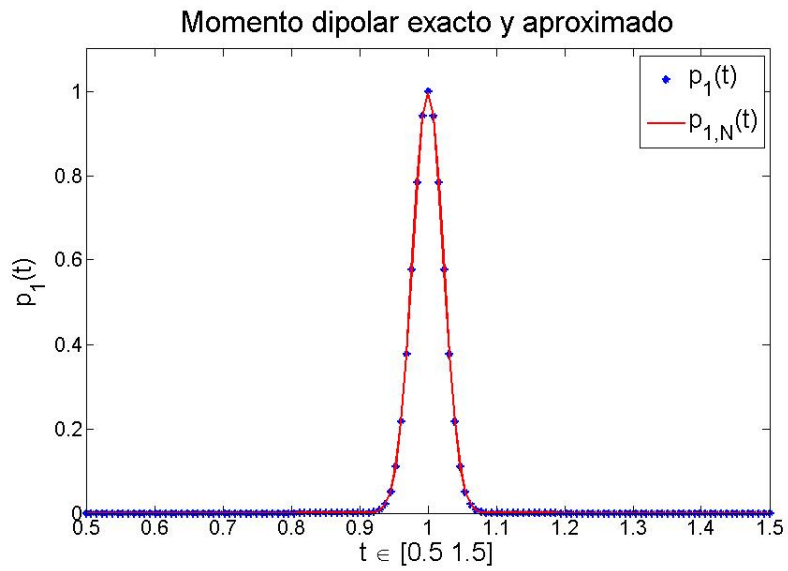


Figura 2.9: Momento dipolar $\mathbf{p}_1(t)$ exacto y $\mathbf{p}_{1,N}(t)$ aproximado.

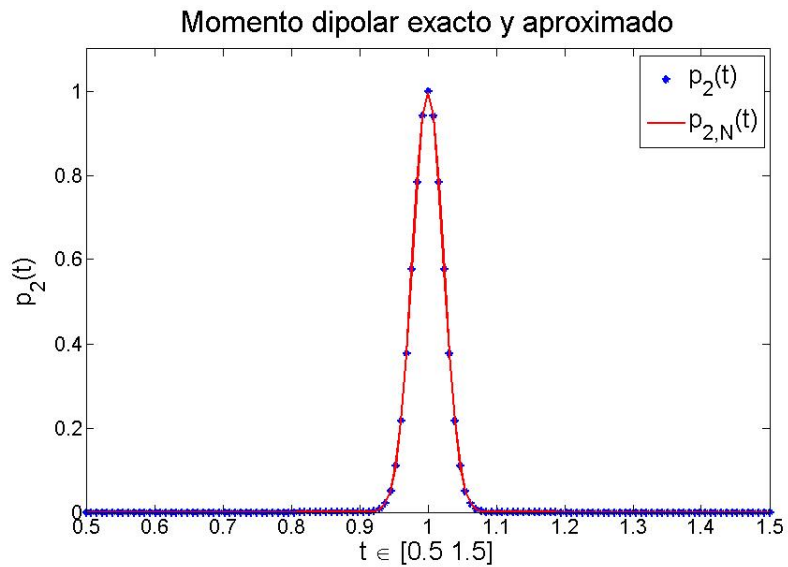


Figura 2.10: Momento dipolar $\mathbf{p}_2(t)$ exacto y $\mathbf{p}_{2,N}(t)$ aproximado.

Conclusiones. Se agrega el tiempo al problema de contorno superficial con lo que se obtiene la solución del problema directo para cada instante de tiempo. Análogamente, para el problema inverso, en cada instante de tiempo, se obtienen la fuente regularizada, el centro de la función campana y momento dipolar.

2.9. Generación de EEG sintético en dos dimensiones

Para generar un EEG sintético, se propone a la función $g(\theta, t)$ de manera apropiada. Una de estas formas es la siguiente:

$$g(\theta, t) = \left[P_i(t) \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \right] \cdot n_1, \quad i = 1, 2, \quad (2.22)$$

donde $P_i = \left(e^{-\frac{|t-t_e|^2}{2\gamma^2}} + c_1 \cos(\pi t f) + c_2 \sin(\pi t f) \right)$, $i = 1, 2$, c_1 y $c_2 \geq 0$ indica la amplitud de la señal, f es la frecuencia que dependerá de la posición de cada electrodo sobre el cuero cabelludo, t el tiempo y t_e es el instante de tiempo en donde se visualiza el foco epiléptico, γ es el ancho de la función campana temporal, a es el centro de la función campana espacial, es decir, indica el foco epiléptico, β el ancho de la función campana espacial, además se va a denotar a $P_i = e^{-\frac{|t-t_e|^2}{2\gamma^2}} + c_1 \cos(\pi t f) + c_2 \sin(\pi t f)$, $i = 1, 2$, cuando se tiene uno o más de un foco epiléptico, en caso de no tener foco epiléptico $P_i = c_1 \cos(\pi t f) + c_2 \sin(\pi t f)$, $i = 1, 2$.

Al obtener los coeficientes de Fourier de la fuente (2.22), se obtiene la solución del problema directo:

$$\begin{aligned} EEG = V(\theta_1, t) = & \quad (2.23) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^1(t) R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \right) \cos k\theta_1 \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^2(t) R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \right) \sin k\theta_1, \end{aligned}$$

que es el EEG sintético producido por $g(t)$, donde R_1 indica el radio del cerebro, R_2 es radio de la cabeza, σ_1 y σ_2 las conductividades promedios del cerebro y del resto de las capas que componen a la cabeza, los valores de θ_1 se toman de la manera siguiente (ver Figura (2.11)): se divide el intervalo de la semicircunferencia en 18 subintervalos de forma equidistante para así obtener 19 puntos a los que se les considera como la posición de cada electrodo. A la visualización de la medición de cada electrodo se le llama canal.

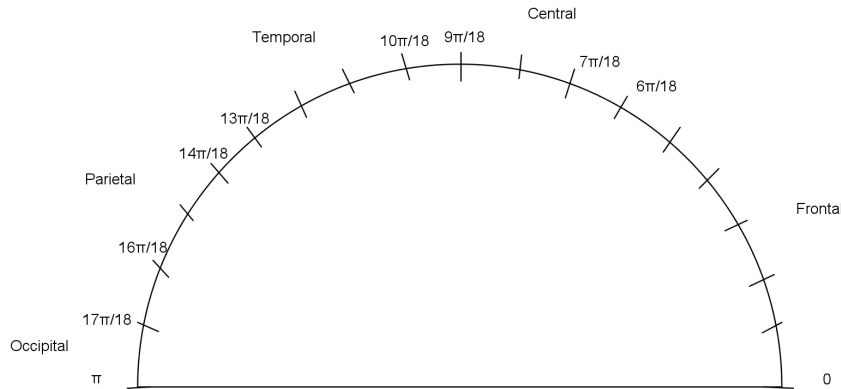


Figura 2.11: Distribución de cada electrodo sobre el cuero cabelludo.

Con lo que respecta a la frecuencia, se considera que el cerebro se divide en hemisferio izquierdo, derecho y central lo que se usa para poder denotar el nombre de cada canal, como se muestra en la Tabla 2.3. Además, el valor de la frecuencia se toma de acuerdo a la posición del electrodo en el cuero cabelludo.

| Área cerebral | Hemisferio izquierdo | Línea media | Hemisferio derecho |
|--------------------------------|----------------------|-------------|--------------------|
| Frontopolar | FP1 | | FP2 |
| Frontal | F3 | FZ | F2 |
| Fronto Temporal | F7 C3 | CZ | F8 C4 |
| Temporal Medio y Parietal | T3 P3 | PZ | T4 P4 |
| Temporal posterior y Occipital | T5 O1 | | T6 O2 |

Tabla 2.3: Zonas cerebrales de acuerdo al hemisferio.

Se muestran las frecuencias que se tienen en cada zona del cerebro:

Área frontopolar varía de 1 a 4 Hz.

Área frontal varía de 12 a 30 Hz.

Área fronto temporal varía de 4 a 7 Hz.

Área temporal medio y parietal varían de 8 a 12 Hz.

Área temporal posterior y occipital varían de 8 a 12 Hz.

Para generar el EEG sintético se toman los valores, $a = (0, 1)$, $\beta = \sqrt{0.1}$, $t_e = 1$, $\gamma = 0.001$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1,2$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $\theta_1 \in [0, \pi]$ con tamaño de paso $\pi/18$, $t \in [0, 20]$ con tamaño de paso $h = 1/128$, h indica la frecuencia de muestreo del EEG, los valores de c_1 , c_2 y f se toman como sigue:

En el caso del lóbulo frontal F_{p1} , F_2 , corresponden a los canales 1 y 2, se toma a:

$$P_i = 0.003 \cos(15t\pi) + 0.003 \sin(27t\pi), \quad i = 1, 2.$$

En la Figura (2.12) se muestra la gráfica del resultado de estos dos canales.

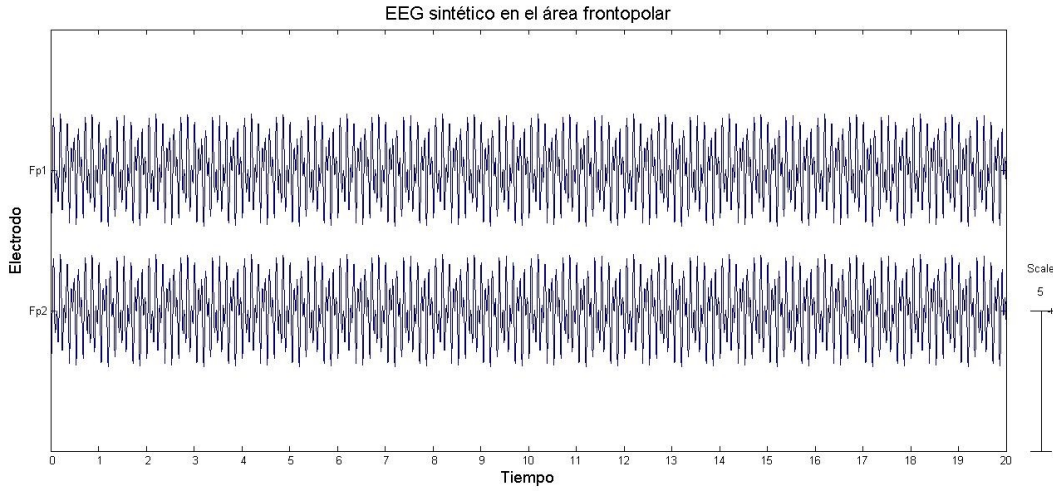


Figura 2.12: Resultado sintético de la actividad eléctrica del cerebro reflejado en los canales F_{p1} y F_{p2} .

En el lóbulo frontal se consideran los canales 3, 4, 5 y 17, y se toma

$$P_i = 0.02e^{-\frac{|t-5|^2}{0.001}} - 0.02e^{-\frac{|t-5.03|^2}{0.001}} - 0.02e^{-\frac{|t-7.2|^2}{0.001}} + 0.02e^{-\frac{|t-7.23|^2}{0.001}} + 0.02e^{-\frac{|t-10.4|^2}{0.001}} - 0.02e^{-\frac{|t-10.43|^2}{0.001}} + 0.002 \cos(24t\pi) + 0.002 \sin(40t\pi), \quad i = 1, 2, \quad (2.24)$$

con la expresión (2.24) se considera que se están generando seis spike (foco epiléptico) en los canales frontales y en el instante de tiempo t_e igual a 5, 5.03, 7.2, 7.23, 10.4, 10.43 con un ancho de 0.001.

Para la parte del lóbulo central se consideran los canales 7, 8 y 18 y se toma:

$$P_i = 0.002 \sin(24t\pi) + 0.002 \cos(30t\pi) + 0.002 \sin(26t\pi), \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

En el lóbulo temporal se consideran los canales 9, 10, 13 y 14, y se propone

$$P_i = 0.002 \cos(24t\pi) + 0.002 \sin(40t\pi), \quad i = 1, 2. \quad (2.26)$$

Para el caso del lóbulo parietal corresponden los canales 11, 12 y 19, además se toma

$$P_i = 0.004 \cos(20t\pi) + 0.004 \cos(24t\pi) \quad i = 1, 2. \quad (2.27)$$

En el lóbulo occipital corresponden los canales 15 y 16, y se toma

$$P_i = 0.003 \cos(18t\pi) + 0.003 \sin(16t\pi) + 0.003 \sin(20t\pi) - 0.003 \cos(23t\pi), \quad i = 1, 2. \quad (2.28)$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos del EEG sintético, donde se ha considerado el problema de contorno superficial dependiente del tiempo y los valores descritos en esta sección.

La Figura (2.13) muestra el EEG sintético que se obtiene a partir de (2.23) y de los valores descritos anteriormente, se supone que se tienen seis focos epilépticos (2.24), para distintos tiempos y se considera a $0 \leq t \leq 20$ y 19 electrodos distribuidos de forma equidistantes.

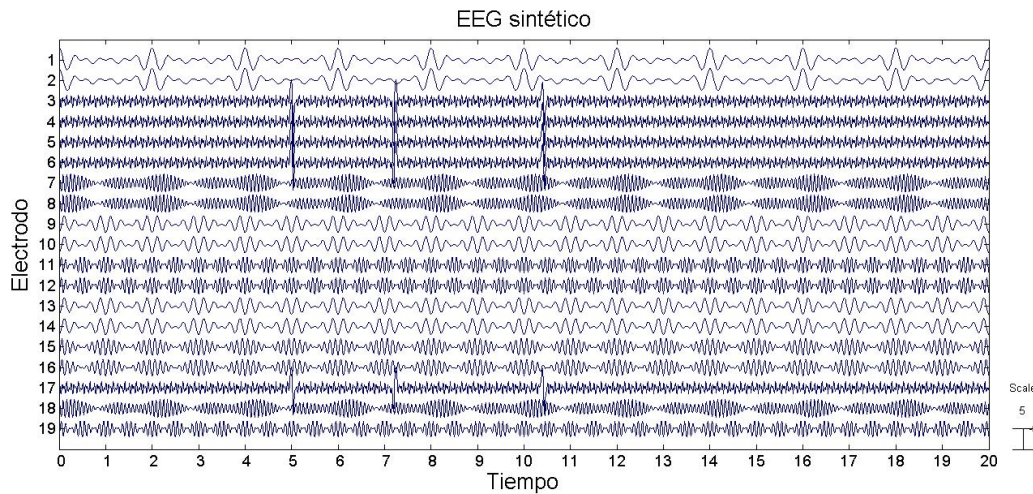


Figura 2.13: Generación del EEG sintético producida por $g(\theta, t)$ donde se considera la colocación de electrodos sobre el cuero cabelludo.

En la Figura (2.14), se presentan los resultados del EEG sintético al que se le han incluido artefactos musculares en el primer spike y artefactos oculares en la ventana de tiempo $t \in [12, 17]$, ya que un electroencefalograma al medir la actividad eléctrica del cerebro, también mide otras actividades funcionales del cuerpo humano como, precisamente, el potencial generado tanto por los movimientos oculares como por los musculares.

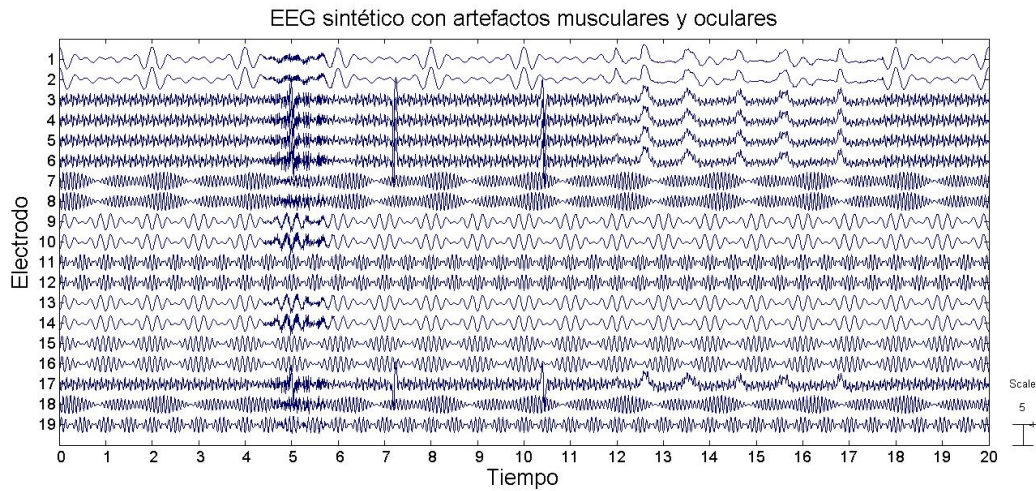


Figura 2.14: EEG con artefactos musculares en el primer spike y artefactos oculares.

Al EEG sintético con artefactos, se le quitan los artefactos musculares y oculares mediante el filtrado de la señal; para este caso se aplican los filtros conocidos como filtros pasa baja (LPF por sus siglas en inglés) y la técnica de Análisis de Componentes Independientes (ICA por sus siglas en inglés). La Figura (2.15), muestra el resultado de aplicar estas técnicas al EEG que contiene artefactos musculares y oculares.

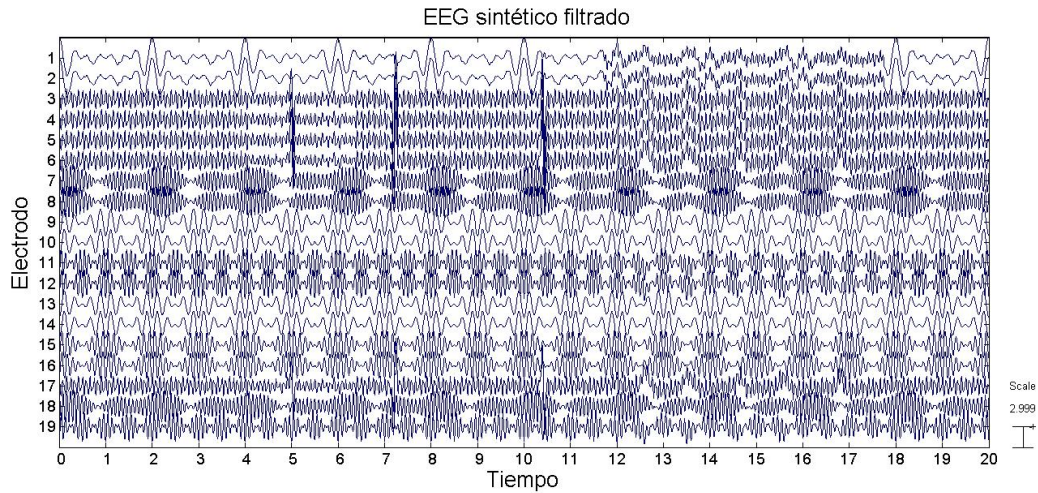


Figura 2.15: EEG filtrado utilizando ICA y LPF.

A partir de la medición obtenida en la figura (2.15) lo que se va a obtener es la ubicación de la fuente, es decir, se debe obtener el centro de la función campana espacial y el momento dipolar. Para el caso de la obtención del centro de la función campana temporal, es necesario calcular los coeficientes de Fourier del EEG sintético filtrado en cada instante de tiempo y luego se evalúan en el resultado dado en (2.20) por cada tiempo. En la Figura (2.16), se muestra el resultado de la fuente regularizada considerando $\alpha = 0.001$, con $t \in [0, 20]$ segundos.

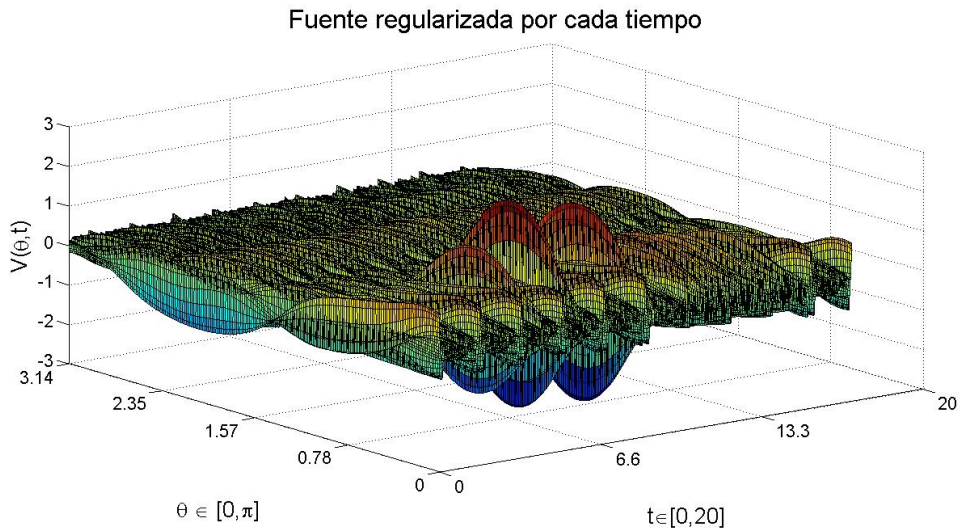


Figura 2.16: Resultado de la fuente regularizada a partir del EEG sintético filtrado.

Para determinar el centro de la campana espacial se realiza un corte de la fuente regularizada en $t = 5$, de ahí se obtiene el máximo valor de $g(\theta, 5)$, que toma el valor $\theta_0 = 1.4967$, evaluando el resultado en $a = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) = (0.0740, 0.9973)$, como se muestra en la Figura (2.17).

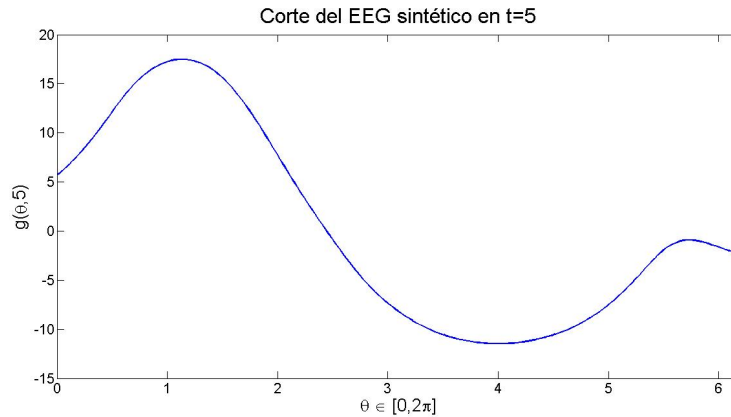


Figura 2.17: Corte de la fuente regularizada en $t = 5$ para obtener el centro de la campana espacial.

Conclusiones. Se genera el EEG sintético mediante el problema de contorno superficial dependiente del tiempo, considerando a la fuente como una función campana temporal más la suma de funciones senoidales con frecuencias adecuadas que se eligen para cada región de la corteza cerebral y se multiplica por una función campana espacial. Al EEG sintético se le agregan artefactos musculares y oculares para después ser filtrado, se obtiene la fuente regularizada considerando el EEG filtrado que emula a la medición del EEG que utiliza el médico para realizar un diagnóstico. Se realiza un corte en $t = 5$ a la fuente regularizada, obteniendo de esta manera el centro de la campana espacial. No se consideró el problema de determinar el momento dipolar, que se obtiene mediante la expresión (2.21).

Lo que se presenta a continuación es la generación del EEG sintético a partir del problema de contorno superficial en tres dimensiones, para ello se obtiene la solución del problema directo para que a dicha solución se le agregue el tiempo y a partir de ello y de considerar la posición de los electrodos al igual que el tipo de fuente, se obtenga el EEG sintético. Adicionalmente se presenta la solución analítica del problema inverso para el problema de contorno superficial en tres dimensiones.

2.10. Problema de contorno superficial en tres dimensiones

Se considera el problema de contorno superficial (2.1)-(2.5) en el caso de tres dimensiones. Al igual que en la sección (2.7), se considera que las soluciones del problema directo e inverso están dadas por (A.23 y (A.31), respectivamente. Se va a usar un modelo de esferas concéntricas ya que este modelo tiene aplicaciones clínicas y cabe mencionar que los sistemas como EEGLAB y LORETA también lo utilizan.

En esta sección se presentan dos ejemplos, es decir, se considerarán dos tipos de fuentes: para el primer caso se considera a la función campana normalizada y para el siguiente caso se toma a la fuente como en (2.14).

Ejemplo 1. Se considera a la fuente de la siguiente forma:

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{\int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}} dx}, \quad (2.29)$$

donde

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) = (R_1 \sin \theta \cos \phi, R_1 \sin \theta \sin \phi, R_1 \cos \theta), \\ a &= (a_1, a_2, a_3) = (R_1 \sin \theta_0 \cos \phi_0, R_1 \sin \theta_0 \sin \phi_0, R_1 \cos \theta_0), \end{aligned}$$

a representa el centro y β es el ancho de la función campana, los valores que se toman son: $\theta_0 = \pi/2$ y $\varphi_0 = \pi/2$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1.2$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $h_1 = 0.01$ es el tamaño de paso para θ , $h_2 = 0.02$ indica el tamaño de paso de φ , $\alpha = 0$, $\delta = 0.1$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\beta = \sqrt{0.1}$. En la Figura (2.18) se muestra la gráfica de la fuente dada por (2.29), para compararla visualmente con la fuente que la aproxima mediante el desarrollo en serie de la fuente con $N = 10$ coeficientes de Fourier, cuya gráfica se muestra en la Figura (2.19). Al comparar la fuente exacta con la fuente aproximada se tiene que: $E_A \| g_N - g \| = 4.7238 \times 10^{-3}$ y $E_R \| g_N - g \| = 3.1524 \times 10^{-3}$.

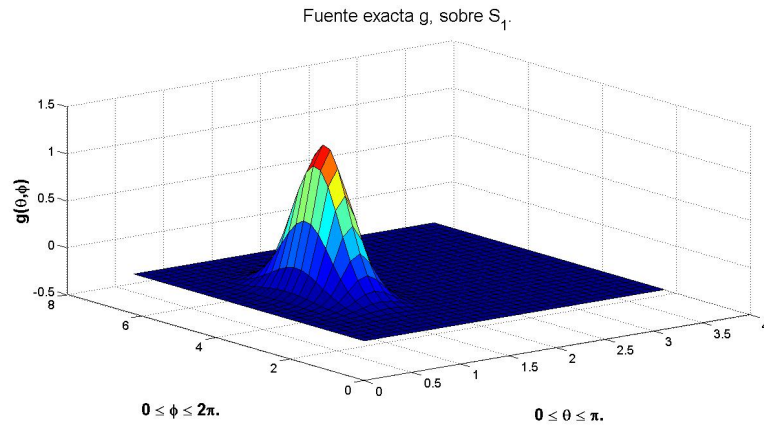


Figura 2.18: Gráfica de la función campana.

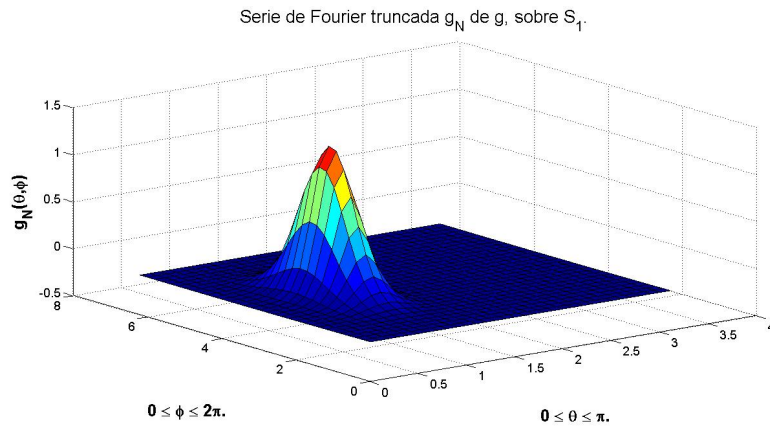


Figura 2.19: Aproximación de la función campana en su desarrollo de armónicos esféricos.

En la Figura (2.20), se muestra el resultado obtenido a partir de la ecuación (A.23) en donde se considera que la medición es obtenida a partir de conocer la fuente (2.29) bajo la suposición que se conoce la medición sobre todo el cuero cabelludo. En la Figura (2.21) se muestra el resultado de (A.24), que es el que se considera para el problema inverso. Cuando se compara la medición exacta y la medición con error se tiene que $E_A \| V_\delta - V \| = 1.8319 \times 10^{-2}$ y $E_R \| V_\delta - V \| = 1.2851 \times 10^{-1}$.

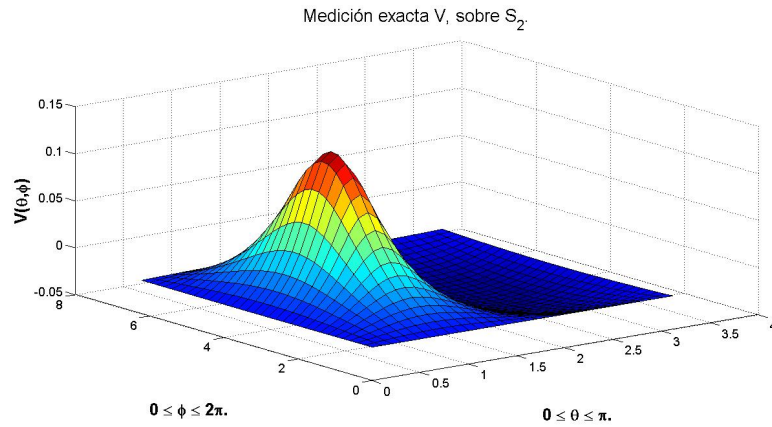


Figura 2.20: Medición sobre todo el cuero cabelludo que se produce a partir de la fuente.

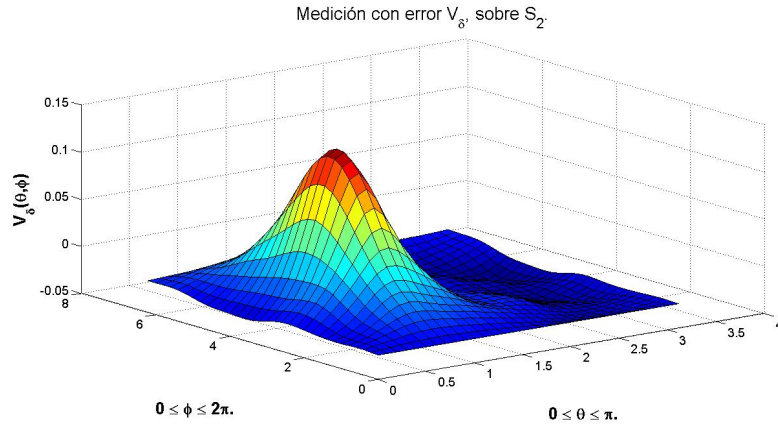


Figura 2.21: Medición con error aleatorio sobre todo el cuero cabelludo.

En la Figura (2.22), se muestra el resultado de la fuente regularizada, obtenida a partir de (A.31). Al comparar con la fuente exacta se tiene que: $E_A \| g_{\alpha(\delta),N} - g \| = 3.5801 \times 10^{-1}$ y $E_R \| g_{\alpha(\delta),N} - g \| = 2.3892 \times 10^{-1}$.

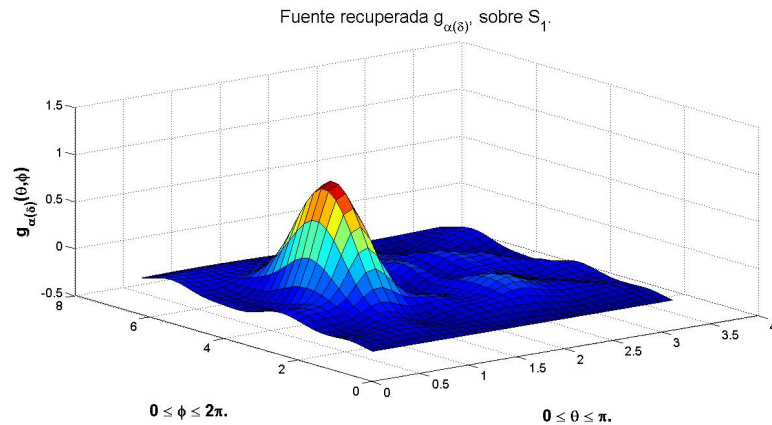


Figura 2.22: Se muestra la gráfica de la fuente a partir de conocer la medición.

Ejemplo 2

Para este ejemplo se toma a

$$g(x) = \vec{\mathbf{p}} \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{\int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}} dx} \cdot n_1, \quad (2.30)$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ es el momento dipolar y n_1 es la normal exterior sobre S_1 , x y a se toman como en el Ejemplo 1. Se consideran los valores, $\theta_0 = \pi/2$ y $\varphi_0 = \pi/2$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1.2$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $h_1 = 0.01$ es el tamaño de paso de θ , $h_2 = 0.02$ es el tamaño de paso de φ , $\alpha = 0$, $\delta = 0.1$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\beta = \sqrt{0.1}$, $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$.

En la Figura (2.23) se muestra la gráfica de (2.30). Al comparar esta función con la fuente obtenida por desarrollo en serie de Fourier con $N = 10$ coeficientes de Fourier, se halla que: $E_A \| g_N - g \| = 1.2460 \times 10^{-2}$ y $E_R \| g_N - g \| = 8.2905 \times 10^{-3}$.

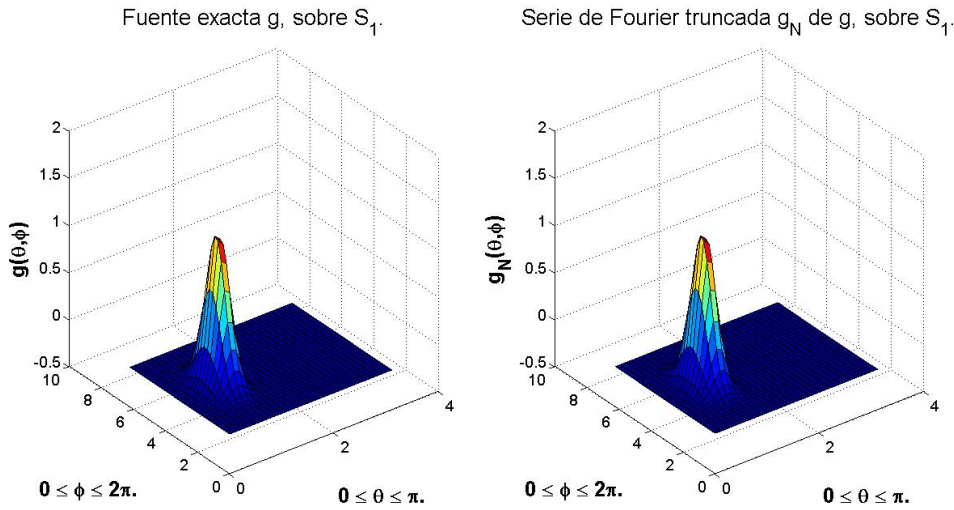


Figura 2.23: Fuente exacta $g(\theta, \phi)$ y fuente aproximada por coeficientes de Fourier $g_N(\theta, \phi)$ para $N = 10$.

En la Figura (2.24), se muestra las gráficas de la medición exacta y con error (obtenidas de (A.23) y (A.24)) con $\delta = 0,1$. Se tiene que $E_A \| V_\delta - V \| = 1.4713 \times 10^{-2}$ y $E_R \| V_\delta - V \| = 1.0801 \times 10^{-1}$.

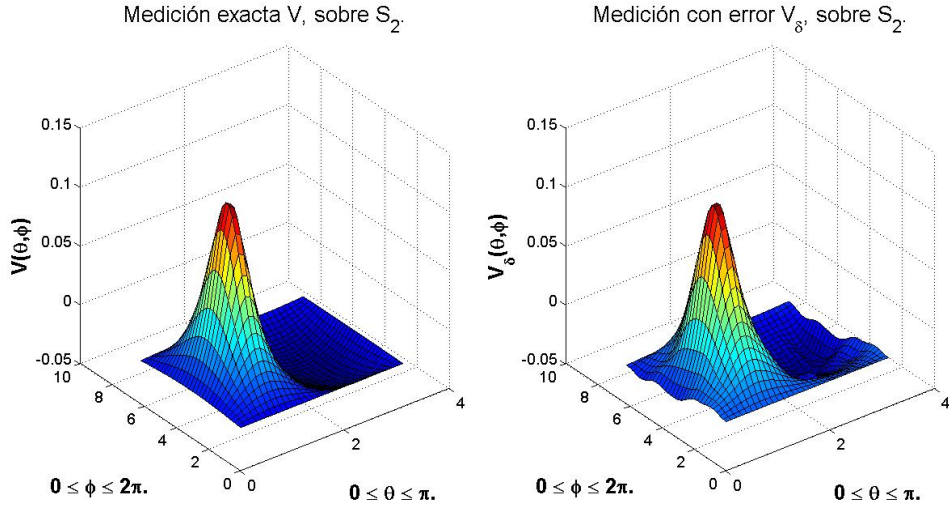


Figura 2.24: Medición exacta $V(\theta, \phi)$ y medición con error $V_\delta(\theta, \phi)$ para $\delta = 0.1$.

En la Figura (2.25), se muestra el resultado de la fuente exacta (2.30) con la expresión (A.31) con $\alpha = 0.0001$, en donde se ha obtenido que $E_A \|g_{\alpha(\delta),N} - g\| = 3.8018 \times 10^{-1}$ y $E_R \|g_{\alpha(\delta),N} - g\| = 2.5296 \times 10^{-1}$.

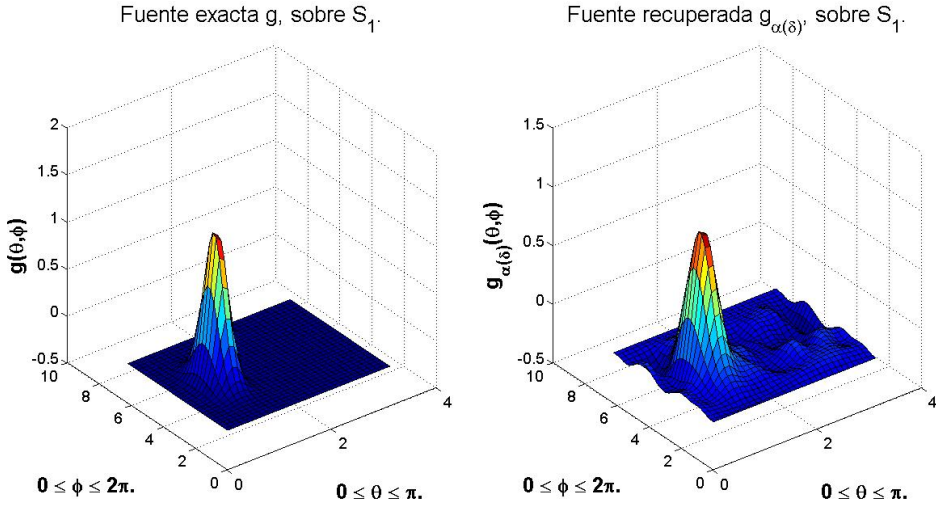


Figura 2.25: Fuente exacta $g(\theta, \phi)$ y fuente regularizada $g_{N,\delta}(\theta, \phi)$ para $\alpha = 0.0001$.

Conclusiones. En esta sección se presentan los resultados del problema directo e inverso para el problema de contorno superficial, para el caso de tres dimensiones. Se presentaron los errores absoluto y relativo entre la fuente exacta y aproximada, entre la medición exacta y la medición con error y de la fuente exacta con la fuente regularizada.

2.11. Modelo en tres dimensiones dependiente del tiempo

En esta sección se considerará la solución del modelo (2.14)-(2.18) para tres dimensiones.

Problema directo dependiente del tiempo

Se considera a la fuente de la siguiente manera:

$$g(\theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{nm}(t) y_{nm}(\theta, \phi),$$

y se propone el potencial de la forma:

$$u_1(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm}(t) r^n(t) y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_2(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm}(t) r^n(t) + b_{nm}(t) r^{-n-1}(t)) y_{nm}(\theta, \phi),$$

en donde se resuelve el modelo para cada instante de tiempo t . Realizando los cálculos (ver (A.4)), se llega al resultado

$$V(R_2, \theta, \phi, t) = u_2(R_2, \theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(2n+1)g_{nm}(t)R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]} \right) y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.31)$$

al que se le considera como la medición electroencefalográfica producida por la fuente $g(\theta, \phi, t)$.

Problema inverso dependiente del tiempo

Para obtener la solución del problema inverso, se considera la solución dada en (A.5) y se le agrega el tiempo en el resultado obtenido, es decir,

$$g(\theta, \phi, t) = \frac{R_2 a_{nm}}{R_2 (a_{nm})^2 + \alpha R_1} (V_{nm}(R_2, \theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi, t)), \quad (2.32)$$

donde

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]},$$

$V_{nm}(R_2, \theta, \varphi, t)$ son los coeficientes de Fourier de la medición y $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos.

2.12. Obtención del EEG sintético en tres dimensiones

Para la generación del EEG sintético se considera la fuente:

$$g(X) = \vec{p} \frac{e^{-\frac{|X-a|^2}{2\beta^2}}}{m_\beta} \cdot n_1, \quad (2.33)$$

donde

$$m_\beta = \int_{S_1} e^{-\frac{|X-a|^2}{2\beta^2}} dx,$$

a representa el centro de la campana, β es el ancho de la campana, se divide entre m_β para garantizar que el área bajo la gráfica de g siempre sea igual a uno, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, donde $p_i = e^{-\frac{|t-t_e|^2}{2\gamma^2}} + c_1 \cos(\pi t f) + c_2 \sin(\pi t f)$, $i = 1, 2, 3$, donde puede tener más de un foco epiléptico, en caso de no tener foco epiléptico se toma $p_i = c_1 \cos(\pi t f) + c_2 \sin(\pi t f)$, $i = 1, 2, 3$, f es la frecuencia que dependerá de dónde está ubicado el electrodo y t indica el tiempo, los coeficientes c_1, c_2 son la amplitud de cada señal. El EEG sintético se obtiene mediante la ecuación

$$V(\theta_1, \phi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n p(i) (V_{nm}^1 \cos m\phi_1 + V_{nm}^2 \sin m\phi_1) P_n^m \cos \theta_1, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} V_{nm}^1 &= a_{nm} g_{nm}^1, \\ V_{nm}^2 &= a_{nm} g_{nm}^2, \end{aligned}$$

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (\sigma_1 n + \sigma_2(n+1))R_2^{2n+1}]}.$$

Lo que se va hacer es seleccionar algunos valores de θ_1 y ϕ_1 de acuerdo al sistema 10-20, esto indicará la posición de cada electrodo. Así que se supondrá que los electrodos se colocan sobre el cuero cabelludo siguiendo la representación que se muestra en la Figura (2.26).

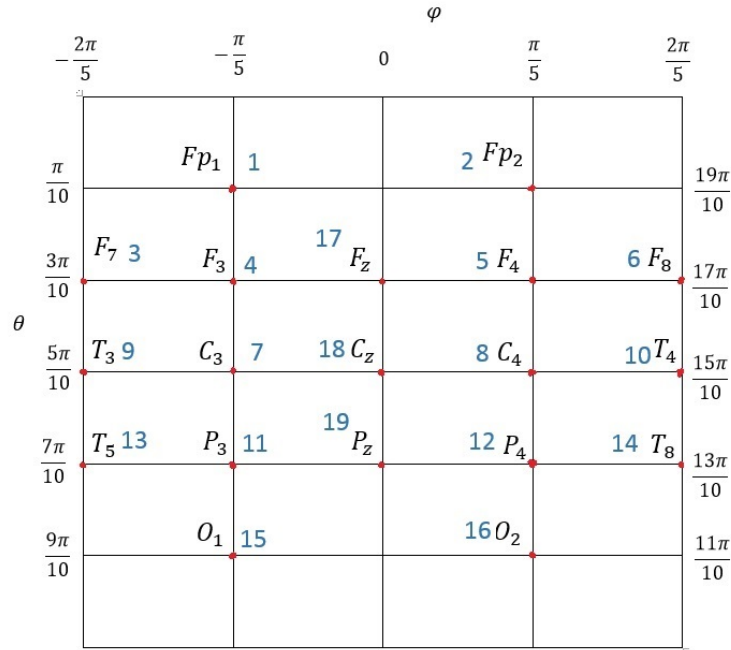


Figura 2.26: Representación esquemática de la posición de cada electrodo

Los valores de p_i se describen de la siguiente manera para cada canal. Para el caso del lóbulo frontal F_{p1} , F_2 , corresponden a los canales 1 y 2 como se muestra en la Figura (2.26), en donde se toma el momento dipolar como:

$$P_i = 0.003 \cos(15t\pi) + 0.003 \sin(27t\pi), i = 1, 2, 3.$$

En la Figura (2.27), se muestra la gráfica de estos dos canales.

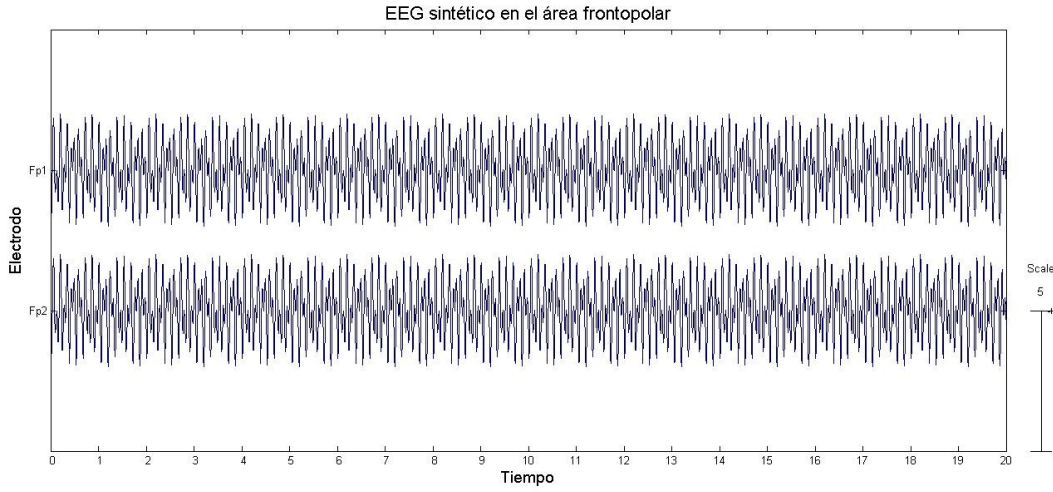


Figura 2.27: Resultado de los primeros dos canales frontales.

En el lóbulo frontal se consideran los canales 3, 4, 5 y 17, como se muestra en la Figura (2.26). Se toma

$$P_i = 0.02e^{-\frac{|t-1|^2}{0.001}} + 0.002 \cos(24t\pi) + 0.002 \sin(40t\pi), i = 1, 2, 3, \quad (2.35)$$

con la expresión (2.35) se considera que se está generando un spike (foco epiléptico) en los canales frontales y en el instante de tiempo $t = 1$ (centro de la campana temporal), con un ancho de 0.001.

Para la parte del lóbulo central se consideran los canales 7, 8 y 18 con

$$P_i = 0.002 \sin(24t\pi) + 0.002 \cos(30t\pi) + 0.002 \sin(26t\pi), i = 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

En el lóbulo temporal se consideran los canales 9, 10, 13 y 14. Se toma

$$P_i = 0.002 \cos(24t\pi) + 0.002 \sin(40t\pi), i = 1, 2, 3. \quad (2.37)$$

Para el lóbulo parietal corresponden los canales 11, 12 y 19 con

$$P_i = 0.004 \cos(20t\pi) + 0.004 \cos(24t\pi), i = 1, 2, 3. \quad (2.38)$$

El lóbulo occipital corresponden los canales 15 y 16. Se toma

$$P_i = 0.003 \cos(18t\pi) + 0.003 \sin(16t\pi) + 0.003 \sin(20t\pi) - 0.003 \cos(23t\pi), i = 1, 2, 3. \quad (2.39)$$

Considerando lo descrito anteriormente, se tiene el EEG sintético, como se muestra en la Figura (2.28), en donde se muestra un EEG de 20 segundos en 19 canales y un foco epiléptico en $t = 1$.

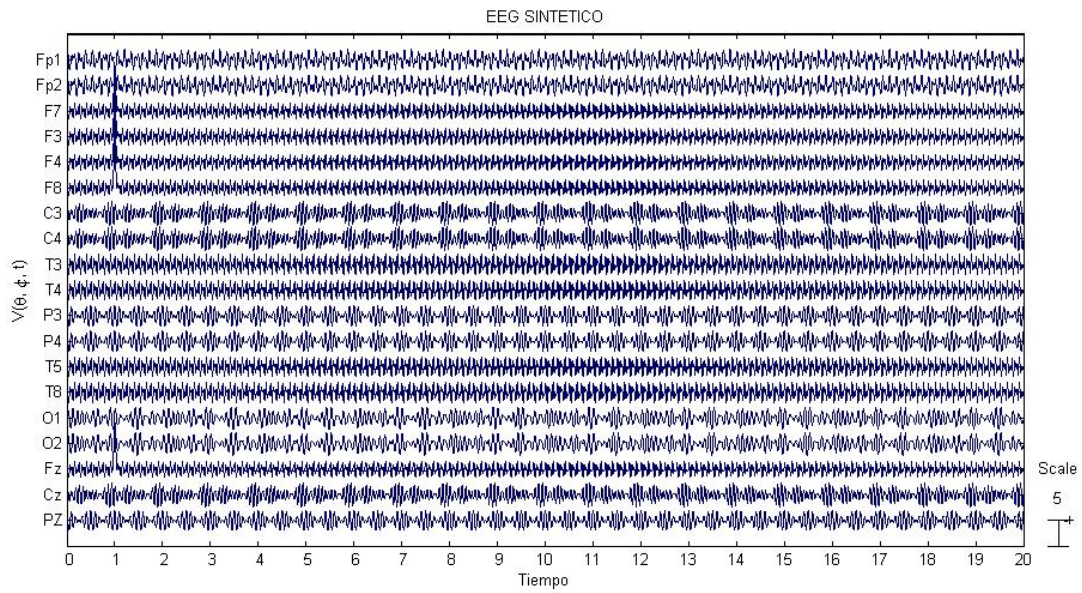


Figura 2.28: EEG sintético a partir de considerar una fuente ubicada en el lóbulo frontal

A partir del EEG sintético, es posible encontrar el foco epiléptico mediante la solución del problema inverso para cada instante de tiempo.

Capítulo 3

Modelo con fuentes en la corteza cerebral

3.1. Fuente ubicada en el volumen de la corteza cerebral

Cuando la fuente está ubicada en el volumen de la corteza cerebral se considera el siguiente problema de contorno,

$$\Delta u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.1)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2 \quad (3.2)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } S_1 \quad (3.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre } S_2 \quad (3.5)$$

donde $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$ representa a la cabeza, Ω_1 al cerebro, Ω_2 el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes y diferentes entre sí, f es la fuente, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ y u representa el potencial eléctrico en Ω , el símbolo Δ representa el operador laplaciano. Las condiciones de frontera (3.3)-(3.4) son llamadas de transmisión y la condición de frontera (3.5), se obtiene al considerar que la conductividad de Ω^c es cero (la conductividad del aire). S_1 representa la superficie de la corteza cerebral, S_2 el cuero cabelludo y f es una fuente bioeléctrica, es decir, que representa la acción de un conglomerado de neuronas que se activan simultáneamente. En particular, corresponde a la actividad anormal de un grupo de neuronas que son las que producen una crisis epiléptica. Cabe señalar que para el análisis de existencia y unicidad de la solución del problema (3.1)- (3.5) se debe cumplir:

$$\int_{\Omega_1} f(x) dx = 0. \quad (3.6)$$

A (3.6) se le conoce como condición de compatibilidad que se obtiene de las fórmulas de Green.

Al problema de contorno (3.1)-(3.5) se le llamará Problema de Contorno Volumétrico (PCV) el cual ha sido estudiado en [46], [47], [38], [37], [22], [20], [19], [2].

Planteamiento operacional

Como se mencionó anteriormente, el análisis de los problemas directo e inverso, se puede realizar a través de un planteamiento operacional que permita deducir su buen o mal planteamiento. Para ello, se requiere la definición de solución débil del problema de contorno (3.1)-(3.5).

Consideremos el espacio de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ cuyos elementos tienen derivada débil y pertenecen a $L_2(\Omega)$ [30]. Denotaremos por medio de $L_2^1(S_1)$ al subespacio de $L_2(S_1)$ compuesto por las funciones que satisfacen la condición de compatibilidad. Se tiene lo siguiente:

Dada $f \in L_2^1(\Omega_1) = \left\{ f \in L_2(\Omega_1) : \int_{\Omega_1} f(x)dx = 0 \right\}$, una función $u \in H^1(\Omega)$, es llamada una solución débil del problema (3.1)-(3.5), si satisface la siguiente relación

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega_1} f v ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.7)$$

La prueba de la existencia y unicidad de la solución débil puede ser hallada en [19].

La condición de compatibilidad de la función f es necesaria y suficiente para la existencia de la solución débil del problema (3.1)-(3.5). Hay una única solución débil u que satisface $\int_{\Omega} u(x)dx = \langle u, 1 \rangle_{L_2(\Omega)} = 0$ y además

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega_1)}, \quad (3.8)$$

donde la constante C no depende de f .

Nótese que la condición de compatibilidad es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad (salvo constantes) tanto de la solución clásica como de la débil. A través del teorema anterior, podemos definir al siguiente operador

$$T : L_2^1(\Omega_1) \rightarrow H^1(\Omega), \quad \text{tal que } T(f) = u,$$

donde u es la única solución débil del problema. Este operador está bien definido y además, por la condición (3.8), es continuo. El operador A que se obtiene de la composición del operador continuo T con el operador compacto traza Tr a la frontera S_2 de la región Ω , es compacto. Más precisamente, el operador

$$A : L_2^{(1)}(\Omega_1) \longrightarrow L_2(S_2) \quad (3.9)$$

se define a través de la regla de correspondencia $f \rightarrow V$ donde $V = u|_{S_2}$ y u es la solución del problema (53)-(57) que satisface que $\int_{\Omega} u(x)dx = 0$. Este operador está bien definido pues para cada fuente $f \in L_2^{(1)}(\Omega_1)$ existe un único potencial u , solución del problema de contorno, que es ortogonal a las constantes en el producto escalar de $L_2(\Omega)$.

En el caso particular de círculos concéntricos, la regla de correspondencia del operador A está dada por:

$$A(f)(\theta) = -\sigma_1 R_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_1^{2k} R_2^k}{k(k+1)E_k} f_k^1 \cos k\theta + \frac{R_1^{2k} R_2^k}{k(k+1)E_k} f_k^2 \sin k\theta. \quad (3.10)$$

Haciendo $B_k = -\frac{\sigma_1 R_1^{2(k+1)} R_2^k}{k(k+1)E_k}$ tenemos que

$$A(f)(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k [f_k^1 \cos k\theta + f_k^2 \sin k\theta]. \quad (3.11)$$

Análisis de la inyectividad de A

A diferencia del caso de fuentes corticales, en el que se tiene inyectividad del operador que asocia a las fuentes definidas sobre la superficie de la corteza cerebral con las mediciones electroencefalográficas, en el caso de fuentes definidas sobre el volumen, pueden existir fuentes diferentes entre sí, que producen la misma medición y por ello, el operador que asocia a las fuentes la medición no es inyectivo. Para llegar a este resultado se requiere introducir al operador adjunto A^* el cual está definido a través del problema de contorno:

$$\Delta w_1 = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.12)$$

$$\Delta w_2 = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.13)$$

con las condiciones de frontera

$$w_1 = w_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.14)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_1}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.15)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_2} = \psi, \quad \text{sobre } S_2. \quad (3.16)$$

Se define el operador adjunto como:

$$A^*(\psi) := \frac{\sigma_1}{\sigma_2} w|_{\Omega_1},$$

donde w es solución del problema adjunto (3.12)(3.16).

La prueba del siguiente teorema se tomó de (37).

Teorema 15 $[N(A)]^\perp = H_1(\Omega_1)$ donde $N(A)$ es el núcleo de A y $H_1(\Omega_1)$ es el subespacio de $L_2(\Omega_1)$ formado por las funciones armónicas que son ortogonales a las constantes.

Demostración: Si se define $A_0 : L_2^\perp(\Omega_1) \rightarrow L_2^\perp(S_1)$ como el operador tal que $A_0(f) = u|_{S_1}$ donde u es la solución débil del problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{en} & \Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en} & S_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

se tiene que:

1. $N(A) = N(A_0)$.
2. $A_0^* = B_0$ donde B_0 es el operador definido en la forma:

$$\begin{aligned} B_0 : L_2^\perp(S_1) &\rightarrow L_2^\perp(\Omega_1) \\ \psi &\rightarrow v \end{aligned}$$

donde v es la solución débil del problema

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 & \text{en} & \Omega_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \psi & \text{en} & S_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esto último se demuestra de forma análoga al caso del operador A .

El punto 1) se debe a que si $f \in N(A)$ entonces f satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= f & \text{en} & \Omega_1 \\ \Delta u_2 &= 0 & \text{en} & \Omega_2 \\ u_1 &= u_2 & \text{en} & S_1 \\ \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} & \text{en} & S_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= 0 & \text{en} & S_2 \\ u_2 &= 0 & \text{en} & S_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

y por la unicidad del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un anillo se tiene que: $u_2 \equiv 0$ en Ω_2 .

Así, f satisface el problema

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= f & \text{en} & \Omega_1 \\ u_1 &= 0 & \text{en} & S_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= 0 & \text{en} & S_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por lo tanto, $f \in N(A_0)$. Análogamente se prueba que si $f \in N(A_0)$ entonces $f \in N(A)$.

Caractericemos $[N(A_0)]^\perp$. Comencemos probando que los espacios $N(A_0)$ y $H_1(\Omega_1)$ están en suma directa, es decir que:

$$N(A_0) \cap H_1(\Omega_1) = \{0\}. \quad (3.21)$$

En efecto, si $f \in H_1(\Omega_1) \cap N(A_0)$ entonces f es armónica y se satisface

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{en } \Omega_1 \\ u &= 0 & \text{en } S_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n_1} &= 0 & \text{en } S_1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

de donde se tiene que u satisface el problema de contorno homogéneo para la ecuación biarmónica y, por lo tanto, $u \equiv 0$ en Ω_1 , de donde $f \equiv 0$.

De la fórmula:

$$N(A) = (Im(B))^\perp,$$

junto con el hecho de que $\overline{Im(B)} \subset H_1(\Omega_1)$, se concluye que

$$H^1(\Omega_1) \subset N(A)^\perp. \tag{3.23}$$

Finalmente de (3.21) y (3.23) se deduce la tesis del teorema.

De lo anterior vemos cada función fuente $f \in L_2^1(\Omega_1)$ puede escribirse en la forma $f = f_0 + f_h$ donde $f_0 \in Ker(A)$ y $f_h \in [Ker(A)]^\perp = H_1(\Omega_1)$. Así, para garantizar unicidad de solución del problema inverso, deben imponerse condiciones adicionales sobre la naturaleza de las fuentes. Algunas de estas condiciones están dadas en (2) y, en particular, para las fuentes dipolares con las que se representan a los focos epilépticos que se discuten en la sección siguiente. En (46), se hallan los parámetros de fuentes dipolares a partir de mediciones con error, usando el funcional de Tikhonov y la función `fmincon` de MATLAB. En este trabajo no se consideran ejemplos numéricos para el problema inverso de fuentes volumétricas.

Ubicación y representación matemática de las fuentes

El problema de contorno (3.1)-(3.5) permite considerar a fuentes f pueden representarse por funciones de cuadrado integrable definidas sobre Ω_1 y que satisfacen la condición de compatibilidad. Sin embargo, en este trabajo vamos a considerar sólo el caso en el que la fuente se encuentre ubicada en el volumen de la corteza cerebral, es decir, fuentes cuyo soporte esté en el volumen ocupado por la corteza cerebral. En particular, vamos a considerar fuentes dipolares que están asociadas a focos epilépticos. Estas se representan por

$$f = \frac{1}{\sigma_1} div(\vec{\mathbf{p}}\delta(x - a)), \tag{3.24}$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ representa el momento dipolar (que determina la intensidad y orientación del dipolo) y $\delta(x - a)$ es la delta de Dirac concentrada en a la cual se aproxima a través de una función campana de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1} \operatorname{div} \left(\vec{\mathbf{p}} \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{\int_{\Omega_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}} \right), \quad (3.25)$$

donde $x = (x_1, x_2) = (R_0 \cos \theta, R_0 \sin \theta)$, $a = (a_1, a_2) = (R_0 \cos \theta_0, R_0 \sin \theta_0)$, con $R_0 < R_1$ y β indica el ancho de la campana.

Nota: En el Apéndice B se halla la solución del problema directo, para el caso de armónicos circulares (B.22) y armónicos esféricos (B.32).

En lo que sigue, se presenta la solución numérica del problema directo en dos dimensiones considerando los valores: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\beta = \sqrt{0.1}$, $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2) = (1, 1)$, $R_1 = 1$ indica el radio de cerebro, $R_2 = 1.2$ es el radio de la cabeza, $R_0 = 0.95$ es el radio en donde está ubicado el foco epiléptico, $N = 30$ indica el número de coeficientes de Fourier de $f(x)$, $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$. En la Figura (3.1) se presenta la gráfica de (3.25) y de su aproximación por su serie de Fourier, con $N = 30$ coeficientes.

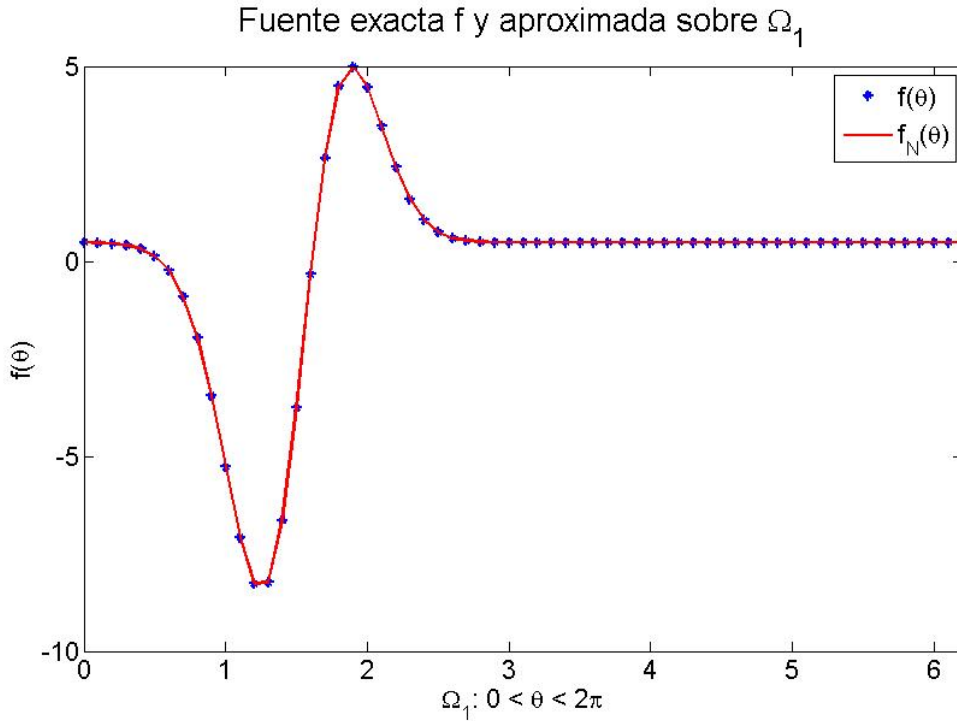


Figura 3.1: Fuente exacta $f(\theta)$ y fuente aproximada $f_N(\theta)$, por coeficientes de Fourier.

En la Figura (3.2), se presenta la medición obtenida mediante (B.22) y el resultado de agregar error aleatorio a la medición.

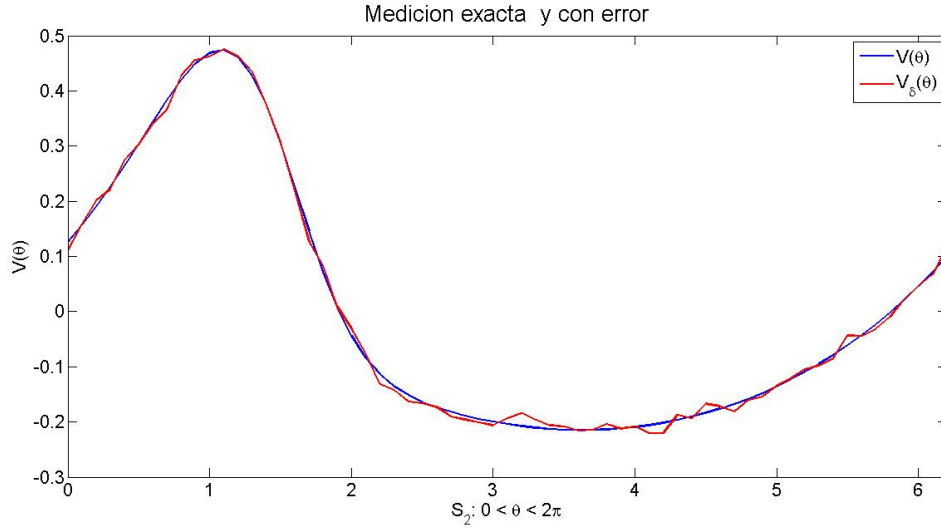


Figura 3.2: Medición exacta y medición perturbada con $\delta = 0.1$.

Conclusiones. En este capítulo se presentan la solución numérica del problema directo asociado al problema de contorno volumétrico, en dos y tres dimensiones.

3.2. Fuente en el volumen y superficie de la corteza cerebral

Cuando se tiene una fuente que parte de ella está ubicada en el volumen y parte en la superficie de la corteza cerebral, el modelo que se considera es el siguiente:

$$\Delta u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.26)$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.27)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.28)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre } S_2, \quad (3.30)$$

donde $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$ representa a la cabeza, Ω_1 el volumen de la corteza cerebral, Ω_2 el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes, f y g son las fuentes, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ y u representa el potencial eléctrico en Ω , el símbolo Δ representa el operador laplaciano. Las condiciones de frontera (3.28)-(3.29) son llamadas de transmisión y la condición de frontera (3.30), se obtiene al considerar que la conductividad de Ω^c es cero (la conductividad del aire), S_1 representa la superficie de la corteza cerebral, S_2 el

cuero cabelludo, f y g representan la fuente que se produce a partir de una crisis epiléptica. Las fuentes g pueden estar ubicadas de forma que ocupen una parte de la superficie de la corteza cerebral y otra parte en el volumen de la corteza cerebral.

Para resolver el problema de contorno, se suponen conocidas las fuentes, y se representan de la siguiente manera:

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sin k\theta,$$

$$g(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^1 \cos k\theta + g_k^2 \sin k\theta,$$

Para obtener la solución del modelo (3.26)-(3.30) se propone la solución

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 r^k + b_k^1 r^{k+2}) \cos k\theta + (c_k^1 r^k + d_k^1 r^{k+2}) \sin k\theta,$$

$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta,$$

La solución del modelo se obtiene a partir de la solución de los dos modelos anteriores, es decir, la medición está dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^1 R_1^{k+1} R_2^k}{k E_k} - \frac{\sigma_1 f_k^1 R_1^{2k+2} R_2^k}{k(k+1) E_k} \right) \cos k\theta$$

$$+ \left(\frac{2g_k^2 R_1^{k+1} R_2^k}{k E_k} - \frac{\sigma_1 f_k^2 R_1^{2k+2} R_2^k}{k(k+1) E_k} \right) \sin k\theta,$$

donde $E_k = (\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}$, R_1 es el radio del cerebro, R_2 es el radio de la cabeza, σ_1 y σ_2 indican las conductividades promedios de las regiones Ω_1 y Ω_2 , constantes y diferentes entre sí, θ indica la posición del electrodo sobre el cuero cabelludo, f_k^i y g_k^i , $i = 1, 2$ son los coeficientes de Fourier de la fuente volumétrica f y la superficial g que componen a la fuente total.

Conclusiones, resultados y perspectivas

El problema de identificación de focos epilépticos es un problema de interés ya que en México, la epilepsia tiene una prevalencia de 10.8 – 20 casos por 1000 habitantes, es decir, el 1.08 – 2 % de la población total [69]. En este trabajo, se propuso un modelo para representar a los focos epilépticos en la corteza cerebral que considera que estos son la suma de una fuente cortical y una fuente volumétrica. Así, la contribución del foco epiléptico tiene dos vertientes, cada una asociada a su posición en la corteza cerebral. Para la vertiente que se asocia con la parte de la superficie de la corteza, se propuso un modelo para su representación, que sigue las ideas para el caso volumétrico y que permite representar matemáticamente esta actividad epiléptica cortical, dando con ello la posibilidad de usar modelos matemáticos conocidos que han sido empleados para fuentes corticales de otra naturaleza [43].

Un punto importante que deben considerarse para el problema de identificación de fuentes es que es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard, debido a que diferentes configuraciones de la fuente pueden producir la misma medición y porque pequeños cambios en los datos de entrada pueden producir grandes variaciones en la fuente buscada. A través del modelo que se propuso para representar a una fuente dipolar asociada a un foco epiléptico y localizada sobre la superficie de la corteza cerebral y con el método de regularización de Tikhonov, se obtuvo un algoritmo estable para identificar a los parámetros de la fuente sobre la superficie de la corteza cerebral. Para llegar al algoritmo, se obtuvieron los siguientes resultados que a continuación se describen:

Se presentaron tres modelos para la localización de fuentes en la corteza cerebral, es decir, la fuente ubicada sobre la superficie de la corteza cerebral, la fuente ubicada en el volumen de la corteza cerebral y la fuente ubicada tanto en la superficie como el volumen de la corteza cerebral.

Para el caso del problema de contorno superficial, se demostró un resultado de existencia y unicidad de su solución clásica, se realizó una demostración de la unicidad para la solución del problema inverso, y se obtuvo la solución del problema directo e inverso del problema para el caso de dos y tres dimensiones.

Se encontraron los parámetros que caracterizan a la fuente, primero el centro y luego el momento dipolar. Se propuso el modelo con variable temporal para poder generar un EEG sintético, del cual se obtiene los parámetros de la fuente. Para obtener la fuente a partir de un EEG real (EEG que obtiene el especialista al medir la actividad eléctrica del cerebro) es necesario primero realizar la interpolación de los datos en cada instante de tiempo y luego incluir el resultado que se presenta en la tesis, es decir, las expresiones de la fuente regularizada y la del momento dipolar.

Para el caso en que la fuente se encuentre ubicada en el volumen de la corteza cerebral se presentaron las soluciones del problema directo en dos y tres dimensiones; estos resultados se emplearán para trabajos futuros en la solución del problema inverso. Adicionalmente, se presentó para el caso de la fuente tanto superficial como volumétrica la solución del problema directo en dos dimensiones, la cual es el inicio de trabajos futuros para la solución del problema inverso y que se realice el algoritmo para obtener los parámetros de la fuente.

Como trabajo futuro podrían utilizarse EEG reales para validar los resultados obtenidos y/o generar EEG sintéticos considerando el tiempo y algoritmos de identificación estable de las fuentes ubicadas en el volumen, además considerar geometrías complejas asociadas a las capas que componen la cabeza y obtener las soluciones de los problemas directo e inverso por medio de los resultados obtenidos en este trabajo.

Apéndice A

Solución del problema de contorno superficial

A.1. Problema directo en dos dimensiones

Se halla la solución del problema de contorno superficial (2.1)-(2.5). Se comenzará con la solución del problema directo, es decir, se conoce la fuente g y se calcula el potencial (medición) producida por dicha fuente. Así, se considera que la fuente está dada por:

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^1 \cos k\theta + g_k^2 \sin k\theta.$$

La solución se busca en la forma

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + b_k^1 r^k \sin k\theta,$$
$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta.$$

La condiciones (2.1) y (2.2) se cumplen por proponer una solución en armónicos circulares, así que considerando la condición (2.3) y evaluando $r = R_1$ se tiene,

$$a_k^1 R_1^k = a_k^2 R_1^k + b_k^2 R_1^{-k}, \quad (\text{A.1})$$

$$b_k^1 R_1^k = c_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}. \quad (\text{A.2})$$

Ahora se considera la ecuación (2.4), para esto se necesita obtener a $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ y $\frac{\partial u_2}{\partial r}$, al

resultado obtenido se evalúa en $r = R_1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^1 r^{k-1}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k^1 r^{k-1}) \sin k\theta, \\ \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \Big|_{r=R_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_1 k(a_k^1 R_1^{k-1}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_1 k(b_k^1 R_1^{k-1}) \sin k\theta, \\ \frac{\partial u_2}{\partial r}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 r^{k-1} - b_k^2 r^{-k-1}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} k(c_k^2 r^{k-1} - d_k^2 r^{-k-1}) \sin k\theta, \\ \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \Big|_{r=R_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_2(a_k^2 R_1^{k-1} - b_k^2 R_1^{-k-1}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_2(c_k^2 R_1^{k-1} - d_k^2 R_1^{-k-1}) \sin k\theta.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la condición (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_1 k a_k^1 R_1^{k-1} &= k\sigma_2(a_k^2 R_1^{k-1} - b_k^2 R_1^{-k-1}) + g_k^1, \\ \sigma_1 k b_k^1 R_1^{k-1} &= k\sigma_2(c_k^2 R_1^{k-1} - d_k^2 R_1^{-k-1}) + g_k^2,\end{aligned}$$

se multiplica por R_1 en las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned}\sigma_1 k a_k^1 R_1^k &= k\sigma_2(a_k^2 R_1^k - b_k^2 R_1^{-k}) + g_k^1 R_1, \\ \sigma_1 k b_k^1 R_1^k &= k\sigma_2(c_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}) + g_k^2 R_1.\end{aligned}$$

Se sustituye la ecuación (A.1) y (A.2) en las ecuaciones anteriores y se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_1(a_k^2 R_1^k + b_k^2 R_1^{-k}) &= \sigma_2(a_k^2 R_1^k - b_k^2 R_1^{-k}) + \frac{g_k^1 R_1}{k}, \\ \sigma_1(c_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}) &= \sigma_2(c_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}) + \frac{g_k^2 R_1}{k},\end{aligned}$$

agrupando términos semejantes

$$(\sigma_1 - \sigma_2)a_k^2 R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)b_k^2 R_1^{-k} = \frac{g_k^1 R_1}{k}, \quad (\text{A.3})$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)c_k^2 R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)d_k^2 R_1^{-k} = \frac{g_k^2 R_1}{k}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando la condición (2.5) y evaluando ($r = R_2$).

$$a_k^2 R_2^{k-1} - b_k^2 R_2^{-k-1} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$c_k^2 R_2^{k-1} - d_k^2 R_2^{-k-1} = 0, \quad (\text{A.6})$$

se considera la ecuación (A.5) para despejar

$$a_k^2 = \frac{b_k^2 R_2^{-k}}{R_2^k} = b_k^2 R_2^{-2k}, \quad (\text{A.7})$$

sustituyendo a (A.7) en la ecuación (A.3) se tiene

$$(\sigma_1 - \sigma_2)b_k^2 R_2^{-2k} R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)b_k^2 R_1^{-k} = \frac{g_k^1 R_1}{k},$$

factorizando a b_k^2

$$b_k^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)R_2^{-2k} R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)R_1^{-k}] = \frac{g_k^1 R_1}{k},$$

despejando lo anterior se tiene a

$$b_k^2 = \frac{g_k^1 R_1^{k+1} R_2^{2k}}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]}, \quad (\text{A.8})$$

sustituyendo a (A.8) en (A.7) se obtiene

$$a_k^2 = \frac{g_k^1 R_1^{k+1}}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]}.$$

De (A.6) se despeja

$$c_k^2 = \frac{d_k^2 R_2^{-k}}{R_2^k} = d_k^2 R_2^{-2k}, \quad (\text{A.9})$$

c_k^2 se sustituye en (A.4), obteniendo

$$(\sigma_1 - \sigma_2)d_k^2 R_2^{-2k} R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)c_k^2 R_1^{-k} = \frac{g_k^2 R_1}{k},$$

se factoriza a d_k^2

$$d_k^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)R_2^{-2k} R_1^k + (\sigma_1 + \sigma_2)R_1^{-k}] = \frac{g_k^2 R_1}{k},$$

al despejar a d_k^2 se llega a

$$d_k^2 = \frac{g_k^2 R_1^{k+1} R_2^{2k}}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]}. \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo a (A.10) en (A.9) se obtiene

$$c_k^2 = \frac{g_k^2 R_1^{k+1}}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]}.$$

Sustituyendo a_k^2 y b_k^2 en (A.1) se llega a

$$a_k^1 = \frac{g_k^1 (R_1^{2k} + R_2^{2k})}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]R_1^{k-1}}.$$

En (A.2) se sustituye a c_k^1 y d_k^1 para obtener

$$b_k^1 = \frac{g_k^2(R_1^{2k} + R_2^{2k})}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]R_1^{k-1}}.$$

En $u_1(r, \theta)$ y $u_2(r, \theta)$ se sustituyen a $a_k^1, b_k^2, a_k^2, b_k^1, c_k^2$ y d_k^2 para obtener la solución del problema de contorno (2.1)-(2.5). Cuando la solución $u_2(r, \theta)$ se evalúa en $r = R_2$, se obtiene la solución del problema directo que está dado por

$$\begin{aligned} V(\theta) &= u_2|_{S_2} = u_2(R_2, \theta) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^1 R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \right) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2g_k^2 R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \right) \sin k\theta, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

a lo que se le considera como la medición electroencefalográfica producida por la fuente, donde g_k^1 y g_k^2 son los coeficientes de Fourier de g , R_1 indica el radio del cerebro, R_2 el radio de la cabeza, σ_1 y σ_2 son las conductividades promedio de las dos regiones con las que se modela a la cabeza respectivamente, θ indicará la posición de cada electrodo ubicado sobre el cuero cabelludo.

A.2. Problema inverso en dos dimensiones

Ahora supongamos que la medición es conocida y se quiere obtener la posición del foco epiléptico, es decir, se va a obtener el centro de la función campana y el valor del momento dipolar. Para obtener el centro (foco epiléptico) se procede de la siguiente manera. Dada la medición

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sin k\theta,$$

donde V_k^1 y V_k^2 son los coeficientes de Fourier de V , se deben hallar los coeficientes de Fourier de la fuente (y con ello, a la fuente misma). Por otra parte, en la práctica los coeficientes de Fourier de V están dados con error, lo cual conlleva una inestabilidad numérica debido al mal planteamiento del problema inverso. A fin de tratar esta situación, se considera el siguiente funcional

$$J_\alpha(g) = \|A(g) - V\|_{L_2(S_2)}^2 + \alpha \|g\|_{L_2(S_1)}^2,$$

donde $\alpha > 0$ se elige adecuadamente. Para hallar la solución del problema inverso, se debe encontrar el operador adjunto A^* , ya que se utilizan las ecuaciones normales de la forma (1.3). Para ello, consideramos que $g \in L_2(S_1)$ y $h \in L_2(S_2)$

(ortogonal a las constantes). En este caso, podemos escribir a estas funciones en la forma:

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \sin k\theta,$$

$$h(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 \sin k\theta.$$

Para hallar al operador adjunto A^* de A , se usa la definición de operador adjunto:

$$\begin{aligned} \langle Ag, h \rangle_{L_2(S_2)} &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k g \cos k\theta, \sum_{j=1}^{\infty} h_j^1 \cos j\theta \right\rangle_{L_2(S_2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k g_k^1 \cos k\theta, h_k^1 \cos k\theta \rangle_{L_2(S_2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k g_k^2 \sin k\theta, h_k^2 \sin k\theta \rangle_{L_2(S_2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k^1 \cos k\theta, a_k h_k^1 \cos k\theta \rangle_{L_2(S_2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k^2 \sin k\theta, a_k h_k^2 \sin k\theta \rangle_{L_2(S_2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle g_k^1 \cos k\theta, \frac{R_2}{R_1} a_k h_k^1 \cos k\theta \right\rangle_{L_2(S_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle g_k^2 \sin k\theta, \frac{R_2}{R_1} a_k h_k^2 \sin k\theta \right\rangle_{L_2(S_1)} \\ &= \langle g, A^* h \rangle_{L_2(S_1)}. \end{aligned}$$

Así, el operador adjunto está dado por:

$$A^*(h) = \frac{R_2}{R_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j^1 \cos j\theta + a_j h_j^2 \sin j\theta.$$

Consideremos ahora que en vez de V tenemos la medición con error

$$V^\delta(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{k,\delta}^1 \cos k\theta + V_{k,\delta}^2 \sin k\theta, \quad (\text{A.12})$$

donde $V^\delta(\theta)$ es la suma de (A.11) más un error aleatorio producido por la función rand de MATLAB, además se debe cumplir que $\|V - V^\delta\|_{L_2(S_2)} \leq \delta$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (V_k^1 - V_{k,\delta}^1)^2 + (V_k^2 - V_{k,\delta}^2)^2 \leq \delta.$$

Sumar el error aleatorio, tiene por objetivo emular los errores que se cometen al realizar la medición electroencefalográfica.

Las ecuaciones normales asociadas al funcional de Tikhonov toman la forma:

$$A^* A g^\alpha + \alpha I g^\alpha = A^* V^\delta. \quad (\text{A.13})$$

Recordando que

$$A(g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k^1 \cos k\theta + a_k g_k^2 \sin k\theta,$$

y sustituyendo en (A.13) se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,\alpha}^1 \left(\frac{R_2(a_k)^2}{R_1} + \alpha \right) \cos k\theta + g_{k,\alpha}^2 \left(\frac{R_2(a_k)^2}{R_1} + \alpha \right) \sin k\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2 a_k}{R_1} V_{k,\delta}^1 \cos k\theta + \frac{R_2 a_k}{R_1} V_{k,\delta}^2 \sin k\theta, \end{aligned}$$

factorizando y agrupando términos semejantes se llega a

$$g^\alpha(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2 a_k}{R_2(a_k)^2 + \alpha R_1} [V_{k,\delta}^1 \cos k\theta + V_{k,\delta}^2 \sin k\theta], \quad (\text{A.14})$$

donde

$$a_k = \frac{2R_1^{k+1} R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]}.$$

A (A.14) se le considera como la fuente regularizada, con dicha expresión se obtiene el centro de la función campana, es decir, el foco epiléptico. Queda por obtener el momento dipolar $\vec{\mathbf{p}}$ para obtener toda $g(x)$.

A.3. Obtención del momento dipolar

Para obtener a $\vec{\mathbf{p}}$ se prosigue de la siguiente manera. Se considera el funcional

$$J_\alpha(g) = \|A(g) - v^\delta\|^2 + \alpha \|g\|^2,$$

donde

$$\begin{aligned} A(g(\theta)) &= \sum_{k=1}^N a_k g_k^1 \cos k\theta + a_k g_k^2 \sin k\theta, \\ g(\theta) &= \sum_{k=1}^N g_k^1 \cos k\theta + g_k^2 \sin k\theta, \\ v^\delta &= \sum_{k=1}^N v_k^{\delta,1} \cos k\theta + v_k^{\delta,2} \sin k\theta. \end{aligned}$$

Se van a obtener los valores de g_k^1 y g_k^2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_k^1 &= R_1 \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos k\theta d\theta, \\ g_k^2 &= R_1 \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin k\theta d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$g(\theta) = J^p \cdot n_1 = \vec{\mathbf{p}} \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cdot n_1,$$

$$x = (x_1, x_2) = (R_1 \cos \theta, R_1 \sin \theta),$$

$$a = (a_1, a_2) = (R_1 \cos \theta_0, R_1 \sin \theta_0),$$

$$M_\beta = \int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}},$$

$$n_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$\vec{\mathbf{p}} \cdot n_1 = p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta.$$

Así que

$$g_k^1 = R_1 \int_0^{2\pi} p_1 \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cos k\theta d\theta + R_1 \int_0^{2\pi} p_2 \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cos k\theta d\theta,$$

$$g_k^2 = R_1 \int_0^{2\pi} p_1 \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \sin k\theta d\theta + R_1 \int_0^{2\pi} p_2 \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \sin k\theta d\theta.$$

Vamos a considerar lo siguiente:

$$h_k^{1,1} = R_1 \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cos k\theta d\theta,$$

$$h_k^{1,2} = R_1 \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \cos k\theta d\theta,$$

$$h_k^{2,1} = R_1 \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \sin k\theta d\theta,$$

$$h_k^{2,2} = R_1 \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_\beta} \sin k\theta d\theta,$$

teniendo entonces a

$$g_k^1 = p_1 h_k^{1,1} + p_2 h_k^{1,2},$$

$$g_k^2 = p_1 h_k^{2,1} + p_2 h_k^{2,2}.$$

Se sustituyen los coeficientes g_k^1 y g_k^2 en:

$$\|A(g) - v^\delta\|^2 = \sum_{k=1}^N (a_k[p_1 h_k^{1,1} + p_2 h_k^{1,2}] - v_k^{\delta,1})^2 + \sum_{k=1}^N (a_k[p_1 h_k^{2,1} + p_2 h_k^{2,2}] - v_k^{\delta,2})^2.$$

De aquí se obtiene:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 h_1^{1,1} & a_1 h_1^{1,2} \\ a_2 h_2^{1,1} & a_2 h_2^{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_N h_N^{1,1} & a_N h_N^{1,2} \\ a_1 h_1^{2,1} & a_1 h_1^{2,2} \\ a_2 h_2^{2,1} & a_2 h_2^{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_N h_N^{2,1} & a_N h_N^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1^{\delta,1} \\ v_2^{\delta,1} \\ \vdots \\ v_N^{\delta,1} \\ v_1^{\delta,2} \\ v_2^{\delta,2} \\ \vdots \\ v_N^{\delta,2} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| B \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - v \right\|^2.$$

Ahora se considera a

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \sum_{k=1}^N (g_k^1)^2 + (g_k^2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^N (p_1 h_k^{1,1} + p_2 h_k^{1,2}) + (p_1 h_k^{2,1} + p_2 h_k^{2,2}). \end{aligned}$$

De aquí se halla que

$$\begin{pmatrix} h_1^{1,1} & h_1^{1,2} \\ h_2^{1,1} & h_2^{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ h_N^{1,1} & h_N^{1,2} \\ h_1^{2,1} & h_1^{2,2} \\ h_2^{2,1} & h_2^{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ h_N^{2,1} & h_N^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = C\vec{p}.$$

Luego se tiene

$$J_\alpha(g) = \|B\vec{p} - \vec{V}\|^2 + \alpha \|C\vec{p}\|^2.$$

Veamos que cuál es la derivada de

$$\|C\vec{p}\|^2 = J_C(\vec{p}),$$

$$\begin{aligned}
J_C(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) - J_C(\vec{\mathbf{p}}) &= \|C(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h})\|^2 - \|C\vec{\mathbf{p}}\|^2 \\
&= \langle C(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}), C(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) \rangle - \|C\vec{\mathbf{p}}\|^2 \\
&= \langle C\vec{\mathbf{p}} + C\vec{h}, C\vec{\mathbf{p}} + C\vec{h} \rangle - \|C\vec{\mathbf{p}}\|^2 \\
&= \langle C\vec{\mathbf{p}}, C\vec{\mathbf{p}} \rangle + 2\langle C\vec{\mathbf{p}}, C\vec{h} \rangle + \|C\vec{h}\|^2 - \|C\vec{\mathbf{p}}\|^2 \\
&= 2\langle C\vec{\mathbf{p}}, C\vec{h} \rangle + \|C\vec{h}\|^2 \\
&= \langle 2C^t C\vec{\mathbf{p}}, h \rangle.
\end{aligned}$$

Ahora para el siguiente término

$$\|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 = J_B(\vec{\mathbf{p}}),$$

$$\begin{aligned}
J_B(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) - J_B(\vec{\mathbf{p}}) &= \|B(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) - \vec{V}\|^2 - \|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 \\
&= \langle B(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) - \vec{V}, B(\vec{\mathbf{p}} + \vec{h}) - \vec{V} \rangle - \|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 \\
&= \langle B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V} + B\vec{h}, B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V} + B\vec{h} \rangle - \|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 \\
&= \|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 + 2\langle B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}, Bh \rangle + \|B\vec{h}\|^2 - \|B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}\|^2 \\
&= 2\langle B^t(B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}), h \rangle + \|Bh\|^2 \\
&= \langle 2B^t(B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}), h \rangle.
\end{aligned}$$

Así, se obtiene que

$$DJ_\alpha(\vec{\mathbf{p}}) = 2B^t(B\vec{\mathbf{p}} - \vec{V}) + 2\alpha C^t C\vec{\mathbf{p}}.$$

Como queremos hallar el mínimo se debe cumplir que

$$DJ_\alpha(\vec{\mathbf{p}}) = 0,$$

de donde

$$(B^t B + \alpha C^t C)\vec{\mathbf{p}} = B^t \vec{V}.$$

Finalmente,

$$\vec{\mathbf{p}} = (B^t B + \alpha C^t C)^{-1} B^t \vec{V}. \quad (\text{A.15})$$

Mediante la expresión (A.15) se obtiene el valor de $\vec{\mathbf{p}}$. De esto se encuentra la fuente total g .

A.4. Problema directo en tres dimensiones

Se considera la fuente de la siguiente manera, para la solución del modelo (2.1)-(2.5).

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{nm} y_{nm}(\theta, \phi),$$

y se propone la solución del modelo como:

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm} r^n + b_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi).$$

Considerando la condición $u_1 = u_2$ en $S_1, r = R_1$, se obtiene

$$c_{nm} R_1^n = (a_{nm} R_1^n + b_{nm} R_1^{-n-1}). \quad (\text{A.16})$$

Ahora se considera la condición $\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g$, para esto se deben obtener las derivadas normales y evaluar en $r = R_1$,

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \Big|_{r=R_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sigma_1 n c_{nm} R_1^{n-1} y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \Big|_{r=R_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sigma_2 (n a_{nm} R_1^{n-1} - (n+1) b_{nm} R_1^{-n-2}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

multiplicando las derivadas normales por la conductividad y sumando la fuente se obtiene,

$$\sigma_1 n c_{nm} R_1^{n-1} = \sigma_2 (n a_{nm} R_1^{n-1} - (n+1) b_{nm} R_1^{-n-2}) + g_{nm}. \quad (\text{A.17})$$

Multiplicando por R_1 a (A.17) y sustituyendo lo que se obtuvo en (A.16), se tiene

$$\sigma_1 n (a_{nm} R_1^n + b_{nm} R_1^{-n-1}) = \sigma_2 (n a_{nm} R_1^n - (n+1) b_{nm} R_1^{-n-1}) + g_{nm},$$

agrupando términos semejantes se llega a

$$(\sigma_1 - \sigma_2) n a_{nm} R_1^n + (n \sigma_1 - (n-1) \sigma_2) b_{nm} R_1^{-n-1} = g_{nm}. \quad (\text{A.18})$$

Al considerar la condición $\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0$, se llega a

$$n a_{nm} R_2^{n-1} - (n+1) b_{nm} R_2^{-n-2} = 0,$$

de donde se despeja a

$$a_{nm} = \frac{(n+1) b_{nm} R_2^{-n-2}}{n R_2^{n-1}} = \frac{n+1}{n} b_{nm} R_2^{-2n-1}. \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo a (A.19) en (A.18) y factorizando términos semejantes se obtiene la expresión

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1) R_2^{-2n-1} R_1^n + (n \sigma_1 - (n-1) \sigma_2) R_1^{-n-1}] b_{nm} = g_{nm}, \quad (\text{A.20})$$

de donde se despeja

$$b_{nm} = \frac{g_{nm}}{[(\sigma_1 - \sigma_2)(n+1)R_2^{-2n-1}R_1^n + (n\sigma_1 - (n-1)\sigma_2)R_1^{-n-1}]},$$

y multiplicando lo anterior por $\frac{R_1^{n+1}}{R_1^{2n+1}}$ y $\frac{R_2^{2n+1}}{R_2^{2n+1}}$ se llega a

$$b_{nm} = \frac{g_{nm}R_1^{n+2}R_2^{2n+1}}{[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]}, \quad (\text{A.21})$$

sustituyendo (A.21) en (A.19) se obtiene a

$$a_{nm} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{g_{nm}R_1^{n+2}}{[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]}. \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo a (A.22) y (A.21) en $u_2(r, \theta, \phi)$, se obtiene la solución del PCS en tres dimensiones,

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(n+1)g_{nm}R_1^{n+2}}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]} r^n + \frac{g_{nm}R_1^{n+2}R_2^{2n+1}}{[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]} r^{-n-1} \right) y_{nm}(\theta, \phi).$$

Para la solución del problema directo, se evalúa a $r = R_2$ en la solución del PCS, obteniendo así,

$$V(\theta, \phi) = u_2(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(2n+1)g_{nm}R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]} \right) y_{nm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.23})$$

a lo que se le considera como la medición electroencefalográfica producida por g_{nm} . Los datos con error V_δ son obtenidos agregando un error aleatorio usando la función rand de MATLAB, definiendo

$$v_\delta = V(\theta, \phi) + \text{Error}, \quad (\text{A.24})$$

donde $\text{Error} = \sqrt{6\delta} \max |V(R_2, \theta, \phi)| / \pi n \sqrt{2n+1} \text{rand}(1, n)$.

Para obtener a $g(\theta, \phi)$ se hace mediante la aproximación $g_N(\theta, \phi)$ de la forma siguiente,

$$g_N(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n g_{nm}^1 Y_{nm}^1(\theta, \phi) + g_{nm}^2 Y_{nm}^2(\theta, \phi), \quad (\text{A.25})$$

donde

$$Y_{nm}^1(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi, \\ Y_{nm}^2(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi,$$

g_{nm}^1 y g_{nm}^2 son los coeficientes de Fourier de $g(\theta, \phi)$, dados por la forma:

$$g_{nm}^1 = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi g(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \sin \theta d\theta \right] d\phi}{\|Y_n^{(m)}\|^2},$$

$$g_{nm}^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi g(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \sin \theta d\theta \right] d\phi}{\|Y_n^{(m)}\|^2},$$

de donde

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m (n+m)!}{2n+1(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & \text{para } m=0; \\ 1, & \text{para } m>0. \end{cases}$$

La parte $P_n^m(\cos \theta)$ se calcula mediante los polinomios de Legendre dados por MATLAB, a partir de $P_n^m = \text{legendre}(n, x)$, donde $x = \cos \theta$.

A.5. Problema inverso en tres dimensiones

Para el problema inverso del modelo (2.1)-(2.5), se va a obtener mediante las ecuaciones normales,

$$A^* Ag + \alpha Ig = A^* V,$$

donde A es la solución del problema directo y A^* se va a obtener mediante el modelo siguiente:

$$\Delta w_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (\text{A.26})$$

$$\Delta w_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (\text{A.27})$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial n_2} = \psi \quad \text{sobre } S_2. \quad (\text{A.30})$$

Para obtener la solución del problema se propone que:

$$w_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$w_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm} r^n + b_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

y se considera conocida

$$\psi(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{nm} y_{nm}(\theta, \phi).$$

Se puede ver que $w_1(r, \theta, \phi)$ y $w_2(r, \theta, \phi)$ cumplen con la ecuación de Laplace. De las ecuaciones (A.28)-(A.30) se obtienen los coeficientes, a_{nm} , b_{nm} y c_{nm} , a partir de algunos cálculos, obteniendo así el resultado

$$w_2(R_1, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(2n+1)\psi_{nm}R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]} \right) y_{nm}(\theta, \phi),$$

que da la regla de correspondencia de A^* . Sustituyendo A , A^* y V_δ , en las ecuaciones normales se llega a :

$$g(\theta, \phi) = \frac{R_2 a_{nm}}{R_2 (a_{nm})^2 + \alpha R_1} (V_{nm} y_{nm}(\theta, \varphi)), \quad (\text{A.31})$$

donde

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)R_1^{n+2}R_2^n}{n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2n+1} + (n(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2)R_2^{2n+1}]},$$

y V_{nm} son los coeficientes de Fourier de la medición y $y_{nm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos.

Apéndice B

Solución asociada al problema de contorno volumétrico

B.1. Solución del problema directo en dos dimensiones

Se va a suponer que se conoce la fuente del modelo (3.1)-(3.5), expresada de la siguiente manera:

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sin k\theta.$$

Para obtener la solución del modelo (3.1)-(3.5) se propone la solución en la forma

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 r^k + b_k^1 r^{k+2}) \cos k\theta + (c_k^1 r^k + d_k^1 r^{k+2}) \sin k\theta,$$
$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta.$$

Calculando el laplaciano a u_1 se halla

$$\Delta u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 \Delta(r^k \cos k\theta) + b_k^1 \Delta(r^{k+2} \cos k\theta) + c_k^1 \Delta(r^k \sin k\theta) + d_k^1 \Delta(r^{k+2} \sin k\theta). \quad (\text{B.1})$$

Recuerde que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Después de los cálculos se llega a que

$$\begin{aligned}\Delta(r^k \cos k\theta) &= 0, \\ \Delta(r^{k+2} \cos k\theta) &= 4(k+1)r^k \cos k\theta, \\ \Delta(r^k \sin k\theta) &= 0, \\ \Delta(r^{k+2} \sin k\theta) &= 4(k+1)r^k \sin k\theta.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (B.1) e igualando a $f(r, \theta)$ se considera así (3.1), dado como

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4(k+1)b_k^1 r^k \cos k\theta + 4(k+1)d_k^1 r^k \sin k\theta = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sin k\theta.$$

De aquí se tiene que

$$b_k^1 r^k 4(k+1) = f_k^1 r^k \quad \text{entonces} \quad b_k^1 = \frac{f_k^1}{4(k+1)}, \quad (\text{B.2})$$

$$d_k^1 r^k 4(k+1) = f_k^2 r^k \quad \text{entonces} \quad d_k^1 = \frac{f_k^2}{4(k+1)}. \quad (\text{B.3})$$

La ecuación (3.2) se cumple al aplicar el laplaciano a u_1 . Ahora se considera la condición (3.3) y se evalúa $r = R_1$, con lo cual se obtiene que

$$a_k^1 R_1^k + b_k^1 R_1^{k+2} = a_k^2 R_1^k + b_k^2 R_1^{-k}, \quad (\text{B.4})$$

$$c_k^1 R_1^k + d_k^1 R_1^{k+2} = c_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}. \quad (\text{B.5})$$

Para la condición (3.4) se calcula

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (ka_k^1 r^{k-1} + (k+2)b_k^1 r^{k+1}) \cos k\theta + (kc_k^1 r^{k-1} + (k+2)d_k^1 r^{k+1}) \sin k\theta, \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (ka_k^2 r^{k-1} - kb_k^2 r^{-k-1}) \cos k\theta + (kc_k^2 r^{k-1} - kd_k^2 r^{-k-1}) \sin k\theta.\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.4) y evaluando en $r = R_1$ se tiene

$$\sigma_1 ka_k^1 R_1^{k-1} + \sigma_1 (k+2)b_k^1 R_1^{k+1} = \sigma_2 ka_k^2 R_1^{k-1} - \sigma_2 kb_k^2 R_1^{-k-1}, \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_1 kc_k^1 R_1^{k-1} + \sigma_1 (k+2)d_k^1 R_1^{k+1} = \sigma_2 kc_k^2 R_1^{k-1} - \sigma_2 kd_k^2 R_1^{-k-1}. \quad (\text{B.7})$$

Considerando la ecuación (3.5) y evaluando en $r = R_2$ se tiene

$$ka_k^2 R_2^{k-1} - kb_k^2 R_2^{-k-1} = 0 \quad \text{entonces} \quad b_k^2 = a_k^2 R_2^{2k}, \quad (\text{B.8})$$

$$kc_k^2 R_2^{k-1} - kd_k^2 R_2^{-k-1} = 0 \quad \text{entonces} \quad d_k^2 = c_k^2 R_2^{2k}. \quad (\text{B.9})$$

Se multiplica (B.4) por $\sigma_2 k R_1^{-1}$ para obtener

$$\sigma_2 ka_k^1 R_1^{k-1} + \sigma_2 kb_k^1 R_1^{k+1} = \sigma_2 ka_k^2 R_1^{k-1} + \sigma_2 kb_k^2 R_1^{-k-1}. \quad (\text{B.10})$$

Se suman (B.4) y (B.10), se agrupan y se eliminan términos, quedando la expresión:

$$ka_k^1 R_1^{k-1}(\sigma_2 + \sigma_1) + b_k^1 R_1^{k+1}(\sigma_2 k + \sigma_1(k+2)) = 2\sigma_2 k a_k^2 R_1^{k-1}. \quad (\text{B.11})$$

De la ecuación (B.4) se despeja a_k^1 de tal forma que quede en términos de a_k^2 y ya que $b_k^2 = a_k^2 R_2^{2k}$ se llega a

$$a_k^1 = a_k^2 + a_k^2 R_2^{2k} R_1^{-2k} - \frac{f_k^1 R_1^2}{4(k+1)}. \quad (\text{B.12})$$

Sustituyendo a (B.12) y (B.8) en la expresión (B.11) y agrupando los términos que contienen a_k^2 , se llega a:

$$\begin{aligned} & a_k^2 [k R_1^{k-1}(\sigma_1 + \sigma_2) + k R_2^{2k} R_1^{-k-1}(\sigma_2 + \sigma_1) - 2k\sigma_2 R_1^{k-1}] = \\ & \frac{f_k^1 R_1^{k+1}}{4(k+1)} [k(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_2 k + \sigma_1(k+2))]. \end{aligned}$$

Luego

$$a_k^2 = \frac{f_k^1 R_1^{k+1} (k(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_2 k + \sigma_1(k+2)))}{4(k+1)k [R_1^{k-1}(\sigma_1 + \sigma_2) + R_2^{2k} R_1^{-k-1}(\sigma_2 + \sigma_1) - 2\sigma_2 R_1^{k-1}]}.$$

Eliminado términos semejantes llegamos a que

$$a_k^2 = -\frac{f_k^1 R_1^{2k+2} \sigma_1}{2(k+1)k [(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \quad (\text{B.13})$$

Como $b_k^2 = a_k^2 R_2^{2k}$, entonces sustituimos el resultado de (B.13), obteniendo de esta manera a

$$b_k^2 = -\frac{f_k^1 R_1^{2k+2} R_2^{2k} \sigma_1}{2(k+1)k [(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}]} \quad (\text{B.14})$$

Se multiplica (B.5) por $\sigma_2 k R_1^{-1}$ y se llega a

$$\sigma_2 k c_k^1 R_1^{k-1} + \sigma_2 k d_k^1 R_1^{k+1} = \sigma_2 k c_k^2 R_1^{k-1} + \sigma_2 k d_k^2 R_1^{-k-1}. \quad (\text{B.15})$$

Sumando los resultados de (B.15) con (B.7) se obtiene lo siguiente

$$kc_k^1 R_1^{k-1}(\sigma_2 + \sigma_1) + d_k^1 R_1^{k+1}(\sigma_2 k + \sigma_1(k+2)) = 2\sigma_2 k c_k^2 R_1^{k-1}. \quad (\text{B.16})$$

De la ecuación (B.5) se despeja c_k^1 de tal forma que quede en términos de c_k^2 . Tomando en cuenta que $d_k^2 = c_k^2 R_2^{2k}$, se llega a

$$c_k^1 = c_k^2 + c_k^2 R_2^{2k} R_1^{-2k} - \frac{f_k^1 R_1^2}{4(k+1)}. \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo (B.17) y (B.9) en (B.16), agrupando términos que contienen c_k^2 y eliminando términos se llega a

$$c_k^2 = \frac{-f_k^2 R_1^{2k+2} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \quad (\text{B.18})$$

Ya que $d_k^2 = c_k^2 R_2^{2k}$, al sustituir (B.18), se obtiene

$$d_k^2 = \frac{-f_k^2 R_1^{2k+2} R_2^{2k} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \quad (\text{B.19})$$

Ahora, sustituyendo los valores de los coeficientes a_k^2 , b_k^2 , c_k^2 y d_k^2 en la expresión

$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta, \quad (\text{B.20})$$

se halla

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-f_k^1 R_1^{2k+2} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} r^k \cos k\theta \\ &+ \frac{-f_k^1 R_1^{2k+2} R_2^{2k} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} r^{-k} \cos k\theta \\ &+ \frac{-f_k^2 R_1^{2k+2} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} r^k \sin k\theta \\ &+ \frac{-f_k^2 R_1^{2k+2} R_2^{2k} \sigma_1}{2(k+1)k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} r^{-k} \sin k\theta. \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

El resultado (B.21) es la solución del problema de contorno (3.1)-(3.5) en la región Ω_1 . Si evaluamos en (B.21) a $r = R_2$ se obtiene la solución del problema directo, es decir,

$$\begin{aligned} u_2(R_2, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-\sigma_1 f_k^1 R_1^{2k+2} R_2^k}{k(k+1)[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \right] \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-\sigma_1 f_k^2 R_1^{2k+2} R_2^k}{k(k+1)[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \right] \sin k\theta, \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

es el potencial producido por la fuente $f(r, \theta)$ y corresponde a la medición teórica del potencial (EEG teórico).

B.2. Solución del problema directo en tres dimensiones

Considerando el modelo (3.1)-(3.5), se va a resolver para el caso de tres dimensiones en esferas concéntricas. Se proponen a la fuente y a los potenciales de la

siguiente manera:

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{n+2}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (C_{nm} r^n + D_{nm} r^{-n-1}) y_{nm}(\theta, \phi).$$

Considerando la condición (3.1) del modelo, de [37], se sabe

$$\Delta u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm} (4n + 6) r^n y_{nm}(\theta, \phi),$$

así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm} (4n + 6) r^n y_{nm}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} r^n y_{nm}(\theta, \phi).$$

Despejando a B_{nm}

$$B_{nm} = \frac{f_{nm}}{(4n + 6)}. \quad (\text{B.23})$$

Ahora se considera la ecuación (3.3) y se evalúa en $r = R_1$

$$A_{nm} R_1^n + B_{nm} R_1^{n+2} = C_{nm} R_1^n + D_{nm} R_1^{-n-1}. \quad (\text{B.24})$$

Al considerar la condición (3.4) se obtiene

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n A_{nm} r^{n-1} + (n+2) B_{nm} r^{n+1}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_1}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n C_{nm} r^{n-1} - (n+1) D_{nm} r^{-n-2}) y_{nm}(\theta, \phi),$$

evaluando lo anterior en (3.4) y tomando $r = R_1$ se llega a

$$\sigma_1 (n A_{nm} R_1^{n-1} + (n+2) B_{nm} R_1^{n+1}) = \sigma_2 (n C_{nm} R_1^{n-1} - (n+1) D_{nm} R_1^{-n-2}). \quad (\text{B.25})$$

De la ecuación (3.5) y evaluando en $r = R_2$ se tiene

$$\sigma_2 (n C_{nm} R_2^{n-1} - (n+1) D_{nm} R_2^{-n-2}) = 0. \quad (\text{B.26})$$

De (B.26) se despeja D_{nm}

$$D_{nm} = \frac{nC_{nm}R_2^{2n+1}}{(n+1)}. \quad (\text{B.27})$$

Multiplicando (B.24) por $\sigma_2 R^{-1}(n+1)$, queda

$$\sigma_2(n+1)A_{nm}R_1^{n-1} + \sigma_2(n+1)B_{nm}R_1^{n+1} = \sigma_2(n+1)C_{nm}R_1^{n-1} + \sigma_2(n+1)D_{nm}R_1^{-n-2}.$$

Sumando la expresi3n anterior con (B.25) se tiene

$$\begin{aligned} A_{nm}R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + \sigma_1 n) + B_{nm}R_1^{n+1}(\sigma_2(n+1) + \sigma_1(n+2)) = \\ C_{nm}R_1^{n-1}(2n\sigma_2 + \sigma_2). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Sustituyendo (B.23) y (B.27) en (B.24) y dejando a A_{nm} en t3rminos de C_{nm} , es decir,

$$\begin{aligned} A_{nm}R_1^n + \frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+2} &= C_{nm}R_1^n + \frac{nC_{nm}}{(n+1)}R_2^{2n+1}R_1^{-n-1} \\ A_{nm} &= \frac{C_{nm}}{R_1^n} \left(R_1^n + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-n-1}}{(n+1)} \right) - \frac{f_{nm}R_1^{n+2}}{(4n+6)} \\ A_{nm} &= C_{nm} \left(1 + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-n-1}}{(n+1)} \right) - \frac{f_{nm}R_1^2}{(4n+6)}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Sustituyendo (B.29) en (B.28) se tiene

$$\begin{aligned} &\left[C_{nm} \left(1 + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-2n-1}}{(n+1)} \right) - \frac{f_{nm}R_1^2}{(4n+6)} \right] R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) \\ &+ \frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+1}(\sigma_2(n+1) + \sigma_1(n+2)) = C_{nm}R_1^{n-1}(\sigma_2(2n+1)), \\ &C_{nm} \left(1 + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-2n-1}}{(n+1)} \right) R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) \\ &- \frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^2R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) \\ &- C_{nm}R_1^{n-1}(\sigma_2(2n+1)) = -\frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+1}(\sigma_2(n+1) + \sigma_1(n+2)), \\ &C_{nm} \left(1 + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-2n-1}}{(n+1)} \right) R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) - C_{nm}R_1^{n-1}(\sigma_2(2n+1)) = \\ &- \frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+1}(\sigma_2(n+1) + \sigma_1(n+2)) + \frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1), \\ &C_{nm} \left[\left(1 + \frac{nR_2^{2n+1}R_1^{-2n-1}}{(n+1)} \right) R_1^{n-1}(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) - R_1^{n-1}(\sigma_2(2n+1)) \right] = \\ &\frac{f_{nm}}{(4n+6)}R_1^{n+1} [(\sigma_2(n+1) + n\sigma_1) - (\sigma_2(n+1) + \sigma_1(n+2))]. \end{aligned}$$

Multiplicando término a término se tiene

$$\begin{aligned} C_{nm} & [(n+1)^2 \sigma_2 R_1^{n-1} + n(n+1) \sigma_1 R_1^{n-1} + n(n+1) \sigma_2 R_2^{2n+1} R_1^{-n-2} \\ & + n^2 \sigma_1 R_2^{2n+1} R_1^{-n-2} - 2n(n+1) \sigma_2 R_1^{n-1} - (n+1) \sigma_2 R_1^{n-1}] = \\ & \frac{f_{nm}}{(4n+6)} R_1^{n+1} [n\sigma_2 + \sigma_2 + n\sigma_1 - n\sigma_2 - \sigma_2 - \sigma_1 n - 2\sigma_1]. \end{aligned}$$

Desarrollando los términos del denominador y eliminando términos semejantes se llega

$$C_{nm} = \frac{f_{nm} R_1^{n+1} (-2\sigma_1)(n+1)}{(4n+6)[(-n^2\sigma_2 + n^2\sigma_1 + n\sigma_1 - n\sigma_2)R_1^{n-1} + (n(n+1)\sigma_2 + n^2\sigma_1)R_2^{2n+1} R_1^{-n-2}]}.$$

Factorizando se tiene

$$C_{nm} = \frac{f_{nm} R_1^{n+1} (-2\sigma_1)(n+1)}{(4n+6)[(n(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{n-1} + n((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1} R_1^{-n-2}]}.$$

Multiplicando la expresión anterior por $\frac{R_1^{n+2}}{R_1^{n+2}}$, se llega

$$C_{nm} = \frac{-2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} (n+1)}{(4n+6)n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{2n+1} + ((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1}]} \quad (\text{B.30})$$

Para obtener D_{nm} se evalúa (B.30) en (B.27)

$$D_{nm} = \frac{-2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} R_2^{2n+1}}{(4n+6)[((n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{2n+1} + ((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1}]} \quad (\text{B.31})$$

Los resultados obtenidos en (B.31) y (B.30) se sustituyen en $u_2(r, \theta, \phi)$ para así ya obtener la solución del problema de contorno (3.1)-(3.5).

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta, \phi) & = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{-2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} (n+1)}{(4n+6)n[(n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{2n+1} + ((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1}] r^n + \\ & \frac{-2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} R_2^{2n+1}}{(4n+6)[((n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{2n+1} + ((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1}]} r^{-n-1}, \end{aligned}$$

evaluando $r = R_2$, factorizando términos semejantes se llega a la solución del problema directo.

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta, \phi) & = \quad (\text{B.32}) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n - \left(\frac{n+1}{n} + 1 \right) \frac{2\sigma_1 f_{nm} R_1^{2n+3} R_2^n}{D_n}. \end{aligned}$$

donde $D_n = (4n+6)[((n+1)(\sigma_1 - \sigma_2))R_1^{2n+1} + ((n+1)\sigma_2 - n\sigma_1)R_2^{2n+1}]$.

Apéndice C

Publicaciones y asistencias a congresos

A continuación se enuncian las publicaciones y ponencias.

C.1. Artículos publicados

Morín M., Netzahualcoyotl C., Oliveros J., Conde J., and Juárez H. Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. Volume 20, Issue 1, Pages 53 - 97 (Febrero 2019). DOI: <http://dx.doi.org/10.17654/DE020010053>.

Morín M., Netzahualcoyotl C., Oliveros J., Conde J., and Santillán A. Identificación Estable de Fuentes Asociadas a Focos Epilépticos Ubicadas sobre la Corteza. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*. Vol. 40, No. 3, Septiembre-Diciembre 2019, pp. 1-14, DOI: dx.doi.org/10.17488/RMIB.40.3.5.

C.2. Congresos

2015:

Presentación como cartel en XXV Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico, del 6 al 11 de septiembre de 2015, en las instalaciones de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

Presentación como cartel en el 2nd International Conference on Mathematics and its Applications (2CIMA), del 31 de agosto al 4 de septiembre de 2015, FCFM-BUAP, Puebla, México.

2016:

Presentación como cartel en el VII Congreso Nacional de Tecnología Aplicada a Ciencias de la Salud, del 16 al 18 de junio de 2016, Puebla, Puebla.

Presentación como cartel en el 3rd International Conference on Mathematics and its Applications (3CIMA), del 5 al 9 de septiembre de 2016, FCFM-BUAP, Puebla, México.

Presentación como cartel en el 2nd International Conference on Mathematical Modelling, del 13 al 14 de octubre de 2016, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

Conferencista en XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 23 al 28 de octubre de 2016, Aguascalientes.

Presentación como cartel Control and Inverse Problems in Partial Differential Equations, del 9 al 12 de noviembre de 2016, Huatulco, Oaxaca, México.

2017:

Presentación como cartel en el V Coloquio Internacional sobre Modelación Matemática en Ciencias Biológicas e Ingeniería, dentro del XXIV Feria de las Matemáticas el 9 de marzo de 2017 en Atlixco, Puebla.

Conferencista en el 4th International Conference on Mathematics and its Applications (4CIMA), del 4 al 8 de septiembre de 2017, FCFM-BUAP, Puebla, México.

Conferencista en el seminario algoritmos estables para el problema de identificación de fuentes bioeléctricas y su implementación en FPGA's , el 17 de noviembre de 2017, Eldorado, Culiacán, Sinaloa.

Presentación como cartel en la XXVI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico del 3 al 7 de julio de 2017, Villahermosa, Tabasco, México.

2018:

Presentación como cartel en el Sexto Coloquio Internacional sobre Modelación Matemática en Ciencias Biológicas e Ingeniería, dentro de la XXV Feria de las Matemáticas el 8 de marzo de 2018 en Atlixco, Puebla.

Presentación como cartel en la Semana Internacional del cerebro 2018, el 15 de marzo de 2018, FCQ, BUAP, Puebla, México.

Presentación como cartel en la XXVII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico dentro de la reunión conjunta de modelación matemática y optimización de la Red de Matemáticas y Desarrollo del CONACyT del 27 al 31 de

agosto de 2018, Aguascalientes, México.

Bibliografía

- [1] Almira José María, Aguilar Domingo Moisés. Neuromatemáticas, el lenguaje eléctrico del cerebro. Catarata, ISBN: 978-84-9097-219-9, 2016.
- [2] American Brain Tumors Association (ABTA). Sobre tumores cerebrales, manual para pacientes y cuidadores.
- [3] Amir A., 1994. Uniqueness of the generators of brain evoked potential maps. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. Vol. 41, pp. 1-11.
- [4] Bickford R. G. 1973. Clinical Electroencephalography. Medcom, New York.
- [5] Brogna Christian, Gil Robles Santiago, Duffau Huges. Brain tumors and epilepsy. Expert review of neurotherapeutics, 8(6), 2008. DOI: 10.1586/14737175.8.6.941.
- [6] Chang J., Yeih W. y Shieh M., 2001. On the modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem for the Laplace equation. Journal of Marine and Science Technology, 9(2): 113-121.
- [7] Constantin Von Economo. Cellular structure of the human cerebral cortex, editor: Triarhou L. C. Karger, ISBN: 978-3-8055-9062-4, 2009.
- [8] Cordoba J, Gottstein J, Blei AT. Glutamine, myo-inositol, and organic brain osmolytes after portocaval anastomosis in the rat: implications for ammonia-induced brain edema. Hepatology 1996; 24: 919-923 [PMID: 8855198]
- [9] Corno Antonio F., Festa Pierluigi. Congenital heart defects, decision making for surgery, volumen 3: CT-Scan and MRI, Springer, ISBN: 978-3-7985-1719-6, 2009.
- [10] De la Plaza Llamas Roberto, Ramia Angel José Manuel, Arteaga Peralta Vladimir, Hernández Cristobal Jaime, López Cristóal Joana. Calcificaciones cerebrales e hiperparatiroidismo primario. Elsevier, Cirugia española, 94(1), 2016.
- [11] Denisov A.M., 1999. Elements of the theory of inverse problems. VSP, Utrecht, Holanda.

- [12] El Badia A. and Ha-Duong T., Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements, *Inverse Problems*, vol. 14 (1998).
- [13] Empson Jacob. *Human brainwaves, the psychological significance of the electroencephalogram*, Springer, primera edición, ISBN: 9781349183128, 1986.
- [14] Engel Jerome, Pedley Timothy A. *Epilepsy: A comprehensive textbook (3 volume set)*, Lippincott Williams & Wilkins, ISBN: 0397516398, 1998.
- [15] Engl H.W. 1995. *Inverse problems*. Sociedad Matemática Mexicana UNAM. México.
- [16] Esqueda Liquidano Mauricio Armando, Gutierrez Cabrera José de Jesús, Cuélar Martínez Salvador, Vargas Tentori No, Barahona Ariez Erick, Flores Alvarez Eduardo, Ruiz Pérez Javier, Esqueda Liquidano Lilia, Loo Salomé Silvia. Edema cerebral I: fisiopatología, manifestaciones clónicas, diagnósticas y monitoreo neurológico. *Med Int Mex*, 30:548-590, 2014.
- [17] Fraguela A., 2007. *Notas para un curso de problemas inversos*. Manuscrito en preparación. FCFM-BUAP.
- [18] Fraguela Collar A. *Teoría espectral de operadores diferenciales publicados por el CINVESTAV, IPN*, 1991.
- [19] Fraguela A. Oliveros J., Grebennikov A., 2001. Planteamiento operacional y análisis del problema inverso Electro electroencefalográfico. *Revista Mexicana de Física* 47 (2) 162-174.
- [20] Fraguela A, Oliveros J., Morín M. "Modelos Matemáticos en Electroencefalografía inversa, Jiménez Pozo MA, Slavisa J, Bustamante J, Djorjevich S, Editores, Tópicos en la Teoría de Aproximación II. Textos Científicos Universidad Autónoma de Puebla, 2007; 73-95.
- [21] Grave R, González S and Gómez CM. "The biophysical foundations of the localization of encephalogram generators in the brain. The application of a distribution-type model to the localization of epileptic foci (in spanish)". *Rev. Neurol.*, 2004; 39: 748-756.
- [22] Heller L. *Return Current in Encephalography. Variational Principles*, *Biophysical Journal*, vol 57 (1990), pp. 601-606.
- [23] Hansen Enrique C. A., Battaglia Demian., Spiegler Andreas., Deco Gustavo., Jirsa Viktor K., *Functional connectivity dynamics: Modeling the switching behavior of the resting state*. Elsevier, *Neuroimagen* 105(2015) 525-535.
- [24] Harper Jeremy., Malone Stephen M., Lacano William G., *Testing the effects of adolescent alcohol use on adult conflict-related theta dynamics*. Elsevier *Clinical neurophysiology*.

- [25] Herculana Houzel Suzana. The human brain in numbers: a linearly scaled- up primate brain. *Frontiers in human neuroscience*, 2009, doi: org/10.3389/neuro.09.031.2009.
- [26] Isakov Victor. *Inverse problems for partial differential equations*, Springer, segunda edición, ISBN-13:978-0387-25364-0, 2006.
- [27] Isakov Victor. *Inverse source problems mathematical surveys and monographs*. Vol. 34. American Mathematical Society.
- [28] Jackson J. D (1980). *Electrodinámica clásica*. Ed. Alhambra.
- [29] Jalan R, Olde Damink SW, Deutz NE, Hayes PC, Lee A. Restoration of cerebral blood flow autoregulation and reactivity to carbon dioxide in acute liver failure by moderate hypothermia. *Hepatology* 2001; 34: 50-54 [PMID: 11431733 DOI: 10.1053/jhep.2001.25386]
- [30] Kirsch A., 1996. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer Verlag.
- [31] Kress R., *Linear Integral Equations*. Springer Verlag. 1989.
- [32] Lara García José, Mendieta Marcillo Gabriel. Revisión de un paciente con calcificaciones en los núcleos basales, *Intra Med, Journal*, vol. 4, num. 2.
- [33] Maestu F. *Conectividad funcional y anatómica en el cerebro humano, análisis de señales y aplicaciones en ciencias de la salud*. Elsevier, primera edición, ISBN: 978-84-9022-525-7, 2015.
- [34] Maestu Fernando, González-Marquós Javier, le Marty Gis, Nadal Marcos, Cela-Conde Camilo José y Ortiz Tomás, *La magnetoencefalografía: una nueva herramienta para el estudio de los procesos cognitivos básicos*, *Psicothema*, vol. 17, pp. 459-464, 2005.
- [35] Marzetti Laura., Del Gratta Casimo., Notte Guido. *Understanding brain connectivity from EEG data by identifying systems composed of interacting sources*. Elsevier, *Neuroimagen*, 42(2008) 87-98.
- [36] Mijailov V. P., 1978. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Moscú: Mir.
- [37] Morín M., 2005. *Análisis del problema inverso de identificación de fuentes a través de planteamientos operacionales*. Tesis de Doctorado en Matemáticas, Posgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [38] Morín M., Netzahualcoyotl C., Oliveros J., Conde J., and Juárez H. *Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media*. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. 2019 DOI: <http://dx.doi.org/10.17654/DE020010053>.

- [39] Morín M., Netzahualcoyotl C., Oliveros J., Conde J., and Santillán A. Identificación Estable de Fuentes Asociadas a Focos Epilépticos Ubicadas sobre la Corteza. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*. Vol. 40, no. 3, Septiembre-Diciembre 2019, pp. 1-14, DOI: [dx.doi.org/10.17488/RMIB.40.3.5](https://doi.org/10.17488/RMIB.40.3.5).
- [40] Morín M., Oliveros J., Conde J., Fraguela A. Simplificación del problema inverso electroencefalográfico a una sola región homogénea con condición de Neumann nula. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*. Vol. 34 No 1, abril de 2013, pp. 41-51.
- [41] Morris Richard, Fillenz Marianne. *Neuroscience: science of the brain, an introduction for young students*. The british neuroscience association, 2003.
- [42] Newton Herbert B., Maschiu Marta, *Epilepsy and brain tumors*, Academic Press, ed. 1, ISBN: 978-01-241-7043-8, 2015.
- [43] Nuñez PL. *Electric Field of the Brain*. Oxford Univ. Press, New York (USA), 1981.
- [44] Obada Al Zoubi, Ahmad Mayelli, Aki Tsuchiyagaito, Masaya Misaki, Vadim Zolev, Hazen Refai, Martin Paulos, Jerzy Bodurka. EEG microstates temporal dynamics differentiate individuals with mood and anxiety disorders from healthy subjects. *Frontiers in Human neuroscience*. Febrero 2019. DOI: [10.3389/fnhum.2019.00056](https://doi.org/10.3389/fnhum.2019.00056).
- [45] Oliveros J., 2001. Modelación Matemática de la actividad eléctrica de la corteza cerebral para usar la Electroencefalografía como un método de Tomografía. Tesis de Doctorado en Matemáticas, Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [46] Oliveros J. J., Aquino F. A., Morín M. M., Fraguela A. Analysis of the inverse electroencephalographic problem for volumetric dipolar sources using a simplification. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, Vol. 35 No2, agosto de 2014.
- [47] Oliveros, J.; Cortés, M.; Morín, M.; Fraguela, A.; Aquino, F. Cálculo exacto de densidades en potenciales de superficie para resolver el problema de Cauchy y validación numérica. *Memorias de la Décimo Segunda Conferencia Iberoamericana de Sistemas, Cibernética e Informática: CИСCI 2013, Sección: Aplicaciones de Informática y Cibernética en Ciencia e Ingeniería*. Vol. 1, pp. 20-25.
- [48] Oliveros Oliveros, José J.; Morín Castillo, María M, Aquino Camacho, Félix A.; Fraguela Collar, Andrés. Análisis del Problema Directo Electroencefalográfico para Fuentes Dipolares Corticales. *Décimo Cuarta Conferencia Iberoamericana de Sistemas Cibernética e Informática, CИСCI 2015*.

- [49] O'Really Michelle A., Bathelt Joe., Sakkalou Elena., Sakki Hanna, Salt Alison, Dale Naomi J., De Hann Michelle. Frontal EEG asymmetry and later behavior vulnerability in infants with congenital visual impairment. Elsevier, Clinical Neurophysiology. 128 (2017) 2191-2199.
- [50] Parent André. *Campenter's human neuroanatomy*, Williams & Wilkins, 9 edición, ISBN: 9780683067521, 1996.
- [51] Pascual-Marqui, R. D. Discrete 3D distributed, linear imaging methods of electric neuronal activity. Part 1: exact, zero error localization. . arXiv:0710.3341 [math-ph], 2007.
- [52] Pascual Marqui, R. D. Standardized low-resolution brain electromagnetic tomography (sLORETA): technical details, *Methods Find. Experimental Clinical Pharmacology*, 24(D), 5-12, 2012.
- [53] Pascual-Marqui R.D., Michel C.M., Lehmann D. Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain. *International Journal of Psychophysiology*, 18:49-65, 1994.
- [54] Plets C., Baert A. L., Nijs G. L., Wilms G. *Computer Tomographic imaging and anatomic correlation of the human brain*. Springer, ISBN: 978-94-010-8407-9, 1987.
- [55] Plonsey R. and Fleming D. G. *Bioelectric phenomena*, N.Y. Mc Graw-Hill, 1969.
- [56] <https://www.psicoactiva.com/biblioteca-de-psicologia/atlas-visual-del-cerebro/>
- [57] Ramachandran V. S. *Encyclopedia of the human brain*, Advisory Board, vol. 1, primera edición, ISBN: 9780080548036, 2002, pp. 12-20, pp. 469-480.
- [58] Remond F. Ed. 1971-1978. *Handbook of Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. Vol, 1-16, Elsevier, Amsterdam.
- [59] Resignol Elsa Carmant Lionel, Carman Lionel, Lacaille Jean Claude, *Neurobiology of epilepsy from genes to networks*, elsevier, serie: progress in brain research 226, ISBN: 978-01-280-3886-4, 2016.
- [60] Riera J., Fuentes M., Valdes P., Oharriz Y., 1998. EEG distributed inverse solution for a spherical head model. *Inverse Problems* 14, pp. 1009-1019.
- [61] Santillán Guzmán A., Heute U., Stephani U., Galka A., Comparison of different methods to suppress muscle artifacts in EEG signals, *Signal, Image and Video Proc. Journal*, vol. 11, pp. 761-768, 2017.

- [62] Santillán Guzmán A., Oliveros Oliveros J. J., Morín Castillo M. M., Introducing a Combination of ICA-EMD to Suppress Muscle and Ocular Artifacts in EEG Signals. *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc.* 2018 Jul, 2018: 1250-1253. DOI: 10.1109/EMBC.2018.8512581.
- [63] Sarvas J., Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic inverse Problem, *Phys. Med. Biol.*, vol. 32, no. 1 (1987).
- [64] Scott Teresa R., Kronsten Victoria T., Hughes Robin D., Shawcross Debbie L., Pathophysiology of cerebral oedema in acute liver failure, *World Journal of gastroenterology*, 19(48): 9240-9255, 2013, ISSN: 2219-2840 (online).
- [65] Showalter R. E. Hilbert space methods for partial differential equation. Ed. Pitman, 1997.
- [66] Steinlein Ortrod K, Genetic of epilepsy, Elsevier, serie: progress in brain research, vol. 213, ISBN: 978-04-446-3333-0, 2014.
- [67] Tijonov A. N., Samarsky A. A., 1980. Ecuaciones de la Física-Matemática. Editorial Mir Moscú.
- [68] Tikhonov A.N., Leonov A.S. y Yagola A.G. 1998. Nonlinear ill-posed problems. Edición en ingles. Chapman & Hall. Gran Bretaña.
- [69] Valdés Galván R.E., González Calderón G., Castro Martínez E., Epidemiología del descontrol de la epilepsia en un servicio de urgencias neurológicos. *Revista de Neurología*. DOI: <https://doi.org/10.33588/rn.6808.2018218>
- [70] Vasin V.V. y Ageev A.L., 1995. Ill-posed problems with a priori information. First edition. Utrecht, The Netherlands.
- [71] Vladimirov V. S., Equations of mathematical physics, Marcel Dekker, INC, New York, ISBN: 0-8247-1713-9, 1971.
- [72] Vogel F. 2000. Genetics and the Electroencephalogram. Springer.
- [73] Ware AJ, D.Agostino AN, Combes B. Cerebral edema: a major complication of massive hepatic necrosis. *Gastroenterology* 1971; 61: 877-884 [PMID: 5125688]
- [74] Zhang Yang, Zhang Wenbo, Reynosa Alcántara Vicenta, Silva Pereyra Juan. Magnetoencefalografía: mapeo de la dinámica espaciotemporal de la actividad neuronal, *Suma psicol*, vol. 21, pp. 45-53, 2014.
- [75] Zill Dennis G., Shanahan Patrick D., A first course in complex analysis with applications, Jones and Bartlett Publisher, Inc., ISBN: 0-7637-1437-2, 2003.