



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

DOCTORADO EN INGENIERÍA QUÍMICA

**“ANÁLISIS DEL TRANSPORTE DE MASA Y CALOR DURANTE LA
DESHIDRATACIÓN DE SÓLIDOS CON GEOMETRÍAS DERIVADAS DE
SISTEMAS COORDENADOS ORTOGONALES”**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA QUÍMICA**

PRESENTA:

KAREN HARIANTTY ESTÉVEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR:

DR. IRVING ISRAEL RUIZ LÓPEZ

CODIRECTOR:

DR. ÁLVARO SAMPIERI CRODA

BUAP

H. Puebla de Z., febrero de 2021

Agradecimientos

Existen muchas personas que me ayudaron durante la realización de este proyecto.

Primero quiero agradecer a mi familia, especialmente a mi mamá Gaby, mi papá Héctor y a mi abuela Juana, que en paz descanse, por el apoyo incondicional que me brindaron durante todo este tiempo y por demostrarme tanto cariño.

A los miembros de mi comité, a la Dra. Claudia Santacruz Vázquez, la Dra. Edith Corona Jiménez, el Dr. Miguel Ángel García Alvarado y el Dr. Carlos Enrique Ochoa Velasco, agradezco su paciencia, recomendaciones y el tiempo dedicado durante estos cuatro años al proyecto. A mis directores, el Dr. Irving Israel Ruiz López y el Dr. Álvaro Sampieri Croda, les doy las gracias no tan sólo por su ayuda ilimitada para realizar el trabajo teórico y experimental, sino también por su amistad, apoyo y consejos. Asimismo, agradezco a la VIEP y al CONACYT por las becas asignadas para el desarrollo del proyecto.

Finalmente, agradezco a mis compañeros por su amistad y ayuda desinteresada.

Resumen

Estévez Sánchez, Karen Hariantty. Doctorado en Ingeniería Química. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Febrero 2021. **Análisis del transporte de masa y calor durante la deshidratación de sólidos con geometrías derivadas de sistemas coordenados ortogonales.** Director: Dr. Irving Israel Ruiz López. Codirector: Dr. Álvaro Sampieri Croda.

En este proyecto se analiza el transporte de masa y calor en procesos de deshidratación de sólidos con la finalidad de desarrollar y validar metodologías analítico-numéricas para mejorar la estimación de las propiedades de transporte de masa usando geometrías derivadas de sistemas coordenados ortogonales.

Inicialmente se desarrolló un método simple para estimar difusividades considerando el encogimiento del sólido con transporte de masa unidimensional. En la segunda etapa de este estudio, se usó el método de registro de conjuntos de puntos como un enfoque novedoso para generar geometrías de sólidos con forma compleja durante la modelación de procesos de deshidratación. En la tercera etapa, se generalizó el método de pendientes para permitir la estimación de coeficientes de difusión variables en sólidos no regulares que presentan encogimiento, en ausencia de una solución analítica a la ecuación de transporte de masa. Finalmente, se analizó el efecto de varias consideraciones de modelación en la estimación de coeficientes de difusión durante el proceso de secado. La teoría se validó con el análisis de datos de deshidratación de cilindros de yuca (secado convectivo) y de púños de champiñón (secado convectivo y deshidratación osmótica), incluyendo su evolución morfométrica por análisis de imagen.

Los resultados indicaron que no considerar el encogimiento del sólido lleva a la sobreestimación de los valores de difusividad del agua (en más del 50 % bajo las condiciones estudiadas). Para sólidos de forma compleja, el método de registro de conjunto de puntos es útil para reducir el efecto de la discrepancia geométrica durante la estimación de las propiedades de transferencia de masa. El método de pendientes permite una excelente reproducción de los datos experimentales cuando hay evidencia de que la difusividad es variable, a la vez que evita la solución iterativa del modelo de secado. Finalmente, se demostró que la consideración de concentración de sólidos constante lleva a la sobreestimación de la difusividad del agua en el alimento, aun cuando se incluya su encogimiento en el modelo.

Abstract

Estévez Sánchez, Karen Hariantty. Doctorate in Chemical Engineering. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. February 2021. **Mass and heat transfer analysis during dehydration of solids with geometries described by orthogonal coordinate systems.** Director: Dr. Irving Israel Ruiz López. Codirector: Dr. Álvaro Sampieri Croda.

Heat and mass transfer phenomena are analyzed during solid dehydration with the aims of developing mixed theoretical-numerical approaches in order to improve the estimation of mass transfer properties by using product geometries derived from orthogonal coordinate systems.

A simple method was initially developed to estimate water diffusivities in shrinking solids with one-dimensional mass transfer. In the second stage of the study, the point set registration method was introduced as a novel approach for geometry generation of complex-shaped foods during modeling of dehydration processes. In the third stage, the method of slopes was generalized to allow the estimation of variable diffusion coefficients in irregular shrinking solids lacking analytical solutions to mass transport equation. Finally, the effect of various modeling assumptions on the estimation of water diffusivity during air drying was evaluated. Proposed theory was validated during the analysis of experimental dehydration data of cassava (air drying) and mushroom pilei (air drying and osmotic dehydration), including their morphometric evolution by image analysis.

Results indicated that water diffusivity is overestimated when shrinkage is not included in the mass transfer model (in more than the 50% under the investigated experimental conditions). For complex-shaped solids, point set registration method is helpful to reduce the effect of geometry mismatch during the estimation of mass transfer properties. The method of slopes allows an excellent reproduction of experimental data when there is evidence of a variable diffusivity, while avoiding the iterative solution of drying model. Finally, it was demonstrated that the assumption of constant concentration of solids will lead to an overestimation of water diffusivity in food, even if its shrinkage is included in the model.

Índice

Resumen	I
Abstract	II
Índice de tablas	v
Índice de figuras	VIII
Nomenclatura	xv
Introducción	1
1 Antecedentes	3
1.1 Deshidratación	3
1.2 Secado convectivo	6
1.2.1 Generalidades	6
1.2.2 Mecanismos del secado convectivo	7
1.2.3 Representación matemática del secado convectivo	13
1.2.4 Métodos de estimación de la difusividad	16
1.3 Deshidratación osmótica	19
1.3.1 Generalidades	19
1.3.2 Fundamentos	20
1.4 Cambios geométricos del producto	22
1.5 Métodos de solución	27
1.5.1 Solución analítica	31
1.5.2 Solución numérica	34

2	Justificación	38
3	Hipótesis y objetivos	39
3.1	Hipótesis	39
3.2	Objetivo general	39
3.3	Objetivos específicos	39
4	Teoría desarrollada	40
4.1	Método simple para estimar coeficientes de difusión en sólidos considerando su encogimiento	40
4.2	Estudio del efecto de la discrepancia geométrica en la estimación de los coeficientes de difusión	43
4.2.1	Método de registro de conjunto de puntos	43
4.2.2	Modelo de transporte de masa en el sistema coordenado esférico achatado	45
4.2.3	Método simplificado para estimar coeficientes de difusión en la geometría propuesta	48
4.3	Generalización del método de pendientes para estimar coeficientes de difusión en productos de forma compleja con encogimiento	49
4.4	Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor en el proceso de secado	52
4.4.1	Modelo de transferencia de masa y calor	53
4.4.2	Efecto de la variabilidad de la concentración de sólidos en la difusividad del agua	55
4.4.3	Estimación del coeficiente de difusión bajo consideraciones de concentración de sólidos variable y constante	58
5	Metodología	59
5.1	Análisis del efecto encogimiento en la difusividad	59
5.1.1	Datos experimentales de secado convectivo de yuca	59
5.1.2	Evaluación del encogimiento del producto	60
5.1.3	Determinación de la difusividad efectiva del agua	60

5.2	Evaluación del efecto de la discrepancia geométrica en el cálculo de coeficientes de difusión	61
5.2.1	Datos experimentales de deshidratación osmótica de púleos de champiñón	61
5.2.2	Cuantificación de la discrepancia geométrica	62
5.2.3	Solución numérica del modelo de transferencia de masa	62
5.2.4	Evaluación de la pendiente asintótica de la solución de transporte de masa	64
5.2.5	Tratamiento numérico y estadístico de datos	64
5.3	Aplicación del método de pendientes generalizado	65
5.3.1	Datos experimentales de secado convectivo de púleos de champiñón	65
5.3.2	Modelo de transferencia de masa en el sistema esferoidal achatado	66
5.3.3	Generación de la geometría del producto	67
5.3.4	Método de regresión no lineal para estimar coeficientes de difusión	68
5.3.5	Tratamiento numérico y estadístico de datos	68
5.4	Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor	69
5.4.1	Solución del modelo de transferencia de masa y calor	69
5.4.2	Efecto de las consideraciones de modelación	75
5.4.3	Estimación de la difusividad del agua con variación de la concentración de sólidos	77
6	Resultados y discusión	78
6.1	Análisis del efecto del encogimiento en la difusividad	78
6.1.1	Cinéticas de secado de yuca	78
6.1.2	Determinación de la difusividad del agua en yuca	80
6.2	Efecto de la discrepancia geométrica en el proceso de deshidratación osmótica de púleos de champiñón	82
6.2.1	Características morfométricas del producto	82

6.2.2	Análisis del transporte de masa durante la deshidratación osmótica	85
6.2.3	Método simplificado para la estimación de difusividades	91
6.3	Uso del método de pendientes generalizado para estimar coeficientes de difusión	94
6.3.1	Estimación de atributos geométricos con el método PSR	94
6.3.2	Trasferencia de masa durante el secado convectivo de púleos de champiñón	97
6.3.3	Extensión del método de pendientes a sólidos irregulares y transferencia de masa 3D	110
6.4	Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor	111
6.4.1	Efecto de las consideraciones de modelación en la simulación del proceso de secado	111
6.4.2	Estimación de la difusividad del agua	116
7	Conclusiones	124
8	Apéndice	126
	Bibliografía	139

Índice de tablas

1.1	Resumen de técnicas para lograr la deshidratación de productos. . . .	4
1.2	Características de los modelos usados para describir procesos de deshidratación de sólidos.	28
1.3	Principales soluciones analíticas de transporte de masa unidimensional aplicadas a la deshidratación de sólidos.	34
6.1	Coefficientes de difusión del agua estimados durante el secado convectivo de cilindros de yuca.	81
6.2	Difusividades del agua y soluto estimadas por regresión no lineal y la geometría generada por el método PSR durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón.	88
6.3	Difusividades del agua y soluto estimadas por regresión lineal (método simplificado) durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón.	88
6.4	Diferencia relativa entre los coeficientes de difusión de agua y soluto reportados por diversos métodos durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón.	89
6.5	Coefficientes de difusión del agua estimados durante el secado convectivo de púleos de champiñón.	106
6.6	Error relativo entre las difusividades estimadas con los métodos de pendientes y de regresión por partes de 4 segmentos durante el secado convectivo de púleos de champiñón.	107

Índice de figuras

1.1	Diagrama esquemático de un secador de túnel mostrando sus componentes.	7
1.2	Representación de los perfiles de concentración de humedad en una placa plana.	9
1.3	Curva modelo de velocidad de secado contra el contenido de humedad.	11
1.4	Representación de los perfiles de concentración de humedad en una placa plana en el periodo de velocidad constante.	13
1.5	Representación de los flujos de transporte de masa durante el proceso de deshidratación osmótica.	20
4.1	Ejemplo de una geometría generada en el sistema coordenado esférico achatado.	46
5.1	Dominio computacional para las simulaciones de deshidratación osmótica de púleos de champiñón en el sistema esférico achatado.	63
5.2	Representación de las características geométricas de los púleos de champiñón sometidos a secado convectivo determinadas con el método PSR.	67
6.1	Datos de secado convectivo de cilindros de yuca a diferentes temperaturas.	79
6.2	Gráfica de Arrhenius de las difusividades del agua estimadas durante el secado convectivo de yuca considerando o no su encogimiento.	81
6.3	Pasos del método de registro de conjunto de puntos para estimar la geometría óptima de púleos de champiñón.	83

6.4	Evolución de los parámetros geométricos estimados con el método PSR y de la ganancia de soluto en función de la pérdida de agua durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón.	84
6.5	Comparación de datos experimentales y simulados para la pérdida de agua y ganancia de soluto durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón.	87
6.6	Perfiles de concentración de agua y soluto predichos en el interior del producto osmodeshidratado.	90
6.7	Pendientes asintóticas de las soluciones promedio de transferencia de masa para geometrías derivadas del sistema coordenado esferoidal achatado bajo diferentes parámetros geométricos.	93
6.8	Extracción del contorno de púleos de champiñón frescos y pretratados aplicando el algoritmo PSR.	94
6.9	Evolución de las dimensiones de las muestras frescas y pretratadas en función de la fracción de humedad libre.	96
6.10	Soluciones de referencia para la ecuación de transferencia de masa utilizada en el método de pendientes.	98
6.11	Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras frescas de púleos de champiñón en escala lineal.	100
6.12	Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras pretratadas de púleos de champiñón en escala lineal. . .	101
6.13	Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras frescas de púleos de champiñón en escala logarítmica. . .	101
6.14	Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras pretratadas de púleos de champiñón en escala logarítmica.	102
6.15	Difusividades efectivas del agua estimadas en muestras frescas de púleos de champiñón.	104
6.16	Difusividades efectivas del agua estimadas en muestras pretratadas de púleos de champiñón.	105

6.17 Simulación de la distribución del agua dentro de muestras de champiñón fresco y pretratado a diferentes contenidos de humedad estimada con el modelo de secado y los métodos de pendientes y regresión por partes.	109
6.18 Simulación de la fracción de humedad libre promedio de cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones de solución del modelo de secado.	113
6.19 Simulación de la temperatura promedio de cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones de solución del modelo de secado.	114
6.20 Perfiles de humedad simulados en cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones del modelo de secado mostrando el encogimiento del producto.	115
6.21 Perfiles de humedad simulados en cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones del modelo de secado.	116
6.22 Propiedades del aire obtenidas durante la simulación del proceso de secado de yuca con el modelo riguroso.	117
6.23 Números de Biot y coeficientes de transferencia de masa y energía obtenidos durante la simulación del proceso de secado de yuca con el modelo riguroso.	118
6.24 Comportamiento estimado de la difusividad de agua en yuca como función de la fracción de humedad libre.	119
6.25 Comportamiento estimado de la difusividad de agua en yuca como función de la temperatura de secado.	120
6.26 Gráfica de Arrhenius de los coeficientes de difusión de agua en yuca estimados bajo las consideraciones de concentración de sólidos constante o variable.	121
6.27 Evolución de la actividad de agua del producto contra su humedad promedio durante el secado de cilindros de yuca.	122
6.28 Comparación del comportamiento de los modelos de difusividad original e identificado como función de la temperatura.	123

Nomenclatura

A	denota la superficie del producto
A_n	enésimo coeficiente de la solución en serie
a_w	actividad agua (adimensional)
a	foco de la elipse (m)
Bi_m	número de Biot para transferencia de masa (adimensional)
Bi	número de Biot para transferencia de calor (adimensional)
b_1, b_2	parámetros para la relación ganancia de soluto-pérdida de agua
$C_{p,\infty}$	calor específico de la fase continua (J/kg/°C)
c	concentración volumétrica (kg/m ³ producto)
C_p	calor específico (J/kg producto/°C)
C	concentración en la solución osmótica (kg/m ³ de solución)
c_1, c_2, c_3, c_4	coeficientes de las condiciones de frontera
DRM	desviación relativa media
D_0	factor pre-exponencial del modelo de Arrhenius
D_{wa}	difusividad agua-aire (m ² /s)
D	difusividad efectiva (m ² /s)
d	variable indicadora para definir las condiciones de solución del modelo
E	conjunto de puntos de la geometría experimental
E_1, E_2, E_3	diferencia relativa (%)

E_a	energía de activación
e	elipticidad (adimensional)
$f(t)$	función integrada de encogimiento
G	conjunto de puntos de la geometría basada en el sistema coordenado
H	humedad absoluta del aire (kg agua/kg aire seco)
h	largo del sólido (m)
h_h	coeficiente externo de transporte de energía (W/m ² /K)
h_m	coeficiente externo de transporte de masa (m/s)
I_r	índice de redondez (adimensional)
J_n	función de Bessel de primera clase de orden n
K_{eq}	coeficiente de partición de agua entre el sólido y el aire
k'	parámetro relacionado con la velocidad de encogimiento
k_∞	conductividad térmica de la fase continua (W/m/°C)
k	conductividad térmica (W/m/°C)
L_c	longitud característica de convección (m)
L	longitud característica de difusión (m)
M, M'	conjunto fuente de puntos a alinear (en movimiento)
m	masa (kg)
m, t	coordenadas de los conjuntos M y T , respectivamente
M	peso molecular (kg/kmol)
n'	parámetro relacionado con la forma de la curva de encogimiento

N_E, N_G	número de puntos en los conjuntos E y G , respectivamente
N_{Pr}	número de Prandtl (adimensional)
N_M, N_T	número de puntos en los conjuntos M y T , respectivamente
N_ξ, N_θ	número de nodos en las direcciones ξ y θ , respectivamente
N	número de nodos
N_{Sh}	número de Sherwood (adimensional)
N_{Nu}	número de Nusselt (adimensional)
N_{Re}	número de Reynolds (adimensional)
N_{Sc}	número de Schmidt (adimensional)
P	presión atmosférica (kPa)
p_1, p_2	parametros del modelo de Page
p_v	presión de vapor del agua pura (kPa)
p_w	presión parcial del vapor de agua en el aire húmedo (kPa)
Q	calor de sorción del agua (J/kg agua)
q_1	parametro que define la curvatura del modelo de encogimiento (adimensional)
q	parametro que define la curvatura del modelo de encogimiento (adimensional)
R	transformación rígida
r	coordenada radial (m)
R_g	constante del gas ideal ($\text{m}^3 \cdot \text{kPa} / \text{kmol} / \text{K}$)

R	radio del sólido (m)
S	conjunto de coordenadas rectangulares
s	número real positivo
S, \bar{S}	ganancia de soluto: local y promedio, respectivamente (kg soluto/kg producto inicial)
T	temperatura en la cual se desea evaluar la propiedad ($^{\circ}\text{C}$)
\mathbf{T}	conjunto de objetivo de puntos (estático)
T_K	temperatura absoluta (K)
T_f	temperatura de película ($^{\circ}\text{C}$)
T_r	temperatura reducida (adimensional)
T_{∞}	temperatura del aire de secado ($^{\circ}\text{C}$)
T_{cw}	temperatura crítica del agua (K)
T_{iK}	temperatura en la interfase (K)
T	temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
t	tiempo (s)
u	coordenada ortogonal arbitraria
U	función que depende de las coordenadas espaciales
v_{∞}	velocidad del aire de secado (m/s)
v	volumen húmedo del aire de secado (m^3 aire húmedo/kg aire seco)
V	volumen del producto (m^3)
W, \bar{W}	pérdida de agua: local y promedio, respectivamente (kg agua/kg producto inicial)

x, y, z	coordenadas rectangulares (m)
x_{in}, x_{out}	eje semi-mayor: interno y externo, respectivamente (m)
X	humedad del producto (base seca) (kg agua/kg sólidos)
x	variable auxiliar
$P(x)$	polinomio de primer orden
Y	humedad en base húmeda del alimento (kg agua/kg producto)
z_{in}, z_{out}	eje semi-menor: interno y externo, respectivamente (m)

Letras griegas

α, β	variables auxiliares en la ecuación de difusión (adimensional)
χ	relación de ξ_{in} a ξ_{out}
Δ	parámetro relacionado con el grado final de encogimiento (adimensional)
δ	variable modificada para evaluar la contracción
η	desviación relativa promedio de la humedad (%)
Γ	función gamma incompleta superior
κ	tamaño del foco de la elipse normalizado (adimensional)
λ	constante de separación y valor propio de la solución
λ_1, A_1	pendiente asintótica de la solución: original y transformada, respectivamente
μ	potencial químico (J/mol)
μ_∞	viscosidad de la fase continua (Pa·s)

∇^2	laplaciano
ω	función auxiliar para describir la contracción del sólido
ϕ	humedad relativa (fracción)
ψ, Ψ	en secado, humedad adimensional; en deshidratación osmótica, pérdida de agua o ganancia de soluto adimensional: local y promedio, respectivamente
ρ	densidad del producto (kg producto/m ³ producto)
ρ_∞	densidad de la fase continua (kg/m ³)
τ	número de Fourier de transferencia de masa (adimensional)
Θ	función de separación que depende únicamente del tiempo
ς	variable que denota una respuesta arbitraria
ϑ	número de Fourier modificado de transferencia de masa (adimensional)
Υ	concentración adimensional de agua
ξ, θ, ϕ	coordenadas esféricas
ζ	coordenada adimensional en la dirección radial
φ	variable dependiente de la posición y/o el tiempo
Subíndices	
0	al inicio del proceso
<i>a</i>	aire seco
<i>ALR</i>	refiere al ajuste de línea recta empleando la geometría generada con el método PSR

<i>c</i>	para punto crítico
<i>CE</i>	refiere al ajuste de regresión no lineal empleando la geometría de corona esférica
<i>e</i>	en el equilibrio
<i>i</i>	en la interfase
<i>MP</i>	refiere al enfoque del método de pendientes
<i>p</i>	para el producto
<i>RNL</i>	refiere al ajuste de regresión no lineal empleando la geometría generada con el método PSR
<i>RpP</i>	refiere al enfoque de regresión por partes
<i>s</i>	soluto
<i>t</i>	en un momento determinado
<i>w</i>	para el agua
exp	experimental
mod	modelo
<i>g</i>	comportamiento de gas ideal
<i>in</i>	interno
<i>min</i>	mínimo
<i>n</i>	número finito de términos sucesivos
<i>out</i>	externo
Superíndices	
°	estado de referencia

Introducción

La deshidratación es una de las operaciones unitarias más empleadas en la conservación de productos con alto contenido de humedad. En la mayoría de los procesos industriales, la deshidratación se lleva a cabo por una o más de las siguientes razones: retardar reacciones indeseables, reducir el costo de envasado, mejorar las cualidades sensoriales, entre otras. La reducción del contenido de agua en el proceso de deshidratación involucra la transferencia simultánea de masa y/o energía entre el producto y el medio de remoción de humedad. El movimiento del agua puede deberse a diversos mecanismos; sin embargo, se reconoce a la difusión interna de humedad como el fenómeno dominante del proceso. Por lo tanto, la difusividad del agua es un parámetro importante para el diseño y simulación de los procesos de deshidratación, ya que es fundamental para determinar la velocidad a la que se elimina el agua de los alimentos sólidos. A pesar de esto, no existe un método estandarizado para su determinación que considere los diversos fenómenos presentes en el sólido durante su procesamiento.

La mayoría de los métodos para estimar los coeficientes de difusión utilizan geometrías simples para describir la forma del sólido (placa plana, paralelepípedo, cilindro circular finito o infinito y esfera) y aplican soluciones analíticas para las ecuaciones de transporte de masa y/o calor considerando una difusividad constante en un sólido rígido, entre otros supuestos (como la concentración de sólidos constante), que en general dan lugar a estimaciones poco fiables. Estas consideraciones pueden conducir a la sobreestimación o subestimación de las propiedades de transporte. Sin embargo, emplear una geometría diferente a las tradicionales, así como considerar el encogimiento dificultan la solución de los modelos al requerir soluciones semi-analíticas o numéricas, por lo cual los trabajos a partir de geometrías no tradicionales y secciones de éstas que además consideren el cambio del tamaño del alimento son escasos.

En este proyecto se desarrollan y validan varias metodologías analítico-numéricas para mejorar la estimación de las propiedades de transporte de masa usando geometrías derivadas de sistemas coordenados ortogonales. En la primera etapa, se analiza

el efecto del encogimiento en la difusividad, proponiéndose un método simple para evaluar propiedades de transporte de masa en sólidos que se encogen y probándose con datos experimentales de secado de yuca (55, 70 y 85°C). El proyecto continuó con el uso del registro de conjuntos de puntos como un enfoque novedoso para generar la geometría de sólidos con forma compleja durante la modelación del transporte de masa en procesos de deshidratación. Este nuevo procedimiento tiene como objetivo reducir el efecto de la discrepancia geométrica durante la estimación de los coeficientes de difusión. El método se valida con datos experimentales de púleos de champiñón (*Agaricus bisporus*) procesado por deshidratación osmótica. Además, se propone a la redondez como índice de forma para evaluar la discrepancia geométrica entre la muestra real y el modelo. En la tercera etapa del proyecto se generaliza el método de pendientes para permitir la estimación de coeficientes de difusión variables en sólidos de forma compleja que presentan encogimiento y en ausencia de una solución analítica a la ecuación de transporte de masa. Este método se aplica a datos experimentales de secado de púleos de champiñón fresco y pretratado (25 % NaCl por 180 min). Los resultados generados por el método de pendientes se comparan con los valores estimados utilizando un enfoque de regresión por partes, el cual considera una difusividad constante por intervalos en un modelo con encogimiento no uniforme. Finalmente, se analiza el efecto de varias consideraciones de modelación en la estimación de coeficientes de difusión durante el proceso de secado.

1. Antecedentes

1.1. Deshidratación

No se sabe con exactitud cuando comenzó la conservación de los alimentos por deshidratación, pero la historia muestra que nuestros antepasados aprendieron a secar alimentos a prueba y error. El primer registro con el que se cuenta es la deshidratación de hortalizas en el siglo XVIII. Por lo tanto, se atribuye que el desarrollo de esta industria inicialmente estuvo estrechamente relacionado con los escenarios de guerra alrededor del mundo. Las tropas británicas en la Guerra de Crimea (1854-1856) recibieron verduras secas, y alrededor de 4500 toneladas de verduras deshidratadas se enviaron desde los Estados Unidos durante la Primera Guerra Mundial en 1919, entre los productos procesados se encontraban frijoles, repollo, zanahorias, apio, papas, espinacas, maíz, nabos y mezclas de sopa. La deshidratación de frutas en los Estados Unidos dio un giro significativo, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con el desarrollo de los secadores artificiales que reemplazaron los secadores solares (Barbosa-Cánovas & Vega-Mercado, 2010; Ateeque et al., 2014; Sabarez, 2016). Actualmente, la deshidratación es esencial en diversas industrias como la química, agrícola, biotecnológica, alimentaria, de polímeros, cerámica, farmacéutica, minera y maderera, y se puede lograr por medio de varias tecnologías, como liofilización, deshidratación osmótica, secado por microondas, secado convectivo entre otras tecnologías (Tabla 1.1) (Mujumdar, 2006; Ruiz-López et al., 2008b; Ruiz-López et al., 2013; Dehghannya et al., 2015; Seremet et al., 2016; Zielinska & Michalska, 2016; Sandoval-Torres et al., 2017). En las próximas secciones se presentarán con mayor detalle las técnicas de deshidratación que se emplean en este proyecto.

Tabla 1.1. Resumen de técnicas para lograr la deshidratación de productos.

Técnica	Características	Productos	Ventajas	Desventajas
Deshidratación solar	Se extrae el agua de los alimentos usando la energía proveniente de la radiación solar para la evaporación del agua.	Frutas, carnes, pescado, vegetales.	Simple y bajo costo. Conservación durante meses o años. Diversifica el consumo de alimentos y condimentos.	Requiere espacios amplios y largos tiempos de secado. Los alimentos son propensos a contaminación microbiana y daño por condiciones ambientales.
Deshidratación osmótica	Se sumerge el producto en una solución con alta presión osmótica. La eliminación del agua ocurre sin su evaporación. Se incorporan sólidos en el producto.	Carnes, vegetales y frutas.	Sirve para productos de humedad intermedia, es de bajo costo y evita pérdidas de aroma.	Sólo es aplicable a productos con estructura sólida. El nivel de reducción del contenido de agua no es suficiente para impedir la proliferación microbiana.
Secado convectivo	Se emplea aire caliente o vapor sobrecalentado como fuente de energía para la evaporación del agua.	Vegetales y frutas.	Existe en operación continua. Indicado para lograr humedades finales muy bajas.	Exige grandes cantidades de gas de secado. El producto debe ser termoresistente.
Liofilización	Se congela el producto y luego se reduce la presión circundante para que el agua congelada se sublime.	En frutas, café instantáneo, y fármacos.	No restringe el tamaño de partícula. Emplea bajas temperaturas.	Lento y costoso.

Tabla 1.1. Resumen de técnicas para lograr la deshidratación de productos (continuación).

Técnica	Características	Productos	Ventajas	Desventajas
Secado en lecho fluidizado	La superficie de cada partícula es expuesta para su secado al suspenderla en un flujo de aire.	Leche, levaduras, enzimas, y vegetales pequeños.	Operación por lotes, secado uniforme, y rápido.	Se limita a partículas pequeñas.
Ahumado	El producto se somete a una fuente de humo caliente proveniente de fuegos realizados de maderas de poco nivel de resina.	Carnes y pescado.	Imparte sabor.	El proceso es lento.
Deshidratación por microondas y secado dieléctrico	Emplean un espectro de energía electromagnética en el rango de 300-300000 MHz (microondas) y entre 1-100 MHz (dieléctrico).	Pastas, galletas y cereales.	Baja temperatura y operación continua o por lotes.	Lento y costoso. Algunas áreas del alimento pueden quemarse.
Secado por aspersión	Consiste en la producción de polvos de alta dispersión a partir de un fluido.	Lácteos, fármacos, jabones, te instantáneo, café, etc.	Ofrece control de la densidad, tamaño y contenido de humedad del polvo.	Se requiere cierta concentración de sólidos en la alimentación o incrementarlos mediante la adición de un agente externo.

Tabla 1.1. Resumen de técnicas para lograr la deshidratación de productos (continuación).

Técnica	Características	Productos	Ventajas	Desventajas
Secado en rodillos	El producto se suministra en estado líquido a uno o dos cilindros huecos de acero inoxidable. A través de la superficie de contacto entre estos y el producto se transfiere calor.	Líquidos con una alta viscosidad o alimentos en forma de puré.	Bajo consumo de energía. Puede secar alimentos muy viscosos.	No se puede procesar alimentos salados o con alto contenido de azúcar.

1.2. Secado convectivo

1.2.1. Generalidades

El secado constituye la tecnología de conservación más antigua y utilizada para preservar productos con alto contenido de humedad, especialmente frutas y vegetales, los cuales se consideran parte de una dieta saludable por su contenido de componentes fenólicos y capacidad antioxidante (Sabarez, 2016). El secado reduce la cantidad de humedad en la matriz sólida por debajo del 5 % en peso de los alimentos, ya que así se enlentece o inhibe la actividad microbiana, la actividad enzimática y las reacciones químicas indeseables (Sabarez, 2016; Castro et al., 2018).

Existen alrededor de 400 tipos de secadores, pero el secador de túnel o secador directo es el más utilizado. El secador de túnel consiste en una cámara cerrada de calentamiento, donde un ventilador permite el paso de aire caliente sobre el producto, el cual se coloca en bandejas (móviles o fijas) hasta que el contenido de agua disminuya a un valor deseado (Figura 1.1) (Cohen & Yang, 1995; Mujumdar, 2006). El aire circulante se precalienta mediante un quemador de gas o resistencias eléctricas. Los

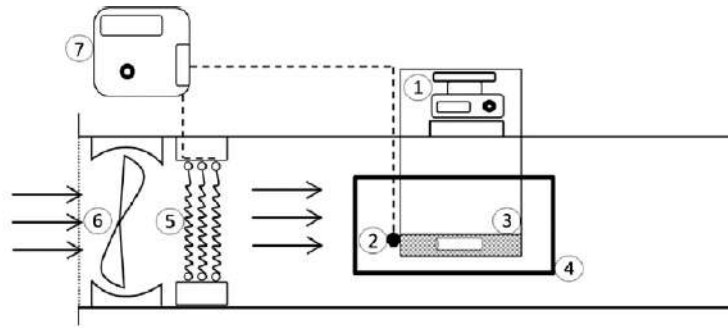


Figura 1.1. Diagrama esquemático de un secador de túnel mostrando sus componentes. (1) balanza digital, (2) termopar, (3) bandeja, (4) puerta lateral, (5) resistencia eléctrica, (6) ventilador de flujo axial y (7) panel de control (Pacheco-Aguirre et al., 2014).

secadores de túnel pueden operar en contraflujo, flujo paralelo y flujo mixto. En contraflujo, el aire de secado se introduce en un extremo del túnel mientras las bandejas que contienen a los alimentos ingresan por el extremo opuesto. En la configuración de flujo en paralelo las bandejas y el aire de secado ingresan por el mismo extremo del túnel. Finalmente, en el flujo mixto se combinan las dos técnicas anteriores según los requerimientos del producto. La configuración de contraflujo es la más eficiente para la eliminación de agua.

En la actualidad, un desafío importante para el proceso de secado es reducir el contenido de agua de manera eficiente con un mínimo impacto en el medio ambiente. Los problemas para lograr este objetivo son diversos por las diferentes propiedades físicas y/o químicas de los productos, las escalas de producción y las especificaciones de calidad, por lo cual el modelado representa una opción de bajo costo económico para su estudio (Mujumdar, 2006; Sabarez, 2016).

1.2.2. Mecanismos del secado convectivo

A inicios del siglo XX, Sherwood (1929a) estableció que una de las principales problemáticas en el secado de sólidos era saber con exactitud cómo viaja el agua a través del material hasta la superficie, dónde y cómo tiene lugar realmente la evaporación y cómo estos factores influyen en la distribución de la humedad a través

del sólido, la temperatura del material y la velocidad de evaporación bajo diferentes condiciones del aire de secado (temperatura, humedad y velocidad). Con la finalidad de resolver estas interrogantes, definió cuatro casos posibles en los que podría ocurrir la pérdida de agua en un sólido por el mecanismo de difusión. En estos casos consideró que las condiciones de secado del aire (temperatura, humedad y velocidad) son constantes, que el calor latente de evaporación del agua es recibido por el sólido directamente del aire por convección, y que el calor recibido por el sólido por radiación es insignificante. Los casos son los siguientes:

1. La difusión de líquido desde el interior hasta la superficie del sólido, seguida de la vaporización del líquido en la superficie y difusión del vapor a los alrededores. La resistencia a la difusión interna de líquido es pequeña en comparación con la resistencia a la eliminación del vapor en la superficie.
2. La difusión de líquido desde el interior hasta la superficie del sólido, seguida de la vaporización del líquido en la superficie y difusión del vapor a los alrededores. La resistencia a la difusión interna de líquido es grande en comparación con la resistencia a la eliminación del vapor en la superficie.
3. Vaporización del líquido en puntos dentro de la estructura sólida, seguida de la difusión del vapor de agua a través del sólido poroso hasta la superficie y de allí al aire. La resistencia a la difusión interna de líquido es pequeña en comparación con la resistencia total a la eliminación del vapor.
4. Vaporización del líquido en puntos dentro de la estructura sólida, seguida de la difusión del vapor de agua a través del sólido poroso hasta la superficie y de allí al aire. La resistencia a la difusión interna de líquido es grande en comparación con la resistencia total a la eliminación del vapor.

El secado de un material no está necesariamente restringido a uno de estos casos, ya que el mecanismo puede cambiar de un caso a otro a medida que avanza el proceso de secado. Sherwood (1929a) analizó el segundo caso donde el secado se controla por la difusión interna del líquido a la superficie, con resistencia despreciable a la

remoción del vapor, concluyendo que las variables que afectan la difusión interna del líquido afectarán la velocidad de secado en el mismo grado, y las leyes que gobiernan la difusión interna del líquido se pueden aplicar al proceso de secado.

El supuesto de una resistencia superficial despreciable a la difusión de vapor corresponde a una concentración de agua libre insignificante en la superficie del sólido, ya que el gradiente de humedad no es necesario para hacer que el agua se difunda a través de la película de aire en la superficie. Sherwood (1929a) planteó que la concentración de humedad a lo largo del espesor de una placa plana puede representarse gráficamente como en la Figura 1.2, que muestra la sección transversal de una placa, cuando el secado tiene lugar desde la superficie AC y BD . En esta figura, la línea AB representa el gradiente de concentración inicial y la línea CD corresponde al gradiente final (contenido de agua en equilibrio). Los gradientes de humedad durante el secado pueden ser lineales desde la superficie a la línea del centro, como en las líneas EC y ED . La pendiente de la curva del gradiente es proporcional a la velocidad de difusión del agua en cualquier punto, y debe descender desde la superficie hasta la línea central y aproximarse a cero en el centro. Por lo tanto, las curvas de gradiente reales son de la naturaleza de la curva CFD .

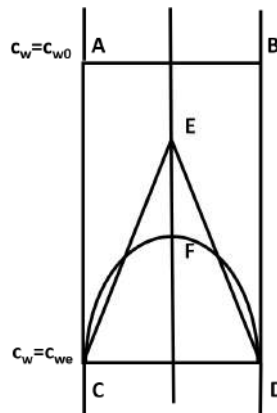


Figura 1.2. Representación de los perfiles de concentración de humedad en una placa plana. Adaptado de Sherwood (1929a).

En términos de cálculo, Sherwood (1929a) empleó la ley de difusión de Newton en una placa infinita para describir la evolución de los gradientes de concentración de agua en el material:

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

En esa época, ya existía la solución analítica a la Ecuación (1.1) para su análogo de conducción o difusión de calor, la cual podría aplicarse al secado de sólidos bajo las consideraciones: (a) la ley de Newton de difusión es válida para describir el proceso de secado, (b) el coeficiente de difusión es constante, (c) la concentración de líquido es uniforme en el sólido al inicio del proceso, (d) la difusión ocurre de forma normal a la superficie del plano y (e) la evaporación toma lugar en la superficie y la resistencia a la difusión de vapor es despreciable (esto es, la concentración de líquido en la superficie alcanza su valor de equilibrio inmediatamente después de empezar el secado).

Sherwood (1929a) propuso que los diagramas existentes para la solución de la ecuación de conducción o difusión de calor (diagramas de Gurney-Lurie) bajo resistencia superficial externa despreciable podrían ser usados para representar la solución de la Ecuación (1.1) debido a su forma análoga, eliminando los cálculos tediosos o un conocimiento íntimo de las matemáticas involucradas. Sherwood (1929a) demostró que la evolución de la distribución de humedad durante el secado de madera, arcilla y jabón seguían el modelo propuesto.

En la actualidad, se considera que en un proceso de secado convectivo la humedad del sólido se elimina por mecanismos que involucran la transferencia simultánea de energía y masa (Mujumdar, 2006; Ateeque et al., 2014; Sabarez, 2016; Brasiello et al., 2017; Sandoval-Torres et al., 2017; Sappati et al., 2017; López-Méndez et al., 2018). La transferencia de energía se da en forma de calor, el cual es suministrado por convección desde los alrededores a la superficie del producto, a través de aire caliente o algún otro gas. Mientras que la transferencia de masa implica la eliminación del líquido contenido por el sólido, seguida de la eliminación del vapor de agua en una corriente de aire. El proceso de secado de un producto se puede describir como una serie de pasos en los que la velocidad de secado juega un papel clave. La Figura 1.3 muestra el comportamiento típico de la velocidad de secado para condiciones de secado constantes. El punto *A* representa la velocidad de secado inicial en un material

frío. Esta velocidad aumenta a medida que se calienta el producto (punto *B*) hasta que el sólido alcanza una condición de temperatura de equilibrio en su superficie. El período entre los puntos *A* y *B* usualmente es corto.

La sección de la curva *B* a *C*, se conoce como período de velocidad constante, y representa la eliminación del agua no ligada del producto. En esta etapa, el agua actúa como si el sólido no estuviera presente. La superficie del producto es muy húmeda al inicio y la actividad de agua es aproximadamente igual a uno. La velocidad de secado está determinada por la tasa de difusión del vapor de agua a través de la película de aire superficial hacia el cuerpo principal del aire. Como las condiciones externas de temperatura, humedad y velocidad del aire afectan el espesor de esta película, éstas influyen directamente en la velocidad de secado de este periodo (Sherwood, 1929b; Geankoplis, 1998). Cabe destacar que si el calor necesario para la vaporización se suministra únicamente por conducción a través de la misma película del gas superficial, la temperatura de la superficie del sólido es aproximadamente igual a la temperatura de bulbo húmedo. Pero si el calor se suministra de otras formas, como por radiación, o conducción desde las superficies secas contiguas del sólido, la temperatura de la superficie podría ser más alta que la temperatura de bulbo húmedo y la velocidad de secado aumentaría (Sherwood, 1929b). El período de velocidad constante continúa mientras el agua en la superficie sea repuesta desde el interior del producto tan rápido como se evapora.

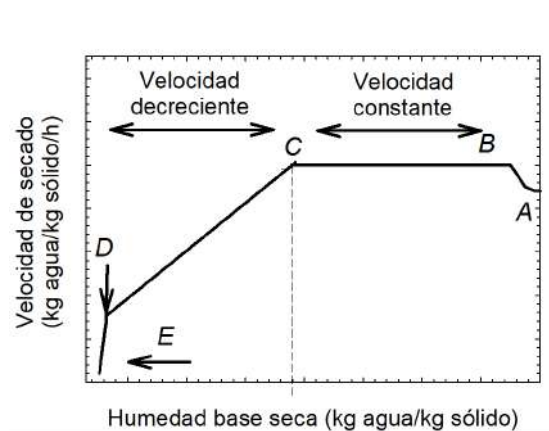


Figura 1.3. Curva modelo de velocidad de secado contra el contenido de humedad.

El período de velocidad decreciente se alcanza cuando no hay suficiente agua en la superficie para mantener la actividad de agua igual a uno. La velocidad de secado se rige por la velocidad a la que el flujo interno de líquido alcanza la superficie del producto. El inicio de esta etapa se representa por C en la Figura 1.3 (contenido de líquido crítico). A su vez, el periodo de velocidad decreciente se puede dividir en dos etapas. Una primera etapa ocurre cuando la humedad en la superficie disminuye continuamente hasta que la superficie se seca (punto D), y el segundo período comienza en el punto D cuando la superficie está completamente seca. La cantidad de agua que se remueve en esta etapa suele ser relativamente pequeña, mientras que el período de tiempo suele ser largo (Barbosa-Cánovas & Vega-Mercado, 2010; Saha et al., 2018). A menos que el aire sea absolutamente seco, el sólido siempre retendrá una cierta cantidad de líquido incluso después de un tiempo infinito de secado. Cabe mencionar que, en la mayoría de los casos, no existe una clara diferencia entre las etapas de secado y la velocidad a la que ocurre el proceso está limitada por la difusión interna del agua en el interior del sólido (Sherwood, 1929ab). Por otra parte, si el contenido del líquido inicial es menor que el crítico, entonces no aparece ningún período de velocidad constante, como ocurre con ciertos materiales de secado lento, y la difusión interna del líquido es el mecanismo controlante desde el inicio (Sherwood, 1929ab; Sherwood, 1932).

Sherwood (1932) planteó que una ecuación desarrollada para el supuesto de una distribución uniforme de la humedad en el sólido al principio del proceso de secado no se puede aplicar al período de velocidad decreciente, incluso aunque la difusión interna del líquido sea el mecanismo dominante, si este periodo sigue un periodo de velocidad constante, aunque sea breve. La Figura 1.4 representa la sección transversal de una placa plana durante el período de velocidad constante. ABC representa el gradiente en cualquier instante y EDF el nuevo gradiente después de un período de tiempo finito. La pendiente de la curva de concentración es cero en la línea central. Además, dado que la velocidad de secado es constante, las pendientes en A , E , C y F son iguales. Ahora el área $ABCDEF$ representa la humedad pérdida y, dado que la velocidad de secado es constante, las áreas entre las curvas de concentración

sucesivas, correspondientes a intervalos de tiempo iguales, serán las mismas. Los puntos altos en las curvas de gradiente tenderán a desaparecer rápidamente porque la velocidad de pérdida de humedad en tales puntos también será muy grande. Las curvas de gradiente se acercarán claramente a una forma definida, después de lo cual las curvas sucesivas serán paralelas. La curva de gradiente de humedad se aproxima a una forma parabólica, sin importar cuál haya sido la distribución de humedad inicial después de secar una placa plana infinita durante un período de tiempo a una velocidad constante. Así que, en este caso, Sherwood (1932) propone una solución alternativa a la ecuación de difusión (1.1) suponiendo que la distribución inicial de humedad sigue un perfil parabólico a partir de que se alcanza el punto crítico.

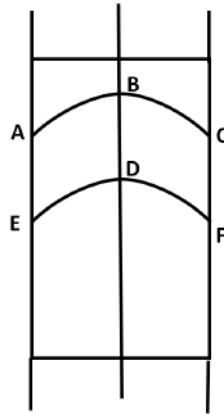


Figura 1.4. Representación de los perfiles de concentración de humedad en una placa plana en el periodo de velocidad constante. Adaptado de Sherwood (1932).

1.2.3. Representación matemática del secado convectivo

Desde un punto de vista científico y tecnológico modelar el secado convectivo es esencial para poder estudiar, diseñar y controlar el proceso bajo una amplia gama de condiciones y predecir la influencia de éstas en las características del producto final (Di Matteo et al., 2003; Ruiz-López et al., 2008b; Ruiz-López et al., 2013; Cursio & Aversa, 2014; Dehghannya et al., 2015; Sabarez, 2016; Seremet et al., 2016; Zielinska & Michalska, 2016; Brasiello et al., 2017; Sandoval-Torres et al., 2017). El movimiento de la humedad dentro del material está en función de la naturaleza

física, la temperatura y el contenido de humedad del producto. Se han formulado varios mecanismos para explicar la transferencia del agua en un sólido durante el secado, entre los cuales destacan los siguientes (Sherwood, 1929aa; Mujumdar, 2006; Srikiatden & Roberts, 2007; Ateeque et al., 2014; Sabarez, 2017):

1. Fuerzas capilares.
2. Difusión líquida debido a los gradientes de concentración, si el producto húmedo está a una temperatura inferior al punto de ebullición del líquido.
3. Difusión de vapor en poros ocupados por aire, si el líquido se vaporiza dentro del material.
4. Difusión de Knudsen, si el secado tiene lugar a temperaturas y presiones muy bajas, por ejemplo, en liofilización.
5. Fluido por gradiente de presión, y fluido por vaporización-condensación.
6. Diferencias de presión hidrostática, cuando la velocidad de vaporización interna supera la velocidad de transporte de vapor a través del sólido a los alrededores.
7. Una combinación de los mecanismos anteriores.

Estos mecanismos pueden ocurrir simultáneamente durante el secado; por lo tanto, es muy difícil aislar sus contribuciones individuales y la difusión del agua líquida es aceptada generalmente como el mecanismo dominante para la transferencia de masa durante el secado de alimentos sólidos (Xing-jun et al., 2016; Chen et al., 2020). En este caso, la velocidad de secado se describe por una difusividad efectiva o aparente que agrupa todos los mecanismos de transporte de masa utilizando la segunda Ley de Fick (Sandoval-Torres et al., 2017; Garbalinska et al., 2018; Wei et al., 2020). Por lo tanto, las ecuaciones de difusión y conducción en estado no estacionario se pueden usar para representar el transporte de masa (difusión de humedad) y calor (conducción de energía) en el interior de un producto. Estas dos leyes representadas en un sistema coordenado general en un material homogéneo e isotrópico se expresan como (Pavón-Melendez et al., 2002; Hernandez-Díaz et al., 2008; Brasiello et al., 2013;

Cursio & Aversa, 2014; García-Alvarado et al., 2014; Aprajeeta et al., 2015; Pacheco-Aguirre et al., 2015; Defraeye, 2017; Sandoval-Torres et al., 2017; Saha et al., 2018; Cevoli et al., 2019; Paul et al., 2019; Das et al., 2020; Khan et al., 2020):

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_w)] \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial (\rho C_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla (T)] \quad (1.3)$$

donde c_w es la concentración volumétrica de agua en la fase sólida (kg agua/m³ producto), C_p es el calor específico (J/kg/°C), D es la difusividad efectiva del agua en el alimento (m²/s), k es la conductividad térmica (W/m/s), t es el tiempo (s), T es la temperatura del producto (°C), y ρ es la densidad del producto (kg producto/m³ producto).

La solución de las Ecuaciones (1.2) y (1.3) generalmente involucra las siguientes condiciones de frontera (Ruiz-López et al., 2011):

$$\frac{h_m}{v} (H_i - H) = -D \nabla (c_{wi}) \quad (1.4)$$

$$h_h (T_i - T_\infty) = -k \nabla (T_i) + Q D \nabla (c_{wi}) \quad (1.5)$$

donde h_m es el coeficiente de transferencia de masa externo (m/s), h_h es el coeficiente de transferencia externo de energía (W/m²/°C), H humedad absoluta del aire (kg agua/kg aire seco); Q es el calor de sorción del agua (J/kg), T_∞ es la temperatura del aire (°C), v es el volumen húmedo del aire (m³ aire húmedo/kg aire seco) y el subíndice i representa la interfase aire-sólido. La Ecuación (1.4) expresa el hecho de que el flujo de agua que llega a la interfase desde el interior del sólido por difusión es igual al flujo de agua que deja la superficie por evaporación hacia la corriente del aire de secado. La Ecuación (1.5) establece que el flujo de energía que se transfiere por convección desde el aire hacia la superficie se divide en el flujo de energía transferido hacia el interior del sólido por conducción y la cantidad de energía requerida para evaporar el agua que alcanza la superficie. En ambos casos, se considera que la interfase no acumula ni masa ni energía.

1.2.4. Métodos de estimación de la difusividad

La estimación adecuada de la difusividad del agua en un producto es fundamental para un diseño, control y análisis preciso del secado de alimentos y otras operaciones relacionadas tales como el almacenamiento (Xingjun & Ping, 2016; Mohammadi et al., 2019). Los procesos de secado diseñados y operados de manera inadecuada podrían tener un efecto perjudicial en cuestiones relacionadas con la calidad de los alimentos, incluida la fisura de granos (Xing-jun et al., 2016), la degradación de compuestos bioactivos (Tran et al., 2020), el encogimiento y deformación excesiva (López-Méndez et al., 2018; González-Pérez et al., 2019b), el desarrollo de pardeamiento (Winiczenko et al., 2018) y la recontaminación microbiana causante del desarrollo de metabolitos tóxicos (Bradford et al., 2018).

La difusividad del agua se puede estimar mediante diferentes enfoques como los métodos de regresión (ajuste) (Chen et al., 2009; Chen et al., 2020), resolviendo una solución analítica existente para la transferencia de masa (Ramachandran et al., 2018) o por el método de pendientes, el cual se basa en la comparación de las pendientes de las curvas de secado experimentales y teóricas (Karathanos et al., 1990). Los métodos de ajuste incluyen el enfoque de regresión lineal, donde el coeficiente de difusión se estima a partir de la pendiente de una gráfica semilogarítmica de la concentración de agua adimensional *versus* el tiempo de secado. Este método es muy utilizado cuando la ecuación de transferencia de masa tiene una solución analítica como han ejemplificado algunos autores (Xing-jun et al., 2016; Xingjun & Ping, 2016); sin embargo, también se puede aplicar mediante el uso de soluciones numéricas (Ruiz-López et al., 2013). Por otro lado, el enfoque de regresión no lineal para la estimación de la difusividad del agua se utiliza con mucha frecuencia cuando el modelo de secado carece de una solución analítica e incluye supuestos como propiedades variables, proceso no isotérmico y contracción del producto (Chen et al., 2009; Lentzou et al., 2019); no obstante, el incremento del esfuerzo computacional requerido para obtener una solución iterativa del modelo de secado hace que el uso de métodos simples basados en soluciones analíticas sea el enfoque preferido para la estimación de la difusividad del agua. El método de regresión lineal produce inherentemente un único

valor de difusividad para el intervalo de datos de secado ajustados, mientras que el enfoque de regresión no lineal se puede usar para ajustar las ecuaciones de difusividad en función de la humedad y la temperatura (Chen et al., 2009); sin embargo, esta estrategia puede no ser adecuada ya que el modelo de difusividad elegido forzará un comportamiento predefinido y no validado de la difusividad, enmascarando el efecto de otros fenómenos no modelados.

Para sólidos que no cambian de tamaño, la solución de promedio volumétrico (Ψ) de la ecuación de difusión se expresa como función explícita del número de Fourier de transferencia de masa (τ), es decir, $\Psi = f(\tau)$ (Crank, 1975), donde

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} \quad (1.6)$$

$$\tau = \frac{Dt}{L^2} \quad (1.7)$$

La derivada de Ψ con respecto a τ se puede combinar con la Ecuación (1.7) para producir

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{L^2}{D} \frac{d\Psi}{dt} \quad (1.8)$$

De la Ecuación (1.8), la difusividad del agua se puede estimar como

$$D = \frac{L^2 (d\Psi/dt)_{\text{experimental}}}{(d\Psi/d\tau)_{\text{teórico}}} \quad (1.9)$$

donde el termino $d\Psi/dt$ se evalúa a partir de datos experimentales, mientras que la expresión $d\Psi/d\tau$ se determina a partir de la solución analítica (Karathanos et al., 1990; Gómez-Cruz et al., 2020). La Ecuación (1.9) es la representación matemática del método de pendientes. El método de pendientes produce un valor de difusividad para cada punto experimental disponible en la curva de secado, como resultado, este se puede utilizar para examinar la dependencia de la difusividad del agua sobre otras variables de procesamiento (por ejemplo, contenido de humedad) sin considerar un comportamiento predefinido (Ortiz-García-Carrasco et al., 2015; Dotto et al., 2017; Gómez-Cruz et al., 2020). Este método también produce valores de difusividad

comparables a los obtenidos por regresión no lineal utilizando la solución numérica de un modelo detallado de secado (Karathanos et al., 1990; Ruiz-López et al., 2012).

La mayoría de los alimentos experimentan cambios visibles fácilmente en las dimensiones del producto cuándo se secan, evento reconocido como uno de los fenómenos más importantes que afectan la estimación de la difusividad del agua (Koua et al., 2019; Lentzou et al., 2019). El método de pendientes no obstante se basa en una definición del número de Fourier que utiliza tanto difusividad como longitud característica para la difusión constante. Como resultado, la estimación de un comportamiento variable de la difusividad del agua viola un supuesto adoptado por el desarrollo del método. Además, algunos autores aplicaron la Ecuación (1.9) para estimar la difusividad del agua durante el secado de productos con cambio de tamaño al considerar la variabilidad de L con el secado (Pinto & Tobinaga, 2006; Batista et al., 2007). La base teórica para usar el método de pendientes en productos que cambian de tamaño con difusividad variable se proporcionó mediante la introducción de un número de Fourier modificado para transferencia de masa (Ruiz-López et al., 2012).

Una representación correcta de la forma del producto durante el modelo de secado es esencial para la estimación confiable de las propiedades de transferencia de masa (López-Méndez et al., 2018). Hasta ahora, el método de pendientes, solo se ha aplicado para estimar difusividades en sólidos de forma simple debido a las soluciones analíticas disponibles. Por lo tanto, surgen dos desafíos para aplicar el método de pendientes en alimentos con forma compleja: (1) una solución analítica para la transferencia de masa podría no estar disponible si la forma del producto no se puede representar completamente por una geometría simple y (2) la medición de las dimensiones de la muestra podría ser difícil de lograr, especialmente en productos que se contraen y deforman. El primer desafío se puede abordar desarrollando un protocolo mixto teórico numérico para eliminar la necesidad de una solución analítica mientras que el segundo desafío se puede manejar mediante el uso de técnicas de análisis de imagen (Ortiz-García-Carrasco et al., 2015).

1.3. Deshidratación osmótica

1.3.1. Generalidades

La deshidratación osmótica es una operación de contacto sólido-líquido que involucra la inmersión de productos alimenticios en soluciones hipertónicas (Pacheco-Angulo et al., 2016). Esta operación produce una deshidratación parcial del alimento con una absorción simultánea de soluto en el producto (da Silva Junior et al., 2017). Cuando el alimento se sumerge en la solución, un gradiente de presión osmótica se desarrolla entre las fases involucradas originando un período de transferencia de masa dinámico en el que el agua se remueve del alimento hacia el medio líquido con una ganancia simultánea de soluto por el producto (Khan et al., 2018). Si el procesamiento es realizado durante mucho tiempo, tanto la pérdida de agua y la ganancia de soluto alcanzan un estado estacionario, donde el potencial impulsor de la transferencia de masa entre el alimento y la solución se vuelve cero.

La selección del soluto para la solución osmótica se basa en tres factores principales: características sensoriales del producto; el costo y el peso molecular del soluto. Las soluciones hipertónicas más comunes que se utilizan para la deshidratación osmótica son soluciones concentradas de azúcares (sacarosa, glucosa, fructosa o maltodextrina), sales (por ejemplo, cloruro de sodio), alcoholes (glicerol o sorbitol) o combinaciones de éstos (Karam et al., 2016).

La pérdida de agua durante la deshidratación osmótica se puede dividir en dos períodos. El período inicial dura aproximadamente 2 horas con una velocidad de pérdida de agua alta. En el segundo período hay una disminución de la velocidad de pérdida de agua y tarda entre 2 y 6 horas. La temperatura y la concentración de la solución osmótica afectan la velocidad de pérdida de agua. En comparación con el secado convectivo o liofilización, la deshidratación osmótica requiere menos energía porque la eliminación del agua ocurre sin un cambio de fase (Barbosa-Cánovas & Vega-Mercado, 2010). El proceso ha recibido una atención considerable en los últimos años debido a sus aplicaciones para el desarrollo de productos con nuevas características sensoriales.

1.3.2. Fundamentos

La diferencia de potencial químico a través de una membrana semipermeable entre el producto y la solución osmótica es la fuerza impulsora para la transferencia de masa. La actividad del agua está relacionada con el potencial químico, μ , como

$$\mu = \mu^\circ + R_g T_K \ln a_w \quad (1.10)$$

donde μ° es el potencial químico de un estado de referencia, R_g es la constante del gas ideal, y T_K es la temperatura absoluta. La deshidratación osmótica continúa hasta que la actividad del agua tanto de la solución como del producto alcanzan el equilibrio. La Figura 1.5 representa un esquema del fenómeno de transporte de masa durante la deshidratación osmótica.

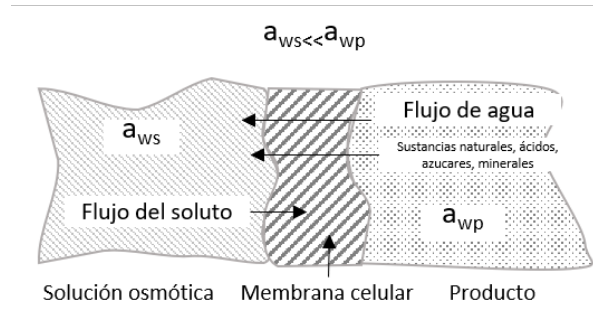


Figura 1.5. Representación de los flujos de transporte de masa durante el proceso de deshidratación osmótica (adaptado de Barbosa-Cánovas & Vega-Mercado, 2010).

Esta operación involucra varios mecanismos de transferencia de masa; sin embargo, la difusión del agua y el soluto dentro del producto son considerados generalmente los factores de control, con frecuencia descritos por la segunda ley de Fick (da Silva et al., 2013; da Silva et al., 2014). La transferencia de agua y soluto pueden ser estimadas por la segunda ley de Fick, como (para $j = w, s$)

$$\frac{\partial c_j}{\partial t} = \nabla \cdot [D_j \nabla (c_j)] \quad (1.11)$$

donde c representa la concentración de agua o soluto, D es el cociente de difusión

del agua o soluto y t es el tiempo. La Ecuación (1.11) generalmente involucra una condición de convectiva (Pacheco-Angulo et al., 2016):

$$h_m (C_{ji} - C_j) = -D_j \nabla (c_{ji}) \quad (1.12)$$

Además, se requiere una relación de equilibrio, $C_{ji} = f(c_{wi}, c_{si})$, que relacione las concentraciones de agua y soluto en ambos lados de la interfase sólido-solución.

La temperatura del proceso afecta notablemente la velocidad de ósmosis, ya que intensifica la eliminación de agua y la ganancia de sustancias osmóticas en el producto. Además, el efecto de la temperatura sobre la cinética osmótica depende del tipo de sustancia osmótica utilizada. La deshidratación osmótica sólo remueve el contenido de agua parcialmente, reduciéndolo en un orden del 30 % al 50 %, dependiendo de varios factores como la concentración, la temperatura, el medio osmótico, etc. En consecuencia, la deshidratación osmótica se utiliza como pretratamiento para algunos procesos, principalmente en el secado, donde puede contribuir a mejorar los atributos de calidad del producto final, por ejemplo, el color, sabor, retención de nutrientes, una buena apariencia, una suave textura y mayor capacidad de rehidratación, pero también induce varios cambios en los alimentos y el encogimiento del producto es uno de los más evidentes (Barbosa-Cánovas & Vega-Mercado, 2010; Karam et al., 2016). El efecto del encogimiento del producto en la simulación y estimación de las propiedades de transporte de masa es bien conocido. Sin embargo, a diferencia del secado, la contracción del producto a menudo se descuida durante el modelado y simulación de deshidratación osmótica como lo destacan varios autores (de Farias Aires et al., 2016; de Farias Aires et al., 2017). Además, todos los modelos de osmodeshidratación que incluyen la contracción han sido validados con geometrías simples (esferas, placas planas, cilindros, paralelepípedos) (da Silva et al., 2014; de Farias Aires et al., 2016; de Farias Aires et al., 2017; da Silva Junior et al., 2017). Por otro lado, los pocos estudios que han intentado representar la forma natural del producto al modelar procesos de deshidratación osmótica (Bordin et al., 2019), desprecian el encogimiento. Recientemente, González-Pérez et al. (2019a) emplearon la geometría de casco esférico durante el modelado de la deshidratación osmótica

de pñeos de champiñ3n. No obstante, la diferencia entre la forma real y modelo del producto modelo no se ha evaluado.

Adem3s de encogerse, los alimentos tambi3n pueden sufrir una deformaci3n considerable durante la deshidrataci3n osm3tica, como lo demostraron Mayor et al. (2011), lo que puede afectar tanto el atractivo visual como las caracter3sticas de envasado. Sin embargo, los estudios sobre la deformaci3n del producto durante la deshidrataci3n osm3tica son casi inexistentes. Informar los cambios morfom3tricos del producto tambi3n introduce un desaf3o adicional: ninguna muestra se encoge ni se deforma de la misma forma, incluso en los escenarios m3s controlados. Por tanto, el uso de datos de encogimiento-deformaci3n para simulaciones de procesos requiere la extracci3n de caracter3sticas comunes del comportamiento del producto. Ortiz-Garc3a-Carrasco et al. (2015) introdujeron una nueva metodolog3a de an3lisis de im3genes para estimar el encogimiento-deformaci3n simult3neo de alimentos durante el secado, con el objetivo de extraer informaci3n relevante tanto en los cambios dimensionales como de la forma del producto en las direcciones dominantes de transferencia de masa. Esta metodolog3a permiti3 evaluar el impacto de los cambios en la forma del producto en la estimaci3n de la difusividad del agua durante el secado convectivo y osmodeshidrataci3n. (L3pez-M3ndez et al., 2018; G3nzalez-P3rez et al., 2019a).

1.4. Cambios geom3tricos del producto

El agua presente en los alimentos causa tensiones en la estructura celular. Cuando 3sta se elimina por el proceso de deshidrataci3n, inicialmente los espacios intracelulares (poros) previamente ocupados por el agua se pueden reemplazar (por ejemplo, por aire o soluto ganado), pero a medida que contin3a el proceso, la pared de los poros experimenta un desbalance entre la presi3n interna y externa que se ve reflejado en una dr3stica reducci3n del tama3o (encogimiento) y en ocasiones en el cambio de la forma del producto (deformaci3n) (Aprajeeta et al., 2015). El encogimiento es un fen3meno muy com3n durante la deshidrataci3n de alimentos, donde algunos de ellos se contraen en m3s del 50 % de sus dimensiones originales, dependiendo la t3cnica de deshidrataci3n. De manera general el encogimiento provoca las siguien-

tes desventajas (Brasiello et al., 2013; Cursio & Aversa, 2014; Ortiz-García-Carrasco et al., 2015; Pacheco-Aguirre et al., 2015; Sandoval-Torres et al., 2017; Sappati et al., 2017; Brasiello et al., 2017; Nguyen et al., 2018; Adrover et al., 2019):

1. Variación de la porosidad y la microestructura.
2. Reducción del área superficial disponible para la evaporación.
3. Variación en la distancia requerida para el movimiento de las moléculas de agua.
4. Alteración de la velocidad del transporte de masa.
5. Variación en los patrones de rehidratación.

En consecuencia, el fenómeno del encogimiento se ha reconocido como el principal factor que afecta la estimación de la difusividad del agua, parámetro importante que está relacionado directamente con el tiempo del proceso de secado (Udomkun et al., 2016; Sandoval-Torres et al., 2017; Koua et al., 2019). Los estudios sobre el comportamiento del proceso de deshidratación muestran que no considerar el encogimiento da como resultado una sobreestimación de los valores de difusividad (Bon et al., 1997; Gastón et al., 2002; Senadeera et al., 2003; Gastón et al., 2004; Togrul & Ispir, 2007; Ruiz-López et al., 2008a; Sabarez, 2012; Avhad & Marchetti, 2016; Kim et al., 2016; Sandoval-Torres et al., 2017; Sappati et al., 2017; Khan et al., 2018; Saha et al., 2018). Así que, se ha reconocido que el efecto de la contracción no puede ser ignorado para establecer simulaciones precisas de las curvas de secado y estimar valores confiables de las propiedades de transporte de masa.

El encogimiento se puede estimar por medición directa de las dimensiones del producto; por técnicas de desplazamiento; a partir de imágenes digitales que involucran el área proyectada y su perímetro correspondiente; así como evaluando índices secundarios tales como elongación, dimensión fractal, redondez, etc. (Yan et al., 2008; García-Pérez et al., 2012; Cursio & Aversa, 2014; Udomkun et al., 2016). En cualquier caso, los cambios dimensionales son agrupados en una sola variable, por ejemplo, grosor o volumen, y son relacionados con el contenido de humedad del alimento

usando diferentes modelos. Debido a esto, la mayoría de los autores han considerado la contracción del producto en sus modelos utilizando funciones lineales del contenido de humedad (de Lima et al., 2002; Ruiz-López et al., 2004; Souraki et al., 2014; Aprajeeta et al., 2015; Saha et al., 2018; Koua et al., 2019).

Algunas otras metodologías son descritas a continuación. Ortiz-García-Carrasco et al. (2015) propusieron una nueva metodología basada en el análisis de imágenes para estimar la reducción simultánea de tamaño (encogimiento) y el cambio de forma (deformación) durante el secado de alimentos, utilizando tiras de papa como sistema modelo. Esta metodología fue posteriormente aplicada por Pacheco-Aguirre et al. (2015) para el desarrollo de un nuevo enfoque para resolver la ecuación de transferencia de masa en estado no estacionario en una malla deformable y modelar el encogimiento-deformación simultáneo del producto en la simulación de secado. Udomkun et al. (2016) evaluaron la viabilidad del método de visión por computadora en combinación con el análisis de dispersión óptica de la luz a 650 nm para predecir la contracción de láminas de papaya durante el secado. Sandoval-Torres et al. (2017) propusieron un modelo adimensional que incluye el encogimiento para simular cinéticas de secado y temperatura en una dimensión considerando el teorema de Leibnitz-Reynolds. Sappati et al. (2017) emplearon un algoritmo de análisis de imagen para estudiar el efecto del encogimiento durante el secado de alga marina cultivada con azúcar. Brasiello et al. (2017) evaluaron la velocidad de contracción como una función proporcional al gradiente del contenido de agua y validaron con cilindros de berenjena. Recientemente, López-Méndez et al. (2018) aplicaron análisis de imagen a sistemas modelo de gel para obtener el modelo de deshidratación considerando simultáneamente el encogimiento y deformación. No obstante, las desviaciones de los valores predichos con respecto a los datos experimentales aun se pueden observar en algunos de estos modelos, principalmente a niveles bajos de humedad ($\Psi < 0.1$) cuando prácticamente ha terminado la contracción (Ruiz-López et al., 2004). Por lo tanto, las desviaciones entre los datos predichos y experimentales en esta etapa no se puede explicar solamente por la contracción, pudiendo existir otros fenómenos que aun no han sido completamente entendidos e implementados. Actualmente, aun

se realizan esfuerzos para desarrollar una herramienta fácil que permita considerar el encogimiento y modelar el proceso de deshidratación eficazmente Sandoval-Torres et al. (2017).

Además de considerar el encogimiento, la estimación confiable de las propiedades de transporte de masa durante el proceso de secado requiere una representación correcta de la forma del producto durante el modelado y la simulación de la operación (López-Méndez et al., 2018); sin embargo, hoy en día, las soluciones analíticas aún se utilizan para la estimación de las propiedades de transporte de masa en productos alimenticios. Aquí, el producto se describe mediante métricas simples como el grosor, la longitud o el radio usando formas simples como paralelepípedos, esferas o cilindros. Sin embargo, estas geometrías no pueden describir la forma del producto completamente en todos los casos. Una posible solución para superar este problema es mapear las dimensiones para alimentos de forma compleja en geometrías más simples. Por ejemplo, Sareban & Souraki (2016) describieron la forma irregular del apio durante su deshidratación osmótica a partir de un paralelepípedo o cilindro usando dimensiones equivalentes para estimar coeficientes de difusión considerando la anisotropía del producto.

La discrepancia geométrica (la diferencia entre la forma real del producto y la utilizada en la simulación del transporte de masa) es conocida por tener un efecto importante en la estimación de los coeficientes de difusión y la descripción del proceso (Bon et al., 1997; González-Pérez et al., 2019a). Por ejemplo, la discrepancia geométrica tiene un efecto importante en la predicción de problemas relacionados con la calidad durante el secado, como es la fisuración del arroz (Prakash & Pan, 2012). De este modo, algunos autores han intentado modelar el transporte de masa utilizando varios enfoques para crear geometrías que representan de forma precisa la forma del producto, los cuales se dividen en tres categorías principales. El primer enfoque, y el más usado, representa la forma del producto a partir de geometrías simples menos exploradas (enteras o secciones). Este enfoque se ha utilizado para describir el transporte de masa y calor durante el secado de productos como café, arroz y trigo considerados como esferoides (Fabri et al., 2011; Prakash & Pan, 2012;

Santos et al., 2018; Wu et al., 2018) o la deshidratación osmótica de púños de champiñón considerados como coronas esféricas (González-Pérez et al., 2019a). El segundo enfoque combina formas simples para representar la forma del producto. Por ejemplo, Bordin et al. (2019) modelaron la difusión de NaCl y KCl durante la impregnación de champiñones precocidos, donde la geometría se creó fusionando la mitad de una esfera (para el púño) con un cilindro (para el estúpito). El último enfoque implica la adquisición de la forma real del producto con metodologías o equipos especiales. Aquí, la geometría se puede adquirir con un escáner 3D (Fabri et al., 2011; Baldino et al., 2017) o a partir de su reconstrucción mediante análisis de imagen de fotografías tradicionales (da Silva et al., 2014; López-Méndez et al., 2018). Sin embargo, incluso si la forma que se utiliza en el modelo de transporte de masa se selecciona para exhibir una cercana similitud con el producto que representa, la discrepancia geométrica puede surgir durante el proceso causada por la deformación del producto (Almeida et al., 2017; Wang et al., 2017; López-Méndez et al., 2018). Además, la mayoría de los estudios utilizan la geometría para una sola muestra en simulaciones, que no puede ser representativa de un gran grupo de muestras especialmente en productos con forma compleja y deformación.

El método de alineación de puntos (*point matching*) o registro de conjuntos de puntos (*point set registration*, PSR) es el proceso de calcular una transformación espacial que alinea de manera óptima dos pares de conjuntos de puntos (Hosseinbor et al., 2017; Maiseli et al., 2017). El método PSR sirve como un paso importante para fusionar múltiples conjuntos de datos en un modelo más preciso (referencia) y tiene varias aplicaciones como el reconocimiento óptico de caracteres, estimación de posición, análisis de imágenes médicas (alinear datos de resonancia magnética e imágenes de tomografías), modelado de formas y detección de características (Maiseli et al., 2017). De esta forma, el método de registro de conjuntos de puntos se podría emplear para reducir la desigualdad entre la forma geométrica del producto real y la aproximada durante la modelación de procesos de deshidratación de productos con forma compleja y que cambian de tamaño.

1.5. Métodos de solución

Dependiendo de las consideraciones del modelado, las ecuaciones diferenciales de transferencia de masa y/o calor en estado no estacionario (1.2) (1.3) pueden ser resueltas analítica o numéricamente. Las soluciones analíticas se encuentran disponibles para la Ecuación (1.2) en estado no estacionario bajo las siguientes consideraciones primordiales: (1) considerar despreciable el encogimiento del material, (2) considerar constante a la concentración volumétrica de sólidos y producto, (3) proceso isotérmico y (4) emplear geometrías donde la transferencia de masa se reduce a una dimensión (por ejemplo, en placa plana, en cilindro circular infinito, y en esfera) o donde el principio de superposición es aplicable (por ejemplo, en el paralelepípedo y en el cilindro circular finito) (Ruiz-López et al., 2012). Estas soluciones se pueden emplear para obtener coeficientes de difusión constantes del ajuste a datos experimentales. Una solución numérica de las ecuaciones de transporte de masa y/o calor permite el uso de propiedades constantes o variables del producto y la inclusión del encogimiento en los cálculos. Este enfoque se utiliza muy a menudo con fines de simulación, donde la difusividad del agua es determinada de estudios previos o de soluciones simplificadas. Sin embargo, se prefiere el uso de modelos analíticos para predecir la difusividad debido a varias ventajas prácticas, como una implementación más sencilla y menor esfuerzo computacional. Además, Ruiz-López et al. (2004) mostraron que, aún cuando la longitud característica de difusión cambia de tamaño durante el secado, es posible aplicar una solución analítica y considerar una difusividad promedio para reproducir aceptablemente la evolución de la humedad.

La solución de un modelo de deshidratación requiere una representación geométrica y a su vez del uso de uno o más sistemas coordenados. Un sistema coordenado es una herramienta para especificar inequívocamente la posición de puntos o de cualquier otro elemento geométrico usando coordenadas (Keane, 2002). Las coordenadas curvilíneas son un sistema coordenado en el espacio Euclidiano en el cual las líneas coordenadas pueden ser curvas. Si todas las intersecciones de estas líneas forman ángulos rectos, las coordenadas curvilíneas forman un sistema de coordenadas ortogonales. Si no, forman un sistema de coordenadas oblicuas.

La Tabla 1.2 muestra un resumen de los sistemas coordinados comúnmente empleados para modelar la transferencia de masa y calor durante la deshidratación de alimentos. Las bases generales de la solución analítica y numérica de los modelos de deshidratación se describen en la próxima sección.

Tabla 1.2. Características de los modelos usados para describir procesos de deshidratación de sólidos.

Sistema ¹	Producto	Geometría	Solución ²	Proceso ³	Referencia
E	Tomate	Medio - esferoide, 3D	N/CE	DO/TM	Zecchi & Gerla (2020)
R	Pescado	Rebanadas, 1D	A/SE	DO/TM	Semenoglou et al. (2020)
EP	Manzana	Esferoide alargado, 3D	A-N/SE	DO/TM	Aguirre-García et al. (2020)
R	Azufaifo	Placa, 1D	A/CE	SBC/TM	Hou et al. (2020)
R	Plátano	Rebanadas, 1D	A/CE	SC/TM	Takougnadi et al. (2020)
E	Higo	Esfera, 2D	N/CE	SC/TM	Lentzou et al. (2019)
R	Papa	Placa, 1D	A-N/CE	SC/TM	Adrover et al. (2019)
E	Champiñón	Medio casco esférico, 2D	N/CE	DO/TM	González-Pérez et al. (2019)
R	Ajo	Rebanadas, 1D	N/CE	SC/TM	Tao et al. (2018)

¹E: esférico; EO: esferoidal oblato (achatado); EP: esferoidal prolato (alargado); R: rectangular. ²A: analítica; N: numérica; CE: con encogimiento; SE: sin encogimiento. ³DO: deshidratación osmótica; SC: secado convectivo; SBC: secado con bomba de calor; SV: secado al vacío; TM: transporte de masa; TMC: transporte de masa y calor.

Tabla 1.2. Características de los modelos usados para describir procesos de deshidratación de sólidos (continuación).

Sistema ¹	Producto	Geometría	Solución ²	Proceso ³	Referencia
R	Limón	Placas	A/CE	SV/TM	Wang et al. (2018)
R	Pera	Paralelepípedo, 3D	N/CE	SC/TM	Proietti et al. (2018)
R	Champiñón	Fusión de medio esferoide y cilindro, 2D	N/SE	SC/TMC	Choudhary et al. (2018)
C	Berenjena	Cilindro, 1D	N/CE	SC/TM	Brasiello et al. (2017)
R	Alga	Placa, 1D	A/CE	SC/TM	Sappati et al. (2017)
R	Papa	Placa, 1D	N/CE	SC/TMC	Sandoval-Torres et al. (2017)
R	Manzana	Cubos, placa Rebanada, media rebanada, 3D	N/SE	SC/TMC	Defraeye (2017)
E	Fresa	Esfera, 1D	A-N/SC/CE	SC/TM	Amami et al. (2017)
E	Higo	Esfera, 1D	A-N/CE	DO/TM	Sahin & Öztürk (2016)
E	Soya	Esfera, 2D	A-N/SE	H/TM	Nicolin et al. (2016)
R	Manzana	Rebanadas, 1D	A/SE	DO/TM	Simpson et al. (2015)

¹C: cilíndrico; E: esférico; R: rectangular. ²A: analítica; N: numérica; CE: con encogimiento; SE: sin encogimiento. ³DO: deshidratación osmótica; H: Hidratación; SC: secado convectivo; TM: transporte de masa.

Tabla 1.2. Características de los modelos usados para describir procesos de deshidratación de sólidos (continuación).

Sistema ¹	Producto	Geometría	Solución ²	Proceso ³	Referencia
R	Papa	Prisma cuadrado, 2D	N/CE	SC, TM	Pacheco-Aguirre et al. (2015)
R	Cocos	Paralelepípedo, 3D	A/SE	SC/TM	da Silva et al. (2014)
R	Zanahoria	Rebanadas, 1D	A/SE	SC/TMC	García-Alvarado et al. (2014)
E	Arroz	Esfera, 1D	N/SE	DO/TM	Briffaz et al. (2014)
R	Arroz	Esfera, esferoide, elipsoide, 3D	N/SE	SC/TM	Prakash & Pan (2012)
C	Ejote	Cilindro/1D	A/SE	DO/TM	Souraki et al. (2012)
R	Ciruelas pasa	Elipsoide, 2D	N/CE	SC/TMC	Sabarez (2012)
R	Arroz	Esferoide, 3D	N/SE	SC/TM	Prakash et al. (2011)
R	-	Casco esférico, 2D	A-N/SE	SC/TMC	Ruiz-López et al. (2011)
CNO	Frijol chino, arroz	Esfera, cilindro 2D	N/SE	SC/TM	da Silva et al. (2009)
EP	Arroz	Esferoide alargado, 2D	N/SE	SC, TM	Igathinathane et al. (2008)
EP	Granos de café verde	Medio esferoide alargado, 3D	N/SE	SC/TMC	Hernandez-Díaz et al. (2008)

¹C: cilíndrico; CNO: curvilíneo no ortogonal; E: esférico; R: rectangular. ²A: analítica; N: numérica; CE: con encogimiento; SE: sin encogimiento. ³DO: deshidratación osmótica; SC: secado convectivo; TM: transporte de masa; TMC: transporte de masa y calor.

Tabla 1.2. Características de los modelos usados para describir procesos de deshidratación de sólidos (continuación).

Sistema ¹	Producto	Geometría	Solución ²	Proceso ³	Referencia
E	Albaricoque	Media esfera, 2D	N/SE	SC/TM	Bon et al. (2007)
R	Calabaza moscada	Rebanadas, 1D	A/CE	DO/SC/TM	García et al. (2007)
EO	Lentejas	Esferoide achatado, 2D	N/CE	SC/TM	do Carmo & de Lima (2005)
R	Trigo	Esfera, elipsoide, 2D	N/SE	SC/TM/TMC	Gastón et al. (2004)
E	Ciruela pasa	Casco esférico, 2D	A/SE	SC/TM	Di Matteo et al. (2003)
EP	Puntas de plátano	Esferoide alargado, 2D	N/CE	SC/TM	de Lima et al. (2002)
E	Papa	Media esfera, 2D	A-N/SE	SC/TM	Bon et al. (1997)

¹E: esférico; EO: esferoidal oblato (achatado); EP: esferoidal prolato (alargado); R: rectangular. ²A: analítica; N: numérica; CE: con encogimiento; SE: sin encogimiento. ³SC: secado convectivo; TM: transporte de masa; TMC: transporte de masa y calor.

1.5.1. Solución analítica

Una de las ecuaciones en derivadas parciales más sobresaliente en el campo de la ingeniería es la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U + \lambda^2 s^2 U = 0 \quad (1.13)$$

La solución analítica de la Ecuación (1.13) puede realizarse por varios métodos, pero la separación de variables es generalmente el más aplicado. El procedimiento de separación de variables consiste en:

1. Transformar la ecuación en derivadas parciales al sistema coordenado que se ajuste a la geometría del problema.
2. Separar la ecuación obtenida en el paso anterior en tres ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. Obtener la solución de estas ecuaciones diferenciales ordinarias.
4. Proponer una solución única que se ajuste a las condiciones de frontera, empleando las soluciones particulares obtenidas en el paso 3.

La mayor dificultad ocurre en los tres primeros pasos cuando las coordenadas son desconocidas, razón principal de la escasez de soluciones para esta ecuación en sistemas coordenados diferentes al rectangular, cilíndrico y esférico. La Ecuación (1.13) es separable en los siguientes sistemas coordenados (Moon & Spencer, 1961):

1. Sistemas cilíndricos.
 - a) Coordenadas rectangulares.
 - b) Coordenadas cilíndricas circulares.
 - c) Coordenadas cilíndricas elípticas.
 - d) Coordenadas cilíndricas parabólicas.
2. Sistemas rotacionales.
 - a) Coordenadas esféricas.
 - b) Coordenadas esferoidales alargadas.
 - c) Coordenadas esferoidales achatadas.
 - d) Coordenadas parabólicas.
3. Sistemas generales.
 - a) Coordenadas cónicas.
 - b) Coordenadas elipsoidales.
 - c) Coordenadas paraboloidales.

La ecuación de difusión

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = s^2 \nabla^2 \varphi \quad (1.14)$$

acepta una solución separable de la forma

$$\varphi = U(u_j) \Theta(t) \quad (1.15)$$

donde U es una función de las coordenadas espaciales y Θ es una función únicamente del tiempo. De esta forma, la ecuación de difusión (1.14) se puede separar en la ecuación de Helmholtz (1.13) y el componente temporal

$$\frac{d\Theta}{dt} + \lambda^2 s^2 \Theta = 0 \quad (1.16)$$

donde λ es la constante de separación. Bajo este enfoque, la solución de la ecuación de Helmholtz (1.13) depende de las variables espaciales y las condiciones de frontera, las cuales serán diferentes para cada problema. En cambio, la ecuación en el tiempo es independiente del sistema de coordenadas. Por lo tanto, la solución general de la ecuación de difusión (1.14) siempre es

$$\psi = U(u_1, u_2, u_3) \exp(-\lambda^2 s^2 t) \quad (1.17)$$

Por lo tanto, la solución analítica de cualquier problema difusivo o conductivo implica la solución de la ecuación de Helmholtz (Moon & Spencer, 1961). Las principales soluciones analíticas aplicadas para describir la deshidratación de sólidos unidimensionales fueron presentadas por Crank (1975), las cuales tienen la forma general:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (1.18)$$

Los coeficientes de las soluciones más comunes de la Ecuación (1.18) se presentan en la Tabla 1.3 (Crank, 1975; Yanniotis, 2008).

Tabla 1.3. Principales soluciones analíticas de transporte de masa unidimensional aplicadas a la deshidratación de sólidos.

Geometría	Frontera	A_n	λ_n
Placa	Equilibrio instantáneo	$\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}$	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$
Placa	Convectiva	$\frac{2Bi^2}{(\lambda_n^2 + Bi^2 + Bi)\lambda_n^2}$	$\lambda_n : \lambda_n \tan \lambda_n = Bi$
Cilindro infinito	Equilibrio instantáneo	$\frac{4}{\lambda_n^2}$	$\lambda_n : J_0(\lambda_n) = 0$
Cilindro infinito	Convectiva	$\frac{4Bi^2}{(\lambda_n^2 + Bi^2)\lambda_n^2}$	$\lambda_n : \lambda_n J_1(\lambda_n) = Bi J_0(\lambda_n)$
Esfera	Equilibrio instantáneo	$\frac{6}{\pi^2 n^2}$	πn
Esfera	Convectiva	$\frac{6Bi^2}{(\lambda_n^2 + Bi^2 - Bi)\lambda_n^2}$	$\lambda_n : \lambda \cot \lambda_n = 1 - Bi$

1.5.2. Solución numérica

La solución numérica de los modelos de deshidratación se puede lograr por varios métodos, que involucran esquemas de diferencias finitas (Pacheco-Aguirre et al., 2015; López-Méndez et al., 2018), elemento finito (Brasiello et al., 2017; Zecchi & Gerla, 2020) o volumen finito (da Silva Junior et al., 2017). En este proyecto se considera el método de líneas, el cual produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la ecuación en derivadas parciales original empleando principalmente esquemas de diferencias finitas para la discretización de las derivadas espaciales (Chapra & Canale, 2015; Pacheco-Aguirre et al., 2015). El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante se puede resolver mediante un método adecuado, como los métodos de Runge-Kutta o los métodos de Gear (Chapra & Canale, 2015).

Para ejemplificar la aplicación del método de líneas a la solución de una ecuación en derivadas parciales unidimensional de tipo parabólico se considerará la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial u} \left(\beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \text{ para } 0 \leq u \leq L \quad (1.19)$$

La aplicación de un esquema de diferencias finitas centradas para discretizar el lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = \alpha_j \frac{\left(\beta \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{j+\frac{1}{2}} - \left(\beta \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u} = \alpha_j \frac{\beta_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \varphi_{j+\frac{1}{2}}}{\partial u}\right) - \beta_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \varphi_{j-\frac{1}{2}}}{\partial u}\right)}{\Delta u} \quad (1.20)$$

donde

$$\beta_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{j\pm 1} + \beta_j}{2} \quad (1.21)$$

Esta ecuación se puede seguir discretizando aplicando recursivamente un esquema de diferencias finitas centradas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} &= \alpha_j \frac{\beta_{j+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\Delta u} - \beta_{j-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\Delta u}}{\Delta u} \\ &= \alpha_j \frac{\beta_{j+\frac{1}{2}} (\varphi_{j+1} - \varphi_j) - \beta_{j-\frac{1}{2}} (\varphi_j - \varphi_{j-1})}{(\Delta u)^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

La Ecuación (1.22) sólo puede aplicarse dentro del dominio del sistema, es decir, si el dominio se discretizó en n nodos, dicha ecuación sólo puede aplicarse para $j = 2, \dots, n - 1$. La aplicación de la Ecuación (1.22) a los nodos de la frontera ($j = 1$ y $j = n$) requiere conocer el valor de la variable física en los nodos fuera del dominio de la discretización ($j = 0$ y $j = n + 1$). Este problema se resuelve mediante la aplicación de la condición de frontera. Por ejemplo, si se considera una condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) de la forma (da Silva et al., 2009)

$$\varphi = c_1 \quad \text{en} \quad u = 0, L \quad (1.23)$$

entonces $\varphi_1 = c_1$ y $\varphi_n = c_1$. La condición de frontera implica que la variable física ya se conoce en los nodos $j = 1$ y $j = n$, por lo que no es necesario resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias en estos nodos. Las ecuaciones de los nodos $j = 2$ y $j = n - 1$ quedan entonces como

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \alpha_j \frac{\beta_{2+\frac{1}{2}} (\varphi_3 - \varphi_2) - \beta_{2-\frac{1}{2}} (\varphi_2 - c_1)}{(\Delta u)^2} \quad (1.24)$$

$$\frac{d\varphi_{n-1}}{dt} = \alpha_j \frac{\beta_{n-1+\frac{1}{2}} (c_1 - \varphi_{n-1}) - \beta_{n-1-\frac{1}{2}} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})}{(\Delta u)^2} \quad (1.25)$$

Cabe mencionar que la condición de frontera de primer tipo se usa en problemas con equilibrio instantáneo ($c_1 = 0$) (Bon et al., 1997; Pacheco-Aguirre et al., 2015).

Consideremos ahora la siguiente condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = c_1 \quad \text{en} \quad u = 0 \quad (1.26)$$

y una condición de frontera de Robin (o de tercer tipo)

$$c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} = c_3 u + c_4 \quad \text{en} \quad u = L \quad (1.27)$$

La aplicación del esquema de diferencias finitas centradas a las condiciones de frontera anteriores produce

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2\Delta u} = c_1 \quad (1.28)$$

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}}{2\Delta u} = \frac{c_3}{c_2} \varphi_n + \frac{c_4}{c_2} \quad (1.29)$$

Por lo tanto,

$$\varphi_0 = \varphi_2 - 2\Delta u c_1 \quad (1.30)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1} + 2\Delta u \frac{c_3}{c_2} \varphi_n + 2\Delta u \frac{c_4}{c_2} \quad (1.31)$$

Las ecuaciones de la variable física para los nodos ficticios fuera del dominio $j = 0$ y $j = n + 1$ se puede sustituir ahora en la Ecuación (1.22) para dar

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\beta_{1+\frac{1}{2}} (\varphi_2 - \varphi_1) - \beta_{1-\frac{1}{2}} (\varphi_1 - \varphi_2 - 2\Delta u c_1)}{(\Delta u)^2} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \alpha_n \frac{\beta_{n+\frac{1}{2}} \left(\left(2\frac{c_3}{c_2} \Delta u - 1 \right) \varphi_n + \varphi_{n-1} + 2\frac{c_4}{c_2} \Delta u \right) - \beta_{n-\frac{1}{2}} (\varphi_n - \varphi_{n-1})}{(\Delta u)^2} \quad (1.33)$$

A diferencia de la condición de frontera de primer tipo en estos casos si se resuelven

las ecuaciones diferenciales parciales en la frontera. En problemas de transferencia de masa y calor la condición de frontera de segundo tipo se emplea para representar una condición de simetría o frontera aislada ($c_1 = 0$), mientras que la frontera de tercer tipo se emplea para representar una frontera convectiva ($c_2 = 1$, c_2 es un número adimensional de Biot y $c_4 = 0$) (Pacheco-Angulo et al., 2016).

Si el producto se describe por una malla irregular o si la malla se deforma durante la simulación, entonces ya no es posible aplicar los esquemas de diferencias finitas tradicionales. Pacheco-Aguirre et al. (2015) y López-Méndez et al. (2018) presentaron una metodología para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales en geometrías irregulares deformables empleando el método de líneas donde se usa una modificación de las diferencias finitas para discretizar las derivadas espaciales del modelo de secado, considerando un dominio representado por nodos interconectados (malla estructurada) o con una distribución irregular. De acuerdo a las Ecuaciones (1.2)-(1.5) se deben estimar derivadas de primer y segundo orden en cada vértice para aplicar el método de líneas.

El enfoque numérico es usualmente usado para propósitos detallados de simulación, donde el coeficiente de difusión del agua es conocido de estudios previos o se estima a través de soluciones simplificadas, aunque varios estudios han demostrado que es factible estimar el coeficiente de difusión del agua iterativamente durante la solución numérica del modelo de difusión, incluso si algunas simplificaciones son hechas, tales como despreciar el transporte de calor (Karathanos et al., 1990; Batista et al., 2007; Pacheco-Aguirre et al., 2015; Garbalinska et al., 2018). Así, que gracias a las ventajas prácticas, fácil implementación y bajo esfuerzo computacional los modelos de deshidratación se suelen desarrollar utilizando geometrías simples incluso si se utiliza un enfoque analítico-numérico o numérico.

2. Justificación

El análisis del estado del arte permite determinar que la difusión del agua líquida, descrita por la segunda Ley de Fick, se acepta generalmente como el mecanismo dominante para la transferencia de masa durante la deshidratación de materiales sólidos, donde una difusividad efectiva o aparente agrupa todos los mecanismos coexistentes de transporte de humedad y determina su velocidad de eliminación. El modelo de secado difusivo suele ser acoplado con su similar de conducción de energía para describir el cambio en la temperatura interior del material. Actualmente, a pesar de los avances existentes en las áreas de cómputo y análisis numérico, la estimación de la difusividad del agua se sigue haciendo principalmente a través de la aplicación de soluciones analíticas que emplean consideraciones como (1) encogimiento despreciable del material, (2) propiedades constantes del producto, (3) proceso isotérmico y (4) aproximar la forma real del producto con geometrías simplificadas, sin haberse establecido, en algunos casos, su efecto en la determinación de esta propiedad. En geometrías básicas, la amplia aceptación de modelos analíticos para la estimación de coeficientes de difusión se debe principalmente a que se pueden implementar métodos simples basados en ajustes de línea recta o en la comparación de las pendientes de las curvas de secado experimentales y teóricas, evitando la necesidad de resolver iterativamente el modelo de secado, que involucra al menos una ecuación en derivadas parciales. De esta forma, el análisis del transporte de masa y calor en procesos de deshidratación es esencial para entender el papel de las consideraciones mencionadas anteriormente en la estimación de la difusividad del agua en materiales sólidos y así desarrollar nuevos métodos de fácil aplicación para su cálculo, siendo las principales motivaciones para el desarrollo de este proyecto.

3. Hipótesis y objetivos

3.1. Hipótesis

Es posible emplear enfoques mixtos analítico-numérico para desarrollar métodos simples de cálculo que describan el transporte de masa y energía en sólidos con geometrías derivadas de sistemas coordenados ortogonales.

3.2. Objetivo general

Analizar los fenómenos de transporte de masa y energía en sólidos con geometrías derivadas de sistemas coordenados ortogonales sujetos a procesos de deshidratación.

3.3. Objetivos específicos

1. Modelar y simular los mecanismos de transporte de materia y energía en estado no estacionario durante la deshidratación de sólidos con geometrías completas y de sección.
2. Desarrollar soluciones analíticas completas o parciales y/o soluciones analítico-numéricas simples a los problemas propuestos.
3. Establecer y validar métodos de cálculo de propiedades de transporte de masa y energía en las geometrías propuestas considerando el encogimiento del producto.

4. Teoría desarrollada

4.1. Método simple para estimar coeficientes de difusión en sólidos considerando su encogimiento

En esta parte del proyecto se propone el desarrollo de un método simple para estimar coeficientes de difusión durante el secado convectivo de productos que se encogen. Se puede obtener el siguiente el modelo de transferencia de masa a partir de las Ecuaciones (1.2)-(1.5) para un cilindro infinito homogéneo e isotrópico que se somete a secado convectivo bajo las consideraciones (i) temperatura constante del producto, (ii) propiedades del aire de secado constantes, (iii) concentración volumétrica de sólidos constante, (iv) transferencia de masa en una sola dimensión, (v) coeficiente de difusión constante y (vi) variación temporal de la longitud característica de difusión.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (4.1)$$

$$\psi = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} \quad (4.2)$$

$$\zeta = \frac{r}{R} \quad (4.3)$$

$$\vartheta = D \int_0^t \frac{dt}{[R(t)]^2} \quad (4.4)$$

donde ψ es la fracción de humedad libre, ζ es la coordenada adimensional, ϑ es un número de Fourier modificado para incluir el cambio en la longitud característica de difusión, D es la difusividad efectiva del agua en el alimento, r es la coordenada radial, R es el radio del cilindro, X es el contenido de humedad en base seca, t es el tiempo de secado, y los subíndices e y 0 denotan los estados de equilibrio e inicial, respectivamente. La Ecuación (4.1) posee la siguiente solución analítica bajo

la condición de frontera $\psi(\vartheta, \zeta = 1) = 0$ y condición inicial $\psi(\vartheta = 0, \zeta) = 1$:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 \vartheta) \quad (4.5)$$

donde λ_n satisface la ecuación $J_0(\lambda_n) = 0$ y J_0 es la función de Bessel de primera clase de orden cero. Para tiempos largos, la Ecuación (4.5) se simplifica a

$$\Psi = A_1 \exp[-\lambda_1^2 D f(t)] \quad (4.6)$$

o bien

$$\ln \Psi = \ln A_1 - \lambda_1^2 D f(t) \quad (4.7)$$

donde

$$f(t) = \int_0^t \frac{dt}{[R(t)]^2}$$

Por lo tanto, una gráfica de $\ln \Psi$ vs. $f(t)$ producirá una línea recta de cuya pendiente se puede estimar la difusividad. El método propuesto por Ruiz-López et al. (2012) está basado en un método de pendientes modificado cuya principal desventaja es tener que resolver (4.5) para calcular ϑ a partir de los valores experimentales de Ψ . Con la finalidad de eliminar esta desventaja se introduce el grupo adicional $\omega(t)$ el cual representa la fracción remanente del R inicial

$$\omega(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad (4.8)$$

Entonces,

$$\vartheta = \frac{D}{R_0^2} \int_0^t \frac{1}{[\omega(t)]^2} dt \quad (4.9)$$

Un modelo capaz de describir de forma empírica las cinéticas de secado es el modelo

de Page (Simpson et al., 2017)

$$\Psi = \exp(-p_1 t^{p_2}) \quad (4.10)$$

En cambio, el encogimiento del producto en términos de la fracción de humedad libre se representa de forma habitual como

$$\omega(\Psi) = \Delta + (1 - \Delta) \Psi^q \quad (4.11)$$

La combinación de las Ecuaciones (4.10) y (4.11) produce

$$\omega(t) = \Delta + (1 - \Delta) \exp(-p_1 t^{q_1}) \quad (4.12)$$

donde $q_1 = p_2 q$, $[\omega(t)]^2 = 1$ cuando $t = 0$ y $[\omega(t)]^2 = \Delta^2$ cuando $t \rightarrow \infty$. La forma de la curva se controla con el parámetro q_1 , mientras que Δ representa la fracción final remanente de R_0 . La sustitución de $\omega(t)$ en $f(t)$ produce

$$f(t) = \frac{1}{R_0^2} \int_0^t \frac{1}{[\omega(t)]^2} dt = \frac{1}{R_0^2} \int_0^t \frac{1}{[\Delta + (1 - \Delta) \exp(-p_1 t^{q_1})]^2} dt \quad (4.13)$$

Sin embargo, la Ecuación (4.12) dificulta la solución analítica de la integral de la Ecuación (4.13). Por lo tanto, es más fácil integrar una función sin denominador, es decir, en lugar de integrar $1/[\omega(t)]^2$ es más fácil integrar una función definida como su recíproco y relacionarla con algunos parámetros de la función original. En este caso, la ecuación propuesta es

$$\delta = \frac{1}{\omega(t)^2} = \frac{1}{\Delta^2} + \left(1 - \frac{1}{\Delta^2}\right) \exp(-k' t^{n'}) \quad (4.14)$$

donde $\delta = 1$ cuando $t = 0$ y $\delta = 1/\Delta^2$ cuando $t \rightarrow \infty$. Los parámetros Δ , k' y n' se relacionan con el grado final de encogimiento, la velocidad y forma de la curva, respectivamente. Estos parámetros se determinan por regresión no lineal a los datos experimentales de la cinética de encogimiento.

Por lo tanto, si se combinan las Ecuaciones (4.14) y (4.9) y se integra analíticamente

se obtiene la siguiente expresión para el número de Fourier modificado

$$\vartheta = Df(t) = \frac{D}{R_0^2 \Delta^2} \left\{ t + \frac{\Delta^2 - 1}{n' (k')^{1/n'}} \left[\Gamma \left(\frac{1}{n'}, 0 \right) - \Gamma \left(\frac{1}{n'}, t^{n'} k' \right) \right] \right\} \quad (4.15)$$

donde k' , n' y Δ son parámetros ajustables relacionados con la velocidad de encogimiento, forma de la curva de encogimiento y contracción máxima del producto; y $\Gamma(\cdot, \cdot)$ es la función gamma incompleta superior.

4.2. Estudio del efecto de la discrepancia geométrica en la estimación de los coeficientes de difusión

En esta parte del proyecto se propone el método de registro de conjunto de puntos como una técnica para generar una geometría óptima que represente la forma real de un sólido osmodeshidratado, y así evaluar el efecto de la discrepancia geométrica en la estimación de coeficientes de difusión. El modelo de transferencia de masa se formula en un sistema coordenado esferoidal achatado en dos dimensiones con la finalidad de representar la geometría de púlsos de champiñón. Además se formula un método simplificado para calcular coeficientes de difusión en sólidos con la geometría propuesta a partir de un ajuste de línea recta. Los resultados de esta sección ya han sido publicados (Estévez-Sánchez et al., 2020), y se pueden consultar en el apéndice.

4.2.1. Método de registro de conjunto de puntos

En productos con formas simples, la geometría se define completamente mediante el uso de métricas como la longitud, el ancho, la altura y el radio, todos ellos relativamente fáciles de medir. Sin embargo, el problema con los sólidos de forma compleja es que no hay una manera simple de estimar sus características. Por lo tanto, en este proyecto se propone el método de registro de conjunto de puntos para extraer los parámetros geométricos que proporcionan la máxima coincidencia entre el conjunto de puntos que define la forma real del producto y la generada por el sistema coordenado seleccionado con la finalidad de minimizar el error por discrepancia geométrica.

El método de alineación de puntos (*point matching*) o registro de conjuntos de puntos (*point set registration*, PSR) se emplea para calcular una transformación espacial que alinea de manera óptima dos pares de conjuntos de puntos (Hosseinbor et al., 2017; Maiseli et al., 2017). El método PSR sirve como un paso importante para fusionar múltiples conjuntos de datos en un modelo más preciso (de referencia) y tiene varias aplicaciones como el reconocimiento óptico de caracteres, la estimación de posturas, el análisis de imágenes médicas (alineación de datos de resonancia magnética e imágenes tomográficas), el modelado de formas y la detección de características (Maiseli et al., 2017).

El método PSR compara dos entradas: un conjunto objetivo de puntos (estático) \mathbf{T} , que representa el modelo de referencia, y un conjunto de puntos fuente (en movimiento) \mathbf{M} , que incluye los puntos de datos que se van a alinear con \mathbf{T} . Las coordenadas de cada conjunto de puntos se denotan como

$$\mathbf{m}_j = (x_j, y_j) \in \mathbf{M} \text{ para } j = 1, \dots, N_M \quad (4.16)$$

$$\mathbf{t}_k = (x_k, y_k) \in \mathbf{T} \text{ para } k = 1, \dots, N_T \quad (4.17)$$

El método PSR comienza con la identificación de pares de puntos correspondientes entre \mathbf{T} y \mathbf{M} . Existen $N_M N_T$ pares coincidentes. Entonces \mathbf{M} se transforma en otro conjunto de puntos \mathbf{M}' , el cual se compara con \mathbf{T} utilizando un índice de similitud adecuado. El propósito de la comparación es encontrar la mejor alineación posible entre \mathbf{T} y \mathbf{M}' . Aunque existen varios algoritmos para implementar este método, el más utilizado es el punto iterado más cercano (*iterated closest point*, ICP) (Maiseli et al., 2017). Este algoritmo consiste en los siguientes pasos:

1. Para cada par de puntos $\mathbf{m}_j \in \mathbf{M}$ (para $j = 1, \dots, N_M$) se encuentra el punto más cercano $\mathbf{t}_k \in \mathbf{T}$ (para $k = 1, \dots, N_T$).
2. Se determina una transformación rígida \mathbf{R} (una transformación que conserva longitudes como reflexión, traslación y rotación), minimizando el cuadrado de la distancia Euclidiana entre los pares de puntos más cercanos $(\mathbf{m}_j, \mathbf{t}_k)$ (para $j = 1, \dots, N_M$ y $k = 1, \dots, N_T$).

3. Se aplica la transformación \mathbf{R} a todos los puntos en \mathbf{M} para obtener \mathbf{M}' .
4. Se hace $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ y se repiten los pasos 1-3.

Este algoritmo considera que ambos conjuntos \mathbf{M} y \mathbf{T} se definen al inicio de la operación y la transformación \mathbf{R} es rígida.

Consideremos que \mathbf{E} es el conjunto de puntos igualmente espaciados del contorno experimental ($N_{\mathbf{E}}$), mientras que \mathbf{G} representa el conjunto de puntos que contiene a la geometría basada en el sistema coordenado seleccionado. En este caso, \mathbf{G} no está definido sino que depende de los parámetros que delimitan la geometría (la transformación para alinear \mathbf{G} a \mathbf{E} no es rígida). Por lo tanto, se modificó el algoritmo ICP usando el siguiente método recursivo:

1. Se construye \mathbf{G} con $N_{\mathbf{G}} = N_{\mathbf{E}}$ puntos igualmente espaciados usando una estimación inicial de los parámetros geométricos.
2. Se aplica el algoritmo ICP para determinar el ángulo de rotación y desplazamiento horizontal y vertical que proporcionan la mejor alineación entre $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{G}$ (\mathbf{G} se fija en el espacio mientras \mathbf{E} se mueve).
3. Se aplica el algoritmo ICP para determinar los parámetros geométricos que proporcionan la mejor alineación entre $\mathbf{M} = \mathbf{G}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{E}$ (\mathbf{E} se fija en el espacio mientras \mathbf{G} se mueve).
4. Se repiten los pasos 2 y 3.

4.2.2. Modelo de transporte de masa en el sistema coordenado esferoidal achatado

Las coordenadas del sistema esferoidal achatado (ξ, θ, ϕ) permiten delimitar una geometría similar a los púleos de champiñón. En este sistema, $\xi \in [0, \infty)$ define una serie de elipses confocales centradas en el origen, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ representa el ángulo asintótico de las hipérbolas confocales simétricas alrededor del eje x , y $\phi \in [0, 2\pi)$ es la coordenada angular de los planos que giran alrededor del eje z . Adicionalmente, el

parámetro a define los focos de la elipse sobre el eje x . Las coordenadas del sistema coordenado esferoidal achatado (ξ, θ) se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, z) empleando:

$$x = a \cosh \xi \cos \theta \quad (4.18)$$

$$z = a \sinh \xi \sin \theta \quad (4.19)$$

La forma geométrica del píleo se puede generar al revolucionar un plano $\xi\theta$ ($\phi = 0$) alrededor del eje z , delimitado por $\xi = \xi_{in}, \xi_{out}$ y $\theta = \theta_{min}$, (Figura 4.1). El tamaño de la geometría obtenida se ajusta con el parámetro a . Si $\theta = 0$ y $\xi = \xi_{out}$, entonces $x = x_{out} = a \cosh \xi_{out}$; por otra parte, si $\theta = \pi/2$ y $\xi = \xi_{out}$ entonces $z = z_{out} = a \sinh \xi_{out}$. Expresiones similares se obtienen para los semiejes interiores reemplazando ξ_{out} por ξ_{in} . La elipticidad del producto está relacionada con la proporción alto a ancho como

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{z_{out}}{x_{out}}\right)^2} = \sqrt{1 - \tanh^2 \xi_{out}} \quad (4.20)$$

donde la geometría se aplana cuando $e \rightarrow 1$ ($\xi_{out} \rightarrow 0$) y se hace esférica si $e \rightarrow 0$ ($\xi_{out} \rightarrow \infty$) (e toma valores de 1, 0.887, 0.648, 0.425, 0.266 y 0.999 si ξ_{out} es 0, 0.5, 1, 1.5, 2 y 3, respectivamente).

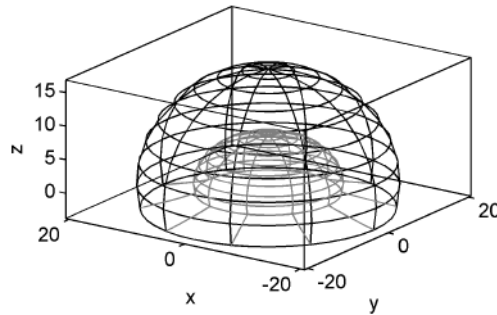


Figura 4.1. Ejemplo de una geometría generada en el sistema coordenado esferoidal achatado (la figura se creó con $\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$, $\theta_{min} = -0.224$ rad y $a = 0.797$).

El modelo de transferencia de masa se desarrolló bajo las siguientes consideracio-

nes:

1. La forma del producto se puede aproximar por la sección apropiada de un esferoide achatado con transferencia de masa en las direcciones ξ y θ (la transferencia de masa en la dirección ϕ se puede despreciar debido a la forma simétrica del producto alrededor del eje z).
2. El agua y el soluto son las únicas sustancias que se transfieren entre el producto y la solución osmótica.
3. La transferencia de masa dentro del producto se puede representar mediante un mecanismo de difusión basado en la segunda ley de Fick.
4. Los coeficientes de difusión no cambian durante el proceso.
5. La resistencia externa a la transferencia de masa es despreciable en la superficie del producto debido al sistema de agitación.
6. Las sustancias que se difunden tienen una distribución uniforme en el producto al comienzo del proceso.
7. El medio osmótico tiene una concentración constante.
8. El proceso es isotérmico.

Por lo tanto, el modelo de deshidratación osmótica bajo las consideraciones anteriores se puede escribir como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{\kappa^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left[\frac{1}{\cosh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cosh \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4.21)$$

$$\psi = 0 \text{ en } \xi = \xi_{out} \text{ y } \theta_{min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.22)$$

$$\psi = 0 \text{ en } \theta = \theta_{in} \text{ y } \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{out} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ y } \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{out} \quad (4.24)$$

$$\psi = 1 - \frac{W(\xi, \theta)}{W_e} \text{ ó } \psi = 1 - \frac{S(\xi, \theta)}{S_e} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{a}{a_0} \\ \tau &= \frac{Dt}{a_0^2}\end{aligned}\tag{4.26}$$

donde ψ es la concentración adimensional de agua ó soluto, κ es el tamaño del foco de la elipse normalizado (adimensional), τ es el número de Fourier de transferencia de masa (adimensional), D es la difusividad efectiva (m^2/s), y t es el tiempo (s).

4.2.3. Método simplificado para estimar coeficientes de difusión en la geometría propuesta

La solución de la ecuación de difusión para cualquier sistema coordenado ortogonal separable simple, como el sistema coordenado esferoidal achatado, es siempre (Moon & Spencer, 1961)

$$\psi(u_1, u_2, u_3, \tau) = U(u_1, u_2, u_3) \exp(-\lambda^2 \tau)\tag{4.27}$$

donde λ debe satisfacer la ecuación que resulta de aplicar las condiciones de frontera correspondientes. Por lo tanto, es de esperar que una solución promedio tenga la forma general

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\infty} A_{mno} \exp(-\lambda_{mno}^2 \tau)\tag{4.28}$$

Si se trunca la serie de la Ecuación (4.28) después del primer término y el resultado se combina con la Ecuación (4.26), el resultado en forma logarítmica es

$$\ln \Psi = \ln A_1 - \frac{\lambda_1^2 D}{a_0^2} t\tag{4.29}$$

El subíndice esperado 111 en la Ecuación (4.29) se reemplazó por 1 para indicar que es el primer valor de la serie. Por lo tanto, el coeficiente de difusión puede ser estimado a partir de la pendiente en la gráfica de $\ln \Psi$ vs. t . El valor de λ_1^2 , en ausencia de una función generadora de valores propios que surja de la solución analítica del problema actual, se puede estimar como la pendiente de la porción recta de la gráfica

de $\ln \Psi$ vs. τ , obtenida de la solución numérica. Esta pendiente satisface los límites $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ cuando $e \rightarrow 0$ y $\lambda_1^2 \rightarrow \infty$ cuando $e \rightarrow 1$ (cuando la forma del producto tiende a una placa plana). En estos casos, tanto la solución numérica del modelo de difusión como la evaluación de la pendiente son propensas a errores. Una solución a este problema es redefinir el número de Fourier para la transferencia de masa durante las simulaciones utilizando una nueva longitud para la difusión. La nueva longitud característica para la difusión es

$$L = \frac{z_{out} - z_{in}}{2} = \frac{a (\sinh \xi_{out} - \sinh \xi_{in})}{2} \quad (4.30)$$

La pendiente modificada Λ_1^2 de la porción de línea recta de la gráfica de $\ln \Psi$ vs. τ (donde $\tau = Dt/L^2$) se relaciona con la pendiente original λ_1^2 por

$$\lambda_1^2 = \frac{4\Lambda_1^2}{[\sinh(\xi_{out}) - \sinh(\xi_{in})]^2} \quad (4.31)$$

Los coeficientes de difusión se pueden estimar una vez conocido λ_1^2 . Finalmente, el efecto del encogimiento del producto en la estimación del coeficiente de difusión se puede incluir considerando el valor apropiado para a_0 .

4.3. Generalización del método de pendientes para estimar coeficientes de difusión en productos de forma compleja con encogimiento

En esta etapa se generaliza al método de pendientes para permitir la estimación de coeficientes de difusión variables en sólidos de forma compleja que cambian de tamaño y en ausencia de una solución analítica a la ecuación de transporte de masa. El modelo de transferencia de masa por difusión en estado no estacionario en un sólido homogéneo e isotrópico se escribe como las Ecuaciones (1.2) y (1.4):

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_s X)] \text{ en } V$$

$$-D\nabla(c_s X_i) = \frac{h_m}{v} (H_i - H) \text{ en } \mathcal{A}$$

donde X es el contenido de humedad local (base seca), X_i es el contenido de humedad local en la interfase sólido-aire (base seca), c_s es la concentración de sólidos, h_m es el coeficiente de transferencia de masa externa, H es la humedad absoluta del aire de secado, H_i es la humedad absoluta del aire de secado en la interfase sólido-aire, v es el volumen húmedo, D es la difusividad efectiva del agua en el alimento, V es el volumen del sólido y \mathcal{A} denota la superficie disponible para la transferencia de masa. La Ecuación (1.2) representa un caso de la ecuación general de difusión

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\nabla(\psi)] \text{ en } V \quad (4.32)$$

$$\nabla(\psi) = -Bi_m \psi \text{ en } \mathcal{A} \quad (4.33)$$

$$\psi = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} \quad (4.34)$$

$$\tau = \frac{Dt}{L^2} \quad (4.35)$$

$$Bi_m = \frac{\bar{K}_{eq} h_m L}{v c_s D} \quad (4.36)$$

$$\bar{K}_{eq} = \int_{X_e}^{X_0} (H_i/X_i) dX / (X_0 - X_e) \quad (4.37)$$

En las ecuaciones anteriores ψ es la fracción de humedad libre, Bi_m es el número de Biot másico, \bar{K}_{eq} es el coeficiente de partición del agua entre el sólido y la fase vapor y τ es el número de Fourier para transferencia de masa. Si $Bi_m > 40$ (el contenido de humedad de la superficie del sólido alcanza instantáneamente el equilibrio con las condiciones del aire de secado), entonces la Ecuación (4.33) se reduce a

$$\psi = 0 \text{ en } \mathcal{A} \quad (4.38)$$

La definición del número de Fourier dada en la Ecuación (1.7) implica que L y D permanecen constantes durante el proceso de secado. Una consideración adicional es que la concentración de sólidos también permanece constante a lo largo del proceso. Si

tanto L y D cambian sus valores durante el proceso (aunque no sean necesariamente funciones explícitas dependientes del tiempo), pero no exhiben una variación espacial dentro del sólido (por ejemplo, pueden variar como función del contenido de humedad promedio), entonces la ecuación de difusión (4.32) se puede escribir como (Ruiz-López et al., 2012; Ortiz-García-Carrasco et al., 2015):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \nabla \cdot [\nabla \psi] \quad (4.39)$$

con

$$\vartheta = \int_0^t \frac{D}{L^2} dt \quad (4.40)$$

Esta es una consideración razonable ya que el contenido de humedad y el tamaño de la muestra se determinan a partir de mediciones experimentales que involucran a todo el producto. La definición del número de Fourier dada en la Ecuación (4.40) permite expresar el problema de transferencia de masa en un sólido con variación simultánea de tamaño y difusividad a través de la ecuación general de difusión (4.32). Además, la Ecuaciones (4.32) y (4.39) comparten las mismas soluciones analíticas bajo la frontera (4.38) simplemente reemplazando τ por ϑ . La solución con frontera (4.33) no se comparte entre las Ecuaciones (4.32) y (4.39) debido a que Bi ya no es un número constante cuando L y D cambian sus valores durante el proceso. La ecuación del método de pendientes se escribe como:

$$D = \frac{L^2 (d \ln \Psi / dt)_{\text{experimental}}}{(d \ln \Psi / d\vartheta)_{\text{teórico}}} \quad (4.41)$$

La disponibilidad de una solución analítica para la ecuación de transferencia de masa limita la aplicabilidad del método de pendientes a geometrías sólidas muy simples. Las soluciones analíticas se utilizan por conveniencia, pero los mismos resultados también se pueden obtener de procedimientos numéricos; así que los términos $d\Psi/d\tau$ y $d\Psi/d\vartheta$ en las Ecuaciones (1.9) y (4.41) pueden ser evaluados a partir de una simulación numérica. Además, al utilizar una solución numérica para evaluar el término $d\Psi/d\tau$ y $d\Psi/d\vartheta$, el método de pendientes se puede emplear para estimar los

coeficientes de difusión en geometrías complejas carentes de una solución analítica y considerando variabilidad simultánea de difusividad del agua y tamaño del producto durante el secado; lo cual es el propósito principal de esta etapa del proyecto. Para sólidos que se encogen, la curva de Ψ vs. ϑ debe ser generada utilizando el número de Fourier modificado para transferencia de masa en función de la dimensión del producto que sufre mayor disminución durante el secado como longitud característica para difusión. Para la frontera (4.38), la curva de secado Ψ vs. ϑ es idéntica a la de un sólido que no cambia de tamaño con difusividad del agua constante (Ψ vs. τ).

De la Ecuación (4.40), la simulación de la curva de secado considerando la evolución simultánea de la difusividad del agua y de las dimensiones del producto se puede obtener estimando la relación entre t y ϑ resolviendo el problema de valor inicial

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{L^2}{D}, \quad t(\vartheta = 0) = 0 \quad (4.42)$$

La fracción de humedad libre promedio (Ψ) se determina a partir de ϑ en cada iteración a lo largo del tiempo a partir de la solución de transferencia de masa disponible (curva Ψ vs. ϑ). El valor de Ψ se emplea para evaluar el lado derecho de la Ecuación (4.42) y avanzar en la solución.

4.4. Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor en el proceso de secado

En esta etapa se estudian las consideraciones hechas en un modelo de secado con transferencia de masa y calor en la estimación de la difusividad del agua. Para ello, se plantea un modelo unidimensional de secado de sólidos en el sistema coordenado cilíndrico, el cual permite estudiar los escenarios de propiedades constantes o variables (concentración de sólidos, densidad, calor específico, conductividad térmica y calor de sorción del agua), sólido de dimensiones constantes (sólido rígido) o de dimensiones que evolucionan durante el proceso, proceso isotérmico o no isotérmico y resistencia externa a la transferencia de masa despreciable o no despreciable.

4.4.1. Modelo de transferencia de masa y calor

Las ecuaciones de difusión y conducción en estado no estacionario se pueden usar para representar el transporte de agua y calor en el interior del producto durante el secado convectivo, respectivamente. Estas dos leyes para un material homogéneo e isotrópico en un sistema coordenado general están dadas por las Ecs. (1.2) y (1.3) (Aral & Bese, 2016; Sandoval-Torres et al., 2017; Sappati et al., 2017),

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_w)]$$

$$\frac{\partial (\rho C_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla (T)]$$

donde c_w es la concentración volumétrica de agua en la fase sólida (kg agua/m³ producto), D es la difusividad efectiva del agua en el alimento (m²/s), C_p es el calor específico (J/kg/°C), k es la conductividad térmica (W/m/°C), t es el tiempo (s), T es la temperatura del producto (°C) y ρ es la densidad del producto (kg producto/m³ producto).

Adicionalmente, el transporte de masa y calor en la superficie del producto se representa por las Ecuaciones (1.4) y (1.5),

$$\frac{h_m}{v} (H_i - H) = -D \nabla (c_{wi})$$

$$h_h (T_i - T_\infty) - Q D \nabla c_{wi} = -k \nabla (T_i)$$

donde h_m es el coeficiente de transferencia de masa (m/s), h_h es el coeficiente de transferencia de calor (W/m²/°C), Q es el calor de sorción del agua (J/kg agua), T_i es la temperatura en la superficie del producto (°C), T_∞ es la temperatura del aire de secado (°C), H_i es el contenido de humedad del aire en la superficie del producto (kg agua/kg aire seco), H es el contenido de humedad del aire (kg agua/kg aire seco), y v es el volumen húmedo del aire de secado (m³ aire húmedo/kg aire seco).

Las ecuaciones de transporte masa y calor (1.2) a (1.5) carecen de solución analítica (deben resolverse numéricamente) y requieren conocer el coeficiente de difusión del agua en el sólido (D). Este coeficiente de difusión se puede considerar conocido de

estudios previos, se puede estimar a través de soluciones simplificadas, o en algunos casos se determina iterativamente.

La Ecuación (1.2) se puede escribir en términos de la concentración volumétrica de sólidos (kg agua/m³ producto) (c_s) y la humedad en base seca del producto (X) como

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_s X)] = \nabla \cdot [D c_s \nabla (X) + D X \nabla (c_s)] \quad (4.43)$$

La concentración de sólidos se relaciona con el contenido de humedad en base seca y la densidad del producto como

$$c_s = \frac{m_s}{V} = \frac{(1 - Y) m_p}{V} = (1 - Y) \rho = \frac{\rho}{1 + X} \quad (4.44)$$

donde Y es la humedad en base húmeda del alimento (kg agua/kg producto), m_s es la masa de los sólidos (kg sólidos) y m_p es la masa del producto (kg producto). Se puede considerar que c_s y ρ son funciones del contenido de humedad y temperatura promedio y no de la posición. Esta consideración es razonable dado que las propiedades se determinan experimentalmente a partir de mediciones que involucran muestras completas. Como resultado, c_s es constante a lo largo de todas las dimensiones del sólido, esto es,

$$\nabla (c_s) = 0 \quad (4.45)$$

Por otra parte, cuando c_s no es constante, el lado izquierdo de la Ecuación (1.2) se puede desarrollar empleando las reglas del producto y cadena como

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = c_s \frac{\partial X}{\partial t} + X \frac{\partial c_s}{\partial t} = c_s \frac{\partial X}{\partial t} + X \left(\frac{\partial c_s}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial c_s}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \quad (4.46)$$

donde el operador de volumen promedio está definido como

$$\langle * \rangle = \frac{\iiint_V * dV}{\iiint_V dV} \quad (4.47)$$

La combinación de las Ecuaciones (4.45), (4.46) y (4.43) producen que el modelo de

secado en estado no estacionario correspondiente sea

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (X)] - \frac{X}{c_s} \left(\frac{\partial c_s}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial c_s}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \quad (4.48)$$

con la condición de frontera convectiva

$$\frac{h_m}{v} (H_i - H) = -D c_s \nabla (X_i) \quad (4.49)$$

De forma análoga, el siguiente modelo se obtiene para la evolución de la temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p} \nabla \cdot [k \nabla T] - \frac{T}{\rho C_p} \left(\frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \quad (4.50)$$

con la condición de frontera

$$h_h (T_i - T_\infty) - Q D c_s \nabla X_i = -k \nabla T_i \quad (4.51)$$

donde X_i es la humedad en base seca del alimento en la superficie del producto (kg agua/kg sólidos).

4.4.2. Efecto de la variabilidad de la concentración de sólidos en la difusividad del agua

La solución analítica de la Ecuación (4.43) en términos de la humedad promedio se obtiene considerando:

1. La concentración volumétrica de sólidos es constante.
2. El coeficiente de difusión es constante.
3. El sólido no reduce su tamaño.
4. El sólido no cambia su forma.
5. El proceso ocurre bajo condiciones isotérmicas.

6. Existe una distribución uniforme de humedad dentro del sólido al inicio del secado.
7. Se alcanza instantáneamente el equilibrio másico en la superficie del producto.

La solución analítica de la Ecuación (4.43) en una dimensión bajo las consideraciones (1) a (7) tiene la forma general

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (4.52)$$

$$\tau = \frac{Dt}{L^2} \quad (4.53)$$

donde los subíndices 0 y e denotan el estado inicial y de equilibrio, respectivamente; λ_n es el n -ésimo valor propio de la solución analítica, y τ es el número de Fourier de transferencia de masa, y L es una longitud característica de difusión definida convenientemente en el sistema coordenado usado. Las soluciones analíticas son usadas de forma rutinaria para la estimación de la difusividad del agua en el producto. No obstante, es bien sabido que las consideraciones hechas en la solución del modelo de secado tienen un gran impacto en el valor obtenido de los coeficientes de difusión. Ruiz-López et al. (2012) demostraron que era posible proporcionar una solución analítica para el transporte de humedad en matrices que sufren encogimiento con coeficientes de difusión variables, bajo las consideraciones (1) y (4)-(7). La solución analítica es idéntica a la Ecuación (4.52) reemplazando simplemente el número de Fourier tradicional (τ) con una definición más general, es decir,

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 \vartheta) \quad (4.54)$$

$$\vartheta = \int_0^t \frac{D}{L^2} dt \quad (4.55)$$

donde ϑ es un número de Fourier modificado de transferencia de masa. En este caso, la solución, aunque considera una difusividad variable o el acortamiento de la longitud característica de difusión sigue considerando constante a la concentración de sólidos. Hasta ahora, no existe un consenso general sobre el efecto que la variación

de la concentración de sólidos pueda tener sobre la estimación de la difusividad del agua durante el secado.

Se debe hacer notar que la Ecuación (4.52) es una solución a la ecuación original de transferencia de masa (1.2) en términos de la concentración de agua bajo las consideraciones (2)-(7), ya que ahora la primera consideración no es válida (un cambio en la concentración de agua implica un cambio en la concentración de sólidos). El procedimiento propuesto por Ruiz-López et al. (2012) también se puede aplicar en este caso para proporcionar una solución analítica para la difusión del agua en una matriz alimenticia que se encoge con variación en la concentración de sólidos. La solución es

$$\Upsilon = \frac{c_w - c_{we}}{c_{w0} - c_{we}} = \sum A_n \exp(-\lambda_n^2 \vartheta) \quad (4.56)$$

El número de Fourier de transferencia de masa en la Ecuación (4.56) es el mismo que en la Ecuación (4.54). El grupo adimensional en términos de concentración de agua Υ se puede expresar en términos de la humedad en base seca como

$$\Upsilon = \frac{c_w - c_{we}}{c_{w0} - c_{we}} = \frac{\frac{1}{V} \left(m_w - \frac{V}{V_e} m_{we} \right)}{\frac{1}{V_0} \left(m_{w0} - \frac{V_0}{V_e} m_{we} \right)} = \frac{V_0 \left(\frac{m_w}{m_s} - \frac{V}{V_e} \frac{m_{we}}{m_s} \right)}{V \left(\frac{m_{w0}}{m_s} - \frac{V_0}{V_e} \frac{m_{we}}{m_s} \right)} = \frac{V_0 \left(X - \frac{V}{V_e} X_e \right)}{V \left(X_0 - \frac{V_0}{V_e} X_e \right)} \quad (4.57)$$

Bajo condiciones normales de secado el valor de X_e es muy cercano a cero (y también c_{we}), así que,

$$\Upsilon = \frac{c_w}{c_{w0}} \approx \frac{V_0 X}{V X_0} = \frac{V_0}{V} \Psi \quad (4.58)$$

Consideremos que se realiza una simulación usando un mismo coeficiente de difusión en un producto que tiene acortamiento de su longitud característica de difusión y concentración de sólidos secos variable, Ecuación (4.56), o constante, Ecuación (4.54). Ambas simulaciones se efectuarían con el mismo número de Fourier modificado (ϑ). En el caso de la simulación considerando una concentración de sólidos secos constante tendríamos (si el valor de X_e es casi cero)

$$X = X_0 \Psi \quad (4.59)$$

En cambio, para la simulación efectuada con una concentración de sólidos variable se tiene

$$X = \frac{V}{V_0} X_0 \Psi \quad (4.60)$$

Es decir, el grupo adimensional basado en concentración de sólidos variable predice una humedad menor en base seca que su contraparte con concentración de sólidos constante a un mismo tiempo (debido a que V/V_0 reduce su valor a medida que continúa el proceso de secado). Por lo tanto, una simulación con concentración de sólidos constante siempre sobreestimaré el coeficiente de difusión del agua en el alimento para compensar la mayor humedad predicha.

4.4.3. Estimación del coeficiente de difusión bajo consideraciones de concentración de sólidos variable y constante

El procedimiento propuesto por Ruiz-López et al. (2012) se puede extender para calcular coeficientes de difusión bajo la consideración de una concentración variable de sólidos disponiendo de datos experimentales de Υ contra t , como se describe a continuación:

1. Se calcula el valor de ϑ para cada Υ en la curva experimental resolviendo la Ecuación (4.56).
2. Se calcula la derivada $d\vartheta/dt$ para cada punto experimental.
3. Las difusividades se calculan para cada tiempo como

$$D = L^2 \frac{d\vartheta}{dt} \quad (4.61)$$

El procedimiento para concentración de sólidos constante es el mismo que el descrito ahora, pero se reemplaza a Υ por Ψ en los cálculos.

5. Metodología

5.1. Análisis del efecto encogimiento en la difusividad

En esta parte del proyecto se presenta la metodología de validación experimental del método simple para estimar coeficientes de difusión durante el secado convectivo de productos que se encogen propuesto en la Sección 4.1.

5.1.1. Datos experimentales de secado convectivo de yuca

Para validar el método propuesto se elaboraron cilindros de yuca (*Manihot esculenta*) con diámetro y longitud inicial igual a 1.13 ± 0.02 cm y 10.5 ± 0.01 cm, respectivamente. El proceso de secado se realizó en un secador de túnel usando tres temperaturas (50, 65 y 80°C) y un flujo de aire constante de 2 m/s. Una vez estabilizadas las condiciones en el secador se introdujo un grupo de las muestras (71.2 ± 13.6 g) sobre una malla abierta de acero-inoxidable (dimensiones: 25 × 20 cm, aberturas: 0.45 cm × 0.50 cm, diámetro del alambre: 0.07 cm) de forma que el aire fluye de forma paralela a la dimensión de mayor tamaño del producto. Cabe resaltar que la velocidad del flujo aire y las dimensiones iniciales del producto fresco se eligieron para permitir un proceso estrictamente controlado por difusión y favorecer una transferencia de masa unidimensional, esta última para que el encogimiento ocurriese casi exclusivamente en la menor dimensión del producto (Pavón-Melendez et al., 2002). En cambio, la velocidad y temperatura del aire se seleccionaron en base a lo reportado en estudios anteriores (Ruiz-López et al., 2004; Hernandez-Díaz et al., 2008).

La malla donde se colocan las muestras se encuentra sujeta a un bastidor que descansa sobre una balanza digital. El monitoreo del cambio de peso, por lo tanto, se lleva de forma continua, registrando los cambios de peso de las muestras cada 5 min para las primeras 5 lecturas, y posteriormente cada 10 min hasta obtener un peso constante. Debido a que la disminución en el peso de las muestras se puede

atribuir sólo a la pérdida de agua evaporada, la fracción de humedad libre (Ψ) se estimó como

$$\Psi = \frac{m_p - m_{pe}}{m_{p0} - m_{pe}} \quad (5.1)$$

Los valores de fracción de humedad libre se emplearon para calcular la velocidad de secado $d\Psi/dt$ mediante diferencias finitas. El contenido de humedad inicial se determinó por secado en estufa a 105°C hasta peso constante, obteniéndose un valor de 57.82 ± 1.55 g agua/100 g producto.

5.1.2. Evaluación del encogimiento del producto

La evolución del encogimiento se monitorea retirando cuidadosamente, a cada tiempo establecido, la muestra de la cámara de secado y midiendo directamente el diámetro de la muestra con un micrómetro. Las mediciones se hicieron rápidamente con el fin de evitar cambios significativos en las propiedades de la muestra. El encogimiento se evaluó como la razón de cambio entre el radio a un tiempo dado y el radio inicial, Ecuación (4.8).

5.1.3. Determinación de la difusividad efectiva del agua

El coeficiente de difusión del agua en el producto se determinó a partir de la pendiente del ajuste de línea recta a la curva experimental de $\ln \Psi$ vs. $f(t)$. La precisión de la estimación del coeficiente de difusión se determinó a partir de los intervalos de confianza al 95 %.

El efecto de la temperatura se incluyó por medio del modelo de Arrhenius

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T_K}\right) \quad (5.2)$$

Por lo tanto, el trazo de $\ln D$ vs. $1/T_K$, produce una línea recta de intercepto igual a $\ln D_0$ y pendiente $-E_a/R_g$.

5.2. Evaluación del efecto de la discrepancia geométrica en el cálculo de coeficientes de difusión

En esta parte del documento se presenta la metodología seguida para validar la teoría desarrollada en la Sección 4.2. Para ello, se consideran datos experimentales del proceso de osmodeshidratación de púeos de champiñón reportados previamente (González-Pérez et al., 2019a). Se aplica el método PSR para determinar los parámetros óptimos que describen la geometría del producto en el sistema coordenado esferoidal achatado. El modelo de propuesto de transferencia de masa de la subsección 4.2.2 se resuelve considerando el encogimiento del producto y la discrepancia geométrica entre la forma propuesta y real de los púeos de champiñón se cuantifica mediante el índice de redondez. Los coeficientes de difusión del agua y del soluto se estiman por medio de regresión no lineal y a partir de un enfoque semiteórico basado en un ajuste de línea recta cuyo fundamento se presenta en la Sección 4.2.3.

5.2.1. Datos experimentales de deshidratación osmótica de púeos de champiñón

Recientemente, González-Pérez et al. (2019a) reportaron el análisis de las características morfométricas del champiñón (*Agaricus bisporus*) osmodeshidratado. En el estudio referido, los púeos de champiñón (3.4 a 3.7 cm de diámetro) se trataron con diferentes concentraciones de salmuera (0.10 y 0.25 g NaCl/g solución) y niveles de temperatura (40, 60 y 80°C). La pérdida de agua (W) y ganancia de soluto (S) se estimaron a partir de los datos experimentales como:

$$\bar{S} = (m_{st} - m_{s0}) / m_{p0} \quad (5.3)$$

$$\bar{W} = (m_{w0} - m_{wt}) / m_{p0} \quad (5.4)$$

El contorno del producto se extrajo procesando las imágenes digitales de las rodajas resultantes de un corte transversal (perpendicular al eje del estípite) de aproximadamente 1 mm de espesor que se cortó con una cuchilla afilada en la parte

central del píleo. Las características representativas del encogimiento del producto en la sección transversal se obtuvieron combinando los contornos de tres muestras diferentes para producir una sola figura como lo describieron Ortiz-García-Carrasco et al. (2015). Los datos experimentales de las curvas de osmodeshidratación y de los contornos de las muestras se utilizan en esta parte del proyecto.

5.2.2. Cuantificación de la discrepancia geométrica

González-Pérez et al. (2019a) usaron el índice de redondez del producto como un medio para describir su deformación, el cual se define como

$$I_r = \frac{\text{área de sección transversal del producto}}{\text{área del círculo mínimo que encierra al contorno del producto}} \quad (5.5)$$

En este trabajo se propone al índice de redondez como un medio para cuantificar la discrepancia geométrica entre la forma real del producto y la generada con el sistema coordenado propuesto.

5.2.3. Solución numérica del modelo de transferencia de masa

El modelo propuesto de transferencia de masa formado por las Ecuaciones (4.21) a (4.24) se resolvió numéricamente ya que no tiene solución analítica bajo las consideraciones presentadas. Se aplicó el método de líneas con diferencias finitas centrales para la discretización de las derivadas espaciales a la Ecuación (4.21), produciendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ($1 < j < N_\xi$, $1 < k \leq N_\theta$):

$$\frac{d\psi_{j,k}}{d\tau} = \frac{1}{\kappa_j^2} \left[\alpha_{j,k} \left(\frac{\cosh\xi_{j+1/2} (\psi_{j+1,k} - \psi_{j,k}) - \cosh\xi_{j-1/2} (\psi_{j,k} - \psi_{j-1,k})}{(\Delta\xi)^2} \right) + \beta_{j,k} \left(\frac{\cos\theta_{k+\frac{1}{2}} (\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k}) - \cos\theta_{k-\frac{1}{2}} (\psi_{j,k} - \psi_{j,k-1})}{(\Delta\theta)^2} \right) \right] \quad (5.6)$$

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{(\sinh^2\xi_j + \sen^2\theta_k) \cosh\xi_j} \quad (5.7)$$

$$\beta_{j,k} = \frac{1}{(\sinh^2\xi_j + \sen^2\theta_k) \cos\theta_k} \quad (5.8)$$

$$\cosh \xi_{j\pm 1/2} = \frac{\cosh \xi_{j\pm 1} + \cosh \xi_j}{2} \quad (5.9)$$

$$\cos \theta_{k\pm 1/2} = \frac{\cos \theta_{k\pm 1} + \cos \theta_k}{2} \quad (5.10)$$

El dominio computacional se puede observar en la Figura 5.1. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se integró con $N_\xi = 100$ y $N_\theta = 100$ usando la rutina ode15s de Matlab, que se basa en un método de orden variable (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, Ma, EE. UU.). La concentración adimensional promedio de agua y soluto en el producto se estimó a partir de la integración numérica de los valores locales mediante la evaluación de la siguiente expresión con la regla del trapecio:

$$\Psi = \frac{\int_0^\pi \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \int_{\xi_{in}}^{\xi_{out}} \psi(\xi, \theta) a^3 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) \cosh \xi \cos \theta d\xi d\theta d\phi}{\int_0^\pi \int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \int_{\xi_{in}}^{\xi_{out}} a^3 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) \cosh \xi \cos \theta d\xi d\theta d\phi} \quad (5.11)$$

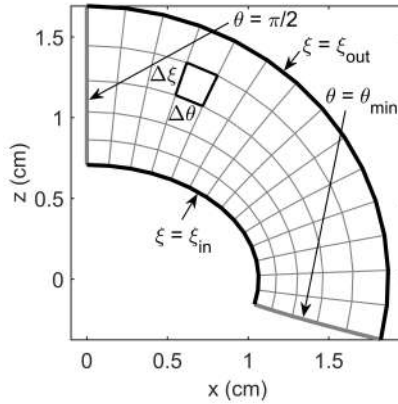


Figura 5.1. Dominio computacional para las simulaciones de deshidratación osmótica de piletos de champiñón en el sistema esferoidal achatado (la figura se creó con $\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$, $\theta_{min} = -0.224$ rad, $a = 0.797$ cm, $N_\xi = 6$ y $N_\theta = 15$).

5.2.4. Evaluación de la pendiente asintótica de la solución de transporte de masa

La solución numérica promedio ($\ln \Psi$ vs. τ) se usó para estimar la pendiente (λ_1^2) de la porción recta de la gráfica. El comportamiento de λ_1^2 se obtuvo resolviendo el modelo de difusión bajo diferentes combinaciones de los parámetros ξ_{in} , ξ_{out} y θ_{min} . El parámetro ξ_{out} se exploró indirectamente como la elipticidad e , definida en la ecuación (4.20), con valores de 0.1 a 0.995. El parámetro ξ_{in} se exploró indirectamente como

$$\chi = \frac{\xi_{in}}{\xi_{out}} \quad (5.12)$$

con valores de 0 a 0.9. Finalmente, θ_{min} se exploró en el rango de valores de 0 a -0.3 rad.

5.2.5. Tratamiento numérico y estadístico de datos

Los valores de difusividad se estimaron a partir del ajuste de regresión no lineal a la solución numérica de las Ecuaciones (4.21)-(4.24) y (5.11) ($D_{j,RNL}$ para $j = w, s$), así como con el uso de la solución analítica (4.29) a partir de un ajuste de línea recta ($D_{j,ALR}$ para $j = w, s$). Los procedimientos numéricos, la regresión no lineal y lineal (basados en mínimos cuadrados ordinarios) y análisis estadístico se realizaron con el software Matlab y su Statistic Toolbox 7.3 (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, MA, EE. UU.). La calidad de ajuste de los modelos propuestos se cuantificó mediante el coeficiente de determinación (R^2), mientras que la significancia estadística de los parámetros estimados se evaluó a través de sus intervalos de confianza del 95 %.

Los valores de difusividad estimados con la geometría generada del método PSR ($D_{j,RNL}$ para $j = w, s$) fueron comparados con los reportados por González-Pérez et al. (2019a) donde se utilizó un casco esférico para representar la forma del producto ($D_{j,CE}$ para $j = w, s$). La diferencia relativa entre los valores se determinó como

$$E_1(D_j) = 100 \frac{D_{j,CE} - D_{j,RNL}}{D_{j,RNL}} \text{ para } j = w, s \quad (5.13)$$

Finalmente, la diferencia entre la difusividad estimada de la solución numérica ($D_{j,RNL}$ para $j = w, s$) y el enfoque simplificado ($D_{j,ALR}$ para $j = w, s$) se calculó con la fórmula

$$E_2(D_j) = 100 \frac{D_{j,ALR} - D_{j,RNL}}{D_{j,RNL}} \text{ para } j = w, s \quad (5.14)$$

5.3. Aplicación del método de pendientes generalizado

En esta etapa se aplica el método de pendientes presentado en la Sección 4.3 para estimar coeficientes de difusión variables en sólidos de forma compleja que cambian de tamaño y en ausencia de una solución analítica a la ecuación de transporte de masa. El método se valida empleando datos experimentales para púños de champiñón frescos y osmodeshidratados. La implementación se realiza usando la solución numérica a un modelo de secado 2D en estado no estacionario formulado en el sistema de coordenadas esferoidal achatado. Los descriptores de la contracción del producto se determinan utilizando el algoritmo de registro de conjunto de puntos. Finalmente, los valores obtenidos de la difusividad del agua se comparan con los estimados al utilizar un enfoque de regresión por partes.

5.3.1. Datos experimentales de secado convectivo de púños de champiñón

González-Pérez et al. (2019b) reportaron los valores de los coeficientes de difusión para el secado convectivo (50, 65 y 80°C) de púños de champiñón frescos y pretratados usando una velocidad del aire de 2 m/s. El producto pretratado fue sumergido en salmuera (0.25 g NaCl/g solución) a 80°C durante 180 min. González-Pérez et al. (2019b) describieron estos datos con un modelo de difusión 2D en estado no estacionario donde el producto fue considerado como un casco esférico. Este modelo asume que el encogimiento del producto sólo es causado por el cambio de la relación del radio interno al radio externo. Los datos de secado y los contornos de las muestras de estos experimentos se utilizan en esta parte del proyecto. La deformación y enco-

gimimiento de las muestras se obtuvieron de la misma forma a la descrita en la Sección 5.2.1. Además, se usa el sistema coordenado esferoidal achatado para resolver el modelo de transferencia de masa con cambio de tamaño del sólido y difusividad variable del agua.

5.3.2. Modelo de transferencia de masa en el sistema esferoidal achatado

La Ecuación (4.39) expresada en el sistema coordenado esferoidal achatado está dada por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{\sinh^2 \xi_{out}}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \tanh \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \tan \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (5.15)$$

$$\vartheta = \int_0^t \frac{D(t)}{[z_{out}(t)]^2} dt \quad (5.16)$$

La difusión de humedad a lo largo de la coordenada angular ϕ se desprecia debido a la simetría del producto alrededor del eje z . La Ecuación (5.15) se resolvió empleando la frontera (4.38). Por lo tanto,

$$\psi = 0 \text{ para } \xi = \xi_{in}, \theta_{min} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ y } \vartheta > 0 \quad (5.17)$$

$$\psi = 0 \text{ para } \theta = \theta_{min}, \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{out} \text{ y } \vartheta > 0 \quad (5.18)$$

Además, se considera una condición de simetría en el eje z para reducir el trabajo computacional.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0 \text{ para } \theta = \pi/2, \xi_{in} \leq \xi \leq \xi_{out} \text{ y } \vartheta > 0 \quad (5.19)$$

El modelo de secado formado por las Ecuaciones (5.15)-(5.19) no tiene una solución analítica, así que, se resolvió numéricamente por el método de líneas como se describe en la Sección 5.2.3. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se integró considerando una distribución uniforme del agua en el producto al inicio del proceso ($\psi = 1$ para $\vartheta = 0$ en V). La solución promedio (Ψ) se determinó resolviendo

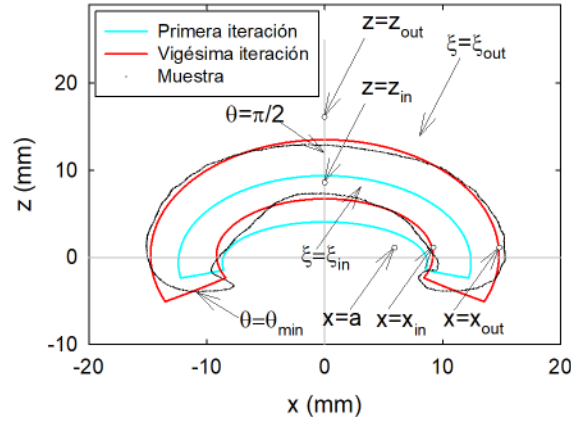


Figura 5.2. Representación de las características geométricas de los púelos de champión sometidos a secado convectivo determinadas con el método PSR. La imagen muestra los resultados de la primera y última iteración.

la Ecuación (5.11). La curva Ψ vs. ϑ se usó para evaluar la difusividad del agua con la Ecuación (4.41). El coeficiente de difusión promedio a cada temperatura de secado se calculó resolviendo la integral:

$$\bar{D} = \frac{\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} D(\Psi) d\Psi}{\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi} \quad (5.20)$$

5.3.3. Generación de la geometría del producto

La coincidencia óptima entre la forma real del producto y la geometría generada en el sistema coordenado esferoidal achatado se ajustó con los parámetros ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} y a (Figura 5.2), estimados por el método PSR presentado en la Sección 4.2.1. Este procedimiento se aplicó para cada punto muestreado en la curva de secado experimental lo que permite monitorear el cambio de tamaño del producto. Un total 66 imágenes fueron procesadas por este método.

5.3.4. Método de regresión no lineal para estimar coeficientes de difusión

La difusividad del agua también se estimó a partir del ajuste de regresión no lineal del modelo de transferencia de masa (5.15) resuelto numéricamente, expresándolo en la escala de tiempo original:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{D \sinh^2 \xi_{out}}{(\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) z_{out}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \tanh \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \tan \theta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \quad (5.21)$$

Este enfoque se utilizó para incluir el cambio de tamaño del champiñón en más de una dimensión a diferencia del método de pendientes. Se empleó regresión por partes (*piecewise regression*) para estimar una difusividad variable a partir de los datos de secado sin considerar un comportamiento predefinido durante el procedimiento de ajuste. La regresión por partes (*RpP*) se realizó utilizando uno (*RpP-1*) o cuatro intervalos (*RpP-4*) de la fracción de humedad libre. Se determinó una difusividad promedio con la Ecuación (5.20) cuando se utilizaron múltiples intervalos de humedad. La diferencia relativa ($E_3, \%$) entre la difusividad promedio estimada con el método de pendientes (D_{MP}) y el enfoque de regresión por partes (D_{RpP}) se determinó con la formula:

$$E_3 = 100 \frac{D_{RpP} - D_{MP}}{D_{MP}} \quad (5.22)$$

5.3.5. Tratamiento numérico y estadístico de datos

Los procedimientos numéricos, la regresión no lineal (basada en mínimos cuadrados ordinarios) y el análisis estadístico se realizaron con el software de Matlab y su Statistic Toolbox 7.3 (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, MA, EE. UU.). La calidad de ajuste de los modelos que describen el encogimiento del producto e cuantificó mediante la desviación relativa media (*mean relative deviation, DRM, %*):

$$DRM = 100 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\zeta_{mod,j} - \zeta_{exp,j}}{\zeta_{exp,j}} \right| / n \quad (5.23)$$

donde, ς denota a los semiejes mayor y menor de la geometría. La calidad de ajuste de los modelos de secado se cuantificó mediante el estadístico R^2 y la desviación relativa promedio de la humedad (η , %):

$$\eta = \frac{100 \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \left| \frac{\Psi_{\text{mod},j} - \Psi_{\text{exp},j}}{\Psi_{\text{exp},j}} \right| d\Psi}{\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi} \quad (5.24)$$

5.4. Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor

En esta etapa se plantea un modelo unidimensional de secado de sólidos en el sistema coordenado cilíndrico y se aplica el método de líneas para resolverlo bajo los escenarios de propiedades constantes o variables (concentración de sólidos, densidad, calor específico, conductividad térmica y calor de sorción del agua), sólido de dimensiones constantes (sólido rígido) o de dimensiones que evolucionan durante el proceso, proceso isotérmico o no isotérmico y resistencia externa a la transferencia de masa despreciable o no despreciable. Las simulaciones obtenidas se emplean para analizar el efecto de las consideraciones de modelación planteadas en la estimación de la difusividad del agua.

5.4.1. Solución del modelo de transferencia de masa y calor

El modelo de secado propuesto en la Sección 4.4.1, formado por las Ecuaciones (4.48) a (4.51) se desarrolló en el sistema coordenado cilíndrico con transferencia de masa unidimensional, ya que se valida con los datos provenientes de secado de cilindros de yuca obtenidos en la Sección 5.1.1. De esta forma, el modelo particular a resolver es

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Dr \frac{\partial X}{\partial r} \right) - \frac{X}{c_s} \left(\frac{\partial c_s}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial c_s}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \quad (5.25)$$

$$\frac{h_m}{v} (H_i - H) = -Dc_s \frac{\partial X_i}{\partial r} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{T}{\rho C_p} \left(\frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \quad (5.27)$$

$$h_h (T_i - T_\infty) - Q D c_s \frac{\partial X_i}{\partial r} = -k \frac{\partial T_i}{\partial r} \quad (5.28)$$

Las Ecuaciones (5.25) y (5.27) se expresan como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias equivalente para su solución discretizando las derivadas espaciales con diferencias finitas centradas usando N nodos para la discretización. Las ecuaciones resultantes son ($j = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \frac{dX_j}{dt} = & \frac{1}{r_j} \frac{(Dr)_{j+1/2} \left(\frac{X_{j+1} - X_j}{\Delta r} \right) - (Dr)_{j-1/2} \left(\frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta r} \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{X_j}{c_s} \left(\frac{\partial c_s}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial c_s}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_j}{dt} = & \frac{1}{\rho C_p r_j} \frac{(kr)_{j+1/2} \left(\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta r} \right) - (kr)_{j-1/2} \left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta r} \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{T_j}{\rho C_p} \left(\frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle X \rangle} \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\rho C_p)}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Los valores de la humedad y temperatura en el nodo $N + 1$ se calcula a partir de la discretización de las condiciones de frontera:

$$-D c_s \frac{X_{N+1} - X_{N-1}}{\Delta r} = \frac{h_m}{v} (H_i - H) \quad (5.31)$$

$$-k \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{\Delta r} = h_h (T_i - T_\infty) - Q D c_s \frac{X_{N+1} - X_{N-1}}{\Delta r} \quad (5.32)$$

Por otra parte, los valores de la humedad y temperatura en el nodo 0 se calculan considerando una condición de simetría en el centro del producto ($X_0 = X_2$ y $T_0 = T_2$). La densidad (ρ), conductividad térmica (k) y capacidad calorífica (C_p) de yuca fueron reportados por Njie et al. (1998):

$$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)} = 104.68 (1 - \exp(-1.8X)) + 1028.53 \quad (5.33)$$

$$k \text{ (W/m/}^\circ\text{C)} = 60.2 - 110.3 \exp\left(-5.1 \frac{X}{1+X}\right) \quad (5.34)$$

$$C_p \text{ (J/kg/}^\circ\text{C)} = 1577 + 25 \frac{X}{1+X} \quad (5.35)$$

La Ecuación (5.34) se implementó con una saturación de límite inferior cuando la conductividad del producto es inferior a 0.16 W/m/°C.

Los parámetros de las condiciones de frontera se evalúan empleando diferentes correlaciones como se describe a continuación. Los coeficientes externos de transporte convectivo se calculan a partir del número de Sherwood (N_{Sh}) y Nusselt (N_{Nu}) usando correlaciones para transferencia de masa y calor alrededor de una esfera (McCabe et al., 1991; Geankoplis, 1998):

$$N_{Sh} = 2 + 0.55 (N_{Re})^{0.53} (N_{Sc})^{1/3} \quad (5.36)$$

$$N_{Nu} = 2 + 0.6 (N_{Re})^{1/2} (N_{Pr})^{1/3} \quad (5.37)$$

Los números adimensionales de Reynolds (N_{Re}), Schmidt (N_{Sc}) y Prandtl (N_{Pr}) se definen como

$$N_{Re} = \frac{\rho_\infty v_\infty L_c}{\mu_\infty} \quad (5.38)$$

$$N_{Sc} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty D_{wa}} \quad (5.39)$$

$$N_{Pr} = \frac{\mu_\infty C_{p,\infty}}{k_\infty} \quad (5.40)$$

donde ρ_∞ , μ_∞ , $C_{p,\infty}$ y k_∞ son la densidad (kg/m³), viscosidad (Pa·s), calor específico (J/kg aire/°C) y conductividad térmica de la fase continua (W/m/°C); D_{wa} es la difusividad agua-aire (m²/s), v_∞ es la velocidad del aire (m/s), y L_c es la longitud característica de convección (m). Estas propiedades se calculan como sigue:

- Densidad del aire húmedo (considerando como un gas ideal):

$$\rho_\infty \text{ (kg/m}^3\text{)} = \frac{PM_a + 273}{R_g(\mathbb{T} + 273.15)} + \frac{p_w}{R_g(\mathbb{T} + 273.15)} (M_w - M_a) \quad (5.41)$$

- Presión parcial del agua:

$$p_w \text{ (kPa)} = \frac{HP}{(M_w/M_a) + H} \quad (5.42)$$

- Viscosidad del aire (Geankoplis, 1998):

$$\mu_\infty \text{ (Pa}\cdot\text{s)} = 1.7342 \times 10^{-5} + 4.3557 \times 10^{-8}\mathbb{T} \quad (5.43)$$

- Calor húmedo del aire del aire de secado (Cengel & Boles, 2009):

$$C_{p,\infty} \text{ (J/kg/}^\circ\text{C)} = C_{p,a} + C_{p,w}H \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} C_{p,a} \text{ (J/kg/}^\circ\text{C)} &= 970.52 + 6.7912 \times 10^{-2} (\mathbb{T}+273.15) \\ &+ 1.6579 \times 10^{-4} (\mathbb{T}+273.15)^2 - 6.7877 \times 10^{-8} (\mathbb{T}+273.15)^3 \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} C_{p,w} \text{ (J/kg/}^\circ\text{C)} &= 1789.6 + 1.0674 \times 10^{-1} (\mathbb{T}+273.15) \\ &+ 5.8561 \times 10^{-4} (\mathbb{T}+273.15)^2 - 1.9955 \times 10^{-7} (\mathbb{T}+273.15)^3 \end{aligned} \quad (5.46)$$

- Conductividad térmica del aire (Geankoplis, 1998):

$$k_\infty \text{ (W/m/}^\circ\text{C)} = 0.0242 + 7.393 \times 10^{-5}\mathbb{T} \quad (5.47)$$

- Difusividad agua-aire (Fuller et al., 1969):

$$D_{wa} \text{ (m}^2\text{/s)} = 1.1859 \times 10^{-8} \frac{(\mathbb{T}+273.15)^{1.75}}{P} \quad (5.48)$$

donde \mathbb{T} es la temperatura en la cual se desea evaluar la propiedad ($^\circ\text{C}$), M_w es el peso molecular del agua igual a 18.01528 kg/kmol, M_a es el peso molecular promedio del aire seco igual a 28.964 kg/kmol, H es la humedad absoluta del aire (kg agua/kg aire seco), p_w es la presión parcial del vapor de agua (kPa), P es la presión atmosférica (kPa), $R_g = 8.31434 \text{ m}^3\cdot\text{kPa/kmol/K}$ es la constante de los gases ideales. El cálculo de las propiedades necesarias para estimar los coeficientes de transferencia de masa y calor (ρ_∞ , μ_∞ , $C_{p,\infty}$, k_∞ y D_{wa}) se realizó a la temperatura de película ($\mathbb{T} = T_f$),

donde:

$$T_f (\text{°C}) = \frac{T_i + T_\infty}{2} \quad (5.49)$$

donde T_i es la temperatura de interfase correspondiente a la que tiene el producto en su superficie (la existente en el último nodo). La longitud característica de convección (L_c) se calcula como el radio de una esfera con la misma superficie que la muestra (cilindro):

$$L_c (\text{m}) = \sqrt{\frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{\pi}} \quad (5.50)$$

donde R y h son el radio y largo del cilindro (m).

Finalmente, los coeficientes de transferencia de masa (h_m) y calor (h_h) se determinaron a partir de los números de Sherwood y Nusselt,

$$N_{Sh} = \frac{h_m L_c}{D_{wa}} \quad (5.51)$$

$$N_{Nu} = \frac{h_h L_c}{k_\infty} \quad (5.52)$$

La humedad absoluta H se calcula a partir de la humedad relativa (ϕ), dada como fracción

$$H (\text{kg agua/kg aire seco}) = \frac{M_w}{M_a} \frac{\phi p_v(T_\infty)}{P - \phi p_v(T_\infty)} \quad (5.53)$$

donde $p_v(T_\infty)$ es la presión de vapor del agua pura (kPa) evaluada a la temperatura del aire de secado, determinada con la ecuación (Perry et al., 1997)

$$p_v (\text{kPa}) = \frac{1}{1000} \exp \left(73.649 - \frac{7258.2}{T+273.15} - 7.3037 \ln (T+273.15) + 4.1653 \times 10^{-6} (T+273.15)^2 \right) \quad (5.54)$$

La humedad en la interfase se calcula como

$$H_i (\text{kg agua/kg aire seco}) = \frac{M_w}{M_a} \frac{p_{wi}}{P - p_{wi}} = \frac{M_w}{M_a} \frac{p_v(T_i) a_w}{P - p_v(T_i) a_w} \quad (5.55)$$

donde $p_v(T_i)$ es la presión de vapor del agua pura (kPa) evaluada a la temperatura de interfase, determinada con la Ecuación (5.54). La actividad de agua (a_w) se evalúa con la isoterma de sorción de yuca basada en la ecuación modificada de Henderson reportada por García-Alvarado et al. (1995):

$$a_w = 1 - \exp\left(-3.4963 \times 10^{-20} T_{iK}^{8.66} X_i^{-6.361 T_{iK} - 6.7 T_{iK}^2}\right) \quad (5.56)$$

El calor latente de sorción del agua se determinó con la correlación (Perry et al., 1997):

$$Q \text{ (J/kg)} = \frac{5.2053 \times 10^7 \left(1 - \frac{T_{iK}}{T_{cw}}\right)^{0.1079 \frac{T_{iK}}{T_{cw}} + 0.25795 \left(\frac{T_{iK}}{T_{cw}}\right)^2}}{M_w} \quad (5.57)$$

donde $T_{cw} = 647.1 \text{ K}$ es la temperatura crítica del agua.

El volumen húmedo se evaluó considerando al aire de secado como un gas ideal:

$$v \text{ (m}^3 \text{ aire húmedo/kg aire seco)} = \frac{R_g (T_\infty + 273.15)}{P} \left(\frac{1}{M_a} + \frac{H}{M_w}\right) \quad (5.58)$$

El encogimiento del sólido no sólo modifica el coeficiente de difusión sino que también induce un cambio en la concentración de sólidos secos (c_s) y densidad del producto (ρ). Dado que el encogimiento se observa principalmente como la reducción de la menor dimensión del producto (L), para sólidos con transferencia de masa en una dimensión, las propiedades ρ y c_s están relacionadas entre sí por la Ecuación (4.44).

El cambio relativo en L se puede evaluar con

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/k} \quad (5.59)$$

donde j toma valores de 1, 2 o 3 para las geometrías de placa plana, cilindro infinito y esfera, respectivamente. Además, la combinación de las ecuaciones (4.44) y (5.59)

produce

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{1 + X \rho_0}{1 + X_0 \rho} \right)^{1/k} = \left(\frac{c_{s,0}}{c_s} \right)^{1/k} \quad (5.60)$$

Finalmente, los números de Biot instantáneos de transferencia de masa (Bi_m) y energía (Bi) se pueden calcular como

$$Bi_m = \frac{K_{eq} h_m R}{v c_s D} \quad (5.61)$$

$$Bi = \frac{h_h R}{k} \quad (5.62)$$

donde K_{eq} relaciona a las humedades de interfase como

$$H_i = K_{eq} X_i \quad (5.63)$$

El modelo se resolvió para las siguientes condiciones iniciales del producto y aire: $X_0 = 1.451$ kg agua/kg sólidos, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $R = 0.005$ m, $T_\infty = 80^\circ\text{C}$ y $H = 0.0119$ kg agua/kg aire seco (correspondiente a una humedad relativa del 4% a la temperatura de secado del aire). El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se integró con $N = 100$ usando la rutina ode15s de Matlab, que se basa en un método de orden variable (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, Ma, EE.UU.). La humedad promedio en el producto se estima a partir de la integración numérica de los valores locales usando la regla del trapecio.

5.4.2. Efecto de las consideraciones de modelación

El modelo de secado convectivo se resolvió bajo diferentes escenarios para evaluar el efecto de diferentes consideraciones en el comportamiento de las cinéticas de secado. Las propiedades c_s , ρ , C_p , k y Q se evaluaron como valores promedio constantes o variables. Se empleó una variable indicadora d_j ($j = 1, \dots, 5$) para codificar si la propiedad es constante ($d_j = 0$) o variable ($d_j = 1$). Las variables c_s , ρ , C_p , k y Q se codificaron en d_1 , d_2 , d_3 , d_4 y d_5 , respectivamente. Además, el modelo se resolvió bajo la consideración de humedad de interfase del producto en equilibrio instantáneo ($d_6 = 0$) o no instantáneo ($d_6 = 1$). Finalmente, se consideró un valor

promedio constante de la longitud característica de difusión ($d_7 = 0$, sólido rígido) o con encogimiento de la misma ($d_7 = 1$). Por lo tanto, la combinación de todas las consideraciones produce 128 tratamientos (7 factores a 2 niveles). A manera de ejemplo, la etiqueta 1010100 indica una simulación que se realiza con c_s , C_p y Q variables, ρ y k constantes, con humedad superficial en equilibrio instantáneo y un sólido rígido.

Los valores promedio de c_s , ρ , C_p , k y Q se calcularon como

$$\bar{\zeta} = \frac{\int_{T_0}^{\ominus} \int_{X_0}^{X_e} \zeta dX dT}{\int_{T_0}^{\ominus} \int_{X_0}^{X_e} dX dT} \quad (5.64)$$

donde ζ indica la propiedad a promediar.

Adicionalmente, el modelo también se resolvió sin considerar la transferencia de energía. Considerar nula la transferencia de energía permite evaluar un conjunto reducido de los escenarios. En este caso, las simulaciones solo se pueden realizar probando los supuestos en c_s y L . Así, sólo es posible evaluar cuatro escenarios (11, 00, 10, 01), donde el primer índice (d_1) codifica a c_s y el segundo (d_2) codifica a la consideración de sólido rígido o no rígido. En este caso, la difusividad promedio usada en las simulaciones sin transferencia de energía se evalúa en la temperatura promedio obtenida de la simulación con etiqueta 1111111 (la que no contiene ninguna simplificación).

$$\bar{T} = \frac{\int_{X_0}^{X_e} T dX}{\int_{X_0}^{X_e} dX} \quad (5.65)$$

Las simulaciones obtenidas se compararán con el caso 1111111 para determinar si existe una diferencia apreciable con respecto a esta, identificándose y agrupándose en caso de que varias exhiban el mismo comportamiento. En caso de no existir diferencias dentro de un grupo significa que las consideraciones hechas en su solución no llevarán a un cambio significativo en la estimación de la difusividad efectiva del agua en el alimento.

5.4.3. Estimación de la difusividad del agua con variación de la concentración de sólidos

Adicionalmente, se probó la capacidad del método propuesto en la Sección 4.4.3 para recuperar la ecuación que describe la difusividad del agua en el producto considerando que los datos provenientes de la simulación más rigurosa (etiquetada como 1111111) son datos experimentales. Los datos usados para el cálculo de la difusividad se extrajeron de la simulación a tiempos específicos como si se tratara de datos experimentales reales (0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 95, 110, 125, 140, 155, 175, 195, 215, 235, 255, 280, 305, 330, 355, 380, 410, 440, 480 min). La derivada $d\vartheta/dt$ se calculó con el polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, dado que los puntos experimentales no se encuentran igualmente espaciados (Chapra & Canale, 2015).

6. Resultados y discusión

6.1. Análisis del efecto del encogimiento en la difusividad

6.1.1. Cinéticas de secado de yuca

Los datos experimentales obtenidos en el secador a 50, 65 y 80°C se utilizaron para construir las curvas de humedad (Figura 6.1a), y de velocidad de secado (Figura 6.1b) para yuca. En estas gráficas se identifica un proceso controlado por difusión y se observa que la velocidad de secado depende de la temperatura. Las curvas de velocidad de secado exhiben un periodo de precalentamiento hasta una fracción de humedad libre aproximada de 0.8 a 0.9, seguido por una disminución de la velocidad de secado característica de un proceso controlado por difusión. El producto secado a mayor temperatura tiene la velocidad de secado más alta, mientras que la menor temperatura se asocia a una velocidad de secado más lenta.

La Figura 6.1c muestra que los cilindros de yuca tuvieron una disminución del diámetro original superior al 30%. Por otra parte, se observa que todas las muestras sufren un encogimiento comparable a un mismo contenido de humedad sin importar la temperatura del proceso. Una representación de la variación de los datos experimentales de encogimiento con respecto al tiempo se presenta en la Figura 6.1d, donde se observa que a mayor temperatura de secado la disminución del tamaño del producto es más rápida. La Figura 6.1e representa el recíproco de los datos experimentales de encogimiento ($1/\omega^2$), los cuales permitieron determinar los parámetros de la Ecuación (4.14). Empleando los datos obtenidos de la evaluación analítica de $f(t)$, se construyó la curva de Ψ vs. $f(t)$ donde se observa que se recuperó el comportamiento curvo inicial esperado de un proceso controlado por difusión seguido de un comportamiento de línea recta, rango en el que fue ajustado el modelo ($R^2 > 0.995$), como se observa en la Figura 6.1f.

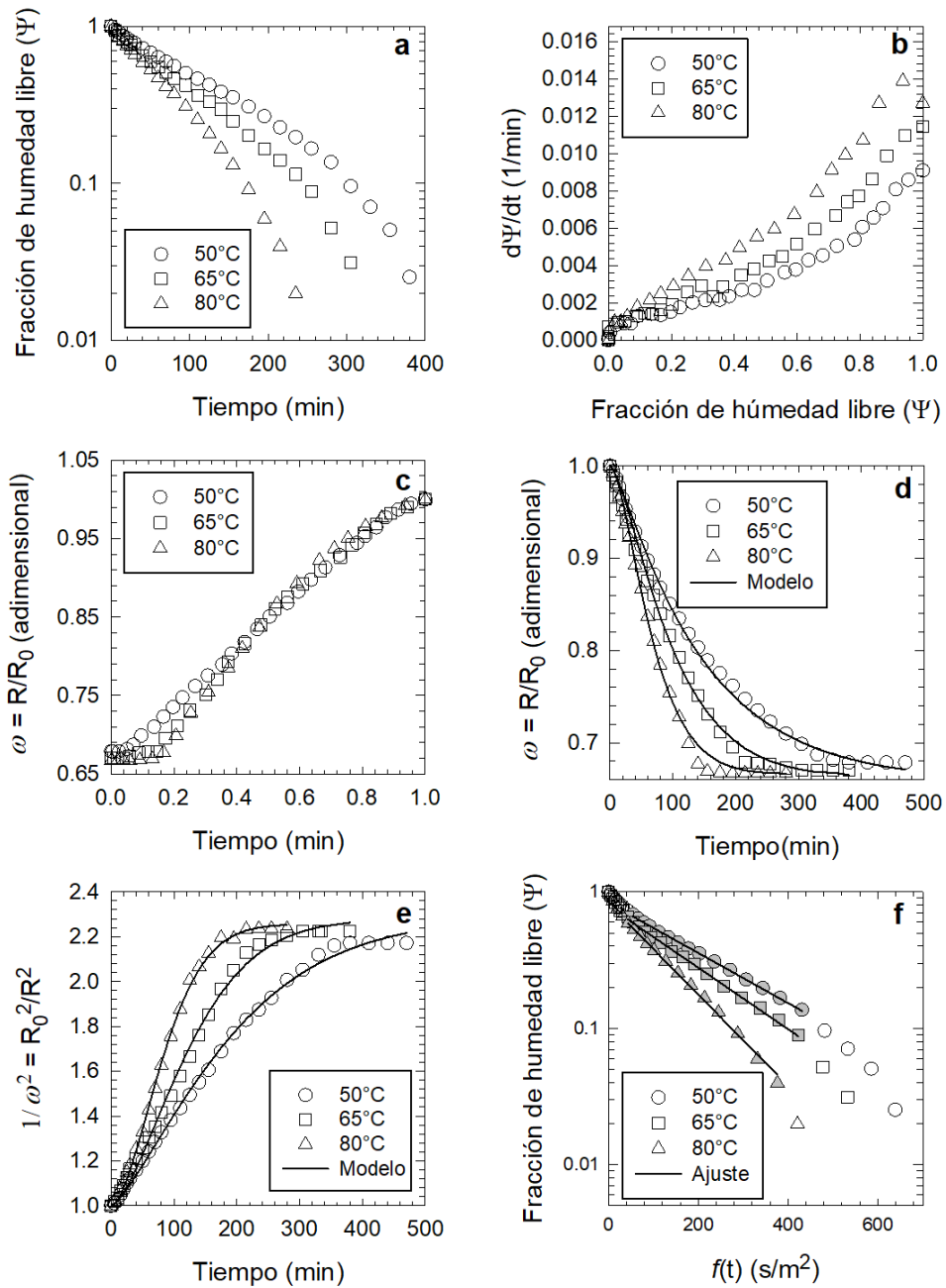


Figura 6.1. Datos de secado convectivo de cilindros de yuca a diferentes temperaturas. (a) curva de humedad, (b) curva de velocidad de secado, (c) encogimiento como función de la humedad, (d) encogimiento como función del tiempo, (e) recíproco del cuadrado de la función de encogimiento y (f) curva de humedad contra la función de tiempo para corregir encogimiento (únicamente se ajustan los datos sombreados).

6.1.2. Determinación de la difusividad del agua en yuca

Se estimaron coeficientes de difusión del agua en el rango de $3.9 - 7.4 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ considerando el encogimiento del producto (Tabla 6.1). Los resultados obtenidos indican que la difusión del agua está sobreestimada en un 60 a 81 % cuando el encogimiento no se considera en los cálculos (Tabla 6.1). De hecho, los coeficientes de difusión son más pequeños que los reportados por Karathanos et al. (1990) y Fernando et al. (2011). Karathanos et al. (1990) ha reportado valores en el rango de $0.79 - 1.66 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ para el secado convectivo de placas de yuca a 55°C mientras que Fernando et al. (2011) indicaron valores entre $5.09 - 5.10 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ para placas con espesores entre 0.5 y 1.5 cm, respectivamente. Esto se puede deber a que en estos trabajos no se ha considerado el encogimiento, confirmando que el despreciar este fenómeno produce la sobreestimación de la difusividad, ya que se desprecia la reducción de la distancia que deben recorrer las moléculas de agua. El mismo efecto ha sido reportado por varios autores en otros productos comparado modelos con y sin contracción. Por ejemplo, en el caso de placas de papaya (Kurozawa et al., 2012), los coeficientes de difusión del agua estimados sin encogimiento fueron entre el 23 y el 47 % más altos en comparación con los que incluyen el efecto de la contracción de las muestras. La Figura 6.2 muestra que las difusividades estimadas considerando o no encogimiento siguen una dependencia de Arrhenius con la temperatura de secado. La energía de activación y el factor preexponencial se estimaron como -21.6 kJ/mol y -13.1 , respectivamente, cuando el modelo no considera el cambio de tamaño del producto. En cambio, estos valores se determinaron como -19.9 kJ/mol y -14.3 cuando las difusividades incluyen el efecto del encogimiento. El análisis de la energía de activación indica que no existe diferencia significativa del efecto de la temperatura sobre las difusividades ($p > 0.05$), sin importar si éstas fueron estimadas considerando o no el encogimiento del sólido.

Tabla 6.1. Coeficientes de difusión del agua estimados durante el secado convectivo de cilindros de yuca.

Condición	Considerando encogimiento	Sin considerar encogimiento
T (°C)	$D \times 10^{10}(\text{m}^2/\text{s})^{1,2}$	$D \times 10^{10}(\text{m}^2/\text{s})^{1,2}$
50	3.94 (4.01/3.87)	6.40 (6.60/6.21)
65	4.81 (4.92/4.70)	8.52 (8.86/8.19)
80	7.41 (7.67/7.15)	12.72 (13.45/11.99)

¹Los valores entre paréntesis indican los intervalos de confianza al 95 %.

²El coeficiente de determinación (R^2) en todos los casos es superior a 0.991.

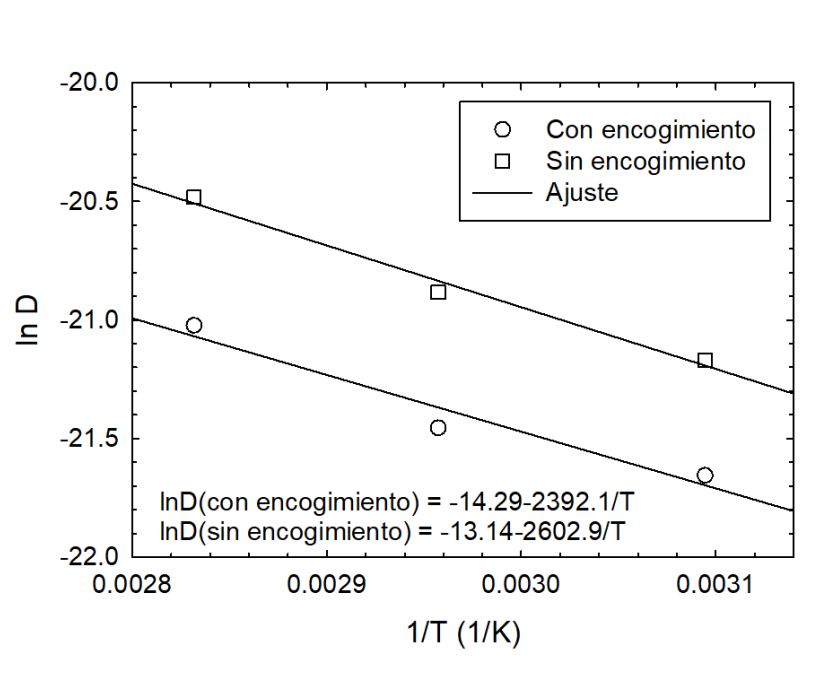


Figura 6.2. Gráfica de Arrhenius de las difusividades del agua estimadas durante el secado convectivo de yuca considerando o no su encogimiento.

6.2. Efecto de la discrepancia geométrica en el proceso de deshidratación osmótica de púleos de champiñón

6.2.1. Características morfométricas del producto

El procedimiento presentado en la Sección 4.2.1 se aplicó para extraer los descriptores geométricos de los púleos de champiñón (ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} y a) y evaluar su variación en el proceso de deshidratación osmótica. En las Figuras 6.3a y 6.3b se pueden observar los pasos del método PSR para una muestra procesada con una solución de cloruro de sodio al 10 % (p/p) durante 180 minutos a 40°C, mientras que el resultado del algoritmo para otras condiciones experimentales se presenta en la Figura 6.3c. El algoritmo propuesto converge en menos de 10 iteraciones (Figura 6.3d), cada una involucrando dos aplicaciones del algoritmo ICP.

Las Figuras 6.4a, 6.4b y 6.4c muestran la evolución de los parámetros ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{in} y a estimados por el método PSR de los púleos de champiñón en función de la pérdida de agua. Cabe resaltar que cada punto en estas gráficas se estimó a partir del contorno promedio de tres muestras. Los rangos y valores promedios (media \pm desviación estándar, $n = 109$) para cada variable se identificaron como: $0.47 \leq \xi_{in} \leq 1.08$ (0.80 ± 0.12), $1.05 \leq \xi_{out} \leq 1.92$ (1.50 ± 0.16), $-0.52 \leq \theta_{in} \leq 0.00$ (-0.22 ± 0.16) y $3.53 \leq a \leq 10.13$ (6.48 ± 1.33 mm). La elipticidad del producto se estimó a partir de ξ_{out} con la Ecuación (5.12) dentro del rango de $0.29 \leq e \leq 0.62$ (0.43 ± 0.06). De acuerdo con estos resultados, la geometría del producto tiene una desviación significativa de la geometría de una esfera ($e = 0$) ($p < 0.05$). Como el foco de la elipse (a) fue la única variable que mostró un cambio significativo con la pérdida de agua ($p < 0.05$), validando una consideración hecha en el desarrollo del modelo de transferencia de masa, se propuso el siguiente modelo para actualizar su valor durante la simulación:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{\Omega k' \bar{W}}{1 + k' \bar{W}} \right) \quad (6.1)$$

donde $a_0 = 7.973$ mm, $\Omega = 0.3655$ (adimensional) y $k' = 4.14 \times 10^{-12}$ (100 g pro-

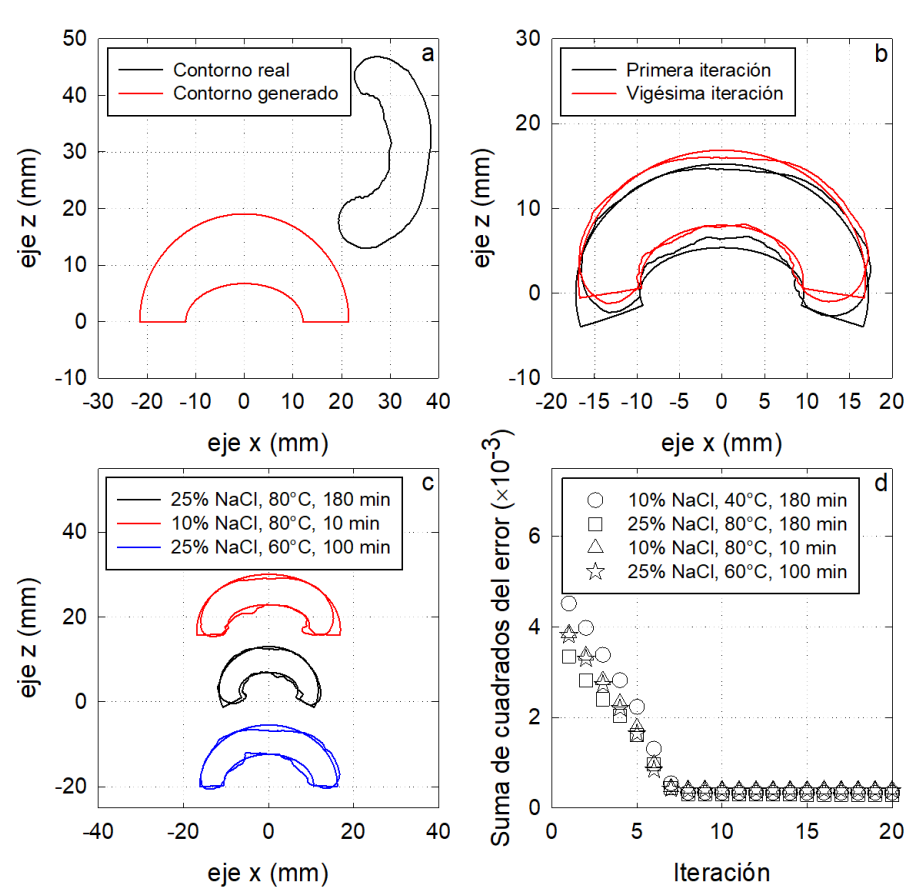


Figura 6.3. Pasos del método de registro de conjunto de puntos para estimar la geometría óptima de púleos de champiñón. (a) Posición inicial para la geometría generada con el sistema coordenado esferoidal achatado (modelo) y la real (180 min, NaCl al 10% y 40°C), (b) primera y última iteración (180 min, 0.1 NaCl/g solución y 40°C), (c) geometrías generadas con el método PSR para otras condiciones experimentales y (d) convergencia del algoritmo.

ducto/g agua). En este modelo, a_0 representa la estimación inicial del tamaño de la geometría mientras que Ω se relaciona con el grado en que el producto se encoge durante el proceso. Por otra parte, k' se relaciona con la velocidad a la que se contrae el producto. Este modelo se representa en la Figura 6.4c.

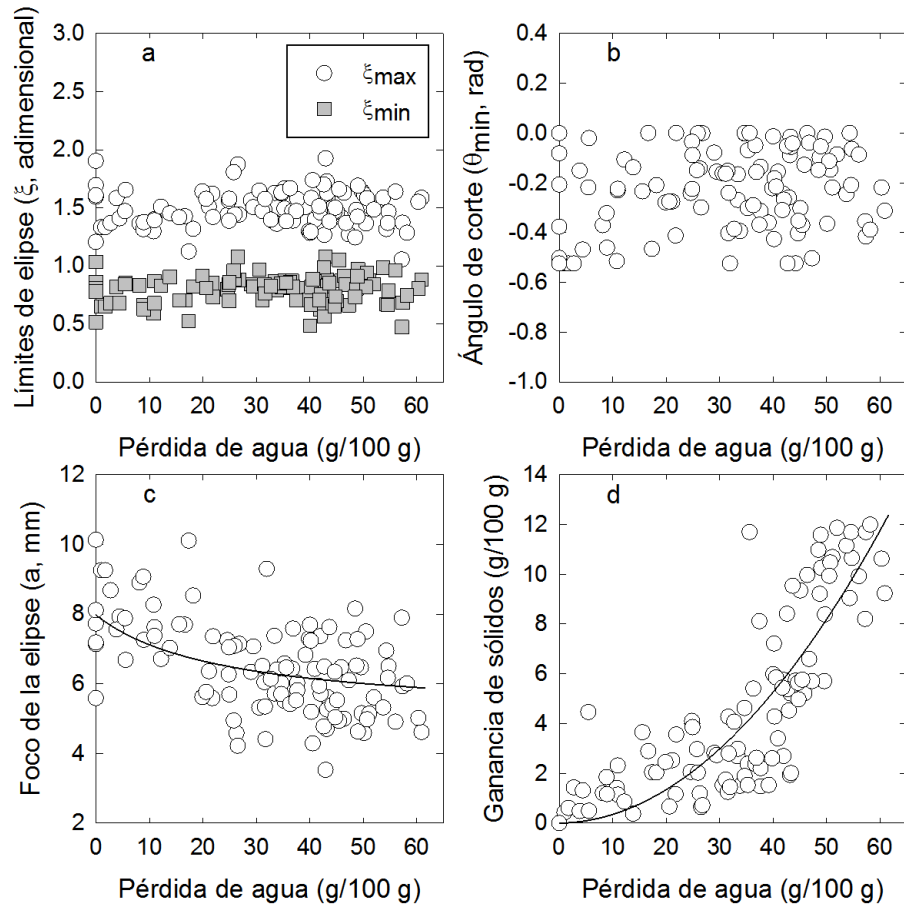


Figura 6.4. Evolución de los parámetros geométricos estimados con el método PSR y de la ganancia de soluto en función de la pérdida de agua durante la deshidratación osmótica de púeos de champiñón. (a) Límites de la elipse (ξ_{in} y ξ_{out}), (b) ángulo de corte (θ_{min}), (c) foco de la elipse (a) y (d) ganancia de soluto.

Para la simulación de las curvas de impregnación se propuso la siguiente relación entre la ganancia de soluto y la pérdida de agua (Figura 6.4d) con la finalidad de

aplicar la Ecuación (6.1):

$$\bar{S} = b_1 \bar{W} + b_2 \bar{W}^2$$

donde $b_1 = 2.84 \times 10^{-3}$ g soluto/g agua y $b_2 = 3.22 \times 10^{-3}$ (g soluto)(100 g producto)/(g agua)².

La geometría del producto utilizada durante las simulaciones de transferencia de masa se generó con los parámetros estimados por el método PSR. En este caso, como los límites de la elipse y el ángulo de corte no mostraron un cambio significativo durante el proceso, se usó un valor promedio de ellos durante las simulaciones de transferencia de masa ($\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$ y $\theta_{min} = -0.224$ rad). Por otra parte, el foco inicial de la elipse se consideró como el estimado con la Ecuación (6.1) ($a_0 = 7.973$ mm).

González-Pérez et al. (2019a) reportaron que el índice de redondez del producto se encuentra en el rango de $0.47 \leq I_r \leq 0.73$ (0.64 ± 0.06). Además, emplearon una geometría de corona esférica para representar la forma del producto durante las simulaciones de deshidratación osmótica, donde el radio interior representó el 51 % del exterior. La Ecuación (5.5) se aplicó para estimar el índice de redondez de esta geometría como $I_r = 0.37$. Por otro lado, la geometría generada con los parámetros del método PSR tiene un índice de redondez $I_r = 0.63$. Se encontró una diferencia significativa entre el índice de redondez de la forma real del producto y la de corona esférica ($p < 0.05$), pero no entre la geometría generada con el método PSR y la real ($p > 0.05$). Por lo tanto, la figura generada con el método PSR es más adecuada que la geometría de corona esférica para representar el producto durante la simulación de transferencia de masa, ya que representa mejor la forma real de las muestras.

6.2.2. Análisis del transporte de masa durante la deshidratación osmótica

El modelo de deshidratación osmótica basado en el sistema coordenado esferoidal achatado logró una buena reproducción de las curvas de pérdida de agua ($R^2 >$

0.87) y ganancia de soluto ($R^2 > 0.60$) (Figuras 6.5). Los coeficientes de difusión del agua ($D_{w,RNL}$) se estimaron en el rango $0.7 \times 10^{-9} - 3.6 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, mientras que los correspondientes al soluto ($D_{s,RNL}$) se encuentran entre 0.7×10^{-9} y $1.4 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ (Tablas 6.2 y 6.3). Los valores de difusividad del agua estimados con la geometría generada por el método PSR y el sistema coordenado esferoidal achatado fueron significativamente más bajos ($p < 0.05$) que los estimados al considerar la geometría de corona esférica reportada por González-Pérez et al. (2019a) (Tabla 6.4). Las diferencias relativas entre los coeficientes de difusión estimados entre los dos modelos, $E_1(D_j)$ (para $j = w, s$), están en el rango del 4 al 51% (promedio de 23%) y del 25 al 89% (promedio de 55%) para el agua y soluto, respectivamente. Por lo tanto, la geometría empleada tiene un efecto significativo en la estimación de la difusividad del agua.

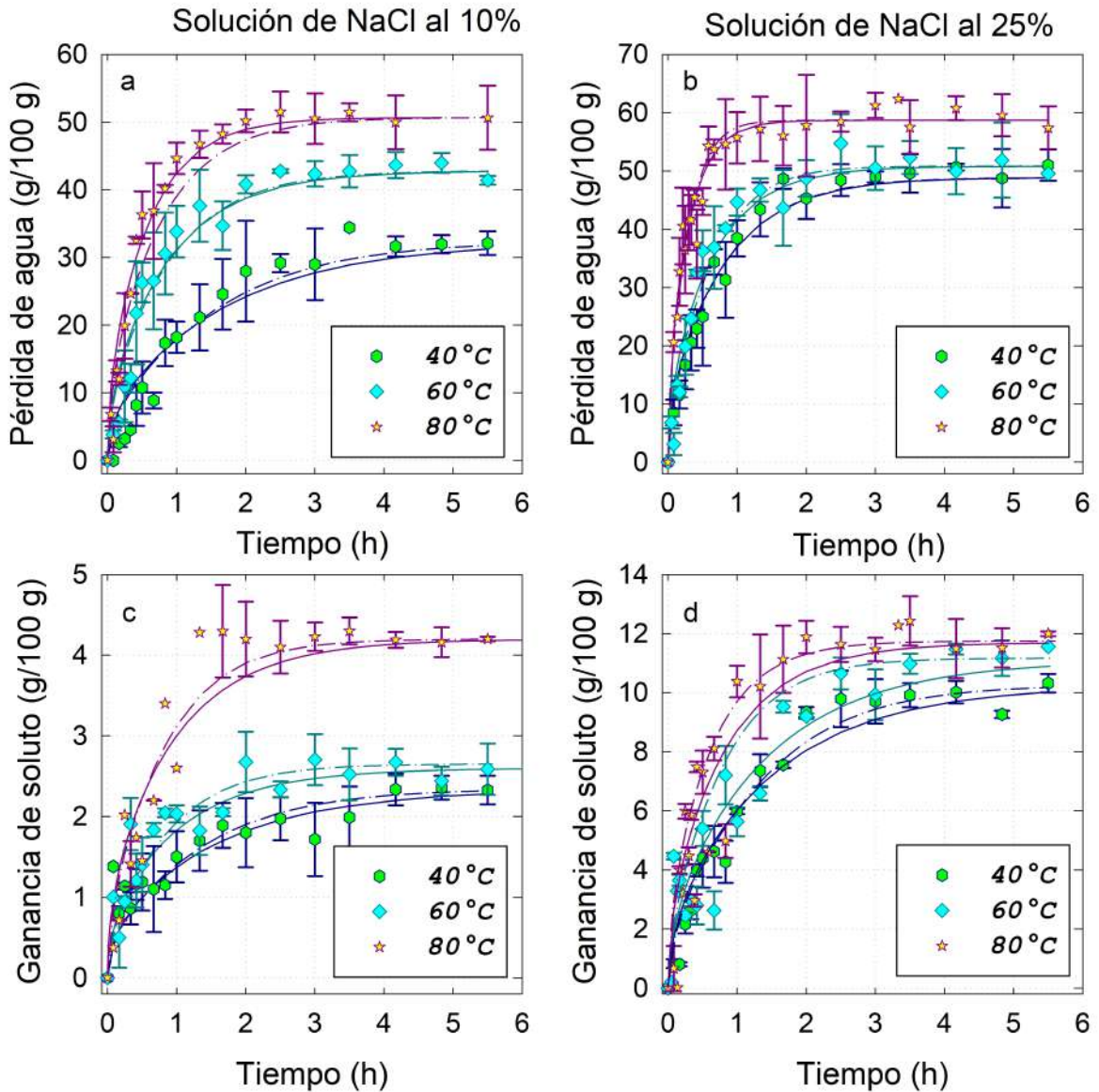


Figura 6.5. Comparación de datos experimentales y simulados para la pérdida de agua (a-b) y ganancia de soluto (c-d) durante la deshidratación osmótica de púleos de champiñón. Línea continua: Simulación con la geometría generada en el sistema coordenado esferoidal achatado y el método PSR. Líneas punteadas: Simulación con la geometría de corona esférica propuesta por González-Pérez et al. (2019a).

Tabla 6.2. Difusividades del agua y soluto estimadas por regresión no lineal y la geometría generada por el método PSR durante la deshidratación osmótica de púños de champiñón.

C_{s0}	T (°C)	$D_w \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$D_s \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2
10	40	0.73 (0.60/0.86)	0.87	0.89 (0.70/1.08)	0.65
10	60	1.29 (1.09/1.48)	0.90	1.41 (1.03/1.80)	0.60
10	80	1.85 (1.62/2.07)	0.93	1.42 (1.17/1.66)	0.87
25	40	1.38 (1.22/1.55)	0.93	0.68 (0.58/0.77)	0.90
25	60	1.72 (1.50/1.94)	0.93	0.70 (0.59/0.81)	0.87
25	80	3.55 (3.21/3.89)	0.89	1.14 (0.96/1.33)	0.84

¹Los valores entre paréntesis indican los intervalos de confianza de 95 %.

Tabla 6.3. Difusividades del agua y soluto estimadas por regresión lineal (método simplificado) durante la deshidratación osmótica de púños de champiñón.

C_{s0}	T (°C)	$D_w \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$D_s \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2
10	40	0.31 (0.26/0.36)	0.81	0.23 (0.20/0.26)	0.88
10	60	0.59 (0.51/0.67)	0.87	0.25 (0.21/0.29)	0.87
10	80	0.89 (0.80/0.98)	0.92	0.60 (0.49/0.72)	0.93
25	40	0.56 (0.50/0.63)	0.89	0.38 (0.34/0.41)	0.92
25	60	0.73 (0.61/0.84)	0.83	0.41 (0.36/0.46)	0.91
25	80	0.92 (0.70/0.11)	0.83	0.95 (0.76/1.13)	0.77

¹Los valores entre paréntesis indican los intervalos de confianza de 95 %.

Tabla 6.4. Diferencia relativa entre los coeficientes de difusión de agua y soluto reportados por diversos métodos durante la deshidratación osmótica de pñeos de champiñón.¹

C_{s0}	T(°C)	$E_1(D_w)$	$E_1(D_s)$	$E_2(D_w)$	$E_2(D_s)$
10	40	50.68	65.17	-57.53	-74.16
10	60	36.43	24.82	-54.26	-82.27
10	80	7.57	28.87	-51.89	-57.75
25	40	4.35	60.29	-59.42	-44.12
25	60	7.56	88.57	-57.56	-41.43
25	80	28.45	61.40	-74.08	-16.67

¹ E_1 es la diferencia relativa entre las difusividades estimadas con la geometría propuesta (regresión no lineal) y la de corona esférica reportadas por González-Pérez et al. (2019a). E_2 es la diferencia relativa entre difusividades estimadas con la geometría propuesta usando regresión no lineal y el método simplificado.

En la Figura 6.6 se muestra una comparación entre los perfiles predichos de pérdida de agua y ganancia de soluto en el producto después de 15 minutos (80°C, solución de NaCl al 10 %) para los modelos que utilizan las geometrías de corona esférica González-Pérez et al. (2019a) y la generada por el método PSR. En cada modelo se implementa el encogimiento del producto de manera diferente. La contracción se refleja en el acortamiento de la dimensión radial en el modelo de corona esférica, mientras que en la geometría generada por el método PSR se actualiza el foco de la elipse (a), no una coordenada. Sin embargo, ambos modelos predicen perfiles de concentración y tamaños similares en el producto para el mismo tiempo de procesamiento y, pese a que ambas geometrías se parecen, se observó una diferencia significativa en los coeficientes de difusión estimados ($p < 0.05$). Cabe destacar que ninguno de los modelos captura completamente la forma compleja del producto y su evolución durante la deshidratación osmótica; sin embargo, el modelo basado en

el método PSR y en el sistema coordenado esferoidal achatado es más cercano a la forma real del producto, como se explicó anteriormente. Como resultado, la discrepancia geométrica se elimina casi por completo en el modelo propuesto (basado en el sistema esferoidal achatado y la metodología PSR) y los coeficientes de difusión son menos propensos a ser sobrestimados para compensar este hecho. La única forma de eliminar completamente la discrepancia geométrica sería utilizar la forma real del producto durante las simulaciones, como fue demostrado por López-Méndez et al. (2018) durante el secado de sistemas modelo de gel, donde se consideraron incluso los cambios de forma del producto. Sin embargo, el algoritmo propuesto por López-Méndez et al. (2018) aún no se ha generalizado a productos cuya representación requiera emplear sólidos de revolución, como es el caso del champiñón.

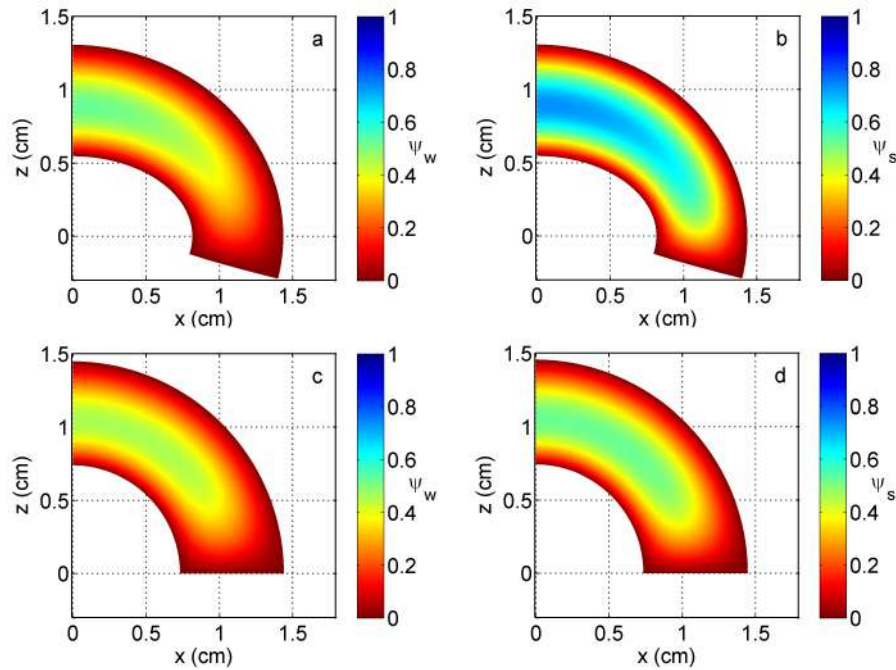


Figura 6.6. Perfiles de concentración de agua (a, c) y soluto (b, d) predichos en el interior del producto osmodeshidratado ($t = 15$ min, 80°C , 10 % de NaCl solución) representando al píleo como una sección de esferoide achatado (arriba) y casco esférico (abajo). El modelo para el casco esférico fue reportado por González-Pérez et al. (2019a).

En el trabajo de González-Pérez et al. (2019a) se reportaron los coeficientes de

difusión del NaCl en agua como 1.59×10^{-9} , 1.67×10^{-9} y 1.73×10^{-9} m²/s para una concentración de 0.1 g/g y 1.61×10^{-9} , 1.67×10^{-9} y 1.69×10^{-9} m²/s para 0.25 g/g a las temperaturas de 40, 60 y 80°C, respectivamente. Estos valores pueden considerarse como el valor máximo de los coeficientes de difusión del NaCl en el producto, ya que la matriz del producto producirá coeficientes de difusión más bajos. González-Pérez et al. (2019a) estimaron la difusividad del NaCl durante la deshidratación osmótica de pñeos de champiñón (solución de NaCl al 10 y 25 %; 40, 60 y 80°C). Sin embargo, a excepción de los coeficientes de difusión de NaCl estimados para 0.25 g/g de soluto a 40 y 60°C, todos los coeficientes restantes en el producto dados por González-Pérez et al. (2019a) no fueron estadísticamente diferentes a los de NaCl en agua pura ($p > 0.05$). Por ello González-Pérez et al. (2019a) plantean que la sobreestimación de los coeficientes de difusión del NaCl en el producto puede deberse a la presencia de otros fenómenos de transferencia de masa y/o discrepancia geométrica, siendo la última hipótesis confirmada en este trabajo. El uso del sistema coordinado esferoidal achatado y el método PSR permitió la estimación de valores más bajos para los coeficientes de difusión del NaCl en el producto que los determinados en agua pura ($p < 0.05$) para cinco condiciones de procesamiento (NaCl al 10 % a 40° C y 80° C y NaCl al 25 % a 40, 60 y 80° C), mientras que no hubo diferencia significativa entre los estimados en los tratamientos restantes ($p > 0.05$). Este hecho puede explicarse por la discrepancia aun existente en la geometría del producto y por considerar despreciable el cambio de forma durante la simulación del proceso de deshidratación osmótica. Por lo tanto, se requieren esfuerzos adicionales para resolver estos problemas.

6.2.3. Método simplificado para la estimación de difusividades

Las difusividades estimadas con el método simplificado de regresión lineal se presentan en la Tabla 6.3. Estos datos se calcularon usando el primer valor propio $\lambda_1^2 = 8.112$ ($\Lambda_1^2 = 3.095$), correspondiente a $\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$ y $\theta_{min} = -0.224$ rad. El valor propio requerido puede ser ubicado en la gráfica de las pendientes de las soluciones promedio (Λ_1^2) a partir de simulaciones realizadas con el número de Fourier modificado para transferencia de masa (τ') bajo diferentes parámetros geométricos

(Figura 6.7). Estas gráficas pueden ser usadas para la estimación rápida de difusividades de masa en otros productos con geometrías desarrolladas a partir del sistema coordenado esferoidal achatado utilizando el enfoque de regresión lineal propuesto si no se dispone de la solución numérica. En este caso, las difusividades se corrigieron para considerar la contracción del producto considerando un valor promedio en el tiempo del foco de la elipse al integrar la Ecuación (6.1) como

$$a = \frac{a_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\Omega k' x}{1+k'x}\right) dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx} = a_0 \left[1 - \Omega + \frac{\Omega}{k' (x_2 - x_1)} \ln \left(\frac{k' x_2 + 1}{k' x_1 + 1} \right) \right] \quad (6.2)$$

Los valores de difusividad estimados con el método de regresión lineal y el modelo simplificado (4.29) fueron significativamente más bajos ($p < 0.05$) que aquellos estimados con el modelo original. Las diferencias relativas en los coeficientes de difusión estimados entre ambos enfoques, $E_2(D_j)$ (para $j = w, s$), están dentro de los rangos de 52-74 % (promedio de 59 %) y 17-82 % (promedio de 53 %) para la pérdida de agua y ganancia de soluto, respectivamente (Tabla 6.4). El error promedio es comparable al obtenido entre las geometrías de corona esférica y la generada con el método PSR. Sin embargo, según algunos autores, la discrepancia geométrica puede causar la sobrestimación de los coeficientes de difusión en alrededor del 397 a 471 % (Bon et al., 1997). Por lo tanto, el enfoque de regresión lineal que usa las pendientes reportadas representa un método rápido y aceptable para estimar propiedades de transferencia de masa en productos con geometría similar a la de un esferoide achatado.

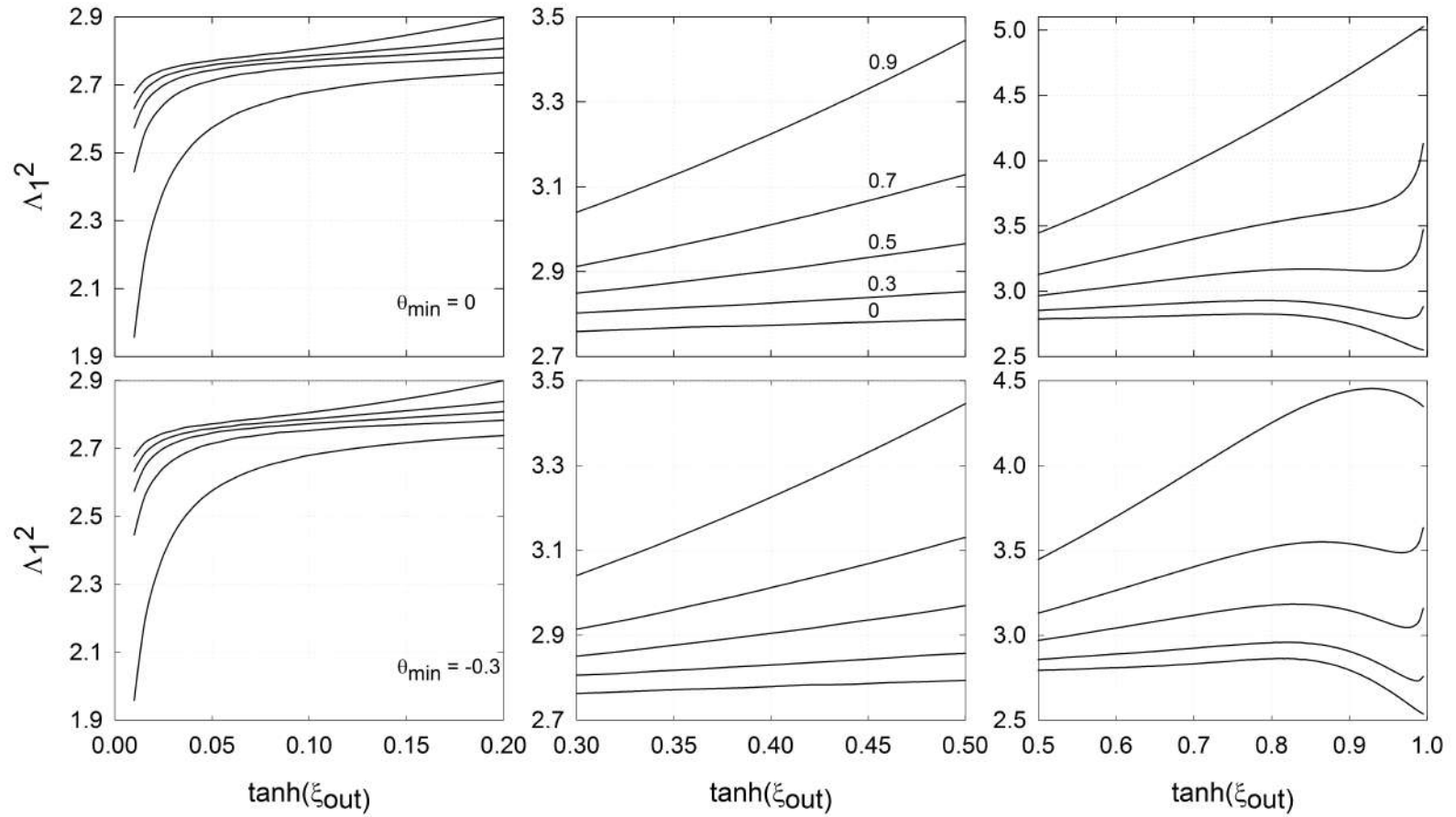


Figura 6.7. Pendientes asintóticas de las soluciones promedio de transferencia de masa para geometrías derivadas del sistema coordenado esferoidal achatado bajo diferentes parámetros geométricos. Los números arriba de cada curva representan el valor de $\chi = \xi_{in}/\xi_{out}$.

6.3. Uso del método de pendientes generalizado para estimar coeficientes de difusión

6.3.1. Estimación de atributos geométricos con el método PSR

Algunos contornos seleccionados de los cortes transversales se muestran en la Figura 6.8 para las muestras pretratadas y frescas, secadas a 50°C. Como se observa en esta figura, el pretratamiento de deshidratación osmótica provocó una reducción importante del tamaño de la muestra; por lo tanto, estos contornos exhiben un tamaño inicial menor en comparación con las muestras frescas, pero alcanzaron aproximadamente el mismo tamaño al final del secado. Todas las muestras se deformaron y se aplanaron con la remoción del agua.

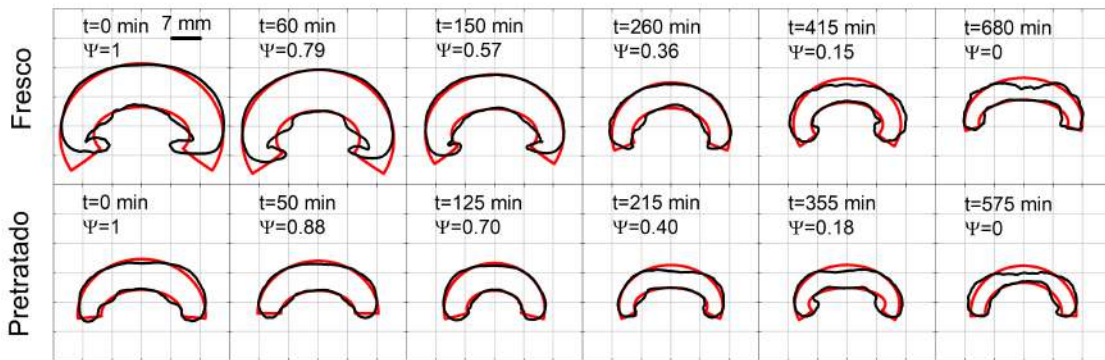


Figura 6.8. Extracción del contorno de púleos de champiñón frescos y pretratados (40°C, 25 g NaCl/100 g solución, 180 min) sujetos a secado convectivo (50°C), aplicando el algoritmo PSR. El contorno negro es el promedio de tres cortes transversales obtenidos mediante análisis de imagen. El contorno rojo es la geometría óptima generada en el sistema de coordenadas esferoidal achatado por el algoritmo PSR.

A partir de cada contorno (proveniente del promedio de tres muestras) se estimó un conjunto de parámetros óptimo x_{out} , z_{out} , z_{in} , θ_{min} y a que describe la geometría del champiñón con el algoritmo PSR. El promedio de los datos resultantes para cada corte transversal de los púleos se representan como puntos en la Figura 6.9 en

función de su fracción de humedad. Se identificaron los siguientes rangos y valores promedios (promedio \pm desviación estándar, $n = 33$) para cada variable de las muestras sin pretratamiento: $6.7 \leq x_{in} \leq 12.0$ (9.4 ± 1.2 mm), $10.7 \leq x_{out} \leq 19.9$ (15.7 ± 2.4 mm), $3.7 \leq z_{in} \leq 7.4$ (5.9 ± 0.9 mm), $10.0 \leq z_{out} \leq 18.5$ (13.8 ± 2.5 mm), $-0.52 \leq \theta_{min} \leq 0.00$ (-0.32 ± 0.20 rad) y $3.7 \leq a \leq 10.7$ (7.3 ± 1.7 mm). En el caso del producto pretratado, los parámetros están en el rango de $3.8 \leq x_{in} \leq 9.7$ (8.1 ± 1.2 mm), $10.9 \leq x_{out} \leq 15.3$ (12.7 ± 1.1 mm), $2.6 \leq z_{in} \leq 7.3$ (5.1 ± 1.0 mm), $9.3 \leq z_{out} \leq 13.3$ (11.0 ± 1.1 mm), $-0.52 \leq \theta_{min} \leq 0.00$ (-0.25 ± 0.14 rad) y $2.1 \leq a \leq 8.2$ (6.2 ± 1.4 mm). Los valores estimados con el método PSR además se utilizaron para estimar el volumen del producto resolviendo el denominador en la Ecuación (5.11) (Figura 6.9f). El volumen del producto se encuentra en el rango de $2.1 \leq V \leq 18.7$ (8.4 ± 4.8 cm³) y $2.5 \leq V \leq 5.8$ (3.6 ± 0.9 cm³) para las muestras frescas y pretratadas, respectivamente.

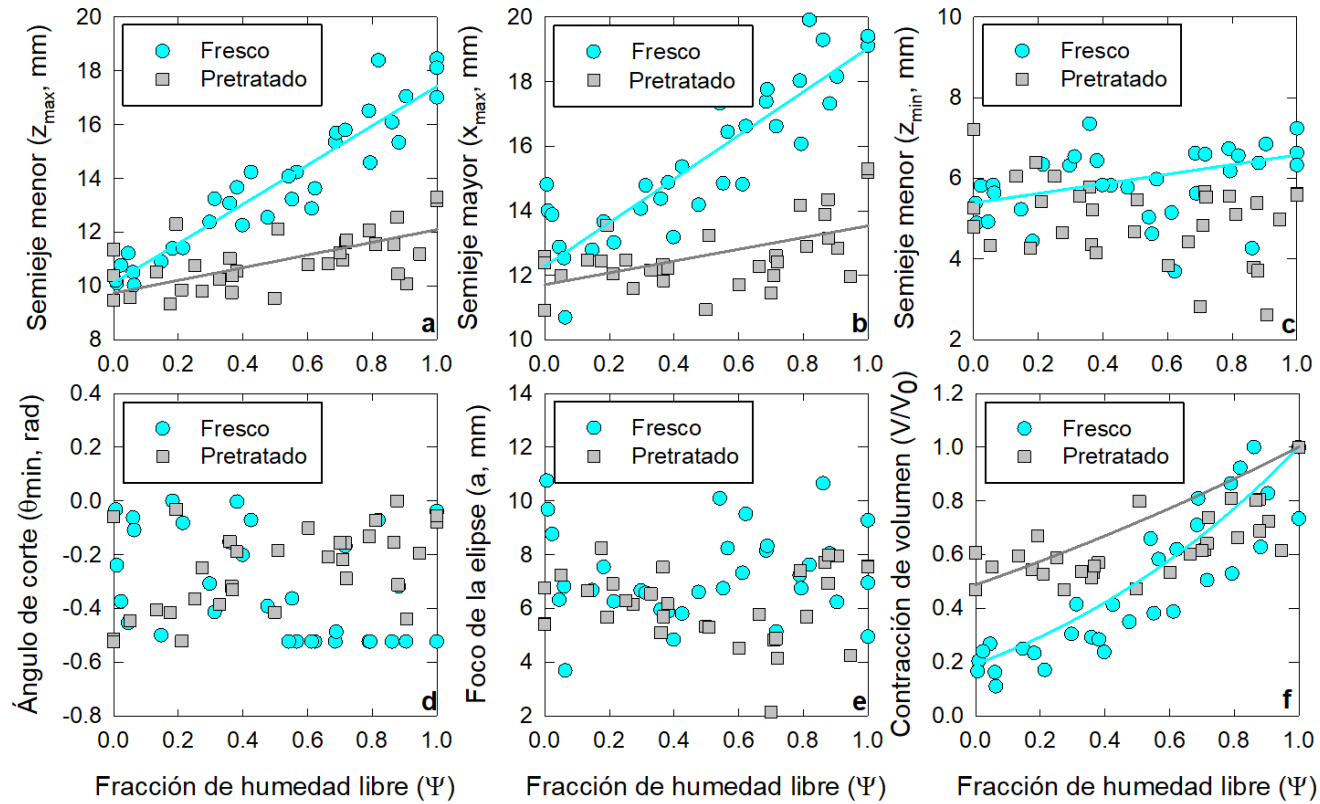


Figura 6.9. Evolución de las dimensiones de las muestras frescas y pretratadas en función de la fracción de humedad libre. (a) semieje menor exterior, (b) semieje mayor exterior, (c) semieje menor interior, (d) ángulo de corte, (e) foco de la elipse y (f) encogimiento volumétrico. Los datos de las figuras (a)-(e) se estimaron con el método PSR. Las líneas en las figuras (a)-(e) corresponden a las Ecuaciones (6.3)-(6.7). Los puntos experimentales en la figura (f) se estimaron con los datos en las figuras (a)-(e) y la Ecuación (5.21). Las líneas en la gráfica (f) se determinaron con las Ecuaciones (6.3)-(6.7) y el denominador de la Ecuación (5.11).

Los semiejes menor (en muestras frescas) y mayor (en muestras frescas y pretratadas) exteriores son las únicas variables que mostraron un cambio significativo respecto a la fracción de humedad libre ($p < 0.05$). Además, una reducción similar en estas variables se observó para niveles comparables de humedad independientemente de la temperatura de procesamiento. Por lo tanto, los datos de todas las temperaturas se agruparon para obtener las ecuaciones que implementan el encogimiento durante la simulación, obteniéndose los siguientes modelos (los valores en paréntesis representan los intervalos de confianza 95 %).

$$z_{out}(\text{fresco, mm}) = 7.3 (\pm 0.9) \Psi + 10.1 (\pm 0.6) \quad (DRM = 4.4 \%) \quad (6.3)$$

$$x_{out}(\text{fresco, mm}) = 6.8 (\pm 1.2) \Psi + 12.3 (\pm 0.7) \quad (DRM = 5.5 \%) \quad (6.4)$$

$$z_{in}(\text{fresco, mm}) = 1.2 (\pm 0.9) \Psi + 5.4 (\pm 0.6) \quad (DRM = 11.5 \%) \quad (6.5)$$

$$z_{out}(\text{pretratado, mm}) = 2.4 (\pm 1.0) \Psi + 9.7 (\pm 0.6) \quad (DRM = 6.2 \%) \quad (6.6)$$

$$x_{out}(\text{pretratado, mm}) = 1.8 (\pm 1.0) \Psi + 11.7 (\pm 0.6) \quad (DRM = 5.9 \%) \quad (6.7)$$

Las Ecuaciones (6.3)-(6.7) se representan como líneas en la Figura 6.9. Los parámetros que representan al ángulo de corte (θ_{min}) y el foco de la elipse (a) en las muestras frescas y pretratadas, así como el semieje menor en las muestras pretratadas (z_{in}) no exhiben una relación significativa con el contenido de humedad ($p > 0.05$); por lo tanto, fueron considerados iguales a sus valores promedios en la simulación).

6.3.2. Transferencia de masa durante el secado convectivo de púleos de champiñón

De acuerdo con la Ecuación (4.41), el cambio del tamaño del producto sólo se puede considerar en un único parámetro L para aplicar el método de pendientes. La dimensión propuesta se determinó mediante un examen preliminar de la evolución de los parámetros ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , a , x_{in} , x_{out} , z_{in} y z_{out} en función del contenido de humedad durante el proceso de secado. En este caso, el semieje menor exterior z_{out} fue el parámetro que mostró mayor cambio con el contenido de humedad; así, el

número de Fourier modificado para la transferencia de masa (ϑ) usando en el modelo de secado se basó en este parámetro. Las curvas solución de Ψ vs. ϑ requeridas para aplicar el método de pendientes en las muestras frescas y pretratadas se presentan en la Figura 6.10. Estas curvas incluyen simultáneamente el cambio del tamaño del producto (reflejado solamente en z_{out}) y difusividad variable del agua en ϑ pero se ven exactamente iguales a la solución para un producto que no se encoge con difusividad constante. De hecho, cada gráfica en la Figura 6.10 representa una familia de soluciones para cualquier comportamiento del cambio de tamaño o difusividad, siendo la única diferencia los parámetros geométricos iniciales ξ_{in} , ξ_{out} y θ_{min} .

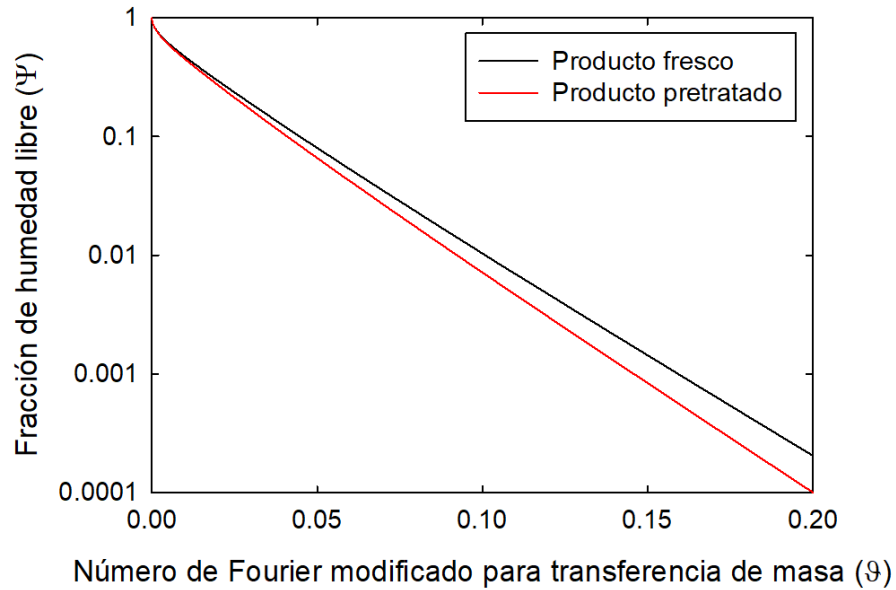


Figura 6.10. Soluciones de referencia para la ecuación de transferencia de masa utilizada en el método de pendientes. La curva para las muestras frescas se generó con $\xi_{in} = 0.77$, $\xi_{out} = 1.14$ y $\theta_{min} = -0.32$ rad. La curva para las muestras pretratadas se generó con $\xi_{in} = 0.77$, $\xi_{out} = 1.37$ y $\theta_{min} = -0.25$ rad.

La fracción de humedad libre experimental se representó nuevamente contra el tiempo de secado en escala lineal y logarítmica para las muestras frescas y pretratadas (Figuras 6.11-6.14, respectivamente). Se puede observar que se necesita un

tiempo de secado más corto (aproximadamente 100 min) para que las muestras pretratadas alcancen su contenido de humedad de equilibrio ($\Psi = 0$) en comparación con las muestras frescas (Figura 6.11 y 6.12); sin embargo, su tiempo total de procesamiento es mayor debido a su etapa previa de impregnación (180 min adicionales). En consecuencia, las muestras frescas tienen menor tiempo total de procesamiento; aunque el pretratamiento de impregnación aún podría ofrecer ahorros potenciales de energía debido a la reducida cantidad de agua que requiere ser evaporada durante el secado convectivo o mejorar las características de calidad del producto final. Las gráficas logarítmicas del contenido de humedad (Figura 6.13 y 6.14) permiten la observación de algunas características de secado del producto que no son fácilmente observables en las gráficas lineales (Figura 6.11 y 6.12). En este caso, se observó una desviación del comportamiento de línea recta (característico del secado difusional en un sólido rígido) para todas las condiciones de secado. Esta curvatura generalmente ha sido atribuida al cambio del tamaño del producto, a una distribución inicial no uniforme del contenido de agua, a la variabilidad de la difusividad de la humedad y a que la temperatura del producto no sea constante durante el proceso (Sharma & Prasad, 2004). Además, la inflexión de las curvas de secado no ocurre a la misma velocidad de cambio, sino que se acentúa o se vuelve irregular a bajos contenidos de humedad ($\Psi < 0.1$), tal vez debido a un daño parcial de la estructura porosa interior de las muestras.

El método de pendientes propuesto permitió evaluar la variabilidad de la difusividad del agua (puntos en la Figura 6.15 y 6.16) en un sólido que cambia de tamaño cuando se carece de solución analítica. El modelo de secado resuelto con estos valores de difusividad mostró una excelente reproducción de los datos experimentales a todos los contenidos de humedad (línea negra en la Figura 6.11-6.14) tanto para muestras frescas como pretratadas, logrando valores de desviación relativa promedio (η) entre 0.7 y 2.4% (Tabla 6.5). Este método proporciona una mejor descripción del comportamiento experimental que el enfoque de regresión no lineal empleando un solo segmento (RpP-1), cuyos valores de η varían del 7.2 a 43.1% (línea roja en la Figura 6.11-6.14), incluso si se detalla más el cambio de tamaño considerando la

variabilidad de la elipticidad del producto (reflejada en ξ_{out}), lo que indica la necesidad de una difusividad variable. En consecuencia, la regresión por partes usando cuatro intervalos de fracción de humedad libre igualmente espaciados (RpP-4) mejora el ajuste del modelo de secado usando un único coeficiente de difusión, con valores de η entre 2.7 y 7.9 % (línea azul en la Figura 6.11-6.14), aunque aún es inferior al método de pendientes. El incremento del número de segmentos más allá de cuatro en la regresión por partes conduce a estimaciones no significativas de los parámetros ($p > 0.05$) para algunos intervalos debido a la disponibilidad reducida de datos experimentales. Por lo tanto, la regresión por partes debe ser usada con cautela al estimar un comportamiento no predefinido de la difusividad del agua.

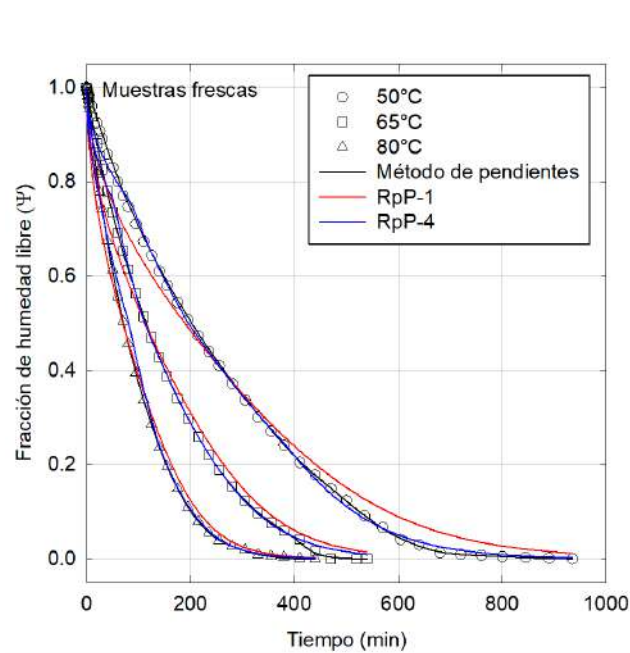


Figura 6.11. Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras frescas de pimientos de champiñón en escala lineal.

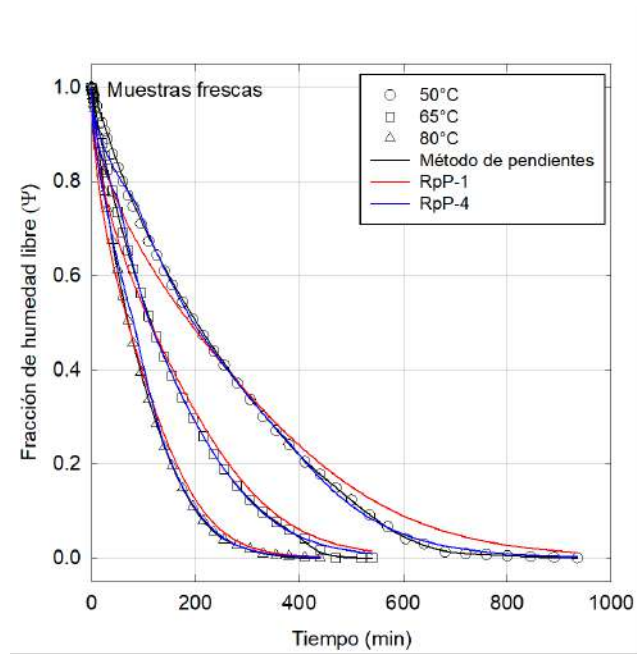


Figura 6.12. Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras pretratadas de pimientos de champiñón en escala lineal.

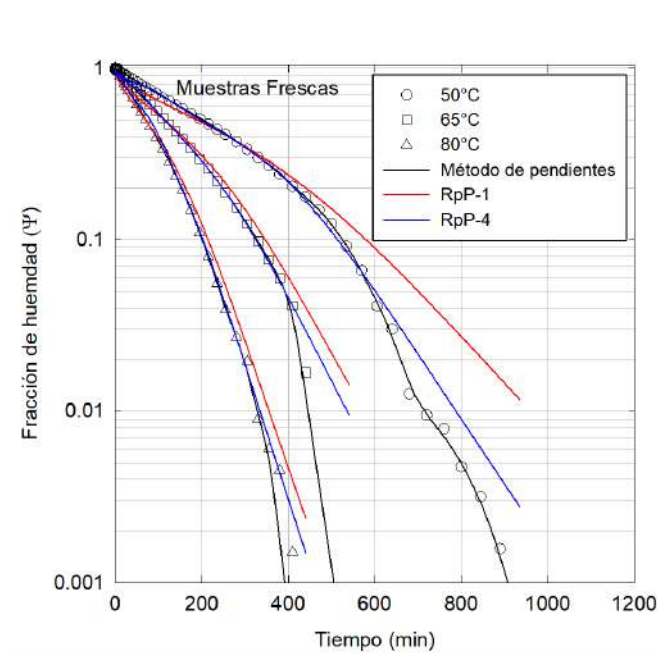


Figura 6.13. Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras frescas de pimientos de champiñón en escala logarítmica.

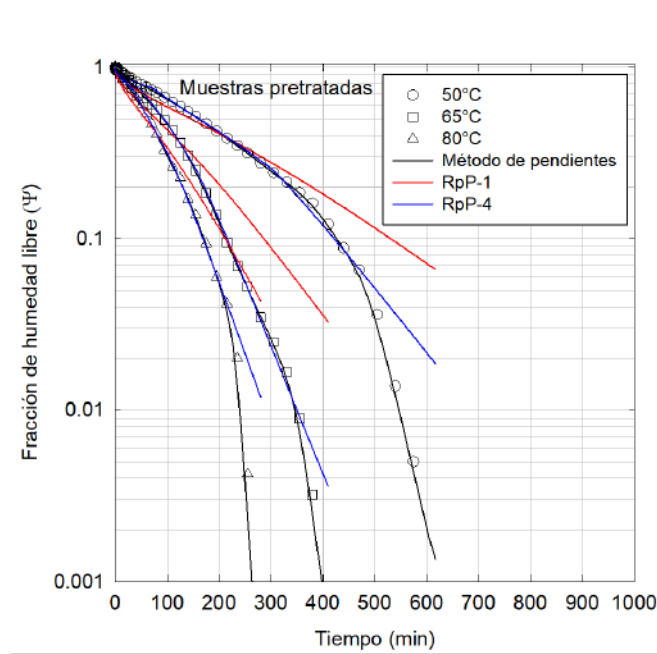


Figura 6.14. Comparación entre las curvas de secado experimentales y simuladas para muestras pretratadas de pimientos de champiñón en escala logarítmica.

Una comparación del comportamiento de la difusividad estimada a diferentes temperaturas por medio de la regresión por partes y el método de pendientes se presenta en las Figuras 6.15 y 6.16. El método de pendientes predice un incremento gradual de la difusividad del agua a medida que la fracción de humedad libre se reduce de 1 a alrededor de 0.7. Esta región puede ser asociada al aumento inicial de la temperatura del producto (Ruiz-López et al., 2012). A partir de ahí se observa un comportamiento de la difusividad casi constante a una fracción de humedad entre 0.25 y 0.7, donde la energía del aire de secado se emplea principalmente para la evaporación superficial del agua. El precalentamiento del producto también lo identifica la regresión por partes (Tablas 6.5), con el primer segmento ($0.75 \leq \Psi \leq 1$) mostrando un valor de difusividad significativamente menor que los de las regiones restantes ($p < 0.05$). Además, la regresión por partes no produce una diferencia significativa en los valores de difusividad en las regiones por debajo de la fracción de humedad de 0.75 ($p > 0.05$), indicando un comportamiento de difusividad constante hasta el final del secado. Sin embargo, el método de pendientes predice, para este producto, un incre-

mento adicional en la movilidad del agua por debajo de una fracción de humedad de 0.1, el cual puede estar relacionado a una segunda fase de calentamiento del producto hasta alcanzar la temperatura de secado, así como con la ruptura de la estructura celular (Ruiz-López et al., 2012). El último resultado también se sustenta en la flexión adicional de las curvas de secado en escala logarítmica (Figura 6.13 y 6.14). La difusividad del agua en la última etapa de secado también puede estar relacionada con cambios en la porosidad del producto (la fracción de espacio vacío dentro de las muestras). Se ha encontrado que la porosidad de los champiñones frescos aumenta durante el secado convencional y el secado asistido por microondas (Torringa et al., 2001; Boukouvalas et al., 2010). Un aumento de la porosidad durante el secado podría mejorar la transferencia de masa al facilitar la movilidad del agua. Dependiendo del producto y de las condiciones de secado, la porosidad puede alcanzar un valor constante o incluso sufrir una reducción drástica a bajos contenidos de humedad, disminuyendo los valores de la difusividad a medida que la interacción entre el agua y el sólido se hace más fuerte o porque la estructura porosa se colapsa, como se observa en otros alimentos porosos, como la manzana (Karathanos et al., 1990; Khalloufi et al., 2015). Torrington et al. (2001) reportaron una drástica reducción en la porosidad de champiñones frescos ($\epsilon = 0.45$) después de un pretratamiento de deshidratación osmótica ($\epsilon \approx 0.02$); sin embargo, la porosidad del producto pretratado aumenta más allá de los niveles encontrados en el producto fresco al final de un secado combinado convectivo y de microondas ($0.81 \leq \epsilon \leq 0.84$). Por lo tanto, los valores de difusividad más bajos de las muestras pretratadas en comparación con los encontrados en muestras frescas podrían atribuirse al hecho de que los sólidos agregados (cloruro de sodio) pueden estar dificultando el transporte de masa al llenar los espacios vacíos de las muestras y, por lo tanto, aumentar las interacciones físicas o químicas con el agua. A medida que el proceso de secado avanza, el incremento gradual en los valores de difusividad del agua de las muestras pretratadas puede estar relacionado con el incremento de la porosidad. En este caso, una reducción en la difusividad del agua a bajos contenidos de humedad no se observó ya que los sólidos añadidos pueden endurecer la estructura porosa minimizando su colapso. El comportamiento de la

difusividad del agua predicho en la última etapa fue esencial para que el método de pendientes reprodujera con precisión la forma de la curva de secado experimental a bajos contenidos de humedad (Figuras 6.13 y 6.14). Tendencias similares han sido reportadas durante el secado de muestras tales como almidones hidratados y gelatinizados (Karathanos et al., 1990), y dientes de ajo (Sharma & Prasad, 2004) a temperaturas del aire de secado entre 40 y 100°C. El mismo fenómeno se atribuye al cambio del mecanismo de transporte de agua de difusión líquida a vapor o a la liberación de otros materiales volátiles a temperaturas más altas del aire (171-425°C) o de vapor sobrecalentado (120-180°C) (Zielinska & Cenkowski, 2012; Ramachandran et al., 2018; Gómez-Cruz et al., 2020)

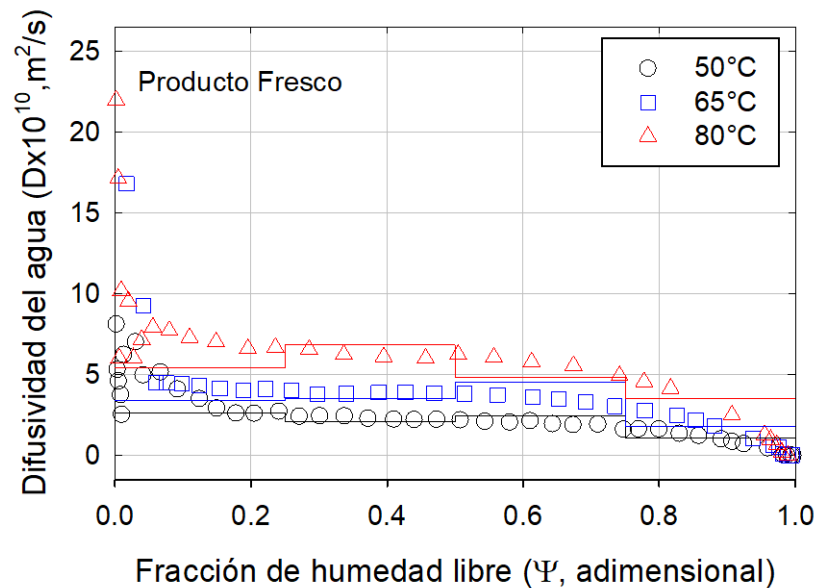


Figura 6.15. Difusividades efectivas del agua estimadas en muestras frescas de pimientos de champiñón. Puntos: método de pendientes, líneas continuas: regresión por partes.

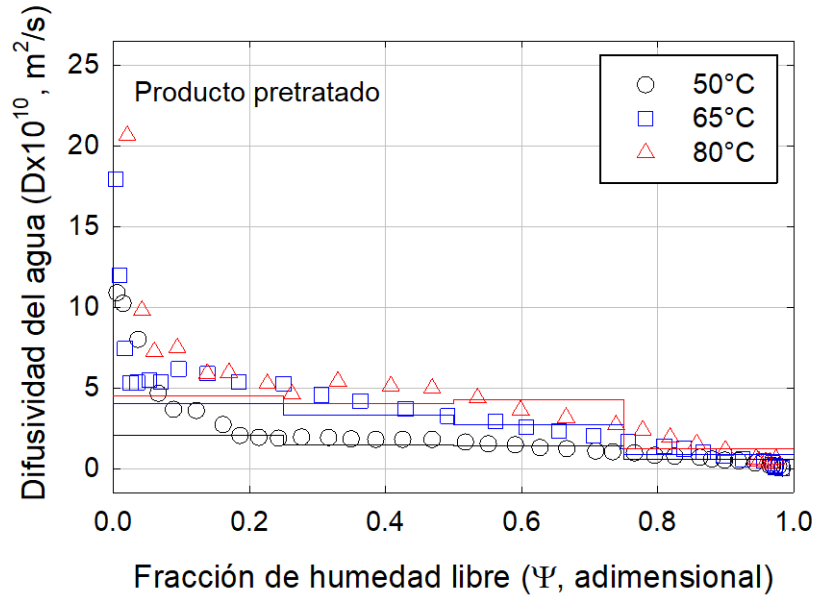


Figura 6.16. Difusividades efectivas del agua estimadas en muestras pretratadas de púleos de champiñón. Puntos: método de pendientes, líneas continuas: regresión por partes.

La difusividad promedio del agua para el método de pendientes en muestras frescas varía entre 2.3×10^{-10} y 5.6×10^{-10} m^2/s mientras que en los púleos pretratados se encuentra en el rango de $2.0 - 4.7 \times 10^{-10}$ m^2/s (Tabla 6.5). En todos los casos, la difusividad promedio del agua incrementa con la temperatura de secado ($p < 0.05$). Asimismo, las muestras frescas mostraron una mayor difusividad del agua (entre el 5 y 19%) en comparación con las pretratadas a las mismas temperaturas de secado ($p < 0.05$). Este efecto puede ser atribuido al hecho de que los sólidos agregados (cloruro de sodio) pueden estar obstaculizando el transporte de masa al aumentar las interacciones físicas o químicas con el agua. Tendencias similares se identificaron para la estimación de la difusividad promedio con los resultados del método de regresión por partes; sin embargo, la regresión por partes produjo valores de difusividad promedio de 8 a 30% más bajos que los estimados con el método de pendientes.

Tabla 6.5. Coeficientes de difusión del agua estimados durante el secado convectivo de púleos de champiñón.

Método	Muestra	Rango de humedad	Coeficientes de difusión ($D \times 10^{10}$, m ² /s) ¹		
			50°C	65°C	80°C
RpP-1	Fresca	$0 \leq \Psi \leq 1$	1.89 ± 0.10 (7.24, 0.985)	3.15 ± 0.19 (10.0, 0.984)	5.09 ± 0.33 (9.97, 0.988)
RpP-1	Pretratada	$0 \leq \Psi \leq 1$	1.16 ± 0.10 (35.4, 0.970)	2.15 ± 0.27 (41.3, 0.958)	2.90 ± 0.35 (34.1, 0.964)
RpP-4	Fresca	$0.75 \leq \Psi \leq 1$	1.10 ± 0.04	1.80 ± 0.03	3.50 ± 0.50
RpP-4	Fresca	$0.5 \leq \Psi \leq 0.75$	2.41 ± 0.13	4.51 ± 0.91	4.84 ± 0.69
RpP-4	Fresca	$0.25 \leq \Psi \leq 0.5$	2.08 ± 0.34	3.51 ± 0.72	6.83 ± 2.36
RpP-4	Fresca	$0 \leq \Psi \leq 0.25$	2.62 ± 0.58	3.40 ± 0.87	5.43 ± 1.95
RpP-4	Fresca	$0 \leq \Psi \leq 1$	2.05 (4.77, 0.997)	3.30 (2.68, 0.996)	5.15 (4.65, 0.994)
RpP-4	Pretratada	$0.75 \leq \Psi \leq 1$	0.58 ± 0.03	0.89 ± 0.05	1.25 ± 0.07
RpP-4	Pretratada	$0.5 \leq \Psi \leq 0.75$	1.43 ± 0.22	2.73 ± 0.19	4.24 ± 0.62
RpP-4	Pretratada	$0.25 \leq \Psi \leq 0.5$	1.46 ± 0.32	3.33 ± 0.15	4.00 ± 0.68
RpP-4	Pretratada	$0 \leq \Psi \leq 0.25$	2.03 ± 0.42	4.04 ± 1.41	4.51 ± 1.29
RpP-4	Pretratada	$0 \leq \Psi \leq 1$	1.38 (7.89, 0.997)	2.75 (2.58, 0.997)	3.50 (6.02, 0.997)
MP	Fresca	$0 \leq \Psi \leq 1$	2.30 (1.53, 1.000)	3.60 (0.89, 1.000)	5.60 (0.74, 1.000)
MP	Pretratada	$0 \leq \Psi \leq 1$	1.98 (1.49, 1.000)	3.42 (1.20, 1.000)	4.72 (2.38, 1.000)

¹RpP-1 y RpP-4 representan el método de regresión por partes con uno y cuatro segmentos, respectivamente. MP denota el método de pendientes. Los resultados obtenidos con el método RpP se presentan como el parámetro estimado ± intervalo de confianza al 95%. Los números en negritas representan los valores de humedad promedio obtenidos con la Ecuación (5.20). El primer número entre paréntesis es la desviación relativa η (%) mientras que el segundo es el estadístico R^2 (estos valores se estimaron con las difusividades variables para los métodos de pendientes y de regresión por partes de 4 segmentos).

Tabla 6.6. Error relativo entre las difusividades estimadas con los métodos de pendientes y de regresión por partes de 4 segmentos durante el secado convectivo de púleos de champiñón.

Muestra	Error relativo (E_3 , %)		
	50°C	65°C	80°C
Fresca	-10.9	-8.3	-8.0
Pretratada	-30.3	-19.6	-25.8

La evolución del tamaño y la forma durante la simulación de los perfiles de humedad constituyen una diferencia adicional entre el método de pendientes y la regresión por partes (Figura 6.17). El número de Fourier modificado, Ecuación (4.40), utilizado en el método de pendientes permite la simulación del secado de un producto que se encoge como uno que no lo hace (sólido rígido). El cambio de tamaño del producto se introduce posteriormente usando la relación entre el tiempo de secado real y el número de Fourier modificado ϑ resolviendo la Ecuación (4.42) al mismo tiempo que se reduce la escala de la geométrica del producto una vez finalizada la simulación. No obstante, como la contracción se introduce en una sola dimensión, la forma del producto no altera su relación de aspecto, sólo se vuelve más pequeña. El enfoque de regresión por partes, por el contrario, permite predecir el cambio de la elipticidad del producto considerando un cambio de tamaño no isotrópico, lo que produce un producto más plano a medida que avanza el secado (comportamiento más cercano al real). A pesar de ello, como se ve en las Figuras 6.11 y 6.14, esta última característica no es suficiente para proporcionar una mejor descripción de los datos experimentales que la obtenida con el método de pendientes. Además, el método de pendientes es computacionalmente más eficiente que la regresión no lineal, ya que sólo requiere una única solución del modelo de secado en un sólido rígido en lugar de una solución iterativa del modelo de secado en una geometría con cambio de tamaño. González-Pérez et al. (2019b) reportaron difusividades en el rango de $1.1 - 2.9 \times 10^{-10}$ y $2.6 - 7.2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ para muestras pretratadas y frescas usando los mismos datos

de secado, respectivamente. Los autores emplearon un enfoque de regresión no lineal con un único valor de difusividad que ajustaba toda la curva de secado del producto, representado como una corona esférica. Los valores de R^2 reportados fueron superiores a 0.97; sin embargo, en este caso, los valores de desviación relativa de la humedad promedio (η) proporcionan una mejor idea de la calidad de ajuste del modelo de corona esférica con valores que van desde 7.0 a 8.6 % y de 22 a 25 % para el producto fresco y pretratado, respectivamente. Por lo tanto, el método de pendientes permitió una descripción más precisa del comportamiento experimental.

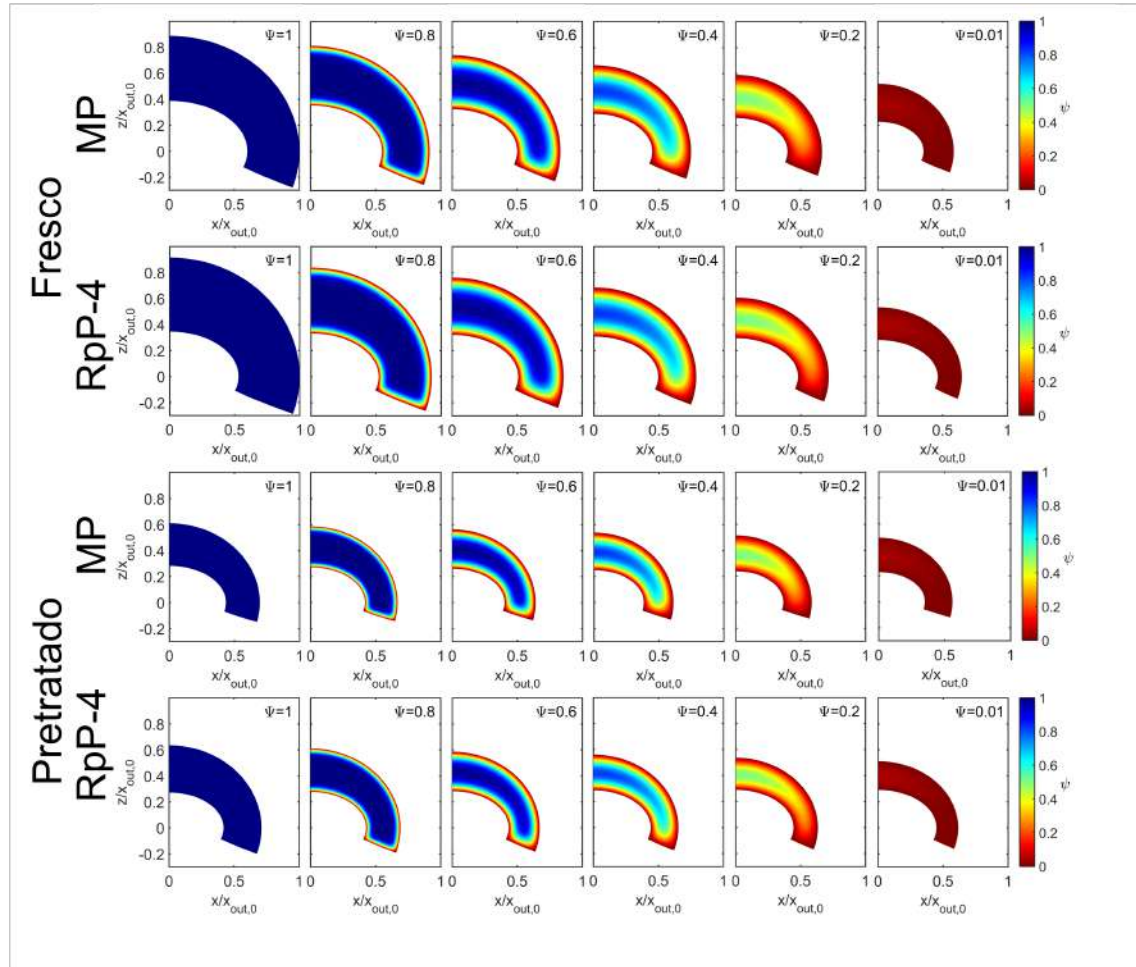


Figura 6.17. Simulación de la distribución del agua dentro de muestras de champiñón fresco (arriba) y pretratado (abajo) a diferentes contenidos de humedad estimada con el modelo de secado y los métodos de pendientes (MP) y regresión por partes (RpP-4). Ambos productos se muestran en su tamaño real relativo (las figuras se redimensionaron utilizando el valor $x_{out,0}$ para el producto fresco).

6.3.3. Extensión del método de pendientes a sólidos irregulares y transferencia de masa 3D

La teoría presentada en la Sección 4.3 sugiere que el método de pendientes se puede extender fácilmente a productos que exhiben geometrías más complejas o transferencia de masa en tres dimensiones mediante el siguiente procedimiento:

1. Expresar la ecuación de transferencia de masa (1.2) en un sistema coordenado ortogonal capaz de describir la forma real del producto como una geometría delimitada por superficies coordenadas (sólido regular). Para productos de forma irregular, la Ecuación (1.2) debe ser escrita en coordenadas rectangulares por conveniencia (una malla triangular o tetraédrica puede ser utilizada para representar al sólido).
2. Escribir la ecuación desarrollada en el paso anterior en la forma adimensional dada en la Ecuación (4.39) eligiendo una longitud característica apropiada para la difusión.
 - a) Si el sólido (regular o irregular) se encoge sin alterar sus proporciones entonces cualquier dimensión que se acorta se puede utilizar como longitud característica de difusión dado que todas están relacionadas por un factor constante.
 - b) Si el sólido (regular o irregular) se encoge alterando sus proporciones, entonces la dimensión que se acorta en mayor proporción debe utilizarse como longitud característica de difusión. En sólidos regulares, la dimensión elegida no necesariamente tiene que medirse a lo largo de las coordenadas, como se muestra en este estudio.
3. Resolver el modelo adimensional de secado considerando resistencia externa despreciable a la transferencia de masa para obtener el contenido de humedad promedio. La curva resultante (Ψ vs. ϑ) representa una familia de soluciones que describen cualquier comportamiento de contracción o difusividad debido a la definición del número de Fourier dada en la Ecuación (4.40).

4. Aplicar la Ecuación (4.41) para evaluar la difusividad del agua a partir de los datos experimentales. El efecto de la contracción del sólido se incluye actualizando la longitud característica para la difusión.
5. Obtener la curva de secado simulada resolviendo el problema del valor inicial en la Ecuación (4.42). Este procedimiento es necesario para generar la curva Ψ vs. t para la difusividad observada y el comportamiento de encogimiento de la familia de soluciones Ψ vs. ϑ obtenido en el paso 3. Además, la evolución del tamaño de la geometría puede ajustarse una vez que la relación entre Ψ y t está determinada.

El método de pendientes solamente es aplicable para materiales homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, los materiales heterogéneos podrían ser analizados separando el sólido en sus porciones homogéneas. Para materiales anisotrópicos, el método de pendientes puede aplicarse aislando ciertas direcciones de transferencia de masa si es posible. Algunas de estas técnicas han sido discutidas en otros trabajos (Pacheco-Aguirre et al., 2014). La aplicabilidad del método de pendientes no está limitada por la forma del producto o las direcciones de transferencia de masa involucradas, sino por el grado de deformación del sólido, ya que se considera que se contrae sin alterar sus proporciones. Para productos altamente deformables, metodologías más generales pero notablemente más complejas como la presentada por López-Méndez et al., 2018 deben aplicarse para la estimación de la difusividad.

6.4. Efecto de las consideraciones de modelación de transporte de masa y calor

6.4.1. Efecto de las consideraciones de modelación en la simulación del proceso de secado

Los escenarios de simulación del modelo de transferencia de masa y calor presentado en la Sección 4.4.1 se realizaron con las propiedades y los procedimientos presentados en las Secciones 5.4.1 y 5.4.2 y el siguiente modelo de difusividad de

agua en yuca obtenido en la Sección 6.1.2, el cual incluye una dependencia con la temperatura del tipo de Arrhenius y considera el encogimiento del material,

$$D \text{ (m}^2\text{/s)} = \exp(-14.29) \exp\left(-\frac{2392}{T + 273.15}\right) \quad (6.8)$$

Los resultados obtenidos mostraron que las simulaciones de secado pueden ser agrupadas en las siguientes familias para el contenido de humedad, donde una x en la posición j ($j = 1, \dots, 7$) indica que d_j puede tomar los valores de 0 y 1 de forma indistinta. Las simulaciones agrupadas dentro de una misma familia no exhiben cambios apreciables en la evolución de la humedad promedio (aparecen traslapadas).

1. Grupo 1xxxxx1 (c_s variable y L variable).
2. Grupo 0xxxxx1 (c_s constante y L variable).
3. Grupo 1xxxxx0 (c_s variable y L constante).
4. Grupo 0xxxxx0 (c_s constante y L constante).

En la Figura 6.18 se puede observar como la simulación que incluye el encogimiento de la longitud característica de difusión (1xxxxx1 y 0xxxxx1) exhibe una flexión de la curva de evolución de humedad, mientras que las que no incluyen este cambio (1xxxxx0 y 0xxxxx0) permanecen como líneas rectas en la representación logarítmica. Se obtiene una velocidad de secado más rápida cuando la simulación considera una concentración de sólidos secos variable, por lo que los grupos 1xxxxx1 y 1xxxxx0 se secan más rápido que los grupos 0xxxxx1 y 0xxxxx0, respectivamente. En cambio, para las simulaciones realizadas en los escenarios de un proceso isotérmico, mostradas en color azul (11, 00, 10, 01), sólo se observa una inflexión en el caso 01. Las curvas con mayor tiempo de secado respecto al grupo 1xxxxx1 sobreestimarían a la difusividad del agua en el medio ya que necesitarían un mayor valor para compensar su menor velocidad de pérdida de agua.

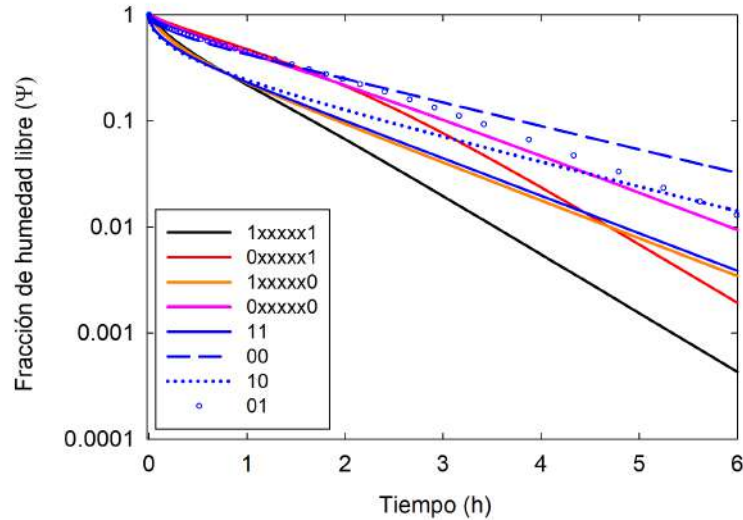


Figura 6.18. Simulación de la fracción de humedad libre promedio de cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones de solución del modelo de secado.

Como se muestra en la Figura 6.19, las curvas de temperatura se pueden agrupar en las mismas cuatro familias que las del contenido de humedad, con una diferencia importante; dentro de cada grupo podemos hacer una distinción entre las simulaciones con y sin interfase variable (xxxxx1x y xxxxx0x, respectivamente). El uso de una interfase constante hace que la temperatura del producto se reduzca temporalmente por debajo de su valor inicial. Las curvas de temperatura con y sin la interfase variable se superponen nuevamente al alcanzar una temperatura cercana a los 31°C . Este comportamiento también se ha observado en trabajos de modelos acoplados donde se considera o no el tamaño del producto constante, como lo reporta da Silva et al. (2014) y Defraeye (2017).

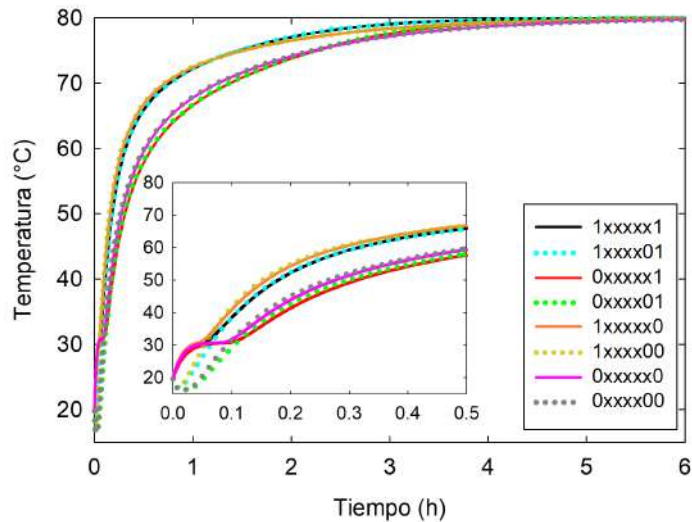


Figura 6.19. Simulación de la temperatura promedio de cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones de solución del modelo de secado.

A diferencia de otros modelos que estudian la transferencia simultánea de masa y calor, en este modelo se evaluó la contracción del producto. Las Figuras 6.20 y 6.21 muestran la evolución de los perfiles de humedad a diferentes tiempos para los escenarios donde se tuvo una diferencia en las curvas de secado. En todos los perfiles se observa que la humedad de la superficie disminuye en los primeros minutos del secado, lo que indica un proceso controlado por la difusión interna del agua en el producto. La velocidad con la que se seca la superficie es mayor en los escenarios con concentración de sólidos variable (1xxxxx1 y 1xxxxx0). Debe notarse que la velocidad con la que se seca la superficie del producto está relacionada con la evolución de la temperatura, mostrada en la Figura 6.19. Por ejemplo, en los escenarios 1xxxxx1 y 1xxxxx0, la fracción de humedad libre en la superficie se ha reducido a un valor cercano a 0.1 ($\psi \approx 0.1$) cuando han transcurrido aproximadamente 4 minutos, tiempo en el cual empieza a aumentar la temperatura después de haberse mantenido en un valor constante. Por otra parte, en los escenarios con concentración de sólidos constante (0xxxxx1 y 0xxxxx0), el tiempo en el que se alcanza un valor de $\psi \approx 0.1$ en la superficie es de 6 minutos, coincidiendo con el aumento retrasado de temperatura mostrado en la Figura 6.19.

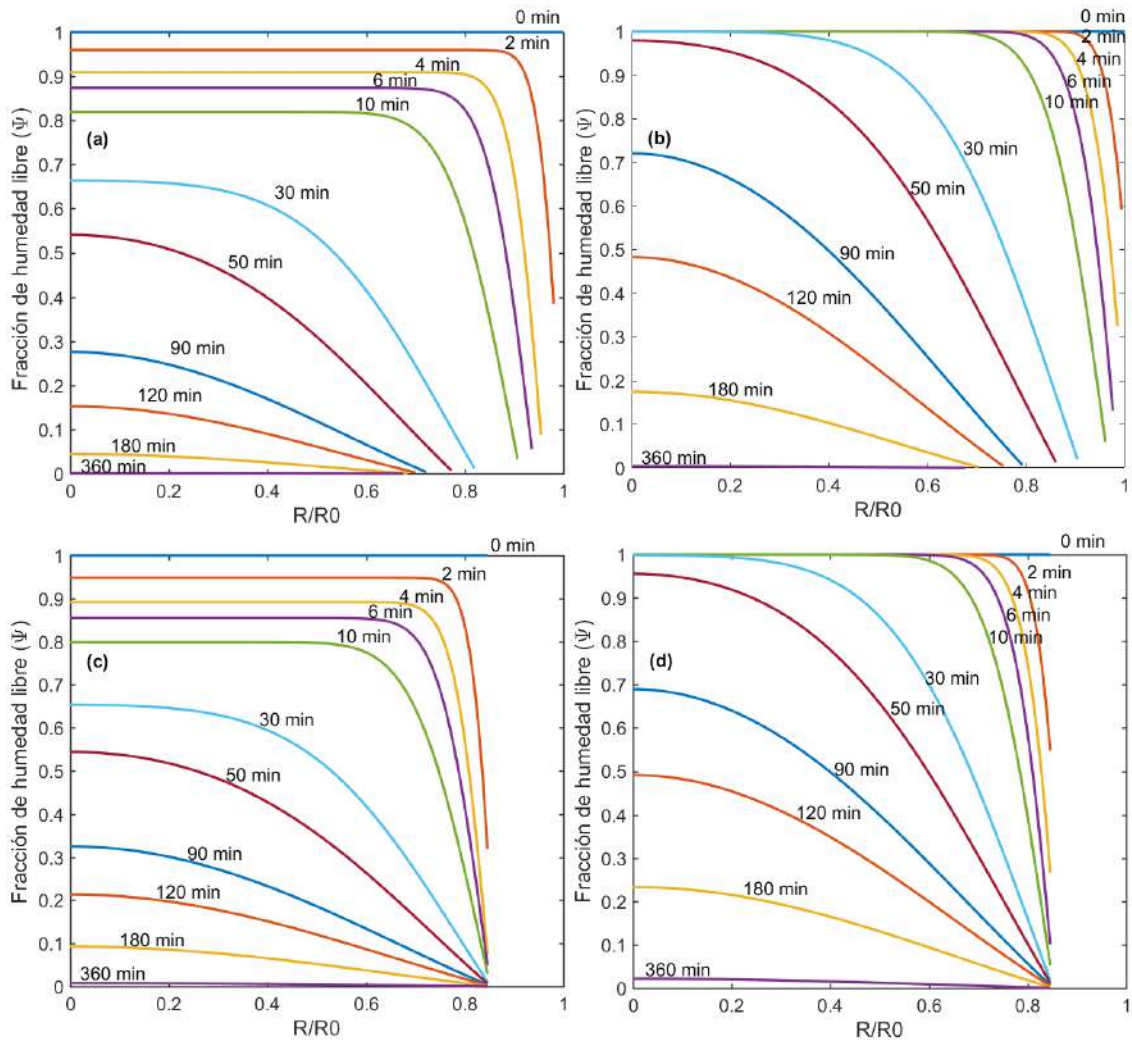


Figura 6.20. Perfiles de humedad simulados en cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones del modelo de secado mostrando el encogimiento del producto. (a) 1xxxxx1, (b) 0xxxxx1, (c) 1xxxxx0 y (d) 0xxxxx0.

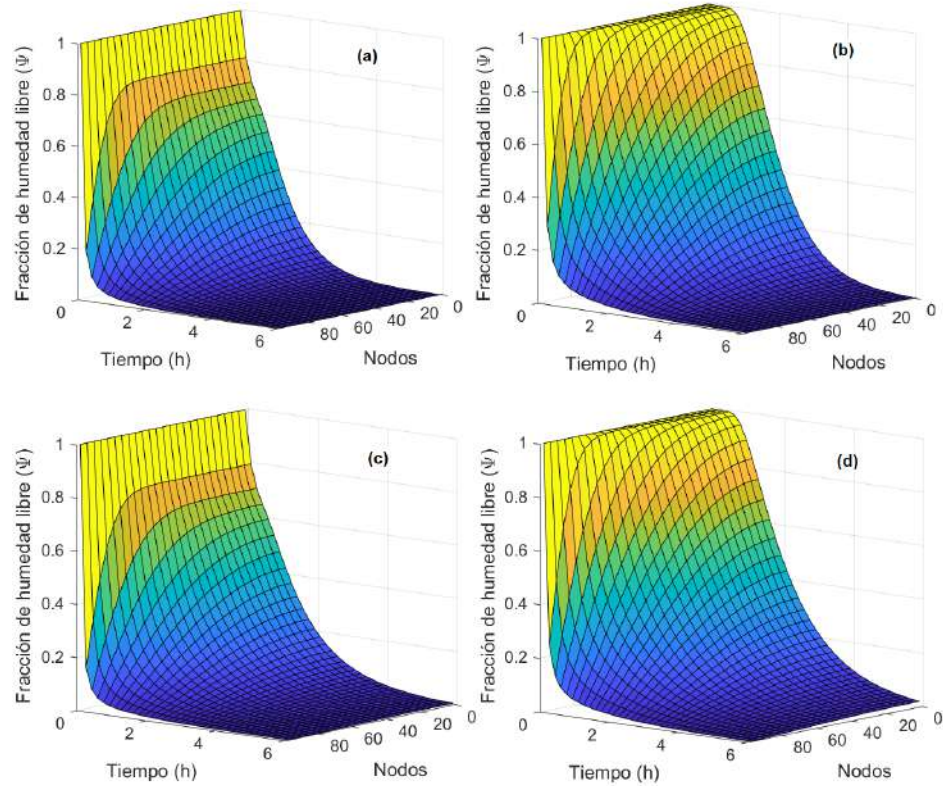


Figura 6.21. Perfiles de humedad simulados en cilindros de yuca bajo diferentes consideraciones del modelo de secado. (a) 1xxxxx1, (b) 0xxxxx1, (c) 1xxxxx0 y (d) 0xxxxx0.

6.4.2. Estimación de la difusividad del agua

Los datos de secado provenientes de la simulación más rigurosa (etiquetada como 1111111) se trataron como datos experimentales reales para estimar la difusividad efectiva del agua en el producto considerando su encogimiento, bajo las consideraciones de concentración constante o variable de sólidos, de acuerdo con el procedimiento desarrollado en la Sección 4.4.3. La idea es determinar que tan bien se puede recuperar el modelo que describe la difusividad del agua en el producto usado en la simulación, en este caso, la Ecuación (6.8). Los valores de las propiedades del aire obtenidos al aplicar las ecuaciones presentadas en la Sección 5.4.1 durante esta simulación se muestran como referencia en la Figura 6.22, mientras que las propiedades

de transferencia de masa y calor se encuentran en la Figura 6.23.

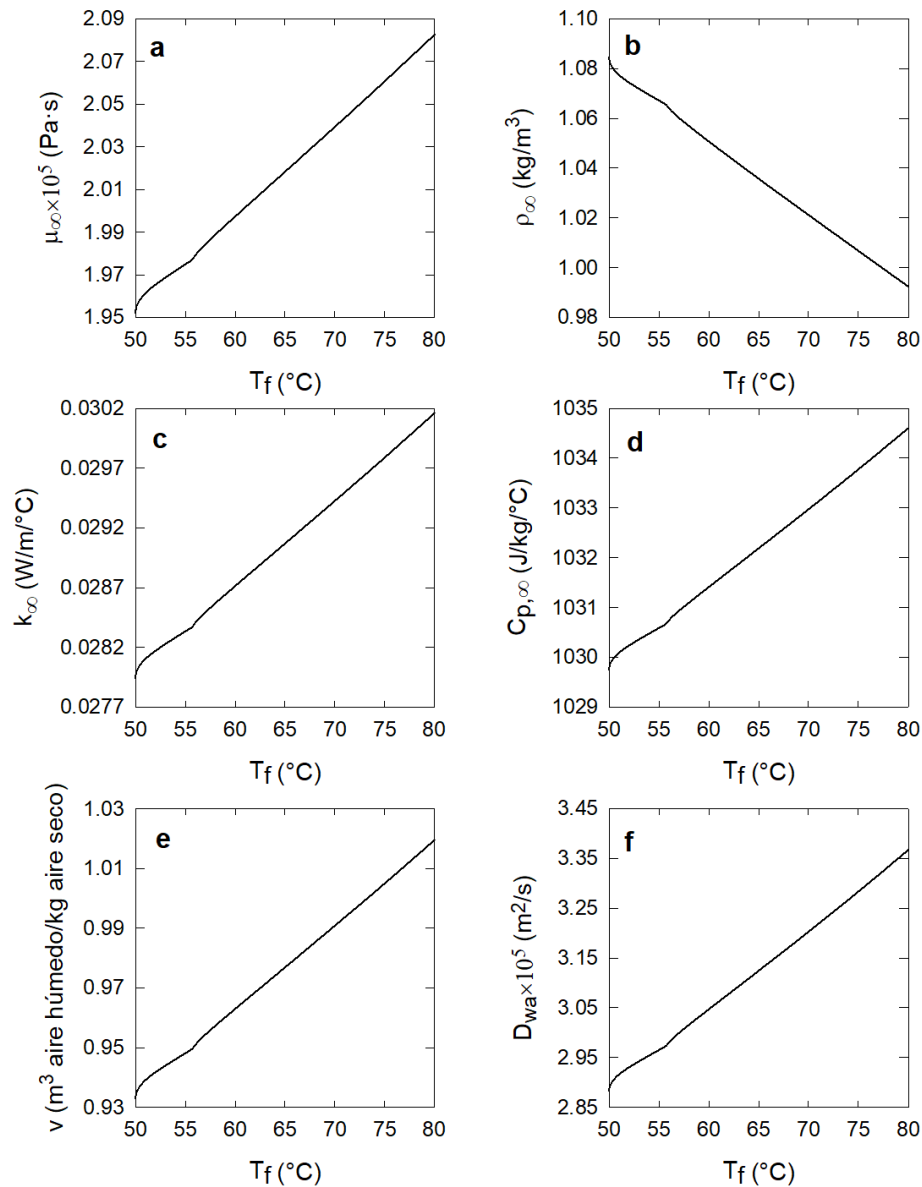


Figura 6.22. Propiedades del aire obtenidas durante la simulación del proceso de secado de yuca con el modelo riguroso. (a) viscosidad, (b) densidad, (c) conductividad térmica, (d) calor húmedo, (e) volumen húmedo y (f) difusividad agua-aire. Los datos de las figuras (a)-(e) y (f) corresponden a las Ecuaciones (5.41)-(5.48) y (5.48).

Los valores del número de Biot de transferencia de masa inician en un valor aproximado de 21, indicativos de un proceso donde ambos mecanismos de difusión y convección controlan la pérdida de humedad del producto. Este valor aumenta rápidamente cuando la temperatura de película es aproximadamente de 55°C (correspondiente a una temperatura de interfase de 30°C). A partir de ese momento, se puede considerar que el proceso de secado queda controlado por la difusión interna de humedad hasta completarse. Por otra parte, el número de Biot de transferencia de energía es siempre menor a la unidad, por lo que el producto no genera perfiles de temperatura significativos en su interior.

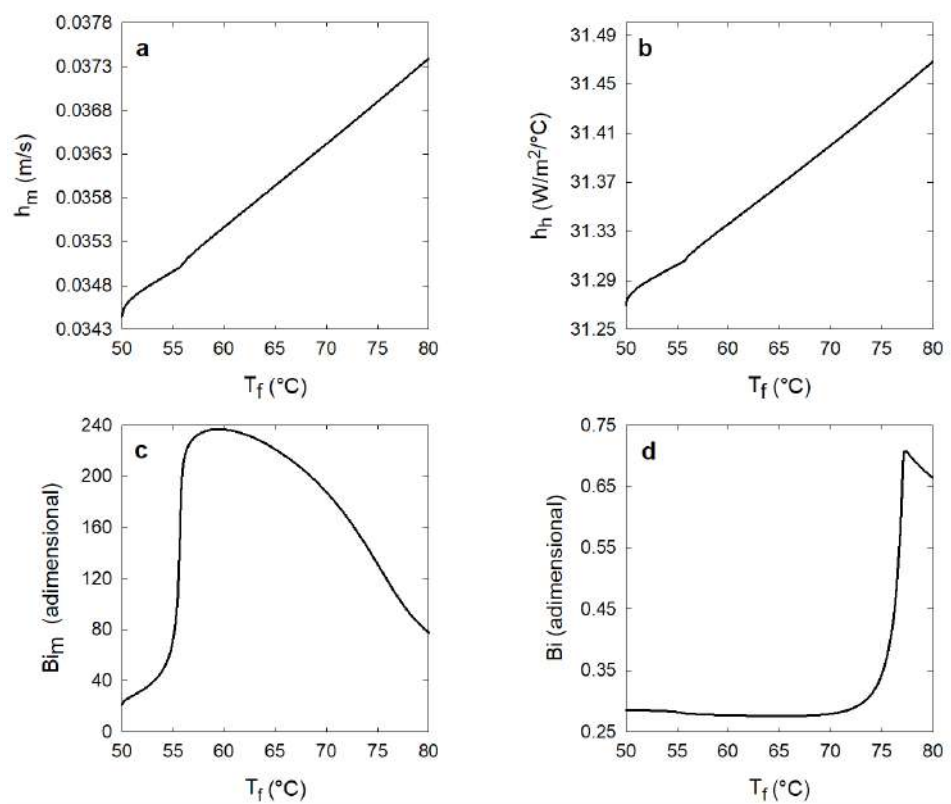


Figura 6.23. Números de Biot y coeficientes de transferencia de masa y energía obtenidos durante la simulación del proceso de secado de yuca con el modelo riguroso. (a) coeficiente externo de transporte de masa, (b) coeficiente externo de transporte de energía, (c) número de Biot para transferencia de masa, (d) número de Biot para transferencia de energía.

En la Figura 6.24 se observan los valores de la difusividad efectiva obtenidos bajo las consideraciones estudiadas como función de la fracción de humedad libre. Debe recordarse que las difusividades estimadas bajo las consideraciones de c_s variable o constante ocupan a Υ ó Ψ en sus cálculos, respectivamente. Sin embargo, ambos conjuntos de resultados se presentan como función de Ψ , ya que esta variable o la humedad en base seca (X), y no Υ o la concentración volumétrica de agua (c_w), es la que generalmente se presenta en la literatura. Cada difusividad estimada por el método de la Sección 4.4.3 corresponde a una combinación única de valores promedio de humedad y temperatura en el producto. De esta forma, la Figuras 6.24 es una proyección en 2 dimensiones de estos datos, sin considerar la temperatura. En la misma figura se muestran los valores de difusividad obtenidos durante la generación de los datos experimentales de secado por simulación como una línea continua, la cual representa el comportamiento que debe recuperarse.

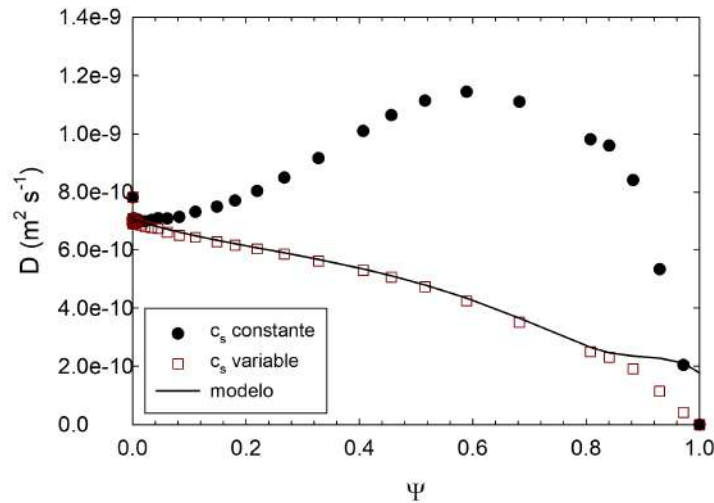


Figura 6.24. Comportamiento estimado de la difusividad de agua en yuca como función de la fracción de humedad libre. La línea del modelo corresponde a los valores obtenidos con el modelo de Arrhenius (6.8) usado en la simulación durante la generación de los datos experimentales.

Se observa que el efecto de considerar constante a la concentración de sólidos ocasiona un comportamiento que algunos autores atribuyen a que exista un incremento

en la permeabilidad al vapor a un bajo contenido de humedad (Sharma & Prasad, 2004; Garbalinska et al., 2018). El procedimiento realizado permite demostrar que este efecto en realidad es ocasionado por una de las consideraciones más usuales en los modelos de secado convectivo, además de existir una sobreestimación importante de la difusividad efectiva del agua en relación con los valores esperados de la simulación de los datos experimentales, lo que concuerda con el análisis teórico presentado en la Sección 4.4.2. Debe recordarse que el modelo usado para calcular a la difusividad del agua en el producto en la simulación que generó los datos experimentales es una función de la temperatura, no de la humedad, por lo tanto, la relación mostrada en la Figura 6.24 no es real, así que conviene graficar los datos obtenidos contra la temperatura promedio del producto (Figura 6.25).

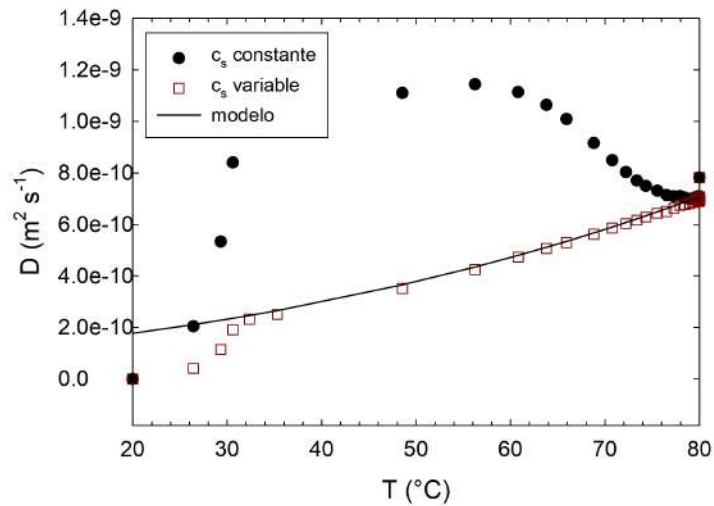


Figura 6.25. Comportamiento estimado de la difusividad de agua en yuca como función de la temperatura promedio del producto. La línea del modelo corresponde a los valores obtenidos con el modelo de Arrhenius (6.8) usado en la simulación durante la generación de los datos experimentales.

En la Figura 6.25 es evidente que la difusividad del agua sufre un aumento y disminución de su valor cuando la concentración de sólidos se considera constante; sin embargo, el modelo de Arrhenius usado sólo predice un aumento de la difusividad con

la temperatura, tendencia identificada correctamente cuando se considera variable a la concentración de sólidos. Nuevamente, el uso de una concentración de sólidos constante lleva a un resultado incorrecto.

En la Figura 6.26 se muestran los datos de difusividad obtenidos en una gráfica de Arrhenius. Se observa que los datos de la difusividad del agua estimados bajo la consideración de concentración de sólidos constante no sigue el comportamiento de línea recta del modelo usado en la simulación. Se demuestra entonces que la concentración de sólidos es un factor que aún considerando el cambio del tamaño del producto influye en la determinación de la difusividad del agua. Por otra parte, los coeficientes de difusión estimados bajo la consideración de una concentración de sólidos variable muestra dos regiones rectas, de tal forma que podría llegarse a la conclusión de que existen dos periodos de velocidad decreciente cuando en realidad el modelo de partida no tiene inflexiones.

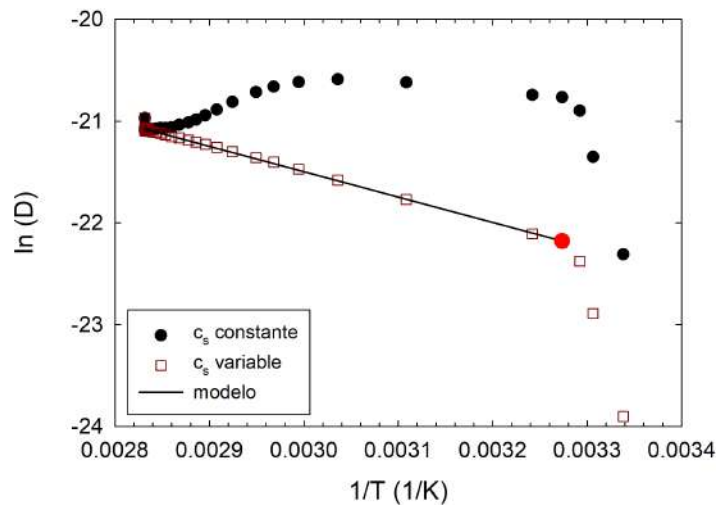


Figura 6.26. Gráfica de Arrhenius de los coeficientes de difusión de agua en yuca estimados bajo las consideraciones de concentración de sólidos constante o variable. La línea corresponde al ajuste del modelo de Arrhenius de los datos con símbolo cuadrado.

El punto que divide ambas regiones corresponde, en realidad, al momento donde la actividad de agua (a_w) del producto disminuye por debajo de la unidad (Figura

6.27a), es decir, cuando el número de Biot de transferencia de masa empieza a aumentar rápidamente en la Figura 6.23c. Antes de ese momento, el proceso se comporta como si se estuviera secando una superficie de agua pura, es decir, un proceso no controlado por la difusión interna de humedad. El punto donde ocurre el cambio de comportamiento depende de la humedad y temperatura en la superficie del producto (X_i y T_i , Figuras 6.27b y 6.27c, respectivamente), puesto que de ellas depende a_w . Es decir, el máximo valor de la humedad de interfase del aire (H_i) en la Figura 6.27d no determina el cambio de mecanismo de secado, sino que es consecuencia de X_i y T_i . En esta figura se puede observar que H_i puede tomar el mismo valor a diferentes combinaciones de X_i y T_i , pero con valores de a_w muy diferentes (puntos A y B en las Figuras 6.27a-6.27c).

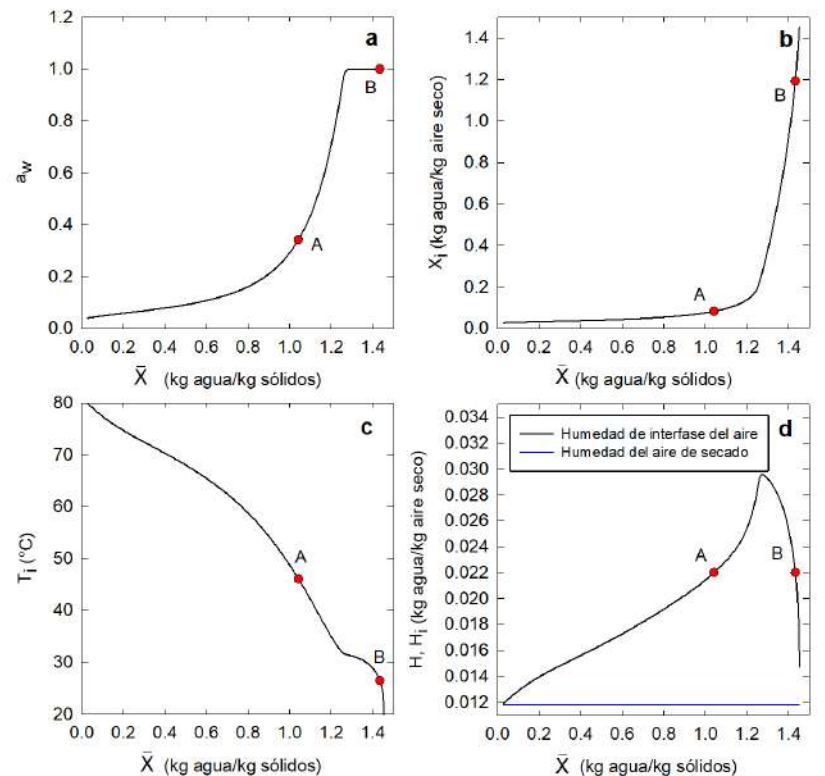


Figura 6.27. Evolución de la actividad de agua y variables de interfase contra la humedad promedio del producto durante el secado de cilindros de yuca. Los puntos A y B indican dos instantes donde H_i toma el mismo valor a diferentes combinaciones de X_i y T_i .

El ajuste del modelo de Arrhenius en la segunda zona recta (proceso controlado por difusión) arrojó la ecuación:

$$D = \exp(-14.02) \exp\left(-\frac{2499}{T + 273.15}\right) \bar{X} \quad (6.9)$$

Este modelo es muy parecido a la Ecuación (6.8) de partida. Una comparación de ambos modelos se puede ver en la Figura 6.28. Se puede concluir que el método de cálculo es adecuado para identificar la difusividad del agua en el producto una vez que la actividad de agua se reduce por debajo de la unidad.

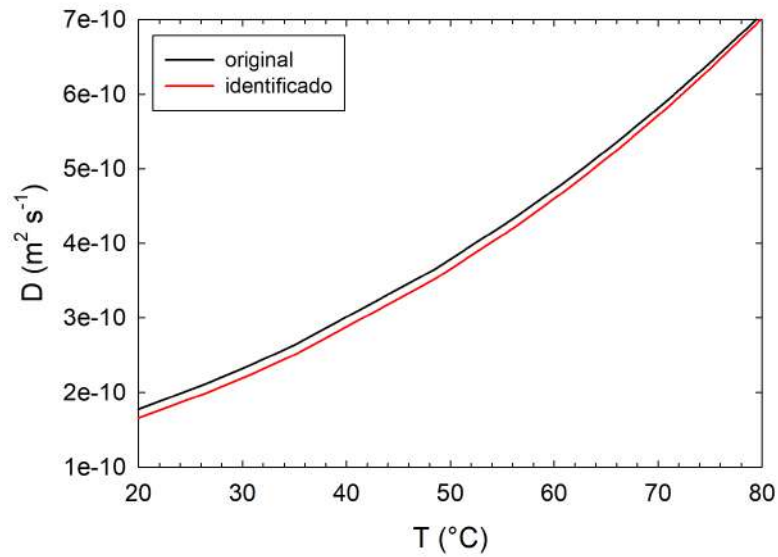


Figura 6.28. Comparación del comportamiento de los modelos de difusividad original e identificado como función de la temperatura.

7. Conclusiones

Se desarrolló y validó experimentalmente un método simple basado en un procedimiento de ajuste de línea recta para la estimación de coeficientes de difusión del agua aplicable al secado convectivo de sólidos que presentan encogimiento. La sobreestimación de los valores de difusividad (superior al 50 %) bajo las condiciones experimentales estudiadas confirmó la importancia de incluir este fenómeno en los modelos de secado.

El método secuencial de registro de conjunto de puntos (PSR) basado en el algoritmo de punto iterado más cercano de dos pasos se aplicó exitosamente para extraer los descriptores de forma relevantes de un producto con forma compleja. El método PSR es una herramienta valiosa para generar una geometría que asemeje la forma real del producto para fines de modelado, lo que permite una estimación confiable de las propiedades de transferencia de masa al reducir el efecto de la discrepancia geométrica.

El análisis semi-teórico propuesto se usó en la formulación de un enfoque de regresión lineal simple para estimar coeficientes de difusión en secciones de esferoides achatados con un error menor al provocado por la discrepancia geométrica. El uso del índice de redondez como factor de forma permitió cuantificar la discrepancia geométrica entre la forma del producto experimental y modelo. El método PSR puede aplicarse potencialmente para reducir la discrepancia geométrica en otros productos y/o operaciones, pero se requieren estudios adicionales que se centren en su aplicación.

El método de pendientes modificado permitió la estimación de la variación de la difusividad del agua durante el secado convectivo de un producto de forma compleja que cambia de tamaño sin requerir una solución analítica, considerando que el producto se vuelve más pequeño sin alterar su relación de aspecto. La regresión por partes demostró que el secado de púlsos de champiñón no puede ser descrito por un único valor de difusividad. En este caso, una difusividad función de la humedad permitió una simulación más precisa de las cinéticas de secado convectivo del

producto.

Se lograron identificar las consideraciones de mayor importancia en la evaluación de los coeficientes de difusión mediante la solución sistemática del modelo de secado bajo diferentes escenarios, siendo la concentración de sólidos variable o constante, sólido rígido o no rígido y proceso isotérmico o no isotérmico las consideraciones que afectan principalmente la dinámica de la humedad del producto. Se observó una relación entre el descenso de la humedad superficial del producto y la evolución de su temperatura a tiempos cortos de secado. Se determinó que la consideración de concentración de sólidos constante siempre lleva a una sobreestimación de la difusividad del agua en el producto.

De forma general, el análisis del transporte de masa y calor en procesos de deshidratación realizado en este proyecto contribuyó a su mejor entendimiento y permitió el desarrollo de nuevos métodos de fácil aplicación para el cálculo de coeficientes de difusión en materiales sólidos.

8.Apéndice



Drying Technology
An International Journal



ISSN: 0737-3937 (Print) 1532-2300 (Online) Journal homepage: <https://www.tandfonline.com/loi/ldrt20>

Point set registration for reduced geometry mismatch during estimation of mass transfer properties in osmotic dehydration of complex-shaped foods


K. H. Estévez-Sánchez, J. E. González-Pérez, C. E. Ochoa-Velasco, M. A. García-Alvarado, D. Cruz-González, A. Sampieri & I. I. Ruiz-López

To cite this article: K. H. Estévez-Sánchez, J. E. González-Pérez, C. E. Ochoa-Velasco, M. A. García-Alvarado, D. Cruz-González, A. Sampieri & I. I. Ruiz-López (2020) Point set registration for reduced geometry mismatch during estimation of mass transfer properties in osmotic dehydration of complex-shaped foods, *Drying Technology*, 38:4, 506-517, DOI: [10.1080/07373937.2019.1584209](https://doi.org/10.1080/07373937.2019.1584209)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/07373937.2019.1584209>

 Published online: 11 Mar 2019.

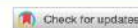
 [Submit your article to this journal](#) 

 Article views: 79

 [View related articles](#) 

 [View Crossmark data](#) 

Full Terms & Conditions of access and use can be found at
<https://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=ldrt20>



Point set registration for reduced geometry mismatch during estimation of mass transfer properties in osmotic dehydration of complex-shaped foods

K. H. Estévez-Sánchez^a , J. E. González-Pérez^a , C. E. Ochoa-Velasco^b , M. A. García-Alvarado^c ,
D. Cruz-González^a , A. Sampieri^a , and I. I. Ruiz-López^a 

^aFacultad de Ingeniería Química, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México; ^bFacultad de Ciencias Químicas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México; ^cInstituto Tecnológico de Veracruz, Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos, Veracruz, México

ABSTRACT

The use of point set registration (PSR) in a novel approach for assisted geometry generation of complex-shaped foods during mass transfer modeling of osmotic dehydration (OD) is presented. The procedure is aimed at reducing the effect of geometry mismatch during estimation of diffusion coefficients. The PSR is based on a modified iterated closest point (ICP) algorithm. The proposed methodology was applied to obtain the optimum geometrical parameters describing the shape of white mushroom pilei (*Agaricus bisporus*) as a revolution solid in the oblate spheroidal coordinate system. Roundness was proposed as a shape factor to evaluate geometry mismatch. An unsteady state 2D diffusion model with the PSR-generated geometry was proposed to describe experimental data, where product shrinkage was included as the contraction of ellipse focus. Moreover, a semi-theoretical approach is presented allowing the estimation of diffusion coefficients by the well-known straight-line fit approach in the proposed geometry. Water and solute diffusivities in the product were estimated and further compared with those previously reported for hemispherical shell geometry. As opposed to hemispherical shell geometry, no significant difference was found ($p > 0.05$) in roundness between PSR-generated geometry and real product shape. Diffusion coefficients estimated with the PSR-generated geometry were significantly lower than those calculated with the hemispherical shell model, indicating that proposed approach may be helpful to reduce geometry mismatch during the estimation of mass transfer properties.

ARTICLE HISTORY

Received 5 October 2018
Revised 8 February 2019
Accepted 12 February 2019

KEYWORDS



Diffusion; image analysis;
oblate spheroidal
coordinate system;
point matching

1. Introduction

The reliable estimation of mass transfer properties during dehydration processes requires a correct representation of product shape during modeling and simulation of the studied operation;^[1] however, nowadays, analytical solutions are still used for the estimation of mass transfer properties in food products. Here, the product is described by simple metrics such as thickness, length or radius using simple shapes as parallelepipeds, spheres, or cylinders. Nevertheless, these geometries cannot fully describe product shape in all cases. A possible solution to overcome this trouble is to map dimensions for complex-shaped foods into simpler geometries. The reader is referred to the work of Sareban and Souraki^[2] where the irregular shape of celery was mapped into a parallelepiped or cylinder by using

equivalent dimensions to estimate anisotropic diffusion coefficients during osmotic dehydration.

Geometry mismatch (the difference between the real shape of product and that used in mass transfer simulation) is known to have a major effect on the estimation of diffusion coefficients and process description.^[3,4] For example, geometry mismatch has an important effect on the prediction of quality-related issues during drying, such as rice fissuring.^[5] Thus, some authors have attempted to model mass transfer using several approaches to create geometries closely matching product shape, which can be classified into three major categories. The first and most explored approach is to represent the product shape as less-explored simple geometries (whole or sections). This approach has been used to describe heat and mass transfer during drying in products such as

CONTACT I. I. Ruiz-López  irving.ruiz@correobuap.mx  Facultad de Ingeniería Química, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Color versions of one or more of the figures in the article can be found online at www.tandfonline.com/ldr.

© 2019 Taylor & Francis Group, LLC

coffee, rice, and wheat considered as spheroids^[5–8] or the osmotic dehydration of white mushroom pilei considered as hemispherical shells.^[4] The second approach is to merge simpler forms to closely represent the product shape. For example, Bordin et al.^[9] modeled the multicomponent NaCl and KCl diffusion process during the salting of precooked champignon mushrooms, where geometry was created by merging a solid hemisphere (for the pileus) with a cylinder (for the stipe). The last approach involves acquiring the real product shape with special methodologies or equipment. Here, the geometry can be acquired with a 3D scanner^[6,10] or by image analysis of traditional photographs.^[1,11] However, even if shape used in mass transfer model is selected to exhibit a close resemblance with the product it represents, geometry mismatch can arise during process caused by product deformation.^[1,12,13] Moreover, most studies use the geometry for a single sample in simulations, which could not be representative of a large group of samples especially in complex-shaped and deforming products.

Osmotic dehydration (OD) is a solid–liquid contact operation for the partial dewatering of food material with a simultaneous solute uptake from the solution into the product.^[14–16] OD may contribute to improving quality characteristics in the final product, but it also induces several changes in food, and product shrinkage is one of the most evident. Thus, this phenomenon has been included in recent mass transfer models, albeit using simple geometries.^[14,17–19] On the other hand, very few studies have attempted to represent the natural product shape when modeling OD processes,^[9] but shrinkage has been neglected. Recently, González-Pérez et al.^[4] used the hemispherical shell geometry during the OD modeling of white mushroom pilei. Nevertheless, the difference between the real and model product shapes has not been evaluated.

Point set registration (PSR) or point matching is the process of computing a spatial transformation that optimally aligns two pairs of point sets.^[20,21] The PSR method serves as an important step to merge multiple datasets into a more accurate (reference) model and has several applications such as optical character recognition, pose estimation, medical image analysis (align data from magnetic resonance and computed tomography images), shape modeling, and feature detection.^[21] The objective of this study is to evaluate PSR as a method to reduce geometry mismatch during the osmotic dehydration of complex-shaped foods such as white mushroom pilei. To fully achieve this purpose, the following topics are covered: (i) the

introduction of a novel algorithm to use PSR and oblate spheroidal coordinate system to extract optimum shape descriptors of product, (ii) analyze the PSR data to create a representative image of product for mass transfer modeling and description of shrinkage data, (iii) estimate diffusion coefficients with the PSR-generated geometry, (iv) explore roundness as a shape index to quantify geometry mismatch between the real and model shapes, and (v) develop and validate a simple method based on the straight-line fit approach to estimate diffusion coefficients corrected for shrinkage in the proposed geometry.

2. Methods and materials

2.1. Experimental datasets

Recently, our research group reported the analysis of the morphometric characteristics of white mushroom during OD.^[4] In the referred study, mushroom pilei (3.4 to 3.7 cm in diameter) were subjected to OD at the resulting combinations of different brine concentration (0.10 and 0.25 g NaCl/g solution) and temperature (40, 60, and 80 °C) levels. Water loss (\bar{W}) and solute gain (\bar{S}) were estimated from these experiments as

$$\bar{S} = 100(m_{st} - m_{s0})/m_{p0} \quad (1)$$

$$\bar{W} = 100(m_{w0} - m_{wt})/m_{p0} \quad (2)$$

A single transversal slice (perpendicular to the stipe axis) of about 1 mm thick was cut with a sharp blade from the central part of the pilei, and digital images of resulting slices were immediately taken. The images were processed to extract the product contour. Representative characteristics of product shrinkage and deformation estimated as changes in cross-sectional area and roundness, respectively, were obtained by combining product contours of three different samples to produce a single shape as described by Ortiz-García-Carrasco et al.^[22] OD data (\bar{W} and \bar{S}) and sample contours from these experiments were used herein.

2.2. Oblate spheroidal coordinate system

Oblate spheroidal coordinates (ξ, θ, ϕ) allow a very close natural representation of white mushroom pilei. In this coordinate system, $\xi \in [0, \infty)$ defines a series of confocal ellipses centered on the origin, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ represents the asymptotic angle of confocal hyperbolas symmetrical about the x -axis, and $\phi \in [0, 2\pi)$ is the angular coordinate consisting of planes revolving about the z -axis. An additional parameter a defines the ellipse foci on the x -axis. Elliptic cylindrical coordinates (ξ, θ) relate to rectangular

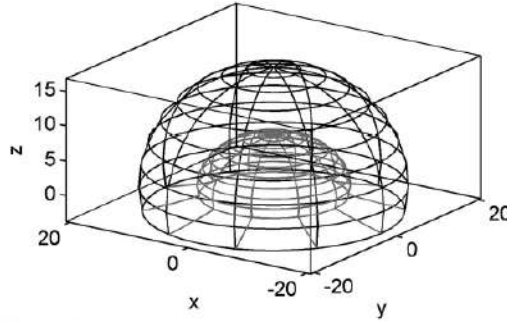


Figure 1. Mushroom pileus geometry based on oblate spheroidal coordinate system (figure created with $\xi_{in}=0.799$, $\xi_{out}=1.497$, $\theta_{min}=-0.224$ rad, and $a=7.97$).

coordinates (x, z) by means of the following expressions:

$$x = a \cosh \xi \cos \theta \quad (3)$$

$$z = a \sinh \xi \sin \theta \quad (4)$$

Mushroom pileus geometry can be generated by revolving a $\xi\theta$ -plane ($\phi = 0$), delimited by boundaries located at $\xi = \xi_{in}, \xi_{out}$ and $\theta = \theta_{min}$, about the z -axis (Figure 1). The size of the resulting geometry is adjusted with the parameter a . If $\theta = 0$ and $\xi = \xi_{out}$, then $x = x_{out} = a \cosh \xi_{out}$; on the other hand, if $\theta = \pi/2$ and $\xi = \xi_{out}$, then $z = z_{out} = a \sinh \xi_{out}$. Product ellipticity e is related to the height-to-width ratio as

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{z_{out}}{x_{out}}\right)^2} = \sqrt{1 - \tanh^2 \xi_{out}} \quad (5)$$

where geometry flats as $e \rightarrow 1$ ($\xi_{out} \rightarrow 0$) and becomes a sphere as $e \rightarrow 0$ ($\xi_{out} \rightarrow \infty$) (e takes values of 1, 0.887, 0.648, 0.425, 0.266, and 0.099 if ξ_{out} is 0, 0.5, 1, 1.5, 2, and 3).

2.3. Point set registration (PSR)

Parameters ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a providing a close match between the real product shape and the geometry generated by the oblate spheroidal coordinate system must be determined in order to perform mass transfer simulations. In simple shaped products, geometry is entirely defined by using metrics such as length, width, height, and radius, all of them relatively easy to measure. However, the problem here is that there is not a simple way to extract metrics in complex-shaped products. Thus, PSR is proposed as a mean to extract these features. The PSR method compares two inputs: a (static) target point set \mathbf{T} , which represents a reference model, and a (moving) source

point set \mathbf{M} , which includes the data points to be registered (aligned to the reference point set \mathbf{T}). Denote the coordinates of each point set as

$$\mathbf{m}_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{M} \text{ for } i = 1, \dots, N_M \quad (6)$$

$$\mathbf{t}_j = (x_j, y_j) \in \mathbf{T} \text{ for } j = 1, \dots, N_T \quad (7)$$

The PSR process begins with the identification of corresponding pairs of points between \mathbf{T} and \mathbf{M} . There are $N_M N_T$ matching pairs. Then, \mathbf{M} is transformed to another point set \mathbf{M}' , which is compared with \mathbf{T} using a suitable similarity index. The purpose of the comparison is to find the best possible alignment between \mathbf{T} and \mathbf{M}' . PSR can be achieved by several algorithms, but the iterated closest point (ICP) method is the most widely used.^[21] This algorithm has the following steps:

1. For each point $\mathbf{m}_i \in \mathbf{M}$ (for $i = 1, \dots, N_M$) find the closest point $\mathbf{t}_j \in \mathbf{T}$ ($j = 1, \dots, N_T$).
2. Determine the rigid transformation \mathbf{R} (a transformation preserving lengths such as reflection, translation, and rotation) minimizing the square of the Euclidian distance between the pairs of closest points $(\mathbf{m}_i, \mathbf{t}_j)$ (for $i = 1, \dots, N_M$ and $j = 1, \dots, N_T$).
3. Apply the transformation \mathbf{R} to all points in \mathbf{M} to obtain \mathbf{M}' .
4. Set $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ and repeat steps 1–3.

This algorithm considers that both sets \mathbf{M} and \mathbf{T} are defined at the beginning of the operation and transformation \mathbf{R} is rigid. Let us consider \mathbf{E} is the set containing the N_E equally spaced experimental contour points, while \mathbf{G} represents the point set containing the geometry based on an oblate spheroidal coordinate system. In this case, please notice that model geometry \mathbf{G} is not defined but depends on parameters ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a (the transformation to align \mathbf{G} to \mathbf{E} is not rigid). Thus, ICP was modified an applied as the following two-step recursive method:

- i. Construct \mathbf{G} to have $N_G = N_E$ equally spaced points with an initial estimation of ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a .
- ii. Apply the ICP method by determining the rotation angle (ϑ) and displacement ($\Delta x, \Delta z$) providing the best alignment between $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ and $\mathbf{T} = \mathbf{G}$ (\mathbf{G} is fixed in space, while \mathbf{E} is moved).
- iii. Apply the ICP method by determining parameters ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a providing the best alignment between $\mathbf{M} = \mathbf{G}$ and $\mathbf{T} = \mathbf{E}$ (\mathbf{E} is fixed in space, while \mathbf{G} is moved).

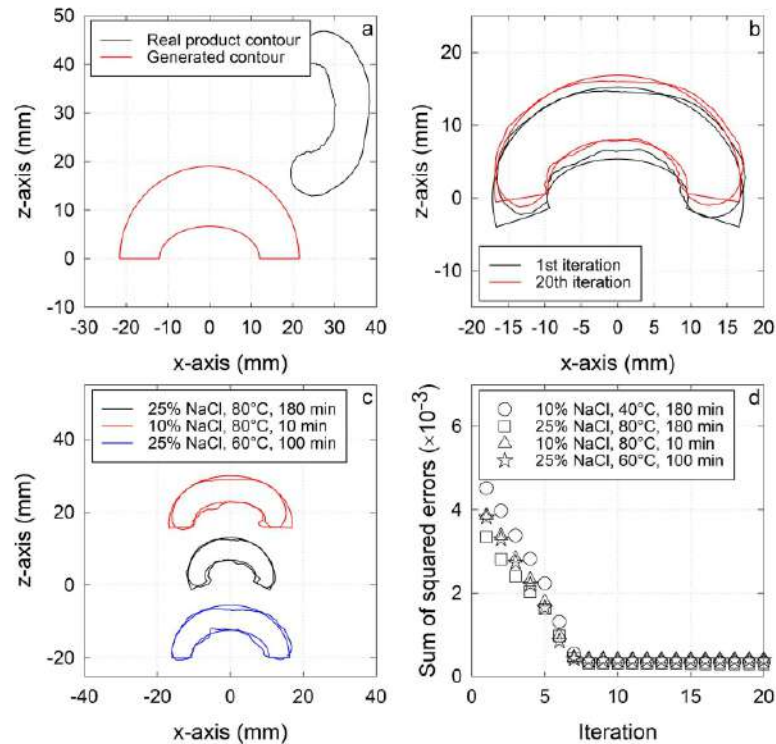


Figure 2. Steps in point set registration. (a) Initial positions for experimental and model geometries (180 min, 10% NaCl, 40 °C), (b) outputs at the end of the first and final iterations (180 min, 10% NaCl, 40 °C), (c) PSR-generated geometries for other experimental conditions, and (d) algorithm convergence.

iv. Repeat steps ii–iii.

The above procedure was applied to every sampled point in the experimental OD curve. PSR steps are shown in Figures 2(a,b) for a sample processed with the 10% NaCl solution during 180 min at 40 °C, while the result of the algorithm for additional experimental conditions is presented in Figure 2(c). The proposed algorithm converges in less than 10 iterations (Figure 2(d)), each one involving two ICP steps.

Finally, the dependency of fitted parameters ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a on experimental water loss (\bar{W}) or solute gain (\bar{S}) was analyzed. As it will be shown in the Results and Discussion section, apart from the ellipse focus (a), no significant relationship was found between these variables and water loss ($p > 0.05$). Thus, product shrinkage could be included in OD model by updating this parameter during mass transfer simulations.

González-Pérez et al.^[4] used product roundness, defined by Eq. (8), to describe the shape change of product.

$$r = \frac{\text{cross-sectional area of product}}{\text{area of minimum circle enclosing product contour}} \quad (8)$$

In this study, roundness is proposed to quantify geometry mismatch between experimental and model product shapes.

2.4. Mass transfer model

The mass transfer model was developed under the following assumptions:

- i. Product shape can be approximated by the appropriate section of an oblate spheroid with mass transfer in ξ and θ directions (mass transfer in the ϕ direction can be neglected due to the symmetrical shape of the product around the z -axis).
- ii. Water and solute are the only transferring substances between the product and osmotic solution.

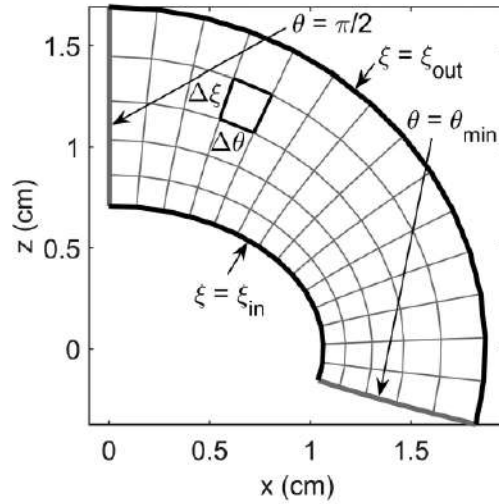


Figure 3. Mushroom pileus geometry based on oblate spheroidal coordinate system (figure created with $\xi_{in}=0.799$, $\xi_{out}=1.497$, $\theta_{min}=-0.224$ rad, $a=0.797$ cm, $n_{\xi}=6$, and $n_{\theta}=6$).

- iii. Mass transfer within the product can be represented by a diffusion mechanism.
- iv. Diffusion coefficients do not change during the process.
- v. Negligible external resistance to mass transfer at product surface because of the stirred system.
- vi. Uniform distribution of diffusing substance in the product at the beginning of the process.
- vii. Shrinkage occurs by the contraction of ellipses focus.
- viii. Constant concentration of the osmotic medium.
- ix. Process is isothermal.

Thus, the resulting OD model under previous assumptions is

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) \cosh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cosh \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\delta^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (10)$$

$$\psi = 0 \text{ for } \xi = \xi_{out} \text{ and } \theta_{min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

$$\psi = 0 \text{ for } \theta = \theta_{min} \text{ and } \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{out} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \text{ for } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ and } \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{out} \quad (13)$$

$$\psi = 1 - \frac{W(\xi, \theta)}{W_e} \text{ or } \psi = 1 - \frac{S(\xi, \theta)}{S_e} \quad (14)$$

$$\delta = \frac{a}{a_0} \quad (15)$$

$$\tau = \frac{Dt}{a_0^2} \quad (16)$$

where ψ is the dimensionless concentration for water or solute, δ is the normalized focus (dimensionless), τ is Fourier number for mass transfer (dimensionless), D is the effective diffusivity (m^2/s), and t is the time (s).

2.5. Model solution

The proposed model was numerically solved as it does not have an analytical solution. The method of lines with central finite differences for the discretization of space derivatives was applied to Eq. (10) producing the ordinary differential equation (ODE) system ($1 < j < N_{\xi}$, $1 < k \leq N_{\theta}$)

$$\frac{d\psi_{j,k}}{dt} = \frac{1}{\delta_j^2} \left[A_{j,k} \left(\frac{\cosh \xi_{j+1/2} (\psi_{j+1,k} - \psi_{j,k}) - \cosh \xi_{j-1/2} (\psi_{j,k} - \psi_{j-1,k})}{(\Delta \xi)^2} \right) + B_{j,k} \left(\frac{\cos \theta_{k+1/2} (\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k}) - \cos \theta_{k-1/2} (\psi_{j,k} - \psi_{j,k-1})}{(\Delta \theta)^2} \right) \right] \quad (17)$$

$$A_{j,k} = \frac{1}{(\sinh^2 \xi_j + \sin^2 \theta_k) \cosh \xi_j} \quad (18)$$

$$B_{j,k} = \frac{1}{(\sinh^2 \xi_j + \sin^2 \theta_k) \cos \theta_k} \quad (19)$$

$$\cosh \xi_{j\pm 1/2} = \frac{\cosh \xi_{j\pm 1} + \cosh \xi_j}{2} \quad (20)$$

$$\cos \theta_{k\pm 1/2} = \frac{\cos \theta_{k\pm 1} + \cos \theta_k}{2} \quad (21)$$

The computational domain can be seen in Figure 3. The resulting ODE system was integrated with $N_{\xi} = 100$ and $N_{\theta} = 100$ using the Matlab routine ode15s, which is based on a variable order method (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, Ma, USA). The average dimensionless concentration of water and solute in the product was calculated from the numerical integration of local values by evaluating the following expression with the trapezoidal rule:

$$\Psi = \frac{\int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \int_{\xi_{in}}^{\xi_{out}} \psi(\xi, \theta) a^3 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) \cosh \xi \cos \theta d\xi d\theta}{\int_{\theta_{min}}^{\pi/2} \int_{\xi_{in}}^{\xi_{out}} a^3 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) \cosh \xi \cos \theta d\xi d\theta} \quad (22)$$

2.6. Linear regression approach to estimate diffusion coefficients

The solution of the diffusion equation for any simple separable orthogonal coordinate system, such as the oblate spheroidal coordinates, is always,^[23]

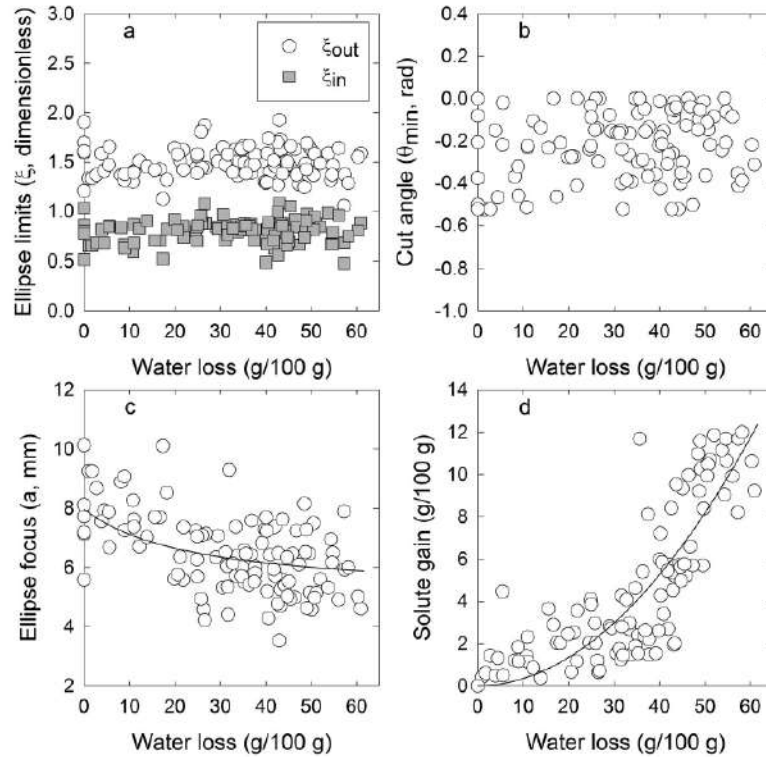


Figure 4. Evolution of geometrical parameters (estimated with point set registration algorithm) and solute gain as a function of water loss. (a) ellipse limits (ξ_{in} and ξ_{out}), (b) cut angle (θ_{min}), (c) ellipse focus (a), and (d) solute gain.

$$\psi(u_1, u_2, u_3, \tau) = U(u_1, u_2, u_3) \exp(-\lambda^2 \tau) \quad (23)$$

where λ should satisfy a given equation resulting from applying the corresponding boundary conditions. Thus, it is expected that an average solution will have the general form

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\infty} A_{mno} \exp(-\lambda_{mno}^2 \tau) \quad (24)$$

By truncating the series in Eq. (24) after the first term, inserting Eq. (16) and expressing the result in logarithmic form it becomes

$$\ln \Psi = \ln A_1 - \frac{\lambda_1^2 D}{a_0^2} t \quad (25)$$

The expected subscript 111 in Eq. (25) was replaced by 1 to indicate it is the first value. Therefore, the diffusion coefficient can be estimated from the slope of the plot of $\ln \Psi$ vs. t . The value of λ_1^2 , in the absence of an eigenfunction arising from the analytical solution of the current problem, may be estimated as the slope of the straight portion of the plot of $\ln \Psi$ vs. τ

obtained from the numerical solution. Thus, the behavior of λ_1^2 was obtained by solving diffusion model under different combinations of parameters ξ_{in} , ξ_{out} , and θ_{min} . Parameter ξ_{out} was indirectly explored as the ellipticity e , defined in Eq. (5), with values from 0.1 to 0.995. The parameter ξ_{in} was indirectly explored as the quantity

$$\chi = \frac{\xi_{in}}{\xi_{out}} \quad (26)$$

with values from 0 to 0.9. Finally, θ_{min} was explored in values 0 and -0.3 rad. The value of $\lambda_1^2 \rightarrow \infty$ as $e \rightarrow 1$ or $\chi \rightarrow 1$ (when the product shape tends to a flat slab). On the other hand, $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ as $e \rightarrow 0$. In these cases, both numerical solution of diffusion model and evaluation of the slope are error prone. A solution to this potential problem is to redefine Fourier number for mass transfer during simulations by using a new length for diffusion. The new characteristic length for diffusion is

$$L = \frac{z_{out} - z_{in}}{2} = \frac{a(\sinh \chi_{out} - \sinh \chi_{in})}{2} \quad (27)$$

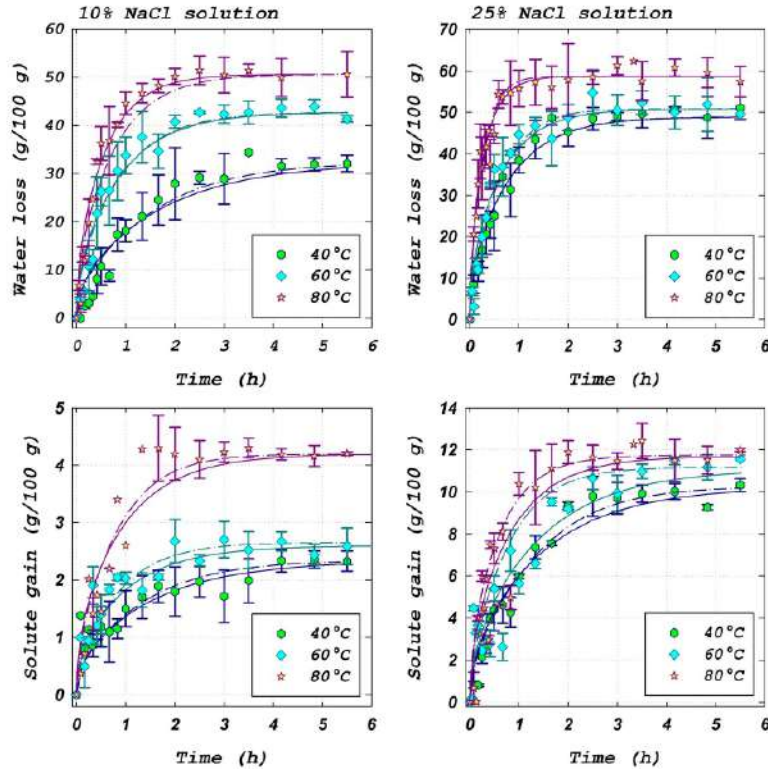


Figure 5. Comparison of experimental dehydration (top) and impregnation (bottom) data of white mushroom pilei and numerical solution of models based on geometry generated with point set registration algorithm and oblate spheroidal coordinate system (continuous lines) and that proposed by González-Pérez *et al.*^[4] for hemisphere geometry (dashed lines).

where $z = z_{in}$ if $\theta = \pi/2$ and $\xi = \xi_{in}$ and $z = z_{out}$ if $\theta = \pi/2$ and $\xi = \xi_{out}$. The modified slope Λ_1^2 of the straight portion of the plot of $\ln \Psi$ vs. τ' (where $\tau' = Dt/L^2$) is related to the original slope λ_1^2 by

$$\lambda_1^2 = \frac{4\Lambda_1^2}{[\sinh(\xi_{out}) - \sinh(\chi\xi_{out})]^2} \quad (28)$$

Diffusion coefficients can be estimated once λ_1^2 is known. Finally, the effect of product shrinkage on diffusivities estimation can be included by considering an appropriate value for a_0 .

2.7. Data analysis

Diffusivity values were estimated from the nonlinear regression fit of numerical solution to Eqs. (10)–(13) and (22) ($D_{i,PSR}$ for $i = w,s$), as well as using the analytical solution (25) from a straight-line fit ($D_{i,SLF}$ for $i = w,s$). Numerical procedures, linear and nonlinear regression (based on ordinary least squares), and

statistical analyses were performed with the MATLAB software and its Statistic Toolbox 7.3 (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, MA, USA). The fitness quality of the proposed models was quantified by the determination coefficient (R^2), while the statistical significance of nonlinear parameter estimates was evaluated through their 95% confidence intervals (95% CI).

Diffusivity values estimated with PSR-generated geometry ($D_{i,PSR}$ for $i = w,s$) were further compared with those reported in^[4] where a hemispherical shell geometry was used to represent the product shape ($D_{i,SHS}$ for $i = w,s$). The relative difference between these values was calculated as

$$E_1(D_i) = 100 \frac{D_{i,SHS} - D_{i,PSR}}{D_{i,PSR}} \text{ for } i = w,s \quad (29)$$

Finally, the difference in diffusivities estimated from numerical solution ($D_{i,PSR}$ for $i = w,s$) and simplified approach ($D_{i,SLF}$ for $i = w,s$) was calculated with the formula

Table 1. Estimated diffusion coefficients during OD of white mushroom pilei using PSR-generated geometry.

C_{s0} (%)	T (°C)	$D_{w,PSR} \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$D_{s,PSR} \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$E_1(D_w)^2$ (%)	$E_1(D_s)^2$ (%)
10	40	0.73 (0.60/0.86)	0.87	0.89 (0.70/1.08)	0.65	50.68	65.17
10	60	1.29 (1.09/1.48)	0.90	1.41 (1.03/1.80)	0.60	36.43	24.82
10	80	1.85 (1.62/2.07)	0.93	1.42 (1.17/1.66)	0.87	7.57	28.87
25	40	1.38 (1.22/1.55)	0.93	0.68 (0.58/0.77)	0.90	4.35	60.29
25	60	1.72 (1.50/1.94)	0.93	0.70 (0.59/0.81)	0.87	7.56	88.57
25	80	3.55 (3.21/3.89)	0.89	1.14 (0.96/1.33)	0.84	28.45	61.40

¹Values in parentheses indicate the 95% CI. ²Relative differences in diffusivities estimated with PSR-generated geometry ($D_{i,PSR}$) and hemispherical shell ($D_{i,HSS}$), Eq. (28). Data for hemispherical shell model from González-Pérez et al.^[4]

$$E_2(D_i) = 100 \frac{D_{i,SLF} - D_{i,PSR}}{D_{i,PSR}} \text{ for } i = w, s \quad (30)$$

3. Results and discussion

3.1. Geometrical characteristics of product estimated with PSR

Figures 4(a–c) show the evolution of PSR-estimated parameters ξ_{in} , ξ_{out} , θ_{min} , and a of white mushroom pilei as a function of water loss. Every point in each plot was estimated from the average contour of three samples. The following ranges and average values (mean \pm standard deviation, $n = 109$) were identified for each variable: $0.47 \leq \xi_{in} \leq 1.08$ (0.80 ± 0.12), $1.05 \leq \xi_{out} \leq 1.92$ (1.50 ± 0.16), $-0.52 \leq \theta_{min} \leq 0.00$ (-0.22 ± 0.16 rad), and $3.53 \leq a \leq 10.13$ (6.48 ± 1.33 mm). Corresponding product ellipticity, estimated from ξ_{out} with Eq. (5), was in the range $0.29 \leq e \leq 0.62$ (0.43 ± 0.06). According to these results, product geometry has a significant departure from a spherical ($e = 0$) section ($p > 0.05$). As the ellipse focus (a) was the only variable showing a significant change with water loss ($p < 0.05$), the following model was proposed to update its value during water loss simulations:

$$a = a_0 \left(1 - \frac{fk\bar{W}}{1 + k\bar{W}} \right) \quad (31)$$

where $a_0 = 7.973$ mm, $f = 0.3655$ (dimensionless), and $k = 4.14 \times 10^{-2}$ (100 g product)/g water. Here, a_0 represents an estimation of the initial geometry size, while f is related to the final amount in which it is changed during processing. On the other hand, k is related to the rate at which the product shrinks. This model is plotted in Figure 4(c).

For simulation of impregnation curves, the following relationship between solute gain (\bar{S}) and water loss (\bar{W}) was proposed (Figure 4(d)) to use Eq. (30):

$$\bar{S} = b_1 \bar{W} + b_2 \bar{W}^2 \quad (32)$$

where $b_1 = 2.84 \times 10^{-3}$ g solute/g water and $b_2 = 3.22 \times 10^{-3}$ (g solute)(100 g product)/(g water).^[2]

Product geometry used during the mass transfer simulations was generated with the PSR-estimated parameters. In this case, as ellipse limits and cut angle did not show a significant change during the process, an average value was used during mass transfer simulations ($\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$, and $\theta_{min} = -0.224$). On the other hand, the initial ellipse focus was taken as that estimated with Eq. (28) ($a_0 = 7.973$ mm).

González-Pérez et al.^[4] reported product roundness in the range $0.47 \leq r \leq 0.73$ (0.64 ± 0.06). In the referred study, hemispherical shell geometry was used to represent product shape during OD simulations, where the inner radius accounted for the 51% of the outer one. Eq. (8) was applied to calculate the roundness of this geometry to give $r = 0.37$. On the other hand, the geometry generated by using the PSR parameters has a roundness $r = 0.63$. A significant difference was found in roundness between experimental and hemispherical shell geometry ($p < 0.05$), but not between the PSR-generated geometry and the real one ($p > 0.05$). Thus, PSR-generated shape would be more adequate than hemispherical shell geometry to represent product during mass transfer simulations, as it resembles better the actual product form.

3.2. Mass transfer during OD of white mushroom

The OD model based on oblate spheroidal coordinates achieved a good reproduction of both water loss ($R^2 > 0.87$) and solute gain ($R^2 > 0.60$) curves (Figure 5). Water diffusivities ($D_{w,PSR}$) were estimated in the range of $0.7\text{--}3.6 \times 10^{-9}$ m²/s, whereas solute diffusivities ($D_{s,PSR}$) were between 0.7×10^{-9} and 1.4×10^{-9} m²/s (Table 1). Diffusivity values estimated with the PSR-generated geometry and oblate spheroidal coordinates were significantly lower ($p < 0.05$) than those estimated assuming the hemispherical shell geometry reported by González-Pérez et al.^[4] Relative differences in estimated diffusion coefficients, $E_1(D_i)$ (for $i = w, s$), between the two models were in the ranges of 4%–51% (average of 23%) and 25%–89% (average of 55%) for water and solute, respectively

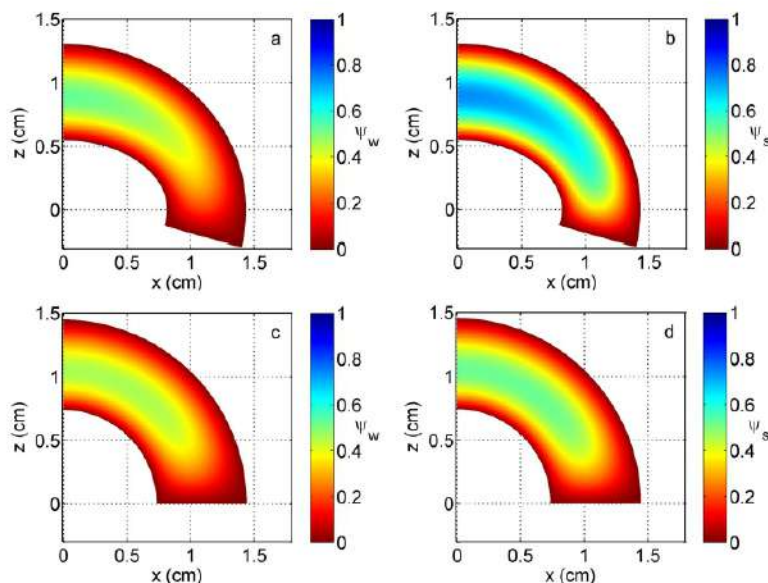


Figure 6. Predicted water (a, c) and solute (b, d) concentration profiles inside the osmodehydrated ($t = 15$ min, 80°C , 10% NaCl solution) white mushroom pileus using oblate spheroid (top) and hemispherical shell (bottom) geometries. Model for the hemispherical shell geometry was reported by González-Pérez *et al.*^[4]

(Table 1). Thus, assumed geometry has a significant effect on the estimation of mass diffusivities.

A comparison between OD models using the hemispherical shell and PSR-generated geometries for predicted dimensionless water loss and solute gain profiles in the product after 15 minutes (80°C , 10% NaCl solution) is shown in Figure 6. Each model implements the product shrinkage in different ways. Product shrinkage reflects on the shortening of radial dimension in the hemispherical shell model, while the ellipse focus, not a coordinate, is updated in PSR-generated geometry. Nevertheless, the two model geometries predicted similar both concentration profiles and product size for the same processing time, and while both geometries look alike, a significant difference was observed in estimated diffusivities. It should be highlighted that neither model fully captures the complex shape of the product and its evolution during OD; however, the model based on PSR and oblate spheroidal coordinates is closer to the real product shape, as discussed in the previous section.

As a result, geometry mismatch is almost eliminated by the proposed model and mass diffusivities are less prone to be overestimated to compensate for this fact. The only way to fully eliminate geometry mismatch would be to use the real product shape during simulations, as demonstrated by López-Méndez

et al.^[1] during drying of gel model systems, where even shape changes of the product were considered. However, the algorithm proposed by López-Méndez *et al.*^[1] has yet to be generalized to products able to be represented as revolution solids such as the white mushroom.

Diffusivity values for NaCl in pure water have been reported as 1.59×10^{-9} , 1.67×10^{-9} , and 1.73×10^{-9} m^2/s for 0.1 g/g and 1.61×10^{-9} , 1.67×10^{-9} , and 1.69×10^{-9} m^2/s for 0.25 g/g at the temperatures of 40, 60, and 80°C , respectively.^[4] Those values could be considered the maximum achievable NaCl mobility in the product, as food matrix will favor lower diffusion coefficients. González-Pérez *et al.*^[4] estimated NaCl diffusivities during OD of mushroom pilei (10% and 25% NaCl; 40, 60, and 80°C). However, apart from NaCl diffusivity values estimated for 0.25 g/g of solute at 40 and 60°C , all remaining coefficients given in^[4] were not statistically different from those of NaCl in pure water ($p < 0.05$). It was theorized that overestimation of NaCl diffusion coefficients may be due to the presence of other simultaneous mass transfer phenomena and/or geometry mismatch, being the last hypothesis already tested in this work. The use of PSR and oblate spheroidal coordinates allowed the estimation of NaCl diffusivity values in product lower than those in pure water ($p < 0.05$) for five processing conditions

Table 2. Estimated diffusivities during OD of white mushroom pile using straight-line fit approach with PSR-based model.

C_{40} (%)	T (°C)	$D_{mSLF} \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$D_{rSLF} \times 10^9$ (m ² /s) ¹	R^2	$E_2(D_m)^2$ (%)	$E_2(D_r)^2$ (%)
10	40	0.31 (0.26/0.36)	0.81	0.23 (0.20/0.26)	0.88	-57.53	-74.16
10	60	0.59 (0.51/0.67)	0.87	0.25 (0.21/0.29)	0.87	-54.26	-82.27
10	80	0.89 (0.80/0.98)	0.92	0.60 (0.49/0.72)	0.93	-51.89	-57.75
25	40	0.56 (0.50/0.63)	0.89	0.38 (0.34/0.41)	0.92	-59.42	-44.12
25	60	0.73 (0.61/0.84)	0.83	0.41 (0.36/0.46)	0.91	-57.56	-41.43
25	80	0.92 (0.70/0.11)	0.83	0.95 (0.76/1.13)	0.77	-74.08	-16.67

¹Values in parentheses indicate the 95% confidence intervals. ²Relative differences in diffusivities estimated with original (D_{rPSR}) and simplified (D_{rSLF}) PSR-based models, Eq. (29).

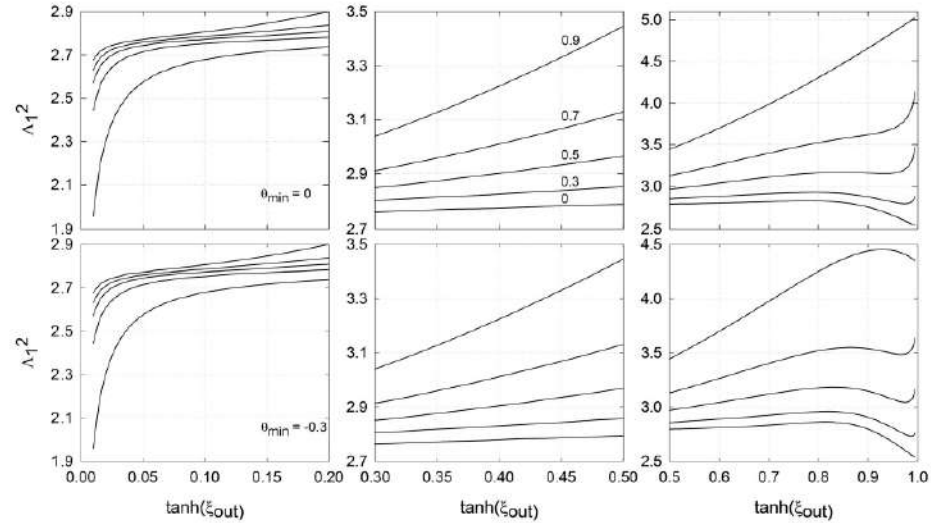


Figure 7. Slopes of average solutions for shapes derived from oblate spheroidal coordinates under different geometrical parameters. Numbers above each curve represent the value of $\chi = \xi_{in}/\xi_{out}$.

(10% NaCl at 40 °C and 80 °C, and 25% NaCl at 40, 60, and 80 °C), while there was no significant difference between those estimated at the remaining treatment ($p > 0.05$). This fact can be explained by a yet existing product geometry mismatch and the assumption of negligible shape change during OD simulation. Therefore, additional efforts are required to solve these issues.

3.3. Linear regression approach to estimation of diffusion coefficients

Mass diffusivities estimated with the linear regression approach are listed in Table 2. These data were estimated using the first eigenvalue $\lambda_1^2 = 8.112$ ($\Lambda_1^2 = 3.095$), corresponding to $\xi_{in} = 0.799$, $\xi_{out} = 1.497$, and $\theta_{min} = -0.224$. The required eigenvalue can be located on the plot of the slopes (Λ_1^2) of average solutions from simulations performed with the modified Fourier number for mass transfer (τ') under different

geometrical parameters (Figure 7). These plots can be used for the fast estimation of mass diffusivities in other products with geometries developed from the oblate spheroidal coordinate system using the proposed linear regression approach if a numerical solution is not available. In this case, diffusivities were corrected for product shrinkage by considering a time-averaged value of ellipse focus by integrating Eq. (31) as

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{fkx}{1+kx} \right) dx / \int_{x_1}^{x_2} dx \\
 &= a_0 \left[1 - f + \frac{f}{k(x_2 - x_1)} \ln \left(\frac{kx_2 + 1}{kx_1 + 1} \right) \right] \quad (33)
 \end{aligned}$$

Diffusivity values estimated with the linear regression approach and simplified model (25) were significantly lower ($p < 0.05$) than those estimated with the original model. Relative differences in estimated diffusion coefficients between both approaches, $E_2(D_i)$ (for $i = w, s$), were in the ranges of 52%–74% (average of

59%) and 17%–82% (average of 53%) for water and solute (Table 2), respectively. The average error is comparable to that obtained between the PSRE-generated and hemispherical shell geometries. However, according to some authors, geometry mismatch can cause the overestimation of diffusion coefficients in about the 397 to 471%.^[3] Thus, a linear regression approach with reported slopes represents a fast and acceptable method to estimate mass transfer properties in similar oblate spheroid-shaped products.

Conclusions

The sequential PSR method based on the two-step recursive ICP algorithm was successfully applied to extract relevant shape descriptors of osmodehydrated white mushroom pilei. Moreover, PSR is a valuable tool to generate a geometry closely resembling the real product shape for modeling purposes, allowing a reliable estimation of mass transfer properties by reducing geometry mismatch. The proposed semi-theoretical analysis allowed the formulation of a simple linear regression approach to estimate diffusion coefficients in sections of oblate spheroids with a lower error than that observed in other studies for geometry mismatch. The use of roundness as shape factor allowed the quantification of geometry mismatch between experimental and model product shapes. PSR can be potentially applied to reduce geometry mismatch in other products and/or operations, but additional studies focusing on its application are required.

Nomenclature

a	ellipse focus (m)
b_1, b_2	parameters for solute gain-water loss relationship
D	effective diffusivity (m ² /s)
e	ellipticity (dimensionless)
E	relative difference (%)
\mathbf{E}	experimental point set
f, k	parameters for shrinkage model
\mathbf{G}	geometry point set
L	semi-thickness (m)
m	mass (kg)
\mathbf{m}, \mathbf{t}	a coordinate of \mathbf{M} and \mathbf{T} , respectively
\mathbf{M}	target point set
N_M, N_T	number of coordinates in \mathbf{M} and \mathbf{T} , respectively
N_ξ, N_θ	number of nodes along ξ and θ , respectively
r	roundness (dimensionless)
S, \bar{S}	solute gain: local and average, respectively (kg/kg)
U	spatial contribution of separable solution
W, \bar{W}	water loss: local and average, respectively (kg/kg)

t	time (s)
\mathbf{T}	target point set
x, y, z	rectangular coordinates (m)
x_{out}	outer semi-major axis (m)
z_{in}, z_{out}	semi-minor axis: inner and outer, respectively (m)

Greek symbols

δ	normalized focus (dimensionless)
ε	relative error (%)
λ, Λ	eigenvalue (dimensionless)
τ, τ'	Fourier number for mass transfer (dimensionless)
ξ, θ, ϕ	prolate spheroidal coordinates
$\chi_{in}^{\xi}, \chi_{out}^{\xi}$	ratio
ψ, Ψ	dimensionless concentration: local and average, respectively

Subscripts

0	at the beginning of the OD process
e	at equilibrium
HSH	refer to hemispherical shell
in	inner
min	minimum
out	outer
p	for product
PSR	refer to PSR-generated geometry
s	for solute
SLF	refer to straight-line fit
w	for water

Funding

Karen Harianty Estévez-Sánchez acknowledges her doctoral scholarship from the VIEP-BUAP. Julio Emmanuel González-Pérez acknowledges his postgraduate scholarship from CONACYT (Grant Number 604921). Dr. Irving Israel Ruiz-López would like to thank the VIEP-BUAP for providing financial support (Grant Number 100474666-VIEP2018) through the "Programa Institucional para la Consolidación de los Cuerpos Académicos y Conformación de Redes de Investigación 2018".

ORCID

- K. H. Estévez-Sánchez  <http://orcid.org/0000-0001-5539-5466>
- J. E. González-Pérez  <http://orcid.org/0000-0002-0218-6158>
- C. E. Ochoa-Velasco  <http://orcid.org/0000-0002-9624-6616>
- M. A. García-Alvarado  <http://orcid.org/0000-0002-4921-411X>
- D. Cruz-González  <http://orcid.org/0000-0003-3106-8051>
- A. Sampieri  <http://orcid.org/0000-0002-3852-0664>
- I. I. Ruiz-López  <http://orcid.org/0000-0002-6592-6838>

References

[1] López-Méndez, E. M.; Ortiz-García-Carrasco, B.; Ruiz-Espinosa, H.; Sampieri-Croda, A.; García-

- Alvarado, M. A.; Ochoa-Velasco, C.; Escobedo-Morales, A.; Ruiz-López, I. I. Effect of Shape Change and Initial Geometry on Water Diffusivity Estimation during Drying of Gel Model Systems. *J. Food Eng.* **2018**, *216*, 52–64. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2017.07.033.
- [2] Sareban, M.; Souraki, B. A. Anisotropic Diffusion during Osmotic Dehydration of Celery Stalks in Salt Solution. *Food Bioprod. Process.* **2016**, *98*, 161–172. DOI: 10.1016/j.fbp.2016.01.005.
- [3] Bon, J.; Simal, S.; Rosselló, C.; Mulet, A. Drying Characteristics of Hemispherical Solids. *J. Food Eng.* **1997**, *34*, 109–122. DOI: 10.1016/S0260-8774(97)00098-8.
- [4] González-Pérez, J. E.; López-Méndez, E. M.; Luna-Guevara, J. J.; Ruiz-Espinosa, H.; Ochoa-Velasco, C. E.; Ruiz-López, I. I. Analysis of Mass Transfer and Morphometric Characteristics of White Mushroom (*Agaricus Bisporus*) pilei during Osmotic Dehydration. *J. Food Eng.* **2019**, *240*, 120–132. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2018.07.026.
- [5] Prakash, B.; Pan, Z. Effect of Geometry of Rice Kernels on Drying Modeling Results. *Drying Technol.* **2012**, *30*, 801–807. DOI: 10.1080/07373937.2012.665112.
- [6] Fabri, A.; Cevoli, C.; Alessandrini, L.; Romani, S. Numerical Modeling of Heat and Mass Transfer during Coffee Roasting Process. *J. Food Eng.* **2011**, *105*, 264–269. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2011.02.030.
- [7] Santos, G. T.; Fortes, M.; Amantea, R. P.; Ferreira, W. R.; Martins, J. H. Irreversible Thermodynamics Analysis of Ellipsoidal Wheat Kernel Drying, aiming at the Evaluation of Phenomenological Properties. *Drying Technol.* **2018**, *36*, 1117–1127. DOI: 10.1080/07373937.2017.1386667.
- [8] Wu, J.; Zhang, H.; Li, F. A Study on Drying Models and Internal Stresses of the Rice Kernel during Infrared Drying. *Drying Technol.* **2017**, *36*, 680–688.
- [9] Bordin, M. S. P.; Borsato, D.; Cremasco, H.; Galvan, D.; Silva, L. R. C.; Romagnoli, É. S.; Angilelli, K. G. Mathematical Modeling of Multicomponent NaCl and KCl Diffusion Process during the Salting of Pre-cooked Champignon Mushrooms. *Food Chem.* **2019**, *273*, 99–105. DOI: 10.1016/j.foodchem.2018.01.188.
- [10] Baldino, N.; Gabriele, D.; Gentile, L.; Carnevale, I.; Lupi, F. R.; de Cindio, B.; De Luca, M. C. Drying of Sausages Made from the Meat of Black and White Pigs: Numerical Modeling and Structural Investigation. *Drying Technol.* **2017**, *35*, 724–735. DOI: 10.1080/07373937.2016.1209681.
- [11] da Silva, W. P.; Hamawand, I.; e Silva, C. M. D. P. S. A Liquid Diffusion Model to Describe Drying of Whole Bananas Using Boundary-fitted Coordinates. *J. Food Eng.* **2014**, *137*, 32–38. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2014.03.029.
- [12] Almeida, G.; Lancha, J. P.; Pierre, F.; Casalinho, J.; Perré, P. Physical Behavior of Highly Deformable Products during Convective Drying Assessed by a New Experimental Device. *Drying Technol.* **2017**, *35*, 906–917. DOI: 10.1080/07373937.2016.1233883.
- [13] Wang, D.; Martynenko, A.; Corscadden, K.; He, Q. Computer Vision for Bulk Volume Estimation of Apple Slices during Drying. *Drying Technol.* **2017**, *35*, 616–624. DOI: 10.1080/07373937.2016.1196700.
- [14] da Silva Júnior, A. F.; da Silva, W. P.; de Farias Aires, J. E.; Aires, K. L. C. A. F.; de Castro, D. S. Osmotic Dehydration Kinetics of Banana Slices Considering Variable Diffusivities and Shrinkage. *Int. J. Food Prop.* **2017**, *20*, 1313–1325. DOI: 10.1080/10942912.2016.1209215.
- [15] Deepika, S.; Sutar, P. P. Osmotic Dehydration of Lemon (*Citrus Limon* L.) Slices: modeling Mass Transfer Kinetics Correlated with Dry Matter Holding Capacity and Juice Sac Losses. *Drying Technol.* **2017**, *35*, 877–892. DOI: 10.1080/07373937.2016.1229675.
- [16] Gamboa-Santos, J.; Campañone, I. A. Application of Osmotic Dehydration and Microwave Drying to Strawberries Coated with Edible Films. *Drying Technol.* **2018**, *1*. DOI: 10.1080/07373937.2018.1481426.
- [17] de Farias Aires, J. E.; da Silva, W. P.; de Almeida Farias Aires, K. L. C.; da Silva Júnior, A. F.; de Castro, D. S.; da Silva, E.; Silva, C. M. D. P. Guava Osmotic Dehydration: Description by Two-Dimensional Diffusion Models considering Shrinkage and Variations in Process Parameters. *Int. J. Food Eng.* **2016**, *12*, 527–536.
- [18] de Farias Aires, J. E.; da Silva, W. P.; Aires, K. L. C. D. A. F.; da Silva Júnior, A. F.; Silva, C. M. D. P. D. S. E. Description of Osmotic Dehydration of Apple Using Two-dimensional Diffusion Models considering Shrinkage and Variations in Process Parameters. *Drying Technol.* **2017**, *35*, 815–826. DOI: 10.1080/07373937.2016.1218891.
- [19] de Almeida Farias Aires, K. L. C.; da Silva, W. P.; de Farias Aires, J. E.; da Silva Júnior, A. F.; e Silva, C. Apple Osmotic Dehydration Described by Three-dimensional Numerical Solution of the Diffusion Equation. *Drying Technol.* **2018**, *36*, 1970–1981. DOI: 10.1080/07373937.2018.1431274.
- [20] Hosseinbor, A. P.; Zhdanov, R.; Ushveridze, A. An Unsupervised 2D Point-set Registration Algorithm for Unlabeled Feature Points: Application to Fingerprint Matching. *Pattern Recog. Lett.* **2017**, *100*, 137–143. DOI: 10.1016/j.patrec.2017.10.009.
- [21] Maiseli, B.; Gu, Y.; Gao, H. Recent Developments and Trends in Point Set Registration Methods. *J. Vis. Commun. Image Represent.* **2017**, *46*, 95–106. DOI: 10.1016/j.jvcir.2017.03.012.
- [22] Ortiz-García-Carrasco, B.; Yañez-Mota, E.; Pacheco-Aguirre, F. M.; Ruiz-Espinosa, H.; García-Alvarado, M. A.; Cortés-Zavaleta, O.; Ruiz-López, I. I. Drying of Shrinkable Food Products: appraisal of Deformation Behavior and Moisture Diffusivity Estimation under Isotropic Shrinkage. *J. Food Eng.* **2015**, *144*, 138–147. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2014.07.022.
- [23] Moon, P.; Spencer, D. E. *Field Theory Handbook*; Springer: Berlin, Germany, **1961**.

Bibliografía

- Adrover, A., Brasiello, A., & Ponso, G. (2019). A moving boundary model for food isothermal drying and shrinkage: general setting. *Journal of Food Engineering*, 244, 178–191.
- Aguirre-García, M., Hernández-Carranza, P., Cortés-Zavaleta, O., Ruiz-Espinosa, H., Ochoa-Velasco, C. E., & Ruiz-Lopez, I. I. (2020). Mass transfer analysis of bioactive compounds in apple wedges impregnated with beetroot juice: a 3D modelling approach. *Journal of Food Engineering*, 282, 110003.
- Almeida, G., Lancha, J. P., Pierre, F., Casalinho, J., & Perre, P. (2017). Physical behavior of highly deformable products during convective drying assessed by a new experimental device. *Drying Technology*, 35, 906–917.
- Amami, E., Khezami, W., Mezrigui, S., Badwaik, L. S., Bejar, A. K., Perez, C. T., & Kechaou, N. (2017). Effect of ultrasound-assisted osmotic dehydration pretreatment on the convective drying of strawberry. *Ultrasonics Sonochemistry*, 36, 286–300.
- Aprajeeta, J., Gopirajah, R., & Anandharamakrishnan, C. (2015). Shrinkage and porosity effects on heat and mass transfer during potato drying. *Journal of Food Engineering*, 144, 119–128.
- Aral, S. & Bese, A. V. (2016). Convective drying of hawthorn fruit (*Crataegus spp.*): effect of experimental parameters on drying kinetics, color, shrinkage, and rehydration capacity. *Food Chemistry*, 210, 577–584.
- Ateeque, M., Mishra, R. K., Chandramohan, V. P., & Talukdar, P. (2014). Numerical modeling of convective drying of food with spatially dependent transfer coefficient in a turbulent flow field. *International Journal of Thermal Sciences*, 78, 145–157.
- Avhad, M. R. & Marchetti, J. M. (2016). Mathematical modelling of the drying kinetics of hass avocado seeds. *Industrial Crops and Products*, 91, 76–87.
- Baldino, N., Gabriele, D., Gentile, L., Carnevale, I., Lupi, F. R., de Cindio, B., & de Luca, M. C. (2017). Drying of sausages made from the meat of black and

- white pigs: numerical modeling and structural investigation. *Drying Technology*, 35, 724–735.
- Barbosa-Cánovas, G. V. & Vega-Mercado, H. (2010). *Dehydration of foods*. New York, USA: Champam and Hall, first edition.
- Batista, L. M., da Rosa, C. A., & Pinto, L. A. A. (2007). Diffusive model with variable effective diffusivity considering shrinkage in thin layer drying of chitosan. *Journal of Food Engineering*, 81, 127–132.
- Bon, J., Rossello, C., Femenia, A., Eim, V., & Simal, S. (2007). Mathematical modeling of drying kinetics for apricots: influence of the external resistance to mass transfer. *Drying Technology*, 25, 1829–1835.
- Bon, J., Simal, S., Rosello, C., & Mulet, A. (1997). Drying characteristics of hemispherical solids. *Journal of Food Engineering*, 34, 109–122.
- Bordin, M. S. P., Borsato, D., Cremasco, H., Galvan, D., Silva, L. R. C., Romagnoli, S., & Angilelli, K. G. (2019). Mathematical modeling of multicomponent NaCl and KCl diffusion process during the salting of pre-cooked champignon mushrooms. *Food Chemistry*, 273, 99–105.
- Boukouvalas, C. J., Bisharat, G. I., & Krokida, M. K. (2010). Structural properties of vegetables during air drying. *International Journal of Food Properties*, 13, 1393–1404.
- Bradford, K. J., Dahal, P., Asbrouck, J. V., Kunusoth, K., Bello, P., Thompson, J., & Wu, F. (2018). The dry chain: reducing postharvest losses and improving food safety in humid climates. *Trends in Food Science and Technology*, 71, 84–93.
- Brasiello, A., Adiletta, G., Russo, P., Crescitelli, S., Albanese, D., & Matteo, M. D. (2013). Mathematical modeling of eggplant drying: shrinkage effect. *Journal of Food Engineering*, 114, 99–105.
- Brasiello, A., Iannone, G., Adiletta, G., Pasquale, S. D., Russo, P., & Matteo, M. D. (2017). Mathematical model for dehydration and shrinkage: prediction of eggplant's MRI spatial profiles. *Journal of Food Engineering*, 203, 1–5.
- Briffaz, A., Bohuon, P., Méot, J.-M., Dornier, M., & Mestres, C. (2014). Modelling of

- water transport and swelling associated with starch gelatinization during rice cooking. *Journal of Food Engineering*, 121, 143–151.
- Castro, A. M., Mayorga, E. Y., & Moreno, F. L. (2018). Mathematical modelling of convective drying of fruits: a review. *Journal of Food Engineering*, 223, 152–167.
- Cengel, Y. A. & Boles, M. A. (2009). *Termodinámica*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Cevoli, C., Nallan-Chakravartula, S. S., Rosa, M. D., & Fabbri, A. (2019). Drying of coating on bun bread: heat and mass transfer numerical model. *Biosystems Engineering*, 181, 1–10.
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers*. New York, USA: Mc Graw Hill Education, seventh edition.
- Chen, C., Venkitasamy, C., Zhang, W., Khir, R., Upadhyaya, S., & Pan, Z. (2020). Effective moisture diffusivity and drying simulation of walnuts under hot air. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 150, 119283.
- Chen, G., Maier, D. E., Campanella, O. H., & Takhar, P. S. (2009). Modeling of moisture diffusivities for components of yellow-dent corn kernels. *Journal of Cereal Science*, 50, 82–90.
- Choudhary, A., Gopirajah, R., & Anandharamakrishnan, C. (2018). Computational modeling of dehydration of mushroom. *Food Processing and Technology*, 6, 264–270.
- Cohen, J. D. & Yang, T. C. S. (1995). Progress in food dehydration. *Trends in Food Science and Technology*, 6, 20–25.
- Crank, J. (1975). *Mathematics of Diffusion*. Bristol, England: Oxford University Press, second edition.
- Cursio, S. & Aversa, M. (2014). Influence of shrinkage on convective drying of fresh vegetables: a theoretical model. *Journal of Food Engineering*, 123, 36–49.
- da Silva, W. P., e Silva, C. M. D. P. S., & Gama, F. J. A. (2014). Estimation of thermo-physical properties of products with cylindrical shape during drying: the coupling between mass and heat. *Journal of Food Engineering*, 141,

- 65–73.
- da Silva, W. P., e Silva, C. M. D. P. S., & Gomes, J. P. (2013). Drying description of cylindrical pieces of bananas in different temperatures using diffusion models. *Journal of Food Engineering*, 117, 417–424.
- da Silva, W. P., Precker, J. W., e Silva, D. D. P. D., de Silva, C. D. P. S., & de Lima, A. G. B. (2009). Numerical simulation of diffusive processes in solids of revolution via the finite volume method and generalized coordinates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 4976–4985.
- da Silva Junior, A. F., da Silva, W. P., de Farias Aires, J. E., Aires, K. L. C. A. F., & de D. S. Castro (2017). Osmotic dehydration kinetics of banana slices considering variable diffusivities and shrinkage. *International Journal of Food Properties*, 20, 1313–1325.
- Das, M., Alic, E., & Kavak-Akpinar, E. (2020). Numerical and experimental analysis of heat and mass transfer in the drying process of the solar drying system. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 24, 236–246.
- de Farias Aires, J. E., da Silva, W. P., Aires, K. L. C. D. A. F., da Silva Junior, A. F., & Silva, C. M. D. P. D. S. E. (2017). Description of osmotic dehydration of apple using two-dimensional diffusion models considering shrinkage and variations in process parameters. *Drying Technology*, 35, 815–826.
- de Farias Aires, J. E., da Silva, W. P., de Almeida Farias Aires, K. L. C., da Silva Junior, A. F., de Castro, D. S., da Silva, E., & Silva, C. M. D. P. (2016). Guava osmotic dehydration: description by two-dimensional diffusion models considering shrinkage and variations in process parameters. *International Journal of Food Engineering*, 12, 527–536.
- de Lima, A. G. B., Queiroz, M. R., & Nebra, S. A. (2002). Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solids with ellipsoidal configuration. *Chemical Engineering Journal*, 86, 85–93.
- Defraeye, T. (2017). Impact of size and shape of fresh-cut fruit on the drying time and fruit quality. *Journal of Food Engineering*, 210, 35–41.

- Dehghannya, J., Gorbani, R., & Ghanbarzadeh, B. (2015). Effect of ultrasound-assisted osmotic dehydration pretreatment on drying kinetics and effective moisture diffusivity of Mirabelle plum. *Journal of Food Processing and Preservation*, 39, 2710–2717.
- Di Matteo, M., Cinquanta, L., Galiero, G., & Crescitelli, S. (2003). A mathematical model of mass transfer in spherical geometry plum (*Prunus domestica*) drying. *Journal of Food Engineering*, 58, 183–192.
- do Carmo, J. E. F. & de Lima, A. G. B. (2005). Drying of lentil including shrinkage a numerical simulation. *Drying Technology*, 23, 1977–1992.
- Dotto, G. L., Meili, L., Tanabe, E. H., Chielle, D. P., & Moreira, M. F. P. (2017). Evaluation of the mass transfer process on thin layer drying of papaya seeds from the perspective of diffusive models. *Heat and Mass Transfer*, 54, 463–471.
- Estévez-Sánchez, K. H., González-Pérez, J. E., Ochoa-Velasco, C. E., García-Alvarado, M. A., Cruz-González, D., Sampieri, A., & Ruiz-López, I. I. (2020). Point set registration for reduced geometry mismatch during estimation of mass transfer properties in osmotic dehydration of complex-shaped foods. *Drying Technology*, 38, 506–517.
- Fabri, A., Cevoli, C., Alessandrini, L., & Romani, S. (2011). Numerical modeling of heat and mass transfer during coffee roasting process. *Journal of Food Engineering*, 105, 264–269.
- Fernando, W. J. N., Low, H. C., & Ahmad, A. L. (2011). Dependence of the effective diffusion coefficient of moisture with thickness and temperature in convective drying of sliced materials. a study on slices of banana, cassava and pumpkin. *Journal of Food Engineering*, 102, 310–316.
- Fuller, E. N., Ensley, K., & Giddings, J. C. (1969). Diffusion of halogenated hydrocarbons in helium. the effect of structure on collision cross sections. *Journal of Physical Chemistry*, 73(11), 3679–3685.
- Garbalinska, H., Stasiak, M., Bochenek, M., & Musielak, G. (2018). Assessment of a new method for determining the relationship between effective diffusivity

- and moisture concentration - exemplified by autoclaved aerated concrete of four density classes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 124, 288–297.
- García-Alvarado, M. A., de la Cruz-Medina, J., Waliszewski-Kubiak, K. N., & Salgado-Cervantes, M. A. (1995). Statistical analysis of the GAB and Henderson equations for sorption isotherms of foods. *Drying Technology*, 13, 2141–2152.
- García-Alvarado, M. A., Pacheco-Aguirre, F. M., & Ruiz-López, I. I. (2014). Analytical solution of simultaneous heat and mass transfer equations during food drying. *Journal of Food Engineering*, 142, 39–45.
- García-Pérez, J. V., Cárcel, J. A., Riera, E., Roselló, C., & Mulet, A. (2012). Intensification of low-temperature drying by using ultrasound. *Drying Technology*, 30, 1199–1208.
- García, C. C., Mauro, M. A., & Kimura, M. (2007). Kinetics of osmotic dehydration and air-drying of pumpkins (*Cucurbita moschata*). *Journal of Food Engineering*, 82, 284–291.
- Gastón, A. L., Abalone, R. M., & Giner, S. A. (2002). Wheat drying kinetics. diffusivities for sphere and ellipsoid by finite elements. *Journal of Food Engineering*, 52, 313–322.
- Gastón, A. L., Abalone, R. M., Giner, S. A., & Bruce, D. M. (2004). Effect of modeling assumptions on the effective water diffusivity in the wheat. *Biosystems Engineering*, 88, 175–185.
- Geankoplis, C. J. (1998). *Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias*. México: Compañía Editorial Continental.
- Gómez-Cruz, F. J., Palomar-Carnicero, J. M., Hernández-Escobedo, Q., & Cruz-Peragón, F. (2020). Determination of the drying rate and effective diffusivity coefficients during convective drying of two-phase olive mill waste at rotary dryers drying conditions for their application. *Renewable Energy*, 153, 900–910.
- González-Pérez, J. E., López-Méndez, E. M., Luna-Guevara, J. J., Ruiz-Espinosa, H.,

- Ochoa-Velasco, C. E., & Ruiz-López, I. I. (2019a). Analysis of mass transfer and morphometric characteristics of white mushroom (*Agaricus bisporus*) pilei during osmotic dehydration. *Journal of Food Engineering*, 240, 120–132.
- González-Pérez, J. E., López-Méndez, E. M., Ochoa-Velasco, C. E., & Ruiz-López, I. I. (2019b). Mass transfer and morphometric characteristics of fresh and osmodehydrated white mushroom pilei during convective drying. *Journal of Food Engineering*, 262, 181–188.
- Hernandez-Díaz, W. N., Ruiz-López, I. I., Salgado-Cervantes, M. A., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2008). Modeling heat and mass transfer during drying of green coffee beans using prolate spheroidal geometry. *Journal of Food Engineering*, 86, 1–9.
- Hosseinbor, A. P., Zhdanov, R., & Ushveridze, A. (2017). An unsupervised 2D point-set registration algorithm for unlabeled feature points: application to fingerprint matching. *Pattern Recognition Letters*, 100, 137–143.
- Hou, H., Chen, Q., Bi, J., Wu, X., Jin, X., Li, X., Qiao, Y., & Lyu, Y. (2020). Understanding appearance quality improvement of jujube slices during heat pump drying via water state and glass transition. *Journal of Food Engineering*, 272, 109874.
- Igathinathane, C., Chattopadhyay, P., & Pordesimo, L. (2008). Moisture diffusion modeling of parboiled paddy accelerated tempering process with extended application to multi-pass drying simulation. *Journal of Food Engineering*, 88, 239–253.
- Karam, M. C., Petit, J., Zimmer, D., Djantou, E. B., & Scher, J. (2016). Effects of drying and grinding in production of fruit and vegetable powders: a review. *Journal of Food Engineering*, 188, 32–49.
- Karathanos, V. T., Villalobos, G., & Saravacos, G. D. (1990). Comparison of two methods of estimation of the effective moisture diffusivity. *Journal of Food Science*, 55, 218–231.
- Keane, M. K. (2002). *A very applied first course in partial differential equations*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., first edition.

- Khalloufi, S., Kharaghani, A., Almeida-Rivera, C., Nijse, J., van Dalen, G., & Tsotsas, E. (2015). Monitoring of initial porosity and new pores formation during drying: a scientific debate and a technical challenge. *Trends in Food Science and Technology*, 45, 179–186.
- Khan, M. I. H., Nagy, S. A., & Karim, M. A. (2018). Transport of cellular water during drying: an understanding of cell rupturing mechanism in apple tissue. *Food Research International*, 105, 772–781.
- Khan, M. I. H., Welsh, Z., Gu, Y., Karim, M. A., & Bhandari, B. (2020). Modelling of simultaneous heat and mass transfer considering the spatial distribution of air velocity during intermittent microwave convective drying. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 153, 119668.
- Kim, D., Son, G., & Kim, S. (2016). Numerical analysis of convective drying of a moving moist object. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 99, 86–94.
- Koua, B. K., Koffi, P. M. E., & Gbaha, P. (2019). Evolution of shrinkage, real density, porosity, heat and mass transfer coefficients during indirect solar drying of cocoa beans. *Journal of the Saudi Society of Agricultural Sciences*, 18, 72–82.
- Kurozawa, L. E., Hubinger, M. D., & Park, K. J. (2012). Glass transition phenomenon on shrinkage of papaya during convective drying. *Journal of Food Engineering*, 108, 43–50.
- Lentzou, D., Boudouvis, A. G., Karathanos, V. T., & Xanthopoulos, G. (2019). A moving boundary model for fruit isothermal drying and shrinkage: an optimization method for water diffusivity and peel resistance estimation. *Journal of Food Engineering*, 263, 299–310.
- López-Méndez, E. M., Ortiz-García-Carrasco, B., Ruiz-Espinosa, H., Sampieri-Croda, A., García-Alvarado, M. A., Ochoa-Velasco, C. E., Escobedo-Morales, A., & Ruiz-López, I. I. (2018). Effect of shape change and initial geometry on water diffusivity estimation during drying of gel model systems. *Journal of Food Engineering*, 216, 52–64.

- Maiseli, B., Gu, Y., & Gao, H. (2017). Recent developments and trends in point set registration methods. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 46, 95–106.
- Mayor, L., Moreira, R., & Sereno, A. M. (2011). Shrinkage, density, porosity and shape changes during dehydration of pumpkin (*Cucurbita pepo L.*) fruits. *Journal of Food Engineering*, 103, 29–37.
- McCabe, W. L., Smith, J. C., & Harriot, P. (1991). *Operaciones unitarias en ingeniería química*. Avaraca (Madrid): McGraw-Hill Interamericana.
- Mohammadi, I., Tabatabaekolour, R., & Motevali, A. (2019). Effect of air recirculation and heat pump on mass transfer and energy parameters in drying of kiwi fruit slices. *Energy*, 170, 149–158.
- Moon, P. & Spencer, D. E. (1961). *Field theory handbook: including coordinate systems differential equations and their solutions*. Berlin Gottingen Heidelberg: Springer-Verlag, first edition.
- Mujumdar, A. S., Ed. (2006). *Handbook of Industrial Drying*. New York, USA: Marcell Dekker, Inc., third edition edition.
- Nguyen, T. K., Khalloufi, S., Mondor, M., & Ratti, C. (2018). Shrinkage and porosity evolution during air-drying of non-cellular food systems: experimental data versus mathematical modelling. *Food Research International*, 103, 215–225.
- Nicolin, D. J., Rossoni, D. F., & Jorge, L. M. M. (2016). Study of uncertainty in the fitting of diffusivity of Fick's second law of diffusion with the use of Bootstrap method. *Journal of Food Engineering*, 184, 63–68.
- Njie, D. N., Rumsey, T. R., & Singh, R. P. (1998). Thermal properties of cassava, yam and plantain. *Journal of Food Engineering*, 37, 63–76.
- Ortiz-García-Carrasco, B., Yañez-Mota, E., Pacheco-Aguirre, F. M., Ruiz-Espinosa, H., García-Alvarado, M. A., Cortés-Zavaleta, O., & Ruiz-López, I. I. (2015). Drying of shrinkable food products: appraisal of deformation behavior and moisture diffusivity estimation under isotropic shrinkage. *Journal of Food Engineering*, 144, 138–147.
- Pacheco-Aguirre, F. M., García-Alvarado, M. A., Corona-Jiménez, E., Ruiz-Espinosa,

- H., Cortés-Zavaleta, O., & Ruiz-López, I. I. (2015). Drying modeling in products undergoing simultaneous size reduction and shape change: appraisal of deformation effect on water diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 164, 30–39.
- Pacheco-Aguirre, F. M., Ladrón-González, A., Ruiz-Espinosa, H., García-Alvarado, M. A., & Ruiz-López, I. I. (2014). A method to estimate anisotropic diffusion coefficients for cylindrical solids: application to the drying of carrot. *Journal of Food Engineering*, 125, 24–33.
- Pacheco-Angulo, H., Herman-Lara, E., García-Alvarado, M. A., & Ruiz-López, I. I. (2016). Mass transfer modeling in osmotic dehydration: equilibrium characteristics and process dynamics under variable solution concentration and convective boundary. *Food and Bioproducts Processing*, 97, 88–99.
- Paul, G., Olivier, M., Esther, A., Daniel, M., & Jean, C.-L. (2019). Heat and mass transfer local modelling applied to biomass briquette drying. *Procedia Manufacturing*, 35, 149–154.
- Pavón-Melendez, G., Hernández, J. A., Salgado, M. A., & García-Alvarado, M. A. (2002). Dimensionless analysis of the simultaneous heat and mass transfer in food drying. *Journal of Food Engineering*, 51, 347–353.
- Perry, R. H., Green, D. W., & Maloney, J. O. (1997). *Perry's Chemical Engineers' Handbook*. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Pinto, L. A. A. & Tobinaga, S. (2006). Diffusive model with shrinkage in the thin-layer drying of fish muscles. *Drying Technology*, 24, 509–516.
- Prakash, B., Gokhan, B., & Zhongli, P. (2011). Moisture diffusivity in rice components during absorption and desorption. *Drying Technology*, 29, 939–945.
- Prakash, B. & Pan, Z. (2012). Effect of geometry of rice kernels on drying modeling results. *Drying Technology*, 30, 801–807.
- Proietti, N., Adiletta, G., Russo, P., Buonocore, R., Mannina, L., Crescitelli, A., & Capitani, D. (2018). Evolution of physicochemical properties of pear during drying by conventional techniques, portable-NMR, and modelling. *Journal of Food Engineering*.

- Ramachandran, R. P., Paliwal, J., & Cenkowski, S. (2018). Modeling of effective moisture diffusivity and activation energy of distillers spent grain pellets with solubles during superheated steam drying. *Biomass and Bioenergy*, 116, 39–48.
- Ruiz-López, I. I., Castillo-Zamudio, R. I., Salgado-Cervantes, M. A., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2008a). Mass transfer modeling during osmotic dehydration of hexahedral pineapple slices in limited volume solutions. *Food and Bioprocess Technology*, 3, 427–433.
- Ruiz-López, I. I., Córdova, A. V., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2004). Moisture and temperature evolution during food drying effect of variable properties. *Journal of Food Engineering*, 63, 117–124.
- Ruiz-López, I. I., Martínez-Sánchez, C. E., Cobos-Vivaldo, R., & Herman-Lara, E. (2008b). Mathematical modeling and simulation of batch drying of foods infixed beds with airflow reversal. *Journal of Food Engineering*, 89, 310–318.
- Ruiz-López, I. I., Ruiz-Espinosa, H., Luna-Guevara, M. L., & García-Alvarado, M. A. (2011). Modeling and simulation of heat and mass transfer during drying of solids with hemispherical shell geometry. *Computers and Chemical Engineering*, 35, 191–199.
- Ruiz-López, I. I., Ruiz-Espinosa, H., Pacheco-Aguirre, F. M., & García-Alvarado, M. A. (2013). Drying of food products shaped as longitudinal sections of solid and annular cylinders: modeling and simulation. *Drying Technology*, 31, 1148–1159.
- Ruiz-López, I. I., Ruiz-Espinosa, H., Arellanes-Lozada, H., Bárcenas-Pozos, P., & García-Alvarado, M. A. (2012). Analytical model for variable moisture diffusivity estimation and drying simulation of shrinkable food products. *Journal of Food Engineering*, 108, 427–435.
- Sabarez, H. (2016). Drying of food materials. *CSIRO Food and Nutrition*.
- Sabarez, H. (2017). *Computational Modeling of Drying Processes of Food Materials*. Reference Module in Food Science. Elsevier.
- Sabarez, H. T. (2012). Computational modelling of the transport phenomena occu-

- rring during convective drying of prunes. *Journal of Food Engineering*, 111, 279–288.
- Saha, B., Bucknall, M., Arcot, J., & Driscoll, R. (2018). Derivation of two layer drying model with shrinkage and analysis of volatile depletion during drying of banana. *Journal of Food Engineering*, 226, 42–52.
- Sahin, U. & Öztürk, H. K. (2016). Effects of pulsed vacuum osmotic dehydration (PVOD) on drying kinetics of figs (*Ficus carica L*). *Innovative Food Science and Emerging Technologies*, 36, 104–111.
- Sandoval-Torres, S., Tovilla-Morales, A. S., & Hernández-Bautista, E. (2017). Dimensionless modeling for convective drying of tuberous crop (*Solanum tuberosum*) by considering shrinkage. *Journal of Food Engineering*, 214, 147–157.
- Santos, G. T., Fortes, M., Amantea, R. P., Ferreira, W. R., & Martins, J. H. (2018). Irreversible thermodynamics analysis of ellipsoidal wheat kernel drying, aiming at the evaluation of phenomenological properties. *Drying Technology*, 36, 1117–1127.
- Sappati, P. K., Nayak, B., & Walsum, G. P. V. (2017). Effect of glass transition on the shrinkage of sugar kelp (*Saccharina latissima*) during hot air convective drying. *Journal of Food Engineering*, 210, 50–61.
- Sareban, M. & Souraki, B. A. (2016). Anisotropic diffusion during osmotic dehydration of celery stalks in salt solution. *Food and Bioproducts Processing*, 98, 161–172.
- Semenoglou, I., Dimopoulos, G., Tsironi, T., & Taoukis, P. (2020). Mathematical modelling of the effect of solution concentration and the combined application of pulsed electric fields on mass transfer during osmotic dehydration of sea bass fillets. *Food and Bioproducts Processing*, 121, 186–192.
- Senadeera, W., Bhandari, B. R., Young, G., & Wijesinghe, B. (2003). Influence of shapes of selected vegetable materials on drying kinetics during fluidized bed drying. *Journal of Food Engineering*, 58, 277–283.
- Seremet, L., Botez, E., Nistor, O.-V., Andronoiu, D. G., & Mocanu, G.-D. (2016). Effect of different drying methods on moisture ratio and rehydration of pumpkin

- sclices. *Food Chemistry*, 195, 104–109.
- Sharma, G. P. & Prasad, S. (2004). Effective moisture diffusivity of garlic cloves undergoing microwave-convective drying. *Journal of Food Engineering*, 65, 609–617.
- Sherwood, T. K. (1929a). The drying of solids-i. *Industrial and Engineering Chemistry*, 21, 12–16.
- Sherwood, T. K. (1929b). The drying of solids-ii. *Industrial and Engineering Chemistry*, 21, 976–980.
- Sherwood, T. K. (1932). The drying of solids-iv. *Industrial and Engineering Chemistry*, 24, 307–310.
- Simpson, R., Nuñez, C. R. H., Jaques, A., & Almonacid, S. (2017). Understanding the success of Page's model and related empirical equations in fitting experimental data of diffusion phenomena in food matrices. *Trends in Food Science and Technology*, 62, 194–201.
- Simpson, R., Ramírez, C., Birchmeier, V., Almonacid, A., Moreno, J., Nuñez, H., & Jaques, A. (2015). Diffusion mechanisms during the osmotic dehydration of Granny Smith apples subjected to a moderate electric field. *Journal of Food Engineering*, 166, 204–211.
- Souraki, B. A., Ghaffari, A., & Bayat, Y. (2012). Mathematical modeling of moisture and solute diffusion in the cylindrical green bean during osmotic dehydration in salt solution. *Food and Bioproducts Processing*, 90, 64–71.
- Souraki, B. A., Ghavami, M., & Tondro, H. (2014). Correction of moisture and sucrose effective diffusivities for shrinkage during osmotic dehydration of apple in sucrose solution. *Food and Bioproducts Processing*, 92, 1–87.
- Srikiatden, J. & Roberts, J. S. (2007). Moisture transfer in solid food materials a review of mechanisms, and measurements. *International Journal of Food Properties*, 10, 739–777.
- Takougnadi, E., Boroze, T.-E. T., & Azouma, O. Y. (2020). Effects of drying conditions on energy consumption and the nutritional and organoleptic quality of dried bananas. *Journal of Food Engineering*, 268, 109747.

- Tao, Y., Zhang, J., Jiang, S., Xu, Y., Show, P.-L., Han, Y., Ye, X., & Ye, M. (2018). Contacting ultrasound enhanced hot-air convective drying of garlic slices: mass transfer modeling and quality evaluation. *Journal of Food Engineering*, 235, 79–88.
- Togrul, I. T. & Ispir, A. (2007). Effect on effective diffusion coefficients and investigation of shrinkage during osmotic dehydration of apricot. *Energy Conversion and Management*, 48, 2611–2621.
- Torrington, E., Esveld, E., van den Berg, I. S. R., & Bartels, P. (2001). Osmotic dehydration as a pre-treatment before combined microwave-hot-air drying of mushrooms. *Journal of Food Engineering*, 49, 185–191.
- Tran, T. M. K., Kirkman, T., Nguyen, M., & Vuong, Q. V. (2020). Effects of drying on physical properties, phenolic compounds and antioxidant capacity of robusta wet coffee pulp (*Coffea canephora*). *Heliyon*, 6, e04498.
- Udomkun, P., Nagle, M., Argyropoulos, D., Mahayothee, B., & Müller, J. (2016). Multi-sensor approach to improve optical monitoring of papaya shrinkage during drying. *Journal of Food Engineering*, 189, 82–89.
- Wang, D., Martynenko, A., Corscadden, K., & He, Q. (2017). Computer vision for bulk volume estimation of apple slices during drying. *Drying Technology*, 35, 616–624.
- Wang, J., Law, C.-L., Nema, P. K., Zhao, J.-H., Liu, Z.-L., Deng, L.-Z., Gao, Z.-J., & Xiao, H.-W. (2018). Pulsed vacuum drying enhances drying kinetics and quality of lemon slices. *Journal of Food Engineering*, 224, 129–138.
- Wei, S., Wang, Z., Xie, W., Wang, F., Chen, P., & Yang, D. (2020). A heat and mass transfer model based on multi-component heterogeneity for corn kernel tempering drying: development and application. *Computers and Electronics in Agriculture*, 171, 105335.
- Winiczenko, R., Górnicki, K., Kaleta, A., Martynenko, A., Janaszek-Mankowska, M., & Trajer, J. (2018). Multi-objective optimization of convective drying of apple cubes. *Computers and Electronics in Agriculture*, 145, 341–348.
- Wu, Z., Huang, Z., Wang, W. C., & Yang, Y. (2018). The direct method of lines

- for elliptic problems in star-shaped domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 327, 350–361.
- Xing-jun, L., Xin, W., Yang, L., Ping, J., & Hui, L. (2016). Changes in moisture effective diffusivity and glass transition temperature of paddy during drying. *Computers and Electronics in Agriculture*, 128, 112–119.
- Xingjun, L. & Ping, J. (2016). Effective moisture diffusivity in wheat kernels during adsorption. *Computers and Electronics in Agriculture*, 123, 40–48.
- Yan, Z., Sousa-Gallagher, M. J., & Oliveira, F. A. R. (2008). Shrinkage and porosity of banana, pineapple and mango slices during air-drying. *Journal of Food Engineering*, 84, 430–440.
- Yanniotis, S. (2008). *Solving problems in food engineering*. Springer, New York, NY.
- Zecchi, B. & Gerla, P. (2020). Effective diffusion coefficients and mass flux ratio during osmotic dehydration considering real shape and shrinkage. *Journal of Food Engineering*, 274, 109821.
- Zielinska, M. & Cenkowski, S. (2012). Superheated steam drying characteristic and moisture diffusivity of distillers wet grains and condensed distillers solubles. *Journal of Food Engineering*, 109, 627–634.
- Zielinska, M. & Michalska, A. (2016). Microwave-assisted drying of blueberry (*Vaccinium corymbosum* L.) fruit: drying kinetics, polyphenols, anthocyanins, antioxidant capacity, colour and texture. *Food Chemistry*, 212, 671–680.