



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**ANÁLISIS BAYESIANO USANDO VALORES EXTREMOS EN
APLICACIONES A DATOS AMBIENTALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

SARA RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. HORTENSIA REYES CERVANTES

DR. GABRIEL HUERTA

PUEBLA, PUE.

2016

Agradecimientos

Índice

1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
3. Teoría relevante	11
3.1. Estadística Bayesiana	11
3.1.1. Inferencia Bayesiana	12
3.1.2. Criterio de Información de Devianza (DIC)	17
3.1.3. Aproximación Numérica	18
3.1.4. Modelos Jerárquicos	21
3.2. Distribución de Valores Extremos	22
3.2.1. Modelo Basado en Valores Extremos	23
3.2.2. Media, Mediana y Varianza de la Distribución VEG	30
3.3. Estadística para Datos Espaciales	31
3.3.1. Modelo de puntos referenciados	32
4. Modelo Bayesiano no Estacionario en Extremos	35
4.1. Análisis Univariado	37
4.1.1. Resultados 16 Estaciones	39
4.1.2. Resultados 5 Regiones	45
4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos	49
4.2.1. Resultados 16 Estaciones	50
4.2.2. Resultados 5 Regiones	54
4.3. Modelo Espacial <i>Disc</i>	64
4.3.1. Resultados	66
5. Conclusiones	71
Bibliografía	73
A. Cadenas de Markov y Métodos Numéricos	79
A.1. Cadenas de Markov	79
A.2. Método Metropolis-Hasting	80

B. Código para OpenBUGS	81
B.1. Algoritmo Análisis Univariado	81
B.2. Algoritmo Efectos Aleatorios	81
B.3. Algoritmo Análisis Espacial, <i>spatial.disc</i>	82
C. Gráficos de Historiales y Autocorrelaciones	85
C.1. Análisis Univariado	85
C.1.1. 16 Estaciones	85
C.1.2. 5 regiones	85
C.2. Efectos Aleatorios	85
C.2.1. 16 Estaciones	85
C.2.2. 5 regiones	86

Índice de tablas

2.1. Información sobre las 29 estaciones de monitoreo que pertenecen al SIMAT. Se marca con * las estaciones incluidas en el primer estudio.	5
4.1. Observaciones de ozono para los meses de Abril, Mayo y Junio de 2007 a 2013, para 16 estaciones de monitoreo pertenecientes a la RAMA,	36
4.2. Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro intercepto β_0 para las 16 estaciones de la RAMA	41
4.3. Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de tendencia β_1 para las 16 estaciones de la RAMA	42
4.4. Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de escala σ para las 16 estaciones de la RAMA	43
4.5. Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de forma ξ para las 16 estaciones de la RAMA	43
4.6. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto β_0 para las 5 regiones de la ZMVM	45
4.7. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto β_1 para las 5 regiones de la ZMVM	46
4.8. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto σ para las 5 regiones de la ZMVM	46
4.9. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto ξ para las 5 regiones de la ZMVM	46

4.10. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro intercepto β_0 para las 16 estaciones de la RAMA, en el modelo de Efectos Aleatorios.	50
4.11. Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de tendencia β_1 para las 16 estaciones de la RAMA, en el modelo de Efectos Aleatorios.	53
4.12. Información a posteriori para los parámetros $m_0, m_1, v_0, v_1, \sigma$ and ξ .	53
4.13. Media a posteriori, desviación estándar a posteriori (ds) e intervalos de credibilidad (IC) para el parámetro $\beta_{0,i}$ para las 5 regiones geograficas: Noroeste (NO), Noreste (NE), Centro (CE), Soroeste (SO) y Soreste (SE).	57
4.14. Media a posteriori, desviación estándar a posteori (ds) e intervalos de credibilidad (IC) para el parámetro $\beta_{1,i}$ para las 5 regiones geográficas: Noroeste (NO), Noreste (NE), Centro (CE), Soroeste (SO) y Soreste (SE).	57
4.15. Resumen de la información a posteriori para los parámetros $m_0, m_1, v_0, v_1, \sigma$ y ξ	60
4.16. Resumen de la información a posteriori para m_1 para los años 2001 – 2014, 2001 – 2006, 2007 – 2014.	64
4.17. Información a posteriori para el modelo Espacial, se muestra la media, la desviación estándar (ds) y el intervalo de credibilidad (IC) de cada parámetro	66

Índice de figuras

2.1. Localización Geográfica de las 29 estaciones del SIMAT que monitorean ozono en la Ciudad de México	6
3.1. Gumbel ($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = 0$); Frechet($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = 0.7$); Weibull ($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = -0.7$)	27
3.2. Distribuciones Frechet y Weibull	28
4.1. Serie de tiempo para 16 estaciones de monitoreo de máximos cada 72 horas, de abril, mayo y junio de 2007 a 2013	37
4.2. Serie de tiempo para 5 regiones de monitoreo de máximos mensuales, de 2001 a 2014	38
4.3. Densidad posterior de β_0 del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.	40
4.4. Densidad posterior de β_1 del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.	40
4.5. Densidad posterior de σ del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.	41
4.6. Densidad posterior de ξ del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.	42
4.7. Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$.	44
4.8. Densidad a posteriori de $\beta_0, \beta_1, \sigma, \xi$ del análisis univariado, para 5 regiones.	47
4.9. Observaciones Máximas de ozono Mensuales de 2001 al 2014 para 5 regiones de la ZMVM con las estimaciones de $\mu_i + \sigma \frac{(\log(2)^{-\xi_i} - 1)}{\xi_i}$ con $i = 1, 2, \dots, 5$, dadas por su media a posteriori	48
4.10. Densidades a posteriori para los parámetros m_0, m_1, σ, ξ , para el modelo de Efectos Aleatorios para 16 estaciones. .	51
4.11. Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$ (en rojo), usando el modelo de Efectos Aleatorios.	52

4.12. Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_{t,i} + \sigma \frac{\log(2)^{-\xi} - 1}{\xi}$ (en azul), usando el modelo de Efectos Aleatorios.	55
4.13. Distribución a posteriori para $\beta_{0,i}$, $i = 1, \dots, 5$	56
4.14. Distribución a posteriori para $\beta_{1,i}$, $i = 1, \dots, 5$	58
4.15. Histograma de la muestra posterior y densidades de los parámetros m_0, m_1, σ y ξ , para el modelo de efectos aleatorios aplicado a 5 regiones.	59
4.16. Densidad de probabilidad para los parámetros m_1 para los años de 2001 – 2006, 2007 – 20014 y 2001 – 2014 . . .	61
4.17. Distribuciones predictivas de la muestra para Diciembre de 2014 se muestra por regiones	62
4.18. Media de la muestra predictiva e intervalo de credibilidad al 95 % por región	63
4.19. Distribución Posterior de los parámetros del modelo Espacial, con $\beta_0 \lambda_0, \tau_0, \phi_0$ y $\beta_1 \lambda_1, \tau_1, \phi_1$, donde se observa la distribución posterior de la ordenada al origen (λ_0) y la tendencia general (λ_1)	67
4.20. Para cada estación del SIMAT se representa la estimación de la media a posteriori del intercepto (β_0) y entre paréntesis se encuentra la desviación estándar. En la parte superior derecha se encuentran los 5 intervalos en los que esta dividido la media a posteriori del intercepto, donde el círculo de color negro indica el intervalo con los valores de la media a posteriori más chicos hasta colores claros que indican valores más altos, como el círculo amarillo que contiene los valores más altos en la media a posteriori.	68
4.21. Para cada estación del SIMAT se representa la estimación de la media a posteriori del parámetro que representa la tendencia (β_1) y entre paréntesis se encuentra la desviación estándar. En la parte superior derecha se encuentran los 5 intervalos en los que esta dividido la media a posteriori de tendencia, donde el círculo de color negro indica el intervalo con los valores de la media a posteriori más chicos hasta colores claros que indican valores más altos, como el círculo amarillo que contiene los valores más altos en la media a posteriori.	69
C.1. Grafica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para Fes Acatlán y Pedregal	87
C.2. Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para Chalco y Acolman	88

C.3. Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para la región Suroeste (SO)	89
C.4. Gráfica del Historial del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios	90
C.5. Gráfica de Autocorrelaciones del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios	91
C.6. Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios aplicado a 5 regiones	92

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de la vida del planeta tierra han existido diferentes eras geológicas que han modificado el arreglo geográfico y la existencia de seres vivos de manera natural, sin embargo la historia nos ha mostrado que desde los inicios del ser humano y el interés de éste por mejorar sus condiciones de vida ha sobre-explotado la condición natural de la tierra, generando una gran afectación al medio ambiente.

La gran emisión de gases contaminantes generados por vehículos, industrias y aerosoles, están provocando una gran afectación no solo en el aire que respiramos, también en el agua que cae como lluvia ácida y es absorbida por la tierra donde se siembran las hortalizas que después serán ingeridas por nosotros. Este problema, si bien se agudiza en ciudades con sobrepoblación, gran parque vehicular e industrializadas, termina afectando a todo ser vivo en el planeta tierra.

Es por ello que el mismo ser humano se ha dado a la tarea de monitorear, modelar, analizar y predecir el comportamiento de los contaminantes y efectos en el planeta, con el apoyo de modelos matemáticos que ajusten lo mejor posible la realidad. Uno de las aplicaciones estadísticas que establece relaciones de causa efecto son los modelos lineales, que suponen normalidad e independencia en los errores, situación que no siempre es cumplida, así que en muchos casos se opta por usar modelos lineales generalizados.

El ozono (O_3) troposférico es uno de los contaminantes presentes en el aire con el que se tienen contacto diario y en altas concentraciones puede poner en riesgo la salud humana y la vegetación; además de existir factores ambientales, químicos y sociales que influyen en su producción. Para analizar el comportamiento de este contaminante pensamos nece-

sario el uso de un modelo lineal generalizado, por lo que se recurre al uso de la Distribución de Valores Extremos Generalizada.

Se presenta a continuación la Modelación desde una perspectiva Bayesiana, de la tendencia en el tiempo de las concentraciones máximas de O_3 , para las estaciones que pertenecen al Sistema de Monitoreo Atmosférico (SIMAT) de la Ciudad de México, se suponen que estos máximos siguen una distribución de Valores Extremos Generalizada.

En el Capítulo 2 se presenta información con respecto a las concentraciones de ozono en la ciudad de México y a trabajos que modelan este contaminante, en el Capítulo 3, se da un breve marco teórico, comenzando con Estadística Bayesiana, en particular se habla sobre Inferencia Bayesiana, se describe una función a priori, la información a posteriori, los métodos numéricos usados para llegar a la distribución posterior y por último, los modelos jerárquicos. Posteriormente, se aborda el tema sobre la Distribución de Valores Extremos (VEG) ya que se supone que los máximos de O_3 siguen esta distribución, se describe como surge esta función de densidad y los momentos estadísticos como la media, mediana y varianza. Para cerrar este capítulo se aborda el tema sobre modelos espaciales, específicamente se hace uso de funciones implementadas en el software *OpenBUGS*, se explica la función *spatial.disc* que es aplicada cuando tenemos las ubicaciones geográficas de cada estación.

En el Capítulo 4 se presentan tres metodologías aplicadas y los resultados correspondientes a la modelación de tendencia de O_3 , en la sección 4.1 se obtiene la distribución posterior del parámetro de tendencia de ozono en cada estación de monitoreo atmosférico, además de obtener una distribución posterior para cada uno de los parámetros de la distribución VEG, en la sección 4.2 se incorpora un parámetro que representa la tendencia de ozono global, es decir de toda la Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM), en la sección 4.3 se supone un comportamiento espacial de los parámetros que representan la tendencia del ozono tomando en cuenta la ubicación geográfica de cada estación.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del uso de estas metodologías, obteniendo en los tres casos que las concentraciones máximas de O_3 tienen una tendencia a la baja muy lenta y por último se da una idea de trabajos futuros sobre esta tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

La contaminación ambiental es un problema que afecta a las grandes ciudades del mundo China, Brasil, Egipto, la India etc, particularmente en México desde hace unas décadas, el aire es objeto de preocupación de acuerdo a *Lezama* [23], ya que a partir de 1940 cuando inicio un crecimiento explosivo de la industria y la población, la tasa de crecimiento de la contaminación del aire se incremento en un 3% anual. Posteriormente el hecho de que la visibilidad disminuyera entre las décadas de los 40 y 50 motivó la preocupación de autoridades, ciudadanos y científicos por conocer los riesgos sanitarios asociados con la exposición a contaminantes atmosféricos, dando lugar a la creación de instituciones dedicadas a integrar la información que se capta para analizar, investigar y proponer mejoras en los sectores que influyen en la contaminación, así como dar a conocer datos ambientales para la población, así después de varios años surgió el Sistema de Monitoreo Atmosférico (*SIMAT*) de la Ciudad de México.

En la actualidad el *SIMAT* está integrado por la Red Manual de Monitoreo Atmosférico (*REDMA*); la Red de Depósito Atmosférico (*REDDA*), la Red de Meteorología y Radiación Solar (*REDMET*) y la Red Automática de Monitoreo Atmosférico (*RAMA*), este último subsistema del *SIMAT* realiza mediciones continuas y permanentes de ozono (O_3), dióxido de azufre (SO_2), óxidos de nitrógeno (NOX), monóxido de carbono (CO), partículas menores a 10 micrómetros (PM_{10}) y partículas menores a 2.5 micrómetros ($PM_{2.5}$). Hoy la RAMA cuenta con 34 estaciones de monitoreo ubicadas en puntos estratégicos de la Ciudad de México, 21 están localizadas en el Distrito Federal y 13 en el Estado de México.

Un gas picante e irritante que a menudo se percibe cerca de los mo-

tores eléctricos es el llamado ozono con nomenclatura O_3 , este contaminante se forma en la atmósfera baja debido a reacciones fotoquímicas. El ozono se encuentra de manera natural en la troposfera por la intrusión del ozono estratosférico y su concentración varía con la altitud, a mayor altitud se registra una concentración mayor. La presencia de radicales hidroxilo y compuestos orgánicos volátiles (*COV*) en la atmósfera, ya sea de origen natural o antropogénico, provoca cambios en los equilibrios químicos hacia concentraciones más altas, las fuentes antropogénicas más importantes de los precursores de ozono son las emisiones vehiculares, emisiones industriales y los solventes químicos, a pesar de que estos precursores se originan en áreas urbanas, también pueden ser arrastrados por los vientos a lo largo de varios kilómetros provocando incrementos en la concentración de ozono en regiones menos pobladas. Los resultados del monitoreo de ozono de los últimos años muestran que el mayor número de excedencias a la norma, así como las concentraciones máximas, se registran entre la última semana de febrero y la primera semana de junio. A este periodo se le conoce como la temporada de ozono, la cual se caracteriza por días con intensa radiación solar, el aumento en el número de horas con luz solar y la presencia de sistemas meteorológicos que favorecen condiciones de estabilidad atmosférica [41].

La importancia de estudio en el O_3 es que produce daños en la salud de los seres humanos, en particular en el tracto respiratorio o en problemas de piel cuando se presentan largas exposiciones a niveles altos de ozono. El alcance dependerá de la concentración de ozono, la duración de la exposición, los patrones de exposición y la ventilación, los estudios epidemiológicos han encontrado asociaciones entre los niveles diarios de ozono y la mortalidad, las admisiones hospitalarias y el ingreso a salas de emergencia. Este contaminante se asocia a síntomas respiratorios especialmente tos, en asmáticos expuestos diariamente, se ha reportado un incremento en la incidencia de ataques asmáticos y síntomas respiratorios. Las plantas son muy sensibles a altas concentraciones de ozono y en actividades agrícolas puede provocar una disminución importante en el rendimiento de los cultivos.

Debido a lo descrito anteriormente en 1993 se creó la Norma Oficial Mexicana *NOM - 020 - SSA1 - 1993* que establece un límite máximo permisible para ozono es de 0.11 partículas por millón (*ppm*), o lo que es equivalente a $216 \mu g/m^3$, en una hora, esta no debe rebasarse ni una vez al año, ya que protege la salud de la población. Esta norma estuvo vigente hasta el 2014 cuando surgió la Norma Oficial Mexicana *NOM - 020 - SSA1 - 2014* que recomienda concentraciones menores a 0.095 *ppm* para el promedio de 1 hora, y menores a 0.070 *ppm* para el promedio de 8 horas (máximo anual). El presente estudio hace conclu-

Zona	Estación	Abreviación	UTM (X,Y)
Noroeste	Atizapán	ATI	(473374,2164496)
	Cuautitlán	CUT	(479187,2180751)
	Fes Acatlán*	FAC	(474474,2154042)
	Tlalnepantla*	TLA	(478521,2159233)
	Tultitlán	TLI	(481456,2167317)
	Acolman*	ACO	(509226,2171149)
Noreste	La Presa	LPR	(487688, 2159799)
	Los Laureles	LLA	(495879,2164681)
	Montecillo*	MON	(510078,2151901)
	San Agustín*	SAG	(496859,2159593)
	Xalostoc*	XAL	(491980,2159096)
	Villa Flores	VIF	(489904,2173473)
Centro	Camarones	CAM	(482216, 2152437)
	Hospital G.Mex.	HGM	(484020,2146380)
	Iztacalco*	IZT	(487647,2143367)
	Merced*	MER	(487478,2147662)
	S. Juan de Aragón	SJA	(490991,2150709)
Suroeste	C.C. Atmósfera	CCA	(481502,2136931)
	Coyoacán*	COY	(483553,2139380)
	Cuajimalpa*	CUA	(469387,2141077)
	Pedregal*	PED	(478600,2136644)
	Santa Fe	SFE	(472393,2140390)
	Santa Ursula*	SUR	(484277,2135416)
	Tlalpan*	TPN	(480672,2129068)
Sureste	Chalco*	CHO	(511970,2130369)
	Nezahualcóyotl	NEZ	(497038,2144394)
	UAM Xochimilco	UAX	(489113,2134517)
	Tláhuac*	TAH	(498926,2127890)
	UAM Iztapalapa*	UIZ	(492526,2140799)

Tabla 2.1: Información sobre las 29 estaciones de monitoreo que pertenecen al SIMAT. Se marca con * las estaciones incluidas en el primer estudio.

siones respecto a la norma de 1993 debido a que cuando se trabajo con la base de datos aún no se hacía público el cambio de los límite permisibles de concentraciones de ozono.

En México se han realizado diversos estudios aplicando técnicas físicas, químicas y estadísticas bastante novedosas, usando datos de concentraciones de ozono o algún otro contaminante, en el Valle de México es de vital importancia realizar estudios sobre contaminantes debido a

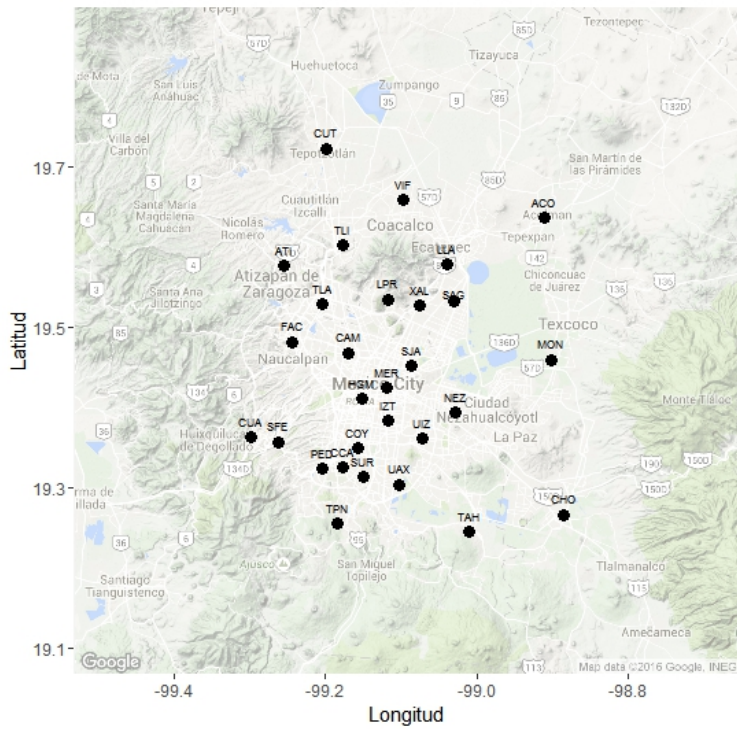


Figura 2.1: Localización Geográfica de las 29 estaciones del SIMAT que monitorean ozono en la Ciudad de México

las características climatológicas, de población y geográficas. Así surge el interés por analizar la tendencia de ozono en la Zona Metropolitana del Valle de México (*ZMVM*) usando observaciones obtenidas de 29 estaciones que pertenecen al *SIMAT* y que capturan datos de ozono cada hora, en la Tabla 2.1 se muestra el nombre, abreviación, la ubicación en unidades mercantory y el tiempo de funcionamiento de cada una de estas estaciones y en la Figura 2.1 se muestran las ubicaciones geográficas.

Una gama de enfoques a nivel mundial se han aplicado con el fin de modelar el comportamiento del ozono en diferentes países [6], [43], [45], [46]. Uno de estos enfoques se relaciona con Valores Extremos, en el artículo de *Villaseñor J. and González E.* en [49] proponen un modelo paramétrico de distribución para el valor máximo diario conjunto de concentraciones que exceden un umbral, teniendo en cuenta la dependencia dentro de la agrupación.

En el Centro de Ciencias de la Atmósfera de *UNAM* hay investigaciones sobre la formación de ozono y uno de ellos, *Bravo H.* [4] menciona que los mecanismos de formación de ozono son aún más complicados de lo que se suponía, encontrándose una gran evidencia de acumulación nocturna de contaminantes atmosféricos precursores de ozono por arriba de la capa de inversión de temperatura típica del Valle de México.

En el trabajo de *Cortina-Januchs M.G. et al.* [6], se utilizan metodologías computacionales basadas en redes neuronales, de la Red Automática de Monitoreo Ambiental en Salamanca estado de Guanajuato en México, proponen una Red Neuronal Feed Forward (FFNN) para analizar las Partículas por Millón (PM_{10}), dicha red tiene cinco entradas (Dirección del Viento, Velocidad del Viento, Temperatura y Humedad Relativa) con dos capas oculta de 20 y 10 neuronas, para obtener como salida la concentración máxima del día siguiente. Los mejores resultados se obtuvieron cuando la red se entrenó con conjuntos de datos de seis días previos para predecir el día siguiente y cuando había conjuntos grandes de días, se notó una reducción de variables meteorológicas para predecir las PM_{10} .

Otra investigación es realizada por *Reyes H. et al.* [34] cuyo objetivo fue el análisis de tendencias de ozono usando la función cuantil de un modelo Generalizado de Valores Extremos, el comportamiento de la función permite incorporar un modelo de regresión lineal a la distribución de Valores Extremos, de esta manera se pueden analizar las concentraciones de ozono involucrando covariables, como son las químicas y ambientales. Esta metodología se aplicó por *Rodríguez et al.* [36], de la base de datos de la *ZMVM*, que contaba con otras estaciones en ese momento.

En el artículo de *Huerta G. et al.*, [18] muestra un trabajo en el área espacio-temporal con el paradigma Bayesiano que involucra Valores Extremos y Modelos Lineales Dinámicos para modelar las concentraciones de ozono en la Ciudad de México, se involucra solo la covariable temperatura. El modelo da buenas predicciones a corto plazo y concluye que el comportamiento del ozono es muy similar a la temperatura a lo largo del día, ya que se observa altas concentraciones de ozono y temperaturas entre la 1 y 4 de la tarde.

Loya N. et al. en [24] muestra un trabajo aplicado a las estaciones Plateros, Pedregal y Merced, supone que las concentraciones de ozono siguen un Proceso de Poisson no homogéneo, para el cual se incluyen covariables con una liga logarítmica y realiza una selección de modelos con el criterio de Akaike, concluye que las variables que más influyen en las tres estaciones son la temperatura y el dióxido de azufre.

El objetivo de la presente investigación es analizar la tendencia en altos valores de ozono troposferico sobre la Ciudad de México basados es la Distribución de Valores Extremos y modelando desde una perspectiva Bayesiana. Se analiza los máximos de concentraciones de ozono para las estaciones que pertenecen al Sistema de Monitoreo Atmosférico (SIMAT) de la Ciudad de México, se presentan diversos estudios para diferentes intervalos de tiempo y diferentes grupos de estaciones, por razones que se irán presentando a lo largo del trabajo, así que dependiendo del periodo de estudio considerado, se denotará como T al total de posibles observaciones para cada estación de monitoreo. El trabajo se divide en tres vertientes :

- Como primera parte, se supone que los máximos siguen una distribución de valores extremos generalizada, con parámetro de localización $\mu = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})$ donde $t = 1, \dots, T$ representa la tendencia del ozono en el tiempo, con parámetro de escala (σ) y con parámetro de forma (ξ), luego se realiza una estimación bayesiana para obtener la distribución final de cada uno de los parámetros de las estaciones de monitoreo. Posteriormente usando el intervalo de credibilidad del parámetro β_1 podremos observar si existe tendencia en las concentraciones de ozono para cada una de la estaciones.
- En ésta segunda parte se aplica un modelo de efectos aleatorios, se ingresa una regresión en el parámetro de localización μ , que estima las tendencias de cada una de las estaciones y proporciona una estimación total de la tendencia en la región .

-
- Finalmente se supone un comportamiento espacial para los parámetros; la ordenada al origen (β_0) y la tendencia (β_1). Permite encontrar una estimación global de los parámetros, en particular de β_1 pues proporciona una estimación global de la tendencia en el parámetro de localización de la distribución VEG, el cual va cambiando a través del área de estudio.

Capítulo 3

Teoría relevante

En este capítulo se presenta una breve explicación sobre la teoría aplicada en la modelación de ozono, se comienza con inferencia bayesiana, seguido por la teoría de valores extremos y finalizamos con una sección de estadística espacial.

3.1. Estadística Bayesiana

La estadística clásica introduce probabilidades en los eventos aleatorios los cuales resultan de experimentos, la probabilidad es interpretada como la frecuencia relativa con la cual un evento ocurre dadas varias repeticiones, *Koch K.R.* en [21] comenta que esta noción de probabilidad fue generalizada por la estadística Bayesiana, ya que en la función de densidad de probabilidad se introducen los parámetros desconocidos, estos parámetros pueden representar constantes las cuales no resultan de experimentos aleatorios, por lo tanto la probabilidad se asocia más generalmente con declaraciones o proposiciones las cuales se refieren a los valores de los parámetros en caso de ser desconocidos.

Ntzoufras I. menciona en su libro [29], que por muchos años los Bayesianos fueron considerados como una minoría hereje por varias razones, la principal objeción de los estadísticos clásicos fue el punto subjetivo de vista del enfoque Bayesiano introducido en el análisis vía la distribución a priori, sin embargo, como la historia ha demostrado, la razón principal por la que la teoría bayesiana no pudo establecer un punto de apoyo como un enfoque cuantitativo bien aceptado para el análisis de datos, fue la dificultad del cálculo de la distribución a posteriori.

Los métodos asintóticos habían proporcionado soluciones a proble-

mas específicos, pero no fue posible su generalización, hasta principios de 1990 donde dos grupos estadísticos formados por Gelfand y Smith habían redescubierto los métodos de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC), anteriormente en 1950 el físico Nick Metrópolis que ya estaba familiarizado con los métodos MCMC junto con sus asociados, fueron desarrollando una de las primeras supercomputadoras electrónicas y probaron sus teorías en la física utilizando las técnicas de Monte Carlo. La implementación de métodos MCMC en combinación con la rápida evolución computacional crearon una herramienta popular en pocos años, así la estadística Bayesiana repentinamente abre caminos para la investigación estadística, estimando y/o resolviendo modelos complicados, que los métodos tradicionales no podían resolver.

A partir de 1990 con las primeras apariciones de MCMC también surgieron diferentes artículos relacionados con la literatura, algoritmos e implementación de metodologías ([29]), durante este período una versión sencilla del software *BUGS* apareció, éste fue un software de lenguaje computacional orientado en donde el usuario solo necesita especificar la estructura del modelo. Entonces *BUGS* fue usando métodos MCMC para generar muestras de la distribución a posteriori del modelo especificado.

De acuerdo a *Kruschke J.K.* en [22] hay tres objetivos para la inferencia Bayesiana; el primero es la *estimación de valores de los parámetros*, ya que las creencias a posteriori típicamente aumentan la magnitud de creencia en algún parámetro, el segundo es la *predicción de valores de datos* y el último es la *comparación de modelos*, en este capítulo se realiza una breve explicación sobre la inferencia Bayesiana.

3.1.1. Inferencia Bayesiana

El problema en la Inferencia Bayesiana ([25]) envuelve dos ingredientes, una de ellos es el uso de la probabilidad como un medio de expresión de la incertidumbre acerca de una cantidad desconocida de interés y el otro interés de Bayes es evaluar la probabilidad condicional de fallo en un sólo ensayo dado algunos datos sobre el número de fallos previos. En el lenguaje moderno esto se traslada a $f(\theta|y, n)$ donde θ es la probabilidad de fallo desconocida y se tienen observaciones de y fallas de n ensayos binomiales. Bayes propone un teorema relacionado con la probabilidad condicional y marginal de variables aleatorias las cuales sirven para calcular la probabilidad condicional de este problema.

Teorema 3.1 *Teorema de Bayes esta en términos de probabilidades de*

eventos observables, sean A y B eventos cualesquiera: entonces

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (3.1)$$

donde,

- $P(A)$ es la probabilidad marginal de A .
- $P(A|B)$ es la probabilidad condicional de A dado B .
- $P(B|A)$ es la probabilidad condicional de B dado A , que después se verá que corresponde a la función de verosimilitud cuando el teorema de Bayes es aplicado en un contexto de modelación estadística.
- $P(B)$ es la probabilidad marginal de B y actuó como una constante normalizadora para asegurar que los valores de $P(A|B)$ sea una probabilidad ($P(B) \neq 0$),

se puede escribir

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \propto P(B|A)P(A), \quad (3.2)$$

donde \propto representa proporcionalidad y la ecuación 3.2 es llamada Regla de Bayes encontrada por Piere-Simon de Laplace ([29]).

Ntzoufras I. en [29] dice que lo más importante en la estadística es la construcción de modelos probabilísticos que representen o aproximen el verdadero mecanismo generador de algún fenómeno bajo estudio, por lo que se asume como variable aleatoria a y , llamada respuesta, la cual sigue una regla de probabilidad con función de probabilidad o densidad $f(y|\theta)$, donde θ es el vector de parámetros, se considera a $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ una muestra aleatoria independiente idénticamente distribuida (*iid.*) y la distribución conjunta

$$f(y|\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i|\theta), \quad (3.3)$$

es llamada la *función de verosimilitud* del modelo y contiene la información disponible por la muestra observada. La inferencia Bayesiana esta basada sobre el razonamiento de la *regla de Bayes* (Ecuación (3.2)), por lo tanto, después de tener los datos observados y_1, \dots, y_n , se calcula la distribución posterior $f(\theta|y_1, \dots, y_n)$ que es la combinación de la priori $f(\theta)$ y la información de los datos $f(y_1, \dots, y_n|\theta)$, esta distribución a posteriori o final es el elemento clave en la inferencia Bayesiana, así tenemos:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)f(\theta)}{f(y)} \propto f(y|\theta)f(\theta). \quad (3.4)$$

La estadística Bayesiana difiere de la teoría de estadística clásica desde que todos los parámetros son considerados como variables aleatorias, por esta razón la distribución a priori es definida inicialmente y expresa la información de que dispone el investigador antes de que los datos estén involucrados en el análisis estadístico.

Función a priori

La distribución a priori cumple un papel importante en el análisis Bayesiano ya que mide el grado de conocimiento inicial que se tiene de los parámetros en estudio, si bien su influencia disminuye a medida que más información muestral es disponible, el uso de una u otra distribución a priori determinará ciertas diferencias en la distribución a posterior.

Si se tiene un conocimiento previo sobre los parámetros, éste se traducirá en una distribución a priori, así será posible plantear tantas distribuciones a priori como estados iniciales de conocimiento existan y los diferentes resultados obtenidos en la distribución a posteriori bajo cada uno de los enfoques, adquirirán una importancia en relación con la convicción que tenga el investigador sobre cada estado inicial, las distribuciones iniciales son parte fundamental de la inferencia Bayesiana.

De acuerdo a la información que nos puede dar la distribución inicial se presentan a continuación tres clases distintas: no informativa, conjugada e impropia.

Distribución a priori no informativa

En ciertos problemas, el conocimiento inicial sobre el verdadero valor del parámetro θ puede ser muy débil, o vago, esto ha llevado a generar un tipo de distribuciones a priori llamadas no informativas, las cuales reflejan un estado de ignorancia inicial que no influye en la distribución a posteriori, en otras palabras, deja que los “datos hablen por ellos mismos”. Una distribución sobre θ se dice que es no informativa si no contiene información sobre θ , es decir, no establece si algunos valores de θ son más favorables que otros.

El postulado de Bayes-Laplace [13] establece que cuando nada conocemos acerca del parámetro θ , la función a priori $f(\theta)$ es una distribución

uniforme, es decir, todos los posibles resultados de θ tienen la misma probabilidad. La situación más simple es cuando el espacio paramétrico Θ de θ es un conjunto finito discreto, entonces la inicial no-informativa que se le asigna a cada elemento de Θ es la que asume una probabilidad de $\frac{1}{n}$ para cada elemento de Θ .

Esto puede generalizarse por supuesto; si Θ es un conjunto infinito, se puede asignar a cada $\theta \in \Theta$ la misma densidad, obteniendo así, la inicial no-informativa uniforme $f(\theta) = c$. El principal problema de emplear la distribución uniforme como inicial no-informativa, es que la distribución uniforme es no invariante bajo reparametrizaciones, es decir, si no se cuenta con información sobre θ , entonces tampoco sobre $\phi = g(\theta)$ así: si $f(\theta) = c$, entonces $\phi = g(\theta) \Rightarrow f(\theta) = \left| \frac{d}{d\theta} g^{-1}(\phi) \right| \cdot f(g^{-1}(\phi))$.

También, cuando el espacio paramétrico Θ es infinito, la inicial uniforme presenta el problema de ser impropia (este término se define en la segunda subsección siguiente), aunque no siempre es serio este problema, ya que iniciales impropias, frecuentemente, llevan a posteriores propias.

Distribución a priori conjugada

La distribución a priori es determinada por una función de densidad conocida, se ha mencionado que el conocimiento sobre θ puede emplearse para especificar una distribución inicial con una forma particular, se puede definir una familia paramétrica que hace el análisis más fácil pero debe tenerse cuidado en elegir la densidad y debe realmente representar la información con la que se dispone.

Definición 3.1 Sea $\mathfrak{F} = \{f(y|\theta) \mid \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones muestrales. Una clase \mathcal{P} de distribuciones es llamada una familia conjugada con respecto a \mathfrak{F} , si para todo $f(y|\theta) \in \mathfrak{F}$ y $f(\theta) \in \mathcal{P}$ se tiene $(\theta|y) \in \mathcal{P}$.

Definición 3.2 Sea Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria de una población con función de densidad $f(y|\theta)$, una familia D de densidades se dice que es conjugada para la función de densidad $f(y)$ o que es cerrado bajo muestreo respecto a la función de densidad $f(y|\theta)$, si la función de densidad a priori de θ , $g_{\Theta}(\theta) \in D$ y si $f(\theta|y_1, \dots, y_n) \in D$.

En este caso, la distribución inicial dominará a la función de verosimilitud y $f(\theta|y)$ tendrá la misma forma que $f(\theta)$, con los parámetros corregidos por la información muestral. Usualmente para una clase de

densidades \mathfrak{S} , una familia conjugada puede ser determinada examinando la función de verosimilitud $f(y|\theta)$, entonces la familia conjugada puede ser elegida como la clase de distribuciones con la misma estructura funcional, a esta clase de familia conjugada se le conoce como distribución a priori conjugada natural.

Funciones impropias

Una propiedad básica de una función de densidad $f(y)$ es que integra (o suma) sobre su rango admisible a 1, ahora, si $h(y)$ es una función uniforme en la línea real, esto es, $h(y) = c$, si $-\infty < y < \infty$, $c > 0$, entonces es una función impropia, ya que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = c \int_{-\infty}^{\infty} dy$$

no existe, no importa que tan pequeña sea c .

Las funciones de este tipo se emplean frecuentemente para representar el comportamiento local de la distribución a priori en la región donde la verosimilitud es apreciable, pero no sobre su rango admisible completo. Frecuentemente, una función a priori impropia, se puede combinar con la verosimilitud para dar una densidad posterior que es propia. Esta acción es válida en el sentido de que para un tamaño de muestra grande, la verosimilitud domina la densidad a priori. Después de saber que tipo de información inicial se ingresa en el modelo, ahora se explica sobre la información final que es usada para la interpretación de ozono.

Estimación de información a posteriori

La estadística bayesiana es capaz de hacer predicciones sobre cantidades futuras basándose en la distribución a priori para algunos parámetros de interés θ , también se pueden hacer predicciones basados sobre la distribución a posteriori de θ , que es, después de conocer a θ a partir de los datos observados y . Alguno de los parámetros a posterioris que son de interés para estimar son la media, la mediana o moda, mientras que los cuantiles posteriores pueden ser usados como $(1 - \alpha)100\%$ intervalos de credibilidad a posteriori.

De acuerdo a Congdon P. [7] el *valor esperado o esperanza* de un párametro, esta representado por $E(\theta|y)$ y se define por:

$$E(\theta|y) = \int \theta f(\theta|y)d\theta. \quad (3.5)$$

El valor esperado $E(\theta|y)$ es calculado por la función de densidad $f(\theta|y)$, esto además depende de las condiciones concernientes a la información de θ , así según Koch K.R. en [21] puede expresarse por la notación $E(\theta)$. La *varianza* esta dada por:

$$VAR(\theta|y) = \int \theta f(\theta|y) d\theta - [E(\theta|y)]^2 = E(\theta^2|y) - [E(\theta|y)]^2. \quad (3.6)$$

En contraste con la estimación de un punto para los cuales las estimaciones de los valores del vector θ de los parámetros son desconocidos, ahora definiremos los *intervalos de credibilidad*, que son una región en la cual el vector de parámetros θ esta situado con una probabilidad alta.

Definición 3.3 Dada una región $\chi_B \subset \chi$, donde χ es el espacio de parámetros θ , tal que

$$P(\theta \in \chi_B|y) = \int_{\chi_B} f(\theta|y) d\theta = 1 - \alpha \quad (3.7)$$

es llamado el $1 - \alpha\%$ intervalo de credibilidad bayesiano para θ , con función de densidad posterior $f(\theta|y)$ y $\theta \in \chi_B$

donde θ pertenece al subespacio χ_B del espacio de parámetros χ con $\chi_B \subset \chi$.

para más información consultar Bernardo *et al.* [2].

3.1.2. Criterio de Información de Devianza (DIC)

En muchas ocasiones es necesario la selección de modelos que se ajusten de mejor manera a los datos. De acuerdo a Ntzoufras [29] los dos criterios de información más populares usados en estadística Bayesiana son el Criterio de Información de Bayes (*BIC*) y el Criterio de Información de Akaike (*AIC*), recientemente el Criterio de Información de Devianza (*DIC*) fue introducido por Spiegelhalter en 2002 como una extensión de *AIC*, esta sección se enfoca a explicar el *DIC*.

El Criterio de Información de Devianza es definido como

$$DIC(m) = \overline{2D(\theta_m, m)} - D(\bar{\theta}_m, m) = D(\bar{\theta}_m, m) + 2p_m. \quad (3.8)$$

donde $D(\theta_m, m)$ es la medida de devianza usual, la cual es igual a menos dos veces la verosimilitud

$$D(\theta_m, m) = -2 \log f(y|\theta_m, m) \quad (3.9)$$

y $\overline{D(\theta_m, m)}$ es su media posterior, p_m es interpretado como el número de parámetros “efectivos” para el modelo m dado por

$$p_m = \overline{D(\theta_m, m)} - D(\bar{\theta}_m, m), \quad (3.10)$$

y $\bar{\theta}_m$ es la media posterior de los parámetros envueltos en el modelo m . Éste es usado como una medida de comparación y adecuación del modelo, valores bajos de DIC indica un mejor modelo, la cantidad p_m es el número de parámetros “efectivos” del modelo m .

DIC es considerado como una generalización de AIC ya que entre más complicado sea un modelo p_m es diferente del número de parámetros usados.

3.1.3. Aproximación Numérica

La mayor parte del esfuerzo en los procedimientos Bayesianos, se concentra en el cálculo de ciertas características (media, mediana, moda) de la distribución a posteriori del parámetro de interés. Desafortunadamente, en la práctica $f(\theta|x)$ puede llegar a ser tan compleja que, generalmente, las integrales pueden no resolverse analíticamente, haciendo necesario el empleo de métodos numéricos eficientes que permitan calcular, o aproximar, integrales en varias dimensiones. Algunos métodos para calcular la distribución a posteriori son:

- Métodos Asintóticos (Aproximación normal y método de Laplace), empleados para distribuciones a posterioris unimodales.
- Métodos Monte Carlo no iterativos (muestreo directo y muestreo indirecto).
- Métodos MCMC (Metropolis-Hastings y Muestreador de Gibbs).

Las técnicas de Monte Carlo han mostrado ser las más flexibles, por lo que la implementación de las técnicas de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC) permiten generar, de manera iterativa, observaciones de distribuciones multivariadas que difícilmente podrían simularse utilizando métodos directos. Los dos algoritmos más empleados para construir cadenas de Markov con las propiedades de irreducibilidad y aperiodicidad; son el de Metropolis-Hastings y el muestreo de Gibbs, este último ha dado un impulso extraordinario a las aplicaciones de las técnicas Bayesianas.

Método de Monte Carlo vía Cadenas de Markov

En esta sección se dan nociones elementales de la técnica *MCMC* la cual esta basado en la construcción de Cadenas de Markov que eventualmente a una distribución objetivo (también llamada estacionaria o de equilibrio) la cual, en este caso es la distribución posterior $f(\theta|y)$. El *MCMC* incorpora la noción de un procedimiento iterativo ya que en cada paso se producen valores que dependen del valor previo [29].

Una cadena de Markov es un proceso estocástico $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(t)}, \theta^{(t+1)}$ tal que

$$f(\theta^{t+1}|\theta^0, \dots, \theta^t) = f(\theta^{t+1}|\theta^t) \quad (3.11)$$

que es la distribución de θ como sucesión de los $t + 1$ valores anteriores de θ donde $f(\theta^{t+1}|\theta^t)$ es independiente del tiempo t . Finalmente cuando la cadena de Markov es irreducible, aperiódica y recurrente positiva (Apéndice A) cuando $t \rightarrow \infty$, la distribución de θ^t converge a su distribución de equilibrio, la cual es independiente del valor inicial de la cadena θ^0 .

La pregunta es como elegir una distribución de transición para generar una secuencia de realizaciones $\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(t)}, \theta^{(t+1)}$ cuya única distribución estacionaria es la a posteriori conjunta de interés $f(\theta|y)$, en la respuesta tenemos la distribución marginal de las $\theta^{(t)}$'s, ($t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1$) que desempeña el papel de la distribución de aproximación.

Los métodos Monte Carlo vías Cadenas de Markov (MCMC) generan variables aleatorias para la función de densidad posterior $f(\theta|y)$, y se tiene que en cada paso de la simulación la distribución aproximada se mejora, convergiendo a la distribución objetivo. En lo siguiente se presentan de manera resumida dos métodos MCMC el algoritmo Metrópolis-Hastings y el Gibbs sampler, un poco más de información con respecto a este tema se encuentra en el Apéndice A.

Algoritmo Metrópolis-Hastings

El algoritmo de Metrópolis fue el primer método Monte Carlo vías Cadenas de Markov que fue desarrollado por Metropolis [21], este no necesitaba una distribución especial para la muestra y puede ser aplicada para una función de densidad posterior $f(\theta|y)$, la cual *no está normalizada* debido a que la proporción de la función de densidad se calculan de la siguiente manera:

$$r = \frac{f(\theta|y)}{f(\theta^{(t-1)}|y)}, \quad (3.12)$$

donde $f(\theta^{(t-1)}|y)$.

Posteriormente el procedimiento de Metropolis-Hastings supera esta restricción, simulando una cadena de Markov $\theta^{(t)}$ con $p(\theta|y)$ como su distribución estacionaria. La cadena es actualizada de $\theta^{(t)}$ a θ con probabilidad

$$\alpha(\theta|\theta^{(t)}) = \min \left(1, \frac{p(\theta|y)f(\theta^{(t)}|\theta)}{p(\theta^{(t)}|y)f(\theta|\theta^{(t)})} \right), \quad (3.13)$$

donde f es conocida como la densidad propuesta, $f(\theta|\theta^{(t)})$ es la probabilidad de que θ pase a una densidad centrada en $\theta^{(t)}$, mientras que $f(\theta^{(t)}|\theta)$ es la probabilidad de regresar de $\theta^{(t)}$ al valor original. El kernel de transición es $k(\theta^{(t)}|\theta) = \alpha(\theta|\theta^{(t)})f(\theta|\theta^{(t)})$ para $\theta \neq \theta^{(t)}$, con una probabilidad [7].

Si la propuesta del valor θ es aceptada entonces $\theta^{(t+1)} = \theta$, mientras si se rechaza, el siguiente estado es el mismo que el anterior $\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)}$. La densidad objetivo aparece en la proporción configurada, así que no es necesario conocer cualquier constante de renormalización, si la densidad es simétrica, con $f(\theta|\theta^{(t)}) = f(\theta^{(t)}|\theta)$ entonces el algoritmo de Metropolis-Hasting reduce el algoritmo desarrollado por Metropolis a :

$$\alpha(\theta|\theta^{(t)}) = \min \left(1, \frac{p(\theta|y)}{p(\theta^{(t)}|y)} \right). \quad (3.14)$$

Se puede observar mayor información en el Apéndice A.

Muestreo Gibbs

El muestreador Gibbs es uno de los algoritmos más usados para simular cadenas de Markov, este es un caso especial del Metropolis-Hasting y genera una cadena de Markov multidimensional, dividiendo el vector de variables aleatorias θ en subvectores y muestra cada subvector en turno, condicional sobre los valores mas recientes de todos los otros elementos de θ .

El algoritmo se describe de la siguiente manera, dado el vector de θ desconocido, consistente de k subcomponentes, es decir $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$:

1. Elegir arbitrariamente valores iniciales $\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}$, para cada componente, donde los subíndices denotan la subcomponente de θ y los superíndices el número de iteraciones.
2. Tomar nuevos valores de la muestra para cada elemento de θ , completando un ciclo a través de los siguientes pasos:
 - Un nuevo valor de la muestra para θ_1 , a partir de la distribución condicional completa de θ_1 dando el valor más reciente de todos los otros elementos de θ y el dato $\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, y)$.
 - Un nuevo valor de la muestra $\theta_2^{(0)}$ para la segunda componente de θ a partir de su distribución condicional completa $p(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, y)$. Note que como nuevo valor para θ_1 ha sido bien muestreado.
 - Se repite este procedimiento para $\theta_3^{(0)}, \theta_4^{(0)}, \dots, \theta_{k-1}^{(0)}$
 - Muestra de $\theta_k^{(1)}$ a partir de $p(\theta_k | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, y)$. Esto completa una iteración de Gibbs sampler y genera una nueva realización del vector desconocido θ^1 .
3. Repetir las etapas en 2, siempre condicionando con el más reciente valor de los otros parámetros, para obtener una sucesión de realizaciones dependientes del vector desconocido de $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^T$ (T es típicamente del orden de miles).

3.1.4. Modelos Jerárquicos

Ntzoufras comenta en [29] que los modelos bayesianos tienen inherentemente una estructura jerárquica; definiendo el nivel uno de jerarquía a la distribución a priori $f(\theta|a)$ del parámetro θ del modelo, con el parámetro a priori a y con la verosimilitud como en el modelo Bayesiano; resultando en la distribución a posteriori $f(\theta|y) = f(y|\theta)f(\theta; a)$.

Para capturar la complicada estructura de algunos datos, la priori es frecuentemente estructurada usando una aserie de distribuciones condicionales llamadas etapas jerárquicas de la distribución a priori, así un modelo jerárquico Bayesiano es definido cuando una distribución a priori también se le asignan parámetros a priori a asociada con la verosimilitud del parámetro θ . La distribución a posteriori puede escribirse como:

$$f(\theta|y) \propto f(y|\theta)f(\theta; a)f(a; b) \quad (3.15)$$

$$\propto f(y|\theta)f(\theta|a)f(a|b) \quad (3.16)$$

La distribución a priori en esta formulación esta caracterizada por dos niveles de jerarquía: $f(\theta|a)$ (primer nivel) y $f(a|b)$ (segundo nivel). Las distribuciones a priori de los niveles superiores son llamados hiperpriors y los correspondientes parámetros se llaman hiperparámetros, la estructura puede ser extendida adicionando más niveles de jerarquía si es necesario.

Los modelos jerárquicos son extensamente usados en investigaciones médicas donde la información viene de diferentes estudios o fuentes disponibles, también cuando se modelan datos espacio-temporales en los cuales la correlación entre tiempo y espacio puede ser adicionado.

Ya que nuestro interés radica en modelar la tendencia de los valores máximos de ozono, a continuación se introduce al tema de Distribución de Valores Extremos Generalizados.

3.2. Distribución de Valores Extremos

Con frecuencia surge la necesidad de explicar el comportamiento de una variable en términos de otra y una de las aplicaciones básicas es el uso de modelos lineales, en particular el uso de la regresión lineal, la cual supone un comportamiento normal en los errores, sin embargo la realidad no siempre esta sujeta a esta suposición, obligando al investigador a usar técnicas más adecuadas.

Una opción para modelar la relación entre dos variables es el uso de Modelos Lineales Generalizados (MLG's) los cuales fueron formulados por Nelder y Wedderburn en 1972 ver [27], el propósito de estos modelos es explicar el comportamiento de la variable respuesta Y_i , $i = 1, \dots, n$ en relación a la variable aleatoria $x'_i = (1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ y se deben cumplir las siguientes características:

- Las variables respuesta Y_1, Y_2, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes que tienen la misma distribución en la familia exponencial, es decir: $f(y, \theta) = \exp(y_i b(\theta) + c(\theta) + d(y_i))$, con $b(\cdot), c(\cdot), d(\cdot)$ son funciones reales conocidas. Esta parte es conocida como componente aleatorio del modelo.
- Un vector de parámetros $\theta' = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p)$, una varianza σ^2 y

otro vector de variables explicativas

$$X = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

donde $x'_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$

- Una función liga:

$$\eta_i = g(\mu_i) = x'_i \theta \quad (3.17)$$

donde $\mu_i = E(Y_i)$, η_i es el predictor lineal y se asume que la media transformada sigue un modelo lineal y monótono [27], [48].

Un ejemplo de MLG's es la Distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG) por lo que en esta sección se hace una pequeña revisión sobre los antecedentes y conceptos relacionados con la teoría de valores extremos.

3.2.1. Modelo Basado en Valores Extremos

La teoría de Valores Extremos se ha desarrollado rápidamente en las últimas dos décadas tanto desde el punto de vista metodológico como en las aplicaciones [12]. Como metodo estadístico, *Fisher y Tippett* en 1928 son los primeros en explorar la teoría de valores extremos, luego Gnedenko en 1943 muestra que la distribución de de los máximos de bloques de una muestra de variables independiente idénticamente distribuida (*iid.*) converge a un miembro de la distribución de Valores Extremos(VE) [11] posteriormente Jenkinson en 1955 desarrolla la Distribución de Valores Extremos Generalizada combinando los modelos de las familias Gumbel, Frechet y Weibull [14].

Algunas de las aplicaciones se tienen en el ajuste de portafolios en las industrias aseguradoras, predicción de tráfico en telecomunicaciones y concentraciones de ozono [42], valoración de riesgo en mercados financieros [10]. Una recopilación interesante de diversas aplicaciones, se encuentra en la publicación de *Finkenstadt y Rootzen* [12]. En *Reiss y Thomas*, [32] se ejemplifica un problema de corrosión en láminas de acero que tienen corrosión en forma de hoyos afectando negativamente, en su tiempo de vida, la estructura metálica de los tanques, tubos, cascos de barcos y buques.

Las distribuciones de valores extremos surgen formalmente como distribuciones límites para el máximo o el mínimo de una secuencia de

variables aleatorias. Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) con función de distribución F , así

$$F(z) = P(X_j \leq z), \quad (3.18)$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$ y $z \in \mathbb{R}$, luego, para el máximo

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (3.19)$$

La función de distribución, en teoría, viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} P(M_n \leq z) &= P(X_1 \leq z, X_2 \leq z, \dots, X_n \leq z) \\ &= (P(X_i \leq z))^n = F^n(z). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como consecuencias de la independencia de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n .

Por otro lado, la estadística extrema mínima es obtenida del caso anterior escribiendo $\min_{i \leq n} X_i = -\max_{i \leq n}(-X_i)$ con $i \leq n$, de donde

$$\begin{aligned} F_{\min X_i}(x) &= P(\min X_i \leq x) = 1 - F(X_1 > x, \dots, X_n > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)\dots P(X_n > x) \\ &= 1 - [P(X_i > x)]^n = 1 - [1 - F(x)]^n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo cual, para $x \in \mathbb{R}$, $i \leq n$,

$$F_{\min X_i}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n. \quad (3.22)$$

Sin embargo, esto no es útil en la práctica porque la función de distribución F , por lo general, es desconocida y por lo tanto, también lo es $F^n(z)$ y $1 - [1 - F(x)]^n$. Una posibilidad es usar técnicas estadísticas estándar para estimar F del grupo de datos observados y luego sustituir éste estimador en (3.20) o (3.22); pero desafortunadamente un pequeño error en la estimación de F puede acarrear una discrepancia muy grande en $F^n(z)$, sobre todo si n es grande [5].

Otro método alternativo; el cual se lleva acabo en el presente trabajo es aceptar que F es desconocido y tratar de mirar aproximación

que pueda tenerse de $F^n(z)$, usando los datos extremos con una teoría análoga al teorema central del límite.

Hay que notar que para cualquier $z < z_+$, donde z_+ es el punto extremo superior de F , es decir, z_+ es el valor más pequeño de z tal que $F(z) = 1$, se cumple que

$$F^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.23)$$

por lo que la función de distribución de M_n degenera en un punto de masa en z_+ .

Para evitar esta dificultad, se renormaliza la variable M_n :

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n} \quad (3.24)$$

usando secuencias de constantes (a_n) , $a_n > 0$ y $(b_n) \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) &= P(M_n \leq a_n z + b_n) \\ &= F^n(a_n z + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(z), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $G(z)$ es a distribución de Valores Extremos. Seleccionando apropiadamente $\{a_n > 0\}$ y $\{b_n\}$, en M_n^* se realiza la estabilización local y de escala, cuando n se incrementa, y así se evita la degeneración de M_n^* , como sucedía con M_n .

Distribución de Valores Extremos (VE)

El rango completo de posibles distribuciones límites para M_n^* está dado por el teorema de *Fisher-Tippet* que a diferencia de la distribución que surge de usar el teorema del límite central para muestras grandes, la distribución de valor extremo surge del teorema límite sobre valores extremos, $G(z)$ es una distribución de valores extremos, y en adelante se denotará como $G_{\mu, \sigma, \varepsilon}(z)$, ya que esta distribución depende de los parámetros μ, σ y ε .

Teorema 3.2 *Si existen secuencias $(a_n), a_n > 0$, (b_n) , para toda $x \in \mathbb{R}$ tales que*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x) \quad (3.26)$$

para alguna distribución no degenerada G , entonces G pertenece sólo a una de las siguientes tres distribuciones:

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.27)$$

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

De forma recíproca, cada una de estas distribuciones pueden aparecer como límite de la distribución de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ y en particular esto sucede cuando G es la función de distribución de la variable aleatoria X .

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [9].

Reiss y Thomas en [32], le dan el nombre de α -parametrización cuando se varía el valor del parámetro α en la distribución de Valores Extremos Generalizada, (VEG).

Si X es una variable aleatoria con función de distribución F entonces $\mu + \sigma X$ tiene una función de distribución $F_{\mu,\sigma}(x) = F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ donde μ y σ son los parámetros de localización y de dispersión. Con lo anterior a los modelos de valores extremos se les adicionan los parámetros de localización y de escala, de esta manera.

$$G_{0,\mu,\sigma}(x) = \exp(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}) \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.30)$$

$$G_{1,\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\alpha}), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

$$G_{2,\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\alpha}), & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Se presenta gráficamente un ejemplo de cada una de las clases de distribuciones en la Figura 3.1

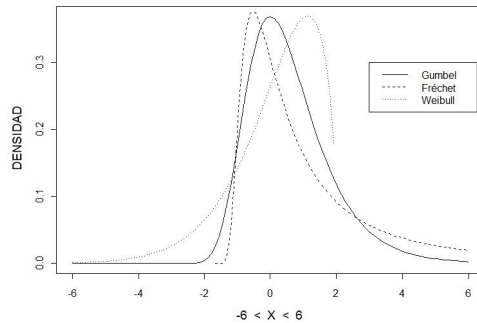


Figura 3.1: Gumbel ($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = 0$); Fréchet ($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = 0.7$); Weibull ($\mu = 0, \sigma = 1, \alpha = -0.7$)

Distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG)

Von Misses y *Jenkinson*, [32], derivaron cada uno por su lado, la distribución generalizada de extremos que contiene a las tres distribuciones límites de valores extremos establecidas por el Teorema 3.2

Coles en [5] al igual que *Reiss y Thomas* en [32] presentan en sus libros que estas tres distribuciones límite, tienen comportamientos diferentes que están relacionados con las distintas formas de la cola de la distribución F , y esto se puede precisar más, considerando el comportamiento de la distribución límite G en el punto final superior z_+ . Así, para la distribución Weibull, z_+ es finito, mientras que para las distribuciones Fréchet y Gumbel, z_+ es infinito.

Sin embargo, la función de densidad para G decae exponencialmente para el caso de la distribución Gumbel y en forma polinomial para la distribución Fréchet, ver Figura 3.2.

En las primeras aplicaciones de la teoría de valores extremos, era usual adoptar una de estas tres familias y luego estimar los parámetros relevantes de la distribución escogida. Pero esta metodología tiene dos debilidades, primero se necesita una técnica adecuada para escoger la familia de distribución más apropiada que represente los datos; y segundo, una vez tomada la decisión, la inferencia asume que no hay incertidumbre en la selección de la familia de distribución más apropiada. Actualmente

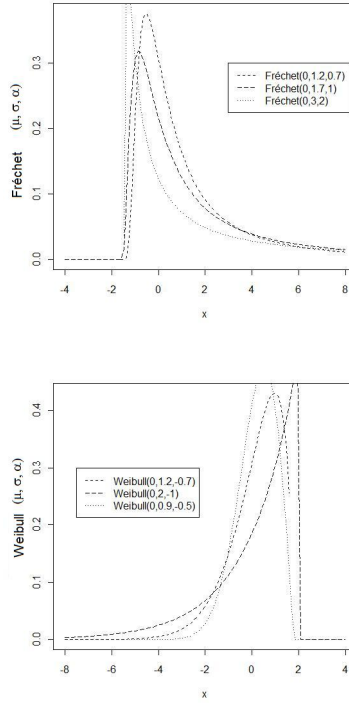


Figura 3.2: Distribuciones Fréchet y Weibull

en la literatura se ha optado por reformular y unificar los modelos del Teorema 3.2, pues se ofrece un mejor análisis. Las tres distribuciones de valores extremos se pueden combinar en una sola conocida como la distribución de valores extremos generalizada (VEG), dada por la siguiente expresión:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \varepsilon \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\varepsilon} \right\} \quad (3.33)$$

definida sobre el conjunto

$$\left\{ z : 1 + \varepsilon \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) > 0 \right\} \quad (3.34)$$

porque de lo contrario, G toma el valor de 0 o 1. Los parámetros satisfacen las condiciones:

- $-\infty < \mu < \infty$
- $\sigma > 0$
- $-\infty < \varepsilon < \infty$

donde μ es el parámetro de localización, σ es el parámetro de escala y ε el parámetro de forma, este último es el más importante porque determina el comportamiento de la cola de la distribución de los datos X_i . Así encontramos:

1. Si $\varepsilon > 0$, la cola de la distribución tiene un comportamiento del tipo Fréchet, con $\alpha = 1/\varepsilon$
2. Si $\varepsilon < 0$, la cola de la distribución tiene un comportamiento del tipo Weibull, con $\alpha = -1/\varepsilon$
3. Si ε se aproxima a 0, la cola de la distribución tiene un comportamiento del tipo Gumbel, con parámetros de localización y escala, arbitrarios.

La unificación de las tres familias de distribuciones de valores extremos en una sola, presenta ventajas en las implementaciones estadísticas; además, la inferencia de ε en cierta forma se puede ampliar y aplicar más adecuadamente el modelo más apropiado para el comportamiento de la cola de la distribución. El siguiente teorema es una reformulación del Teorema 3.2 en función de la familia VEG.

Teorema 3.3 *Si existen secuencias $(a_n) > 0$, (b_n) , tales que*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(z) \quad (3.35)$$

para una función de distribución no degenerada G , entonces G es un miembro de la familia VEG con

$$G(z) = \exp\left\{-\left[1 + \varepsilon\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\varepsilon}\right\} \quad (3.36)$$

definida sobre el conjunto

$$\left\{z : 1 + \varepsilon\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) > 0\right\} \quad (3.37)$$

donde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < \varepsilon < \infty$.

Una dificultad que surge en la aplicación de este resultado, es que las constantes normalizadoras son desconocidas en la práctica; pero este inconveniente se puede resolver fácilmente asumiendo (3.35) como

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \approx G(z) \quad (3.38)$$

para un n suficientemente grande. De manera equivalente

$$P(M_n \leq z) \approx G\left(\frac{z - b_n}{a_n}\right) = G^*(\cdot) \quad (3.39)$$

donde G^* es un miembro de la familia de VEG. En otras palabras, si el Teorema 3.3 establece la distribución aproximada de M_n^* para un miembro de la familia VEG, la distribución de M_n se puede aproximar a un miembro diferente de la misma familia, [5].

Este argumento permite que los datos puedan ser agrupados en bloques que contienen secuencias de observaciones de tamaño n , con n lo suficientemente grande, permitiendo obtener una serie de bloques máximos, M_{n1}, \dots, M_{nm} para los cuales se puede ajustar la distribución VEG. Por lo general, los bloques son anuales y n es el número de observaciones en el año y los máximos corresponden a los máximos anuales [15].

3.2.2. Media, Mediana y Varianza de la Distribución VEG

La media existe si $\varepsilon < 1$, y la varianza si $\varepsilon < 1/2$; más generalmente, el k -ésimo momento existe si $\varepsilon < 1/k$, [15], [19] y [32]. La media ($E(Z)$), la varianza ($VAR(Z)$) y la mediana de la variable aleatoria M_n están dadas por

$$E(Z) = \mu + \frac{\sigma}{\varepsilon}(\Gamma(1 - \varepsilon) - 1) \quad y \quad (3.40)$$

$$VAR(Z) = E(Z - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}(\Gamma(1 - 2\varepsilon) - \Gamma^2(1 - \varepsilon)). \quad (3.41)$$

$$mediana = \mu + \sigma \frac{In(2)^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}. \quad (3.42)$$

para el caso límite $\varepsilon \rightarrow 0$, estas ecuaciones se reducen a

$$E(Z)_{\varepsilon=0} = \mu + \sigma\gamma, \quad (3.43)$$

$$VAR(Z)_{\varepsilon=0} = \frac{\sigma^2\pi^2}{6}, \quad (3.44)$$

$$\text{mediana}_{\varepsilon=0} = \mu + \sigma In(In(2)). \quad (3.45)$$

en donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma y $\gamma = 0.5772$ es la constante de Euler.

En la mayoría de las aplicaciones de esta teoría a procesos ambientales, las distribuciones de valores extremos son usadas para modelar la distribución aproximada del máximo anual sin hacer consideración alguna de cómo se obtuvieron las observaciones. Es usual asumir implícitamente que el máximo anual se puede representar como el máximo de un número muy grande de datos diarios. La aproximación representada por (3.25) es razonable. Una objeción a esto, es que los procesos ambientales rara vez producen observaciones independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, existe una extensa teoría de valores extremos para procesos no independientes e idénticamente distribuidos y es conocido que las distribuciones clásicas de valores extremos, también se cumplen en este contexto.

3.3. Estadística para Datos Espaciales

Los investigadores en diversas áreas tales como climatología, ecología, medio ambiente, salud y la comercialización de bienes raíces se enfrentan cada vez más con la tarea de analizar datos que son altamente multivariantes, con mucha importancia en predictores y respuesta de variables o con referencia geográfica y que deben representarse en mapas [1]. Un método que ha apoyado a dar solución a este tipo de problemas es la Estadística Espacial que será abordada en esta sección, se comenzara con la representación de un modelo espacial usada por Cressie en [8]

Sea $s \in \mathfrak{R}^d$ un dato de localización en el d -dimensional espacio Euclidiano y suponga que el dato potencial $Y(s)$ con localización espacial s es una cantidad aleatoria. Dado $s \in D$ con $D \subset \mathfrak{R}^d$, ($d=1,2$ o 3) se genera un proceso aleatorio que se llamará modelo para datos espaciales,

representado de la siguiente manera:

$$\{Y(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^d\}; \quad (3.46)$$

Según *Nicolas* en [28], esto permite que los datos espaciales puedan ser pensados como variables aleatorias multivariadas $\{Y(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^d\}$ donde $Y \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ y la ubicación s puede ser un punto de un espacio Euclidean d -dimensional con $d \geq 1$, se consideró que la mayoría de los problemas de la estadística espacial están identificados en una de cuatro categorías según D sea fijo o aleatorio y D sea continuo o discreto

Conforme a algunos resultados de *Banerjee et al.* [1], *Mannshardt et al.* [26] y *Cressie* [8] presentan dos escenarios posibles que podrían surgir cuando tratamos con datos espaciales:

1. *Los Datos de puntos referenciados* o también llamados modelos *geoestadísticos*, se supone un $Y(s)$ vector aleatorio de localizaciones $s \in \mathbb{R}^d$, donde s varía continuamente sobre D subconjunto fijo de \mathbb{R}^d .
2. *Lattice o Dato por área*, donde D es un subconjunto fijo de forma regular o irregular, pero particionado en un número finito de áreas con acotamientos bien definidos.

Cuando consideramos los datos obtenidos del SIMAT y trabajamos con los extremos de ozono por estación de la Ciudad de México, tenemos al caso 2. En tal situación la covarianza de los datos es modelada en términos de distancia por pares entre localizaciones geográficas y algunos parámetros estadísticos desconocidos. Este enfoque es flexible para datos no Gaussianos, a través de representaciones jerárquicas simples donde las observaciones o datos son modelados con alguna distribución no Gaussiana, basada sobre una suposición de independencia condicional y un proceso subyacente utilizado para modelar las dependencias espaciales [1]. En el nivel inferior de la jerarquía, las distribuciones a priori son asignadas para los parámetros. Predicciones para cantidades no observadas o datos que falta son directamente trabajadas dentro de un marco bayesiano como un paso más dentro de los métodos MCMC.

3.3.1. Modelo de puntos referenciados

Este modelo se refiere a menudo como datos geocodificados o geoestadísticos, un ejemplo de este caso es el de mostrar las coordenadas de latitud y longitud de los sitios de monitoreo de aire, aquí podríamos

estar interesado en un modelo de la distribución geográfica que informe sobre la correlación espacial y quizás covariables subyacentes como la industrialización, densidad de tráfico, etc.

De manera formal, sea $Y(s_i)$ que denota una respuesta aleatoria correspondiente a un punto s_i que es una localización espacial sobre el conjunto D , también se supone que hay un conjunto de parámetros o efectos aleatorios correlacionados espacialmente, $\theta(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ donde n es el número total de localizaciones dentro de la región de estudio. Sea $\boldsymbol{\theta} = (\theta(s_1), \theta(s_2), \dots, \theta(s_n))$ su distribución conjunta puede ser expresada como

$$\boldsymbol{\theta} | \lambda, \tau, \alpha \sim N(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}(\tau, \alpha)), \quad (3.47)$$

una Función de distribución Normal Multivariable N-dimensional (FMN) para $\boldsymbol{\theta}$ con un vector de media $\boldsymbol{\mu}_\lambda$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}(\tau, \alpha)$, λ es un parámetro adicional que define la media del vector, mientras que $\tau > 0$ es un factor escalar que representa las variabilidades generales de $\theta(s_i)$. El parámetro α modela las correlaciones espaciales entre los elementos $\theta(s_i)$ y $\theta(s_j)$, $i \neq j$. Más específicamente, asumimos una forma paramétrica para el elemento $i - j$ de la matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}(\tau, \alpha)$, es decir.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}(\tau, \alpha) = \tau f(d_{ij}; \alpha) \quad (3.48)$$

donde d_{ij} representa distancia entre puntos s_i y s_j , y $f(\cdot; \alpha)$ es una función paramétrica que modela la correlación espacial en términos de distancia y α .

Huerta *et al.* en [17] usa como función de correlación espacial a $f(d_{ij}, \alpha) = \exp(-\alpha d_{ij})$, donde d_{ij} es la distancia entre puntos, que puede ser calculado a través de una proyección del mapa como describe Banerjee *et al.* [1]. Para nuestro trabajo de tesis consideramos las funciones de correlación conocida como *Disc Model* usada en Rodríguez S. *et al.* [37] incluídas en GeoBUGS, que es un módulo adicional sobre OpenBUGS el cual provee una interfaz para producir mapas, crear y manipular modelos autoregresivos disponibles en OpenBUGS, para mayor información ver GeoBUGS User Manual [47].

En este trabajo en lugar de usar medidas de longitud y latitud, se usa la proyección Mercator (Universal Transverse Mercator UTM) que tiene la propiedad de construir líneas de rumbo (curvas que intersectan el meridiano con un ángulo constante) son mostradas como líneas rectas

sobre el mapa. Después de la transformación es aplicada, la distancia d_{ij} es calculada como $d_{ij} = \|s_i - s_j\|$ y la función de la distancia que es aplicada en esta tesis, será mostrada en el capítulo 4.

Capítulo 4

Modelo Bayesiano no Estacionario en Extremos

En este capítulo se muestran los tres modelos aplicados para el análisis de tendencias de Valores Extremos de ozono, en la primera sección se presenta el modelo donde se estiman los parámetros de forma, de escala y los parámetros de regresión incorporados en el parámetro de localización de la distribución VEG, con el objetivo de mostrar la tendencia para cada una de las estaciones. En la segunda sección se muestra el modelo de efectos aleatorios en la cual se incorpora un parámetro que represente la tendencia de toda la ZMVM y por último, se usa un modelo suponiendo que los parámetros incorporados en la regresión del parámetro de localización, tiene un comportamiento espacial.

A continuación se presenta un primer análisis como en Rodríguez S. *et al.* [37] hecho a 16 estaciones de monitoreo atmosférico pertenecientes al SIMAT, las cuales se pueden observar en la tabla 2.1 marcadas con un (*). Esta primera elección se debe a que el intervalo de tiempo en que están activas las estaciones es similar y por lo tanto se decide analizar los máximos de concentraciones de ozono del año 2007 al 2013.

Debido a que las altas temperaturas agilizan la producción de ozono, se realiza un análisis obteniendo que de Abril a Junio son los meses donde se presentan las temperaturas más altas en la Ciudad de México. Por último para elegir el tamaño del bloque donde se obtendrá el valor máximo, se realizan algunos gráficos de autocorrelaciones, hallando que los bloques de 72 horas son una buena opción.

Debido a lo explicado anteriormente, el estudio que se presenta anali-

za la tendencia de concentraciones de ozono basada en datos correspondientes a los máximos de cada 72 horas, para tres meses consecutivos: Abril, Mayo y Junio, durante los años de 2007 a 2013, en 16 estaciones de monitoreo de ozono. Para este periodo de estudio hay un total de $T = 212$ posibles observaciones por cada estación de monitoreo, siendo sólo Pedregal la que tiene completa la información, ver Tabla 4.1

Estación	Abreviación	No. Datos
Fes Acatlán	FAC	211
Tlalnepantla	TLA	211
Acolman	ACO	179
Montecillo	MON	185
San Agustín	SAG	199
Xalostoc	XAL	210
Iztacalco	IZT	182
Merced	MER	211
Coyoacán	COY	209
Cuajimalpa	CUA	207
Pedregal	PED	212
Santa Ursula	SUR	209
Tlalpan	TPN	207
Chalco	CHO	178
Tláhuac	TAH	192
UAM Iztapalapa	UIZ	211

Tabla 4.1: Observaciones de ozono para los meses de Abril, Mayo y Junio de 2007 a 2013, para 16 estaciones de monitoreo pertenecientes a la RAMA,

En la Figura 4.1 podemos observar la gráfica de la serie de tiempo de los datos y los intervalos de datos faltantes, que son distintos para cada una de la estaciones

Similar al análisis de las 16 estaciones se presenta en la sección 1 y 2 el modelo aplicado a cinco regiones geográficas conocidas como Noroeste, Noreste, Centro, Suroeste y Sureste, ver Rodríguez S. *et al.* [38], en éste caso se usa la información de las 29 estaciones de monitoreo atmosférico pertenecientes al SIMAT a partir del año 2001 al 2014 y debido a la gran cantidad de datos faltantes se consideran los máximos mensuales sobre cada una de las regiones geográficas, se observa en la Figura 4.2 la serie de tiempo correspondiente a estos datos. Para este período de estudio hay un total de $T = 168$ posibles observaciones por cada estación de monitoreo y todas las regiones con información completa

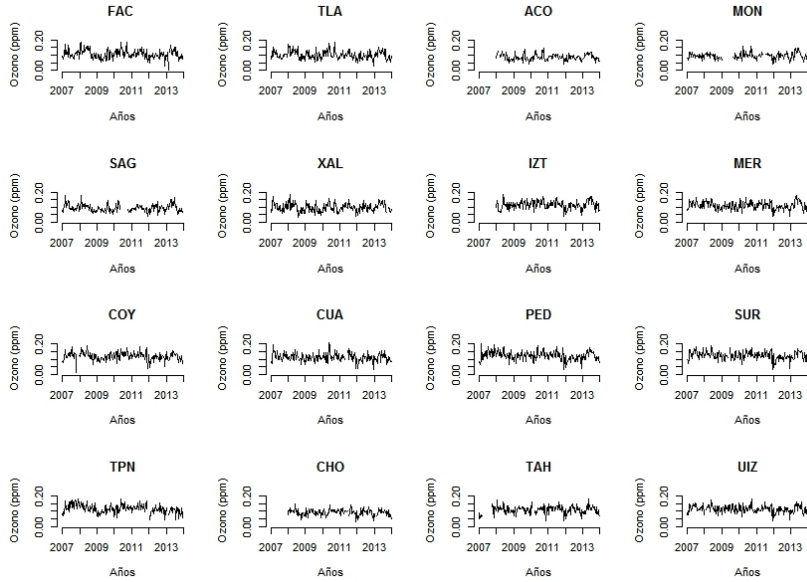


Figura 4.1: Serie de tiempo para 16 estaciones de monitoreo de máximos cada 72 horas, de abril, mayo y junio de 2007 a 2013

4.1. Análisis Univariado

En el trabajo de Rodríguez S. *et al.*, [37] se supone que los máximos valores de cada 72 horas de O_3 para cada estación de monitoreo Z_1, \dots, Z_T ; son observaciones independientes que siguen una distribución de la forma:

$$Z_t \sim VEG(\mu_t, \sigma, \xi) \quad (4.1)$$

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t); \quad (4.2)$$

con $t = 1, 2, \dots, 212$ para 16 estaciones y $t = 1, 2, \dots, 168$ para analizar 5 regiones, donde β_0 es la ordenada al origen, β_1 es el parámetro que representa la tendencia de las concentraciones de ozono en el tiempo t para el parámetro de localización, \bar{t} y $sd(t)$ son respectivamente la media y la desviación estándar de los elementos del vector t , σ y ξ son constantes

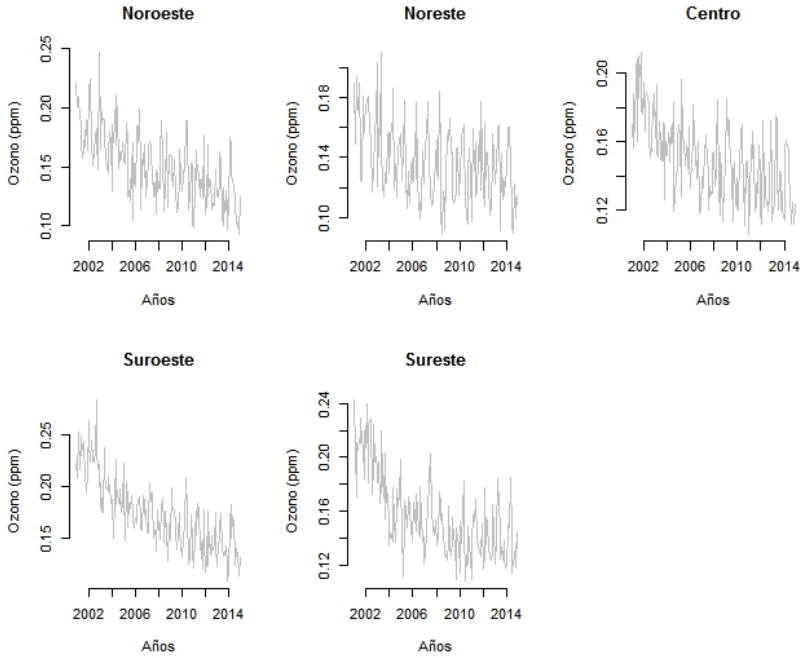


Figura 4.2: Serie de tiempo para 5 regiones de monitoreo de máximos mensuales, de 2001 a 2014

en el tiempo y denotan los parámetros de escala y forma de la distribución VEG. Asumiendo independencia a priori entre los parámetros, se procede a realizar inferencias de este modelo para cada una de las 16 estaciones. El procedimiento de estimación se basa en el método con el formato Gibbs Sampling que envuelve los pasos del Metrópolis Hastings. Más específicamente si $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_T)$ tiene la distribución posterior conjunta para $(\beta_0, \beta_1, \sigma, \xi)$ y esta dada por

$$p(\beta_0, \beta_1, \sigma, \xi | \mathbf{Z}) \propto f(\mathbf{Z} | \beta_0, \beta_1, \sigma, \xi) p(\beta_0) p(\beta_1) p(\sigma) p(\xi), \quad (4.3)$$

donde $p(\beta_0)$, $p(\beta_1)$, $p(\sigma)$ y $p(\xi)$ denotan las distribuciones a priori de β_0 , β_1 , σ y ξ , respectivamente. De la distribución VEG (ecuación 3.36), podemos obtener que

$$f(\mathbf{Z}|\beta_0, \beta_1, \sigma, \xi) = -T \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{t=1}^T \log \left[1 + \xi \left(\frac{z_t - \mu_t}{\sigma}\right)\right] - \sum_{t=1}^T \left[1 + \xi \left(\frac{z_t - \mu_t}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}$$

cuando $1 + \xi \left(\frac{z_t - \mu_t}{\sigma}\right) > 0$ para todo t y $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$ para $t = 1, 2, \dots, T = 212$.

En relación a la distribución a priori, como no tenemos información disponible sobre el comportamiento inicial de β_0 y β_1 , se selecciona una distribución uniforme en el rango $(-\infty, \infty)$ así $p(\beta_0) \propto 1$ y $p(\beta_1) \propto 1$. Para $\sigma > 0$, se elige una distribución Gamma con hiperparámetros que reflejan algún grado de ignorancia así $p(\sigma) = \text{Gamma}(\delta, \delta)$ con δ fijo para dar una distribución con varianza grande. Para ξ se asume una distribución a priori sobre $(-0.5, 0.5)$ es decir $\xi \sim U(-0.5, 0.5)$, se restringe los valores de ξ sobre este intervalo para imponer las propiedades de regularidad de la distribución $VEG(\mu, \sigma, \xi)$ descritas en *Coles S.* [5].

4.1.1. Resultados 16 Estaciones

Se realiza una muestra de la distribución a posteriori conjunta definida en la ecuación (4.3) usando el software OpenBUGS/WinBUGS [25], se comienza con un periodo de calentamiento de 5000 iteraciones del MCMC, adicionalmente se producen 5000 iteraciones más para producir las inferencias a posterior. En este caso el MCMC alcanza su convergencia rápidamente, esto se observa a través de los gráficos del historial y de las autocorrelaciones, se presenta uno de ellos en el Apéndice C .

En la Figura 4.3 se presentan las densidades marginales para β_0 donde se observa que toman valores entre 0.07 y 12.5 ppm, de la Tabla 4.2 se observa que la media posterior para β_0 es superior a 0.11 ppm para tres estaciones que pertenecen a la zona suroeste de la Ciudad de México, estas son Coyoacán con 0.11070 ppm, Pedregal con 0.1127 y Santa Ursula con 0.1158, además de que son las estaciones que presentan los más altos valores de contaminación a partir del 2007.

Para el parámetro β_1 se presentan las distribuciones marginales en la Figura 4.4, pudiendo observar que toman valores positivos y negativos, pero las distribuciones están con mayor frecuencia centradas en cero. De la Tabla 4.2 donde se presenta la media posterior, la desviación estándar y el intervalo de credibilidad al 97.5% se observa que para siete

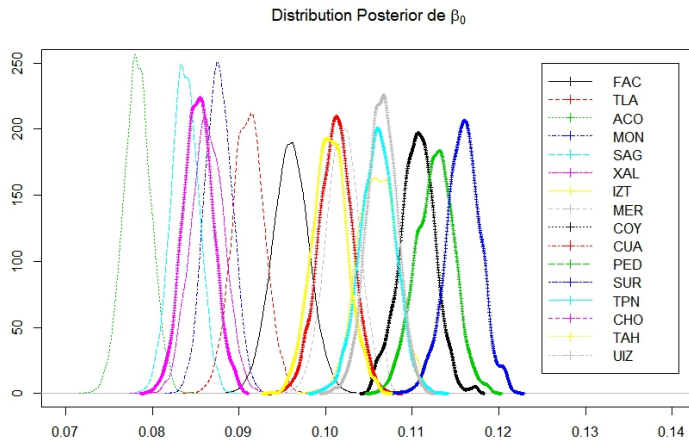


Figura 4.3: Densidad posterior de β_0 del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.

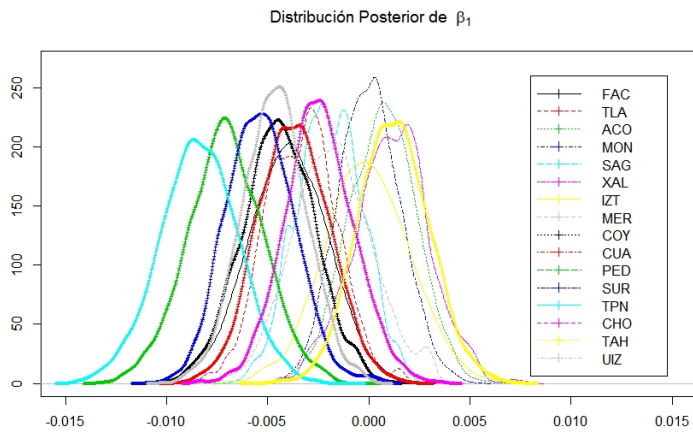


Figura 4.4: Densidad posterior de β_1 del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.

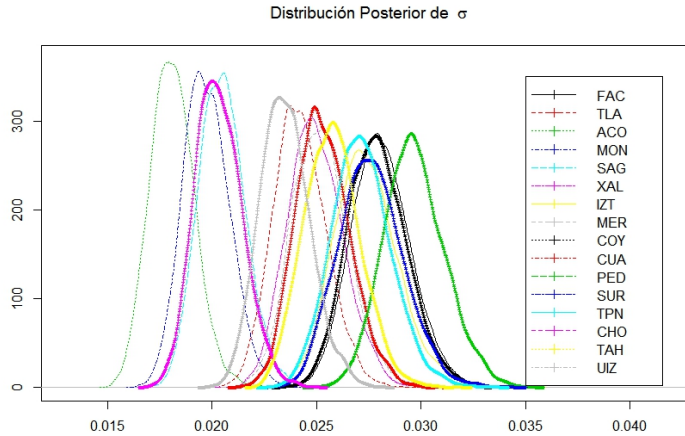


Figura 4.5: Densidad posterior de σ del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.

Estación	media	sd	IC 97.5 %
FAC	0.09596	0.002093	(0.091850, 0.100000)
TLA	0.091090	0.001878	(0.087350, 9.485e-02)
ACO	0.0781700	0.001551	(0.075160, 0.081230)
MON	8.757e-02	0.001543	(0.084540, 0.090600)
SAG	0.083690	0.001636	(0.080510, 0.086890)
XAL	0.086320	0.001878	(0.082660, 0.090020)
IZT	1.059e-01	0.002311	(0.101400, 0.110400)
MER	0.101900	0.001841	(0.098380, 0.105500)
COY	0.11070	0.002162	(0.106500, 0.115000)
CUA	0.101200	0.001933	(0.09736, 0.104900)
PED	0.11270	0.002254	(0.10830, 0.117100)
SUR	0.115800	0.002012	(0.112000, 0.11990)
TPN	0.106100	0.002033	(0.10210, 0.11000)
CHO	0.085250	0.001685	(0.081900, 0.088530)
TAH	0.100600	0.001990	(0.096610 , 0.104400)
UIZ	0.106500	0.001736	(0.103100, 0.109900)

Tabla 4.2: Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro intercepto β_0 para las 16 estaciones de la RAMA

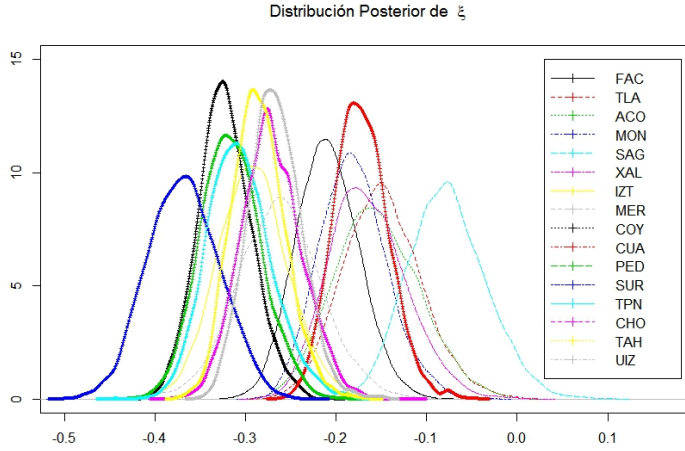


Figura 4.6: Densidad posterior de ξ del análisis univariado, para 16 estaciones de monitoreo.

Estación	media	sd	CI 97.5 %
FAC	-0.00397	0.001947	(-0.007766, -0.000146)
TLA	-0.003379	0.001751	(-0.006818, 3.151e-05)
ACO	0.0006361	0.001666	(-0.002563, 0.003863)
MON	-3.761e-05	0.001497	(-0.002998, 0.002958)
SAG	-0.001984	0.001499	(-0.004928, 0.001001)
XAL	0.001112	0.001930	(-0.002723, 0.004874)
IZT	-5.999e-05	0.002245	(-0.004490, 0.004375)
MER	-0.001963	0.001789	(-0.022620, 0.027890)
COY	-0.00437	0.001882	(-0.008205, -0.000723)
CUA	-0.003663	0.001807	(-0.00726, -0.000083)
PED	-0.00713	0.001870	(-0.01073, -0.003304)
SUR	-0.005253	0.001664	(-0.008502, -0.001916)
TPN	-0.008346	0.001834	(-0.01197, -0.004778)
CHO	-0.002409	0.001746	(-0.005824, 0.000953)
TAH	0.001184	0.001743	(-0.002306, 0.004613)
UIZ	-0.004672	0.001636	(-0.007908, -0.001498)

Tabla 4.3: Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de tendencia β_1 para las 16 estaciones de la RAMA

Estación	media	sd	CI 97.5 %
FAC	0.02807	0.001409	(0.025500 ,0.0310500)
TLA	0.024160	0.001294	(0.021800 ,0.02690)
ACO	0.0180400	0.001041	(0.016140 ,0.020250)
MON	0.01969	0.001066	(0.017750 ,0.021960)
SAG	0.020420	0.001134	(0.018310 ,0.022760)
XAL	0.024940	0.001369	(0.022450 ,0.027800)
IZT	0.02731	0.001515	(0.024550 , 0.030470)
MER	0.025070	0.001347	(0.022620 ,0.027890)
COY	0.02785	0.001384	(0.025320 ,0.0308100)
CUA	0.025310	0.001266	(0.02298 ,0.0279600)
PED	0.02975	0.001531	(0.02695 ,0.033040)
SUR	0.027500	0.001471	(0.024860 , 0.030560)
TPN	0.027180	0.001425	(0.02458 ,0.030140)
CHO	0.020280	0.001080	(0.018290 ,0.0225600)
TAH	0.025760	0.001308	(0.023360 , 0.028510)
UIZ	0.023490	0.001173	(0.021340 ,0.025980)

Tabla 4.4: Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de escala σ para las 16 estaciones de la RAMA

Estación	media	sd	IC 97.5 %
FAC	-0.20970	0.034730	(-0.275600, -0.139000)
TLA	-0.147900	0.043320	(-0.227700, -5.947e-02)
ACO	-0.1520000	0.046290	(-0.235900, -0.053460)
MON	-1.792e-01	0.037430	(-0.245900, -0.099300)
SAG	-0.076630	0.042630	(-0.154700, 0.011760)
XAL	-0.164000	0.043070	(-0.240000, -0.074040)
IZT	-2.900e-01	0.038510	(-0.361500, -0.209900)
MER	-0.258900	0.043000	(-0.339800, -0.172900)
COY	-0.32190	0.029270	(-0.377800, -0.262700)
CUA	-0.173000	0.029040	(-0.22420, -0.111300)
PED	-0.31890	0.034630	(-0.38580, -0.249100)
SUR	-0.365700	0.038690	(-0.439900, -0.288000)
TPN	-0.307800	0.036530	(-0.37420, -0.231400)
CHO	-0.270900	0.032810	(-0.330900, -0.202700)
TAH	-0.287000	0.029410	(-0.341600, -0.227300)
UIZ	-0.268400	0.028930	(-0.320400, -0.205600)

Tabla 4.5: Media posterior, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de forma ξ para las 16 estaciones de la RAMA

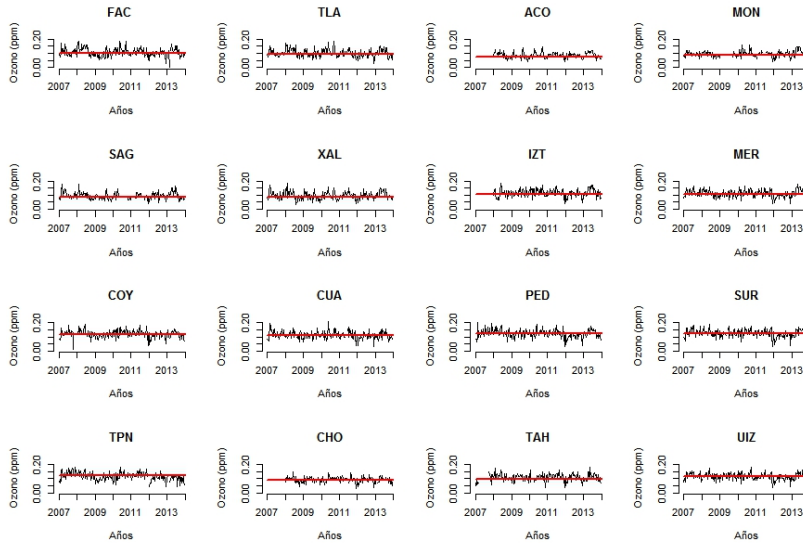


Figura 4.7: Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$.

estaciones el intervalo de credibilidad contiene valores negativos, estas estaciones son: en el noroeste Fes Acatlán (FAC), en el sureste UAM Iztapalapa (UIZ) y en el suroeste Coyoacán (COY), Cuaajimalpa (CUA), Pedregal (PED), Santa Ursula (SUR) y Tlalpan (TPN). Para las restantes nueve estaciones el intervalo de credibilidad contiene al cero lo no proporciona ninguna indicación de una pendiente significativa.

La Figura 4.5 presenta las densidades marginales del parámetro de escala σ las cuales toman valores positivos para las 16 estaciones, se puede observar en la Tabla 4.4 específicamente toma valores entre .015 y .035.

Con respecto a la información del parámetro de forma ξ , se reporta en la Figura 4.6 que las densidades posteriores son mayormente soportadas a lo largo de los valores negativos, excepto para la estación San Agustín (SAG) que toma valores más grandes que cero en la cola derecha. En la Tabla 4.5 se observa que hay pequeñas variabilidades a través de los intervalos de credibilidad los cuales están bien contenidos en los valores negativos excepto la estación SAG.

En la Figura 4.7 se presenta los niveles máximos de O_3 por cada 72 horas para cada una de las 16 estaciones de la RAMA con la estimación de la media posterior de $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$ basado sobre la estimación de las ecuaciones 4.1 y 4.2 para cada estación. Estas líneas son en muchos casos constantes pero se puede visualizar algunos pequeños decaimientos con respecto a t para las estaciones FAC, CUA, COY, PED, SUR, TPN y UIZ.

Los grupos de datos faltantes son contabilizados como parte del método *MCMC*, como un paso adicional del MCMC basado en la distribución *VEG* y la condicional sobre el modelo paramétrico, para cada iteración el *MCMC* da una muestra de la distribución predictiva para cada observación omitida, se ha notado que los datos omitidos para el periodo de 2007 al 2013 no afectan el análisis o la estimación de los parámetros.

Después de los puntos antes mencionados se propone ingresar un parámetro que represente la tendencia global del ozono en toda la *ZMVM*, y posteriormente una interacción espacial entre las estaciones de monitoreo de la *RAMA*, estos estudio se presenta en las siguientes secciones.

4.1.2. Resultados 5 Regiones

Ahora se hace un análisis región por región, se realiza una muestra de la distribución a posteriori conjunta definida en la Ecuación 4.3 usando el software OpenBUGS/WinBUGS [25], se comienza con un periodo de calentamiento de 1000 iteraciones del MCMC, adicionalmente se producen 5000 iteraciones más para producir las inferencias a posterior. En este caso el MCMC alcanza su convergencia más rápido con respecto al modelo de 16 estaciones, lo cual podemos observar en los gráficos del historial y de las autocorrelaciones que se presenta en el Apéndice C .

Región	media	sd	IC 97.5 %
Noroeste (NO)	0.14150	0.001813	(0.13810, 0.14510)
Noreste (NE)	0.127800	0.001942	(0.12410 ,0.131700)
Centro (CE)	0.14190	0.001519	(0.13880, 0.14480)
Suroeste (SO)	0.16400	0.001676	(0.16060, 0.16710)
Sureste (SE)	0.14820	0.001741	(0.14470, 0.15190)

Tabla 4.6: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto β_0 para las 5 regiones de la *ZMVM*

Región	media	sd	IC 97.5 %
Noroeste (NO)	-0.01835	0.001775	(-0.02170, -0.01480)
Noreste (NE)	-0.009642	0.001808	(-0.01313, -0.005991)
Centro (CE)	-0.01353	0.001477	(-0.01645,-0.01068)
Suroeste (SO)	-0.02655	0.001716	(-0.02973,-0.02309)
Sureste (SE)	-0.01933	0.001848	(-0.02303,-0.01553)

Tabla 4.7: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto β_1 para las 5 regiones de la ZMVM

Región	media	sd	IC 97.5 %
Noroeste (NO)	0.02130	0.001304	(0.01894,0.02404)
Noreste (NE)	0.021620	0.001394	(0.01906, 0.024560)
Centro (CE)	0.026410	0.001261	(0.01576,0.02021)
Suroeste (SO)	0.01942	0.001134	(0.01740,0.02183)
Sureste (SE)	0.02064	0.001178	(0.01844,0.02309)

Tabla 4.8: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto σ para las 5 regiones de la ZMVM

Región	media	sd	IC 97.5 %
Noroeste (NO)	-0.16260	0.046260	(-0.24550,-0.06289)
Noreste (NE)	-0.182600	0.065270	(-0.29640,-0.043370)
Centro (CE)	-0.19000	0.058910	(-0.30150 , -0.06979)
Suroeste (SO)	-0.13010	0.045290	(-0.21000 ,-0.03420)
Sureste (SE)	-0.17800	0.050590	(-0.26730 , -0.07315)

Tabla 4.9: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad del parámetro intercepto ξ para las 5 regiones de la ZMVM

En la Figura 4.8 a) se presentan las densidades marginales para β_0 donde se observa que toman valores entre 0.12 y 0.17 ppm, de la Tabla 4.6 se observa que la media a posteriori para β_0 es mayor a 0.11 ppm para todas las regiones, siendo Suroeste la región que presenta el mayor valor que es 0.1640, lo que indica que los niveles de concentraciones de ozono para 2001 estaban por muy arriba de la norma oficial de salud.

Los gráficos de densidad a posteriori para el parámetro β_1 se presentan en b) de la Figura 4.8, pudiendo observar que las distribuciones posteriores para las 5 estaciones son negativos. De la Tabla 4.7 donde se presenta la media posterior, la desviación estándar y se observa que las 5 regiones el intervalo de credibilidad contienen valores negativos lo que indica pendiente significativamente negativa, pudiendo decir que la

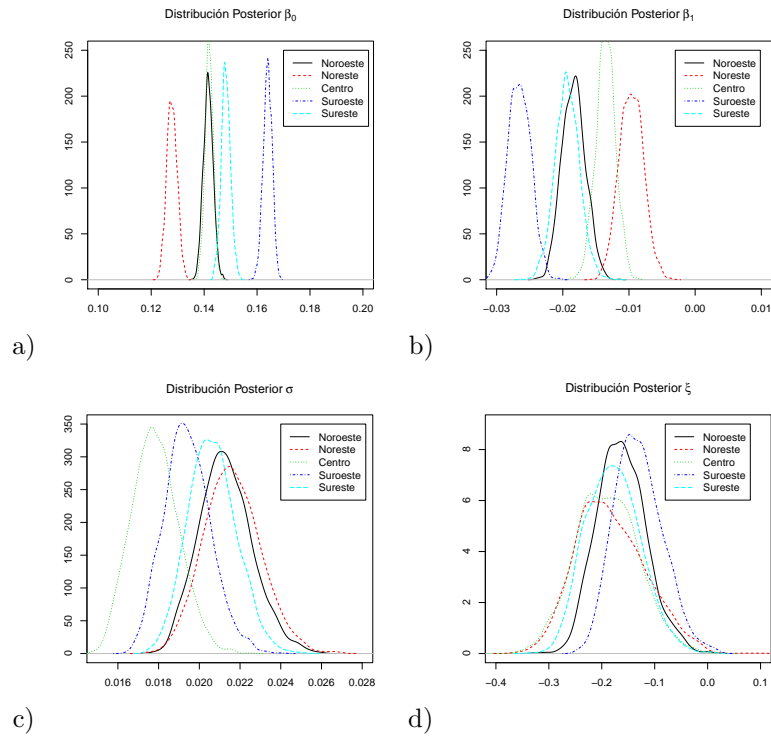


Figura 4.8: Densidad a posteriori de β_0 , β_1 , σ , ξ del análisis univariado, para 5 regiones.

tendencia de las concentraciones de ozono es decreciente.

La información con respecto de la distribución a posteriori del parámetro escala σ se presenta en la Tabla 4.8 y en c) de la Figura 4.8, se observa que todas las densidades toman valores positivos entre 0.014 y 0.028.

Con respecto al parámetro de forma ξ se observa que las 5 regiones toma valores negativos entre -0.4 y 0, ver Tabla 4.9 y en d) de la Figura 4.8.

En la Figura se presenta la serie de tiempo de cada región geográfica incluyendo la recta de regresión dada por la mediana de la distribución $VEG \mu_i + \sigma \frac{(\log(2))^{-\xi_i} - 1}{\xi_i}$ con $i = 1, 2, \dots, 5$ (ver Coles S. [5]), esta fue calculada con los valores de la media a posteriori para los parámetros,

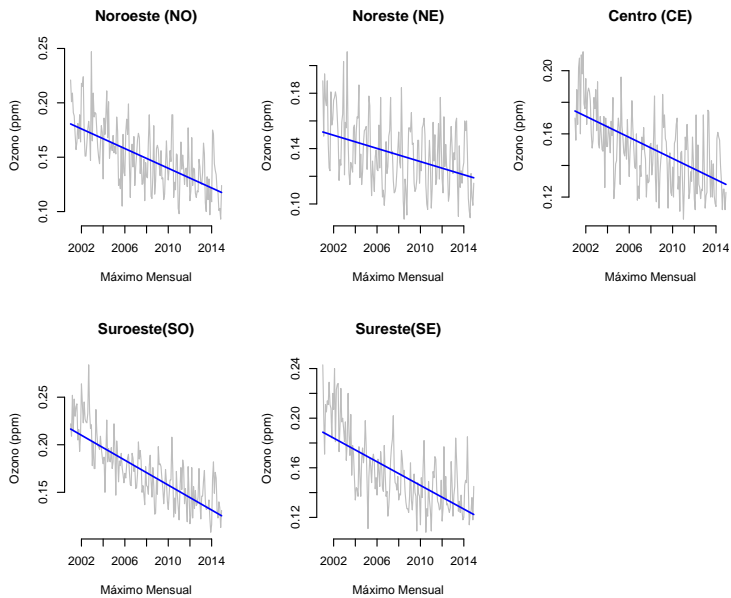


Figura 4.9: Observaciones Máximas de ozono Mensuales de 2001 al 2014 para 5 regiones de la ZMVM con las estimaciones de $\mu_i + \sigma \frac{(\log(2))^{-\xi_i} - 1}{\xi_i}$ con $i = 1, 2, \dots, 5$, dadas por su media a posteriori

$\beta_0, \beta_1, \sigma, \xi$ de cada una de las regiones, se observa que todas la medianas estimadas son líneas que tienen tendencia negativa dada la estructura del modelo paramétrico.

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

En esta sección se trabaja con la misma base de datos de la sección 4.1 y se supone que los extremos de O_3 siguen una distribución de *VEG* de la siguiente manera:

$$Z_{t,i} \sim GEV(\mu_{t,i}, \sigma, \xi), \quad (4.4)$$

$$\mu_{t,i} = \beta_{0,i} + \beta_{1,i}(t - \bar{t})/sd(t), \quad (4.5)$$

con $t = 1, 2, \dots, 212$; $i = 1, 2, \dots, 16$ para el análisis de las 16 estaciones y $t = 1, 2, \dots, 168$; $i = 1, 2, \dots, 5$ para el análisis de las 5 regiones, donde el parámetro de localización $\mu_{t,i}$ depende de $\beta_{0,i}$ y $\beta_{1,i}$, $\beta_{0,i}$ es un parámetro intercepto mientras que $\beta_{1,i}$ representa la tendencia en t para el parámetro de localización de cada estación o región, t es un índice de tiempo que denota los valores máximos de cada por bloque ordenados cronológicamente, \bar{t} es la media de todos los valores de t y $sd(t)$ es la desviación estándar de t . Cada valor de t esta asociado con un máximo por bloque donde las diferencias por año son asumidas no significativas. De la sección anterior se observa que la variabilidad sobre los estimadores de los parámetros σ y ξ es muy pequeña para las 16 estaciones, por lo que se decide en éste modelo considerarlos constantes e iguales para cada estación. Se asumen que $\beta_{0,i}$ y $\beta_{1,i}$ son cantidades aleatorias independientes, también conocidas como efectos aleatorios, que siguen una distribución de probabilidad Normal y que están centradas alrededor de la medias m_0 y m_1 respectivamente, más específicamente,

$$\beta_{0,i} \sim N(m_0, v_0), \quad \beta_{1,i} \sim N(m_1, v_1) \quad (4.6)$$

donde $i = 1, 2, \dots, 16$ para el análisis de las 16 estaciones o $i = 1, 2, \dots, 5$ para el análisis de 5 regiones, v_0 y v_1 representan las varianzas de $\beta_{0,i}$ y $\beta_{1,i}$.

Como se describió previamente en el contexto Bayesiano, las distribuciones a priori son requeridas todos los parámetros del modelo, $p(m_0)$, $p(m_1)$, $p(v_0)$, $p(v_1)$, $p(\sigma)$ y $p(\xi)$ denotan, una distribución marginal a priori de m_0 , m_1 , v_0 , v_1 , σ y ξ , respectivamente. Desde que no hay información preliminar para estos parámetros, se selecciona una distribución uniforme con un rango en $(-\infty, \infty)$ para m_0 y m_1 . Además se sabe que σ , v_0 , v_1 toma valores mayores que cero, por lo que se elige como distribución a priori a la distribución de probabilidad *Gamma Inversa* centrada

50 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

en uno y con una varianza grande. Para el parámetro ξ se asigna una distribución uniforme sobre $(-0.5, 0.5)$ para imponer las propiedades de regularidad de los estimadores de máxima verosimilitud de la distribución *VEG*, como describe Coles S. en [5].

4.2.1. Resultados 16 Estaciones

Se realiza una muestra de la distribución a posteriori conjunta definida en la Ecuación 4.3 usando el software OpenBUGS/WinBUGS [25], se comienza con un periodo de calentamiento de 2000 iteraciones del MCMC, adicionalmente se producen 10000 iteraciones más para producir las inferencias a posteriori. En este caso el MCMC alcanza su convergencia más lento que en el análisis univariado, esto se observa a través de los gráficos del historial y de las autocorrelaciones que se presentan en el Apéndice C .

Estación	media	sd	IC 97.5 %
FAC	0.1041	0.002008	(0.1002, 0.1079)
TLA	0.1022	0.001889	(0.0986, 0.106)
ACO	0.1108	0.001753	(0.1073, 0.1142)
MON	0.1035	0.001799	(0.1000, 0.1069)
SAG	0.08589	0.001646	(0.08287, 0.08934)
XAL	0.09586	0.001816	(0.09219, 0.09936)
IZT	0.09201	0.001724	(0.08858, 0.09547)
MER	0.1057	0.001724	(0.1027, 0.1094)
COY	0.1022	0.001773	(0.09868, 0.1056)
CUA	0.1014	0.001817	(0.09786, 0.1048)
PED	0.1057	0.001824	(0.1021, 0.1093)
SUR	0.08051	0.001803	(0.07683, 0.08403)
TPN	0.09481	0.001825	(0.09097, 0.09887)
CHO	0.08524	0.001762	(0.08166, 0.08874)
TAH	0.1157	0.001767	(0.1123, 0.1193)
UIZ	0.08416	0.001682	(0.08074, 0.08746)

Tabla 4.10: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro intercepto β_0 para las 16 estaciones de la RAMA, en el modelo de Efectos Aleatorios.

En la Tabla 4.10 se observa que la media posterior para β_0 es superior a 0.11 ppm para dos estaciones, una de ellas es Acolman con 0.1108 ppm esta estación pertenece a la zona noreste de la Ciudad de México y en la zona del sureste esta Tláhuac con 0.1157 ppm.

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 51

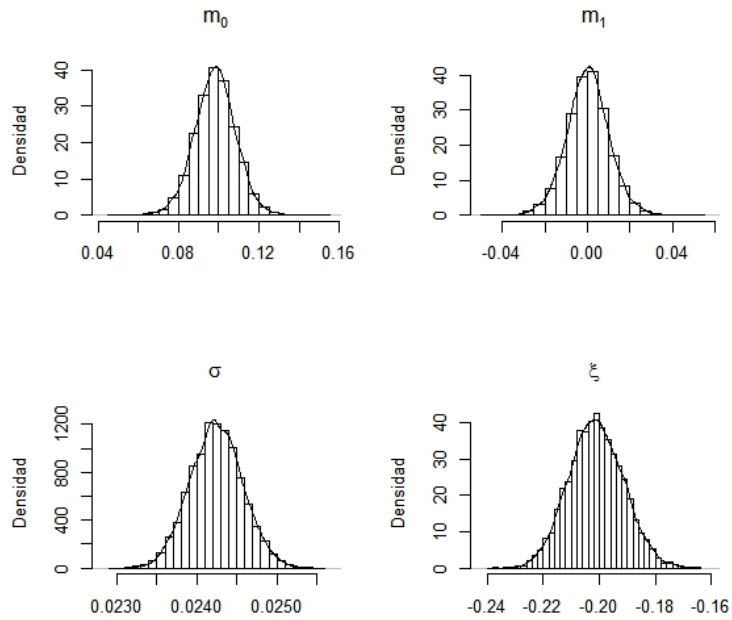


Figura 4.10: Densidades a posteriori para los parámetros m_0, m_1, σ, ξ , para el modelo de Efectos Aleatorios para 16 estaciones.

52 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

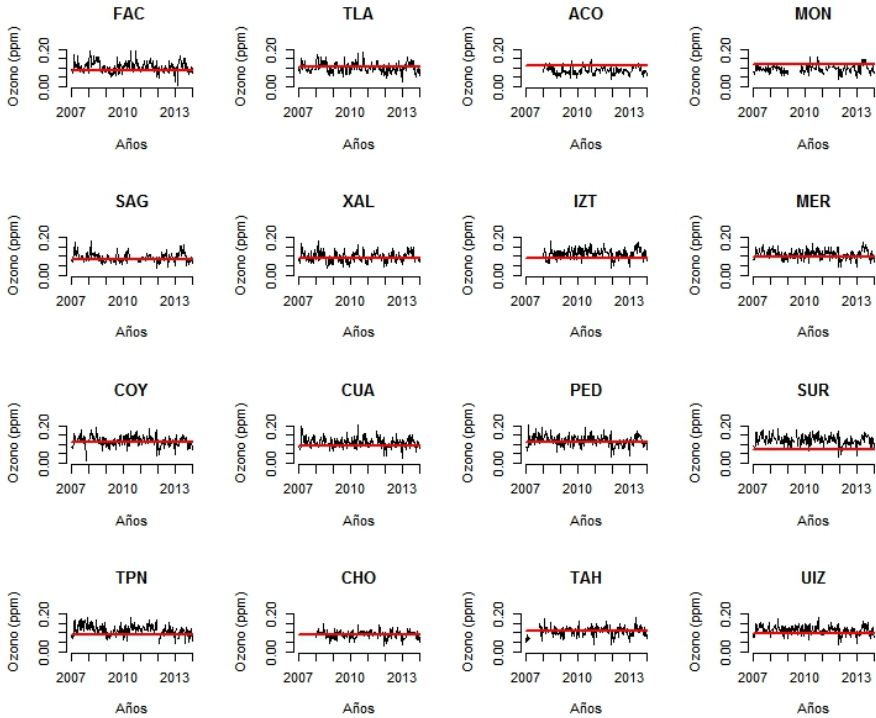


Figura 4.11: Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_t = \beta_0 + \beta_1(t - \bar{t})/sd(t)$ (en rojo), usando el modelo de Efectos Aleatorios.

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 53

Estación	media	sd	CI 97.5 %
FAC	0.01202	0.001892	(0.008243, 0.01568)
TLA	-0.002432	0.001877	(-0.006137, 0.001115)
ACO	-0.001008	0.001805	(-0.004534, 0.00254)
MON	-0.01052	0.001712	(-0.01392, -0.007024)
SAG	0.002836	0.001628	(-6.886E-4, 0.005612)
XAL	0.003704	0.001887	(1.269E-4, 0.007335)
IZT	7.95E-4	0.001736	(-0.00251, 0.004241)
MER	0.006101	0.001784	(0.002689, 0.009551)
COY	-0.006457	0.001704	(-0.009795, -0.003004)
CUA	0.004721	0.001879	(0.001002, 0.008393)
PED	-0.005777	0.001816	(-0.009265, -0.002282)
SUR	0.003523	0.001839	(3.158E-5, 0.007052)
TPN	0.001351	0.001731	(-0.001948, 0.004727)
CHO	-0.003466	0.001986	(-0.007382, 3.14E-4)
TAH	0.002511	0.001634	(-7.515E-4, 0.005876)
UIZ	-0.006133	0.001741	(-0.009802, -0.00271)

Tabla 4.11: Media a posteriori, desviación estándar (sd) y el intervalo de credibilidad de el parámetro de tendencia β_1 para las 16 estaciones de la RAMA, en el modelo de Efectos Aleatorios.

Para el parámetro β_1 en la Tabla 4.11 se presenta la media a posteriori, la desviación estándar y el intervalo de credibilidad al 97.5 %, en este caso para cuatro estaciones el intervalo de credibilidad contiene valores negativos, estas estaciones son: en el noreste Montecillo (MON), en el suroeste Coyoacán (COY) y Pedregal (PED), en la parte sureste UAM Iztapalapa (UIZ). También se puede observar intervalos que contienen valores positivos lo que nos indicará una tendencia creciente de las concentraciones de ozono, estas estaciones son: del noroeste Fes Acatlán (FAC), de Noreste Xalostoc (XAL), del centro Merced (MER), del suroeste Cua-

Parámetro	media	sd	95 % IC
m_0	0.09819	0.01024	(0.07763, 0.1182)
m_1	2.813E-4	0.01004	(-0.01965, 0.02052)
v_0	0.001666	7.196E-4	(7.897E-4, 0.003512)
v_1	0.001585	6.779E-4	(7.578E-4, 0.003266)
σ	0.02424	3.278E-4	(0.02361, 0.02489)
ξ	-0.2012	0.009737	(-0.2198, -0.1817)

Tabla 4.12: Información a posteriori para los parámetros m_0 , m_1 , v_0 , v_1 , σ and ξ .

54 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

jimalpa (CUA) y Santa Ursula (SUR). Para las restantes estaciones el intervalo de credibilidad contiene al cero no proporciona ninguna indicación de una pendiente significativa.

Al modelas con efectos aleatorios se esta interesado en la tendencia del ozono de una forma global, esta información se puede encontrar en la Tabla 4.12 y en los gráficos de densidad de la Figura 4.10 donde al observar la media posterior de m_0 indica que en la ZMVM no se sobrepasa la norma oficial de 0.11 ppm, además que la varianza de este parámetro es $v_0 = 0.001666$. Luego el parámetro que representa la tendencia es m_1 el cual tiene en un intervalo de credibilidad que contiene al cero, lo que indica no existir alguna tendencia significativa de las concentraciones de ozono. Observemos que el parámetro de forma ξ toma valores negativos.

4.2.2. Resultados 5 Regiones

En esta sección se aplica un modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios a la misma base de datos usada en la sección 4.1.2, que son los máximos mensuales del 2001 al 2014 y aqui no hay datos faltantes. Se haya la distribución posterior conjunta definida por las ecuaciones 4.4 y 4.5, para ello se toma un periodo de calentamiento 10000 *MCMC* con un adicional de 10000 iteraciones *MCMC* para producir las inferencias a posteriori. El *MCMC* converge rápidamente, dicha convergencia en verificada y monitoreada a través de las gráficas del historial y de las autocorrelaciones.

En la Figura 4.12 se muestra la serie de tiempo de los máximos mensuales de O_3 , para los años 2001 al 2014 y para las cinco regiones geográficas especificadas en la Tabla 2.1, en adición se incluye un punto de estimación regional de la mediana de la distribución *VEG* dada por la expresión $\mu_{t,i} + \sigma \frac{\log(2)^{-\xi} - 1}{\xi}$ [5].

Se estiman las densidades a posteriori con una muestra de simulaciones *MCMC* de $\beta_{0,i}$, $\beta_{1,i}$, σ y ξ , todas las medianas estimadas son líneas que tienen una tendencia negativa dada por la estructura de los parámetros. Sin embargo, si se intenta ajustar un modelo similar a las observaciones de la estación estación de la Tabla 2.1, la cantidad de información que falta es tan grande, que nuestro modelo proporciona predicciones muy pobres para las estaciones donde los porcentajes de los datos que faltan es más del 50%.

En la Figura 4.13 se presenta el histograma de la muestras posteriores y densidades estimadas para las distribuciones a posterioris para $\beta_{0,i}$, con $i = 1, \dots, 5$ etiquetado por su región geográfica, la Tabla 4.13

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 55

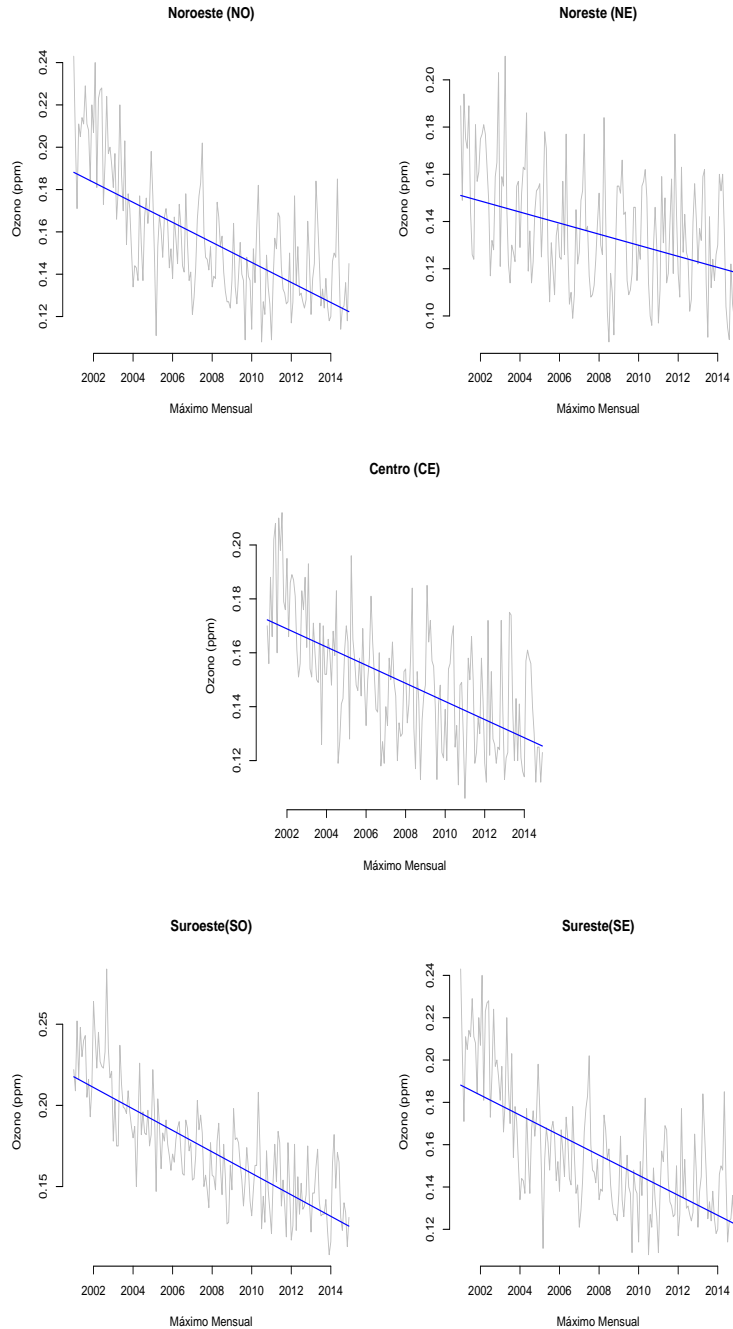


Figura 4.12: Máximo de concentraciones de ozono por bloques de cada 72 horas (en negro) y en la línea $\mu_{t,i} + \sigma \frac{\log(2)^{-\xi} - 1}{\xi}$ (en azul), usando el modelo de Efectos Aleatorios.

56 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

reporta el resumen de la información a posteriori para cada $\beta_{0,i}$ donde el índice $i = 1, 2$ denota las zonas Noroeste(NO) y Noreste(NE), $i = 3$ representa la región Centro(CE) y $i = 4, 5$ denota las regiones Suroeste(SO) y Sureste(SE). Los resúmenes incluyen la estimación de la media a posteriori, la desviación estándar a posteriori y el intervalo de credibilidad calculado al 95 %, los valores de $\beta_{0,i}$ están en el rango de 0.12 a 0.16 y la desviación estándar son similares entre regiones. La región del sur tiene los estimadores más grandes de $\beta_{0,i}$, lo que indica que a principios de 2001, su parámetro de localización tuvo los valores más altos.

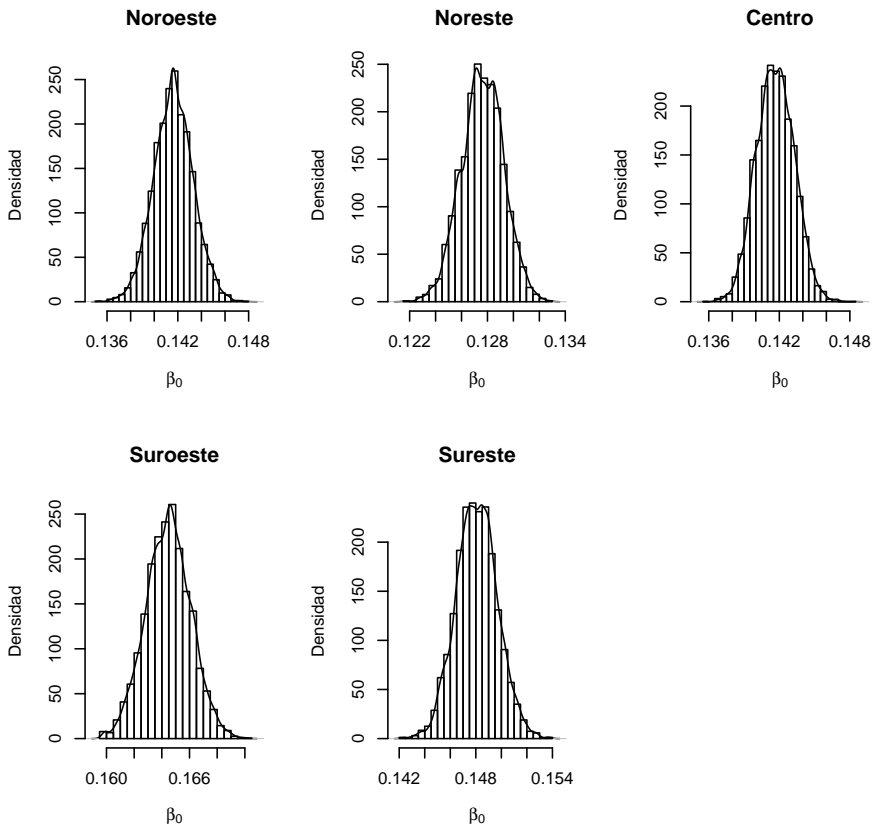


Figura 4.13: Distribución a posteriori para $\beta_{0,i}$, $i = 1, \dots, 5$

Además, en la Figura 4.14 se presentan los histogramas de las mues-

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 57

Estación	media	ds	95 % IC
NO	0.1416	0.0017	(0.1383, 0.1450)
NE	0.1276	0.0016	(0.1245, 0.1307)
CE	0.1417	0.0016	(0.1386, 0.1447)
SO	0.1645	0.0016	(0.1613, 0.1677)
SE	0.1481	0.0016	(0.145 ,0.1513)

Tabla 4.13: Media a posteriori, desviación estándar a posteriori (ds) e intervalos de credibilidad (IC) para el parámetro $\beta_{0,i}$ para las 5 regiones geográficas: Noroeste (NO), Noreste (NE), Centro (CE), Soroeste (SO) y Soreste (SE).

Estación	media	ds	95 % IC
NO	-0.0183	0.0017	(-0.0215, -0.0150)
NE	-0.0095	0.0016	(-0.0127 , -0.0062)
CE	-0.0136	0.0016	(-0.0169,-0.0105)
SO	-0.0268	0.0017	(-0.0301, -0.0235)
SE	-0.0192	0.0017	(-0.0225,-0.0158)

Tabla 4.14: Media a posteriori, desviación estándar a posteori (ds) e intervalos de credibilidad (IC) para el parámetro $\beta_{1,i}$ para las 5 regiones geográficas: Noroeste (NO), Noreste (NE), Centro (CE), Soroeste (SO) y Soreste (SE).

58 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

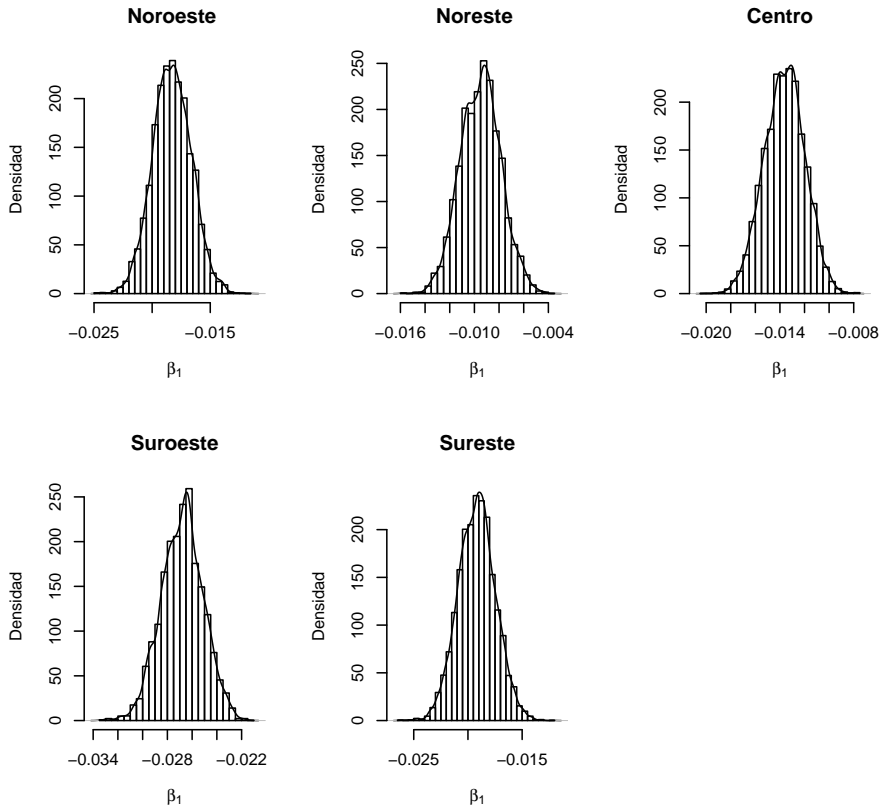


Figura 4.14: Distribución a posteriori para $\beta_{1,i}$, $i = 1, \dots, 5$

tras a posteriori y las densidades estimadas de la distribución marginal a posteriori de $\beta_{1,i}$, mientras que en la Tabla 4.14 se reporta las estimaciones de la media a posteriori, la desviación estándar y el intervalo de credibilidad al 95% de este parámetro, se puede observar que $\beta_{1,i}$ determina el tipo de cambio en t para la estimación de la mediana de la Figura 4.12, la media a posteriori estimada tiene valores negativos en todos los casos, la desviación estándar a posteriori se presenta casi igual en todas las regiones. Se observa que el cuantil 97.5% es menor que cero en todos los casos, además en el intervalo de credibilidad están completamente contenidos en la recta real con números negativos, la distribución a posteriori de la Figura 4.14 confirman que los parámetro de $\beta_{1,i}$ son

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 59

esencialmente negativos con una alta probabilidad.

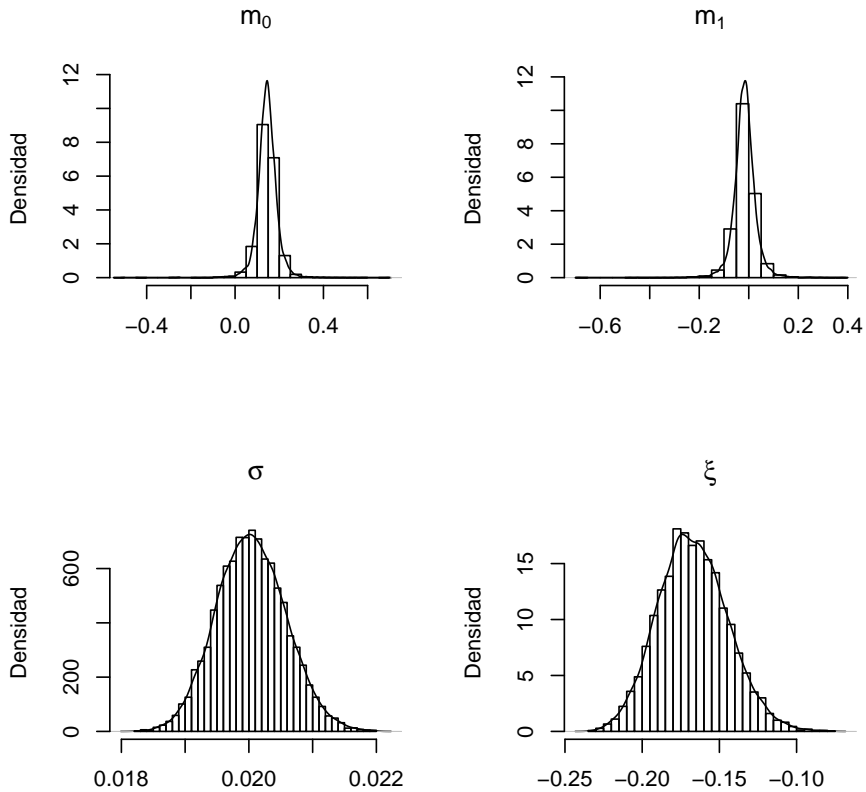


Figura 4.15: Histograma de la muestra posterior y densidades de los parámetros m_0 , m_1 , σ y ξ , para el modelo de efectos aleatorios aplicado a 5 regiones.

En la Figura 4.16 se presenta el histograma y la densidad marginal a posteriori para m_0 , m_1 , σ y ξ conforme al modelo descrito en las ecuaciones 4.4 y 4.5, los histogramas son dibujados suavizando las muestras *MCMC* con un estimador de densidad. En la tabla 4.15, se reporta un resumen sobre la información a posteriori de estos parámetros adicionando la información de v_1 y v_2 , que son las varianzas estimadas de $\beta_{0,i}$

60 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

Parámetro	media	ds	95 % IC
m_0	0.1449	0.0465	(0.0551, 0.2338)
m_1	-0.0170	0.0456	(-0.1072, 0.0724)
v_0	0.01	0.0167	(0.0018, 0.0390)
v_1	0.0099	0.0157	(0.0018, 0.0414)
σ	0.0200	5.4E-4	(0.0190, 0.0211)
ξ	-0.1670	0.0224	(-0.2087, -0.1212)

Tabla 4.15: Resumen de la información a posteriori para los parámetros m_0 , m_1 , v_0 , v_1 , σ y ξ

y $\beta_{1,i}$ alrededor de los valores m_0 y m_1 es del orden de 0.01. Para m_1 su distribución de probabilidad a posteriori esta centrada alrededor de -0.0170 con un rango de valores que cubren valores negativos y positivos. En particular, la probabilidad a posteriori de que m_1 sea menor que cero esta dada por nuestro modelo estadístico y los datos, $P(m_1 < 0|Z)$ es 0.6955, este valor es obtenido por la recuencia de tiempo en el cual m_1 es menor que cero sobre un total de 10000 iteraciones *MCMC*. La media global de $\beta_{1,i}$, es negativa con un valor de probabilidad moderadamente alta, aunque el intervalo de probabilidad de m_1 incluye al cero.

El verdadero valor de σ esta alrededor de 0.02 y el parámetro de ξ es claramente negativo lo que corresponde al comportamiento de la cola de una Weibull inversa, de acuerdo a la distribución *VEG* [5]. Adicionalmente se comparan los resultados de las estimaciones a posteriori para m_1 adecuando el modelo para las observaciones de los años 2001 – 2006 y para las observaciones de 2007 – 2014, estas comparaciones son mostradas en la Figura ?? y las estimaciones de m_1 con su intervalo de credibilidad son reportadas en la Tabla 4.16, note que para los años de 2007 – 2014 la densidad de probabilidad de m_1 esta más centrada alrededor de cero que la densidad correspondiente para todos los años (2001 – 2014) y para 2001 – 2006. En efecto, la media estimada de m_1 para 2001 – 2006 es -0.0168 muy cerrado a la obtenida para todos los años, mientras que 2007 – 2014, la media estimada es -0.0048 . La probabilidad de que m_1 sea menor que cero es igual a 0.6868 para el periodo de 2001 – 2006 y es igual a 0.5557 para el periodo de 2007 – 2014 lo que da esencialmente la misma oportunidad a este parámetro global de ser negativo o positivo.

Adicionalmente en las Figuras 4.17 y 4.18 ilustran el comportamiento predictivo del modelo usado, para ello 5 observaciones son omitidas de Diciembre de 2014, se retoma el modelo y se obtiene la muestra a posteriori de la distribución predictiva para estos 5 casos, como parte de las corridas del *MCMC*, en la Figura 4.17 se observa los histogramas

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 61

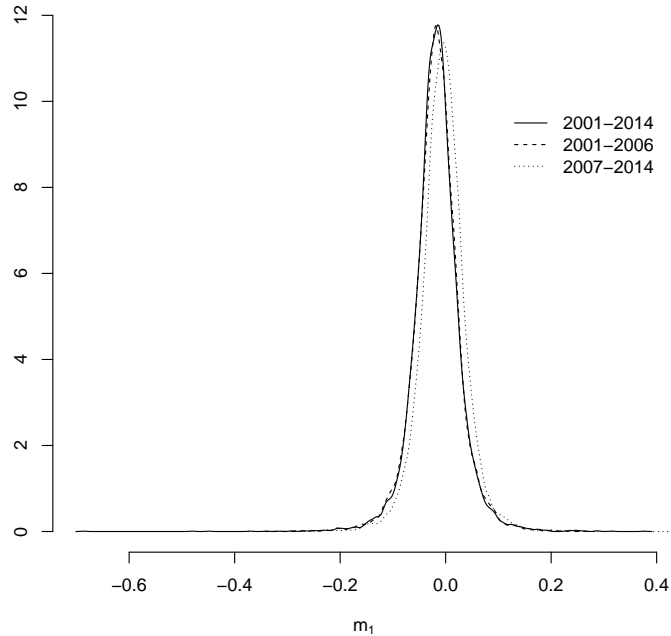


Figura 4.16: Densidad de probabilidad para los parámetros m_1 para los años de 2001 – 2006, 2007 – 20014 y 2001 – 2014

y la densidad de las distribuciones marginales predictivas de los datos “fuera de la muestra” por región y para Diciembre de 2014, el triángulo sobre el eje de la x representa el valor observado actual, como podemos ver en esta figura, los valores reales observados están bien contenidas dentro de la distribución predictiva.

En la Figura 4.18 se muestra la media predictiva posteriori (línea roja) para cada dato, con su límite predictivo al 2.5% y 97.5% (línea roja discontinua). Las medias predictivas y los límites son manejados por la suposición del modelo ya hecha al inicio de la sección.

62 4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos

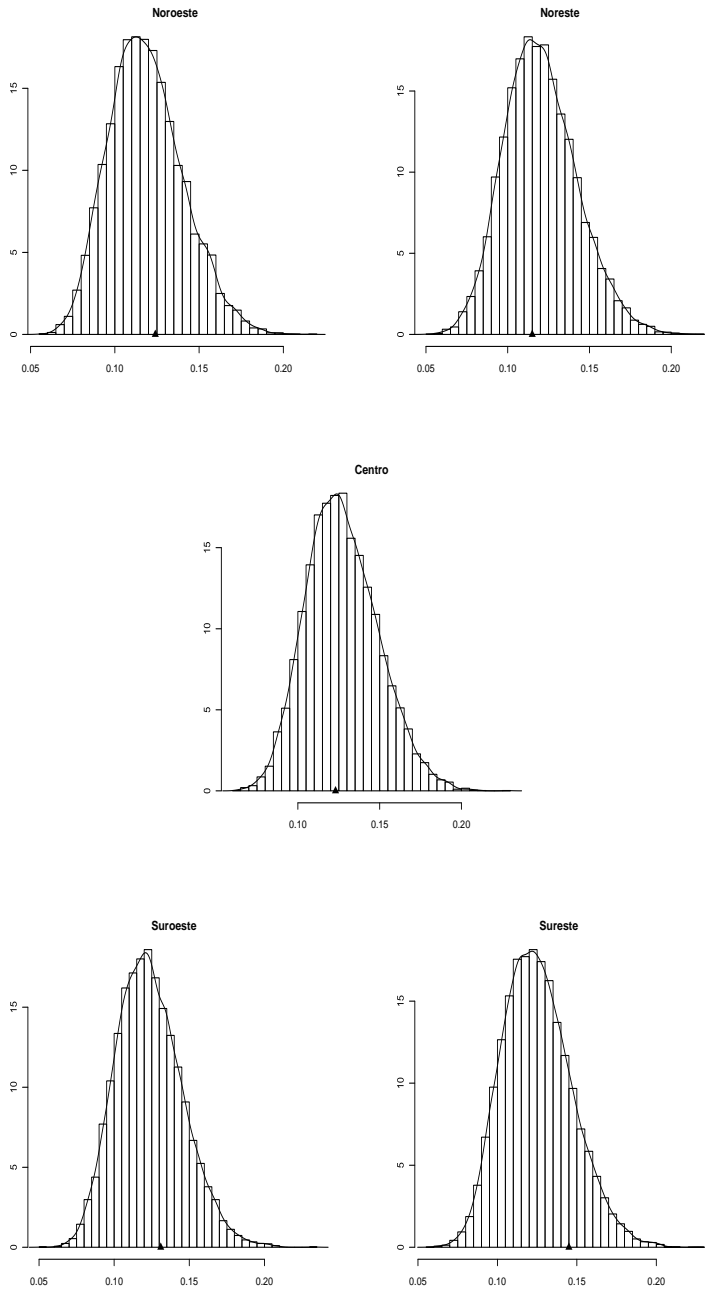


Figura 4.17: Distribuciones predictivas de la muestra para Diciembre de 2014 se muestra por regiones

4.2. Modelo Jerárquico con Efectos Aleatorios en Extremos 63

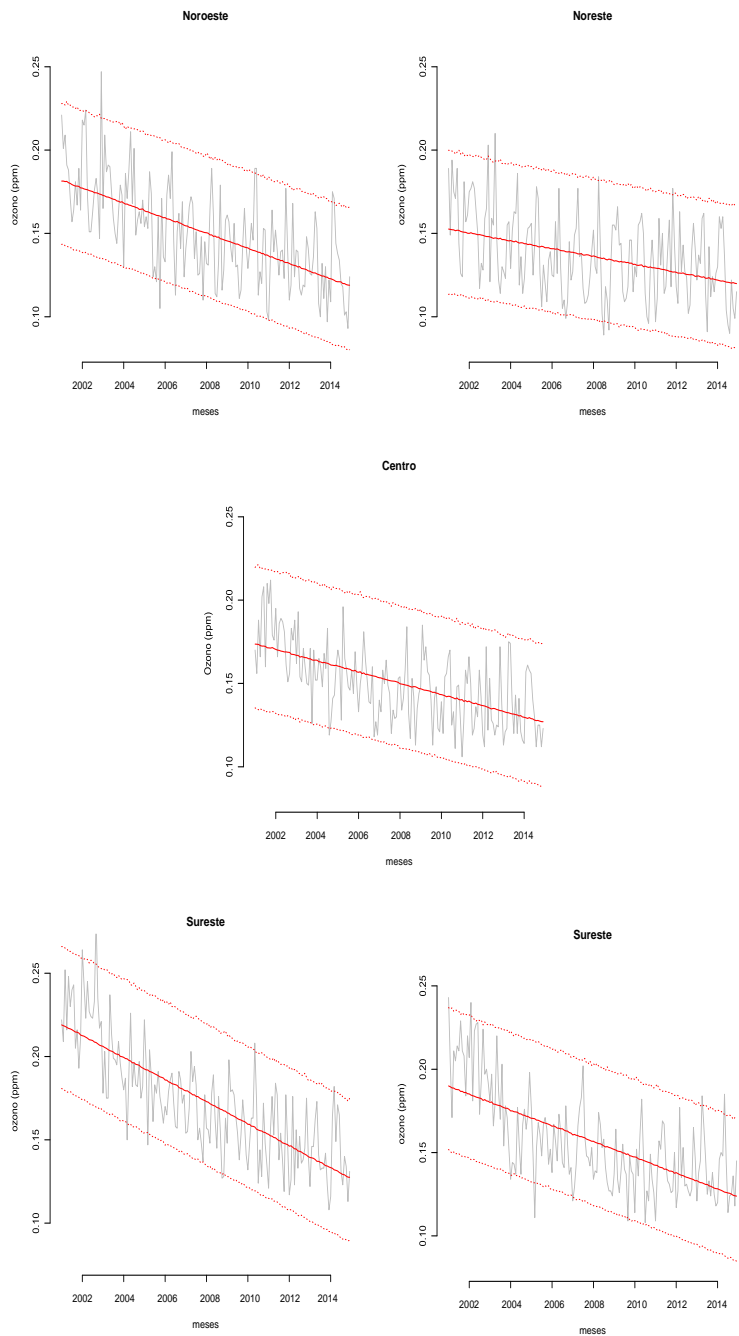


Figura 4.18: Media de la muestra predictiva e intervalo de credibilidad al 95 % por región

Años	media	95 % IC	$P(m_1 < 0 \text{datos})$
2001 – 2014	-0.0170	(-0.1072, 0.0724)	0.6955
2001 – 2006	-0.0168	(-0.1067, 0.0739)	0.6868
2007 – 2014	-0.0048	(-0.0909, 0.0811)	0.5557

Tabla 4.16: Resumen de la información a posteriori para m_1 para los años 2001 – 2014, 2001 – 2006, 2007 – 2014.

4.3. Modelo Espacial *Disc*

Se asume que s_i , $i = 1, \dots, N = 16$ que representa la localización en coordenadas Mercator de cada estación de monitoreo perteneciente al SIMAT, dado $Z_t(s_i)$ donde t denota el t -ésimo máximo semanal para $t = 1, \dots, T = 242$, suponemos que las observaciones $Z_t(s_i)$ son condicionalmente independientes y con distribución VEG, es decir

$$Z_t(s_i) \sim VEG(\mu_t(s_i), \sigma, \xi) \quad (4.7)$$

$$\mu_t(s_i) = \beta_0(s_i) + \beta_1(s_i)(t - \bar{t}) \quad (4.8)$$

Con $i = 1, 2, \dots, N = 16, t = 1, 2, \dots, T = 212$, este modelo se sigue para los coeficientes que definen la dependencia temporal sobre el parámetro de localización $\mu_t(s_i)$ que varía como una función del espacio. Los parámetros de escala σ y de forma ξ son modelados cada uno de ellos como constantes en el espacio y tiempo. El modelo para los coeficientes que varían espacialmente $\beta_0(s)$ el intercepto y $\beta_1(s)$ la pendiente son especificados en términos de procesos Gaussianos. En particular se asume que cada uno es producido por una distribución Normal Multivariable, con una media que es constante en la componente de s_i y con una estructura de covarianza espacial estacionaria que captura la dependencia residual espacia entre localizaciones.

Definimos $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ como un vector columna de unos de dimensión $N = 16$. Si $\beta_0 = (\beta_0(s_1), \dots, \beta_0(s_{16}))'$ es una a priori independiente de $\beta_1 = (\beta_1(s_1), \dots, \beta_1(s_{16}))'$, un modelo espacial o proceso Gaussiano a priori sobre estos parámetros toma la forma,

$$\beta_i | \lambda_i, \tau_i, \alpha_i \sim N(\mathbf{1}\lambda_i, \Sigma(\tau_i, \alpha_i)), i = 0, 1, \quad (4.9)$$

donde λ_i es un parámetro de media común en el modelo para la variación espacial β_i . τ_i es una cantidad escalar para la matriz de covarianza $\Sigma(\tau_i, \alpha_i)$ y α_i controla la tasa de disminución de las correlaciones espaciales $i = 0, 1$. La matriz 16×16 , $\Sigma(\tau_i, \alpha_i)$ define covarianzas espaciales

entre las estaciones de monitoreo del SIMAT.

Si $\mathbf{Z} = Z_t(s_i; i = 1, \dots, 16), t = 1, \dots, 212$, la distribución a posteriori para $(\lambda_0, \lambda_1, \tau_0, \tau_1, \alpha_0, \alpha_1, \sigma, \xi)$ dado \mathbf{Z} es

$$p(\lambda_0, \lambda_1, \tau_0, \tau_1, \alpha_0, \alpha_1, \sigma, \xi | \mathbf{Z}) \propto \quad (4.10)$$

$$f(\mathbf{Z} | \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \sigma, \xi) p(\sigma) p(\xi) \times \prod_{i=0}^1 \{p(\boldsymbol{\beta}_i | \lambda_i, \tau_i, \alpha_i) p(\lambda_i) p(\tau_i) p(\alpha_i)\}. \quad (4.11)$$

El término $f(\mathbf{Z} | \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \sigma, \xi)$ define la verosimilitud de todas las observaciones computadas con la distribución VEG. La priori para el parámetro escalar σ sigue una distribución *Gamma*(δ, δ) o $\sigma \sim \text{Gamma}(\delta, \delta)$ donde δ es seleccionado cerrado a cero para que la varianza a priori sea grande. Alternativamente, se asigna directamente una a priori de la forma $p(\sigma) \propto 1/\sigma$, para el parámetro de forma ξ se considera una distribución uniforme sobre (-0.5,0.5) o $\xi \sim U(-0.5, 0.5)$, la priori para β_i dada por λ_i, τ_i y α_i para $i = 0, 1$, siguen un proceso gaussiano como en la ecuación (4.9) para permitir variación espacial en el intercepto y en la tendencia. Ambos parámetros λ_i se les asigna una distribución a priori como $p(\lambda_i) \propto 1$ mientras que $\tau_i \sim \text{Gamma}(0.1, 0.1)$ y $\alpha_i \sim \text{Gamma}(0.1, 0.1)$ para $i = 0, 1$.

Implementado en OpenBugs se obtiene muestras MCMC de la distribución a posteriori definida como en las ecuaciones () y donde la matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}(\tau_i, \alpha_i)$ es definida mediante la función de correlación *disc*,

$$f(d_{ij}; \alpha) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right) \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{d_{ij}}{\alpha} \right) - \left[\frac{d_{ij}}{\alpha} \left(1 - \frac{d_{ij}^2}{\alpha^2} \right) \right]^{1/2} \right\}, & \text{para } d_{ij} < \alpha; \\ 0, & \text{para } d_{ij} > \alpha. \end{cases} \quad (4.12)$$

donde d_{ij} representa la distancia entre las localizaciones s_i y s_j . Note que para esta función el parámetro α representa los cambios de la correlación según la distancia. Después de un período de calentamiento de 20000 muestras, se consideraron los siguientes 80000 iteraciones que fueron adelgazadas saltando por cada 20 – *aba* iteración para reducir autocorrelaciones de muestra y lograr MCMC convergente . La convergencia MCMC se evaluó a través de observar las gráficas de los historiales/trazas de las 100,000 iteraciones y las gráficas de las autocorrelaciones para todos los parámetros del modelo. Los gráficos de las trazas se mueven rápidamente a través del espacio de parámetros y las

autocorrelaciones son prácticamente cero después de considerar un adelgazamiento de 20.

4.3.1. Resultados

En la Tabla 4.17 y Figura 4.19 mostramos la información posterior obtenida de la estimación espacial, se observa que la media posterior de λ_0 representa la ordenada al origen de todas las estaciones, está por debajo del valor permitido de ozono que exige la Norma Oficial Mexicana. Luego del intervalo de credibilidad para λ_1 que representa la tendencia de concentraciones de ozono para toda la Zona Metropolitana de la Ciudad de México, del cual se observa que no existe una tendencia a la baja para toda la región.

Parámetro	Media	ds	IC. 97.5 %
λ_0	0.09768	0.03095	(0.03624 , 0.159)
λ_1	-0.002796	0.009893	(-0.02238, 0.01683)
τ_0	75.38	27.36	(31.26 , 137.3)
τ_1	743.7	273.3	(307 , 1371)
α_0	0.6689	0.4715	(0.08145 , 1.859)
α_1	0.6655	0.4708	(0.08061 , 1.858)
σ	0.02507	3.21E-04	(0.02445 , 0.02571)
ξ	-0.2277	0.006759	(-0.2405 , -0.214)

Tabla 4.17: Información a posteriori para el modelo Espacial, se muestra la media, la desviación estándar (ds) y el intervalo de credibilidad (IC) de cada parámetro

El parámetro de escala es mayor que cero y ξ toma valores mayores de -0.5, lo que indica que podemos encontrar estimadores de máxima verosimilitud con propiedades asintóticas [5]. El intervalo de credibilidad al 97.5 % para α_0 y α_1 indican que el intercepto y la tendencia pueden incrementar según la distancia entre cada estación.

De este análisis espacial también se obtiene las distribuciones a posteriori de los parámetros que representan el intercepto y la tendencia para cada una de las estaciones. En la Figura 4.20 mostramos los valores de las medias posteriores para el intercepto u ordenada al origen para cada una de las estaciones, se observa que hay dos estaciones con la media a posteriori que supera las 0.11 ppm, permitidas por la norma mexicana, estas estaciones son Pedregal y Santa Ursula ubicadas en el suroeste de la ZMCM.

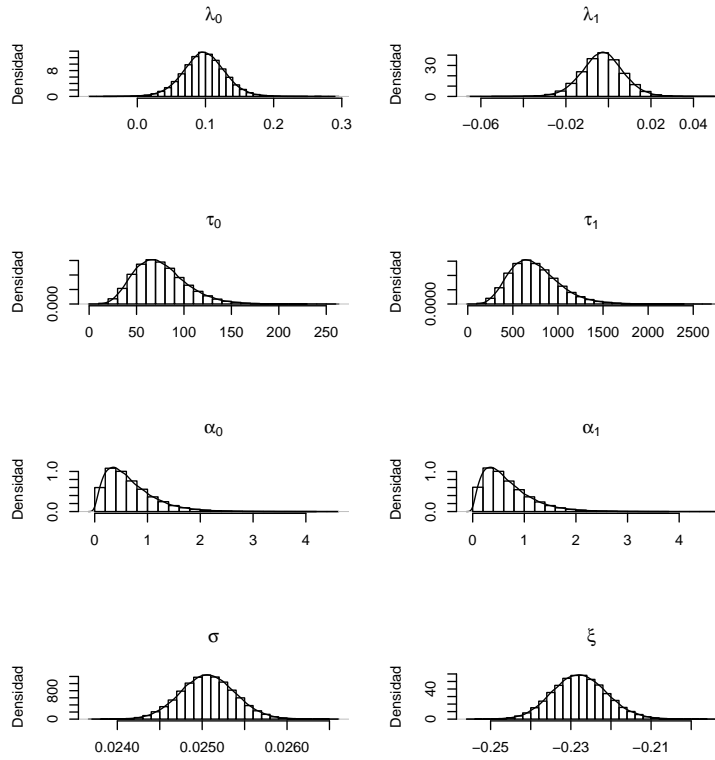


Figura 4.19: Distribución Posterior de los parámetros del modelo Espacial, con $\beta_0|\lambda_0, \tau_0, \phi_0$ y $\beta_1|\lambda_1, \tau_1, \phi_1$, donde se observa la distribución posterior de la ordenada al origen (λ_0) y la tendencia general (λ_1)

Para la media posterior del parámetro que representa la tendencia; mostrada en la Figura 4.21, se tiene como resultado que 7 de las 16 estaciones tienen una tendencia a la baja, de acuerdo al intervalo de credibilidad obtenido, Fes Acatlán del noroeste, las 5 estaciones que pertenecen al suroeste de la ZMCM y por último UAM Iztapalapa ubicada en el sureste.

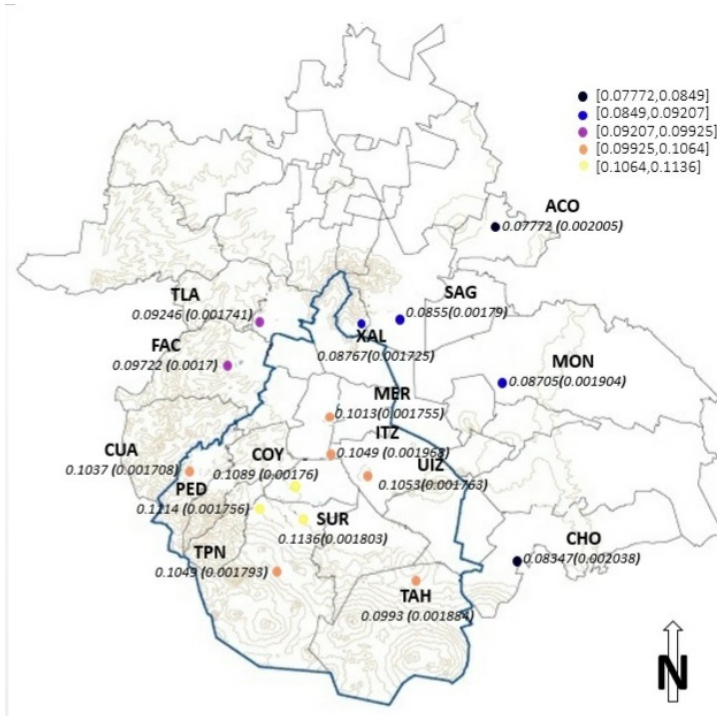


Figura 4.20: Para cada estación del SIMAT se representa la estimación de la media a posteriori del intercepto (β_0) y entre paréntesis se encuentra la desviación estándar. En la parte superior derecha se encuentran los 5 intervalos en los que esta dividido la media a posteriori del intercepto, donde el círculo de color negro indica el intervalo con los valores de la media a posteriori más chicos hasta colores claros que indican valores más altos, como el círculo amarillo que contiene los valores más altos en la media a posteriori.

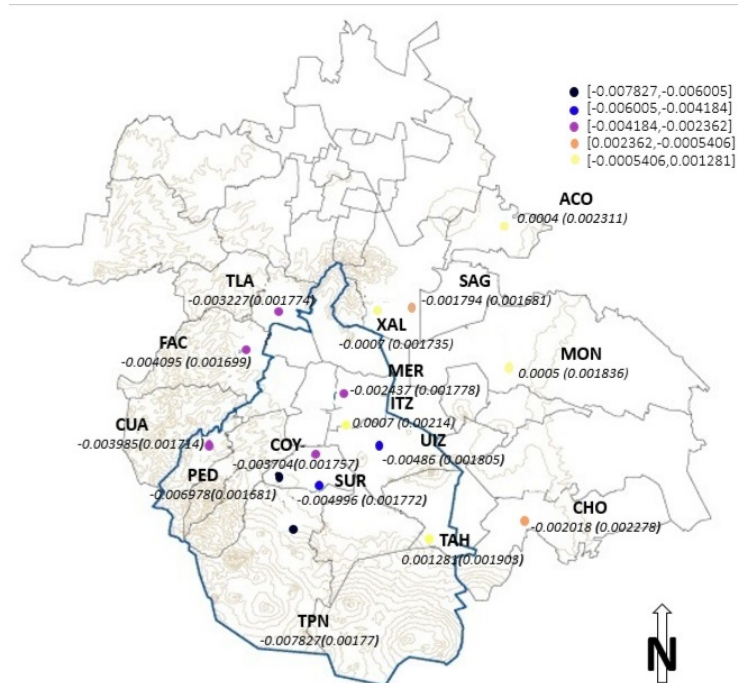


Figura 4.21: Para cada estación del SIMAT se representa la estimación de la media a posteriori del parámetro que representa la tendencia (β_1) y entre paréntesis se encuentra la desviación estándar. En la parte superior derecha se encuentran los 5 intervalos en los que esta dividida la media a posteriori de tendencia, donde el círculo de color negro indica el intervalo con los valores de la media a posteriori más chicos hasta colores claros que indican valores más altos, como el círculo amarillo que contiene los valores más altos en la media a posteriori.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha presentado una aplicación de la teoría de valores extremos en combinación con la modelación de estadística Bayesiana, para un conjunto de valores máximos por bloque de ozono, estos datos son obtenidos de las estaciones de monitores pertenecientes a la *RAMA* ubicada en la Ciudad de México.

Un primer análisis es aplicado a los máximos de ozono de cada 72 horas de los meses de Abril, Mayo y Junio para los años de 2007 al 2013. En el análisis univariado se muestra que siete de las estaciones de la *RAMA* presentan una tendencia decreciente de las concentraciones de ozono en el parámetro de localización, las cuales son Fes Acatlán (FAC), Cuajimalpa (CUA), Tlalpan (TPN) y UAM Iztapalapa (UIZ), estas no exceden las concentraciones permitidas de 0.11 *ppm* en $t = 0$. Las restantes 9 estaciones, no presentan alguna tendencia de concentraciones de ozono en el parámetro de localización de la distribución *VEG*. Basándose en el análisis espacial, las mismas 7 estaciones presentan tendencia negativa, lo que indica en estas estaciones un cierto decaimiento de $\mu_t(s)$ el parámetro de localización de la distribución *VEG*, sin embargo el parámetro de tendencia general λ_1 tiene un intervalo de credibilidad que contiene al cero, es decir el cambio del parámetro de localización para la distribución *VEG* es despreciable. Por otro lado las estaciones Fes Acatlán (FAC), Coyoacán (COY), Cuajimalpa (CUA), Pedregal (PED), Santa Ursula (SUR), Tlalpan (TPN) y UAM Iztapalapa (UIZ) son las que tienen los valores más altos de ozono, también son las que presentan estimaciones de tendencia negativas en el parámetro de localización de la distribución *VEG*, se observa en este trabajo que estas estaciones están localizadas en la región Suroeste de la Ciudad de México, la cual está rodeada de pequeñas montañas lo que dificulta la libre circulación de vientos y acumula gases contaminantes.

Para el análisis aplicado a las cinco regiones geográficas de la ciudad de México, se usa la información de los máximos mensuales de las 29 estaciones de monitoreo pertenecientes a la *RAMA* para los años de 2001 al 2014, en la modelación región por región y en la de modelos jerárquicos se obtiene evidencia de niveles decrecientes para las cinco regiones. Además se estimo a m_1 que representa la tendencia general de la Ciudad de México en la cual con las probabilidades estimadas existe evidencia de tendencia negativa, sin embargo para observaciones más recientes del 2006-2014, m_1 no muestra evidencia de una tendencia de los máximos de ozono. Se observa que las cinco regiones superan las 0.11 *ppm* en $t = 0$ y que la región con mayor concentración de ozono es la región Suroeste lo que coincide con el análisis hecho por estación de monitoreo.

En general, si bien los niveles máximos de ozono están disminuyendo en la Ciudad de México aún no alcanza los niveles permisibles para la Norma Oficial de Salud. Observamos que la situación climática se esta complicando, pues la temperatura está en aumento, los niveles altos de ozono están siendo frecuentes por la falta de vientos que rodeados por las montañas no permiten tener ventilación. Los “hoy no circula” no funcionan, hay necesidad de tener un transporte eléctrico en toda la ciudad.

Hay situaciones drásticas en la Ciudad de México, los cambios climáticos están aumentando más rápido de lo que se tenía contemplado, no hay control en el parque vehicular y no se invierte en el transporte. A pesar de los índices altos que se alcanzan, se están tirando arboles para unir vías de comunicación entre la ciudad y el nuevo aeropuerto de la Ciudad de México, así como cambios de uso del suelo que dañara más a la Ciudad.

Como trabajos futuros se puede aplicar la metodología a redes de monitoreo de estados vecinos de la Ciudad de México, entre ellas Puebla, Tlaxcala, Hidalgo y Queretaro, para analizar el comportamiento del ozono y verificar si cumple con las normas de emisiones vehiculares y de industrias.

Bibliografía

- [1] Banerjee S., Carlin B.P., Gelfand A.E. “Hierarchical modeling and analysis for spatial data”, segunda edición, Chapman and Hall, Florida, 2014.
- [2] Bernardo J.M. y Smith F.M.A. “Bayesian Theory”, Jonh Wiley & Sons, ISBN 0471924164, 1994.
- [3] Blacksmith Instituto, “Los lugares más contaminados del mundo”, <http://www.reportajes.org/2010/04/21/los-lugares-mas-contaminados-del-mundo/>, 2010.
- [4] Bravo H., “La contaminación atmosférica por ozono en la zona metropolitana de la Ciudad de México:evolución histórica y perspectivas”, IX Comisión Nacional de los Derechos Humanos, 1992.
- [5] Coles S., “An introduction to statistical modeling of extreme values”, tercera edición, Springer Verlag, ISBN 1852334592, 2004.
- [6] Cortina-Januchs M.G. ,Barrón-Adame J.M. , Vega-Corona A. and Andina D., “Pollution Alarm System in Mexico”, Springer-Verlag, pp:1336-1343, 2009.
- [7] Congdon P., “Bayesian Statistical Modelling”, segunda edición, John Wiley & Sons Ltd, ISBN 13978047001875-0(HB)
- [8] Cressie A.C.N., “Statistics for spatial data”, John Wiley & Sons, ISBN 0 471 84336 9, 1991.
- [9] De Haan L. y Ferreira A., “Extreme Value theory. An Introduction ”, Springer, ISBN-13:9780387239460, 2000.
- [10] Embrechts P., Resnick S. y Samorodnitsky G., “Extreme Value theory as a risk management tool”.

-
- [11] Faranda D., Lucarini V., Turchetti G. and Vaienti S., “Numerical Convergence of the Block-Maxima Approach to the Generalized Extreme Value Distribution”, *Journal Stat Phys*, 145:1156-1180, Springer, 2011.
- [12] Finkenstadt B. y Rootzen H., “Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment”. Chapman and Hall/CRC, ISBN 1584884118, 2004.
- [13] Gelman A., “Bayes, Jeffreys, prior distribution, and the philosophy of statistics”. *Statistical Science*, 24, PP.176-178, 2009.
- [14] Gong Sheng, “Estimation of hot and cold spells with extreme values theory”, Department of Mathematics Uppsala University, 2012.
- [15] Hernández A., “Distribución límite de los extremos del modelo t-student truncado para datos de lluvia diaria”, Tesis Doctoral, Universidad Simón Bolívar, Decanato de Estudio de Postgrado, 2005.
- [16] Hoel G.P., Port C.S. y Stone J.C., “Introduction to Stochastic Processes”, Waveland Press Inc., 1972.
- [17] Huerta G. y Sansó B., “Time-Varying Models for Extreme Values”, *Environmental and Ecological Statistics* 14(2007), PP.285-299, 2007.
- [18] Huerta G., Sansó B. y Stroud J.R., “A spatiotemporal model for Mexico City ozone levels”, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 53, pp. 231-248, 2004.
- [19] Ibañez A., “Análisis estadístico de valores extremos y aplicaciones”, Trabajo de Investigación, Máster Oficial en Estadística Aplicada, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada, 2011.
- [20] Jim A., “Bayesian Computation with R”, segunda edición, Springer Science+Business Media, ISBN 9780387922973, 2009.
- [21] Karl-Rudolf K., “Introduction to Bayesian Statistics”, segunda edición, Springer Verlag, ISBN 9783540727231, 2007.
- [22] Kruschke K.J., “Doing Bayesian Data Analysis. A Tutorial with R and BUGS”, ELSEVIER, ISBN 9780123814852, 2011.
- [23] Lezama José Luis, “Aire dividido, Crítica a la política del aire en el Valle de México”, El Colegio de México, México, 2000.

- [24] Loya N., Reyes H., Tajonar F. and Ariza F., “Modeling of atmospheric Phenomena using non-homogeneous Poisson Process”, Journal of Environmental Science and Engineering, 2012.
- [25] Lunn D., Jackson C., Best N., Thomas A. y Spiegelhalter D. “The BUGS Book, A practical introduction to Bayesian Analysis”, Chapman & Hall Book, ISBN 9781584888499, 2013.
- [26] Mannshardt E.E., Craigmile P. and Tingley M., “Statistical modeling of extreme value behavior in North America tree-ring density series”, Climate Change, solo en versión: DOI101007§10584 – 384012 – 0575 – 5, 2012.
- [27] McCullagh P. and Nelder J.A., “Generalized Linear Models”, segunda edición, Chapman & Hall, ISBN 0 412 31760 5, 1983
- [28] Nicolas F.H., “Métodos Estadísticos en Problemas Espaciales”, Tesis para Magister en Estadística Aplicada, Instituto de Investigaciones Estadísticas, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Tucuman, 2004
- [29] Ntzoufras I., “Bayesian modeling using WinBUGS”, John Wiley & Sons, ISBN 9780470141144, 1973
- [30] Montiel R.A., López O.A.M., Lichtinger V., Frenk M.J. “Programa para Mejorar la Calidad del Aire de la Zona Metropolitana del Valle de México 2002-2010”.
- [31] Pickands J., “Statistical Inference using Extreme Order Statistics”, The Annals of Statistics, vol. 3(1), pp. 119-131, 1975.
- [32] Reiss R. y Thomas M., “Statistical Analysis of extreme values”, Birkhauser Verlag, Germany, segunda edición, ISBN 3764364874, 2001.
- [33] Reyes H. “Estimación de Tendencias En Niveles Máximos de Contaminación usando Regresión por cuantiles ajustando el efecto por variables meteorológicas”, Tesis Doctoral, Colegio de Postgraduados, Institución de enseñanza e investigación en ciencias agrícolas, 2008.
- [34] Reyes H., Vaquera H. y Vilaseñor J. “Estimation of trends in high urban ozone levels using the quantiles of (GEV)”, Environmetrics, vol. 21, pp.470-481, 2010.
- [35] Reyes H., Rodríguez S. y Huerta G. “Aprendiendo a modelar tendencias del ozono en la Ciudad de México”, Memoria de XXV Simposio Internacional de Estadística, 2015.

- [36] Rodríguez S. Reyes H., Pérez P. y Vaquera H. “Selection of a subset of Meteorological variables for ozone analyses. Case study of Pedregal station in Mexico city”. *Journal of environmental Science and Engineering*, 2012.
- [37] Rodríguez S., Reyes H. y Huerta G., “A study of Trends for Mexico City Ozone Extremes”. *Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications*, 1:3, 151-160, ISSN: (Print) 2373-7484, 2015.
- [38] Rodríguez S., Reyes H. y Huerta G., “A Study of Trends for Mexico City Ozone Extremes: 2001-2014”. *Atmósfera* 29(2), 107-120, 2016 .
- [39] Sánchez G.R., Vaquera H.H., Villaseñor A.J. y Arnold C.B., “Análisis de Tendencia en Excedencias sobre un Umbral alto con aplicación en Ozono Urbano”, 2000.
- [40] Sheldon M.R., “Simulación”, segunda edición, editorial Prentice Hall, ISBN 0125984103, 1997.
- [41] SIMAT, Sistema de Monitoreo Atmosférico de la Ciudad de México. Agricultura No. 21, Primer Piso, Col. Escandón, Del. Miguel Hidalgo, C.P. 11800, [http : //www.sma.df.gob.mx/simat2/](http://www.sma.df.gob.mx/simat2/), 2010.
- [42] Smith L., “Model Selection in Enviromental Statistics”, National Institute of Statistical Sciences, vol. 32, 1995.
- [43] Smith L. y Shively S.T., “Point Process Approach to Modeling Trends in Tropospheric Ozone based in Exceedances of a High Threshold”, vol. 95, 1995.
- [44] Thomas A., OpenBUGS Foundation, License GNU General Public License, Website: [http : //openbugs.net/w/FrontPage](http://openbugs.net/w/FrontPage)
- [45] Thompson M.L., Joel R., Lawrence H.C., Peter G. y Paul D.S., “A review of statistical methods for the meteorological adjustment of tropospheric ozone”, *Atmospheric environment*, vol. 35, pp. 617-630, 2001.
- [46] Tobias A. y Scotto G. M., “Prediction of Extreme Ozone Levels in Barcelona, Spain”, *Environment Monitoring and Assessment*, vol. 100, pp. 23-32, 2005.
- [47] Thomas A., Best N., Lunn D., Arnold R. and Spiegelhalter D., *GeoBUGS User Manual* Version 3.2.2, [http : //www.mrc – bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs), 2012.

- [48] Valentin C.J.A., “Modelos Lineales Gneneralizados y sus Aplicaciones”, Universidad Autónoma de Guerrero Unidad Academica de Matemáticas, 2009.
- [49] Villaseñor J. and González E., “On modeling cluster maxima with applications to ozone data from Mexico City”, *Environmetrics*, Vol. 21, pp:528-540, 2010.
- [50] Wolff T., Dunker M., Rao T., Porter S. y Zurbenko G.I., “Ozone Air Quality over North America: Part I - A Review of Reported Trends”, *Air and Waste Management Association*, vol. 51, pp. 273-282, 2001.

Apéndice A

Cadenas de Markov y Métodos Numéricos

A.1. Cadenas de Markov

En esta sección explicando que es un cadena de Markov para posteriormente pasar a los métodos Monte Carlo. De acuerdo a Hoel G.P. *et al.* [16], dado el conjunto \mathfrak{S} llamado *espacio de estados* de un sistema, con momentos de tiempo discretos $n = 0, 1, 2, \dots$ y sea X_n denota el estado en el tiempo n , cuando un elemento del sistema tiene la propiedad de que dado el estado presente, el estado pasado no tiene influencia en el futuro, se tiene la propiedad llamada *Propiedad de Markov* y si todo elemento del sistema tiene esta propiedad es llamado *Cadena de Markov*.

Formalmente una sucesión de variables aleatorias del espacio de estados \mathfrak{S} , $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^n, X^{n+1}$ forman una cadena de Markov si

$$P(X^{n+1} = y | X^0 = x_0, \dots, X^n = x) = P(X^{n+1} = y | X^n = x) \quad (\text{A.1})$$

donde $P(X^{n+1} = y | X^n = x) = P(x, y)$ es llamada *probabilidad de transición* en un solo paso. Una cadena de Markov tiene *probabilidades de transición estacionarias* si $P(X^{n+1} | X^n)$ es independiente de n , también es llamada *Cadena Homogénea*. Se denota a la función de transición en m pasos a $P^m(x, y)$. A continuación se sigue describiendo algunas características de las Cadenas de Markov.

- Se dice que una cadena es *Irreducible* si desde cualquier estado de \mathfrak{S} se puede acceder a cualquier otro.

- Dada una Cadena recurrente e irreducible positiva, con distribución estacionara π , se dice que la cadena es *Aperiódica* si cumple con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y) \quad (\text{A.2})$$

con $x, y \in \mathfrak{S}$

- Se define un proceso *Reversible* si $\{X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^n, X^{n+1}\}$ tiene la misma distribución de $\{X^{(\tau-0)}, X^{(\tau-1)}, \dots, X^{\tau-n}, X^{\tau-n+1}\}$ para $0, 1, \dots, n, n+1, \tau \in \mathbb{Z}$

A.2. Método Metropolis-Hasting

Sea \mathbf{Q} una matriz de probabilidad de transición de Markov irreducible sobre los enteros $1, \dots, m$ donde $q(i, j)$ representa el elemento de \mathbf{Q} en el renglón i y la columna j . Definimos una cadena de Markov $\{\theta_n, n \geq 0\}$ como sigue. Cuando $\theta_n = i$, se genera una variable aleatoria θ tal que $P\{\theta = j\} = q(i, j), j = 1, \dots, m$. Si $\theta = j$, entonces θ_{n+1} es igual a j con probabilidad $\alpha(i, j)$ y es igual a i con probabilidad $1 - \alpha(i, j)$. Una cadena de Markov con probabilidades de transición P_{ij} dadas por:

$$P_{i,j} = q(i, j)\alpha(i, j), \quad \text{si } i \neq j$$

$$P_{i,i} = q(i, i) + \sum_{k \neq i} q(i, k)(1 - \alpha(i, k)).$$

Esta cadena de Markov será reversible en el tiempo y tendrá probabilidades estacionarias $\pi(j)$ si:

$$\pi(j)P_{ij} = \pi(j)P_{ji} \quad \text{para } j \neq i$$

es equivalente a

$$\pi(i)q(i, j)\alpha(i, j) = \pi(j)q(j, i)\alpha(j, i).$$

Entonces se satisface que

$$\alpha(i, j) = \min \left(\frac{\pi(j)q(j, i)}{\pi(i)q(i, j)}, 1 \right) = \min \left(\frac{b(j)q(j, i)}{b(i)q(i, j)}, 1 \right).$$

Casi siempre ocurre que $\pi(j), j = 1, \dots, m$ no solo serán probabilidades estacionarias sino también probabilidades límite.

Apéndice B

Código para OpenBUGS

B.1. Algoritmo Análisis Univariado

```
model;
{
  for (i in 1 : N)
  {
    Y[i] ~ dgev(mu[i], sigma, xi)
  }
  for (i in 1 :N)
  {
    mu[i] <- beta0 + beta1*((T[i]-mean(T[ ]))/sd(T[]))
  }
  beta0 ~ dflat()
  beta1 ~ dunif(-100000,100000)
  sigma ~ dgamma(0.1,0.1)
  xi ~ dunif(-0.5,0.5)
}
```

B.2. Algoritmo Efectos Aleatorios

```
model
{
  for(i in 1:N)
  {
    for(j in 1:M)
    {
      Y[j,i] ~ dgev(mu[j,i], sigma, xi)
      mu[j,i] <- alpha[j] + beta[j]*((T[i]-mean(T[ ]))/sd(T[]))
    }
  }
}
```

```

}
}
for(i in 1:M)
{
alpha[i] ~ dnorm(m0,tau0)
beta[i] ~ dnorm(m1,tau1)
}
sigma ~ dgamma(0.1,0.1)
xi ~ dunif(-0.5,0.5)
tau0 ~ dgamma(0.1,0.1)
m0~ dflat()
v0 <- 1/tau0
tau1 ~ dgamma(0.1,0.1)
m1 ~ dflat()
v1 <- 1/tau1
}

```

B.3. Algoritmo Análisis Espacial, *spatial.disc*

```

model;
{
  for(i in 1:N)
  {
    for(j in 1:M)
    {
      Y[i,j] ~ dgev(mu[i,j], sigma, xi)
      mu[i,j] <- beta0[j] + beta1[j]* ((T[i]-mean(T[ ]))/sd(T[ ]))
    }
  }
  beta0[1:M] ~ spatial.disc(lambda0[],x[],z[], tau0, alpha0)
  beta1[1:M] ~ spatial.disc(lambda1[],x[],z[], tau1, alpha1)

  for(i in 1:M)
  {
    lambda0[i] <- const
    lambda1[i] <- beta
  }

  sigma ~ dgamma(0.01,0.01)
  xi ~ dunif(-0.5,0.5)
  tau0 ~ dgamma(0.1,0.1)
  alpha0 ~ dunif(2,3)
}

```

```
const ~ dnorm(0.0,0.1)
tau1~ dgamma(0.01,0.01)
alpha1 ~ dunif(2,3)
beta ~ dnorm(0.05,0.001)
}
```


Apéndice C

Gráficos de Historiales y Autocorrelaciones

C.1. Análisis Univariado

C.1.1. 16 Estaciones

En esta sección se presenta las gráficas del historial y las autocorrelaciones de la muestra generada por el MCMC para la modelación de estación por estación. De las 6 estaciones que se usarón para el estudio, solo se muestra la estación *FAC* con 211 datos, *PED* que no tiene datos faltantes, y las estaciones *ACO* Y *CHO* que son las que presentan mayor cantidad de datos faltantes.

C.1.2. 5 regiones

Se presentan los gráficos del Historial y las Autocorrelaciones de las muestras generadas por el MCMC para el análisis de estación por estación. En este caso solo se muestran los graficos de la región Suroeste que es la mas contaminada.

C.2. Efectos Aleatorios

C.2.1. 16 Estaciones

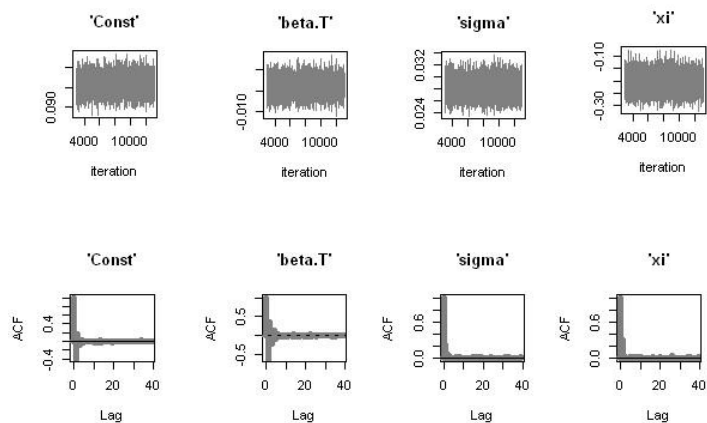
En esta sección se presenta las gráficas del historial y las autocorrelaciones de la muestra generada por el MCMC para la modelación de estación por estación. De las 6 estaciones que se usarón para el estudio, solo se muestra la estación *FAC* con 211 datos, *PED* que no tiene datos

faltantes, y las estaciones *ACO* Y *CHO* que son las que presentan mayor cantidad de datos faltantes.

C.2.2. 5 regiones

Se presentan los gráficos del Historial y las Autocorrelaciones de las muestras generadas por el MCMC para el análisis de Efectos Alatorios. En este caso solo se muestran los gráficos de la región Suroeste que es la mas contaminada.

FES ACATLÁN



PEDREGAL

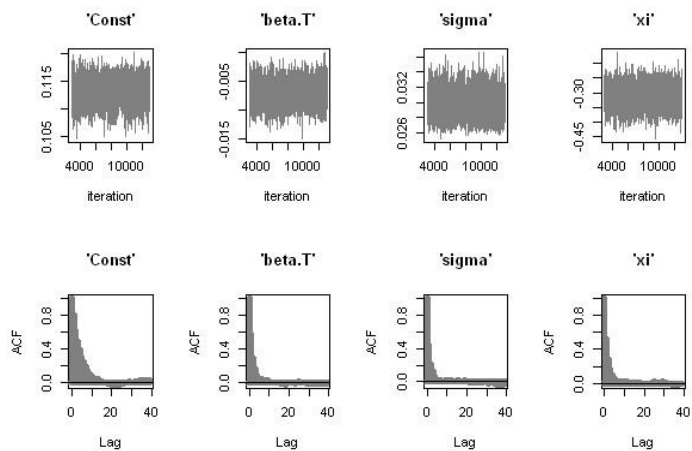
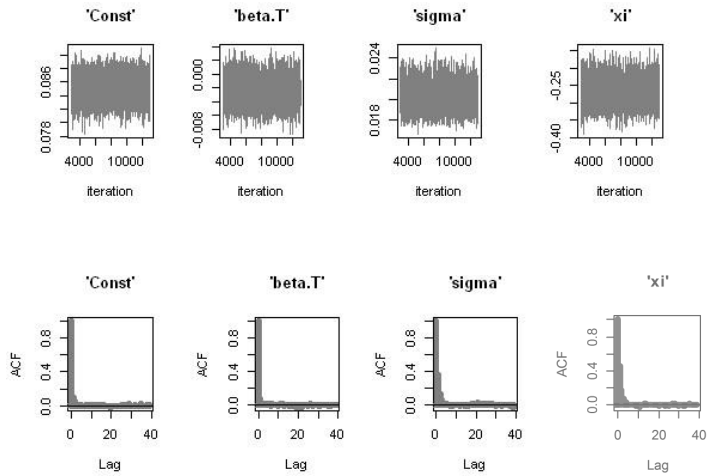


Figura C.1: Grafica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para Fes Acatlán y Pedregal

CHALCO



ACOLMAN

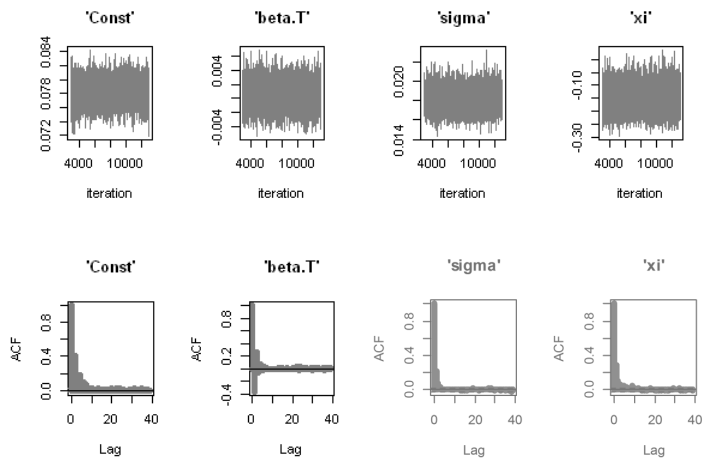


Figura C.2: Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para Chalco y Acolman

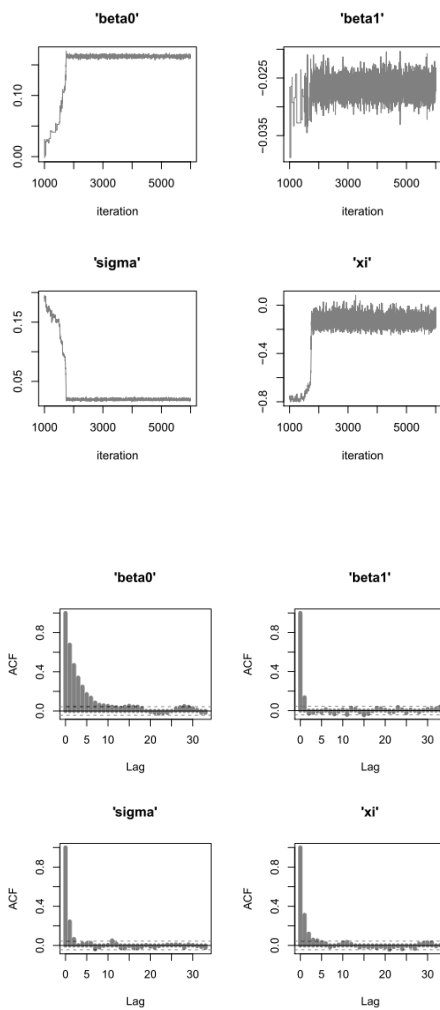


Figura C.3: Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para la región Suroeste (SO)

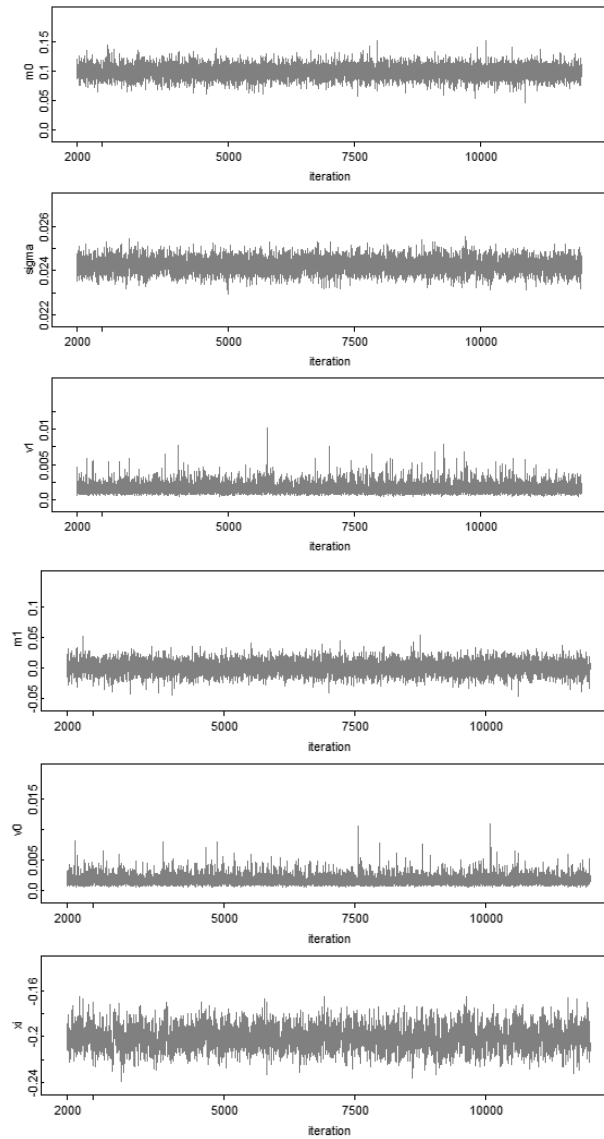


Figura C.4: Gráfica del Historial del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios

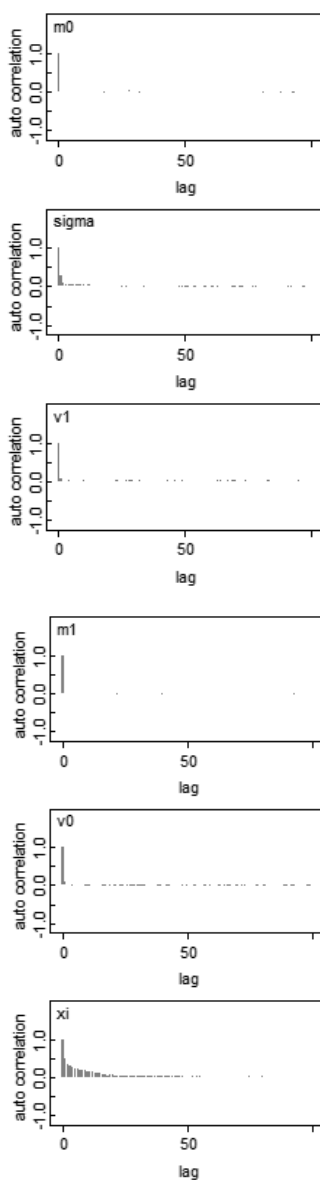


Figura C.5: Gráfica de Autocorrelaciones del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios

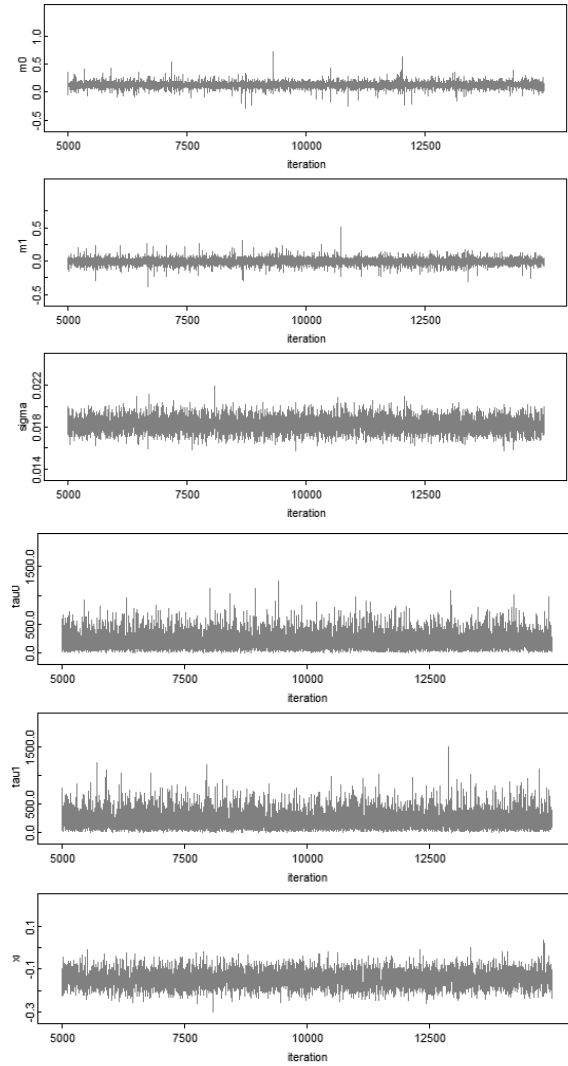


Figura C.6: Gráfica del Historial y Autocorrelaciones del MCMC para los parámetros generales del modelo de Efectos Aleatorios aplicado a 5 regiones