



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA, OPCIÓN
INSTRUMENTACIÓN ELECTRÓNICA**

Tesis para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

**CONTROL DE POSTURA Y RUMBO EN TIEMPO REAL DE UN
VEHÍCULO DE AUTO-BALANCEO Y ESTRATEGIA DE CONTROL DE
POSICIÓN EN EL PLANO**

Presenta:

Alan Osorio Orduña *

Asesores:

Dr. José Fermi Guerrero Castellanos

Dr. Gerardo Mino Aguilar

Puebla, Pue. Noviembre 2017

*Becario CONACYT

Índice general

Introducción	II
Objetivo General	V
Objetivos Específicos	V
1. Antecedentes y estado del arte	1
1.1. Panorama de los Vehículos de Auto-Balanceo	1
1.2. Péndulo Invertido	4
2. Descripción Física-Tecnológica y Modelo Matemático del Sistema	6
2.1. Descripción Física-Tecnológica del Sistema	6
2.1.1. Actuadores	8
2.1.2. Sensores	11
2.1.3. Computadora de abordó	11
2.2. Modelo Matemático	13
2.2.1. Modelo Cinemático	14
2.2.2. Modelo Dinámico de la Postura	15
2.2.3. Modelo Dinámico del Rumbo	22
2.2.4. Parámetros del Sistema	25
3. Estimación y Control de la Postura del Sistema	26
3.1. Planteamiento del Problema	26
3.2. Modelado de sensores	27
3.3. Filtro de Kalman	28
3.3.1. Estimación del ángulo de inclinación	30
3.3.2. Implementación del Filtro de Kalman	31
3.4. Regulador Lienal Cuadrático (LQR)	32
3.5. Control Proporcional Integral Derivativo (PID)	37
3.6. Evaluación de Desempeño	40
3.6.1. Pruebas con LQR	40
3.6.2. Pruebas con PID	43
4. Control para la Estabilización de Puntos en el Plano	45
4.1. Estrategia de Control	45
4.2. Evaluación de Desempeño	48
5. Conclusiones	54
Referencias	56

Introducción

En los últimos años, en el área de control automático se ha desarrollado un interés en los sistemas mecánicos subactuados. Es por eso que se pretende abordar algunas de sus características y aplicaciones, particularmente las relacionadas con los sistemas pendulares.

El propósito principal de los sistemas mecánicos es el de transmitir movimiento, suelen ser actuados por motores. Estos motores imprimen movimiento a los elementos que componen el sistema. Los movimientos que pueden realizar son de traslación y rotación.

Los sistemas subactuados son aquellos sistemas que cuentan con más grados de libertad que actuadores. En este tipo de sistemas se controla generalmente uno o más grados de libertad con el actuador de otra articulación [1]. Algunos ejemplos de sistemas subactuados son los vehículos submarinos, misiles, satélites, cohetes espaciales, robots móviles no holonómicos, el propio péndulo invertido etc.



Figura 1. Cohete espacial Saturno V. Ejemplo de un sistema subactuado.

Los sistemas pendulares son frecuentemente utilizados en laboratorios para el estudio de estrategias de control, experimentación y aplicación de conceptos [2], [3], [4]. Varios sistemas tienen gran similitud con el péndulo invertido, como por ejemplo los cohetes que requieren de un sistema de control para mantener la posición vertical durante el despegue, Figura 1; los robots bípedos que requieren controlar el equilibrio para, de igual forma, mantener la posición vertical Figura 2.

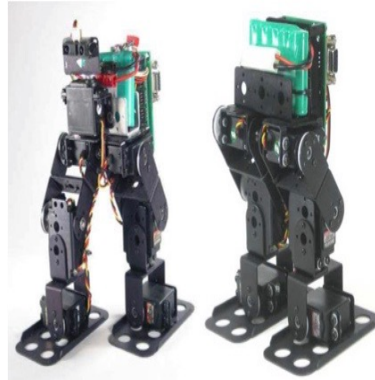


Figura 2. BRAT: robot bípedo. Ejemplo de un sistema símil al péndulo invertido.

Bajo el mismo enfoque del péndulo invertido se han diseñado vehículos para el transporte de personas, como segway®, un sistema de transporte con auto-balanceo. Figura 3.



Figura 3. Segway: vehículo de transporte. Ejemplo de un sistema símil al péndulo invertido.

El principio de funcionamiento de estos sistemas (cohetes, robots bípedos, vehículos de auto-balanceo), es el de mantener una posición en particular. Para conseguir tal efecto pueden aplicarse distintas estrategias de control, que a su vez se ejecutan los modelos matemáticos del sistema.

El péndulo invertido es un tema recurrente en la ingeniería de control [5]. Aquí se aborda el problema del péndulo invertido sobre un vehículo de dos ruedas coaxiales. Consiste en un eje que gira por uno de sus extremos mediante una articulación colocada sobre un sistema móvil. El vehículo se mueve de forma rectilínea sobre un plano horizontal.

Desde la perspectiva de la movilidad urbana, el vehículo tendría impacto al reducir los tiempos de traslados en medianas distancias y reducir la congestión en las vías. Además de que un modelo de control idóneo ayudaría a no comprometer las condiciones de salud de los usuarios.

Si bien el tiempo de traslado entre dos puntos depende de diversos factores, tales como el trazado de rutas, congestión vial, clima, condiciones del pavimento etc. El hecho que el

vehículo pueda responder con eficiencia a las perturbaciones presentadas y optimice el uso de recursos computacionales, hace que valga la pena el desarrollo de una ley de control.

El presente trabajo aborda el problema de control del péndulo invertido móvil, un sistema no lineal e inestable. El péndulo invertido móvil es un sistema ampliamente estudiado en la ingeniería de control y la robótica, sin embargo, aún quedan muchos aspectos por desarrollar y aplicar.

Si bien hoy en día se cuenta con valiosos avances en el diseño, modelado y control de los vehículos de auto-balanceo, gran parte de ese desarrollo no se encuentra totalmente disponible a la comunidad de desarrolladores, tecnólogos y científicos en general. Asimismo, hasta la fecha de impresión de este trabajo, no se conoce una aproximación matemática en el modelo del péndulo invertido móvil como la que se desarrolla en esta memoria. Una situación análoga ocurre con la estrategia de control propuesta para la estabilización de puntos en el plano.

El trabajo comienza por una breve introducción de los vehículos de auto-balanceo, los trabajos existentes y diseños creados. Posteriormente se presenta la motivación de la realización de este proyecto y los objetivos generales y específicos.

En el capítulo 1 se hace una revisión de los trabajos realizados por diversos investigadores sobre los vehículos de auto-balanceo.

En el capítulo 2 se aborda la descripción física del prototipo, diseño, sistema mecánico y computadora de abordo. Además del modelo matemático de los actuadores y se mencionan las características de los sensores inerciales. Se presenta el modelo matemático del sistema, visto desde dos enfoques: el cinemático y el dinámico. Se hace una diferenciación entre el modelo dinámico de la postura y el modelo dinámico del rumbo. Ambos modelos se linealizan posteriormente y se introducen los parámetros calculados del sistema. Finalmente se muestra un resumen de las ecuaciones obtenidas en el capítulo.

En el capítulo 3 se evidencia el problema a resolver en cuanto a la posición angular. Se presenta la base teórica del Filtro de Kalman, necesario para estimación de la posición angular mediante los sensores inerciales. Se exponen también las estrategias de control para la postura del sistema: Regulador Lineal Cuadrático (LQR) y el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID). Se aborda la base teórica en la que se respaldan las estrategias de control. Se exponen los métodos de sintonización de los controladores, además de los resultados en simulación y pruebas con el prototipo en tiempo real.

Posteriormente en el capítulo 4 se propone una estrategia de control para la estabilización de puntos del vehículo, desde el punto de vista cinemático y se muestran resultados obtenidos en simulación.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas en el proyecto.

Objetivo General

Desarrollar un algoritmo de control para la postura y rumbo de un vehículo de autobalanceo, mediante la aplicación de un esquema de control por realimentación de estados.

Objetivos Específicos

1. Realizar una investigación del estado del arte de los vehículos de autobalanceo en términos del modelo dinámico y técnicas de control.
2. Obtener el modelo matemático del sistema considerando la dinámica de los actuadores y la dinámica alrededor del punto de equilibrio.
3. Diseñar una estrategia de control para el modelo cinemático del vehículo de autobalanceo.
4. Simular el modelo matemático del vehículo junto con el sistema de control.
5. Probar el modelo matemático del sistema de auto-balanceo junto con el sistema de control en un modelo físico.

Capítulo 1

Antecedentes y estado del arte

Con el propósito que el presente proyecto no aborde problemas con el mismo enfoque que otros trabajos de investigación, una revisión de la literatura es hecha. Esta parte de la investigación muestra cómo otros investigadores han planteado el problema a resolver. Además, ofrece un panorama de las herramientas y la tecnología implementadas en proyectos de péndulo invertido sobre vehículos de auto-balanceo.

1.1. Panorama de los Vehículos de Auto-Balanceo

El péndulo invertido es un sistema naturalmente inestable [6], lo que hace que necesite de una señal de control para que alcance la estabilidad. Debido a este comportamiento, la búsqueda de una ley de control para este sistema genera interés en diversas investigaciones; particularmente los trabajos asociados con la estabilidad de vehículos de autobalanceo tienen un auge importante.

Investigadores del Swiss Federal Institute Technology Lausanne (EPFL) construyeron a JOE, un vehículo de dos ruedas coaxiales que puede balancearse -un péndulo invertido móvil- [2]. Este prototipo fue diseñado para tener tres grados de libertad - movimiento en el plano xy y rotación al rededor del eje z . Figura 1.1



Figura 1.1. Péndulo invertido móvil: JOE. Desarrollado en Swiss Federal Institute Technology Lausanne (EPFL).

Nawawi en 2006 desarrolla un robot móvil de dos ruedas (T-WIP) basado en JOE [7]. Un giroscopio y un motor con *encoder* son usados para estabilizar el sistema; un circuito DSP y una tarjeta de desarrollo con FPGA implementan el controlador. Sin embargo este prototipo solo puede moverse sobre una recta, es decir, únicamente puede ir hacia adelante o hacia atrás. Figura 1.2



Figura 1.2. Robot péndulo invertido sobre dos ruedas: T-WIP. Desarrollado en la Universidad Tecnológica de Malasia.

Se han construido también prototipos de péndulos invertidos con piezas de la plataforma Lego®. Como el desarrollado en la Universidad de los Andes, Venezuela [5]. La ley de control usada en este prototipo emplea un controlador PID, para un modelo matemático reducido - de un modelo de cuarto orden a uno de segundo orden. El sistema cuenta con un microcontrolador de 32 bits para ejecutar la ley de control, y un sensor giroscópico para medir la posición angular. Figura 1.3

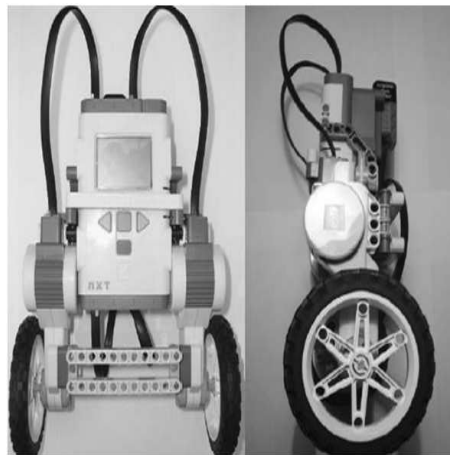


Figura 1.3. Péndulo invertido sobre dos ruedas desarrollado con la plataforma Lego®.

Otro interesante péndulo invertido móvil (MIP por sus siglas en inglés) es el desarrollado por [8], Figura 1.4. MIP tiene un mecanismo deslizante para mover el centro de gravedad del sistema. Pensado para el uso de las personas, el *deslizador* del MIP cambia el centro de gravedad del usuario mientras éste se encuentra sentado sobre él. Este mecanismo permite al MIP acelerar sin que el usuario se mueva hacia adelante o hacia atrás, diferente a Segway®.



Figura 1.4. Péndulo invertido móvil: MIP.

El robot de auto-balanceo de dos ruedas Segbot, desarrollado en la Universidad de Illinois, Estados Unidos [9] incorpora un circuito integrado DSP para procesar las señales de salida de los sensores; un dispositivo con salida PWM y un *encoder* para el control de los motores de corriente directa. Figura 1.5.

Como sensores de posición angular, Segbot implementa en paralelo un giroscopio y un acelerómetro. Uno de los aspectos con los que lidia Segbot, es determinar su posición vertical. El acelerómetro funciona bien cuando el sistema se encuentra estable, pero en presencia de alguna perturbación sus mediciones se retrasan. Por otra parte el giroscopio no es sensible a las vibraciones, sin embargo presenta una deriva o acumulación en el tiempo, que hace que el margen de error en sus mediciones aumente.

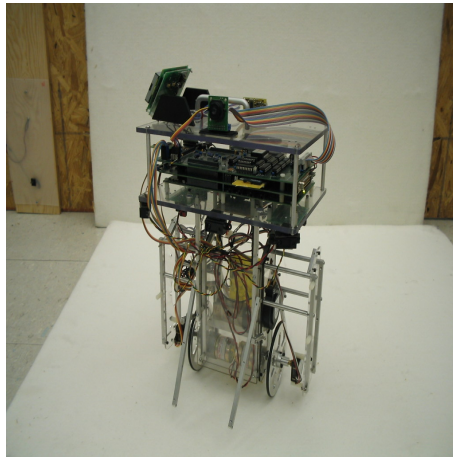


Figura 1.5. Robot de auto-balanceo: Segbot. Desarrollado en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computación, Universidad de Illinois.

1.2. Péndulo Invertido

Un péndulo invertido es un péndulo que debe mantener su centro de masa por arriba de la articulación sobre la cual se mueve una barra o mástil. Es común ver este sistema montado sobre un carro o un vehículo que se mueve horizontalmente, Figura 1.6. Un péndulo simple se encuentra estable cuando está suspendido hacia abajo. Sin embargo el péndulo invertido es inherentemente inestable; debe de balancearse para mantener la posición vertical.

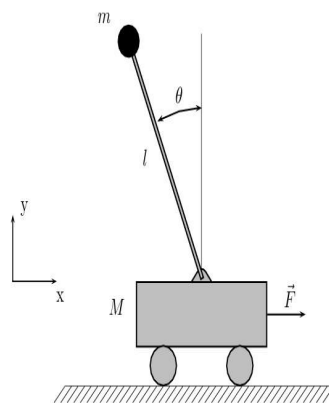


Figura 1.6. Dibujo esquemático de un péndulo invertido sobre un carro.

Distintas aplicaciones limitan el péndulo invertido de uno a tres grados de libertad; los cuales son seleccionados generalmente de los movimientos del carro - sobre una recta o un plano - y del mástil.

El problema del péndulo invertido ha sido abordado en la ingeniería de control desde diferentes enfoques (controladores PID, control difuso, redes neuronales y demás sistemas con realimentación); sin embargo la mayoría de los enfoques coincide en la forma en que los actuadores deben responder para mantener balanceado el péndulo invertido. Dependiendo de los grados de libertad y del diseño del sistema, los actuadores pueden aplicar un torque directamente en la articulación que une el péndulo con su base; o de manera más frecuente, mover la base del péndulo de manera horizontal para compensar las perturbaciones. Esta última forma de desempeño de los actuadores es la empleada en los proyectos mencionados en la sección 1.1.

Capítulo 2

Descripción Física-Tecnológica y Modelo Matemático del Sistema

En la ingeniería de control es común la representación de sistemas en modelos matemáticos para su análisis. Si el sistema que desea describirse es construido o implementado, es aún más notoria la necesidad de su descripción matemática. En este capítulo se detallan los elementos utilizados en la construcción del prototipo del péndulo invertido móvil. Se obtiene el modelo matemático de los actuadores del vehículo. Se realiza la descripción de los sensores inerciales para el cálculo del ángulo de inclinación. Se describe brevemente el sistema de adquisición de datos y cómputo. Posteriormente se analiza el comportamiento mecánico del sistema con sus entradas. Dicho análisis considera el aspecto cinemático y dinámico del sistema.

2.1. Descripción Física-Tecnológica del Sistema

El prototipo está conformado por una plataforma de acrílico sostenida por dos ruedas laterales acopladas a dos motores DC, Figura 2.1. La plataforma soporta las baterías, el sistema sensorial, la etapa de potencia y el sistema de procesamiento de señales y cómputo.

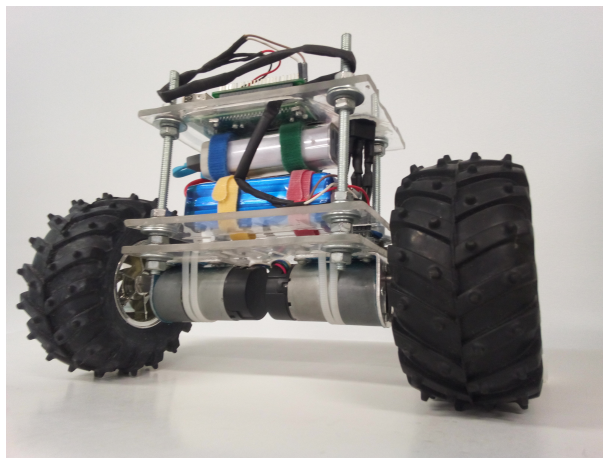


Figura 2.1. Péndulo invertido móvil.

La estructura está compuesta por paneles de acrílico, apilados y distribuidos de manera conveniente. Esto permite la rápida instalación de componentes, además la altura del vehículo puede ser aumentada o disminuida según se estime. Las dimensiones y el peso son importantes ya que influyen en la dinámica del sistema, es por eso que la estructura busca la distribución uniforme del peso en el vehículo. Figura 2.2.



Figura 2.2. Prototipo en la arena de navegación del Laboratorio de Control Avanzado y Sistemas Ciberfísicos, FCE-BUAP.

Las ruedas del vehículo tienen un radio aproximado de 4.5 cm y están montadas directamente sobre el eje de los motores. Los actuadores son un par de motores Pololu® de corriente directa, cada motor tiene una caja reductora de 30:1. Además cada motor cuenta con un *encoder* de efecto hall, con una resolución de 64 cuentas por revolución. Sobre los actuadores se encuentran una batería de Litio-Polímero de 12 V que alimenta los mismos, y una batería tipo *powerbank* de 5 V que alimenta el sistema sensorial y el sistema de cómputo. El sensor inercial MPU6050 se encuentra a un costado de una de las ruedas, entre los actuadores y las baterías. El sistema de cómputo, una computadora de placa reducida Raspberry Pi 3, se encuentra en la parte superior de la plataforma, ajustada de manera conveniente. En la Figura 2.3 se muestra la distribución de los elementos del prototipo, y en la Figura 2.4 se muestran las dimensiones aproximadas del mismo.

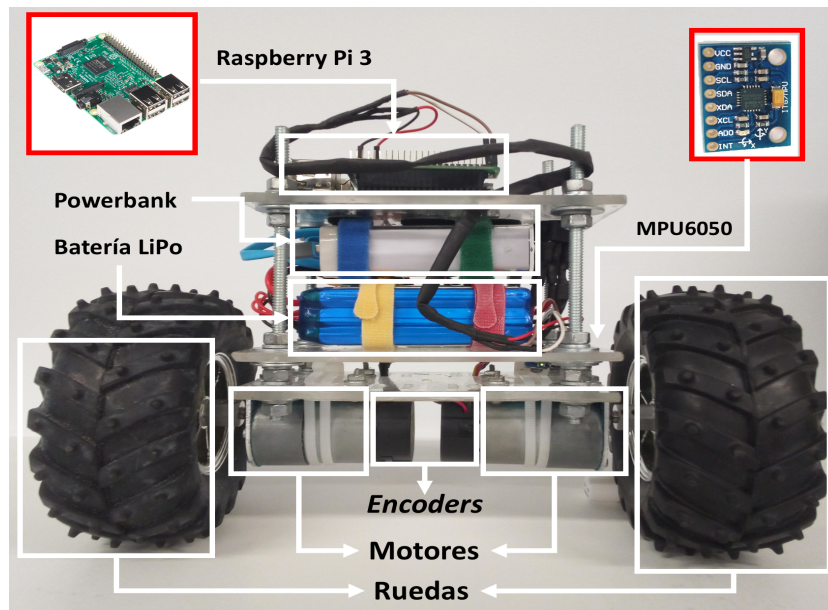


Figura 2.3. Disposición de los elementos que constituyen el péndulo invertido móvil.

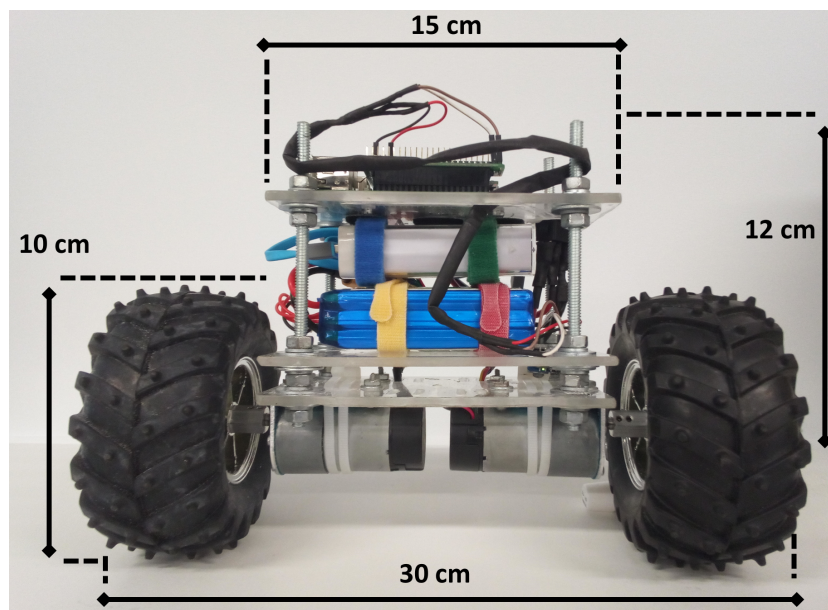


Figura 2.4. Dimensiones del prototipo péndulo invertido móvil.

2.1.1. Actuadores

En la sección 2.1 se indicó que los actuadores del prototipo eran un par de motorreductores Pololu®, Figura 2.5 de corriente directa, con una relación de entrada-salida de 30:1. Tiene un voltaje de alimentación de 12 V y puede alcanzar una velocidad máxima de 350 rpm en el eje

de salida. Cuenta también con un *encoder* de cuadratura de efecto hall, con una resolución de 64 cuentas por revolución [10].

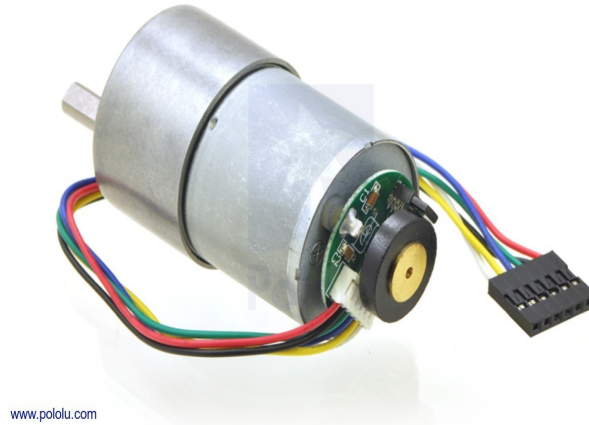


Figura 2.5. Motor DC Pololu®.

Ya que los actuadores son parte importante del modelo matemático del sistema, conviene realizar un análisis más detallado de su dinámica. Para ello se recurre a la representación eléctrica del motor, Figura 2.6, con la que se obtendrá su modelo matemático.

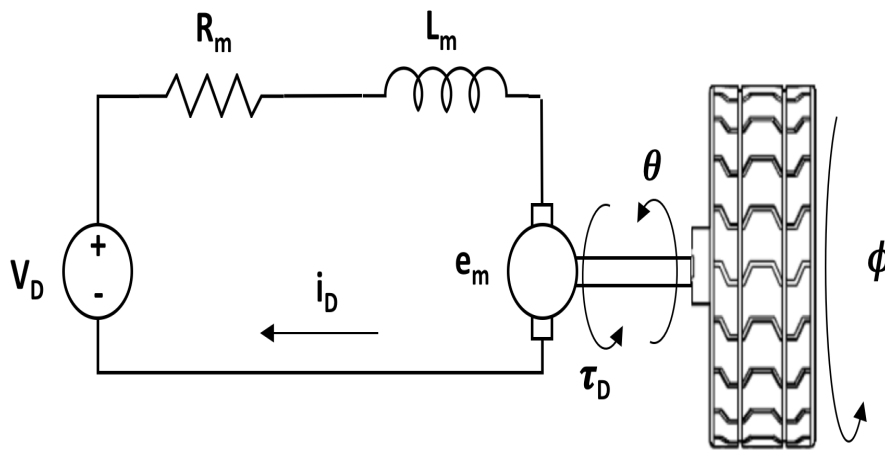


Figura 2.6. Diagrama eléctrico de un motor DC con una rueda como carga en su eje. Donde θ , posición angular del péndulo y ϕ , posición angular de la rueda.

El diagrama de la Figura 2.6 corresponde al motor derecho del sistema, sin embargo, es igualmente válido para el motor izquierdo. Para relacionar el voltaje de entrada y el torque aplicado a la carga, se analiza el circuito de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff [11].

Se tiene que

$$V_D = L_m \frac{di_D}{dt} + R_m i_D + e_m \quad (2.1)$$

Donde

- $V_D = V$, voltaje aplicado al motor.
- $i_D = i$, corriente de armadura del motor.
- R_m , resistencia de la armadura del motor.
- L_m , inductancia del motor.
- e_m , fuerza contra-electromotriz.

La fuerza contra-electromotriz está definida por

$$e_m = K_e(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad (2.2)$$

Donde

- $\dot{\phi}$, velocidad angular de la rueda.
- $\dot{\theta}$, velocidad angular del péndulo.

Si se desprecia la inductancia en la ecuación (2.1) y se despeja i se tiene

$$i = \frac{V - e_m}{R_m} \quad (2.3)$$

Por otra parte se tiene que el torque τ_D del motor se define como

$$\tau_D = K_m i \quad (2.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2) y (2.3) en la ecuación (2.4)

$$\tau_D = \frac{K_m}{R_m} V - \frac{K_m K_e}{R_m} (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad (2.5)$$

La ecuación para el torque τ_I del motor izquierdo del vehículo, se obtiene por un proceso análogo.

2.1.2. Sensores

Como sensor principal se usa el MPU6050, Figura 2.7, un sensor que contiene un acelerómetro y un giróscopo en un mismo encapsulado. Se comunica con la computadora de abordo Raspberry Pi 3 mediante el protocolo I2C.



Figura 2.7. Sistema Microelectromecánico MPU6050 con acelerómetro y giróscopo integrado.

Para medir la posición angular del péndulo invertido se precisa de un inclinómetro, lo suficientemente robusto ante perturbaciones y preciso para asegurar una señal competente que evite errores de medición.

Existen varias tecnologías para la construcción de inclinómetros, en este trabajo se hace uso de sensores inerciales: un acelerómetro y un girómetro; ambos en el encapsulado MPU6050. El acelerómetro permite obtener la información del vector de gravedad y entonces conocer la inclinación del objeto en donde se coloque el sensor. Sin embargo, el acelerómetro es susceptible a las perturbaciones como vibraciones lo cual puede causar medidas erróneas de inclinación [12]. Por otra parte, el girómetro es un sensor de velocidad angular, la posición angular se obtiene mediante una integración numérica. No obstante, el girómetro presenta una deriva, un error acumulativo en la medida de la posición angular. Por lo tanto, es necesario usar la fusión de las señales de ambos sensores con el fin de obtener lo mejor de cada uno de ellos. Los algoritmos más comunes para este tipo de conjunción son el Filtro Complementario y el Filtro de Kalman [13].

2.1.3. Computadora de abordo

El sistema de computo la computadora de placa reducida Raspberry Pi 3, Figura 2.8, cuyo sistema operativo *Raspbian* es una versión adaptada de *Debian*. Incluye un procesador Broadcom, una memoria RAM, una GPU, puertos USB, HDMI, Ethernet y 40 pines GPIO (*General Purpose Input/Output*). Soporta diversos protocolos de comunicación como WiFi, Bluetooth, I2C, SPI, UART etc. También cuenta con entradas de video y entradas y salidas de audio. Como disco duro y memoria de almacenamiento se usa una tarjeta MicroSD. La Raspberry Pi soporta diversos lenguajes de programación, entre los principales: *Python* y *C* (en este trabajo usa *C* debido a la necesidad de optimizar el tiempo de cálculo [14]).

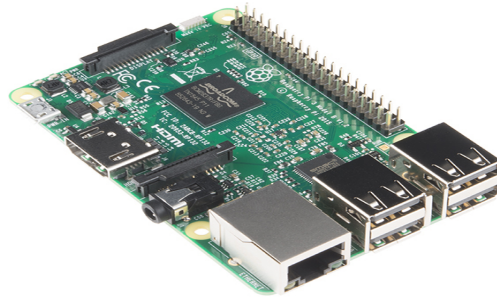


Figura 2.8. Computadora de placa reducida Raspberry Pi 3.

La Raspberry Pi 3 tiene la tarea de procesar las señales del sistema sensorial y las provenientes de los actuadores, en ella estará computándose los algoritmos de control del péndulo invertido, ya sea para mantener la postura o para estabilizarse en un punto en el plano. En la Raspberry Pi 3 se programará el algoritmo del Filtro de Kalman para la fusión de las señales del acelerómetro y girómetro, además enviara la salida de control PWM (*Pulse Widht Modulation*) al *driver* que controla los actuadores, y recibirá las señales de los *encoders* para realimentar al sistema. La secuencia de este proceso puede verse en el diagrama de bloques de la Figura

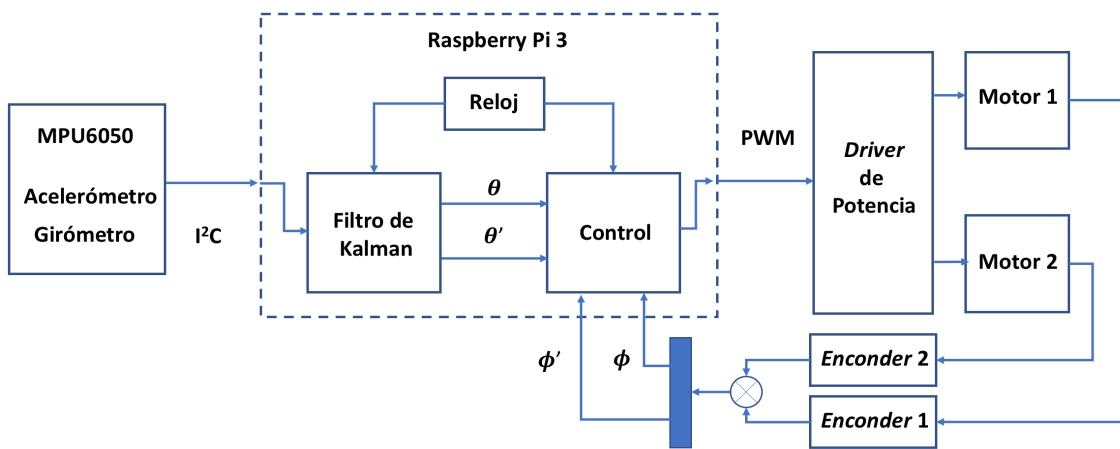


Figura 2.9. Proceso de cómputo de señales del sistema en la Raspberry Pi 3. Donde θ y $\dot{\theta}$ posición y velocidad angular del péndulo respectivamente; ϕ y $\dot{\phi}$ posición y velocidad angular de las ruedas respectivamente.

La etapa de potencia de los motores se implementa con una placa MC33926 de Pololu®, montada sobre la Raspberry Pi 3. Este *driver* admite un voltaje de alimentación de 5 V a 28 V, y puede entregar hasta 5 A de corriente por motor. El *driver* controla la velocidad de los motores mediante señales PWM (*Pulse Widht Modulation*) de hasta 20 KHz [15]. Cuenta con una librería para la configuración de su salidas, pero ya que está desarrollada en Python fue necesario crear una propia en lenguaje C.

También incluye un circuito de protección que protege a la Raspberry de daño en caso de que la batería que alimenta a los actuadores esté conectada al revés. La Figura 2.10 ejemplifica el montaje del *driver* MC33926 con la Raspberry Pi 3 un par de motores.

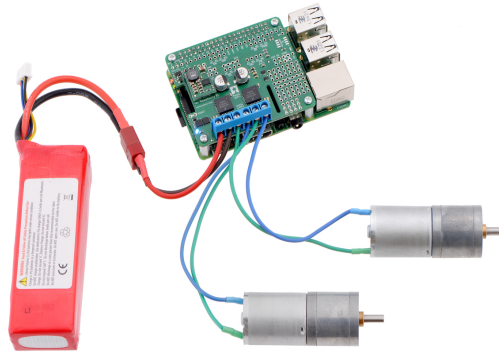


Figura 2.10. Computadora de placa reducida Raspberry Pi 3.

2.2. Modelo Matemático

El estudio del movimiento de un cuerpo o un sistema puede considerar dos enfoques, considerando o no las fuerzas que producen el movimiento de dicho cuerpo o sistema. Así pues, se tiene un análisis de la geometría del movimiento en el plano [16], [17], [18] y uno de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema, su masa y el movimiento del mismo [18]. La Figura 2.11 ejemplifica estos conceptos.



(a) Prototipo en un plano coordenado

(b) Prototipo en balanceo

Figura 2.11. El sistema péndulo invertido móvil asume diferentes análisis en su estudio dinámico y cinemático

2.2.1. Modelo Cinemático

La intención de contar con un modelo cinemático del sistema es ubicar la posición del péndulo en un plano coordenado, y conocer como se desplaza el sistema sobre éste.

La representación esquemática de un robot móvil tipo (2,0) [19], que corresponde al péndulo invertido móvil, el cual tiene dos grados de movilidad y cero de direccionabilidad se muestra en la Figura 2.12. Donde se proyecta el punto de referencia P con coordenadas (χ_1, χ_2) , en el plano coordenado (χ_1, χ_2) , con una orientación δ del vehículo con referencia al eje χ_1 . El movimiento a través de las velocidades angulares ω_d y ω_i de las ruedas derecha e izquierda respectivamente; con esto se obtiene la velocidad lineal v_1 y la velocidad angular v_2 del vehículo.

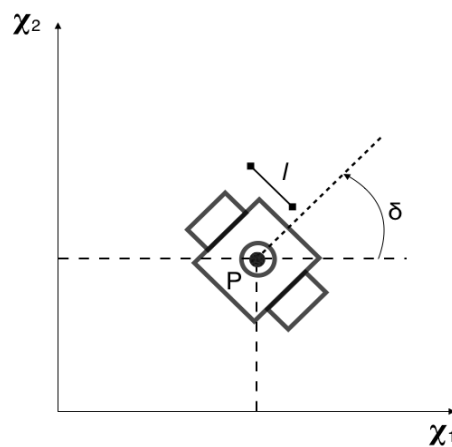


Figura 2.12. Localización del vehículo tipo (2,0), en el plano coordenado (χ_1, χ_2) . El punto P de referencia sobre la plataforma especifica la posición del robot. La distancia l corresponde a la longitud entre el punto P y alguna de las ruedas. El ángulo δ corresponde al desplazamiento angular del vehículo.

La velocidad lineal v_1 del vehículo está formada por las proyecciones de ésta en los ejes χ_1 y χ_2 , es decir, $\dot{\chi}_1$ y $\dot{\chi}_2$. Figura 2.13.

La velocidad angular v_2 , Figura 2.13, es igual a la derivada del desplazamiento angular δ respecto del tiempo, se denota como $\dot{\delta}$. Luego entonces, el modelo cinemático del vehículo tipo (2,0) se muestra en el sistema (2.6), donde v_1 y v_2 son las variables de control.

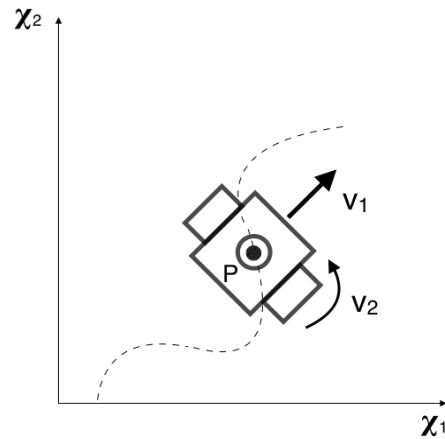


Figura 2.13. Velocidad lineal v_1 y velocidad angular v_2 del vehículo tipo (2,0).

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= v_1 \cos \delta \\ \dot{\chi}_2 &= v_1 \sin \delta \\ \dot{\delta} &= v_2\end{aligned}\tag{2.6}$$

De acuerdo con [19], [20], [21] existe una relación entre v_1 y v_2 con ω_d y ω_i , definida en la ecuación (2.7).

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{(\omega_d + \omega_i)R}{2} \\ v_2 &= \frac{(\omega_d - \omega_i)R}{2l}\end{aligned}\tag{2.7}$$

Donde

- R , radio de la rueda.
- l , distancia del punto P a alguna de las ruedas.

Con (2.6) y (2.7) se expresa completamente el modelo cinético del sistema péndulo invertido móvil.

2.2.2. Modelo Dinámico de la Postura

El objetivo de contar con un modelo dinámico de postura es, tener a disposición los estados necesarios para balancear el péndulo invertido sin perder su posición vertical [22]. Este modelo corresponde al de un sistema no lineal, que posteriormente tendrá que ser linealizado para

aplicar alguna de las estrategias de control propuestas, como el Regulador Lineal Cuadrático (LQR) o el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID).

La Figura 2.14 muestra los grados de libertad del vehículo y su diagrama esquemático es mostrado en la Figura 2.15. Dicho sistema es capaz de rotar alrededor del eje Y , movimiento descrito por el ángulo θ . El movimiento lineal de la plataforma está caracterizado por el desplazamiento x sobre el eje X . Finalmente, el vehículo puede rotar al rededor del eje Z , movimiento descrito por el ángulo δ .

Las fuerzas que intervienen en el sistema, además de los parámetros del mismo se muestran en la Tabla 2.1.

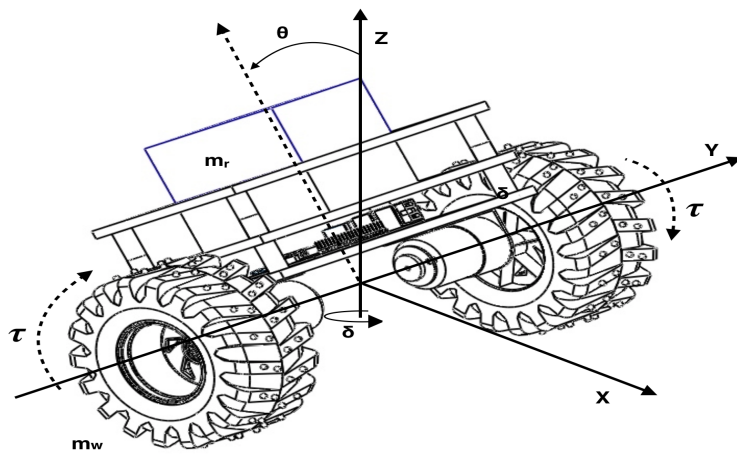


Figura 2.14. Sistema de referencia del péndulo invertido.

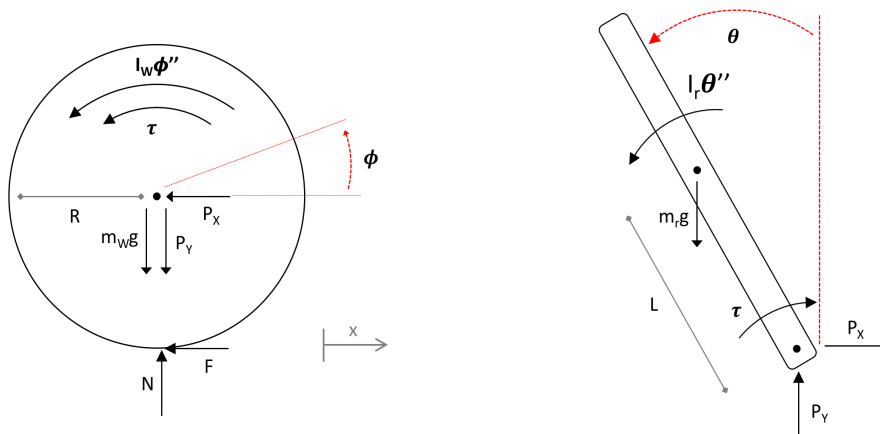


Figura 2.15. Variables del sistema.

Parámetro	Descripción
θ	Rotación del péndulo al rededor del eje Y
ϕ	Rotación de la rueda al rededor del eje Y
δ	Rotación del vehículo al rededor del eje Z
\bar{x}	Desplazamiento sobre el eje X
m_w	Masa de la rueda
m_r	Masa del péndulo
I_w	Inercia de la rueda
I_r	Inercia del péndulo respecto al eje Y
I_p	Inercia del péndulo respecto al eje Z
τ	Torque generado por los motores
R	Radio de la rueda
L	Longitud entre el centro de las ruedas y el centro de masa del péndulo
l	Distancia entre el punto P y alguna de las ruedas (modelo cinemático)
d	Distancia entre las ruedas a lo largo del eje Y , $d = 2l$
g	Constante de gravedad
β	Coefficiente de fricción de la rueda y la superficie
γ	Coefficiente de fricción del péndulo y el eje de la rueda
K_m	Constante de par del motor
K_e	Constante de fuerza contra-electromotriz
R_m	Resistencia de armadura del motor
L_m	Inductancia del motor
e_m	Fuerza contra-electromotriz
i	Corriente de armadura del motor
V	Voltaje aplicado a los motores

Tabla 2.1. Parámetros del Péndulo Invertido

Recordando la ecuación (2.5) se tiene que, las ecuaciones que relacionan el torque y el voltaje aplicado a los motores están dadas por (2.8) y (2.9). Considerando la figura (2.15), donde $\tau = \tau_I + \tau_D$, $\tau_I = \tau_D$.

$$\tau_I = K_s V_I - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad (2.8)$$

$$\tau_D = K_s V_D - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad (2.9)$$

$$\tau = 2K_s V - 2T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad (2.10)$$

Donde:

- $K_s = \frac{K_m}{R_m}$
- $T_s = \frac{K_m K_e}{R_m}$
- $V = V_D + V_I$, en este modelo dinámico se asume que $V_D = V_I$.

Para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema, se utiliza una versión de la ecuación de Euler-Lagrange (2.11) [23].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (2.11)$$

Donde

- \mathcal{L} , lagrangiano del sistema péndulo invertido.
- $q := (\hat{x}, \phi, \theta)^T$, vector de coordenadas generalizadas del sistema.
- $\dot{q} := (\dot{\hat{x}}, \dot{\phi}, \dot{\theta})^T$, vector de derivadas.
- $\mathbf{F} := (F_{\hat{x}}, F_{\phi}, F_{\theta})^T$, vector de fuerzas generalizadas del sistema.
- $\mathbf{f} := (f_{\hat{x}}, f_{\phi}, f_{\theta})^T$, vector de fuerzas disipativas del sistema.

El lagrangiano de un sistema se obtiene por

$$\mathcal{L} = T - U \quad (2.12)$$

Donde

- \mathcal{L} , lagrangiano del sistema.
- T , energía cinética del sistema.
- U , energía potencial del sistema.

De las Figuras 2.14 y 2.15 se deducen las ecuaciones (2.13) y (2.14). Por la física del sistema, se consideran la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m_r \left(v + \dot{\theta}L\cos\theta \right)^2 + \frac{1}{2}m_r \left(-\dot{\theta}L\sin\theta \right)^2 \\
 &+ \frac{1}{2}m_w v^2 + \frac{1}{2}m_w v^2 + \frac{1}{2}I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}^2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$U = m_r g(R + L\cos\theta) \tag{2.14}$$

Donde

- $v = R\dot{\phi}$

El lagrangiano del sistema es entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_r \left(R\dot{\phi} + \dot{\theta}L\cos\theta \right)^2 + \frac{1}{2}m_r \left(-\dot{\theta}L\sin\theta \right)^2 \\
 &+ \frac{1}{2}m_w R\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_w R\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}^2 \\
 &- m_r g(R + L\cos\theta)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Se evalúa la ecuación (2.11) con la ecuación (2.15)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{x}} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \tau - \beta\dot{\phi} \tag{2.17}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\tau - \gamma\dot{\theta} \tag{2.18}$$

Desarrollando la ecuación (2.17), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\theta}LRm_r \cos\theta + \dot{\phi} \left(R^2(m_r + 2m_w) + 2I_w \right) \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \ddot{\phi} \left(R^2(m_r + 2m_w) + 2I_w \right) + \ddot{\theta}LRm_r \cos\theta - \dot{\theta}^2 LRm_r \sin\theta \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.21)$$

$$\ddot{\phi} (R^2(m_r + 2m_w) + 2I_w) + \ddot{\theta} LRm_r \cos \theta - \dot{\theta}^2 LRm_r \sin \theta = \tau - \beta \dot{\phi} \quad (2.22)$$

Desarrollando la ecuación (2.18), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\phi} LRm_r \cos \theta + \dot{\theta} (m_r L^2 + I_r) \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\phi} LRm_r \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} LRm_r \sin \theta + \ddot{\theta} (m_r L^2 + I_r) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\dot{\phi} \dot{\theta} LRm_r \sin \theta + m_r L g \sin \theta \quad (2.25)$$

$$\ddot{\phi} LRm_r \cos \theta + \ddot{\theta} (m_r L^2 + I_r) - m_r L g \sin \theta = -\tau - \gamma \dot{\theta} \quad (2.26)$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.26) definen la dinámica del sistema, en ecuación matricial (2.27)

$$\begin{bmatrix} R^2(m_w + m_r) + 2I_w & LRm_r \cos \theta \\ LRm_r \cos \theta & m_r L^2 + I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 LRm_r \sin \theta - \beta \dot{\phi} + \tau \\ m_r L g \sin \theta - \gamma \dot{\theta} - \tau \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Despejando $\ddot{\phi}$ y $\ddot{\theta}$ de la ecuación (2.27), se tiene

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau - \beta \dot{\phi} + \dot{\theta}^2 LRm_r \sin \theta - \ddot{\theta} LRm_r \cos \theta}{R^2(m_r + 2m_w) + 2I_w} \quad (2.28)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\tau - \gamma \dot{\theta} + Lm_r g \sin \theta - \ddot{\phi} LRm_r \cos \theta}{m_r L^2 + I_r} \quad (2.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.28) y (2.29) en las ecuaciones (2.29) y (2.28) respectivamente, se tiene

$$\ddot{\phi} = \frac{(\hat{I} + LRm_r \cos \theta) \tau + \hat{I} (-\beta \dot{\phi} + \dot{\theta}^2 LRm_r \sin \theta) - LRm_r \cos \theta (-\gamma \dot{\theta} + m_r L g \sin \theta)}{\hat{M} \hat{I} - (LRm_r \cos \theta)^2} \quad (2.30)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\left(\hat{M} + LRm_r \cos \theta\right) \tau + \hat{M} \left(-\gamma \dot{\theta} + m_r L g \sin \theta\right) - LRm_r \cos \theta \left(-\beta \dot{\phi} + \dot{\theta}^2 LRm_r \sin \theta\right)}{\hat{M} \hat{I} - (LRm_r \cos \theta)^2} \quad (2.31)$$

Donde

- $\hat{M} = R^2(m_r + 2m_m) + 2I_w$
- $\hat{I} = m_r L^2 + I_r$

Considerando que el vehículo operará cerca de la posición angular de equilibrio $\theta \approx 0$ y con velocidad angular cercana a cero, esto es $\dot{\theta} \approx 0$, se tienen las siguiente relaciones

- $\text{sen}\theta = \theta$
- $\text{cos}\theta = 1$
- $\dot{\theta}^2 = 0$

Así, las ecuaciones (2.30) y (2.31) se simplifican en

$$\ddot{\phi} = \frac{\left(\hat{I} + RLm_r\right) \tau - \hat{I}\beta\dot{\phi} + \dot{\theta}LRm_r\gamma - \theta(Lm_r)^2Rg}{\hat{M}\hat{I} - (m_rRL)^2} \quad (2.32)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\left(\hat{M} + LRm_r\right) \tau + \left(\hat{M}m_rLg\right) \theta - \hat{M}\gamma\dot{\theta} + LRm_r\beta\dot{\phi}}{\hat{M}\hat{I} - (m_rRL)^2} \quad (2.33)$$

Sustituyendo τ de (2.10) en las ecuaciones (2.32) y (2.33), y seleccionando las siguientes variables de estado $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, definiendo el siguiente vector de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ y entrada de control $u = V$. El sistema (2.27) puede escribirse en la forma de un sistema LTI (2.34).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\left(\hat{I} + LRm_r\right)2T_s + \hat{I}\beta}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} & \frac{-(m_rL)^2Rg}{\hat{M}\hat{I} - (m_rRL)^2} & \frac{\left(\hat{I} + LRm_r\right)2T_s + LRm_r\gamma}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\left(\hat{M} + LRm_r\right)2T_s + LRm_r\beta}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} & \frac{\hat{M}m_rLg}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} & \frac{-\left(\hat{M} + LRm_r\right)2T_s + \hat{M}\gamma}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\left(\hat{I} + LRm_r\right)2K_s}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} \\ 0 \\ \frac{-\left(\hat{M} + LRm_r\right)2K_s}{\hat{M}\hat{I} - (LRm_r)^2} \end{bmatrix} V$$

2.2.3. Modelo Dinámico del Rumbo

El sistema (2.34) es un sistema de cuarto orden, con cuatro variables de estado necesarias para describir y controlar el balanceo del péndulo invertido. Sin embargo, para ampliar la movilidad del vehículo en el plano, i.e. permitir la rotación del vehículo al rededor del eje Z , Figura 2.16 y posicionarse el puntos del plano, es necesario expandir el sistema de cuarto orden a uno de sexto orden. Esto se logra con un proceso análogo al usado para obtener el sistema (2.34).

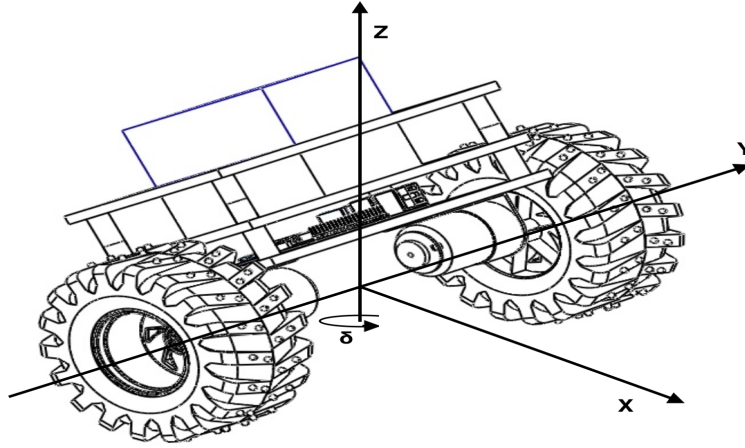


Figura 2.16. Desplazamiento angular δ al rededor del eje Z .

Es necesario añadir al sistema (2.34) las fuerzas que intervienen en la rotación del vehículo alrededor del eje Z , así, usando de nuevo la aproximación Euler-Lagrange se hace el análisis solo para este conjunto de fuerzas. De las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) se tienen

$$T_e = \frac{1}{2}I_p\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}\left(m_w\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)\dot{\delta}^2 + 2\left(\frac{1}{2}I_w\left(\frac{d\dot{\delta}}{R}\right)^2\right) \quad (2.35)$$

$$U_e = m_r g(R + L \cos \theta) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_e = \left(\frac{1}{2}I_p + \frac{m_w d^2}{4} + \frac{I_w d^2}{R^2}\right)\dot{\delta}^2 - m_r g(R + L \cos \theta) \quad (2.37)$$

Donde

- T_e , energía cinética rotacional del sistema respecto al eje Z .
- U_e , energía potencial del sistema respecto al eje Z
- I_p , inercia del péndulo respecto al eje Z (Tabla 2.1).

Se evalúa el lagrangiano \mathcal{L}_e (2.37) con la ecuación (2.38) para obtener la ecuación (2.39).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial q_e} = \mathbf{F}_e + \mathbf{f}_e \quad (2.38)$$

Donde

- \mathcal{L}_e , lagrangiano del sistema.
- $q_e := (\delta)^T$, vector de coordenadas generalizadas del sistema.
- $\dot{q}_e := (\dot{\delta})^T$, vector de derivadas.
- $\mathbf{F}_e := (F_\delta)^T$, vector de fuerzas generalizadas del sistema.
- $\mathbf{f}_e := (f_\delta)^T$, vector de fuerzas disipativas del sistema.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \delta} = (\tau_D - \tau_I) \frac{d}{R} \quad (2.39)$$

Donde τ_D y τ_I se definen con las ecuaciones (2.9) y (2.8) respectivamente.

Desarrollando la ecuación (2.39), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{\delta}} = \left(I_p + \frac{1}{2} m_w d^2 + \frac{2I_w}{R^2} d^2 \right) \dot{\delta} \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{\delta}} = \left(I_p + \left(\frac{1}{2} m_w + \frac{2I_w}{R^2} \right) d^2 \right) \ddot{\delta} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \delta} = 0 \quad (2.42)$$

$$\left(I_p + \left(\frac{1}{2} m_w + \frac{2I_w}{R^2} \right) d^2 \right) \ddot{\delta} = (\tau_D - \tau_I) \frac{d}{R} \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) define la dinámica del sistema al rotar sobre el eje Z . Despejando $\ddot{\delta}$ de la ecuación (2.43) se tiene

$$\ddot{\delta} = \tau_D \frac{d}{RI_\delta} - \tau_I \frac{d}{RI\delta} \quad (2.44)$$

Donde

- $I_\delta = I_p + \left(\frac{1}{2}m_w + \frac{2I_w}{R^2}\right) d^2$

Sustituyendo τ_D y τ_I de las ecuaciones (2.9) y (2.8) en la ecuación (2.44) se tiene

$$\ddot{\delta} = \frac{dK_s}{RI_\delta} V_D - \frac{dK_s}{RI\delta} V_I \quad (2.45)$$

Donde se asume que, en general $V_D \neq V_I$.

Para completar el modelo dinámico extendido, se trabaja con las ecuaciones (2.32) y (2.33). De la sección (2.2.2) se sabe que $\tau = \tau_D + \tau_I$, luego entonces, se sustituyen τ_D y τ_I de las ecuaciones (2.9) y (2.8) en las ecuaciones (2.32) y (2.33), para obtener

$$\ddot{\phi} = \frac{\left(\hat{I} + RLm_r\right) \left(K_s(V_D + V_I) - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta})\right) - \hat{I}\beta\dot{\phi} + \dot{\theta}LRm_r\gamma - \theta(Lm_r)^2 Rg}{\hat{M}\hat{I} - (m_r RL)^2} \quad (2.46)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-\left(\hat{M} + LRm_r\right) \left(K_s(V_D + V_I) - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta})\right) + \left(\hat{M}m_r Lg\right) \theta - \hat{M}\gamma\dot{\theta} + LRm_r\beta\dot{\phi}}{\hat{M}\hat{I} - (m_r RL)^2} \quad (2.47)$$

Donde

- $\hat{M} = R^2(m_r + 2m_m) + 2I_w$
- $\hat{I} = m_r L^2 + I_r$
- En general $V_D \neq V_I$

De las ecuaciones (2.45), (2.46) y (2.47), se seleccionan las siguientes variables de estado $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, $x_5 = \delta$, $x_6 = \dot{\delta}$. Definiendo el siguiente vector de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ y entradas de control $u_1 = V_D$ y $u_2 = V_I$. El modelo dinámico extendido del péndulo invertido móvil puede describirse en la forma de un sistema LTI (2.48).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-((\hat{I}+LRm_r)2T_s+\hat{I}\beta)}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & \frac{-(m_r L)^2 Rg}{\hat{M}\hat{I}-(m_r RL)^2} & \frac{(\hat{I}+LRm_r)2T_s+LRm_r\gamma}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\hat{M}+LRm_r)2T_s+LRm_r\beta}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & \frac{\hat{M}m_r Lg}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & \frac{-((\hat{M}+LRm_r)2T_s+\hat{M}\gamma)}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(\hat{I}+LRm_r)K_s}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & \frac{(\hat{I}+LRm_r)K_s}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{-(\hat{M}+LRm_r)K_s}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} & \frac{-(\hat{M}+LRm_r)K_s}{\hat{M}\hat{I}-(LRm_r)^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{dK_s}{I_\delta R} & -\frac{dK_s}{I_\delta R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_D \\ V_I \end{bmatrix}$$

2.2.4. Parámetros del Sistema

Algunos de los parámetros del sistema fueron obtenidos por medición directa, otros fueron calculados con definiciones y relaciones hechas por el fabricante [10]. La Tabla 2.2 muestra los parámetros del prototipo construido.

Parámetro	Descripción	Valor
m_r	Masa del péndulo	1.283 Kg
m_w	Masa de las ruedas ($\times 2$)	0.04534 Kg
I_w	Momento de inercia de las ruedas ($\times 2$)	0.0000918 Kg m^2
I_t	Momento de inercia del péndulo	0.0111375 Kg m^2
K_e	Constante de fuerza contra-electromotriz	0.327
K_m	Constante de torque	0.1553
R	Resistencia de la armadura del motor	3.4 Ω
g	Gravedad	9.8 $\frac{m}{s^2}$
r	Radio de la rueda	0.045 m
d	Distancia entre la rueda derecha y la rueda izquierda	0.185 m
L	Distancia del eje de las ruedas al centro de masa	0.065 m
β	Coefficiente de fricción de la rueda y la superficie	0.1
γ	Coefficiente de fricción del péndulo y el eje de la rueda	0.1

Tabla 2.2. Parámetros del Péndulo Invertido

Capítulo 3

Estimación y Control de la Postura del Sistema

En este capítulo se presenta el uso del filtro de Kalman para conjuntar las magnitudes del sensor inercial. Se propone una estrategia de control LQR (*Linear Quadratic Regulator*) y PID (*Proportional Integral Derivative*) para el sistema péndulo invertido móvil, descrito con la ecuación matricial (2.34) del capítulo (2). Posteriormente se evalúa la estrategia de control, usando parámetros reales en simulación con el software Matlab/Simulink. Finalmente se comparan los resultados obtenidos en simulación con los obtenidos con el prototipo.

3.1. Planteamiento del Problema

Para mantenerse balanceado, el sistema necesita primeramente conocer su posición angular θ y velocidad angular $\dot{\theta}$. Éstas provienen del sistema sensorial una vez procesadas y acondicionadas mediante el Filtro de Kalman. Seguido de esto, el sistema requiere conocer la posición angular ϕ y velocidad angular $\dot{\phi}$ de las ruedas que, como un vehículo diferencial solo se moverán hacia adelante y hacia atrás para mantener el equilibrio. La estrategia de control que se elija, deberá enviar la señal de control en forma de voltaje para cada rueda al sistema. Una vez que ésta ingresa, la dinámica del sistema cambia y se percibe nuevamente en el sistema sensorial completando así el ciclo de realimentación. El proceso anterior se esquematiza en la Figura 3.1.

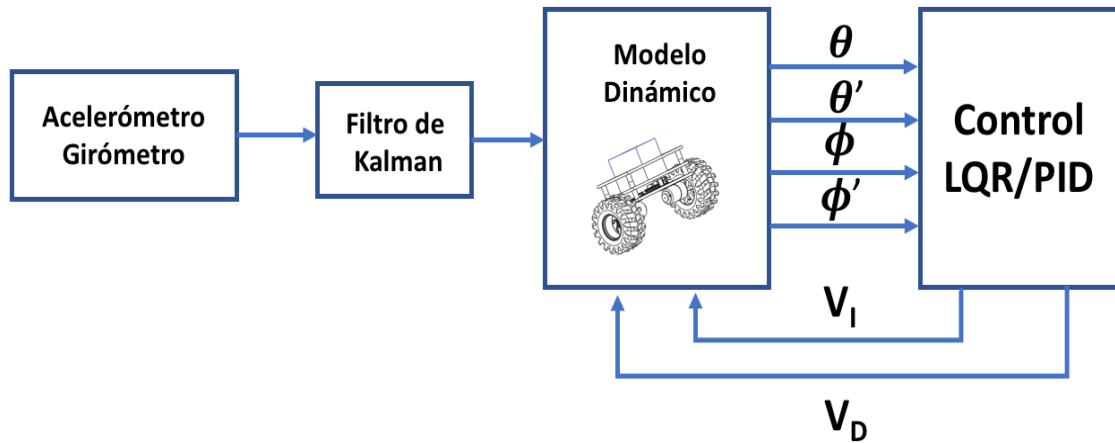


Figura 3.1. Diagrama de bloques del sistema para el control de la postura

3.2. Modelado de sensores

Antes de poder implementar el Filtro de Kalman, es necesario describir el modelo matemático del sistema inercial. El sistema consiste de un acelerómetro de tres ejes y un girómetro dentro del encapsulado MPU6050.

La velocidad angular ω que se mide con el girómetro, es afectada por errores como la deriva, la cual es modelada como un proceso de primer orden manejado por ruido Gaussiano, con lo que se obtiene

$$\omega_G = \omega + v + \eta_1; \dot{v} = \eta_2 \quad (3.1)$$

Donde

- ω_G , velocidad angular medida por el girómetro.
- $v \in \mathbb{R}$, componente de deriva.
- η_1 , ruido blanco gaussiano.
- η_2 , ruido blanco gaussiano.

El acelerómetro de tres ejes sensa las fuerzas inerciales y la gravedad en el sistema de coordenadas móvil. El vector de medidas formado por las salidas de los tres ejes se describe de la forma

$$\vec{b}_A = R_E(\vec{a} - \vec{g}) + \vec{\eta}_A \quad (3.2)$$

Donde

- $\vec{g} := [0, 0, g]^T$, constante de gravedad ($9.81 \frac{m}{s^2}$).
- R_E , matriz de rotación del sistema de referencia inercial al sistema de referencia móvil.
- $\vec{\eta}_A \in \mathbb{R}^3$, vector de ruido banco gaussiano.

La matriz R_E está dada por

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} c_{\theta_A} & 0 & -s_{\theta_A} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\theta_A} & 0 & c_{\theta_A} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Donde

- θ_A , ángulo de inclinación dado por el acelerómetro.
- $s_{\theta_A} = \text{sen}\theta_A$
- $c_{\theta_A} = \text{cos}\theta_A$

Entonces, es posible conocer la inclinación θ_A utilizando la proyección del vector de gravedad, denotada por

$$\theta_A = \tan^{-1} \left(\frac{b_{A_1}}{b_{A_3}} \right) \quad (3.4)$$

Donde b_{A_1} y b_{A_3} representan el primer y tercer componente respectivamente del vector \vec{b}_A obtenido del acelerómetro. Sin embargo, contar con la medida solo del acelerómetro hace que la medición sea susceptible a vibraciones. Por lo tanto se considera la conjunción con la medida que brinda el girómetro, este proceso se realiza mediante el Filtro de Kalman.

3.3. Filtro de Kalman

Considere un sistema lineal discreto con la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \eta_k \\ y_k &= Cx_k + z_k \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde

- A, B y C , matrices del sistema.
- k , índice de tiempo.
- x_k , estado del sistema.

- u_k , entrada conocida del sistema.
- η_k , ruido del proceso (ruido blanco gaussiano de media o promedio cero).
- z_k , ruido de la medición (ruido blanco gaussiano de media o promedio cero).

El vector x_k contiene toda la información sobre el estado actual del sistema, pero en general no puede ser medido directamente. En su lugar se mide y_k que es una función de x_k y que es afectada por el ruido z_k y por ésta se estima x_k . Por lo anterior, η_k y z_k satisfacen

$$\begin{aligned} E(\eta_k) &= 0 \\ E(z_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} E(\eta_j \eta_k^T) &= S_\eta \text{ para } j \neq k \text{ y cero en otro caso} \\ E(z_j z_k^T) &= S_z \text{ para } j \neq k \text{ y cero en otro caso} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde

- S_η , matriz de covarianza para la perturbación η en el proceso.
- S_z , matriz de covarianza para el ruido z en la medida.

La ecuación (3.6) expresa que tanto η_k , como z_k son secuencias aleatorias con media cero. La ecuación (3.7) expresa la no correlación en el tiempo de dos muestras distintas de η_k o de z_k , y que son propiamente ruido blanco.

El observador óptimo que permitirá estimar el estado de x_k , está dado por las siguientes ecuaciones y es conocido como Filtro de Kalman [24], [25].

$$\hat{x}_{k+1} = (A\hat{x}_k + Bu_k) + K_k(y_{k+1} - \underbrace{C\hat{x}_k}_{\hat{y}_k}) \quad (3.8)$$

$$K_k = AP_k C^T (CP_k C^T + S_z)^{-1} \quad (3.9)$$

$$P_{k+1} = AP_k A^T + S_\omega - AP_k C^T S_z^{-1} CP_k A^T \quad (3.10)$$

3.3.1. Estimación del ángulo de inclinación

El problema planteado es determinar el ángulo de inclinación, del objeto en donde esté montado el sensor con respecto al vector de gravedad. Esto se lleva a cabo por medio de la fusión de las medidas del girómetro y el acelerómetro.

En el caso del girómetro cuando se conoce la velocidad angular, el ángulo viene dado por la siguiente ecuación

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T \quad (3.11)$$

Donde T representa el tiempo de muestreo. Sin embargo se debe recordar que el girómetro contiene un componente de deriva, por lo que usando la ecuación (3.1) el ángulo se obtiene como

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T(\omega_{G_k} - v_k) \quad (3.12)$$

Ahora se puede definir un vector de estados x_k , que consiste en el ángulo y el componente de deriva.

$$x_k = \begin{bmatrix} \theta_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La entrada del sistema dinámico será la medida del girómetro $u_k = \omega_{G_k}$ y la medida y_{k+1} será dada por el ángulo obtenido por la ecuación (3.4). Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (3.1) el sistema queda determinado por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \eta_{1k} \\ \eta_{2k} \end{bmatrix} \\ \hat{y}_k &= [1 \quad 0] x_k + z_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

El sistema (3.14) tiene la misma forma que el sistema (3.5). La intención es implementar las ecuaciones del Filtro de Kalman (3.8) y (3.9) en la *Raspberry Pi 3* para estimar el vector de estado y el ángulo de inclinación en tiempo real, el cual será utilizado por la ley de control.

3.3.2. Implementación del Filtro de Kalman

Antes de poder implementar el Filtro de Kalman, existen algunas tareas que debieron ser completadas. Primeramente la comunicación entre el integrado MPU6050 y la computadora de placa reducida Raspberry Pi 3. Después la lectura y conversión de las señales del sensor, por ejemplo, la señal de velocidad angular que entrega el girómetro tiene que ser convertida a radianes por segundo y posteriormente integrada para obtener la posición angular. El acelerómetro tiene que calibrarse con el grado de sensibilidad deseado, además de convertir las señales de aceleración en posición angular. Estas conversiones de unidades y escalamientos producen distorsiones e imprecisiones que intentan ser solventadas por el Filtro de Kalman. La Figura 3.2 muestra los resultados de la sintonización del Filtro de Kalman para el sensor inercial MPU6050.

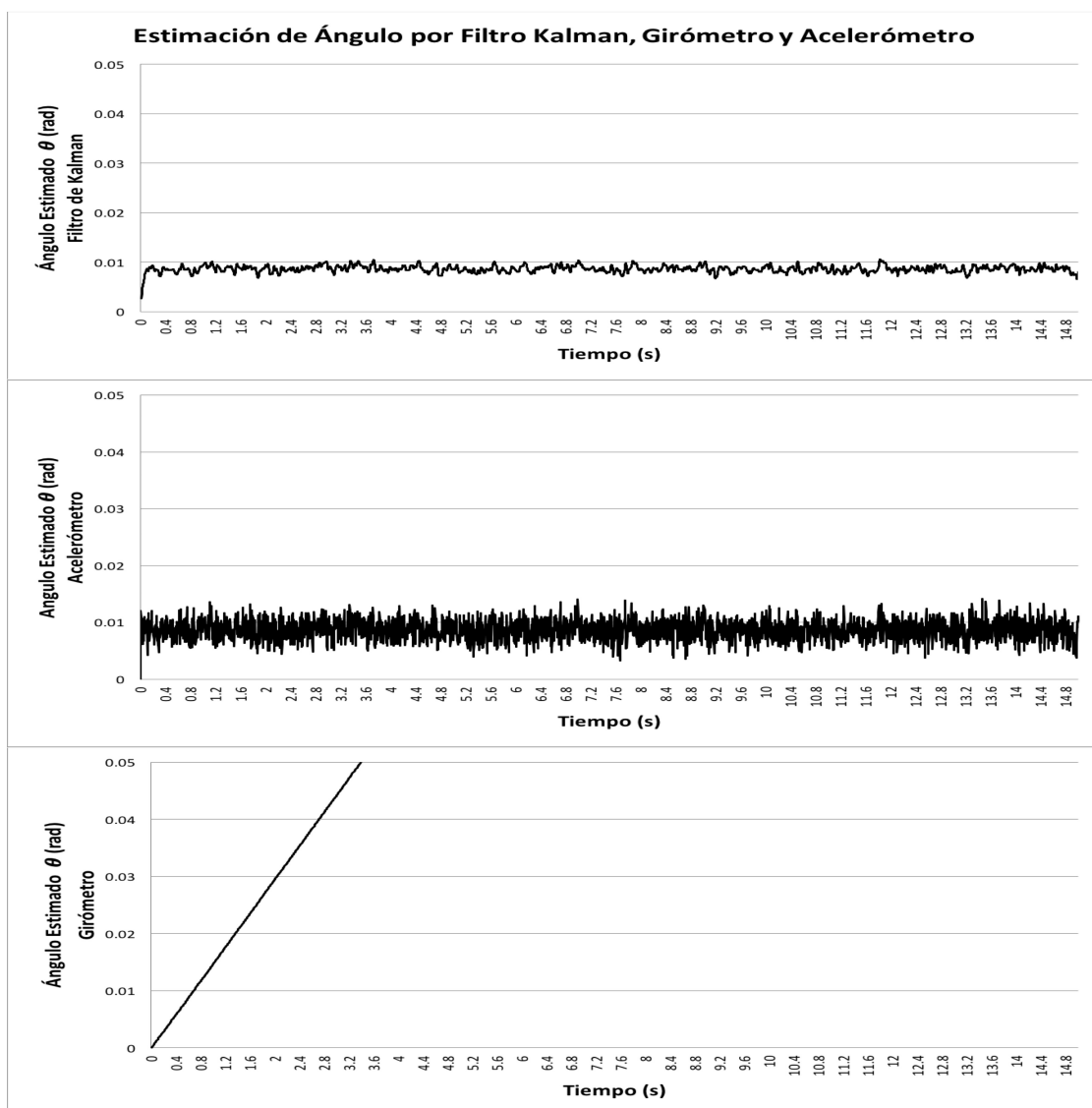


Figura 3.2. Prueba en tiempo real con Filtro de Kalman

De la Figura 3.2, se observa de abajo hacia arriba la diferencia entre las señales registradas

usando diferentes aproximaciones. Primero se muestra el resultado de la integración de la señal de velocidad angular del girómetro, en un tiempo de muestreo de 4 ms; puede notarse posición angular crece rápido en el tiempo, con una pendiente positiva pronunciada en un estado de reposo del sensor. Por otra parte la misma señal del girómetro está ausente de ruido o perturbaciones significativas. La siguiente señal, proveniente del acelerómetro, se mantiene en valores constantes en el tiempo, en estado de reposo del sensor. Sin embargo, la señal se ve muy afectada por las vibraciones en el ambiente. Finalmente, se muestra la señal del Filtro de Kalman que mantiene valores constantes en el tiempo, sin la deriva de la señal del girómetro y con menos susceptibilidad a las vibraciones del ambiente que la señal del acelerómetro.

La sintonización del filtro de Kalman depende de la aproximación que se haga de la matriz K_k , ecuación (3.9), también llamada ganancia de Kalman. Ésta a su vez depende de las matrices de covarianza de ruido S_η y S_z , ecuación (3.7). El valor de S_η depende del peso que el diseñador quiera confiar a cada sensor (acelerómetro y girómetro). El valor de S_z sugiere la magnitud de ruido esperada de los sensores, un valor grande de S_z indica que la señal de las mediciones es altamente afectada por perturbaciones. En general, la calibración con valores adecuados para el filtro Kalman requiere de métodos numéricos de aproximación complejos. En este trabajo, se obtuvo una aproximación para la matriz K_k con ayuda del software matemático Matlab y la función *kalman*. La ganancia K_k estimada para las pruebas realizadas en la Figura 3.2 fue

$$K_k = \begin{bmatrix} 0.146795 \\ -0.12690 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.4. Regulador Lienal Cuadrático (LQR)

Sea un sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI) con representación en espacio de estados, como el descrito en la ecuación (3.16). Donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de salida, $D \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $y \in \mathbb{R}$ es el vector de salida y $u \in \mathbb{R}$ es el vector de entrada.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.16)$$

El Regulador Cuadrático Lineal permite calcular la ganancia de realimentación de estado K del sistema (3.16) utilizando un criterio de desempeño. La ley de control se define entonces con la ecuación (3.17).

$$u = -Kx \quad (3.17)$$

Así pues, el criterio de evaluación se define como

$$J = \int_0^\infty (x^T \hat{Q}x + u^T \hat{R}u) d\tau \quad (3.18)$$

Donde \hat{Q} es una matriz definida positiva de dimensión $n \times n$, donde n es el número de estados y $\hat{R} > 0$ donde es una matriz definida positiva de dimensión $m \times m$, donde m es el número de entradas de control.

La matriz \hat{Q} pondera la dinámica del estado, mientras que la matriz \hat{R} pondera el “gasto de energía” asociado a la señal de control.

El resultado de minimizar el criterio de desempeño J , se traduce en la solución de la ecuación de Ricatti.

$$A^T S + SA - SB\hat{R}^{-1}B^T S + \hat{Q} = 0 \quad (3.19)$$

Donde la matriz $S = S^T > 0$ es una incógnita.

Con esta solución se calcula la ganancia de realimentación de estado K .

$$K = R^{-1}B^T S \quad (3.20)$$

Para el diseño del LQR se siguen los siguientes dos pasos principales:

- Resolver la ecuación de Ricatti (3.19).
- Sustituir la matriz P en la ecuación (3.20) y calcular K .

El diagrama de bloques del sistema (3.16) con realimentación de estados por LQR se muestra en la Figura 3.3.

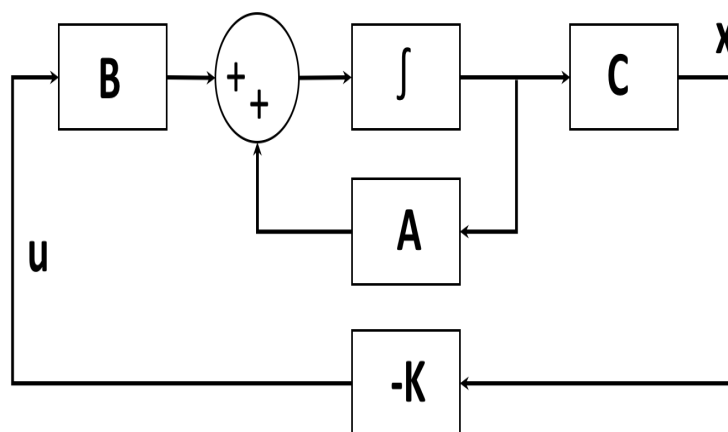


Figura 3.3. Control por LQR: diagrama de bloques del sistema.

Del capítulo (2) se retoma la ecuación (2.34). El modelo en espacio de estados para el péndulo invertido móvil está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -68.0202 & -103.2332 & 30.1429 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17.9054 & 76.1831 & -14.8171 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 56.1363 \\ 0 \\ -18.7130 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} V \quad (3.21)$$

El LQR es una estrategia de control lineal, por este motivo el sistema al que se le aplica debe ser controlable. El análisis de la controlabilidad de un sistema depende del análisis de la matriz de controlabilidad de $\mathcal{C} \in n \times n$, $\mathcal{C} = [BAB \dots A^{n-1}B]$, donde n es el número de filas de A . La matriz \mathcal{C} debe de ser de rango pleno por filas, es decir, $\text{rango}(\mathcal{C}) = n$. Para el sistema (3.21) $\text{rango}(\mathcal{C}) = 4$.

Para resolver la ecuación de Ricatti (3.19) y obtener la matriz de ganancia K de la ecuación (3.20), se hace uso del software MATLAB. Se proponen valores para las matrices de ponderación \hat{Q} y \hat{R} , para obtener K y evaluar la respuesta del sistema en simulación.

La matriz \hat{Q} toma la forma

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Los elementos a_0, a_1, a_2 y a_3 de la matriz \hat{Q} , ponderan los estados $\phi, \dot{\phi}, \theta$ y $\dot{\theta}$ respectivamente. Un valor más alto para algún elemento de la matriz \hat{Q} , supondría una mayor consideración del estado al que corresponde dicho elemento. Por ejemplo, un valor alto para a_1 indicaría que la señal de control depende en buena parte de $\dot{\phi}$.

Debido a que el sistema (3.21) tiene solo una entrada de control, la matriz \hat{R} es un escalar. Para simplicidad en los cálculos se selecciona $\hat{R} = 1$.

Como los elementos de las matrices \hat{Q} y \hat{R} son elegidos mediante un proceso eurístico, es necesario el uso de múltiples pruebas en simulación, para verificar la eficacia de la ley de control representada por la ganancia de realimentación K .

El objetivo principal de la estrategia de control es mantener el vehículo en posición horizontal. Para lograr esto los estados y la señal de entrada de control del sistema, deben de converger a cero o a un punto de referencia en el menor tiempo posible. Además, durante el periodo transitorio de convergencia, los estados deben mantenerse dentro de ciertos parámetros. No es posible aplicar una señal de control que exceda las especificaciones de los motores, ni tampoco es viable extender demasiado el tiempo de convergencia, para reducir la magnitud de la señal de control.

Las siguientes figuras ilustran la respuesta del sistema con distintos valores de la matriz de ponderación \hat{Q} . Las condiciones iniciales del sistema en las simulaciones fueron $\phi = 0, \dot{\phi} =$

$0, \theta = 0.4, \dot{\theta} = 0$, en el tiempo $t = 0$. La Tabla 3.1 describe la interpretación física de los estados del sistema usados en simulación.

Variable de Estado	Variable del Sistema	Descripción
x_1	ϕ	Posición angular de la rueda (rad)
x_2	$\dot{\phi}$	Velocidad angular de la rueda (rad/s)
x_3	θ	Posición angular del péndulo (rad)
x_4	$\dot{\theta}$	Velocidad angular del péndulo (rad/s)

Tabla 3.1. Variables de estado del Péndulo Invertido

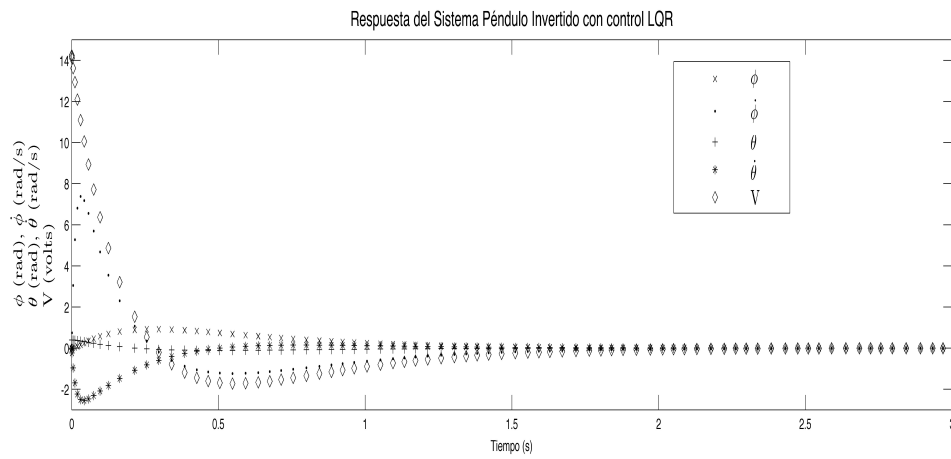


Figura 3.4. Respuesta del sistema con una ponderación alta de ϕ .

La Figura 3.4 muestra que el incremento en la ponderación de ϕ , hace que los estados del sistema converjan rápidamente a cero. Sin embargo, la señal de control sobrepasa los límites permitidos por los motores, cuyo voltaje de alimentación máximo es de 12 V.

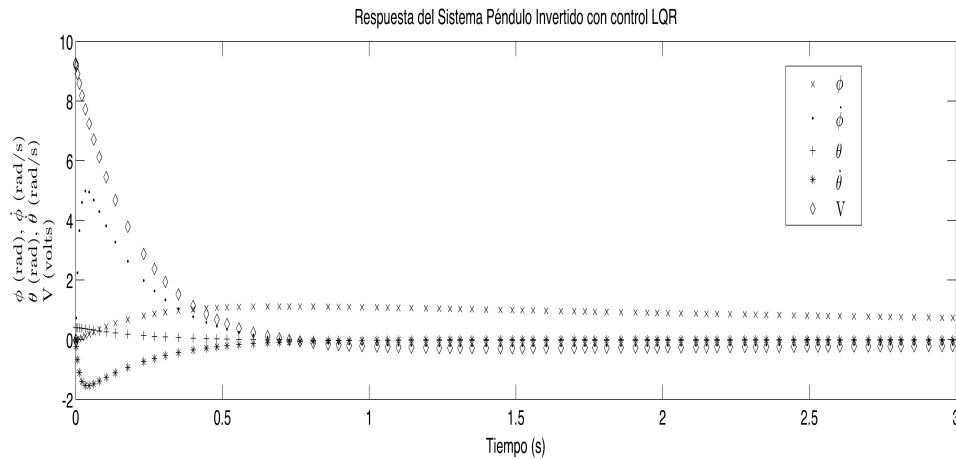


Figura 3.5. Respuesta del sistema con una ponderación alta de θ .

En la Figura 3.5 la ponderación de θ es más alta que el resto de los estados, la señal de control se encuentra dentro de los límites permitidos por los motores. Sin embargo algunos estados no convergen tan rápidamente o no convergen en absoluto. Véase por ejemplo $\dot{\phi}$ y V , que cruzan el punto de convergencia pero no se mantienen ahí. Lo que indica que el vehículo continúa en movimiento, lo cual compromete la respuesta de los demás estados.

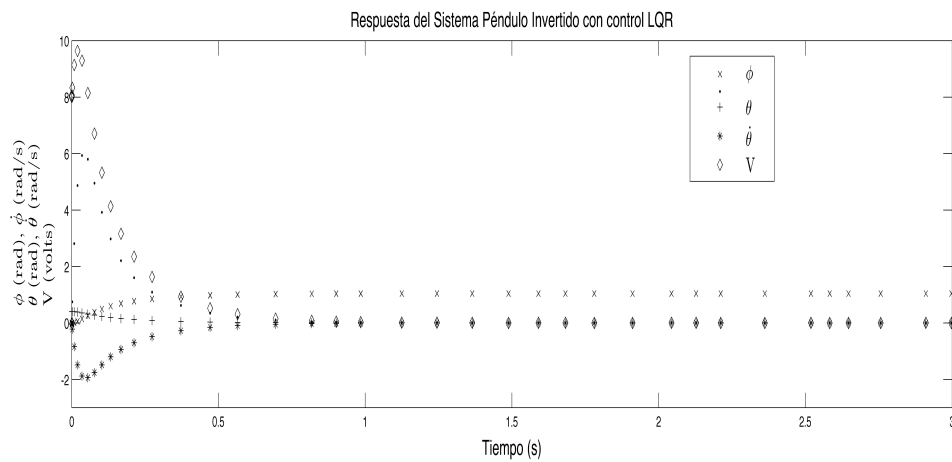


Figura 3.6. Respuesta del sistema con una ponderación regulada de todos los estados.

La Figura 3.6 muestra la respuesta más aceptable del sistema. La señal de control del sistema se encuentra dentro de los límites permitidos por los motores. Los estados como la posición θ y velocidad $\dot{\theta}$ del péndulo, así como la velocidad de las ruedas $\dot{\phi}$ convergen a cero, en un lapso menor a 3 segundos. Nótese que, si bien la posición de las ruedas ϕ no converge a cero, si lo hace a un valor constante, lo cual indica que el vehículo a dejado de moverse y el péndulo ha alcanzado su punto de equilibrio. Debido a que los elementos de la matriz \hat{Q} son encontrados mediante un procedimiento no estandarizado, múltiples simulaciones y análisis de las respuestas fueron necesarios. De esto, puede deducirse que la relación entre los elementos de \hat{Q} no es lineal y que la variación de uno no necesariamente afecta a otros. La selección de los valores adecuados

puede parecer un proceso trivial, sin embargo requiere de una estimación cuidadosa, en tanto que no hay únicos valores que respondan a las necesidades del diseño.

Así, la Figura 3.6 resulta de la selección de la matriz (3.23) y el cálculo de la matriz de realimentación (3.24).

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

La matriz de realimentación de estado K calculada con la ecuación (3.20) queda como

$$K = [-0.0032 \quad -0.5418 \quad -20.5245 \quad -3.2972] \quad (3.24)$$

3.5. Control Proporcional Integral Derivativo (PID)

El control PID es una estrategia de control por realimentación ampliamente usado en el ámbito de la ingeniería. Su algoritmo depende del cálculo de tres parámetros: proporcional, integral y derivativo. La suma de estos tres parámetros permite la regulación de la salida del sistema.

Una de las ventajas del controlador PID es que no precisa de conocer los parámetros del sistema para regular su salida, salvo su entrada. El conocer el modelo matemático del sistema facilita el cálculo de los parámetros del PID y su posterior sintonización.

La ecuación del controlador PID en el dominio del tiempo se expresa en (3.25), esta representación del PID es conocida como forma paralela [6].

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.25)$$

Donde

- $u(t)$, salida del controlador.
- K_p , ganancia proporcional.
- K_i , ganancia integral.
- K_d , ganancia derivativa.
- $e(t)$, señal de error, diferencia entre la referencia y la salida del sistema.

- t , tiempo.
- $\bar{\tau}$, variable de integración.

Puesto que el objetivo del PID es controlar la posición angular del péndulo, éste debe regresar a una posición vertical ante una perturbación o una posición inicial distinta del equilibrio. Luego entonces, la señal de referencia del sistema es cero. Este tipo de condición se conoce comúnmente como problema de regulación. El diagrama de bloques para del sistema con PID puede verse en la Figura 3.7.

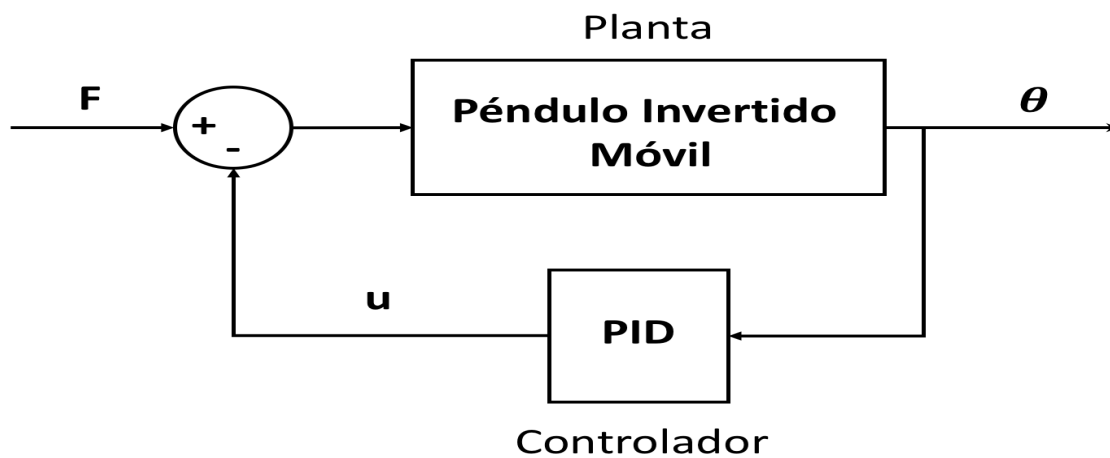


Figura 3.7. Control por PID: diagrama de bloques del sistema.

En la Figura 3.7 la salida del sistema es el ángulo de inclinación θ , esta señal es la única entrada al controlador PID. Lo que es una ventaja en el diseño en términos de economía en instrumentación y sensado. Las ganancias K_p , K_i y K_d son sintonizadas hasta que el vehículo pueda compensar la inclinación causada por una perturbación o por su condición inicial.

La sintonización de las ganancias del PID depende del propio diseño del controlador y de las características de la planta. Por otra parte, existen en la literatura diversos métodos y aproximaciones para la sintonización, como el de Ziegler-Nichols o el de Cohen y Coon [26]. En este trabajo se usó la aproximación eurística de Ziegler-Nichols. Una vez sintonizadas estas dos ganancias, se aumenta gradualmente el valor de K_i hasta observar una respuesta adecuada en las simulaciones.

La Figura 3.8 muestra la respuesta del sistema (3.21) con controlador PID, las ganancias $K_p = 25$, $K_i = 0.1$ y $K_d = 0.2$. La condición inicial de la cual parte el sistema es $\theta = 0.4$ rad con tiempo $t = 0$. La señal de control se mantiene dentro de los límites permitidos por los motores. La acción de control hace que el ángulo θ converja y vaya a cero. La posición inicial de las ruedas parte de cero y converge a un valor constante el cual mantiene hasta el final de la simulación.

El controlador PID solo se ocupa de regular la inclinación del péndulo, lo que puede presentar ciertos inconvenientes cuando se alcanza el punto de convergencia. Esto tiene que ver con la

acción integral, la cual acumula un error positivo durante el proceso. Este error puede producir una señal de salida incluso cuando el error en el ángulo es muy pequeño. En la simulación este detalle no puede ser apreciado directamente, ya que el modelo en Matlab/Simulink ignora las perturbaciones producidas por fricción, irregularidades en el terreno etc.

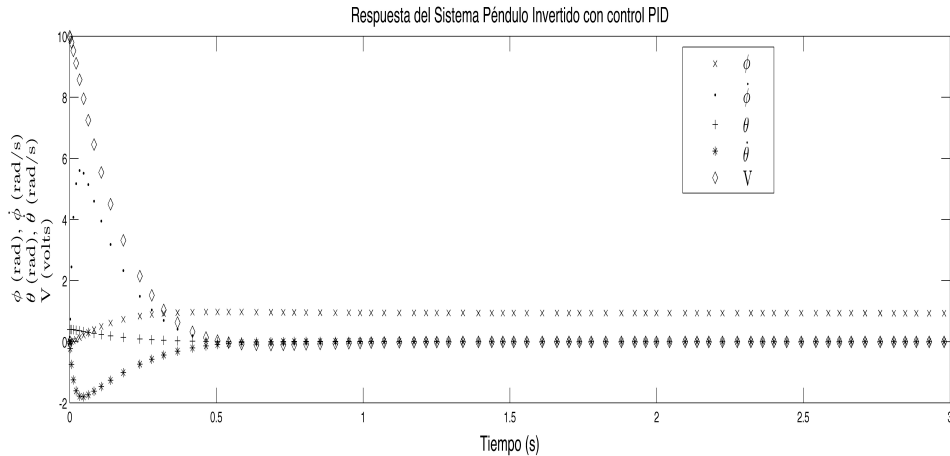


Figura 3.8. Respuesta del sistema con un controlador PID.

Por otra parte, si las ganancias del PID no son sintonizadas de manera adecuada, el sistema puede no llegar a converger aunque las simulaciones sugieran que los estados alcancen un valor constante. La Figura 3.9 muestra la respuesta del sistema al sintonizar el PID con ganancias $K_p = 25$, $K_i = 5$ y $K_d = 0.2$. Nótese que se aumenta la ganancia de la acción integral respecto a la Figura 3.8. La posición angular θ nunca alcanza el valor cero. La condición inicial de la cual parte el sistema es $\theta = 0.4$ rad con tiempo $t = 0$.

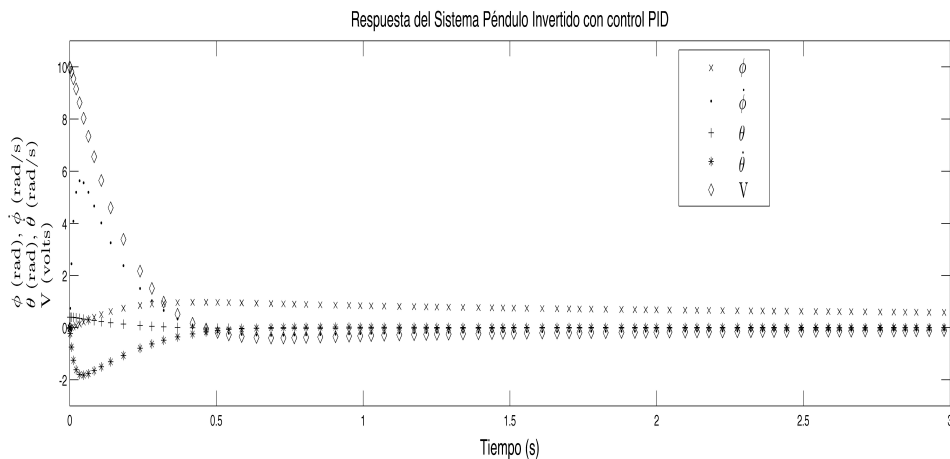


Figura 3.9. Respuesta del sistema con un controlador PID con un aumento en el valor de la acción integral.

3.6. Evaluación de Desempeño

3.6.1. Pruebas con LQR

La implementación del sistema de control está basada en los fundamentos teóricos vistos en el capítulo 3. Las ganancias de los controladores fueron obtenidas en base a los resultados de las simulaciones de las secciones 3.4 y 3.5. Debido a que el modelo dinámico no puede ser completamente preciso, y por las particularidades físicas del prototipo, las ganancias usadas en las simulaciones funcionan como una guía, para una sintonización más precisa.

El sistema comienza en una posición inicial cercana a $\theta = 0.4$ rad y un tiempo $t = 0$ s, el sensor que se ocupa de la inclinación del péndulo emite una señal que pasa a través del filtro de Kalman, éste estabiliza la medida del ángulo y permite al sistema de control calcular la salida de control.

Las Figuras 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 muestran las gráficas obtenidas en las pruebas en tiempo real, con un controlador LQR.

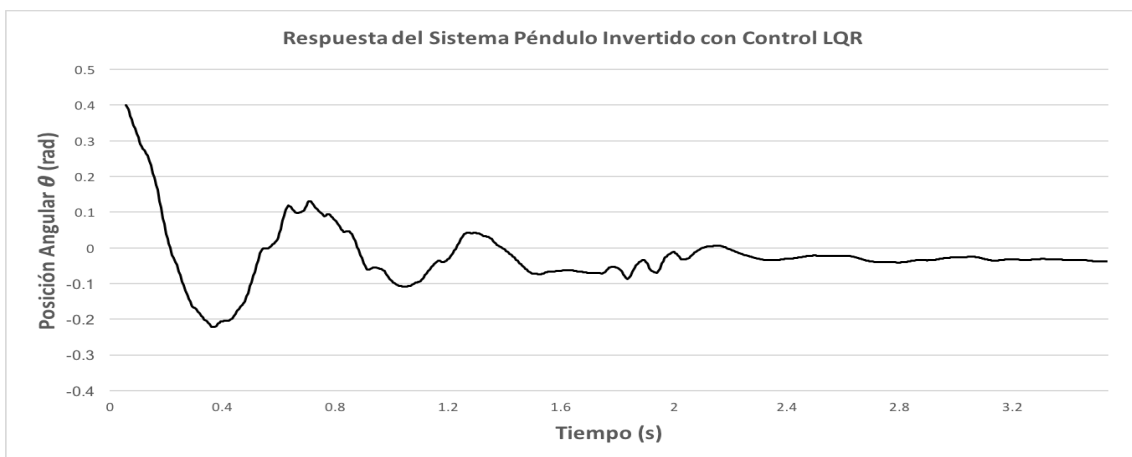


Figura 3.10. Prueba en tiempo real con control LQR [θ]

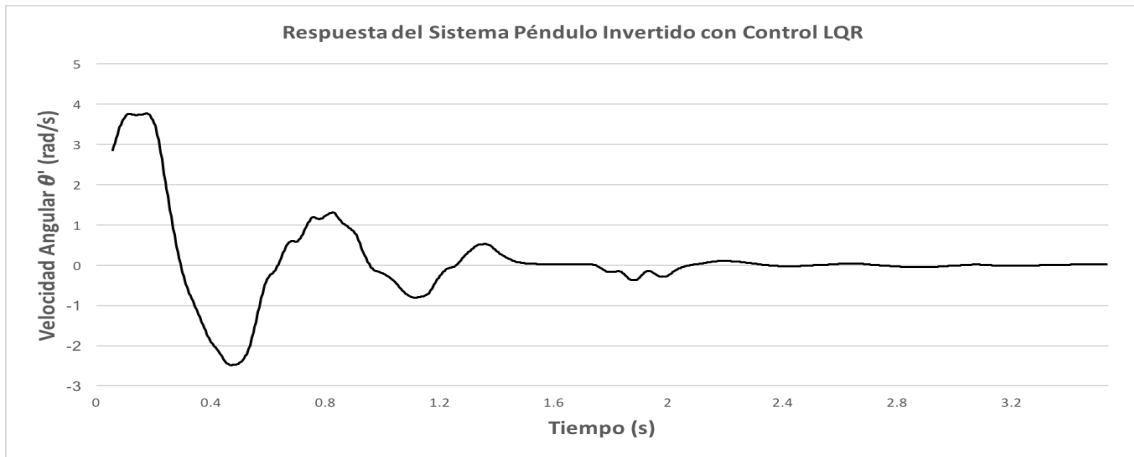


Figura 3.11. Prueba en tiempo real con control LQR $[\dot{\theta}]$

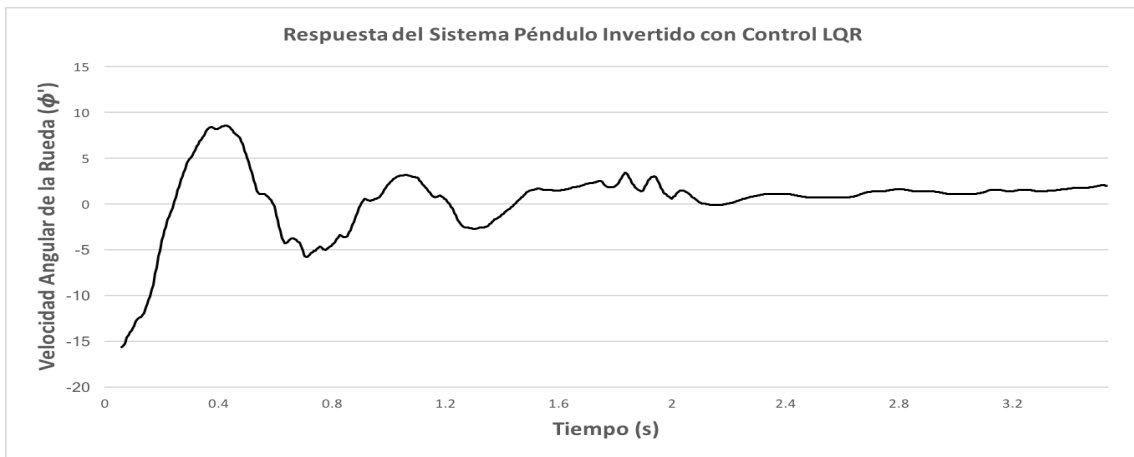


Figura 3.12. Prueba en tiempo real con control LQR $[\dot{\phi}]$

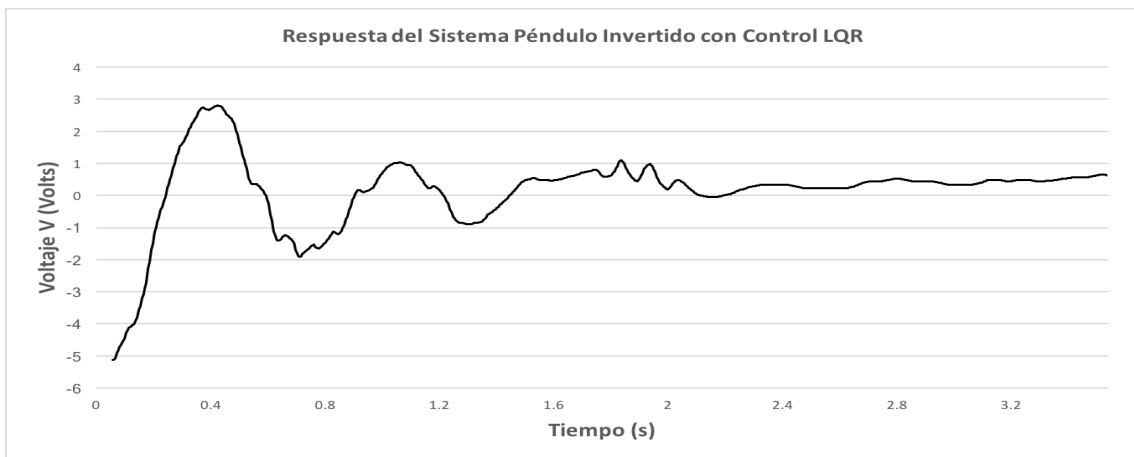


Figura 3.13. Prueba en tiempo real con control LQR [V]

Las gráficas de las Figuras 3.10 a 3.13 tienen respuestas similares a aquellas de la Figura 3.6, todas ellas con un tiempo aproximado de convergencia de poco más de 3 s. La ganancia de realimentación para el sistema resultó en

$$K = [-0.001 \quad -0.4583 \quad -35.929 \quad -5.3875] \quad (3.26)$$

Es de esperar que las pruebas en el prototipo no brinden una respuesta tan suave, ni converjan tan rápido como en las simulaciones. Esto debido generalmente a parámetros desconocidos o no considerados, como fricciones, perturbaciones externas, simetría del vehículo, distribuciones de masa etc.

En la Figura 3.10 el sistema parte de la condición inicial y oscila al rededor del punto de convergencia, el cual no alcanza completamente, pero se mantiene lo suficientemente cerca para mantenerse en posición vertical y no precipitarse y caer. La señal de control Figura 3.13, se mantiene dentro de los parámetros permitidos por los motores. Sin embargo, siempre existe una señal de control diferente de cero, ya que la medida del ángulo de inclinación del péndulo nunca es completamente cero. Esto debido particularmente a las vibraciones del sistema y al método de estimación del ángulo.

En cuanto a la velocidad angular de las ruedas, puede notarse que existe un ligero desplazamiento cuando la posición angular del péndulo se aproxima a cero, esto, como se explica en el párrafo anterior debido a la incertidumbre en la medición del ángulo, aún así en las pruebas realizadas el sistema compensa esta desviación.

Finalmente, la Figura muestra el comportamiento del prototipo con el controlador LQR.

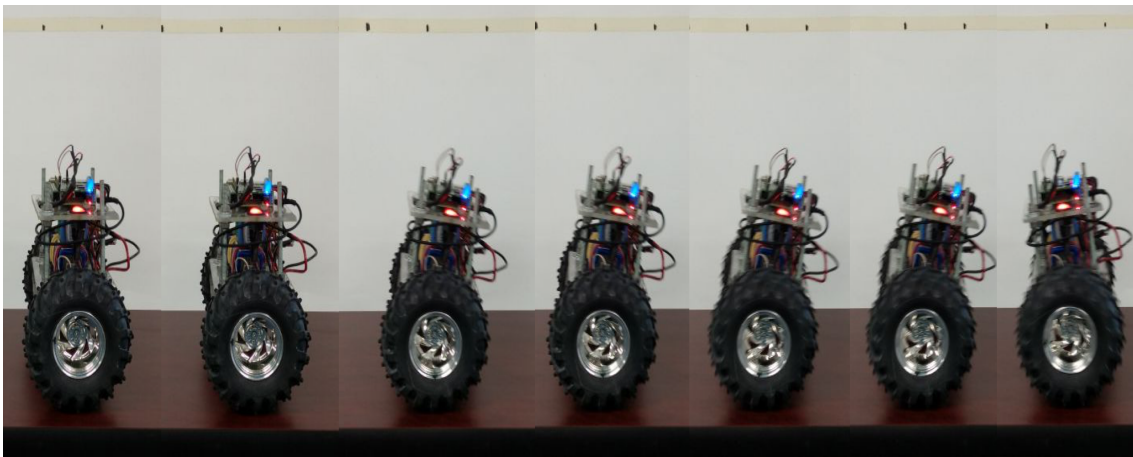


Figura 3.14. Secuencia de imágenes del prototipo péndulo invertido funcionando con el controlador LQR.

3.6.2. Pruebas con PID

El desempeño del controlador PID es similar al LQR, sin embargo, en el PID se presenta una salida menos suave en la posición angular, Figura 3.15. Si bien dicha posición angular converge o se aproxima a cero, el sistema de control demora más tiempo en hacerlo. En algunas de las pruebas realizadas el vehículo no responde de manera tan eficiente a perturbaciones, como golpes o desbalances. En este punto el vehículo necesita un área más amplia para lograr la estabilización. La señal de control se mantiene dentro de los límites permitidos por los motores, aunque con valores más elevados a comparación con el LQR. Las ganancias del PID usadas en prueba en tiempo fueron $K_p = 30$, $K_i = 5$, $K_d = 0.9$.

El desempeño del controlador PID se presenta en las Figuras 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18. Posteriormente, en la Figura 3.19 se muestra el comportamiento del prototipo con el controlador PID.

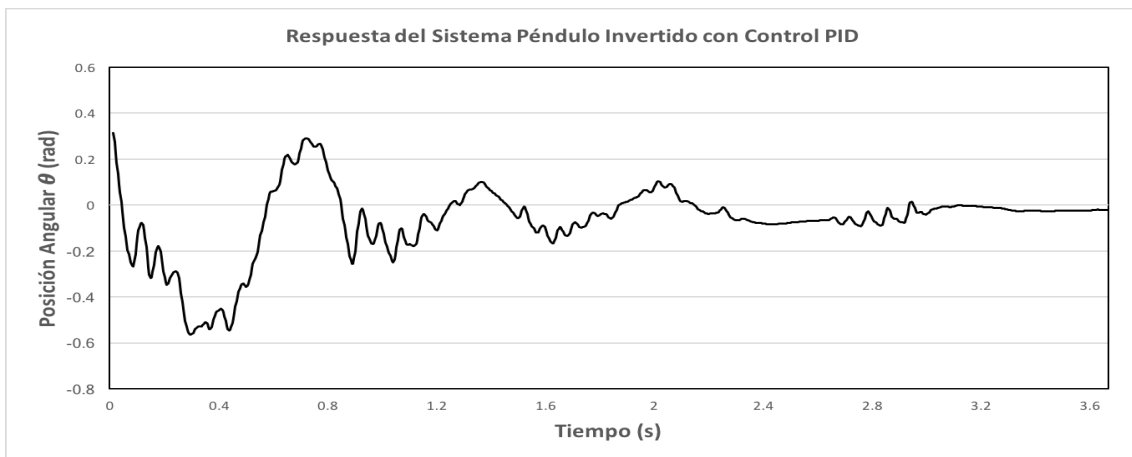


Figura 3.15. Prueba en tiempo real con control PID $[\theta]$

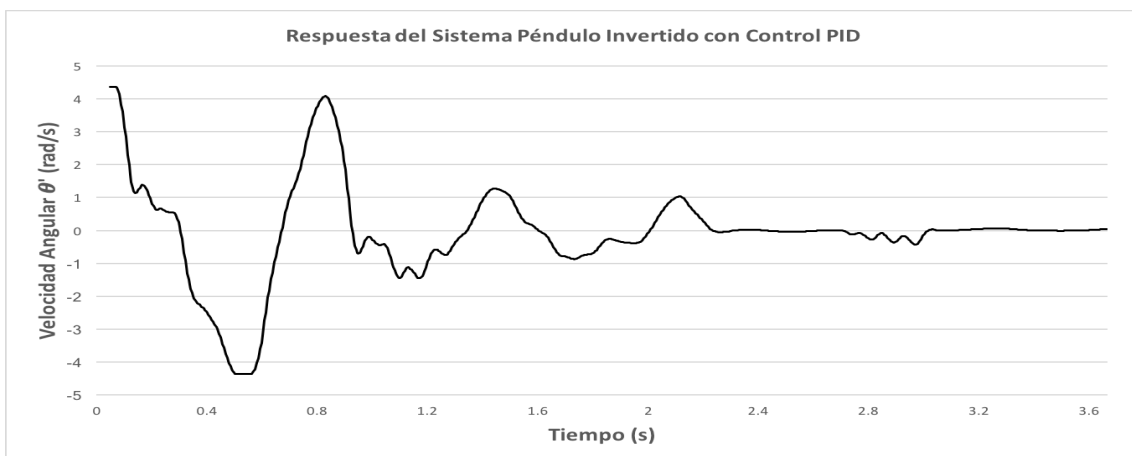


Figura 3.16. Prueba en tiempo real con control PID $[\dot{\theta}]$

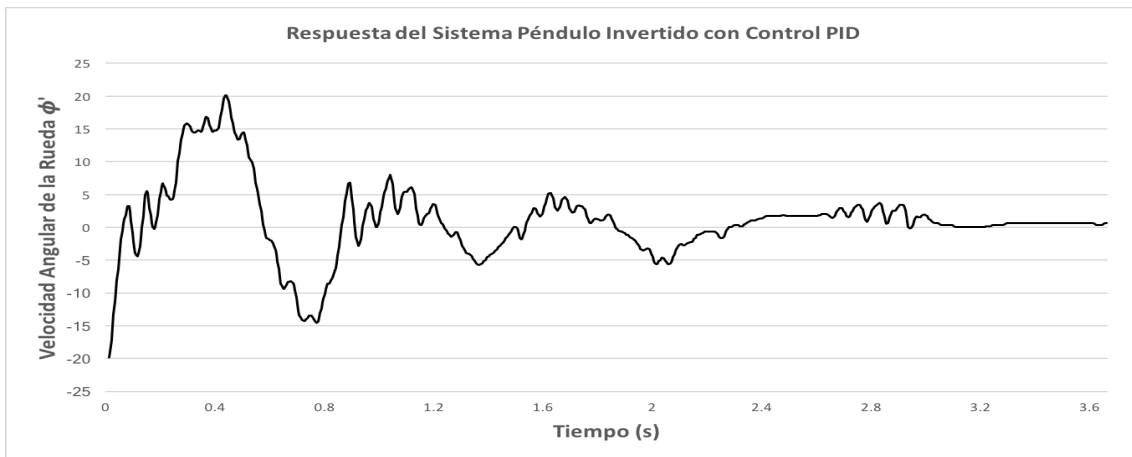


Figura 3.17. Prueba en tiempo real con control PID $[\dot{\phi}]$

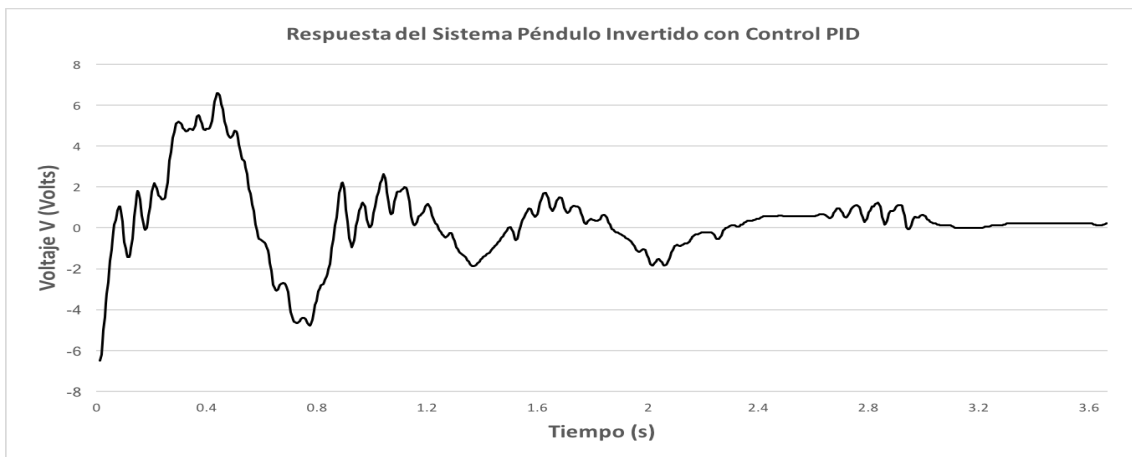


Figura 3.18. Prueba en tiempo real con control PID $[V]$



Figura 3.19. Secuencia de imágenes del prototipo péndulo invertido funcionando con el controlador PID.

Capítulo 4

Control para la Estabilización de Puntos en el Plano

En este capítulo se presenta una estrategia de control para el robot péndulo invertido móvil, desde una condición inicial al origen. Usando los modelos dinámicos y cinemáticos del sistema visto en el capítulo (2) se propone un control por realimentación bajo condiciones iniciales arbitrarias. Finalmente se presentan los resultados obtenidos en simulación para evaluar el desempeño de la estrategia de control.

4.1. Estrategia de Control

El problema de seguimiento de puntos se asume como un problema de regulación. El primer objetivo del controlador es devolver el vehículo de una posición inicial en el plano (χ_1, χ_2) al origen $(0, 0)$.

Recordando el sistema dinámico del capítulo 2, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= v_1 \cos \delta \\ \dot{\chi}_2 &= v_1 \sin \delta \\ \dot{\chi}_3 &= \dot{\delta} = v_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde

- v_1 , velocidad lineal del vehículo.
- v_2 , velocidad angular.
- δ , posición angular del vehículo en el plano.

Se propone hacer un seguimiento de χ_3 , para esto se sugiere la ley de control

$$r_3 = \dot{\chi}_3^d - K_c (\chi_3 - \chi_3^d) \quad (4.2)$$

Donde

- χ_3^d , posición angular deseada del vehículo en el plano.
- K_c , ganancia de control.

De la ecuación (4.2), χ_3^d se obtiene como

$$\chi_3^d = \tan^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= K_{r_1} \chi_1 \\ r_2 &= K_{r_2} \chi_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donde

- K_{r_1} , ganancia de control de posición.
- K_{r_2} , ganancia de control de posición.

De la ecuación (4.2) nuevamente, $\dot{\chi}_3^d$ se obtiene como

$$\dot{\chi}_3^d = \frac{\frac{r_2}{r_1}}{1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}} = \frac{\dot{r}_1 r_2 - \dot{r}_2 r_1}{(r_1^2 + r_2^2)} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.2) se reescribe entonces como

$$r_3 = \frac{\dot{r}_1 r_2 - \dot{r}_2 r_1}{(r_1^2 + r_2^2)} - K_c (\chi_3 - \chi_3^d) \quad (4.6)$$

Recordando que r_3 se obtiene en forma de velocidad angular, es preciso ahora encontrar un medio para dirigir la señal de control a cada una de las ruedas del vehículo. Esto se logra con una matriz de transformación, se tiene en la siguiente ecuación que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2l} & -\frac{R}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Donde

- R , radio de la rueda.
- l , distancia entre alguna de las ruedas y el punto P , Figura 2.12.
- $\dot{\phi}_D$, velocidad angular de la rueda derecha.
- $\dot{\phi}_I$, velocidad angular de la rueda izquierda.

Despejando las velocidades angulares de las ruedas derecha e izquierda de la ecuación (4.7), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2l} & -\frac{R}{2l} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Los actuadores del vehículo se regulan por medio de un voltaje, es por esta razón que deben convertirse las señales de control de velocidad angular de cada rueda a voltajes para las mismas ruedas. Esto se logra con un controlador PI, el cual regula el error entre las velocidades angulares medidas de cada rueda y la señal del controlador cinemático r_3 . La Figura presenta el diagrama general del sistema con todas las características implementadas en este trabajo.

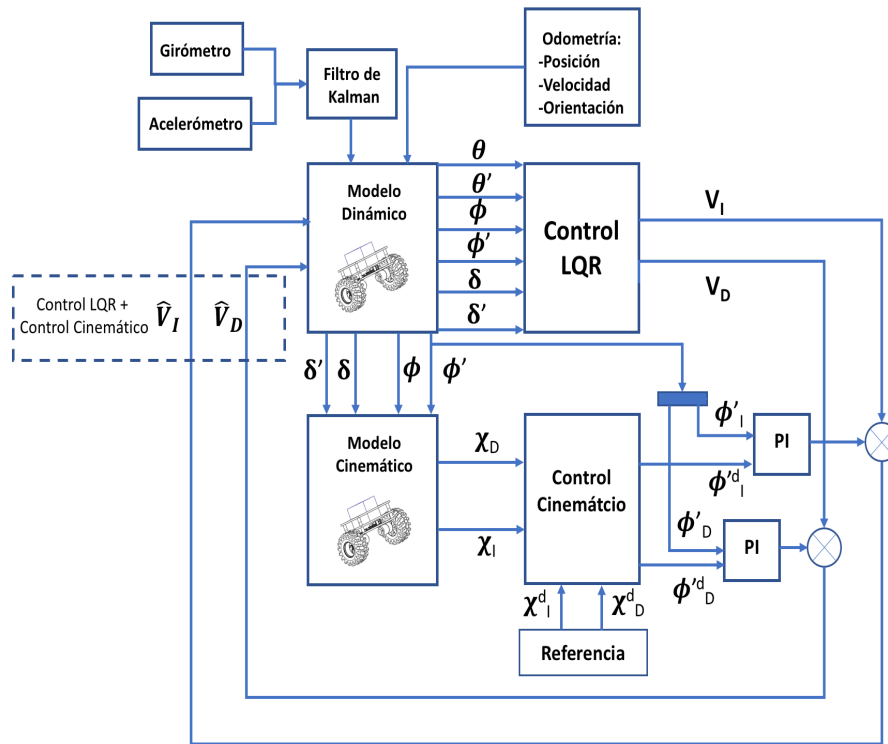


Figura 4.1. Diagrama de bloques general del péndulo invertido móvil.

4.2. Evaluación de Desempeño

Las siguientes Figuras muestran algunas de las pruebas en simulación realizadas usando la estrategia de control cinemático de la sección 4.1. Además, los resultados se complementan los valores de los estados del sistema dinámico, es decir, que mientras el vehículo se desplaza por el plano, el control dinámico intenta mantener la posición vertical, reflejando esto en los valores de los estados del sistema.

Las primeras pruebas del control cinemático consistieron en ubicar al vehículo en una posición inicial en el plano (χ_1, χ_2) , es decir, en una coordenada específica (χ_1, χ_2) y hacer que el vehículo regresara al origen $(0, 0)$. Este tipo de condiciones se conoce como problema de regulación. La señal de referencia es entonces cero. La Figura muestra el recorrido del vehículo con una posición inicial en el plano de $(5, 6)$, que se aproxima al origen.

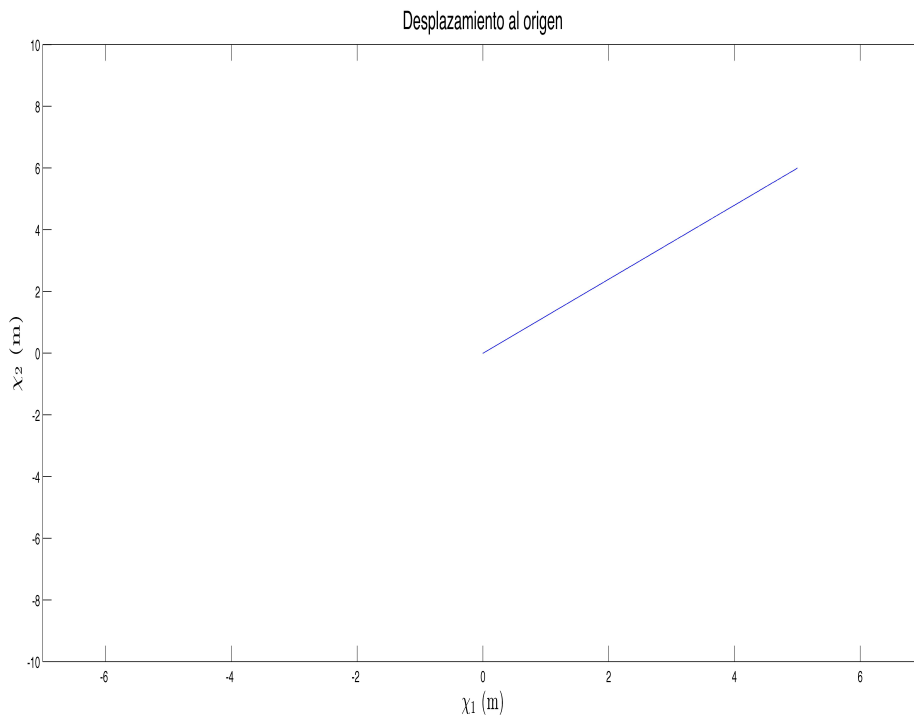


Figura 4.2. Curva descrita por el desplazamiento del móvil del punto $(5, 6)$ al origen $(0, 0)$ en el plano (χ_1, χ_2) .

La Figura 4.3 muestra el comportamiento de los estados del sistema cuando realiza el desplazamiento descrito en la Figura 4.2. Lo importante a notar en esta Figura, es la variación del ángulo de inclinación θ , que se desplaza hacia adelante y que converge a cero cuando se aproxima al origen. Además el ángulo de dirección δ varia para posicionar al vehículo de manera adecuada. Se menciona también que el voltaje de control no sobrepasa los límites permitidos de los motores.

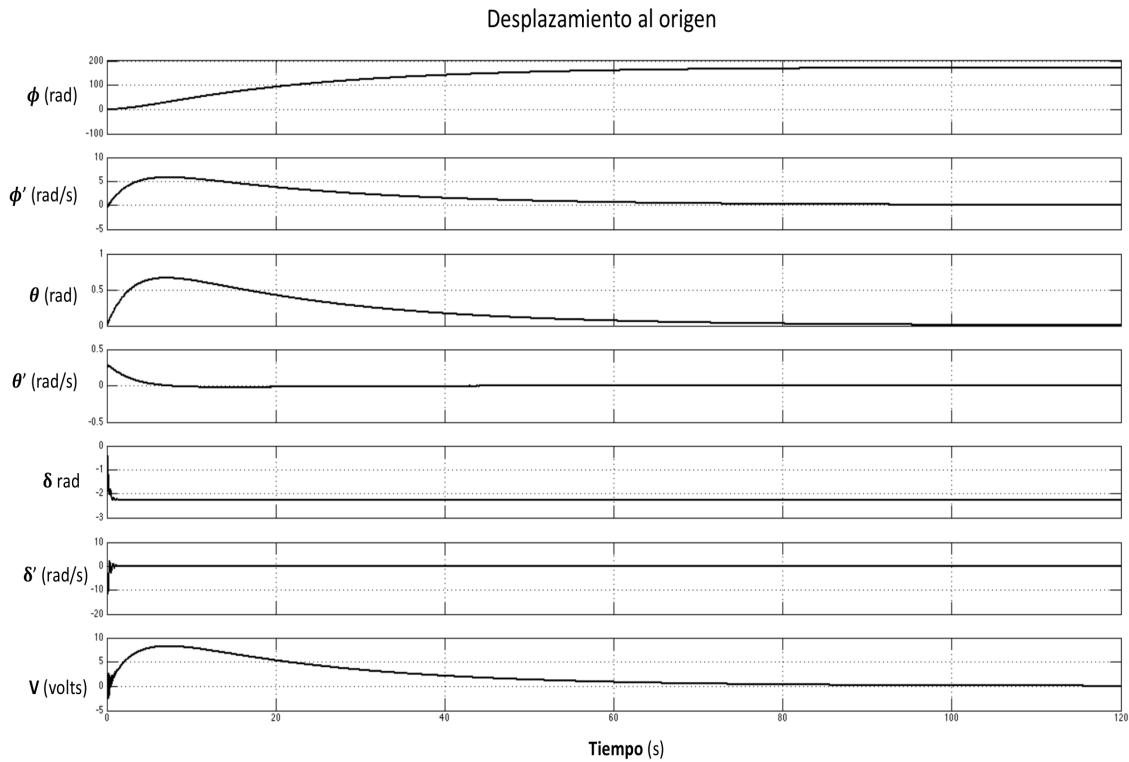


Figura 4.3. Estados del péndulo invertido móvil cuando se desplaza del punto $(5, 6)$ al origen $(0, 0)$ en el plano (χ_1, χ_2) .

La Figura 4.4 muestra un recorrido descrito por el vehículo en el plano (χ_1, χ_2) . Dicha trayectoria se produce por el seguimiento de puntos dados por la referencia. La señal de referencia ingresa al sistema en forma de ecuaciones paramétricas, esto es, funciones que representan los puntos de un objeto geométrico tales como curvas o superficies. Las ecuaciones paramétricas de la Figura 4.4 que representan una curva con cuatro vértices llamada *Astroide*, son las siguientes

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \cos^3 \delta \\ \chi_2 &= \sin^3 \delta\end{aligned}\tag{4.9}$$

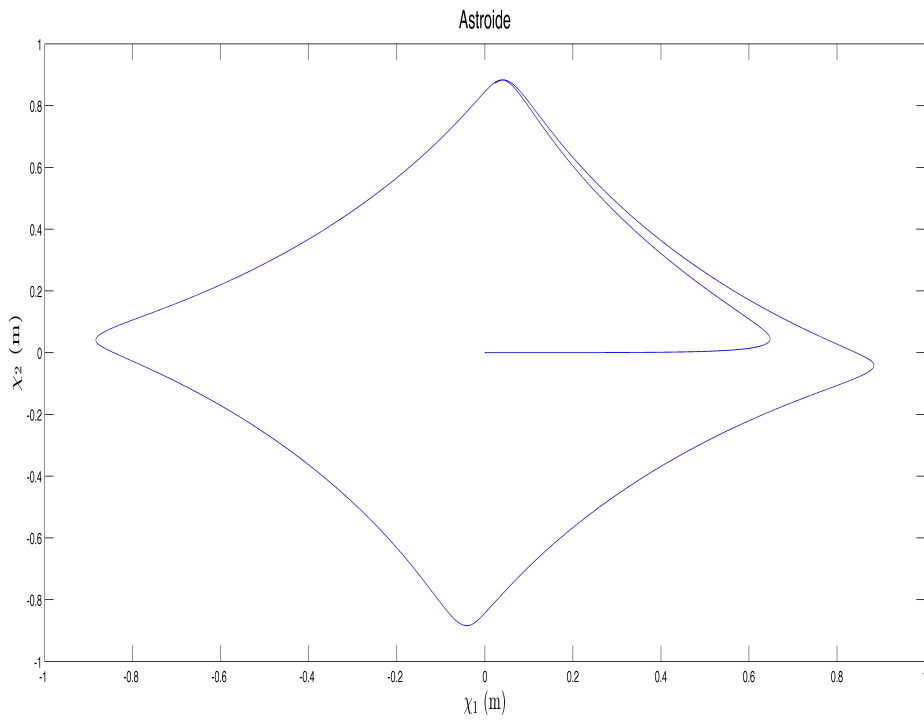


Figura 4.4. Curva descrita por el desplazamiento del móvil en el plano (χ_1, χ_2) .

La Figura 4.5 muestra el comportamiento de los estados del sistema cuando realiza el desplazamiento descrito por la ecuaciones paramétricas (4.9). El vehículo parte del origen y se incorpora a las coordenadas que describen las ecuaciones. El ángulo de inclinación θ mantiene oscilaciones regulares que describen los instantes en que se aproxima a las esquinas de la figura. El cambio de dirección más pronunciado de δ sucede cerca del segundo 120, cuando el vehículo se incorpora al recorrido principal. Respecto al voltaje de control, existe un pico pronunciado justo en el cambio de dirección de δ . Este pico de voltaje, que si bien no sobrepasa los límites tolerados por los motores puede traer problemas en la práctica.

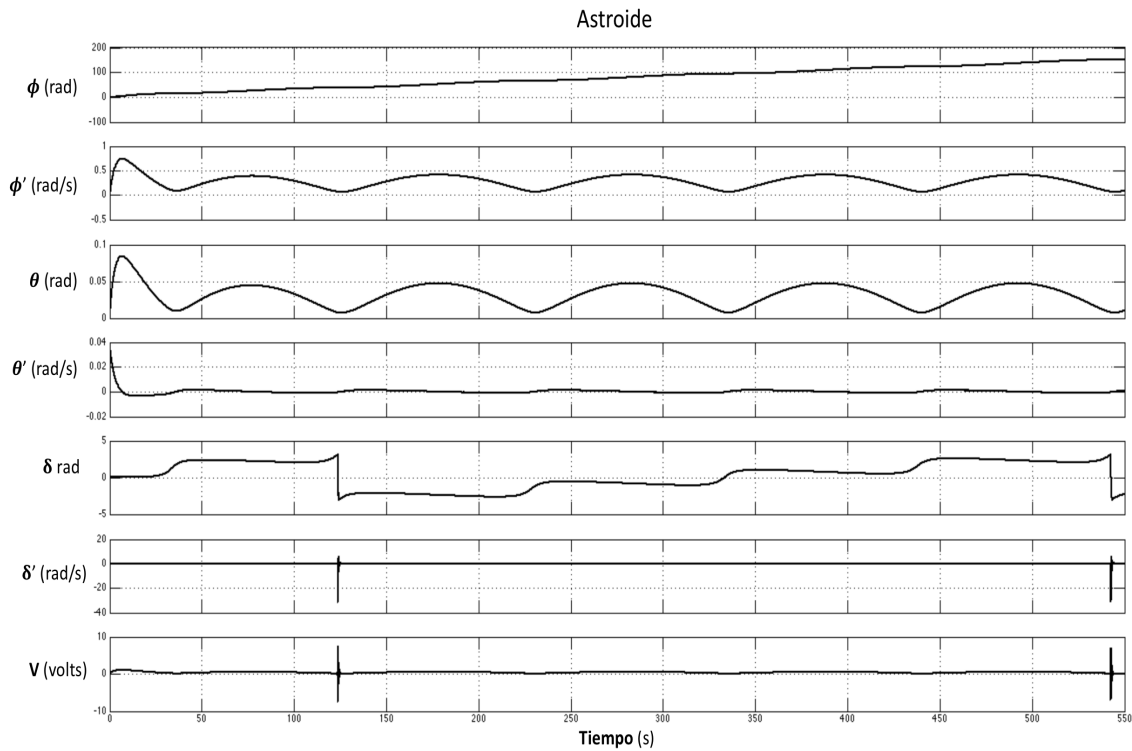


Figura 4.5. Estados del péndulo invertido móvil cuando el sistema tiene una referencia descrita por las ecuaciones paramétricas (4.9).

La Figura 4.6 muestra un recorrido descrito por el vehículo en el plano por las ecuaciones paramétricas. La curva que representan dichas ecuaciones se conoce como *Lemniscata*.

$$\chi_1 = \frac{\alpha \cos \delta}{1 + \sin^2 \delta} \quad (4.10)$$

$$\chi_2 = \frac{\alpha \sin \delta \cos \delta}{1 + \sin^2 \delta} \quad (4.11)$$

Donde

- α , una constante paramétrica

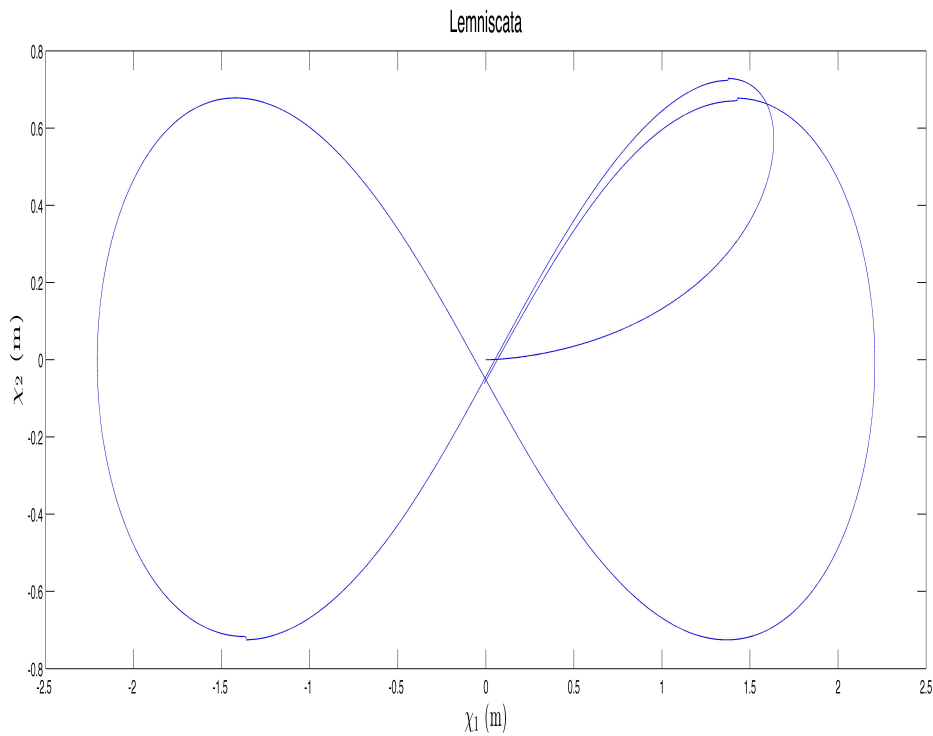


Figura 4.6. Curva descrita por el desplazamiento del móvil en el plano (χ_1, χ_2) , por las ecuaciones (4.10).

La Figura 4.7 muestra el comportamiento de los estados del sistema cuando realiza el desplazamiento descrito por las ecuaciones paramétricas (4.10). El vehículo parte del origen y se incorpora a las coordenadas que describen las ecuaciones. El ángulo de inclinación θ mantiene una inclinación constante porque siempre hay un error entre la señal de referencia y la posición del vehículo en un determinado instante, es decir, el vehículo avanza siempre que haya una referencia que seguir. En cuanto a los picos en el voltaje, ocurren cuando el vehículo realiza curvas cerradas, esto en la práctica podría presentar inconvenientes en la estabilidad del péndulo.

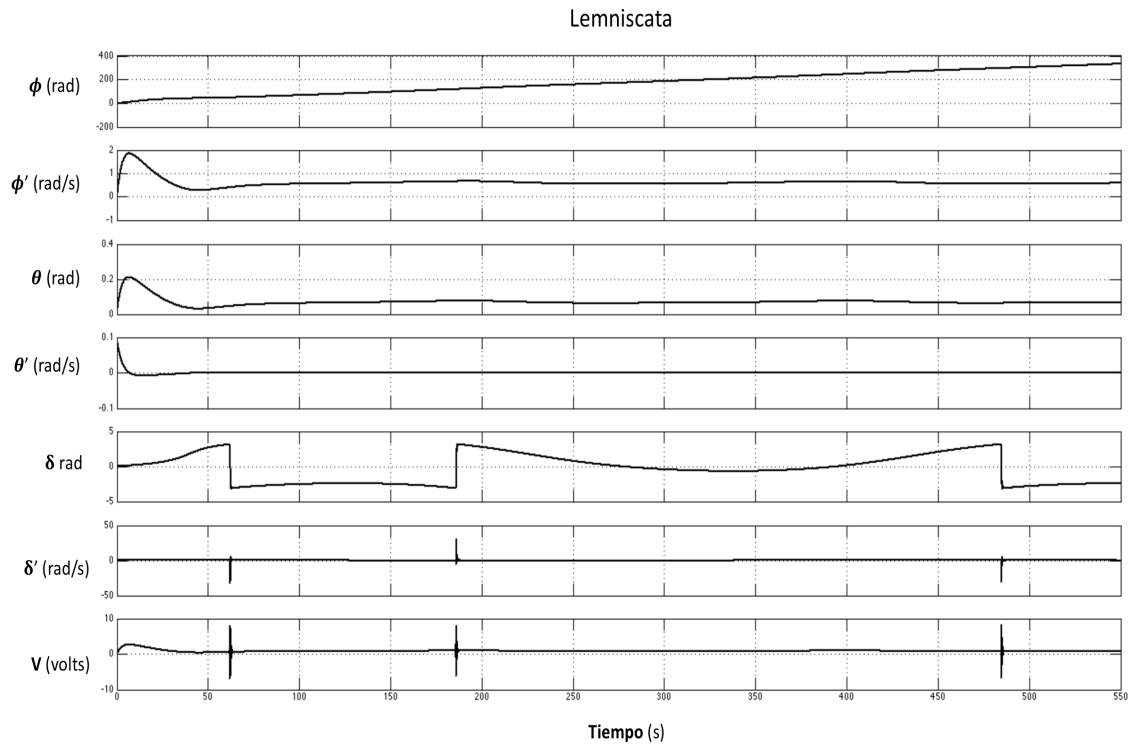


Figura 4.7. Curva descrita por el desplazamiento del móvil en el plano (χ_1, χ_2) , por las ecuaciones (4.10).

Finalmente, como valor agregado, se desarrolló un ambiente de simulación con elementos de realidad virtual. Sin embargo por la naturaleza de dicho herramienta, solo se presenta una imagen del software desarrollado, Figura . Este ambiente de realidad virtual esta pensado para servir de refuerzo en el estudio y análisis del péndulo invertido móvil. También para probar estrategias de control con ayuda visual.

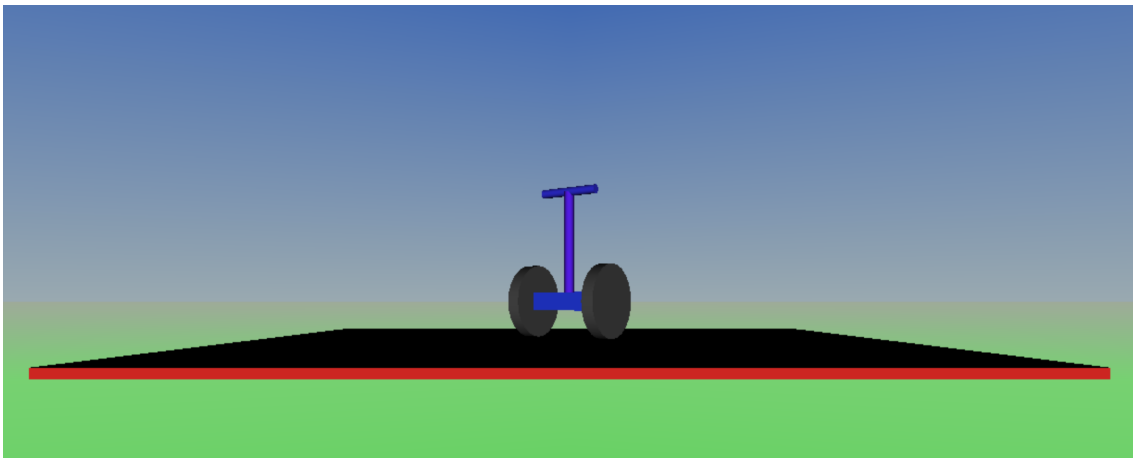


Figura 4.8. Ambiente de realidad virtual donde se visualiza el comportamiento del péndulo invertido móvil

Capítulo 5

Conclusiones

Se consigue balancear el péndulo invertido móvil, con dos estrategias de control diferentes, el controlador LQR y el controlador PID. Durante las pruebas, el prototipo mantuvo la posición vertical y evitó las precipitaciones al ajustar sus ruedas. El péndulo es capaz de compensar perturbaciones externas y mantenerse en posición vertical moviéndose hacia adelante y hacia atrás.

Se realizó una investigación general sobre los sistemas físicos que se comportan como péndulos invertidos, así como las aplicaciones y desarrollo que tienen éstos en la actualidad. El enfoque dado en este trabajo va dirigido hacia los vehículos de transporte terrestre.

Se hizo una revisión en la literatura sobre los métodos de diseño y control de los péndulos invertidos móviles.

Se obtuvo el modelo matemático del sistema péndulo invertido, tanto dinámico como cinemático. Con estos modelos se realizaron simulaciones computacionales, obteniendo resultados esperados conforme al análisis matemático hecho. Se enfatiza que tanto el modelado del sistema como el desarrollo de la ley de control fueron partes prioritarias del presente trabajo.

El modelo dinámico no lineal del sistema péndulo, se linealizó y adaptó a las necesidades de los controladores y del modelo cinemático.

Fue propuesta una estrategia de control exclusiva para el seguimiento de puntos, lo que promete varias áreas de expansión para el proyecto. Dicha estrategia de control fue aplicada al modelo matemático del sistema en simulación, con resultados prometedores.

El prototipado y manufactura del vehículo péndulo invertido se completó para las evaluaciones y análisis de interés. La configuración del software en la Raspberry Pi 3, necesario para la ejecución de algoritmos de control del prototipo, y la comunicación inalámbrica por medio de WiFi es un resultado que se menciona. Con esto se consiguió un banco de pruebas disponible y funcional para trabajos futuros.

Durante el periodo de trabajo de este proyecto se realizó la publicación y presentación de un artículo en el Congreso Mexicano de Robótica 2017. Siendo parte fundamental de la publicación el modelo matemático obtenido de este proyecto de tesis, así como la implementación exitosa del Filtro de Kalman en las señales del sensor inercial.

Referencias

- [1] C. A. Merlo-Zapata, “Sistema Mecánicos Subactuados Pendulares,” *Boletín UPIITA*, 2014.
- [2] F. Grasser, A. D’arrigo, S. Colombi, and A. C. Rufer, “Joe: a mobile, inverted pendulum,” *IEEE Transactions on industrial electronics*, 2002.
- [3] R. C. Ooi, “Balancing a two-wheeled autonomous robot,” Master’s thesis, University of Western Australia, School of Mechanical Engineering, 2003.
- [4] B. Carlsson and P. Örbäck, “Mobile inverted pendulum, control of an unstable process using open source real-time operating system,” Master’s thesis, Chalmers University of Technology, Division of Automatic Control, 2009.
- [5] A. I. Patete A. and S. H., “Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido,” *Revista INGENIERÍA UC*, vol. 18, pp. 12–22, 2011.
- [6] K. Ogata, *Modern Control Engineering (3rd Ed.)*. Prentice-Hall, Inc., 1997.
- [7] S. Nawawi, m. n. Ahmad, J. Osman, A. Husain, and M. F. B. Abdollah, “Controller design for two-wheels inverted pendulum mobile robot using pismc,” pp. 194 – 199, 07 2006.
- [8] K. Yokoyama and M. Takahashi, “Dynamics-based nonlinear acceleration control with energy shaping for a mobile inverted pendulum with a slider mechanism,” vol. 24, pp. 1–1, 04 2015.
- [9] S. M. W. and W. D. B., “Project-based control education,”
- [10] “30:1 metal gearmotor 37dx52l.” <https://www.pololu.com/product/1443>, Nov 2017.
- [11] A. S. Sedra and K. C. Smith, *Microelectronic Circuits Revised Edition*. Oxford University Press, Inc., 5th ed., 2007.
- [12] A. Badri, J. Sinha, and A. Albarbar, “A typical filter design to improve the measured signals from mems accelerometer,” *Measurement*, vol. 43, pp. 1425–1430, 12 2010.
- [13] C.-G. Lee, N.-N. Dao, S. Jang, D. Kim, Y. Kim, and S. Cho, “Gyro drift correction for an indirect kalman filter based sensor fusion driver,” *Sensors*, vol. 16, 2016.
- [14] J. F. Puget, “A speed comparison of c, julia, python, numba, and cython on lu factorization.” <https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/jfp/entry>, Jan 2016.
- [15] “Pololu dual mc33926 motor driver.” <https://www.pololu.com/product/2755>, Nov 2017.

- [16] J. Beggs, *Kinematics*. Hemisphere, 1983.
- [17] R. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Dynamics*. Prentice Hall, 2010.
- [18] F. P. Beer, *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2010.
- [19] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. Bradford Company, 2004.
- [20] J. F. G.-C. J. P. Sánchez-Santana and S. Ramírez-Martínez, “Estabilización de un robot móvil tipo (2,0),” *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2012*, 2012.
- [21] A. O. Baturone, *Robótica: Manipuladores y Robots Móviles*. Marcombo, S.A., 2001.
- [22] D. A. Alejandro, “Control de un robot autónomo tipo péndulo invertido,” Master’s thesis, Instituto Tecnológico de la Paz, 2016.
- [23] Z. Li, C. Yang, and L. Fan, *Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2012.
- [24] G. F. Franklin, M. L. Workman, and D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 3rd ed., 1997.
- [25] K. J. Astrom and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2008.
- [26] V. Alfaro, “Métodos de sintonización de controladores pid que operan como servomecanismos,” vol. 13, pp. 13–29, 01 2003.