



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"CRISTAL FONÓNICO COMO UN
METAMATERIAL VISCOZO"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
(EN LA ESPECIALIDAD DE CIENCIA DE
MATERIALES)

PRESENTA:
MARTIN ALFONSO IBARIAS ALFARO

ASESOR(ES):
J. JESÚS ARRIAGA RODRÍGUEZ
ARKADII KROKHIN

No. de CVU: 628589

JUNIO 2020

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Ing. Luis Rivera Terrazas”**

Cristal fonónico como un metamaterial viscoso

Presenta:

M. C. Martin Alfonso Ibarias Alfaro

Tesis que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de
Materiales)**

Dirigida por:

Dr. J. Jesús Arriaga Rodríguez

IFUAP - BUAP

Dr. Arkadii Krokhin

Departamento de Física - UNT

Junio 2020

Nota de Aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Puebla, Puebla, Junio 2020

Agradecimientos

- Al Dr. Arriaga y al Dr. Arkadii por su invaluable ayuda, enseñanza y amistad.
- Al instituto de Física que incluye a todos los profesores y trabajadores que me compartieron enseñanzas y apoyo de todo tipo.
- A Conacyt por el apoyo para realizar el doctorado y una de las estancias.
- Al Dr. Sánchez-Dehesa por recibirme en Valencia para realizar una estancia.
- Al colega Yurii por su contribución en uno de los trabajos.
- A mis amigos Dr. Juan Hernández, M.C. Enrique Loranca, Dr. Iván Herrera y Dr. Jorge Ríos por su amistad y discusiones que hicieron agradable mi estancia en el IFUAP.
- Al Dr. Felipe Pérez Rodríguez, Dra. Zorayda Lazcano y Dr. Jonathan Torres Herrera por estar en el comité de seguimiento, sus observaciones y aportaciones.
- A mi gran amigo el Dr. Montesinos por el invaluable apoyo que en todo momento me dio.

Dedicatoria

Dedicado a:
Mi familia y a Dios

Resumen

En esta tesis, se introduce una novedosa teoría de homogeneización para calcular la viscosidad efectiva de un medio elástico con periodicidad. La teoría propuesta se basa en el método de expansión de ondas planas válido a bajas frecuencias (muy por debajo del intervalo de brecha prohibida). Se presenta un resultado analítico para el coeficiente de decaimiento del sonido que se propaga en un cristal fonónico 2D.

La teoría homogeneización propuesta, considera un cristal fonónico binario compuesto por sólido-fluido suponiendo que los dispersores sólidos no son disipativos, es decir, las pérdidas de energía en los sólidos son insignificantes en comparación con las del fluido. Las pérdidas viscosas en el fluido se calculan a partir de la ecuación hidrodinámica de Navier-Stokes.

Para un cristal fonónico con celda unitaria anisótropa, la teoría predice que éste sistema se comporta como un fluido homogéneo con una fuerte anisotropía en el coeficiente de decaimiento, es decir, se predice que la viscosidad efectiva es una cantidad fuertemente anisótropa. Esta propiedad es nueva en la lista de características metamateriales ya conocidas de cristales fonónicos. Es una propiedad efectiva muy importante ya que define en gran medida la eficiencia del dispositivo acústico donde el cristal fonónico se utiliza como elemento principal.

El coeficiente de decaimiento del sonido calculado, escala como la raíz cuadrada de la frecuencia a diferencia de la dependencia cuadrática conocida en los fluidos homogéneos. Además, el coeficiente de decaimiento en el cristal fonónico es proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de viscosidad de corte, a diferencia de la conocida dependencia lineal en los fluidos en bulto. Estas importantes diferencias se deben a la formación de una capa de viscosidad estrecha cerca de la frontera sólido-líquido, donde las pérdidas por disipación exceden por algunos órdenes de magnitud a las pérdidas en la mayor parte del fluido.

La teoría propuesta es bastante general ya que es válida para cualquier red de Bravais 2D y cualquier sección transversal arbitraria de los dispersores duros. Además, los resultados obtenidos para el cristal fonónico de varillas con secciones transversales cuadradas y rectangulares están en buen acuerdo con los resultados numéricos obtenidos con el software comercial COMSOL MULTIPHYSICS. Por otro lado, la teoría propuesta se puede aplicar también a un cristal fonónico 1D.

Abstract

In this thesis, a homogenization theory is introduced to calculate the effective viscosity of an elastic periodic medium. The proposed theory is based on the plane wave expansion method valid at low frequencies (well below the fundamental band gap) and it presents an analytical result for the decay coefficient of sound propagating in a 2D phononic crystal.

The proposed theory of homogenization considers a binary solid-fluid phononic crystal assuming that solid scatterers are not dissipative, i.e. the energy losses in the solids are negligible as compared with that in the fluid. The viscous losses in the fluid are calculated from the hydrodynamic Navier-Stokes equation.

For a phononic crystal with anisotropic unit cell the theory predicts that this system behaves like a homogeneous fluid with strong anisotropy in the decay coefficient, i.e. it is predicted that the effective viscosity is strongly anisotropic quantity. This property is a new one in the list of already known metamaterial characteristics of phononic crystals. It is a very important effective property since it defines to the great extend the efficiency of acoustic device where phononic crystal is used as principal element.

The calculated decay coefficient of sound scales as square root of frequency that is different from the quadratic dependence known for the decay coefficient of homogeneous fluids. Also the decay coefficient in phononic crystal is proportional to square root of the shear viscosity coefficient, unlike the well-known linear dependence in free fluids. Both these principal differences are due to formation of narrow viscous boundary layer near solid-fluid boundary where dissipative losses exceed by orders of magnitude the losses in the bulk of fluid.

The proposed theory is quite general since it is valid for any 2D Bravais lattice, and arbitrary cross-section of the hard scatterers. The results obtained for phononic crystal of rods with square and rectangular cross-sections are in a good agreement with numerical results obtained for the same systems using commercial software COMSOL MULTIPHYSICS. The proposed theory can be applied also to 1D phononic crystal.

Publicaciones

- M. Ibarias, Y. Zubov, J. Arriaga, A.A. Krokhin, Phononic crystal as a homogeneous viscous Metamaterial, Physical Review Research **2**, 022053 (2020).
- M. Ibarias, D. , J. Arriaga, A.A. Krokhin, Homogenization Theory for 1D viscous Metamaterial, 2020. (EN PROCESO).

Participaciones en congresos

- Reunión Anual de la División de Estado Sólido 2018, participación el 03 de mayo del 2018.
- Reunión Anual de la División de Estado Sólido 2019, participación el 02 de mayo del 2019.
- XIII Taller de Física de la Materia Condensada y Molecular, participación el 24 de Junio de 2019.

Estancias de investigación

- Estancia de investigación 27 de Marzo del 2018 al 27 de Mayo del 2018 en el departamento de Física de la Universidad del Norte de Texas.
- Estancia de investigación del 10 de Junio del 2018 al 26 de Julio del 2018 en Universidad Politécnica de Valencia.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	10
1.1.1. Objetivos particulares	10
2. Dinámica de Fluidos	11
2.1. Ecuación de continuidad en fluido ideal	11
2.2. Ecuación de Euler en fluido ideal	14
2.3. Fluido con viscosidad	16
2.3.1. Ecuación de Flujo de Momento	16
2.3.2. Tensor viscoso: Fluido viscoso y ecuación de Navier-Stokes . . .	17
2.4. Pérdidas en Fluido Viscoso Homogéneo	19
2.4.1. Generalización de las pérdidas en un medio compuesto por fluido	21
2.5. Problema general de un sólido inmerso en un líquido	23
2.5.1. Sólido con superficie arbitraria	27
2.5.2. Casos límite importantes del sólido con superficie arbitraria . . .	28
3. Homogeneización en cristales fonónicos y metamateriales	33
3.1. Homogeneización	33
3.2. Método de expansión en ondas planas	34
3.2.1. Análisis de Fourier	35
3.2.2. Funciones de Bloch	37
3.2.3. Análisis de Fourier en cristales fonónicos sin disipación: Método de expansión de ondas planas	37
4. Metamaterial acústico 2D	43
4.1. Pérdidas en un medio heterogéneo o medio efectivo 2D: <i>Coefficiente de viscosidad en un cristal fonónico sólido-líquido</i>	43
4.1.1. Cálculo de distribución de velocidades y densidad de masa efec- tiva en un metamaterial acústico 2D	46
4.1.2. Cálculo del coeficiente de viscosidad efectivo en un metamaterial acústico 2D	50
4.1.3. Cálculo de los coeficientes de Fourier	52
4.2. Cilindros rígidos	56

4.3. Resultados sobre Metamaterial Acústico 2D	61
4.3.1. Estructura de bandas	61
4.3.2. Coeficiente de decaimiento en un cristal fonónico 2D isótropo . .	63
4.3.3. Coeficiente de decaimiento en un cristal fonónico 2D anisótropo	69
5. Metamaterial acústico 1D	77
5.1. Pérdidas en un medio heterogéneo o medio efectivo 1D: Superred . . .	77
5.1.1. Generalización de la ley de Snell	81
6. Conclusiones generales y perspectivas	85
6.1. Conclusiones	85
6.2. Perspectivas	87
Referencias	87
A. Código para cálculo de velocidad efectiva y coeficiente de decaimiento del sonido en metamaterial viscoso 2D (sección cuadrada)	105
B. Código para cálculo de velocidad efectiva y coeficiente de decaimiento del sonido en metamaterial viscoso 2D (sección cilindro cortado)	115

Índice de figuras

2.1. Esquema del problema de sólido inmerso en líquido: a es la región de oscilación a lo largo del eje y , el plano yz se toma como el plano infinito y la región de fluido está en $x > 0$	23
4.1. Cristal fonónico con dispersores asimétricos embebidos en una matriz de agua: Figuras (a) y (b) corresponden a una vista lateral y superior del desarrollo experimental de un cristal fonónico o metamaterial acústico respectivamente, panel (c) muestra una representación esquemática de la celda unitaria o meta-átomo del mismo sistema. Figuras tomadas de la referencia [35].	43
4.2. Frontera: sólido-líquido.	44
4.3. Celda unitaria de un cilindro con sección circular de 120°	52
4.4. Esquema parametrizado de la celda unitaria de la Figura (4.3).	53
4.5. Vectores Unitarios.	53
4.6. Estructura de bandas para un metamaterial con sección sólida cuadrada de lado 4.4 mm. Los parámetros de densidad y módulo de compresibilidad son $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$, $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$	62
4.7. Estructura de bandas para un metamaterial con sección circular de 120° , radio 2.2 mm. Los parámetros de densidad y módulo de compresibilidad son $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$, $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$	62
4.8. (a) Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), para una red cuadrada isótropa con sección transversal cuadrada, como función de la fracción de llenado $f = (a/a_0)^2$, $a_0 = 5,5mm$. En el recuadro izquierdo se observa la región de f pequeñas, donde $\gamma_{ph} \sim \sqrt{f}$. Los parámetros de los dispersores son 10^3 veces los del aluminio: $\rho_s = 10^3 \cdot 2,7g/cm^3$, $\lambda_s = 10^3 \cdot 51GPa$ y $C_s = \sqrt{\lambda_s/\rho_s} = 4346$ m/s. Los resultados numéricos obtenidos por COMSOL para los mismos parámetros elásticos son mostrados por puntos verdes. Las líneas negras corresponden a dispersores duros, es decir, la condición de velocidad cero, $v(\mathbf{r})=0$, dentro de los cilindros. La curva azul corresponde a la velocidad del sonido para un dispersor hecho de acero inoxidable realizado con COMSOL.	64

4.9.	(a)Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), para una red cuadrada y un dispersor con sección transversal rectangular anisótropo, como función de la fracción de llenado. Las líneas punteadas corresponden al cálculo numérico hecho con COMSOL y las curvas continuas al resultado analítico. Se muestran tres distintos ángulos de propagación de acuerdo a la figura del recuadro superior derecho, donde \mathbf{n} corresponde a la dirección de propagación determinada por el ángulo θ	70
4.10.	(a)Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), como función de la fracción de llenado. En ambas figuras se muestran resultados para una red cuadrada pero para dos distintos dispersores: uno simétrico, recuadro superior (a) y otro asimétrico, recuadro superior (b). El dispersor simétrico corresponde a un cilindro completo y el asimétrico a un sólido de sección circular de 120° para el cual se toman en cuenta tres direcciones de propagación para analizar la anisotropía de pérdidas. En los recuadros superiores \mathbf{n} corresponde a la dirección de propagación determinada por el ángulo θ	73
5.1.	Esquema de supercelda compuesta por material AB.	77
5.2.	Dos posibles orientaciones para onda transversal.	80
5.3.	Esquema vectorial de la supercelda	81

Capítulo 1

Introducción

A lo largo del tiempo, el ser humano se ha visto en la necesidad de encontrar y desarrollar nuevas y mejores técnicas para la obtención y manipulación de la energía. Muchas de estas se enfocan principalmente en la creación de nuevas tecnologías o el mejoramiento de aquellas existentes con el fin de lograr beneficios para sí mismo y la naturaleza. Para llevar a cabo lo anterior, los científicos y tecnólogos se han enfocado en la investigación y desarrollo de nuevos materiales que no se encuentran comúnmente en la naturaleza y que posean propiedades físicas y químicas excepcionales. Es por esto que se ha incursionado en el estudio de materiales constituidos por más de un componente, con gran variedad de estructuras, morfologías y a distintas escalas de tamaño.

El diseño y construcción de estos nuevos materiales está principalmente motivado por la aplicación que se le quiera dar y el tipo de propiedades que se está interesado estudiar, por ejemplo: propiedades mecánicas, ópticas, electrónicas, acústicas, etc. Una forma de hacer estos estudios es por medio de un análisis de la respuesta del material bajo distintos estímulos externos como campos electromagnéticos (EM) u ondas elásticas.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, es de gran interés el control de la energía o radiación que se propaga en el material. Este fenómeno también es visto en la naturaleza, principalmente en algunos animales y bacterias, como por ejemplo:

algunos peces abisales que de cierto modo pueden manipular la luz para cazar o iluminar su camino gracias a que poseen bacterias bioluminescentes que viven en simbiosis con ellos, algunos insectos como las luciérnagas que pueden emitir luz u algunos cetáceos que poseen órganos que enfocan ondas de sonido para ecolocalización bajo el agua. Estos animales que de cierto modo pueden manipular la energía lo hacen gracias a órganos que básicamente están compuestos por materiales sencillos [1]. No obstante, si se desearan funcionalidades, propiedades o aplicaciones más complejas sería necesario diseñar y construir materiales artificiales. El diseño y construcción de estos materiales más complejos es el objetivo del estudio de los metamateriales.

Un metamaterial es un arreglo o estructura artificial, típicamente periódico (no necesariamente), compuesto de pequeños meta-átomos¹ que en el bulto se comportan como un medio continuo con propiedades efectivas no convencionales. Usualmente son compositos, en los cuales la estructura interna es usada para inducir propiedades efectivas en el material artificial que son sustancialmente diferentes a las encontradas en sus componentes. El término se originó del campo de los materiales EM, en donde los metamateriales fueron diseñados para controlar la propagación de la luz y ondas de radio; además, este término es específicamente usado para indicar materiales compuestos de estructuras conductoras que mediante la generación de dipolos eléctricos y magnéticos controlados (como respuesta a un campo aplicado), dan como resultado un índice de refracción negativo [1].

Debido al comportamiento tan interesante que se observa en los metamateriales, hoy en día son de mucho interés para la ciencia y tecnología; sin embargo, desde décadas atrás, se han venido estudiando teóricamente. En 1964, Veselago [2] publicó (en Ruso y 1968 en Inglés) el primer trabajo donde se propuso la existencia de un material con permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ negativas, lo cual matemáticamente

¹Celda unitaria individual en un metamaterial.

hablando parecía no mostrar cambios en la ecuación para el índice de refracción:

$$n^2 = \varepsilon\mu. \tag{1.1}$$

No obstante, Veselago mencionó que era necesario tomar ciertas consideraciones físicas a esta proposición. Dado que tanto ε como μ son cantidades que aparecen en la ecuación de la relación de dispersión, determinan la naturaleza de la propagación de una onda EM en un material y por lo tanto es necesario considerarlas desde un punto de vista físico en la ecuación (1.1). En otras palabras, estos valores negativos nos dan como resultado un índice de refracción n negativo [2]. Un n negativo daba como resultado varios fenómenos nuevos de propagación no vistos con anterioridad en materiales que se encontraban normalmente en la naturaleza, como por ejemplo, que la dirección de propagación de la onda (determinada por el vector de onda \mathbf{k}) apuntaba en dirección opuesta al flujo de energía, o bien, que la velocidad de fase estaba en dirección opuesta a la velocidad de grupo. Este comportamiento hizo que se les llamara *left-handed materials* o *materiales izquierdos* [2, 3].

Años después de los trabajos de Veselago, surgieron muchos estudios experimentales que comprobaban lo predicho teóricamente. El primer trabajo que mostró la realización experimental de un metamaterial fue realizado por Smith et al. en el año 2000, quienes construyeron un composito basado en un arreglo periódico de resonadores no magnéticos en forma de anillos abiertos y alambres, el cual mostraba ε y μ negativas en el rango de las microondas [4]. Posteriormente se publicaron otros trabajos confirmando que las propiedades de estos materiales se debían principalmente a la dispersión, en otras palabras, la refracción negativa [3]. Con esto aumentó el interés por el gran número de aplicaciones novedosas en las cuales se podrían implementar estos materiales, por ejemplo: para realizar cubiertas que eliminan la dispersión de ondas EM y no presentan

pérdidas con el fin de lograr la invisibilidad del objeto cubierto [5], filtros pasa banda que dan refracción negativa en cierto intervalo de frecuencias (comportamiento capacitivo), lentes perfectos sin límite de resolución capaces de amplificar la imagen que se está analizando (sin restricción en la longitud de onda y sin reflexión de los rayos en la superficie del lente) [3], etcétera.

Dado lo novedoso e interesante que se logró observar con ondas EM en medios metamateriales, creció el interés en este campo y los estudios se extendieron hacia ondas acústicas. Tal como se vio para ondas EM, con ondas acústicas se buscaron las condiciones que pudiesen proporcionar un índice de refracción negativo, el cual para este caso está definido por:

$$n_{eff}^2 = \frac{\rho_{eff}}{\rho_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_{eff}} \quad (1.2)$$

donde ρ_{eff} y λ_{eff} son la densidad de masa y el módulo de compresibilidad en el metamaterial acústico respectivamente. ρ_0 y λ_0 corresponden a las mismas cantidades pero en la matriz de fluido. [6].

Fue entonces cuando en 2004, Jensen Li y C. T. Chan publican la primera propuesta teórica que mostraba que podía existir un metamaterial acústico. En su trabajo, ellos mencionan que con una estructura compuesta de esferas de caucho inmersas en una matriz de agua, con ciertas dimensiones y separaciones, era posible obtener expresiones para una densidad de masa efectiva ρ_{eff} y un módulo de compresibilidad λ_{eff} , ambos con valores negativos en un intervalo estrecho de frecuencias, causados por resonancias Mie dipolar y monopolar respectivamente. Estos valores negativos de ρ_{eff} y λ_{eff} dan como resultado índice de refracción negativo [6].

Hoy en día es de gran interés el estudio de metamateriales acústicos por sus interesantes propiedades y aplicaciones. Por ejemplo, es posible diseñar estructuras de este tipo que pueden encubrir objetos, actuando como capa de “inaudibilidad”; también con la refracción negativa es posible curvar el sonido en un camino distinto cuando el

metamaterial es insonificado por un altavoz, proporcionando nuevas formas de enfocar los campos de sonido. En lo que respecta a la obtención de imágenes (microscopía y superlentes), se ha reportado que metamateriales acústicos con alta anisotropía pueden formar imágenes de campo lejano más allá de los límites de difracción, tal y como se ha visto en el análogo EM donde se amplifican ondas evanescentes que contienen características minúsculas de la proximidad del objeto. Estos trabajos sobre metamateriales acústicos han sido tanto simulaciones numéricas de lentes que contienen varillas resonantes como otros trabajos experimentales de estructuras finas perforadas [1].

Por todo lo anterior, tanto para el caso EM como para el acústico han surgido muchas propuestas experimentales y teóricas con el fin de obtener mejores respuestas y descripciones de la naturaleza de estos materiales. También para expandir el campo de estudio hacia otros intervalos de frecuencias, como lo que comprende la región de las ondas elásticas o rangos más específicos dentro del visible para aplicaciones más precisas.

Una de las investigaciones más importantes que se han ido realizando sobre los metamateriales en la actualidad recae en el estudio y modelado de su estructura interna, la cual es responsable de un comportamiento isótropo o anisótropo de los mismos y conlleva a una variación importante en la relación de dispersión del metamaterial. Por ejemplo, hoy en día se ha puesto gran interés en los metamateriales que presentan una elevada anisotropía, principalmente porque tienen excelentes propiedades físicas y presentan menor dificultad de fabricación que los medios metamateriales comunes. Estos metamateriales de elevada anisotropía presentan dispersión hiperbólica determinada por sus tensores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética efectivos (caso EM) y por ende, presenta superficies de frecuencia constante en forma de hiperboloides

definidas por la ecuación (1.3), [7, 8].

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_{\parallel}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (1.3)$$

Donde ε_{\parallel} , ε_{\perp} son las constantes dieléctricas perpendicular ε_{33} y paralela, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, definidas en el tensor de constantes dieléctricas ($\varepsilon_{ik}(\omega) = \text{diag}(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp})$); aquí $\mu = 1$. Es importante aclarar que el subíndice \perp hace referencia a que el campo eléctrico es perpendicular al plano de interface en un sistema que tiene su eje óptico a lo largo del eje z, análogamente para el subíndice \parallel . Además, cabe señalar que la ecuación (1.3) describe una superficie en forma de elipsoide correspondiente a un material anisotrópico, y para obtener el caso hiperbólico es necesario tener la condición de elevada anisotropía, es decir, $\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel} < 0$. Tal fenómeno requiere que el material se comporte como un metal en una dirección y como un dieléctrico en otra [8], con estas condiciones, se alcanza un fuerte contraste en sus propiedades físicas dependiendo de la dirección de propagación de la onda.

Por otro lado, tal y como se dijo con anterioridad, es importante destacar las aplicaciones a las que se ha estado dirigiendo el uso de los metamateriales hiperbólicos EM, como lo es el aumento de la razón de la emisión espontánea para un extenso rango de frecuencias y aplicaciones en transporte de calor y acústica. Metamateriales hiperbólicos con estructuras en capas de metal-dieléctrico y arreglos de nanohilos han sido utilizados para imagen de sub-longitud de onda (hiperlentes), para enfocamiento de radiación, para hacer estructuras compatibles con chips usando metasuperficies hiperbólicas, etcétera [7, 8, 9].

Así como en los metamateriales EM se da el caso de una elevada anisotropía, era de esperarse que para el caso acústico también se observara el mismo efecto. Pero, ¿cuál era la razón para buscar una condición de elevada anisotropía en los metamateriales

acústicos? Hasta el año 2012, muchos diseños para metamateriales acústicos se habían realizado, por ejemplo, resonadores en forma de esferas metálicas con una coraza, elementos agrupados o perforados, entre otros [10]; no obstante, ninguno de esos diseños con respuesta isotrópica y refracción negativa había podido ser realizado experimentalmente debido a su complejidad, por lo que fue necesario indagar con lo sugerido por la parte EM, es decir, con diseños que presentaban anisotropía elevada.

Una de las primeras propuestas teóricas fue realizada por J. Christensen y García de Abajo. Ellos propusieron un diseño de platos perforados apilados, los cuales estaban separados por aire y daban una refracción negativa para un extenso rango de ángulos de la onda incidente y además de una superficie de frecuencia constante hiperbólica [10]. Posteriormente a este trabajo, en el 2014, V. García-Chocano et al. reportaron el diseño, fabricación y caracterización de un metamaterial hiperbólico acústico que además de mostrar refracción negativa, era capaz de canalizar energía en una dirección y funcionaba para un rango estrecho de frecuencias que corresponde a sonido aéreo (alrededor de 40 kHz)[11]. Por otro lado, el estudio teórico de este metamaterial para determinar los parámetros geométricos fue realizado dos años antes en la referencia [12] para estructuras metamateriales anisótropas en 2D acústicas y todos los experimentos fueron confirmados con simulaciones numéricas usando el software COMSOL MULTIPHYSICS. Es importante, además mencionar que en este trabajo indican que la refracción negativa había sido demostrada anteriormente en otros metamateriales acústicos basados en espacios enrollados y en cristales fonónicos construidos con matrices de fluido rodeada de inclusiones sólidas o con estructuras metálicas espumosas.

En 2015, C. Shen et al. publicaron un trabajo donde se muestra el diseño y caracterización experimental de un metamaterial hiperbólico acústico hecho por estructura tipo plato y que a diferencia del mencionado anteriormente, mostraba la capacidad de enfocamiento (“focusing”) y de crear imágenes en un rango de frecuencias entre 1 y 2.5

kHz [13]. Ellos mencionan que para el tratamiento teórico de la estructura que propusieron se realizó un estudio en 1D para la propagación en x y otro para y dado que su diseño permite este desacople. Por otro lado, también hacen mención que su diseño puede ser escalado para operar a más altas frecuencias.

Por todo lo anterior, se puede ver que existe mucho trabajo tanto experimental como teórico sobre metamateriales tanto en la parte EM como acústica. No obstante, es importante notar que los metamateriales con alta anisotropía, por lo regular son formados por componentes que presentan alto contraste en sus propiedades físicas, por lo que es de suma importancia tener modelos teóricos estrictos que contemplen de manera específica la naturaleza de cada uno de los componentes de forma individual y a su vez nos puedan dar una respuesta general de todo el metamaterial como un medio homogéneo. Un ejemplo de esto lo podemos ver en el trabajo publicado por A. A. Krokhin et al. [14], donde se muestra un modelo de homogeneización para obtener las constantes dieléctricas de un metamaterial hiperbólico EM a altas frecuencias de forma teórica, el cual muestra un resultado exacto alrededor de la frecuencia de transición entre elíptico e hiperbólico.

Así como el trabajo mencionado en la referencia [14], existen propuestas teóricas para la parte acústica. En el caso acústico es importante tomar en cuenta en el diseño y descripción teórica que estos metamateriales por lo general presentan en sus constituyentes individuales elementos tanto sólidos como fluidos. Es así, que en el estudio teórico se deben contemplar ondas acústicas longitudinales (compresionales) en la parte de fluido y en las inclusiones sólidas ondas elásticas con sus dos componentes transversales (de corte) y la longitudinal. Una propuesta teórica para el estudio de metamateriales acústicos de matriz de fluido e inclusiones sólidas se puede observar en el trabajo publicado en la referencia [15]. En ese trabajo se muestra cómo la longitud de decaimiento de una onda acústica puede disminuir debido a la presencia de las in-

clusiones sólidas. Además se muestra un camino para introducir un nuevo parámetro efectivo en un metamaterial acústico, la viscosidad efectiva. Esta cantidad es de suma importancia dado que nos da información de las pérdidas presentes en un metamaterial acústico.

En el presente trabajo de tesis se muestra el desarrollo teórico de un modelo de homogeneización para un cristal fonónico bidimensional de cilindros embebidos en un fluido viscoso. Se presenta el cálculo analítico del coeficiente de decaimiento del sonido debido a la viscosidad, el cual es válido para cualquier red de Bravais en 2D y cualquier sección transversal de cilindro. También se muestra que en el límite de bajas frecuencias, el cristal fonónico con dispersores asimétricos se comporta como un metafluido (metamaterial) disipativo con una viscosidad anisótropa.

La estructura de la tesis está organizada de la siguiente manera: en los capítulos primero y segundo, se describen todos los detalles teóricos necesarios para el desarrollo de nuestra teoría de homogeneización. Entre los aspectos que se tratan en dichos capítulos se encuentran tanto la explicación física, como los elementos matemáticos que envuelven la dinámica de fluidos y la propagación del sonido en interfaces sólido-líquido. Además se incluye una breve explicación de qué es un modelo de homogeneización para un cristal fonónico sin pérdidas por disipación. Posteriormente en el capítulo cuarto, se presenta el desarrollo y explicación de nuestra teoría de homogeneización para cristales fonónicos con pérdidas por viscosidad; además en este capítulo se pueden ver resultados usando nuestra fórmula analítica para distintos metamateriales. En el capítulo quinto, se muestra el camino para desarrollar un modelo de homogeneización para cristales fonónicos en 1D con pérdidas por viscosidad. Finalmente, en el capítulo sexto, se presentan las conclusiones del trabajo.

1.1. Objetivos

Desarrollar un modelo analítico de homogeneización para metamateriales acústicos compuestos por sólido-fluido contemplando la disipación del sistema. Dicho modelo debe ser capaz de describir de forma efectiva el coeficiente de decaimiento viscoso y dar una explicación física de las pérdidas observadas en dicho sistema.

1.1.1. Objetivos particulares

1. Obtener expresiones efectivas para la densidad de masa y módulo de compresibilidad para un cristal fonónico compuesto por sólido-fluido en 2D.
2. Obtener una expresión efectiva para el coeficiente de decaimiento viscoso en cristal fonónico compuesto por sólido-fluido en 2D.
3. Obtener una expresión efectiva para el coeficiente de decaimiento viscoso en cristal fonónico compuesto por sólido-fluido en 1D.

Capítulo 2

Dinámica de Fluidos

Como se mencionó anteriormente, necesitamos poder describir el comportamiento de ondas elásticas propagándose a través de un medio metamaterial con alta anisotropía. Dicho medio contempla una parte sólida, una parte de fluido y una frontera líquido-sólido. Podemos empezar estudiando las expresiones físicas para la parte de fluido.

2.1. Ecuación de continuidad en fluido ideal

Dado que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido es considerado como un medio continuo. Esto significa que cualquier pequeño elemento de volumen es siempre considerado tan grande que contiene un número muy elevado de moléculas.

De acuerdo con esto, se habla de elementos de volumen infinitamente pequeños comparados con el volumen del cuerpo en consideración, pero grandes comparados con la distancia entre las moléculas. Las expresiones partícula de fluido y punto en un fluido son entendidas en sentido similar. Por ejemplo, si hablamos del desplazamiento de una partícula de fluido, se quiere decir que no es un desplazamiento de una molécula

individual, si no más bien, de un elemento de volumen que contiene muchas moléculas, lo cual es pensado como un punto.

La descripción matemática del estado de movimiento de un fluido, es descrita por una función que nos da la distribución de velocidades del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, y por dos cualesquiera cantidades termodinámicas pertenecientes al fluido. Por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Como se sabe, todas las cantidades son determinadas por los valores de cualesquiera dos de ellas, junto con la ecuación de estado.

Todas estas cantidades son, en general, funciones de las coordenadas x, y, z y de el tiempo t . Hacemos énfasis que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido en un punto dado (x, y, z) en el espacio y a un tiempo dado t , es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no partículas fijas del fluido con evolución temporal; lo mismo para p y ρ .

Derivemos ahora las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Empecemos con la ecuación que expresa la conservación de la materia. Consideremos un volumen V_0 de espacio. La masa de fluido en el volumen es $\int \rho dV$, donde ρ es la densidad de fluido, y la integración es realizada sobre el volumen V_0 .

La masa de fluido fluyendo en unidad de tiempo a través del elemento $d\mathbf{f}$ de la superficie delimitando este volumen es $\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$; la magnitud del vector $d\mathbf{f}$ es igual al área del elemento de superficie, y su dirección es paralela a la normal. Por convención, tomamos $d\mathbf{f}$ a lo largo de la normal saliente. Entonces $\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ es positiva si el fluido está fluyendo hacia afuera del volumen y negativa si fluye hacia dentro del mismo. La masa total de fluido fluyendo fuera del volumen V_0 en unidad de tiempo es por lo tanto:

$$\oint \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}, \quad (2.1)$$

donde la integración es tomada sobre toda la superficie cerrada envolviendo al volumen en cuestión.

El decrecimiento por unidad de tiempo de la masa del fluido en el volumen V_0 puede ser escrita como:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV. \quad (2.2)$$

Igualando las dos expresiones, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}. \quad (2.3)$$

La integral de superficie puede ser transformada por el teorema de la divergencia a una integral de volumen:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (2.4)$$

Así

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (2.5)$$

Dado que esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe de desaparecer, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es la *ecuación de continuidad*. Desarrollado $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$, podemos escribir la misma ecuación como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (2.7)$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (2.8)$$

es el vector de *flujo de densidad de masa*. Su dirección es la del movimiento del fluido,

mientras que su magnitud es igual a la masa de fluido fluyendo en unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular a la velocidad [16].

2.2. Ecuación de Euler en fluido ideal

Ahora consideremos un volumen en el fluido. La fuerza total actuando sobre este volumen es igual a la integral

$$-\oint p d\mathbf{f} \quad (2.9)$$

de presión, tomada sobre la superficie que rodea al volumen. Transformando ésta en una integral de volumen tenemos:

$$-\oint p d\mathbf{f} = -\int \nabla p dV. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, podemos ver que el fluido que envuelve a cualquier elemento de volumen dV ejerce una fuerza sobre ese elemento $-dV\nabla p$. En otras palabras, podemos decir que una fuerza $-\nabla p$ actúa sobre una unidad de volumen de fluido.

Escribamos ahora la ecuación de movimiento de un elemento de volumen en el fluido igualado la fuerza $-\nabla p$ con el producto de la masa por unidad de volumen (ρ) y la aceleración $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p. \quad (2.11)$$

La derivada $d\mathbf{v}/dt$ que aparece aquí, no denota la tasa de cambio de la velocidad del fluido a un punto fijo en el espacio, pero sí denota la tasa de cambio de la velocidad de una partícula de fluido que se mueve en el espacio. Esta derivada tiene que ser expresada en términos de las cantidades referentes a los puntos fijos del espacio. Para hacer esto, notemos que el cambio $d\mathbf{v}$ en la velocidad de la partícula de fluido dada durante el tiempo dt está compuesta de dos partes, llamadas el cambio durante el tiempo dt en la

velocidad a un punto fijo en el espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) a dos puntos $d\mathbf{r}$ aparte, donde $d\mathbf{r}$ es la distancia recorrida por la partícula de fluido dada durante el tiempo dt . La primera parte es $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$, donde la derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ es tomada como constante en los puntos x, y, z en el espacio. La segunda parte es

$$dx \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (2.12)$$

Así

$$d\mathbf{v} = (\partial\mathbf{v}/\partial t)dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (2.13)$$

o dividiendo ambos lados entre dt ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (2.14)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.11), encontramos

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (2.15)$$

Esta es la ecuación de movimiento requerida para fluidos; fue obtenida por *L. Euler* en 1755. La ecuación (2.15) es llamada *Ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales en la dinámica de fluidos [16].

Más adelante se verá en qué casos es posible no tomar en cuenta el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ en la ecuación (2.15), lo cual lleva a ésta expresión a una forma más simple denominada *Ecuación linealizada de Euler*. Dicha expresión linealizada, puede ser escrita de forma reducida tomando en cuenta la dependencia de la frecuencia ω y del tiempo en la velocidad ($\sim e^{-i\omega t}$) lo cual nos lleva a:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla p}{i\omega\rho(\mathbf{r})}. \quad (2.16)$$

2.3. Fluido con viscosidad

Estudiemos ahora el efecto de la disipación de la energía que ocurre durante el movimiento del fluido sobre sí mismo. Este proceso es resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Esta irreversibilidad ocurre siempre en cierto grado y es debida a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica.

Para obtener las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, tenemos que incluir algunos términos adicionales a la ecuación de movimiento del fluido ideal. Para esto reescribamos la ecuación de Euler en términos del tensor de flujo de momento.

2.3.1. Ecuación de Flujo de Momento

Recordemos las ecuaciones de la sección anterior, ecuación de Euler (2.15), ecuación de continuidad (2.6) y la ecuación bien conocida del *momento* [16] obtenemos el Flujo de momento:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - v_i v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \\
 &= -\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donde

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{2.18}$$

es el *tensor de flujo de momento*, que nos dice la cantidad de momento fluyendo hacia fuera a través de la superficie en unidad de tiempo.

La ecuación (2.17), es una forma equivalente de escribir la ecuación de Euler.

2.3.2. Tensor viscoso: Fluido viscoso y ecuación de Navier-Stokes

Como dijimos anteriormente, la viscosidad es resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Entonces, en éste caso hay que modificar la ecuación de movimiento del fluido ideal agregando el elemento de viscosidad en la ecuación (2.18):

$$\prod_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \quad (2.19)$$

Donde:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (2.20)$$

es el *tensor de estrés*, y σ'_{ik} es el *tensor de estrés viscoso*, que es debido a fricción interna de partículas moviéndose a distintas velocidades y está definido como:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (2.21)$$

η y ξ son los coeficientes de primera y segunda viscosidad respectivamente, los cuales son escalares en el caso de un fluido isotrópico [16]. Ahora, tomando la ecuación (2.15) en forma tensorial para un fluido ideal, se le agregan los elementos de estrés viscoso de la ecuación (2.21) de la forma $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\xi \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es la ecuación de movimiento de Navier-Stokes para fluidos viscosos. Cuando tenemos ondas de sonido, tendremos movimiento oscilatorio con amplitud

pequeña en un fluido que es compresible, causando en el mismo una compresión y refracción, por lo tanto, al ser oscilación pequeña se desprecia $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ en la ecuación de Euler, y además hay que recordar que si el fluido fuese considerado incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Al haber pequeños cambios en la presión y densidad, $p = p_0 + p'$ y $\rho = \rho_0 + \rho'$, la ecuación de continuidad (2.6) se modificará: $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, donde ρ_0 y p_0 son la densidad y la presión a equilibrio constante y ρ' y p' son las mismas cantidades pero representando las variaciones causadas por la onda de sonido ($\rho' \ll \rho_0$, $p' \ll p_0$) [16]. Así, usando la misma aproximación, la ecuación de Euler será: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (1/\rho_0)\nabla p' = 0$. Reemplazando ρ' en la ecuación de continuidad de acuerdo a la relación entre presión y densidad, $p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \rho'$, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donde, $\lambda = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s$ y $p = p'$.

Tomando en consideración lo dicho en los párrafos anteriores, reescribimos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \ddot{v}_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\eta \left(\frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \dot{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\xi \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}) \quad (2.24)$$

la cual es una forma más conveniente para nosotros dado que muestra explícitamente la densidad de masa y módulo de compresibilidad.

2.4. Pérdidas en Fluido Viscoso Homogéneo

La existencia de viscosidad y conductividad térmica provoca una disipación de la energía en las ondas acústicas, y el sonido es consecuentemente absorbido, es decir, la intensidad progresivamente disminuye. Para calcular la energía disipada \dot{E}_{mec} , usaremos los argumentos que describiremos a continuación.

La energía mecánica es sólo la cantidad máxima de trabajo que puede ser realizado al pasar de un estado de no equilibrio dado a uno de equilibrio termodinámico. Como sabemos de la termodinámica, el trabajo máximo es obtenido cuando la transición es reversible (sin cambio en la entropía), y esto entonces indica $E_{mec} = E_0 - E(S)$, donde E_0 es el valor de energía inicial, $E(S)$ es la energía en el estado de equilibrio con la misma entropía S que el sistema tenía inicialmente. Diferenciando con respecto al tiempo, obtenemos $\dot{E}_{mec} = -\dot{E}(S) = -(\partial E/\partial S)\dot{S}$. La derivada de la energía con respecto a la entropía es la temperatura que el sistema tendría si éste estuviese en equilibrio termodinámico. Denotamos esta temperatura con T_0 , por lo tanto tenemos $\dot{E}_{mec} = -T_0\dot{S}$ [16].

La tasa de cambio de la entropía debido a la conducción térmica y la viscosidad cuando la temperatura varía ligeramente puede ser escrita como:

$$\dot{E}_{mec} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - \frac{1}{2}\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV - \xi \int (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 dV, \quad (2.25)$$

donde κ es el módulo de compresibilidad.

Si permitimos que el eje x esté en la dirección de propagación de la onda de sonido, tenemos $v_x = v_0 \cos(kx - \omega t)$, $v_y = v_z = 0$. Entonces el último término de la ecuación anterior nos da:

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t) dV. \quad (2.26)$$

Dado que sólo estamos interesados en el promedio temporal, tomamos ese promedio y tenemos $-k^2(\frac{4}{3}\eta + \xi)\frac{1}{2}v_0^2V_0$, donde V_0 es el volumen del fluido.

Ahora calculamos el primer término de la ecuación de la tasa de cambio de la entropía. La desviación T' de la temperatura desde su valor de equilibrio de la onda de sonido está relacionada con la velocidad mediante:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\beta c T}{c_p} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta c T}{c_p} v_0 k \sin(kx - \omega t). \quad (2.27)$$

siendo β el coeficiente de expansión térmica, c la velocidad del sonido y c_p la capacidad calorífica a presión constante.

Por otro lado para el promedio temporal en esta misma ecuación se obtiene $-\kappa c^2 T \beta^2 v_0^2 k^2 V_0 / 2c_p^2$. Usando la fórmula termodinámica

$$c_p - c_v = T \beta^2 \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = T \beta^2 \left(\frac{c_v}{c_p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = T \beta^2 c^2 \frac{c_v}{c_p}, \quad (2.28)$$

podemos reescribir el promedio temporal anterior como $-\frac{1}{2}\kappa(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p})k^2v_0^2V_0$, donde c_v es la capacidad calorífica a volumen constante.

Reuniendo todos los resultados anteriores, encontramos el valor medio de la energía disipada:

$$\dot{E}_{mec} = \frac{1}{2}k^2v_0^2V_0 \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \xi \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Por otro lado, la energía total de la onda de sonido es:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho v_0^2V_0. \quad (2.30)$$

Hablemos ahora del coeficiente de amortiguamiento producto de este análisis. Cuando una onda de sonido se propaga a través de un fluido, su intensidad decrece a lo largo de la distancia x . Es evidente que este decaimiento ocurrirá acorde a la ley $e^{-2\gamma x}$ y la

amplitud decrecerá como $e^{-\gamma x}$, donde *el coeficiente de absorción* γ está definido como [16]:

$$\gamma = \frac{|\dot{E}_{mec}|}{2c\bar{E}}. \quad (2.31)$$

Por lo tanto, al sustituir las ecuaciones (2.30) y (2.29) en la ecuación (2.31), se obtendrá el coeficiente de absorción del sonido en un medio homogéneo de fluido [16]:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \xi \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \equiv a\omega^2. \quad (2.32)$$

2.4.1. Generalización de las pérdidas en un medio compuesto por fluido

En el caso de que se tuviera un sistema formado por dos o mas fluidos y se quisiera encontrar la disipación de dicho sistema considerándolo como un medio homogéneo, sería necesario entender el papel que juega la frecuencia dentro de la ecuación de Navier Stokes, ecuación (2.24), para posteriormente relacionarlo con el coeficiente de disipación. A continuación mostraremos un camino para encontrar la viscosidad efectiva en un medio homogéneo compuesto por fluido.

En general, cuando el medio presenta disipación, el número de onda, $k = \mathbf{k}/\hat{k}$, será una cantidad compleja donde la parte imaginaria representará un decaimiento espacial:

$$k = k' + ik'' = \omega/c + i\gamma(\omega), \quad (2.33)$$

donde el coeficiente de decaimiento del fluido va como la ecuación (2.32), la cual depende cuadráticamente de la frecuencia y los coeficientes de viscosidad [16]:

$$\gamma_0 \sim \left(\frac{4}{3}\eta + \xi \right) \omega^2 \approx a\omega^2. \quad (2.34)$$

Por otro lado, un decaimiento en el tiempo estaría representado por:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega'(\mathbf{k}) - i\omega''(\mathbf{k}). \quad (2.35)$$

Donde a partir de las ecuaciones (2.35) y (2.33) podemos relacionar el decaimiento temporal con el espacial:

$$\omega''(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_{\mathbf{gk}} \cdot \mathbf{k}''. \quad (2.36)$$

Por lo tanto la corrección de primer orden a encontrar perturbativamente en la ecuación de Navier Stokes debe ser:

$$\Delta\omega = -i\omega''(\mathbf{k}) = -i\mathbf{v}_{\mathbf{gk}} \cdot \mathbf{k}'', \quad (2.37)$$

donde la magnitud de \mathbf{k}'' va como la ecuación (2.33), que es el coeficiente de decaimiento o viscosidad. Por lo tanto, la expresión a obtener utilizando la teoría de perturbaciones debe depender cuadráticamente de la frecuencia ω y de los coeficientes de viscosidad de los fluidos implicados; pero sólo es válida cuando tenemos un medio homogéneo como el agua. La longitud de decaimiento del sonido en agua para una frecuencia de 50 kHz es alrededor de $1/\gamma_0 = 15km$. Por lo tanto, en agua pura, las pérdidas pueden ser despreciables.

Sin embargo, las pérdidas pueden aumentar drásticamente si el sonido se encuentra con una inclusión sólida. En este caso, el fluido oscilatorio se adhiere a las fronteras sólidas, formándose entonces capas viscosas muy estrechas de grosor $\delta = \sqrt{2\eta/(\omega\rho)}$ (llamadas Stokes Boundary layers), donde los gradientes de viscosidad exceden por mucho a los del fluido ideal. Este efecto de aumento de pérdidas por reflexiones de una frontera sólida fue predicha por Konstantinov [17]. En ese caso, las pérdidas por

viscosidad vienen dadas por [16]-[19]:

$$\gamma \sim \sqrt{\omega}. \quad (2.38)$$

En las secciones siguientes mostraremos como abordar el problema de un cristal fonónico compuesto por dispersores sólidos inmersos en una matriz de fluido.

2.5. Problema general de un sólido inmerso en un líquido

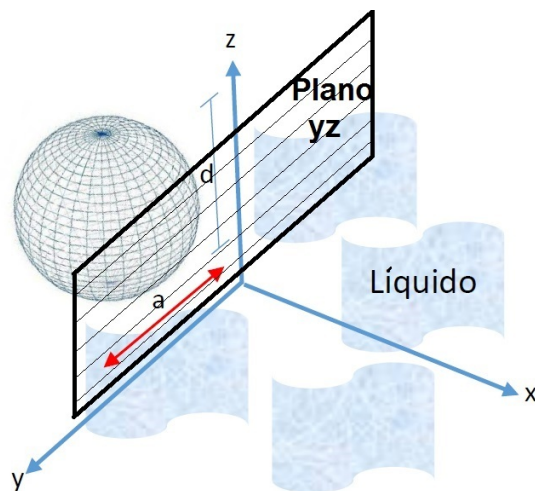


Figura 2.1: Esquema del problema de sólido inmerso en líquido: a es la región de oscilación a lo largo del eje y , el plano yz se toma como el plano infinito y la región de fluido está en $x > 0$

Cuando un sólido inmerso en un fluido viscoso oscila, el flujo alrededor tiene una serie de propiedades. Para estudiar esto, es conveniente analizar un ejemplo simple. Supongamos que un fluido incompresible está rodeado por una superficie plana infinita que efectúa una oscilación armónica simple en su propio plano con frecuencia ω . Tomamos la superficie sólida como el plano yz y la región de fluido como $x > 0$; el eje- y

es tomado en la dirección de oscilación como en la Figura (2.1) . La velocidad de la superficie de oscilación u es una función del tiempo de la forma $A \cos(\omega t + \alpha)$. Es conveniente escribir esto como la parte real de una cantidad compleja [16], $u = \text{Re}(u_0 e^{-i\omega t})$, donde la constante $u_0 = A e^{-i\alpha}$ es en general compleja, pero puede siempre ser real seleccionando el correcto origen del tiempo.

Siempre y cuando el cálculo envuelva sólo operaciones lineales sobre la velocidad u , debemos omitir el símbolo Re y proceder como si u fuese compleja, tomando la parte real del resultado final. Así podemos escribir:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.39)$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición de frontera $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $x = 0$, es decir, $v_x = v_z = 0, v_y = u$.

Es evidente, por simetría, que todas las cantidades dependerán sólo de la coordenada x y el tiempo t . De la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ tendremos por lo tanto $\partial v_x / \partial x = 0$, de donde $v_x = \text{cte} = 0$, de las condiciones de frontera. Dado que esas cantidades son independientes de las coordenadas y y z , se tiene que $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = v_x \partial \mathbf{v} / \partial x$, y además dado que v_x es cero, esto nos lleva a que $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$. Entonces, la ecuación de movimiento (ecuación (2.22) pero para fluido incompresible en forma vectorial y coeficientes de viscosidad constantes):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.40)$$

llega entonces a convertirse en:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.41)$$

Esta es una ecuación lineal. Su componente en la dirección x es $\partial p/\partial x = 0$, es decir, $p = \text{constante}$.

Es más evidente por simetría que la velocidad \mathbf{v} está únicamente en la dirección y . Para $v_y = v$ tenemos por ecuación (2.41) que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.42)$$

donde $\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática. La ecuación (2.42) es la ecuación de conducción del calor en una dimensión. Tomando una onda plana, se encuentra que dicha ecuación tiene una solución:

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}, \quad (2.43)$$

donde para una onda plana se tendría:

$$i\omega = \nu k^2, \quad k = (1 + i)/\delta, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\omega}, \quad (2.44)$$

la correcta selección del signo de la raíz \sqrt{i} es determinado por la necesidad de la velocidad de decaer en el fluido.

Por lo tanto, las ondas transversales pueden ocurrir en los fluidos con viscosidad, con una velocidad $v_y = v$ perpendicular a la dirección de propagación. Sin embargo, estas ondas son amortiguadas rápidamente conforme se van alejando del sólido cuyo movimiento genera las mismas. La amplitud de amortiguamiento es exponencial y la *profundidad de penetración* es δ . Esta profundidad decrece con el incremento de la frecuencia de la onda, pero incrementa con la viscosidad cinemática del fluido [16].

La fuerza friccional sobre la superficie sólida es evidentemente en la dirección y . La

fuerza tangencial por unidad de área es:

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \eta \rho} (i - 1) u. \quad (2.45)$$

Suponiendo que u_0 es real y tomando en cuenta la parte real de esta ecuación tenemos:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega \eta \rho} \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right). \quad (2.46)$$

La velocidad de la superficie de oscilación, sin embargo, es $u = u_0 \cos \omega t$. Hay por lo tanto una diferencia de fase entre la velocidad y la fuerza friccional.

Es fácil calcular también el tiempo promedio de disipación de la energía en el problema de arriba. Esto debe ser realizado usando la fórmula:

$$\dot{E}_{cin} = \frac{1}{2} \eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (2.47)$$

En este caso particular sin embargo, es más simple calcular los requerimientos de la disipación directamente por el trabajo hecho por la fuerza friccional. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilatorio es igual al valor medio del producto de la fuerza σ_{xy} y la velocidad $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy} u} = \frac{1}{2} u_0^2 \sqrt{\frac{1}{2} \omega \eta \rho}. \quad (2.48)$$

Esto es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de las oscilaciones y a la raíz cuadrada de la viscosidad.

Una solución explícita puede ser también dada del problema de un fluido puesto en movimiento por un plano de superficie moviéndose de acuerdo a $u = u(t)$. La solución a la ecuación (2.42) es formalmente idéntica a la del problema análogo de la teoría de

conducción del calor. La fuerza friccional por unidad de área sobre la superficie está dada por:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}. \quad (2.49)$$

2.5.1. Sólido con superficie arbitraria

Ahora consideremos el caso general de cualquier cuerpo oscilando con una forma arbitraria cualquiera. En este caso el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ en la ecuación de movimiento del fluido es igual a cero. Esto no pasa, por supuesto cuando tenemos una superficie de forma arbitraria. Sin embargo, nosotros suponemos que este término es muy pequeño comparado con los demás, por tanto dicho término puede ser despreciado. Las condiciones necesarias para el desarrollo serán analizadas a continuación.

Comenzamos nuevamente con la ecuación (2.41). Aplicamos el rotacional de ambos lados, tal que el término $\nabla \times (\nabla p)$ desaparece dándonos:

$$\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} = \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (2.50)$$

Es decir, $\nabla \times \mathbf{v}$ satisface la ecuación de conducción del calor. Por lo tanto podemos decir que la vorticidad decrece hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido causado por las oscilaciones del cuerpo es rotacional en una cierta capa alrededor del cuerpo, mientras que a largas distancias esta cambia rápidamente hacia un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es del orden de δ , ecuación (2.44).

2.5.2. Casos límite importantes del sólido con superficie arbitraria

Dos importantes casos límite son posibles en este problema: la cantidad δ debe ser ya sea grande o pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo oscilante. Llamemos d a la cantidad del orden de magnitud del cuerpo. Primero consideramos el caso donde $\delta \gg d$; esto implica que $d^2\omega \ll \nu$. Además de ésta condición, suponemos que el número de Reynolds es pequeño. Si a es la amplitud de oscilación, figura (2.1), la velocidad del cuerpo es del orden de $a\omega$. Entonces el número de Reynolds para el flujo en cuestión es $\omega ad/\nu$. Por lo tanto suponemos que:

$$d^2\omega \ll \nu, \quad \omega ad/\nu \ll 1. \quad (2.51)$$

Este es el caso de bajas frecuencias de oscilación, el cual indica que la velocidad varía muy poco con el tiempo y por lo tanto se puede ignorar la derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación general de movimiento ecuación (2.40). El término $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, por otro lado, puede ser despreciado debido a que el número de Reynolds es pequeño.

La ausencia del término $\partial\mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación de movimiento, significa que el flujo es estacionario. Así para $\delta \gg d$, el flujo puede ser considerado como estacionario en cualquier instante. Esto lleva a que el flujo a cualquier instante es el que debería ser si el cuerpo estuviese moviéndose uniformemente con su velocidad instantánea. Si por ejemplo, nosotros consideráramos las oscilaciones de una esfera inmersa en un fluido, con una frecuencia que satisfaga las desigualdades (2.51) (d siendo ahora el radio de la esfera), entonces podemos decir que el arrastre de la esfera estaría dado por la fórmula de Stokes $F = 6\pi\eta Ru$, para un movimiento uniforme de una esfera con número de Reynolds pequeño.

Ahora consideremos el caso opuesto, donde $d \gg \delta$. Para que el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

sea de nuevo despreciable, es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo:

$$d^2\omega \gg \nu; \quad a \ll d. \quad (2.52)$$

En este caso, debemos recalcar, que el número de Reynolds no debe ser pequeño. La desigualdad de arriba es obtenida por estimación de la magnitud de $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. El operador $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ denota diferenciación en la dirección de la velocidad. Cerca de la superficie del cuerpo, sin embargo, la velocidad es cercanamente tangencial. En la dirección tangencial la velocidad cambia apreciablemente sólo sobre distancias del orden de las dimensiones del cuerpo. Por lo tanto,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \sim v^2/d \sim a^2\omega^2/d,$$

dado que la velocidad misma es del orden de $a\omega$. La derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ sin embargo, es del orden de $\nu\omega \sim a\omega^2$. Comparando esto, podemos ver que:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \ll \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

si $a \ll d$. Entonces, se puede ver fácilmente que los términos $\partial\mathbf{v}/\partial t$ y $\nu\nabla^2\mathbf{v}$ son del mismo orden.

Discutamos ahora la naturaleza del flujo alrededor del cuerpo oscilante cuando las condiciones (2.52) son satisfechas. En una capa delgada cerca de la superficie del cuerpo el flujo es rotacional, pero en el resto del fluido tenemos flujo potencial. Por lo tanto el flujo en cualquier parte, excepto en la capa junto al cuerpo, está dado por las ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.53)$$

Tomando en cuenta que el Laplaciano es $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}$,

tenemos que $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. El flujo es por lo tanto ideal en cualquier parte excepto en la capa de la superficie. Dado que esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones (2.53) para determinar el flujo del resto del fluido nosotros debemos tomar las condiciones de frontera que se satisfacen en la superficie del cuerpo, es decir, que la velocidad del fluido debe ser igual a la del cuerpo. Las soluciones a las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal no satisfacen estas condiciones. Sin embargo, podemos requerir únicamente que se cumplan las condiciones correspondientes para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido.

Aunque las ecuaciones (2.53) son inaplicables en la capa delgada de fluido, la distribución de velocidades obtenida considerando estas condiciones, satisfacen las condiciones de frontera necesarias para la componente normal de la velocidad y por lo tanto, la variación actual de esta componente cerca a la superficie no tiene propiedades significativas. La componente tangencial debería ser encontrada resolviendo las ecuaciones (2.53), para tener algún valor diferente de la correspondiente componente de la velocidad del cuerpo (mientras éstas componentes de la velocidad deberían ser iguales al mismo tiempo). Por lo tanto, la componente tangencial de la velocidad debe cambiar rápidamente en la superficie del cuerpo. La naturaleza de esta variación es fácilmente determinada. Permitamos considerar cualquier porción de la superficie del cuerpo, con dimensiones muy grandes comparadas con δ , pero pequeñas comparadas con las dimensiones del cuerpo. Tal porción debe ser considerada aproximadamente plana, y por lo tanto, podemos usar los resultados obtenidos al principio para la superficie plana. Tomemos el eje x dirigido a lo largo de la normal a la porción en consideración y el eje y paralelo a la componente tangencial de la velocidad en la superficie, figura (2.1). Denotemos v_y como la componente tangencial de la velocidad del fluido relativa a la del cuerpo; v_y debe desaparecer en la superficie. Finalmente, consideremos $v_0 e^{-i\omega t}$ como el

valor de v_y encontrado al resolver las ecuaciones (2.53). De los resultados obtenidos al principio de esta sección, podemos decir que en la capa de la superficie, la cantidad v_y tenderá hacia la superficie (frontera liquido-sólido) de acuerdo a la ley:

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t} [1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}]. \quad (2.54)$$

Así, finalmente obtenemos la cantidad total de energía disipada por unidad de tiempo, dada por la integral:

$$\bar{E}_{cin} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho} \oint |v_0|^2 df \quad (2.55)$$

tomada sobre la superficie del cuerpo oscilante [16].

Capítulo 3

Homogeneización en cristales fonónicos y metamateriales

3.1. Homogeneización

El proceso de homogeneización consiste en poder describir un sistema heterogéneo compuesto por dos o más medios (cada uno con diferentes propiedades físicas) como un medio homogéneo descrito por parámetros que dependen de las características individuales de los constituyentes. Por ejemplo, en el caso fotónico, el proceso de homogeneización se basa en encontrar los parámetros que describen la propagación de ondas electromagnéticas, ϵ_{eff} y μ_{eff} , en un medio heterogéneo en términos de los parámetros ϵ y μ de los materiales constituyentes. Esto nos permite describir el sistema heterogéneo como un medio homogéneo.

Por otro lado, para poder realizar el proceso de homogeneización se deben satisfacer ciertas condiciones. Por ejemplo, retomando el caso fotónico, una de las condiciones más importantes que debe cumplir este tipo de sistema es que la longitud de onda de la onda electromagnética debe ser mucho mayor que las dimensiones de los componentes

de los materiales involucrados. El procedimiento común para hacer esta aproximación es tomar el límite cuando $\lambda \rightarrow \infty$, lo cual, en la mayoría de los casos, puede ser equivalente a hacer una expansión en series de potencias del vector de onda \mathbf{k} alrededor de cero.

Es importante mencionar, que los métodos de homogeneización deben ser capaces de contemplar las propiedades de los componentes individuales, y para ello se ayudan de distintas herramientas matemáticas que puedan tomar en consideración la periodicidad de los constituyentes y la continuidad o discontinuidad en la propagación de las ondas. Entre los distintos métodos donde se aplica la homogeneización, sobresalen tres muy conocidos, el método de expansión en ondas planas utilizado en varias teorías de homogeneización recientes de metasólidos, metafluidos y cristales fonónicos [20][21]-[25]; el método de matriz de transferencia utilizado por décadas en cristales fotónicos y sistemas multicapas, el cual es muy preciso y nos da soluciones exactas [26][27]-[29]; y el tercer método es el de Dispersión Múltiple, el cual ha demostrado tener fuerte correspondencia con experimentos de cristales fonónicos y metamateriales acústicos [15, 30, 31].

3.2. Método de expansión en ondas planas

Para el desarrollo de nuestra teoría de homogeneización utilizamos el método de expansión en ondas planas. Este método básicamente aprovecha las propiedades de periodicidad de red que poseen los cristales para poder representar las cantidades físicas que describen al sistema con una serie de Fourier. Por otro lado, es muy importante mencionar que dicho método toma en consideración que las soluciones de la ecuación de onda de nuestro cristal, pueden escribirse como una onda plana multiplicada por una función periódica.

A continuación mostramos la descripción del análisis para cristales electrónicos y después haremos una generalización al caso de cristales fonónicos.

3.2.1. Análisis de Fourier

Se sabe que un cristal es invariante bajo cualquier traslación de la forma $\mathbf{T} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3$, donde u_1, u_2, u_3 son enteros y $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son los vectores unitarios del cristal. Cualquier propiedad física del cristal, tal como la concentración de carga, densidad de electrones o densidad de momento magnético es invariante bajo \mathbf{T} . Lo que es más importante para nosotros es que la densidad de números de electrones $n(\mathbf{r})$ es una función periódica de \mathbf{r} , con periodo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ en las direcciones de los tres ejes del cristal, respectivamente [32]. Así,

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = n(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Tal periodicidad crea una situación ideal para el análisis de Fourier. Por ejemplo, en el caso de propiedades electrónicas, las características más importantes del cristal están directamente relacionadas con los componentes de Fourier de la densidad electrónica. Consideremos primero una función $n(x)$ en una dimensión con periodo a en la dirección x . Ahora expandamos en Series de Fourier de senos y cosenos:

$$n(x) = n_0 + \sum_{p>0} [C_p \cos(2\pi px/a) + S_p \sin(2\pi px/a)], \quad (3.2)$$

donde las p son enteros positivos y C_p, S_p son constantes reales, llamadas coeficientes de Fourier de la expansión. El factor $2\pi/a$ en los argumentos asegura que $n(x)$ tiene el periodo a :

$$\begin{aligned} n(x+a) &= n_0 + \sum [C_p \cos(2\pi px/a + 2\pi p) + S_p \sin(2\pi px/a + 2\pi p)], \\ &= n_0 + \sum_{p>0} [C_p \cos(2\pi px/a) + S_p \sin(2\pi px/a)] = n(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se dice que $2\pi p/a$ es un punto en la red recíproca o en el espacio de Fourier del cristal. En una dimensión esos puntos están en una línea. Los puntos en la red recíproca son los términos permitidos en las series de Fourier en la ecuación (3.3). Un punto es permitido si éste es consistente con la periodicidad del cristal. Otros puntos en el espacio recíproco no son permitidos en la expansión de Fourier de la función periódica.

Por otro lado, es conveniente escribir las series de la ecuación (3.3) en la forma compacta:

$$n(x) = \sum_p n_p \exp(i2\pi px/a), \quad (3.4)$$

donde la suma es sobre todos los enteros p : positivos, negativos y cero. Los coeficientes n_p ahora son números complejos. Para asegurar que $n(x)$ es una función real se requiere la propiedad

$$n_{-p}^* = n_p, \quad (3.5)$$

así la suma de los términos en p y $-p$ es real. El asterisco en n_{-p}^* denota el complejo conjugado de n_{-p} .

Ahora, con $\varphi = 2\pi px/a$, la suma de los términos en p y $-p$ en la ecuación (3.4) es real si la ecuación (3.5) se satisface. La suma es

$$n_p(\cos \varphi + i \sin \varphi) + n_{-p}(\cos \varphi - i \sin \varphi) = (n_p + n_{-p}) \cos \varphi + i(n_p - n_{-p}) \sin \varphi,$$

que es igual a la función

$$2\text{Re}\{n_p\} \cos \varphi - 2\text{Im}\{n_p\} \sin \varphi \quad (3.6)$$

si la ecuación (3.5) se satisface. Aquí $\text{Re}\{n_p\}$ y $\text{Im}\{n_p\}$ son la parte real e imaginaria de n_p . Así, la densidad $n(x)$ es una función real, como es deseado.

La extensión del análisis de Fourier a funciones periódicas $n(\mathbf{r})$ en tres dimensiones es

sencilla. Nosotros, sólo debemos encontrar el conjunto de vectores \mathbf{G} tal que:

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} n_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.7)$$

sea invariante bajo todas las traslaciones \mathbf{T} que dejan al cristal invariante [32].

3.2.2. Funciones de Bloch

F. Bloch demostró un importante teorema que nos dice que las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico deberían ser de la forma especial [32]:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.8)$$

donde $u_{\mathbf{k}}$ tiene la periodicidad de la red cristalina con $u_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{T})$. Aquí \mathbf{T} es un vector de traslación de la red. El resultado en la ecuación (3.8) expresa el Teorema de Bloch:

Las eigenfunciones de la ecuación de onda para un potencial periódico son el producto de una onda plana $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ por una función $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ con la periodicidad de la red cristalina.

Una función de onda para un único electrón de la forma de la ecuación (3.8) es llamada función de Bloch y puede ser descompuesta en una suma de ondas viajeras.

3.2.3. Análisis de Fourier en cristales fonónicos sin disipación: Método de expansión de ondas planas

De igual forma como se mostró para el caso electrónico, es posible representar las cantidades físicas periódicas en un sistema elástico (acústico) mediante una expansión

en series de Fourier del tipo a la ecuación (3.7).

Uno de los primeros trabajos en desarrollar un análisis riguroso en el espacio de Fourier de un cristal fonónico se puede ver en la referencia [20]. Aquí, se hace un estudio de un composito elástico descrito por una densidad de masa que depende de la posición $\rho(\mathbf{r})$, una velocidad longitudinal del sonido $c_l(\mathbf{r})$ y la velocidad transversal del sonido $c_t(\mathbf{r})$. Además se deriva una ecuación de eigenvalores para las frecuencias $\omega_n(\mathbf{k})$, donde n es el número de la banda y \mathbf{k} es el vector de onda de Bloch.

En este trabajo, se parte del análisis de un medio elástico, el cual será heterogéneo, sin embargo, será isótropo, sólido y de extensión infinita. En términos de esos tres parámetros el tensor de tensiones toma la forma [20]:

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2) u_{ll} \delta_{ik}, \quad (3.9)$$

donde

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right], \quad (3.10)$$

es el tensor de deformaciones, u_i , ($i = 1, 2, 3$) son las componentes del vector de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Aquí la convención de que se suma sobre todos los índices iguales aplica. En ausencia de fuerzas externas la segunda Ley de Newton toma la forma:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \\ &= 2\rho c_t^2 \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} \delta_{ik} + 2u_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \rho c_t^2 + u_{ll} \partial_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} (c_l^2 - 2c_t^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Recordando la suposición inicial, se restringe el tratamiento para un medio lineal, omitiendo con ello el término cuadrático en u_i en la ecuación (3.10). Después de un poco

de algebra, la ecuación (3.11) puede escribirse de la forma siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\rho c_t^2 \nabla u_i) + \nabla \cdot [\rho c_t^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho c_l^2 - 2\rho c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{u}]. \quad (3.12)$$

La forma compacta de la ley de movimiento es particularmente conveniente porque nos evita aplicar condiciones de frontera. Esta es la ecuación de onda para un medio elástico heterogéneo, la cual es complicada debido a la dependencia de los parámetros materiales con la posición, además, no puede ser separada en dos ecuaciones (una transversal y una longitudinal) que satisfagan $\nabla \times \mathbf{u}_t = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{u}_l = 0$, respectivamente.

Veamos ahora cómo hacer el cálculo para una periodicidad espacial existente en el sistema heterogéneo. Para esto, es necesario expandir los parámetros materiales en series de Fourier, los cuales son convenientemente expresados como sigue:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \rho(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.13a)$$

$$\rho c_l^2(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \Lambda(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.13b)$$

$$\rho c_t^2(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \tau(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.13c)$$

La periodicidad del medio puede ser en una, dos o tres dimensiones, donde la dimensionalidad recae sobre el vector de la red recíproca \mathbf{G} .

La sumatoria sobre las ecuaciones (3.13) se extiende sobre la red recíproca infinita que corresponde a la red de Bravais en el espacio real. Por otro lado, el desplazamiento debe satisfacer el teorema de Bloch:

$$u(\mathbf{r}, t) = \exp(i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{u}_k(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.14)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda de Bloch y ω es la frecuencia angular. Al sustituir las

ecuaciones (3.13) y (3.14) en la ecuación (3.12), y multiplicando por $\exp(-i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{r})$, para posteriormente hacer la integración sobre la celda unitaria (la siguiente ecuación fue derivada en la referencia [20]), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}''} \{ \tau(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \mathbf{u}_k(\mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}') \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) + \tau(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \mathbf{u}_k(\mathbf{G}') \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (\mathbf{k} + \mathbf{G}') + \\ & + [\Lambda(\mathbf{G} - \mathbf{G}') - 2\tau(\mathbf{G} - \mathbf{G}')] \mathbf{u}_k(\mathbf{G}') \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}) - \omega^2 \rho(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \mathbf{u}_k(\mathbf{G}') \} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si permitimos que \mathbf{G} tome todos los puntos de la red recíproca, entonces la ecuación (3.15) será un conjunto de ecuaciones lineales para el eigenvector $\mathbf{u}_k(\mathbf{G})$. Para un valor dado del vector de onda de Bloch \mathbf{k} , este conjunto de ecuaciones tiene soluciones para algunos eigenvalores $\omega_n(\mathbf{k})$, donde $n=1,2,3,\dots$, es la primera, segunda, tercera, etc., banda vibracional. Es importante recalcar que usando una expansión de Fourier es posible representar un medio periódico como un medio continuo sin fronteras, es por eso que no es necesario contemplar las condiciones de frontera en el análisis de forma.

Ahora, hay que tomar en cuenta que el metamaterial que analizaremos estará compuesto por dos materiales, con distintas densidades de masa y módulos de compresibilidad. Para este caso, es necesario modelar el sistema como un composito de materiales a y b que estarán presentes en cada celda unitaria. En la referencia [20] se muestra el procedimiento, el cual contempla la razón de ocupación (fracción de llenado) de cada material mediante f y $(1 - f)$ y ahora en las ecuaciones (3.13) se consideran los coeficientes de Fourier de la siguiente manera:

$$\rho(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int d^2r \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.16)$$

donde la integración es sobre el área de la celda unitaria A_c . Ahora se procede a integrar

y analizar qué sucede cuando $\mathbf{G} = 0$ y $\mathbf{G} \neq 0$ [20], lo cual da como resultado:

$$\rho(\mathbf{G}) = \begin{cases} \rho_a f + \rho_b(1 - f) \equiv \bar{\rho}, & \text{si } \mathbf{G} = 0, \\ (\rho_a - \rho_b)\mathbf{F}(\mathbf{G}) \equiv \Delta\rho\mathbf{F}(\mathbf{G}), & \text{si } \mathbf{G} \neq 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde el *factor de forma* (coeficiente de Fourier) está definida como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{G}) = \int_a d^3r \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.18)$$

Nótese que el factor de forma depende de la geometría del átomo (o meta átomo) a y la información de la red de Bravais viene en la definición del vector de la red recíproca \mathbf{G} . Las ecuaciones (3.17-3.18) en conjunto conforman el coeficiente de Fourier que debe ir en la primer ecuación del conjunto de ecuaciones (3.13) para el análisis de un sistema compuesto de dos materiales. Para obtener los demás coeficientes de Fourier de las ecuaciones (3.13) se realiza un procedimiento similar.

Una vez obtenidas las ecuaciones análogas a la primera ecuación del conjunto (3.13), se tiene que llevar a cabo un procedimiento similar al realizado para obtener la ecuación (3.15), para posteriormente obtener las bandas vibracionales del sistema estudiado, el procedimiento se muestra en la referencia [20].

Capítulo 4

Metamaterial acústico 2D

4.1. Pérdidas en un medio heterogéneo o medio efectivo 2D: *Coefficiente de viscosidad en un cristal fonónico sólido-líquido*

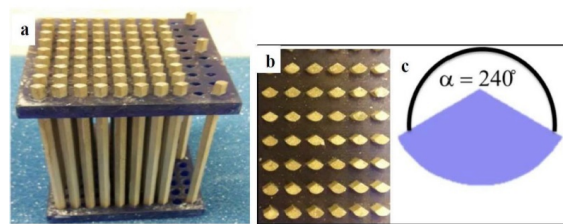


Figura 4.1: Cristal fonónico con dispersores asimétricos embebidos en una matriz de agua: Figuras (a) y (b) corresponden a una vista lateral y superior del desarrollo experimental de un cristal fonónico o metamaterial acústico respectivamente, panel (c) muestra una representación esquemática de la celda unitaria o meta-átomo del mismo sistema. Figuras tomadas de la referencia [35].

Como ya mencionamos anteriormente, queremos desarrollar una teoría de homogeneización para un cristal fonónico compuesto por dispersores sólidos embebidos en una matriz de fluido con viscosidad. En la Figura (4.1) se puede observar un ejemplo de

un metamaterial acústico o cristal fonónico del tipo que queremos estudiar analíticamente. En este sistema, se tienen cilindros rígidos de aluminio con sección transversal asimétrica embebidos en una matriz de agua, donde este fluido es considerado como viscoso. Para iniciar con nuestro análisis nos fijamos en primer lugar en el meta-átomo o celda unitaria de este sistema, para posteriormente aprovechar las propiedades de periodicidad de la red para analizar la contribución de los múltiples dispersores cuando se tiene un cristal.

Retomando el desarrollo mostrado en el capítulo anterior para el problema de un sólido inmerso en un fluido, podemos enfocarnos primero en analizar el meta-átomo con sección sólida arbitraria. Para este tipo de sistema, las pérdidas de energía se pueden calcular por medio de la ecuación (2.55). No obstante, antes de ver si estos resultados son aplicables para nuestro sistema, es necesario el cálculo de una expresión válida para la distribución de velocidades que contemple los múltiples dispersores; y más importante aún, se debe analizar a fondo si para este metamaterial se satisfacen de forma similar las condiciones de las ecuaciones (2.52).

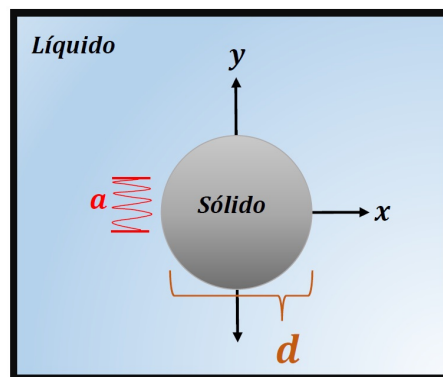


Figura 4.2: Frontera: sólido-líquido.

Consideremos el esquema de la Figura (4.2), donde:

- Los coeficientes de viscosidad son independientes de las coordenadas, por lo que la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación (2.40).

- El sólido oscila en el eje y con amplitud de oscilación pequeña (donde a es la superficie de oscilación), $a \ll d$. Además dado que el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \sim v^2$, en el caso de ondas de sonido se puede despreciar.
- Las dimensiones están dadas por d y la profundidad de penetración por $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$, donde la viscosidad cinemática es $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.
- El fluido en la frontera sólido-líquido tiene una dependencia mayor en η , tal que, ξ es despreciable en la ecuación de Navier-Stokes.
- Como $a \ll d$, $\delta \ll d$, la superficie de oscilación se considera plana y $v_y \neq 0$.

Dada las condiciones anteriores, se puede ver que la ecuación de Navier Stokes es reducible a la ecuación (2.41). Por otro lado, como $\omega = \frac{\nu}{\delta^2}$ y $\delta \ll d$, es posible establecer la siguiente desigualdad :

$$\frac{\nu}{d^2} \ll \omega \ll \frac{C_{eff}}{d}. \quad (4.1)$$

Donde, utilizando los parámetros físicos del metamaterial de la Figura (4.1), se tiene: $\frac{\nu}{d^2} = 10^{-2} s^{-1}$, haciendo totalmente válida la desigualdad.

Las condiciones anteriores en la superficie del sólido, más el flujo potencial en exteriores (fluido ideal), nos permite utilizar la ecuación (24.14) de la referencia [16], la cual hemos desarrollado en la sección anterior, ecuación (2.55), para la energía disipada en un sistema como el mostrado en la Figura (4.2). Reescribimos dicha ecuación por conveniencia de la siguiente manera:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_b \eta \omega}{2}} \oint_L v^2(\mathbf{r}) dl, \quad (4.2)$$

la cual hemos normalizado por unidad de longitud h , en la dirección del eje de los cilindros y donde ρ_b es la densidad del fluido.

4.1.1. Cálculo de distribución de velocidades y densidad de masa efectiva en un metamaterial acústico 2D

Podemos partir de la ecuación linealizada de Euler (2.16). En el límite de longitud de onda larga, todos los componentes de Fourier $p(\mathbf{G} \neq 0)$ desaparecen menos $p(\mathbf{G} = 0) = p_0$, el cual determina la presión estática. Por lo tanto, el término con $\mathbf{G} = 0$ nos da la contribución principal en este límite. La onda de Bloch para la presión es:

$$p(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} p(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = p_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G} \neq 0} p(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.3)$$

Tomando en cuenta que $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \sim 1/\omega$, se toma a la presión en su aproximación cuadrática, $p(\mathbf{r}) = p_1(\mathbf{r}) + p_2(\mathbf{r})$ y se sustituye en el gradiente de la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \nabla p = & i\mathbf{k}p_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + i \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} + \\ & i\mathbf{k} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} p_1(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} + i \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \mathbf{G} p_2(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} + i\mathbf{k} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} p_2(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

el último término en el desarrollo anterior va como $\sim k^3$ por lo que puede ser omitido. Por otro lado la expansión de la densidad se puede expresar como sigue:

$$\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} = \bar{\nu} + \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \nu(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.4) y (4.5) en la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\omega} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left\{ \mathbf{k}p_0 \bar{\nu} + \mathbf{k}p_0 \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \nu(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) \nu(-\mathbf{G}) + \right. \\ & \sum_{\mathbf{G}+\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) \nu(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{G}+\mathbf{G}')\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}+\mathbf{G}' \neq 0} [\mathbf{k}p_1(\mathbf{G}) + \mathbf{G}p_2(\mathbf{G})] \nu(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{G}+\mathbf{G}')\cdot\mathbf{r}} + \\ & \left. \sum_{\mathbf{G} \neq 0} [\mathbf{k}p_1(\mathbf{G}) + \mathbf{G}p_2(\mathbf{G})] \nu(-\mathbf{G}) \right\}. \end{aligned}$$

Trabajando con la expresión anterior y considerando, $\mathbf{G} + \mathbf{G}' = \mathbf{G}''$, se obtiene la distribución de velocidades:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\omega} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left\{ \bar{\nu} \mathbf{k} p_0 + \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) \nu(-\mathbf{G}) + \right. \\ & \sum_{\mathbf{G} \neq 0} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \left[\mathbf{k} p_0 \nu(\mathbf{G}) + \sum_{\mathbf{G}'} \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \mathbf{G}' p_1(\mathbf{G}') \right] + \\ & \left. \sum_{\mathbf{G} \neq 0, \mathbf{G}' \neq 0} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[\mathbf{k} p_1(\mathbf{G}') + \mathbf{G}' p_2(\mathbf{G}') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde en el espacio de Fourier:

$$\nu(\mathbf{G}) = \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho} \right) F(\mathbf{G}), \quad \nu(0) = \bar{\nu} = \frac{f}{\rho_s} + \frac{1-f}{\rho} \quad (4.7)$$

$$F(\mathbf{G}) = \int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (4.8)$$

y donde además, se puede ver cómo el primer elemento de la ecuación (4.6), corresponde a la propagación en un medio homogéneo.

Ahora, para obtener la contribución de orden cero en la velocidad, volvemos a tomar la ecuación de Euler (2.16) tomando en cuenta tanto la presión como la velocidad en el espacio de Fourier:

$$(\mathbf{k} + \mathbf{G}) p(\mathbf{G}) = \omega \sum_{\mathbf{G}'} \rho(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \mathbf{v}(\mathbf{G}'), \quad (4.9)$$

la cual en el límite de longitud de onda larga se convierte en:

$$\mathbf{k} p_0 = \omega \rho_0 \mathbf{v}_0 + \omega \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \rho(-\mathbf{G}') \mathbf{v}(\mathbf{G}'). \quad (4.10)$$

Tomando la ecuación anterior y omitiendo el término cuadrático en k , se puede obtener la contribución de orden cero en la velocidad:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{k}}{\omega \rho_0} p_0. \quad (4.11)$$

La ecuación (4.11) se puede introducir en la distribución de velocidades, ecuación (4.6), para tener una forma más compacta de escribirla. Antes de proceder con esta sustitución, veamos antes como obtener una expresión para la presión. Para esto, usemos la ecuación de movimiento para medios elásticos, es decir, la ecuación del fluido ideal pero incluyendo explícitamente el módulo de compresibilidad, λ :

$$\frac{1}{\lambda(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho(\mathbf{r})} \right). \quad (4.12)$$

Esta expresión es fácil de obtener eliminando los términos viscosos que aparecen del lado derecho de la ecuación (2.24) deducida anteriormente. Ahora, escribimos la ecuación (4.12) en el espacio de Fourier [33]:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}') p(\mathbf{G}') = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') p(\mathbf{G}'), \quad (4.13)$$

donde $\beta = 1/\lambda$ en el espacio de Fourier. Analizando la ecuación anterior en el límite de $(\omega, k) \rightarrow 0$, se llega a dos ecuaciones, una lineal en k y una cuadrática:

Lineales: $\mathbf{G} \neq 0$

$$\mathbf{G} \cdot [\mathbf{k} \nu(\mathbf{G}) p_0 + \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{G}' \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') p(\mathbf{G}')] = 0 \quad (4.14)$$

Cuadráticos: $\mathbf{G} = 0$

$$(k^2 \bar{\nu} - \omega^2 \bar{\beta}) p_0 + \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{G}' \nu(-\mathbf{G}') p(\mathbf{G}') = 0, \quad (4.15)$$

donde $\bar{\beta} = \beta(\mathbf{G} = 0)$. Una vez obtenido este conjunto, introducimos la siguiente matriz:

$$Q^{-1}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = [\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}')]^{-1}, \quad (4.16)$$

la cual sustituimos en la contribución lineal, ecuación (4.14), tal que:

$$\sum_{\mathbf{G}} \delta_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} p(\mathbf{G}) = \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{G}' \cdot k \nu(\mathbf{G}') p_0 Q^{-1}(\mathbf{G}'', \mathbf{G}'),$$

y realizando la suma del lado izquierdo y cambiando los índices de $\mathbf{G}'' \rightarrow \mathbf{G}$, se obtiene la expresión para la presión:

$$p(\mathbf{G}) = -p_0 \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{G}' \cdot k \nu(\mathbf{G}') Q^{-1}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \quad (4.17)$$

Una vez obtenida la expresión explícita para la presión, ecuación (4.17) y la contribución de orden cero de la velocidad, ecuación (4.11), podemos retomar la expresión para la distribución de velocidades. Sustituyendo las ecuaciones (4.17) y (4.11) en la primera línea de la ecuación (4.6), se obtiene:

$$v_{0i} = \frac{p_0}{C_{eff}} \rho_{ij}^{-1} n_j, \quad (4.18)$$

donde el tensor de densidad de masa inverso sería:

$$\rho_{ij}^{-1} = \left\{ \bar{\nu} \delta_{ij} - \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}' \neq 0} G_i G'_j \nu(-\mathbf{G}) \nu(\mathbf{G}) [\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}')]^{-1} \right\} \quad (4.19)$$

Con: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ y $C_{eff} = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega/k)$.

La ecuación (4.18) es la contribución homogeneizada para la velocidad que corresponde a propagación del sonido en un medio anisótropo homogéneo que está en la

primer línea de ecuación (4.6). Ahora repetimos el paso anterior pero para la segunda línea de la ecuación (4.6), para finalmente obtener la contribución homogeneizada que es la primera línea y la parte del periodo no homogeneizado que es la segunda línea (la tercera línea la omitimos debido a que es la contribución de orden lineal en k):

$$v_i(\mathbf{r}) = \frac{p_0}{C_{eff}} \left\{ \rho_{ij}^{-1} n_j + \sum_{\mathbf{G} \neq 0} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \left[\nu(\mathbf{G}) n_i - \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}'' \neq 0} G'_i G''_j n_j \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \nu(\mathbf{G}'') \left[\mathbf{G}' \cdot \mathbf{G}'' \nu(\mathbf{G}' - \mathbf{G}'') \right]^{-1} \right] \right\}, \quad (4.20)$$

donde a partir de la ecuación (4.14), se comprueba que la segunda línea de la ecuación (4.20), no tiene componente paralelo ya que $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}_{in}(\mathbf{G}) = 0$.

El siguiente paso contempla usar este resultado para la integración sobre el contorno de la celda.

4.1.2. Cálculo del coeficiente de viscosidad efectivo en un metamaterial acústico 2D

Recordando las ecuaciones (2.30), (2.31) y (4.2), vemos que es necesario tener $\mathbf{v}^2(\mathbf{r}) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_i^2(\mathbf{r})$, por lo que procedemos a realizar esta operación directamente sobre nuestra distribución de velocidades.

$$v_i^2(\mathbf{r}) = \frac{p_0^2}{c_{eff}^2} \left\{ \rho_{ij}^{-1} \rho_{il}^{-1} n_j n_l + 2 \rho_{ij}^{-1} n_j n_l \sum_{\mathbf{G} \neq 0} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}) \right] + n_j n_l \sum_{(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \neq 0} e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{ij} - a_{ij}(\mathbf{G}) \right] \left[\nu(\mathbf{G}') \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}') \right] \right\}, \quad (4.21)$$

donde

$$a_{ij}(\mathbf{G}) = \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}'' \neq 0} G'_i G''_j \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \nu(\mathbf{G}'') \left[\mathbf{G}' \cdot \mathbf{G}'' \nu(\mathbf{G}' - \mathbf{G}'') \right]^{-1}. \quad (4.22)$$

Una vez realizada esta operación, debemos sustituir la ecuación (4.21) en la ecuación (4.2) y realizar la integral de contorno sobre la superficie del dispersor sólido para obtener así finalmente la expresión de energía disipada por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{Q} = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_b \eta \omega}{2}} \left\{ \rho_{ij}^{-1} \rho_{il}^{-1} n_j n_l L_0 + 2 \rho_{ij}^{-1} n_j n_l \sum_{\mathbf{G} \neq 0} L(\mathbf{G}) \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}) \right] + \right. \\ & \left. n_j n_l \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} L(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{ij} - a_{ij}(\mathbf{G}) \right] \left[\nu(\mathbf{G}') \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Posteriormente, para encontrar el coeficiente de viscosidad efectivo o de disipación, se realiza un procedimiento análogo al anterior para encontrar la energía total del sistema realizando la integral de área $E = \frac{1}{2} \oint_{c.u} \rho(\mathbf{r}) v^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, para posteriormente sustituirlo en la ecuación (2.31), $\gamma = \frac{\dot{Q}}{2C_{eff}E}$.

Después de haber realizado las integrales correspondientes y álgebra, se llega a la expresión final para el coeficiente de disipación:

$$\gamma(\mathbf{n}) = \frac{L_0}{2C_{eff}(\mathbf{n})A_c \bar{\rho}} \sqrt{\frac{\rho_b \eta \omega}{2}} \frac{M(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})}. \quad (4.24)$$

Donde hemos definido los coeficientes M y N , los cuales dependen de la dirección de propagación, \mathbf{n} , de acuerdo a:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{n}) = & \rho_{ij}^{-1} \rho_{il}^{-1} n_j n_l + 2 \rho_{ij}^{-1} n_j n_l \sum_{\mathbf{G} \neq 0} L(\mathbf{G}) \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}) \right] + \\ & n_j n_l \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} L(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{ij} - a_{ij}(\mathbf{G}) \right] \left[\nu(\mathbf{G}') \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}') \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$N(\mathbf{n}) = \rho_{ij}^{-1} \rho_{il}^{-1} n_j n_l + 2\rho_{ij}^{-1} n_j n_l \frac{(\rho_a - \rho_b)}{\bar{\rho}} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} F(-\mathbf{G}) \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}) \right] +$$

$$n_j n_l \frac{(\rho_a - \rho_b)}{\bar{\rho}} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} F(-\mathbf{G} - \mathbf{G}') \left[\nu(\mathbf{G}) \delta_{ij} - a_{ij}(\mathbf{G}) \right] \left[\nu(\mathbf{G}') \delta_{il} - a_{il}(\mathbf{G}') \right], \quad (4.26)$$

donde además los coeficientes de Fourier obtenidos de las integrales de contorno se calculan como:

$$L(\mathbf{G}) = \oint_L e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} dl \quad \text{y} \quad L_0 = \oint_L dl.$$

y los coeficientes de las integrales de área como:

$$F(-\mathbf{G}) = \int_{A_a} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} da \quad \text{y} \quad A_c = \int_{a+b} da$$

4.1.3. Cálculo de los coeficientes de Fourier

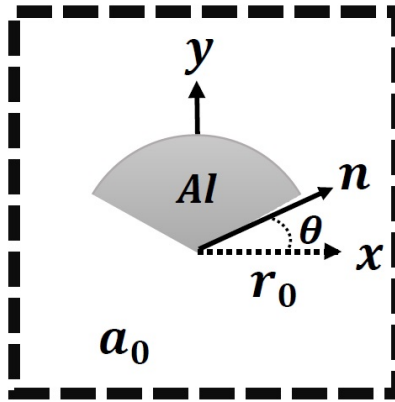


Figura 4.3: Celda unitaria de un cilindro con sección circular de 120°.

Como se ha ido mencionando anteriormente, los coeficientes de Fourier dependen estrictamente de la geometría del sistema: celda unitaria y contorno de la sección sólida. En este caso, considerando el sistema de cilindros de la Figura (4.3), mostraremos brevemente el cálculo de los factores de forma para este sistema.

La parametrización del sistema mostrado en la Figura anterior lo podemos ver a continuación:

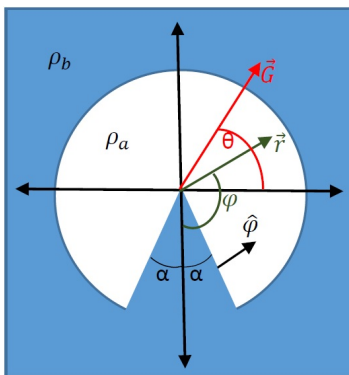
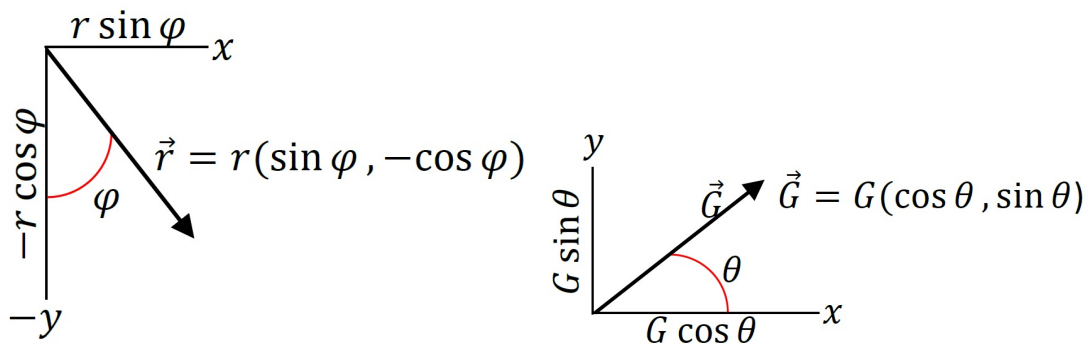
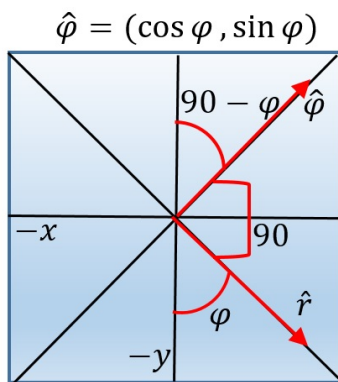


Figura 4.4: Esquema parametrizado de la celda unitaria de la Figura (4.3).



(a) Vector de radio \mathbf{r}

(b) Vector de red recíproca \mathbf{G}



(c) Vector unitario φ

Figura 4.5: Vectores Unitarios.

La Figura (4.4) corresponde a la parametrización de la Figura (4.3), y la Figura (4.5), son los vectores correspondientes extraídos de la parametrización.

Una vez hecha la parametrización, se procede a obtener los coeficientes resolviendo las integrales de área o de contorno introducidas anteriormente. Empecemos con $F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{G}) &= \frac{1}{A} \int_0^R r dr \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{-i\mathbf{G}r \sin(\varphi-\theta)} d\varphi \\ &= \frac{1}{A} \int_0^R r dr \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} J_n(z) e^{in(\theta-\varphi)} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Realizar la integración del segundo renglón de la ecuación (4.27) respecto a la variable φ , hace que se obtenga más adelante una función hipergeométrica complicada de manejar, por lo que se decide mejor integrar por partes respecto a la variable r desde el primer renglón:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{G}) &= \frac{1}{A} \left[\underbrace{\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \left[\frac{iRe^{-iGR \sin(\varphi-\theta)}}{G \sin(\varphi-\theta)} d\varphi \right]}_1 + \frac{1}{A} \frac{1}{G^2} \{-\cot(\alpha+\theta) \right. \\ &\quad \left. [1 - e^{iGR \sin(\alpha+\theta)}] - \cot(\alpha+\theta)[1 - e^{-iGR \sin(\alpha-\theta)}] - \underbrace{iGR \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \left[\frac{e^{-iGR \sin(\varphi-\theta)}}{\sin(\varphi-\theta)} d\varphi \right]}_4 \right. \\ &\quad \left. + iGR \underbrace{\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \sin(\varphi-\theta) e^{-iGR \sin(\varphi-\theta)} d\varphi}_{5} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

En la ecuación (4.28), las integrales 1 y 4 son idénticas pero con signo opuesto, por lo que se eliminan. Los demás elementos no son complicados de obtener, no obstante, la integral marcada con el número 5, es un poco más complicada que las anteriores. Usando la propiedad $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ y trabajando algebraicamente, la integral

número 5 nos da:

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \sin(\varphi - \theta) e^{-iGR \sin(\varphi-\theta)} d\varphi \tag{4.29} \\
&= \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)} - e^{-i(\varphi-\theta)}}{2i} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in(\theta-\varphi)} d\varphi \\
&= \frac{1}{2i} \left[4J_1(z)(\pi - \alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n\alpha)}{n} \{ J_{n+1}(z)(e^{in\theta} - (-1)^{n+1}e^{-in\theta}) \right. \\
&\quad \left. - J_{n-1}(z)(e^{in\theta} - (-1)^{n-1}e^{-in\theta}) \} \right].
\end{aligned}$$

Y finalmente sustituyendo la ecuación (4.29) en la ecuación (4.28) y simplificando se obtiene el resultado para el factor de forma:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{G}) &= 2f \frac{J_1(GR)}{GR} - \frac{1}{a^2 G^2} \left[\cot(\alpha - \theta) (1 - e^{-iGR \sin(\alpha-\theta)}) + \cot(\alpha + \theta) (1 - e^{iGR \sin(\alpha+\theta)}) \right. \\
&\quad \left. + GR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} (J_{n+1}(GR) - J_{n-1}(GR)) (e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}) \right]. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para la integral de contorno, podemos usar la misma parametrización pero se debe resolver una integral de línea y no una de área. El resultado se puede ver en la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{G}) &= J_0(GR)2R(\pi - \alpha) - 2R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} J_n(GR) [e^{-in\theta} + (-1)^n e^{in\theta}] \\
&\quad + \frac{i}{G} \left\{ \frac{(1 - e^{-iGR \sin(\alpha+\theta)})}{\sin(\alpha + \theta)} + \frac{1 - e^{iGR \sin(\alpha-\theta)}}{\sin(\alpha - \theta)} \right\}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Cuando la sección sólida involucra otra geometría, basta con calcular nuevamente los coeficientes de Fourier o factores de forma correspondientes. De esta forma, podemos usar este método para cualquier geometría arbitraria.

4.2. Cilindros rígidos

Cuando el sonido incide sobre las superficies sólidas, se ejerce un estrés sobre el volumen de dicho sólido. Ese estrés puede generar una torsión y deformación en el sólido. No obstante, en la mayoría de los casos, los sólidos presentan una densidad tan elevada, que el sonido no puede penetrarlo. En esta sub-sección tomaremos en cuenta que el sonido no logra penetrar en la inclusión sólida.

Para tomar en cuenta esta consideración, es necesario calcular el límite de $\rho_a \rightarrow \infty$ desde el principio de nuestro desarrollo analítico, es decir, tomar en cuenta la condición $\lambda_s \gg \lambda$ y $\rho_s \gg \rho$.

Retomando la ecuación (4.6) pero antes de expandir la densidad en el espacio de Fourier y omitiendo los términos lineales en k , se tenía que:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p_0 \frac{\mathbf{k}}{\omega \rho(\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\omega \rho(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.32)$$

Donde la presión va como la expresión de la ecuación (4.17). Las distribuciones de presión y velocidad en el límite de longitud de onda larga son muy diferentes. La presión es una función continua en la interfaz sólido-líquido que en el límite de longitud de onda larga se reduce a una onda plana con longitud de onda $2\pi \setminus k \gg a_0$ débilmente modulada por otra función que tiene el periodo de la red. A pesar de esto, la velocidad no se homogeneiza. En la ecuación (4.32) ambos términos muestran tener periodicidad, pero el haber surgido esta expresión de la ecuación del fluido sin viscosidad, se obtiene que la componente tangencial no empata con su homóloga en el sólido. Esta discontinuidad de la componente tangencial nos lleva a que la velocidad total no se homogenice. Sin embargo, de igual forma ésta componente discontinua es la que da la contribución en la integral de contorno de la ecuación (4.2). Es importante destacar, que la componente normal de la velocidad se hace despreciable en la frontera sólido-líquido satisfaciendo

la condición de alto contraste acústico.

Por otro lado, la homogeneización de la presión ocurre para cualquier material elástico (cilindro) con densidad ρ_s salvo para $\rho_s = \infty$. En este caso, las ondas de sonido no penetran al material con densidad infinita, por lo que la presión dentro del sólido y en la superficie es $p(\mathbf{r}) = 0$, y en cualquier otra parte la presión permanece constante, $p(\mathbf{r}) \approx p_0$, si $k \rightarrow 0$. Es así que la presión sufre un salto de discontinuidad en cada punto de la interface. Además, dado que los saltos de discontinuidad tienen la periodicidad de la red, y que la $p(\mathbf{G}) \sim k$ de acuerdo a la ecuación (4.17), los coeficientes de Fourier $p(\mathbf{G})$ no desaparecen en el límite $k \rightarrow 0$. Sin embargo, dichos coeficientes de Fourier permanecen finitos en $k \rightarrow 0$ si la matriz $Q(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$, ecuación (4.16), se vuelve singular en el límite $\rho_s \rightarrow \infty$. En este caso, para evadir la singularidad en la inversión de dicha matriz en el cálculo numérico, la densidad debe ser significativamente grande pero permanecer finita para que la presión sea una función continua que permita la homogeneización.

Es así que se hace el cálculo analítico pero tomando el límite de la densidad del sólido infinita únicamente en las expresiones que no nos llevan a una singularidad que rompa la homogeneización en la presión. Tomando estas consideraciones, podemos partir directamente del cuadrado de la velocidad como:

$$v^2(\mathbf{r}) = \frac{p_0^2}{\rho^2(\mathbf{r})C_{eff}^2(\mathbf{n})} \left[1 - 2 \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}') e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \nu(\mathbf{G}') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') + \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}', \mathbf{G}'', \mathbf{G}'''} e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}'') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}''') \nu(\mathbf{G}'') \nu(\mathbf{G}''') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}'') I(\mathbf{G}', \mathbf{G}''') \right].$$

Ahora hay que sustituir la expresión anterior y realizar las integraciones correspondientes recordando la discontinuidad que sufre la presión. Primero recordemos que en general la densidad va cómo $\frac{1}{\rho^2(\mathbf{r})} = \left(\frac{1}{\rho_s^2} + \frac{1}{\rho^2} \right)$. Sin embargo, dado que se forma una barrera viscosa, se debe tomar la densidad en ese punto y no exactamente el promedio entre la barrera sólido-líquido, por lo que podemos considerar únicamente, el límite

$\rho_s \rightarrow \infty$, tal qué, solo tenemos la densidad del líquido, $\frac{1}{\rho^2}$.

Así las expresiones a integrar son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}} \frac{p_0^2}{C_{eff}^2 \rho^2} [L_0 - 2 \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}') \nu(\mathbf{G}') \times \\ & I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \oint_{L_0} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} dl + \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}', \mathbf{G}'', \mathbf{G}'''} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}'') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}''') \nu(\mathbf{G}'') \nu(\mathbf{G}''') \times \\ & I(\mathbf{G}, \mathbf{G}'') I(\mathbf{G}', \mathbf{G}''') \oint_{L_0} e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} dl], \end{aligned}$$

y la energía total,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{C_{eff}^2 \rho^2} [\rho(1-f)A_c - 2\rho \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}') \nu(\mathbf{G}') \times \\ & I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') A_c \int_l e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \rho \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}', \mathbf{G}'', \mathbf{G}'''} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}'') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}''') \nu(\mathbf{G}'') \nu(\mathbf{G}''') \times \\ & I(\mathbf{G}, \mathbf{G}'') I(\mathbf{G}', \mathbf{G}''') A_c \int_l e^{i(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}], \end{aligned}$$

donde f es la fracción de llenado, definida por la razón entre las áreas del sólido entre la de la celda unitaria, $f = \frac{A_s}{A_c}$ y $(1-f) = \frac{A_l}{A_c}$. Por lo tanto, las nuevas expresiones quedan como sigue:

$$\gamma(\mathbf{n}) = \frac{L_0}{4A_c C_{eff}(\mathbf{n})} \sqrt{\frac{\omega\eta}{2\rho_b}} \frac{M_0(\mathbf{n})}{N_0(\mathbf{n})}, \quad (4.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_0(\mathbf{n}) &= 1 + \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2} L^*(\mathbf{G}_1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2) F(\mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) + \\ & \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4} L^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3) (\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_4) F(\mathbf{G}_2) \times \\ & F(\mathbf{G}_4) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
N_0(\mathbf{n}) &= (1-f) - \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2} F^*(\mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)F(\mathbf{G}_2)I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) + \\
&\frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4} F^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3)(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_4)F(\mathbf{G}_2) \times \\
&F(\mathbf{G}_4)I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4). \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Siendo: $I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = A^{-1}(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$

$$A(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = \begin{cases} (\rho_s^{-1} - \rho^{-1})\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 F(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) & \text{si } \mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2 \\ (\frac{f}{\rho_s} + \frac{(1-f)}{\rho})G_1^2 & \text{si } \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \end{cases} \tag{4.36}$$

Por otro lado, la velocidad del sonido se calcula normalmente como en la referencia [33]:

$$C_{eff}^2(\mathbf{n}) = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\beta}} - \frac{1}{\bar{\beta}} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \neq 0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)\nu(\mathbf{G}_1)\nu(-\mathbf{G}_2)I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2). \tag{4.37}$$

Donde:

$$\beta(\mathbf{G}) = \left(\frac{1}{\lambda_s} - \frac{1}{\lambda}\right)F(\mathbf{G}), \quad \beta(0) = \bar{\beta} = \frac{f}{\lambda_s} + \frac{1-f}{\lambda}, \tag{4.38}$$

y ν se calcula de acuerdo a las ecuaciones (4.7).

Las expresiones anteriores nos dan el modelo de homogeneización completo para el cálculo del coeficiente de decaimiento del sonido propagándose en un cristal fonónico sólido-líquido con sección sólida y estructura cristalina (red) arbitrarias. No obstante, para realizar un cálculo formal, es importante también considerar que la frecuencia de sonido que se propagará en el cristal fonónico debe de estar dentro del límite de homogeneización, es decir, donde la relación de dispersión es casi lineal y donde no

tenemos una brecha prohibida.

Para realizar el cálculo de la estructura de bandas de este cristal fonónico o metamaterial acústico, se puede utilizar la herramienta propuesta en la referencia [34]. En este caso, únicamente basta calcular las eigen-frecuencias ω del cristal fonónico de interés utilizando la ecuación de movimiento para medios elásticos en el espacio de Fourier (4.13).

4.3. Resultados sobre Metamaterial Acústico 2D

Es importante tomar en consideración que el conjunto de expresiones analíticas que definen nuestra teoría son válidas para un sistema periódico, por lo que fue necesario realizar un código computacional para construir un cristal definido mediante los vectores de la red recíproca. Para ello utilizamos el lenguaje Fortran, el cual es sabido que consume pocos recursos computacionales comparado con otros lenguajes de alto nivel como el lenguaje M que utiliza MATLAB (los códigos desarrollados se pueden ver en el apéndice A y B).

A continuación mostramos cálculos del coeficiente de decaimiento para distintos metamateriales acústicos. Se seleccionaron distintas geometrías de inclusión sólida para este cálculo. Entre las seleccionadas se muestra el caso de la referencia [35] la cual es altamente anisotrópica y muestra rompimiento de simetría de espejo a lo largo de la dirección vertical (ver Figura (4.3)). Además, en algunos casos, mostramos su comparativa contra resultados numéricos obtenidos con COMSOL MULTIPHYSICS.

4.3.1. Estructura de bandas

Antes de proceder con el cálculo del coeficiente de decaimiento, primero se calcularon las estructuras de bandas usando la ecuación (4.13) para estar seguros de las frecuencias de interés que se pueden considerar para nuestro método de homogeneización. Para todos los cálculos de la estructura de bandas se consideraron los datos del aluminio, $\rho_{Al}=2700 \text{ kg}/m^3$, $\lambda_{Al}=51 \text{ GPa}$ y además $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$, $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$ y un parámetro de red de 5.5 mm.

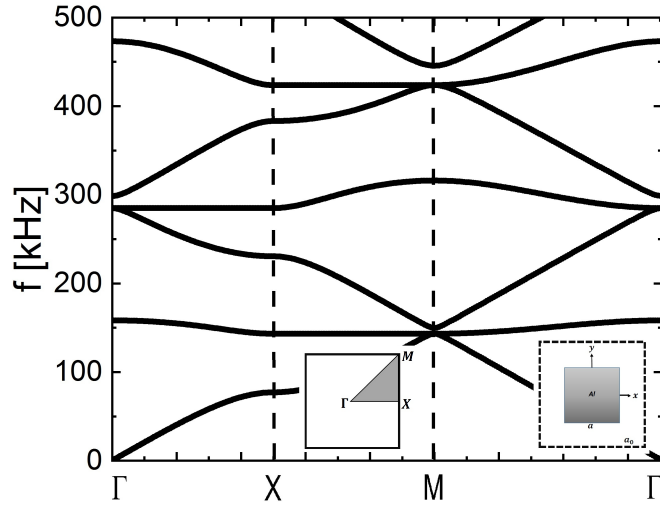


Figura 4.6: Estructura de bandas para un metamaterial con sección sólida cuadrada de lado 4.4 mm. Los parámetros de densidad y módulo de compresibilidad son $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$, $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$

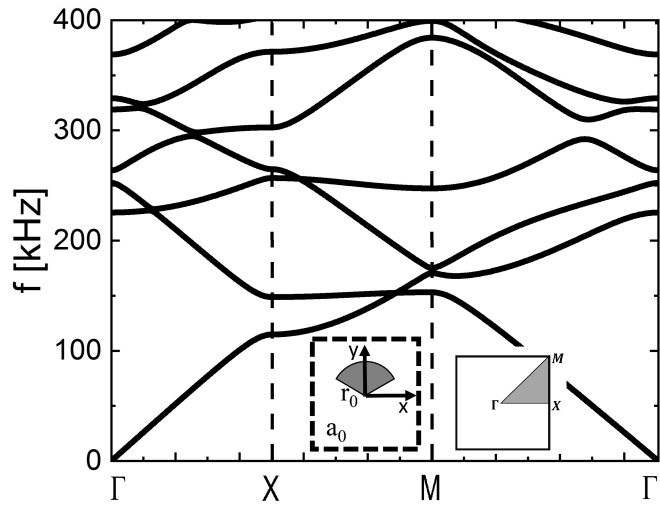
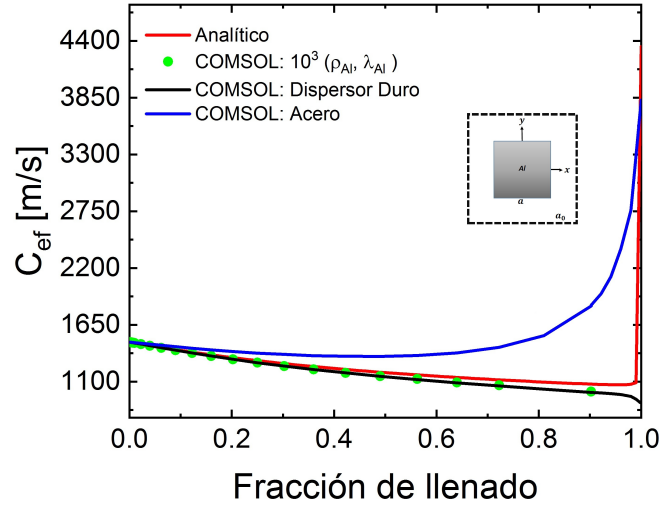


Figura 4.7: Estructura de bandas para un metamaterial con sección circular de 120° , radio 2.2 mm. Los parámetros de densidad y módulo de compresibilidad son $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$, $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$

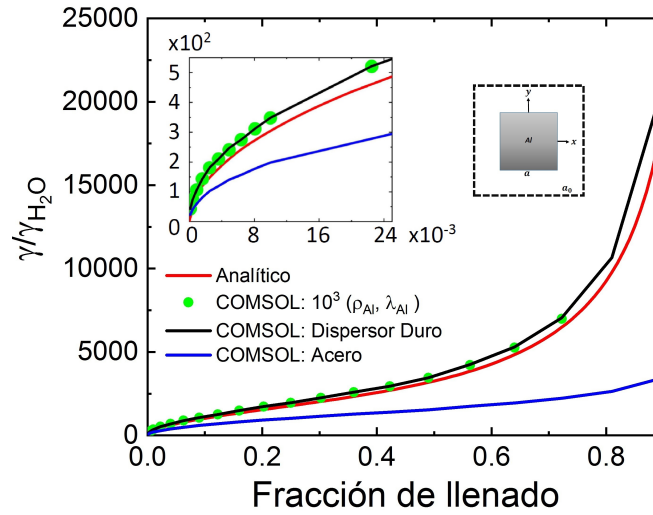
En las figuras anteriores, se puede observar cómo para frecuencias abajo de 100 kHz se tiene un comportamiento casi lineal en la estructura de bandas. Por otro lado, es bien sabido que este comportamiento dependerá fuertemente de la cantidad de volumen ocupado por el sólido en la celda unitaria (fracción de llenado). Sin embargo hemos explorado que utilizando una frecuencia de alrededor de 50 kHz, es más que suficiente para situarse en la región de homogeneización, aún teniendo un barrido de fracción de llenado desde 0 hasta el valor máximo posible (en el caso de cilindro de sección transversal cuadrada $f_{max} = 1$).

4.3.2. Coeficiente de decaimiento en un cristal fonónico 2D isótropo

Una vez analizadas las frecuencias que están dentro del rango de homogeneización se procedió a los cálculos de la velocidad del sonido y el coeficiente de decaimiento viscoso. En esta sub-sección y las siguientes, mostraremos el análisis de las cantidades antes mencionadas para los metamateriales de interés. En algunos casos anexamos simulaciones numéricas de COMSOL que sirvieron para comprobar que nuestra teoría funcionaba correctamente.



(a) Velocidad del sonido



(b) Coeficiente de decaimiento del sonido

Figura 4.8: (a) Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), para una red cuadrada isótropa con sección transversal cuadrada, como función de la fracción de llenado $f = (a/a_0)^2$, $a_0 = 5,5\text{mm}$. En el recuadro izquierdo se observa la región de f pequeñas, donde $\gamma_{ph} \sim \sqrt{f}$. Los parámetros de los dispersores son 10^3 veces los del aluminio: $\rho_s = 10^3 \cdot 2,7\text{g/cm}^3$, $\lambda_s = 10^3 \cdot 51\text{GPa}$ y $C_s = \sqrt{\lambda_s/\rho_s} = 4346\text{ m/s}$. Los resultados numéricos obtenidos por COMSOL para los mismos parámetros elásticos son mostrados por puntos verdes. Las líneas negras corresponden a dispersores duros, es decir, la condición de velocidad cero, $v(\mathbf{r})=0$, dentro de los cilindros. La curva azul corresponde a la velocidad del sonido para un dispersor hecho de acero inoxidable realizado con COMSOL.

En la Figura (4.8-(a)), se puede observar la velocidad longitudinal del sonido en un cristal fonónico compuesto por cilindros de sección transversal cuadrada con parámetros elásticos 10^3 veces los del aluminio. A pesar de considerar este factor, la velocidad del sonido, es exactamente la misma que en el aluminio, 4346 m/s, dado que $C_s = \sqrt{\lambda_s/\rho_s}$. Es por eso que para fracciones de llenado $f = 1$ se observa que la curva roja que corresponde a los cálculos analíticos regresa al valor del aluminio, el cual es un comportamiento correcto. Por otro lado, se anexaron cálculos numéricos de COMSOL MULTIPHYSICS realizados por colaboradores del departamento de física de la UNT [36], para comprobar que la ecuación de la velocidad del sonido funcionaba correctamente. Como se puede ver, la curva roja se acerca muy bien a los resultados de COMSOL (puntos verdes). No obstante, se puede observar cómo para la curva negra (también obtenida con COMSOL), la velocidad cae drásticamente a cero. Esto ocurre debido a que la curva negra corresponde a un cálculo considerando un dispersor totalmente rígido, es decir, donde el sonido no puede penetrar y por lo tanto tenemos una $v(\mathbf{r}) = 0$ cuando la fracción de llenado es igual a 1 (totalmente sólido). Por otro lado, es importante mencionar que se consideró tomar en cuenta el caso de dispersores duros debido a que nuestra teoría es válida para dicha situación, es decir, donde tenemos un alto contraste acústico entre dispersor y el medio líquido. El haber comparado la curva de puntos verdes contra la curva negra, sirvió para comprobar que basta con considerar un valor 10^3 veces los parámetros del aluminio para obtener la condición de dispersores duros o alto contraste acústico. Esto se explicará con más detalle adelante. Finalmente, se agregó un resultado que expone el comportamiento del sonido en un cristal fonónico con un dispersor de acero inoxidable, el cual no satisface la condición de alto contraste acústico dado que $Z_{acero}/Z_{agua} \approx 30$.

En la Figura (4.8-(b)), se observa el coeficiente de decaimiento acústico para el

mismo sistema descrito anteriormente. En esta imagen, se puede ver como el coeficiente de decaimiento incrementa con la fracción de llenado f . Pero analicemos que ocurre con lo mostrado en el recuadro. Si el sonido se propaga a través de una estructura periódica de cilindros embebidos en un fluido viscoso, la disipación ocurre dentro de las capas formadas en las fronteras sólido-líquido. Si la circunferencia del dispersor es L_0 , las pérdidas disipativas dentro de la celda unitaria vendrían dadas por $\Delta E/E \sim (\delta k/2\pi)(L_0/a_0) \sim (L_0/a_0c)\sqrt{\omega\eta/\rho}$, [37]. Así, de acuerdo a esta fórmula, el coeficiente de decaimiento vendría dado por las pérdidas de energía por unidad de longitud:

$$\gamma_{ph} = \frac{\Delta E}{a_0 E} \sim \frac{1}{ca_0} \sqrt{\frac{f\omega\eta}{\rho}}, \quad (4.39)$$

donde se puede ver que $\gamma_{ph} \sim \sqrt{f}$.

Los resultados mostrados en el recuadro izquierdo de la Figura (4.8-(b)) para una $f \ll 1$, muestran una correspondencia directa con lo predicho por la ecuación (4.39), la cual estima cualitativamente el coeficiente de decaimiento del sonido en un estructura periódica, la cual es causada por pérdidas viscosas.

Por otro lado, de acuerdo a la ecuación (4.39), la longitud de decaimiento de sonido de 50 kHz en un cristal fonónico de ($f \sim 0.5$) de cilindros duros en agua es cerca de $1/\gamma_{ph} \sim 200$ m, es decir, es reducido por dos órdenes de magnitud comparado contra el agua pura. La diferencia con la ecuación mencionada y nuestro modelo, radica en que la ecuación (4.39) no toma en cuenta la dispersión múltiple ni la posible interferencia ocasionada por la difracción, por lo tanto en ese caso γ_{ph} nos da el coeficiente de atenuación únicamente para una estructura irregular que consiste de un único dispersor si la fracción de llenado f no es muy pequeña, $L_0 \sim a_0$. Este problema para un único dispersor fue resuelto en la referencia [38]. Aquí el valor del coeficiente para 50 kHz (ver Figura 8 de la referencia [38]) es aproximadamente 6×10^{-4} dB/cm y para agua

pura es 7×10^{-6} dB/cm, es decir, dos órdenes de magnitud menor. Con este trabajo, se demuestra que la ecuación (4.39), mostrada arriba es exacta pero únicamente es válida para un cristal fonónico en un caso simple de red isótropa de dispersores no interactuantes o bien para un solo dispersor. Más aún, los resultados mostrados en la referencia [39] confirman lo dicho anteriormente. Así que, que es de esperarse que los resultados del coeficiente de decaimiento del sonido obtenidos por nuestra ecuación (4.33) que contemplan la dispersión de los múltiples dispersores fuesen por lo menos dos o tres ordenes de magnitud mayores que los del agua pura.

Por otro lado, regresando a la Figura (4.8-(b)), es importante mencionar, que dada a la simetría de la red y el dispersor, el coeficiente de decaimiento en este caso es isótropo y no depende de \mathbf{n} . Como se puede ver, los datos obtenidos numéricamente para valores 10^3 veces los del aluminio coinciden tanto para el caso de cilindros duros como para el caso analítico. Con esto se garantiza que la impedancia acústica de este material en consideración es prácticamente infinita, $Z = 10^3 Z_{Al}$, es decir, se comporta como un dispersor duro. Además, gracias a la buena coincidencia entre los datos numéricos y los analíticos, se comprueba que nuestra teoría funciona correctamente.

Si la condición de alto contraste acústico, $\lambda_s \gg \lambda$ y $\rho_s \gg \rho$, es débilmente satisfecha, el coeficiente de decaimiento será muy pequeño debido a la penetración parcial de energía acústica dentro de los dispersores. Esto en gran parte a que cerca de la superficie del sólido, los gradientes de velocidad dentro de las barreras viscosas serán reducidos, lo cual conducirá a una menor disipación viscosa. Ese es el caso de la curva azul de la Figura (4.8-(b)), donde la razón de impedancias va como $Z_{acero}/Z_{agua} \approx 30$, como dijimos más arriba. Esto no es suficientemente grande para justificar la aproximación de dispersores duros. Por otro lado, las diferencias entre los resultados obtenidos para dispersores duros y acero inoxidable incrementan notoriamente para $f > 0.8$ debido a que los espacios entre los dispersores se hacen muy pequeños y en el caso de dispersores

duros, el sonido se propaga a través de los canales angostos de fluido (recordar que en el otro caso el sonido logra penetrar poco en el sólido).

Por otro lado, el realce fuerte en las pérdidas debido a la viscosidad del aire a través de pequeñas hendiduras de platos de aluminio fue experimentalmente estudiado en la referencia [40]. Aquí, los objetos de aluminio en aire se comportan como dispersores duros dado que $Z_{Al}/Z_{aire} \approx 10^4$. De acuerdo a lo mostrado en el trabajo de la referencia [40], se puede concluir que el aumento observado en la disipación termo-viscosa del sonido, es de la misma naturaleza que el realce abrupto que nosotros observamos en el coeficiente de decaimiento viscoso mostrado en la Figura (4.8-(b)). Además, este efecto fue explorado en el diseño de un hoyo negro fonónico en la referencia [41].

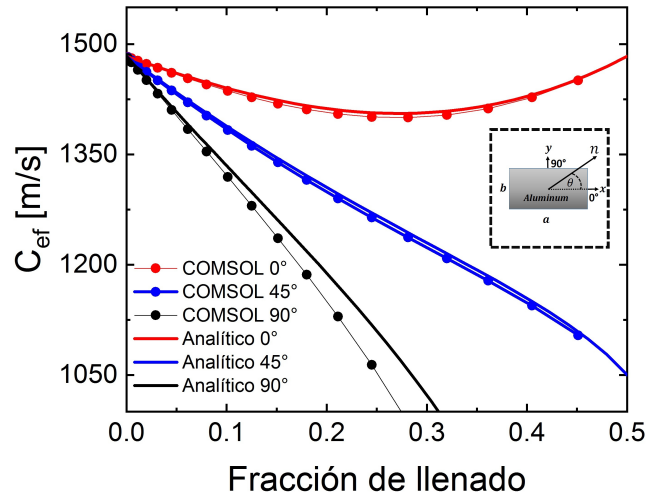
Por otro lado, nuestro enfoque llega a ser inválido si las barreras o capas viscosas vecinas se superponen. Esto ocurre muy cerca de fracciones de llenado $f = 1$. En agua, el grosor de penetración $\delta \approx 3$ micras a la frecuencia de 50 kHz. Para la red mostrada en la Figura (4.8-(b)) con periodo $a_0 = 5.5$ mm las capas viscosas se superponen para $f > 0.98$. Dentro de la región de fracciones de llenado correspondientes a aplicaciones prácticas de cristales fonónicos, $0.1 < f < 0.8$, la longitud de decaimiento del sonido es reducida por $10^3 - 10^4$ veces comparado con el agua pura.

4.3.3. Coeficiente de decaimiento en un cristal fonónico 2D anisótropo

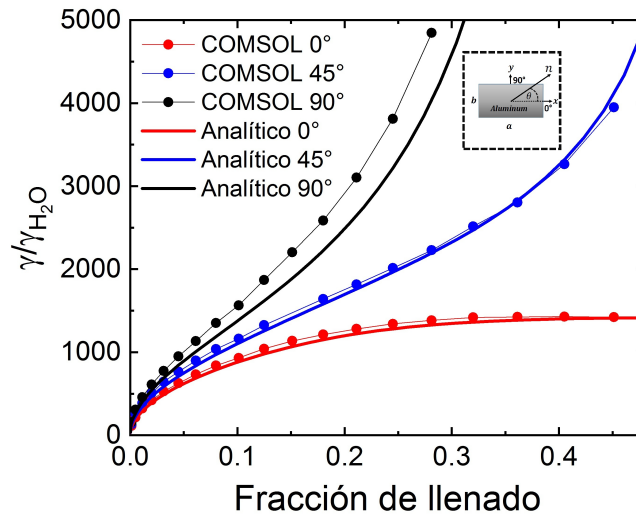
Exploremos ahora el caso de una estructura anisotrópica, donde el dispersor posee menor simetría.

Es bien sabido que cristales fonónicos con anisotropía en la celda unitaria se comportan como metafluidos con densidad de masa anisotrópica [42][43]-[48]. Resulta que la viscosidad al ser una cantidad dinámica, también presenta anisotropía. Usando nuestra ecuación (4.33), se puede obtener la anisotropía deseada en las pérdidas viscosas modificando los parámetros de la estructura. Este tipo de metamaterial con viscosidad anisotrópica es necesario para la creación de las recientes propuestas de “cloaking” hidrodinámico [49]. La anisotropía en las pérdidas viscosas fue demostrada experimentalmente en las referencias [35, 42]

A continuación mostramos el análisis de dos geometrías que presentan anisotropía de pérdidas.



(a) Velocidad del sonido



(b) Coeficiente de decaimiento del sonido

Figura 4.9: (a) Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), para una red cuadrada y un dispersor con sección transversal rectangular anisótropo, como función de la fracción de llenado. Las líneas punteadas corresponden al cálculo numérico hecho con COMSOL y las curvas continuas al resultado analítico. Se muestran tres distintos ángulos de propagación de acuerdo a la figura del recuadro superior derecho, donde \mathbf{n} corresponde a la dirección de propagación determinada por el ángulo θ .

En el caso de dispersores asimétricos, la longitud de decaimiento depende de la di-

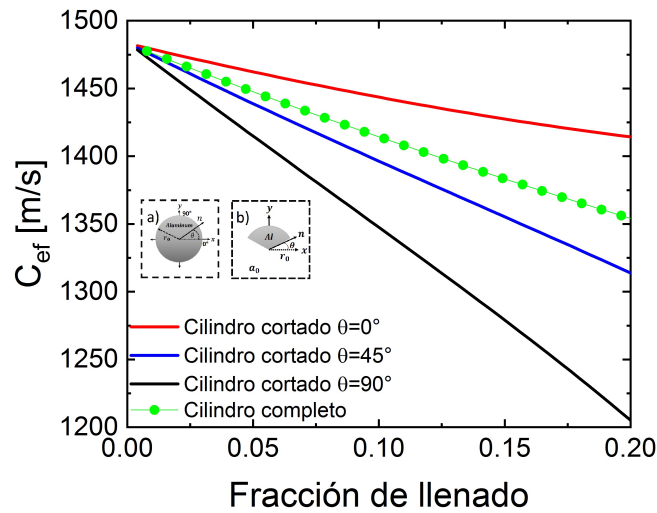
rección de propagación. En las Figuras (4.9-(a)-(b)) se observa la velocidad del sonido y el coeficiente de decaimiento acústico de un cristal fonónico con celda unitaria cuadrada y dispersores asimétricos. Cada dispersor tiene una sección transversal rectangular con una razón 1:2 en sus lados, como se muestra en el recuadro superior de cada figura (celda unitaria). En ambas figuras, los cálculos analíticos son las líneas continuas y los resultados de COMSOL son las líneas punteadas. Como se mencionó anteriormente, todos los resultados mostrados, son para una frecuencia de 50 kHz. Por otro lado, también hemos explorado la cantidad de ondas planas óptima para tener un resultado satisfactorio y una correcta convergencia, el cual fue de 2028 ondas planas.

Los resultados mostrados en las Figuras (4.9) corresponden a tres distintas direcciones de propagación denotadas por el ángulo θ que aparece en el recuadro de celda unitaria. Además, a pesar de que hemos usado 50 kHz, los resultados pueden ser reescalados a otras frecuencias dentro de la región de homogeneización dado que el coeficiente de decaimiento dentro de este rango va como $\gamma_{ph} \sim \sqrt{\omega}$. Por otro lado, podemos observar que las mayores pérdidas son obtenidas para una onda de sonido propagándose a lo largo del lado más corto del rectángulo ($\theta = 90^\circ$). Este resultado puede parecer un poco contra intuitivo dado que las capas o canales viscosos más largos se forman a lo largo del lado más extenso del rectángulo, es decir, en $\theta = 0^\circ$. Sin embargo, la longitud de esta capa no es el único factor. La disipación local está definida por gradientes de velocidad que aumentan fuertemente cerca de esquinas afiladas. El número de esquinas que la onda se encuentra por unidad de longitud es mayor en $\theta = 90^\circ$ que para $\theta = 0^\circ$. Otro factor importante, es que la C_{eff} aparece en el denominador de la ecuación (4.33). En la Figura (4.9-(a)), se puede observar cómo la velocidad del sonido es mucho menor para $\theta = 90^\circ$. Este resultado está en concordancia con lo reportado en la referencia [46], donde puede observarse cómo la mayor inercia se encuentra a lo largo de la región donde $\theta = 90^\circ$, que de acuerdo a la fórmula de la velocidad del sonido, corresponde a

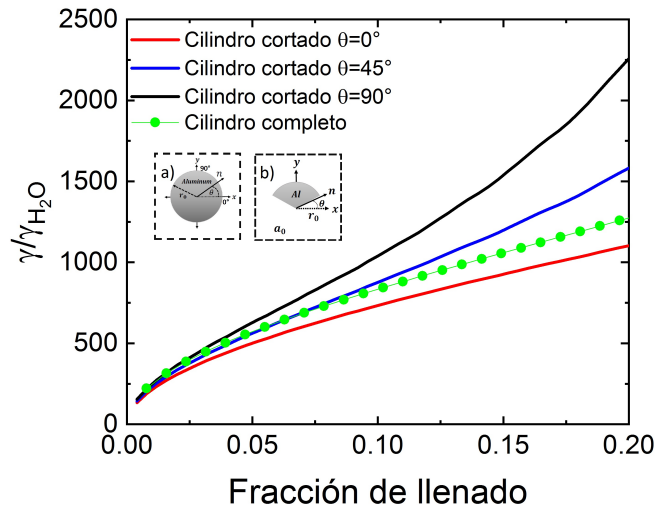
una velocidad inferior en esa dirección.

Por otro lado, la disipación siempre disminuye la propagación del sonido. Esto puede ser visto en la Figura (4.9-(a)), donde la velocidad es menor cuando tenemos también una disipación mayor. También, al comparar la curva de $\theta = 0^\circ$ contra la de $\theta = 45^\circ$, se puede ver que la disipación es poca, por lo tanto, la diferencia entre la velocidad calculada a partir de nuestra ecuación, que contempla un fluido sin viscosidad, y las de COMSOL, que contemplan los parámetros del agua, son relativamente pequeñas. No obstante, cuando tenemos mayor disipación para la dirección de $\theta = 90^\circ$, tenemos una reducción notable en la velocidad del sonido, por lo que las curvas negras correspondientes a este caso, divergen linealmente conforme se aumenta la fracción de llenado, es decir, la corrección a la ley de dispersión causada por la disipación es proporcional a f . Es bien sabido que una perturbación puramente imaginaria al Hamiltoniano conduce a una corrección cuadrática en la ley de dispersión. No obstante en este caso tenemos un crecimiento acorde a $\sim f$.

Ahora, analicemos un caso donde tenemos una anisotropía aún más elevada, es decir, un dispersor aún menos simétrico, como el de la Figura (4.3).



(a) Velocidad del sonido



(b) Coeficiente de decaimiento del sonido

Figura 4.10: (a) Velocidad del sonido en [m/s] dada por la ecuación (4.37); (b) Coeficiente de decaimiento normalizado del sonido dado por la ecuación (4.33), como función de la fracción de llenado. En ambas figuras se muestran resultados para una red cuadrada pero para dos distintos dispersores: uno simétrico, recuadro superior (a) y otro asimétrico, recuadro superior (b). El dispersor simétrico corresponde a un cilindro completo y el asimétrico a un sólido de sección circular de 120° para el cual se toman en cuenta tres direcciones de propagación para analizar la anisotropía de pérdidas. En los recuadros superiores \mathbf{n} corresponde a la dirección de propagación determinada por el ángulo θ .

La Figura (4.10) muestra la velocidad del sonido y el coeficiente de decaimiento de un cristal fonónico de red cuadrada y dispersores cilíndricos tanto completos como incompletos. En ambos casos, el parámetro de red es $a_0 = 5.5$ mm. En el caso del cilindro incompleto las pérdidas viscosas mínimas son obtenidas para la dirección de simetría de espejo ($\theta = 0^\circ$). A lo largo de la dirección con rompimiento de simetría de espejo ($\theta = 90^\circ$) las pérdidas son mayores. Un arreglo de estos cilindros en un fluido viscoso es un sistema con rompimiento de simetría PT que exhibe una transmisión no recíproca [35]. Al igual que el caso anterior del dispersor rectangular, las direcciones de propagación con menor disipación están en concordancia con las velocidades más elevadas. Por otro lado, algo sumamente interesante surge al querer comparar el cilindro completo contra el cilindro incompleto. Para $f < 0.2$, el cristal fonónico con dispersores asimétricos tiene una dirección donde presenta menos disipación que su homólogo con dispersores simétricos y otra con mayor disipación. Esto abre un camino para el diseño de metamateriales con anisotropía de pérdidas totalmente configurable según la aplicación. Sin embargo, no hay que olvidar que en la Figura (4.10) sólo se muestran los resultados hasta una $f_{max} \approx 0.2$ que corresponden al caso de dispersores asimétricos. La f_{max} para el sistema de cilindros completos es $f_{max} \approx 0.77$, donde las pérdidas superan bastante a las alcanzadas por el cristal de cilindros cortados debido a los efectos mencionados anteriormente en el análisis del sistema con dispersores rectangulares.

Volviendo al caso de los cilindros incompletos, la no reciprocidad surge debido a que la absorción del sonido es diferente en la dirección opuesta a lo largo del eje y en el dispersor asimétrico. No obstante, la ecuación (4.33) es simétrica, es decir, $\gamma_{ph}(\mathbf{n}) = \gamma_{ph}(-\mathbf{n})$. Esto es debido a que la ecuación es calculada en la aproximación más baja en la viscosidad. De la misma forma, la distribución de velocidades es calculada en la aproximación del fluido sin viscosidad, la cual tiene reversibilidad temporal y es recíproca. La no reciprocidad en $\gamma_{ph}(\mathbf{n})$ aparece en la siguiente aproximación sobre η

en la distribución de velocidades. Esto explicaría la no reciprocidad observada en la referencia [35] para el sistema con $f \approx 0.17$. La reciprocidad observada en la ecuación (4.33) también se puede observar en concordancia con la propiedad general de la matriz de dispersión en la aproximación de Born [50].

Por otro lado, retomando el trabajo de la referencia [42] donde ya había sido reportada la anisotropía de pérdidas años antes, podemos observar cómo la mayor cantidad de pérdidas se concentran en la dirección de propagación paralela a las multicapas. En esa estructura multicapas de sólido-fluido, sus resultados son explicados por la formación de capas viscosas en las fronteras cuando el sonido se propaga paralelo a las multicapas. Además, en ese trabajo, se observa cómo para la propagación perpendicular la disipación sólo ocurre debido al fluido en bulto, por lo que $\gamma_{ph} \sim \omega^2$.

Como hemos dicho antes, en el agua pura las pérdidas viscosas van como la frecuencia al cuadrado, $\gamma_0 \sim \omega^2$. En un cristal fonónico las pérdidas viscosas van como la raíz cuadrada de la frecuencia, $\gamma_{ph} \sim \sqrt{\omega}$. A la frecuencia $\omega^* \sim (c^2/a)^{2/3}(f\rho/\eta)^{1/3}$ las pérdidas por viscosidad en las fronteras sólido-líquido son comparables con las del bulto. Para un cristal fonónico con $a_0 = 5.5$ mm y $f = 0.5$ embebido en agua esta frecuencia corresponde a 1MHz. Por supuesto, a tal frecuencia el cristal fonónico no puede ser considerado como un medio homogéneo, por lo tanto la fórmula ω^* es solo a una estimación burda.

Por otro lado, cualquier no homogeneidad en la circunferencia, como golpes, muescas o ángulos produce fuertes gradientes en la distribución de velocidades del fluido que aumentarán las pérdidas viscosas. Pérdidas elevadas limitan fuertemente la observación de resonancias conduciendo a una densidad de masa efectiva y/o módulo de elasticidad negativos. Recientemente, la consideración de pérdidas visco-térmicas en estructuras elásticas viscosas ha sido estudiado de forma experimental en las referencias [39],[51]-[52]. En estos trabajos fue demostrado que las pérdidas disipativas afectan fuertemente

la transmisión del sonido y no permiten la observación de algunos efectos predichos en la aproximación de medio sin viscosidad. En particular, la refracción negativa predicha para estructuras periódicas 2D en el límite sin pérdidas [53] y transmisión resonante a través de un arreglo de rendijas estrechas [40] son suprimidas por el amortiguamiento termoviscoso. Por otro lado, pérdidas viscosas proporcionan nuevas propiedades a los metamateriales acústicos que pueden ser de gran aplicación si se usan adecuadamente.

Capítulo 5

Metamaterial acústico 1D

5.1. Pérdidas en un medio heterogéneo o medio efectivo 1D: Superred

Análogamente al desarrollo mostrado en la sección anterior, decidimos hacer un segundo desarrollo ahora para un cristal fonónico o metamaterial construido por capas de sólido-líquido, como el mostrado en la Figura (5.1). Para este sistema, también fue necesario trabajar con la ecuación (2.22), no obstante, en este caso en la dirección

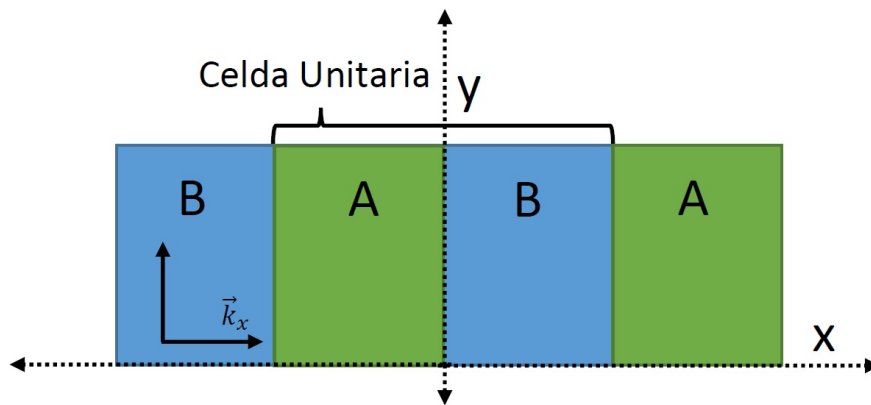


Figura 5.1: Esquema de supercelda compuesta por material AB.

a lo largo del eje y tenemos una longitud infinita, por lo que no es posible usar la ecuación (24.14) de Landau-Lifshitz [16]. Es decir, ahora la viscosidad efectiva, no será mayormente producida por las capas viscosas en la frontera sólido-líquido. Es por eso que utilizando la ecuación de Navier-Stokes, buscamos una solución analítica para la misma que fuese válida para este sistema.

Tomando las derivadas en la ecuaciones (2.24), y posteriormente una solución tipo onda plana, podemos reescribir la ecuación a solucionar de la siguiente manera:

$$\omega^2 \rho v_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = i\omega \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] + i\omega \xi \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.1)$$

Considerando una solución de onda plana, se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera.

$$(\omega^2 + i\omega\nu k^2) \mathbf{A} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})(c^2 - \frac{1}{3}i\omega\nu - i\omega\chi) \mathbf{k}, \quad (5.2)$$

donde, $c^2 = \lambda/\rho$, $\nu = \eta/\rho$ and $\chi = \xi/\rho$.

La ecuación (5.2) tiene dos polarizaciones, una longitudinal que corresponde a $\mathbf{A}_{\parallel} \cdot \mathbf{k} = A_{\parallel} k_l$ y una transversal correspondiente a $\mathbf{A}_{\perp} \cdot \mathbf{k} = 0$. La primera nos lleva a que

$$k_l^2 = \frac{\omega}{c^2 - i\omega(\frac{4}{3}\nu + \chi)}, \quad (5.3)$$

y la segunda a que

$$k_t^2 = \frac{i\omega}{\nu}. \quad (5.4)$$

Sin embargo, hay que considerar que tenemos una onda heterogénea, es decir, que tenemos un vector de onda complejo $\mathbf{k} = k' \mathbf{n} + ik'' \mathbf{a}$, donde \mathbf{n} es el vector de propagación y \mathbf{a} el vector de atenuación. Posterior a esta consideración, se encuentran las

componentes del vector de onda heterogéneo de forma explícita, para posteriormente encontrar las componentes longitudinal y transversal para el medio con disipación.

Después de un procedimiento algebraico extenso, se llegó a que la componente longitudinal, $\mathbf{k}_l = k'\mathbf{n} + ik''\mathbf{a}$, puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_l &= \frac{\omega}{c} \left[\mathbf{n} + i \frac{\omega \left(\frac{4}{3} \nu + \chi \right)}{2c^2 \cos(\gamma)} \mathbf{a} \right] \\ &= \frac{\omega}{c} (\mathbf{n} + i b \mathbf{a}),\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde:

$$b = \frac{\omega \left(\frac{4}{3} \nu + \chi \right)}{2c^2 \cos(\gamma)} \ll 1.\tag{5.6}$$

Por lo tanto, podemos obtener la polarización para el modo longitudinal, $\mathbf{A}_l = A(\mathbf{n} + i b \mathbf{a})$, y por consiguiente, la expresión final para la velocidad longitudinal:

$$\mathbf{v}_l(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} + i b \mathbf{a}) [A e^{k'_l(i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - b\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})} + B e^{-k'_l(i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - b\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}].\tag{5.7}$$

Ahora se realizó un procedimiento similar para obtener la contribución transversal, pero en este caso, se consideró que la onda transversal se atenúa fuertemente en el líquido con viscosidad. Esta consideración implica hacer la parte real k' como la imaginaria k'' tender a cero, lo cual nos lleva a un conjunto de ecuaciones para dichas componentes distintas a las encontradas en el caso longitudinal. Ahora, contemplando la ecuación (5.4), se llega a que la componente transversal es:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\mathbf{n} + i \mathbf{a}}{\delta \sqrt{\cos(\gamma)}}\tag{5.8}$$

donde $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ es la profundidad de penetración de la onda transversal.

Por otro lado, para la amplitud de polarización transversal, $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}'_t + i\mathbf{A}''_t$, tenemos

dos posibles orientaciones que satisfacen $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{A}_t = (\mathbf{A}'_t + i\mathbf{A}''_t) \cdot (\mathbf{n} + i\mathbf{b}) = 0$, como se muestra en la Figura (5.2):

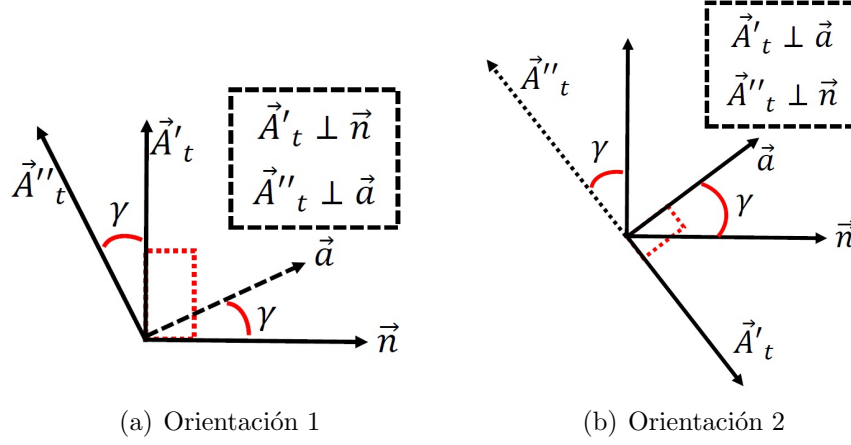


Figura 5.2: Dos posibles orientaciones para onda transversal.

$$\mathbf{A}_{t_1} = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n} + i\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a})A_1 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{A}_{t_1} = (-\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n} + i\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a})A_2, \quad (5.10)$$

donde, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$ y $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$.

Considerando las dos polarizaciones, en la ecuación (5.8), llegamos a una expresión para la velocidad transversal:

$$\mathbf{u}_{t_{1,2}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n} + i\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a} \\ -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n} + i\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a} \end{bmatrix} [C_{1,2}e^{\left(\frac{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\delta\sqrt{\cos(\gamma)}} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\delta\sqrt{\cos(\gamma)}}\right)} + D_{1,2}e^{\left(\frac{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\delta\sqrt{\cos(\gamma)}} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\delta\sqrt{\cos(\gamma)}}\right)}]. \quad (5.11)$$

5.1.1. Generalización de la ley de Snell

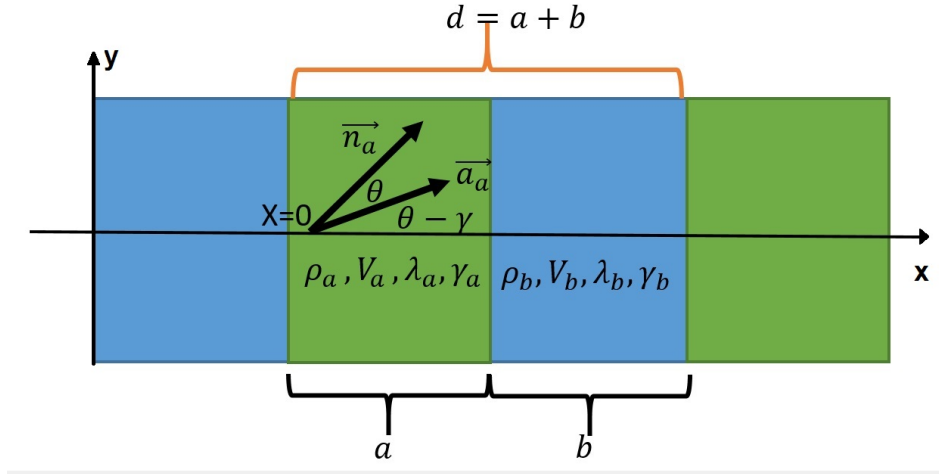


Figura 5.3: Esquema vectorial de la supercelda

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_a &= (\cos \theta_a, \sin \theta_a, 0), & \mathbf{a}_a &= (\cos(\theta_a - \gamma_a), \sin(\theta_a - \gamma_a), 0) \\
 \mathbf{n}_b &= (\cos \theta_b, \sin \theta_b, 0), & \mathbf{a}_b &= (\cos(\theta_b - \gamma_b), \sin(\theta_b - \gamma_b), 0) \\
 k_a &= \frac{\omega}{c_a}, & k_b &= \frac{\omega}{c_b} \\
 b_a &= \frac{\omega(\frac{4}{3}\nu_a + \chi_a)}{2c_a^2 \cos \gamma_a}, & b_b &= \frac{\omega(\frac{4}{3}\nu_b + \chi_b)}{2c_b^2 \cos \gamma_b}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

En la Figura (5.3), en cualquier punto la velocidad total es una superposición del modo longitudinal y transversal, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{u}_t$. Ambos modos se propagan con diferentes velocidades con diferentes ángulos de refracción. Cada ángulo está marcado por dos índices: $\theta_{a_l}, \theta_{a_t}, \gamma_{a_l}, \gamma_{a_t}, \theta_{b_l}, \theta_{b_t}, \gamma_{b_l}, \gamma_{b_t}$.

Por otro lado, la conservación de la componente- y del vector de onda nos da la ley generalizada de Snell. Utilizando las expresiones de las ecuaciones (5.12), se llega a lo

siguiente:

$$\frac{\sin \theta_{a_l}}{\sin \theta_{b_l}} = \frac{c_a}{c_b}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\theta_{a_t}}{\theta_{b_t}} = \frac{\delta_a}{\delta_b}, \quad (5.14)$$

$$\frac{\sin(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l})}{\sin(\theta_{b_l} - \gamma_{b_l})} = \frac{c_a b_b}{c_b b_a}. \quad (5.15)$$

Una vez definidas estas expresiones de la ley Generalizada de Snell, se pueden escribir las expresiones explícitas para la velocidad en cada medio:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(x, y) = & (\mathbf{n}_{a_l} + i b_a \mathbf{a}_{a_l}) [A_1 e^{x \frac{\omega}{c_a} (i \cos(\theta_{a_l}) - b_a \cos(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))} \\ & + B_1 e^{-x \frac{\omega}{c_a} (i \cos(\theta_{a_l}) - b_a \cos(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))}] e^{y \frac{\omega}{c_a} (i \sin(\theta_{a_l}) - b_a \sin(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{u}_a(x, y) = (1 + i) \hat{y} [C_1 e^{x \frac{i-1}{\delta_a}} + D_1 e^{-x \frac{i-1}{\delta_a}}] e^{y \frac{\omega}{c_a} (i \sin(\theta_{a_l}) - b_a \sin(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b(x, y) = & (\mathbf{n}_{b_l} + i b_b \mathbf{a}_{b_l}) [A_2 e^{x \frac{\omega}{c_b} (i \cos(\theta_{b_l}) - b_b \cos(\theta_{b_l} - \gamma_{b_l}))} \\ & + B_2 e^{-x \frac{\omega}{c_b} (i \cos(\theta_{b_l}) - b_b \cos(\theta_{b_l} - \gamma_{b_l}))}] e^{y \frac{\omega}{c_a} (i \sin(\theta_{a_l}) - b_a \sin(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{u}_b(x, y) = (1 + i) \hat{y} [C_2 e^{x \frac{i-1}{\delta_b}} + D_2 e^{-x \frac{i-1}{\delta_b}}] e^{y \frac{\omega}{c_a} (i \sin(\theta_{a_l}) - b_a \sin(\theta_{a_l} - \gamma_{a_l}))} \quad (5.19)$$

Por otro lado, hay que recordar que la condición más importante de la superred, es que la celda unitaria se repite de forma periódica, por lo que con ayuda del teorema de Bloch, es posible escribir las condiciones de frontera en las interfaces sólido-líquido. Dichas condiciones de frontera deben considerar continuidad tanto de las componentes del tensor de estrés como de las velocidades. Las condiciones de frontera que dependen explícitamente de las velocidades en cada medio, se resumen a continuación.

$$v_{a_x}(x = a, y) + u_{a_x}(x = a, y) = v_{b_x}(x = a, y) + u_{b_x}(x = a, y) \quad (5.20)$$

$$v_{b_x}(x = d, y) + u_{b_x}(x = d, y) = e^{ikd}v_{a_x}(x = 0, y) + u_{a_x}(x = 0, y) \quad (5.21)$$

$$v_{a_y}(x = a, y) + u_{a_y}(x = a, y) = v_{b_y}(x = a, y) + u_{b_y}(x = a, y) \quad (5.22)$$

$$v_{b_y}(x = d, y) + u_{b_y}(x = d, y) = e^{ikd}v_{a_y}(x = 0, y) + u_{a_y}(x = 0, y) \quad (5.23)$$

$$\sigma_{xx}^{(a)}(x = a, y) = \sigma_{xx}^{(b)}(x = a, y) \quad (5.24)$$

$$\sigma_{xx}^{(b)}(x = d, y) = e^{ikd}\sigma_{xx}^{(a)}(x = 0, y) \quad (5.25)$$

$$\sigma_{xy}^{(a)}(x = a, y) = \sigma_{xy}^{(b)}(x = a, y) \quad (5.26)$$

$$\sigma_{xy}^{(b)}(x = d, y) = e^{ikd}\sigma_{xy}^{(a)}(x = 0, y) \quad (5.27)$$

Donde tenemos que recordar que cada velocidad es la suma del modo longitudinal y transversal, y el tensor de estrés está definido como:

$$\sigma_{ik} = \left(-\frac{\lambda}{i\omega} - \frac{2}{3}\eta + \xi\right)\delta_{ik}\nabla \cdot \mathbf{v} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \quad (5.28)$$

El paso final consiste en el cálculo del determinante del conjunto de ecuaciones anterior, el cual nos llevará a la relación de dispersión general para la superred metamaterial. Sin embargo, el cálculo de dicho determinante es muy complicado aún utilizando recursos computacionales. No obstante, una forma de reducir bastante el trabajo analítico, es considerar el caso cuando tenemos incidencia normal. Bajo esa consideración se reduce la cantidad de términos en la relación de dispersión final.

Una vez explorada esta propuesta, el siguiente paso contempla obtener el módulo de compresibilidad, densidad de masa y el coeficiente de decaimiento del sonido.

Capítulo 6

Conclusiones generales y perspectivas

6.1. Conclusiones

Se ha desarrollado una teoría microscópica del decaimiento del sonido debido a pérdidas viscosas en un cristal fonónico de cilindros rígidos embebidos en un fluido viscoso. Dicha teoría es válida para una red de Bravais 2D arbitraria y para cilindros rígidos con cualquier geometría en su sección transversal.

Se derivó un resultado analítico para el coeficiente de decaimiento de una onda de sonido en el límite de bajas frecuencias cuando el cristal fonónico se comporta como un fluido homogéneo. Dicho fluido homogéneo exhibe anisotropía en las pérdidas viscosas cuando se tienen un dispersor asimétrico dentro de sus constituyentes internos. Además, el nivel de anisotropía y el coeficiente de decaimiento crecen rápidamente conforme aumenta la fracción de llenado.

La formación de capas viscosas en las fronteras entre sólido-líquido conduce a un aumento en las pérdidas viscosas por 2-4 órdenes de magnitud comparado con agua

pura.

La comparación contra resultados numéricos de COMSOL muestran una buena correspondencia para cristales fonónicos con un contraste acústico elevado entre sus constituyentes. Además, se puede observar que el coeficiente de decaimiento se reduce drásticamente cuando el contraste acústico es menor.

La propiedad efectiva más importante que mostramos en este trabajo es el coeficiente de decaimiento viscoso, el cual depende de la $\sqrt{\omega}$ en un metamaterial acústico 2D compuesto de sólidos rígidos inmersos en una matriz de agua. Este coeficiente de decaimiento difiere considerablemente al de un medio homogéneo compuesto únicamente por fluido, en donde la viscosidad va como ω^2 . Además, el coeficiente de decaimiento en el cristal fonónico es proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de viscosidad de corte, a diferencia de la conocida dependencia lineal en los fluidos en bulto.

Nuestros resultados muestran cómo es posible obtener propiedades físicas efectivas en un cristal fonónico completamente distintas a las que poseen sus constituyentes individuales. Esto convierte a dicho cristal fonónico en un metamaterial acústico.

Por otro lado, hemos desarrollado un segundo modelo de homogeneización complementario para estructuras multicapas de sólido-fluido 1D, donde hemos encontrado expresiones que dependen de los coeficientes de viscosidad del fluido .

Finalmente es importante recalcar cómo es posible aumentar las pérdidas agregando componentes sólidos dentro de matrices de agua. Esto se debe a que se produce un alto contraste en las fronteras líquido-sólido generando capas en la frontera con viscosidad elevada y con altos gradientes de velocidad. Así se concluye que la presencia de múltiples dispersores, aumentará aún más la disipación que en el caso de que se tuviese un sólo dispersor.

6.2. Perspectivas

Nuestra investigación abre la puerta al análisis físico de las pérdidas presentes en distintos tipos de metamateriales acústicos que hasta la fecha habían sido estudiados únicamente de forma experimental, con simulaciones numéricas o con métodos analíticos que no tomaban en cuenta la contribución de todos los dispersores en la disipación. Los modelos propuestos antes del nuestro habían sólo logrado describir el coeficiente de decaimiento viscoso de sistemas sólido-líquido compuestos por un solo dispersor. Con nuestro trabajo ya es posible calcular la viscosidad efectiva de sistemas compuestos por múltiples dispersores.

Con nuestra teoría de homogeneización, podremos pensar extender nuestra investigación contemplando la temperatura en nuestras expresiones para desarrollar otro modelo complementario que tome en cuenta las pérdidas termoviscosas. Un segundo enfoque para trabajar a futuro además del ya mencionado, puede ser tratar de encontrar efectos de pérdidas ocasionados por las irregularidades en las paredes de los dispersores sólidos y analizar efectos de localización.

Por otro lado, una variación o control de la anisotropía de pérdidas abre un camino para la ingeniería y creación de dispositivos que aprovechen esta propiedad como es el caso del cloaking hidrodinámico.

Referencias

- [1] Steven A. Cummer, et al. Controlling sound with acoustic metamaterials, *Nature Reviews Materials* **1**, pp. 16001 (2016).
- [2] Veselago V. G., The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ε and μ , *Soviet Physics Uspekhi*, **10**, pp. 509, (1964).
- [3] Pendry J.B., Negative refraction, *Contemporary Physics* **45**, pp. 191-202, (2016).
- [4] D. R. Smith et al. Composite Medium with Simultaneously Negative and Permeability and Permittivity, *Physical Review Letters* **84**, pp. 4184- 4187 (2000).
- [5] Pekka Alitalo and Sergei Tretyakov, Electromagnetic cloaking with metamaterials, *Materials Today* **12**, pp. 22-29, (2009).
- [6] Jensen Li and C.T. Chan, Double-negative acoustic metamaterial, *Physical Review E* **70**, pp. 055602 (2004).
- [7] Alexander Poddubny et al. Hyperbolic metamaterials, *Nature Photonics*, **7**, pp. 958, (2013).
- [8] Prashant Shekhar, Jonathan Atkinson and Zubin Jacob, Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada, AB T6G 2V4.

- [9] Alexander V. Kildishev et al. Planar Photonics with Metasurfaces, *Science*, **339**, pp. 1232009, (2013).
- [10] Johan Christensen and F. Javier García de Abajo, Anisotropic Metamaterials for Full Control of Acoustic Waves, *Physical Review Letters* **108**, pp. 124301 (2012).
- [11] Victor M. García-Chocano et al. Negative Refraction and Energy Funneling by Hyperbolic Materials: An Experimental Demonstration in Acoustics, *Physical Review Letters* **112**, pp. 144301 (2014).
- [12] Johan Christensen and F. Javier García de Abajo, Negative refraction and backward waves in layered acoustic metamaterials, *Physical Review B* **86**, pp. 024301 (2012).
- [13] Chen Shen, Yangbo Xie, et al. Broadband Acoustic Hyperbolic Metamaterial, *Physical Review Letters* **115**, pp. 254301 (2015).
- [14] A. A. Krokhin, J. Arriaga, L. N. Gumen and V. P. Drachev, High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials, *Physical Review B* **93**, pp. 075418 (2016).
- [15] Edgar Reyes-Ayona, Daniel Torrent, and José Sánchez-Dehesa, Homogenization theory for periodic distributions of elastic cylinders embedded in a viscous fluid, *J. Acoust. Soc. Am.* **132** **4**, pp. 2896, (2012).
- [16] L.D. Landau, and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd Ed., (Elsevier, Oxford, 1984).
- [17] B.P. Konstantinov, Absorption of acoustic waves accompanying reflection from a solid boundary, *Zh. Tekh. Fiz.*, **9**, 226 (1939).

- [18] F. F. Legusha, The Konstantinov effect and sound absorption in inhomogeneous media, *Soviet Phys. Uspekhi* **27**, 887 (1984)
- [19] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin, *Acoustics of Layered Media I*, 2nd Ed., (Springer, 1998).
- [20] M. S. Kushawaha, P. Halevi and G. Martínez, Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites, *Physical Review B* **49**, pp. 2313-2322, (1994).
- [21] L. N. Gumen, J. Arriaga, and A. A. Krokhin, Metafluid with anisotropic dynamic mass, *Low Temperature Physics*, **37** (2011).
- [22] B. Zenteno-Mateo, V. Cerdán Ramírez and B. Flores-Desirena, Effective Permittivity tensor for a Metal-Dielectric Superlattice, *Progress In Electromagnetics Research Letters*, **22**, 165-174, (2011).
- [23] J A Reyes-Avendaño, M. Sampedro, E. Juárez-Ruiz and F. Pérez-Rodríguez, Bia-nisotropic metamaterials based on twisted asymmetric crosses, *J. Opt.* **16**, 065102 (2014).
- [24] J. Flores-Méndez and F. Pérez-Rodríguez, Metasolid with anisotropic mass density, *EPL*, **103**,54001 (2013).
- [25] V. Cerdán-Ramírez, B. Zenteno-Mateo, M. P. Sampedro, M. A. Palomino-Ovando, B. Flores-Desirena, and F. Pérez-Rodríguez, Anisotropy effects in homogenized magnetodielectric photonic crystals, *Journal of Applied Physics* **106**, 103520 (2009).
- [26] S. M. Rytov, *Electromagnetic Properties of a Finely Stratified Medium*, *Soviet Physics JETP* **2**, pp. 466-475, (1956).
- [27] I. S. Solís-Mora, M. A. Palomino-Ovando, and F. Pérez-Rodríguez, *Journal of Applied Physics* **113**, 093508 (2013)

- [28] J. Ramirez-Hernandez, F.M. Izrailev, N.M. Makarov, D.N. Christodoulides, PT-symmetric transport in non-PT-symmetric bi-layer optical arrays, *Journal of Optics* **18**, 09LT01 (2016).
- [29] L. N. Gumen, J. Arriaga, A. A. Krokhin, and V. P. Drachev, High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials, *Physical Review B* **93**, 075418 (2016).
- [30] Daniel Torrent and José Sánchez-Dehesa, Multiple scattering formulation of two-dimensional acoustic and electromagnetic metamaterials, *New Journal of Physics* **13**, 093018 (2011).
- [31] Johan Christensen¹ and F. Javier García de Abajo, Anisotropic Metamaterials for Full Control of Acoustic Waves, *Physical Review Letters* **108**, 124301 (2012)
- [32] Kittel, Charles (1996). *Introduction to Solid State Physics*. New York: Wiley.
- [33] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. N. Gumen, Speed of sound in periodic elastic composites, *Physical Review Letters* **91**, 264302 (2003).
- [34] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, Acoustic band structure of periodic elastic composites, *Physical Review Letters* **71**, 2022 (1993).
- [35] E. Walker, A. Neogi, A. Bozhko, Yu. Zubov, J. Arriaga, H. Heo, J. Ju, and A. A. Krokhin, Nonreciprocal linear transmission of sound in a viscous environment with broken P symmetry, *Physical Review Letters* **120**, 204501 (2018).
- [36] Arkadii Krokhin staff member of Universtiy of North Texas and Yurii Zubov PhD student in UNT.
- [37] M. Ibarias, Y. Zubov, J. Arriaga, A.A. Krokhin, Phononic crystal as a homogeneous viscous Metamaterial, *Physical Review Research* **2**, 022053 (2020).

- [38] Wen H. Lin, and A. C. Raptis, Acoustic scattering by elastic solid cylinders and spheres in viscous fluids, *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 736 (1983).
- [39] Miguel Molerón, Marc Serra-Garcia and Chiara Daraio, Visco-thermal effects in acoustic metamaterials: from total transmission to total reflection and high absorption, *New J. Phys.* 18 033003 (2016).
- [40] G.P. Ward, R.K. Lovelock, A.R.J. Murray, A.P. Hibbins, J.R. Sambles, and J.D. Smith, Boundary-layer effects on acoustic transmission through narrow slit cavities, *Physical Review Letters* **115**, 044302 (2015).
- [41] Alfonso Climente, Daniel Torrent, and José Sánchez-Dehesa, Omnidirectional broadband acoustic absorberbased on metamaterials, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 144103 (2012).
- [42] M. D. Guild, V. M. García-Chocano, W. Kan, and J., Sánchez-Dehesa, Acoustic metamaterial absorbers based on multilayered sonic crystals, *J. Appl. Phys.* **117**, 114902 (2015).
- [43] Daniel Torrent and José Sánchez-Dehesa, Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials, *New J. Phys.* 10, 023004 (2008).
- [44] Andrew N. Norris, Acoustic metafluids, *J. Acoust. Soc. Am.* 125, 839 (2009).
- [45] R. V. Craster, J. Kaplunov, and A. V. Pichugin, High-frequency homogenization for periodic media, *Proc. R. Soc. A* 466, 2341 (2010).
- [46] L.N. Gumen, J. Arriaga, and A.A. Krokhin, Metauid with anisotropic dynamic mass, *Low Temperature Physics* 37, 975 (2011).

- [47] Yurii Zubov, Bahram Djafari-Rouhani, and Arkadii Krokhin, Dynamical effective parameters of elastic superlattice with strong acoustic contrast between the constituents, *Low Temperature Physics* **44**, 1639 (2018).
- [48] L. Zigoneanu, B.I. Popa, A.F. Starr, and S.A. Cummer, Design and measurements of a broadband 2D acoustic metamaterial with anisotropic mass density, *J. Appl. Phys.* **109**, 054906 (2011).
- [49] Juhyuk Park, Jae Ryoum Youn, and Young Seok Song, Hydrodynamic metamaterial cloak for drag-free flow, *Physical Review Letters* **123**, 074502 (2019).
- [50] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford, (1977).
- [51] Xue Jiang, Yong Li, and Likun Zhang, Thermoviscous effects on sound transmission through a metasurface of hybrid resonances, *J. Acoust. Soc. Am.* **141**, EL363 (2017).
- [52] Vicente Cutanda Henríquez, Victor M. García-Chocano and Jossé Sánchez-Dehesa, Viscothermal losses in double-negative acoustic metamaterials, *Phys. Rev. Appl.* **8**, 014029 (2017).
- [53] R. Gracia-Salgado, V. García-Chocano, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa, Negative mass density and density-nearzero quasi-two-dimensional metamaterial: Design and applications, *Physical Review B* **88**, 224305 (2013).

Contribuciones

Phononic crystal as a homogeneous viscous metamaterial

M. Ibarias,¹ Yu. Zubov,² J. Arriaga,¹ and A. A. Krokhin^{2,*}¹Instituto de Física, Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, 72570, Puebla, México²Department of Physics, University of North Texas, P. O. Box 311427, Denton, Texas 76203, USA

(Received 16 September 2019; accepted 18 May 2020; published 8 June 2020)

A homogenization theory, representing the low-frequency limit, is developed for a phononic crystal of cylinders embedded in a viscous fluid. The decay coefficient of sound due to viscosity is calculated analytically for any two-dimensional Bravais lattice and cross section of the cylinders. It is shown that due to the formation of a viscous boundary layer around each cylinder, the losses are enhanced by two to three orders of magnitude as compared to the losses in the free fluid. Also, the decay coefficient in a phononic crystal scales with frequency as $\sqrt{\omega}$, unlike ω^2 scaling known for free viscous fluid. In the low-frequency limit a phononic crystal with asymmetric unit cell behaves like a dissipative homogeneous metafluid with anisotropic viscosity.

DOI: [10.1103/PhysRevResearch.2.022053](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.022053)

Introduction. Pressure in a plane sound wave propagating in a viscous homogeneous fluid decays exponentially with distance, $p(x) \sim e^{-\gamma_0 x}$. The decay coefficient $\gamma_0 = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} [\frac{4}{3}\eta + \xi]$ grows quadratically with frequency ω [1]. It depends on fluid density ρ , two viscosity coefficients η and ξ , and speed of sound c . The decay length of sound in water at the frequency of 50 kHz is $1/\gamma_0 \approx 15$ km. Such slow decay means that dissipative losses can be ignored in free water. However, they are strongly increased if sound wave meets a solid object on its way. Oscillating fluid sticks to solid boundaries, forming a narrow viscous layer of thickness $\delta = \sqrt{2\eta/(\omega\rho)}$ (so-called Stokes boundary layer) where velocity gradients greatly exceed the gradients in a free fluid, leading to much higher viscous losses. The effect of enhanced losses for reflection from a solid boundary was predicted by Konstantinov [2] (see also Ref. [3]). Viscous losses for reflection grow as $\sqrt{\omega}$ [1,4].

In a phononic crystal, the volume occupied by the viscous boundary layers formed around solid scatterers usually constitutes a small part of the volume of the whole sample. It, however, strongly reduces acoustic transmission. Almost 30% reduction of transmission through a metasurface was registered while the boundary layer was less than 3% of the metasurface thickness [5]. Strong absorption within the boundary layer not only reduces acoustic transmission but also affects the speed of sound, in spite of the fact that the principal part of the wave front propagates far away from the solid-fluid boundaries where fluid is practically inviscid [6]. While the fraction of viscous fluid in a phononic crystal is reduced by a factor $1 - f$ as compared to 100% in a free fluid (f is the filling factor of solid inclusions), a sound wave

decays much faster in phononic crystal due to the Konstantinov effect. In a phononic crystal designed for manipulation of sound, the decay coefficient γ_{ph} lies within the interval $\gamma_0 \ll \gamma_{\text{ph}} \ll 1/a_0$, where a_0 is the period of phononic crystal. The latter inequality allows perturbative treatment of the viscosity effects and calculation of γ_{ph} in the lowest approximation over ξ and η . In this approximation other effective parameters, like speed of sound, elastic modulus, etc, turn out to be viscosity-independent and coincide with their values obtained for the corresponding inviscid fluid [7]. Dependence on viscosity appears in the higher approximations over η .

In a steady flow of viscous fluid through a periodic arrangement of solid inclusions a traction of the fluid on each inclusion defines the effective steady-state viscosity. A rigorous theory was developed in Ref. [8]. It was shown there that in general case the effective velocity is a fourth-rank tensor. Numerical results obtained for three cubic lattices of spheres demonstrate that the effective viscosity grows with filling fraction f . For the values of f near close-packing the effective viscosity increases by order of magnitude as compared to the viscosity of the fluid. It will be shown here that fast oscillations of fluid in a sound wave give rise to much stronger increase of dynamic viscous losses.

A qualitative estimate for the decay coefficient γ_{ph} of sound in a periodic structure caused by viscous losses can be obtained from the well-known formula [1,4] for the relative energy loss at reflection of sound with wavelength $2\pi/k$ from a hard flat boundary, $\Delta E/E \sim \delta k/2\pi \sim c^{-1}\sqrt{\omega\eta/\rho}$. If sound propagates through a periodic lattice of cylindrical rods embedded in a viscous fluid, then the dissipation occurs within the boundary layer formed over each scatterer. If the circumference of the scatterer is L_0 , then the dissipative loss within a unit cell is $\Delta E/E \sim (\delta k/2\pi)(L_0/a_0) \sim (L_0/a_0c)\sqrt{\omega\eta/\rho}$. The decay coefficient is the energy loss per unit length, i.e.,

$$\gamma_{\text{ph}} = \frac{\Delta E}{a_0 E} \sim \frac{1}{ca_0} \sqrt{\frac{f\omega\eta}{\rho}}. \quad (1)$$

*arkady@unt.edu

Here $f \sim (L_0/a_0)^2$ is the filling fraction of hard scatterers in 2D lattice [9].

According to Eq. (1) the decay length of 50 kHz sound in a phononic crystal ($f \sim 0.5$) of hard scatterers in water is about $1/\gamma_{\text{ph}} \sim 200$ m, i.e., it is reduced by two orders of magnitude as compared to free water. Equation (1) does not take into account multiple scattering and possible interference and diffraction. Therefore Eq. (1) gives the attenuation coefficient for irregular structure consisting of single scatterers if the filling fraction f is not very small, $L_0 \sim a_0$. The problem of acoustic scattering at a single elastic cylinder in a viscous fluid environment was solved in Ref. [10]. The value of the attenuation coefficient at 50 kHz extracted from Fig. 8 of Ref. [10] is approximately 6×10^{-4} dB/cm. For free water it is 7×10^{-6} dB/cm, i.e., two orders of magnitude less. Thus, Eq. (1) estimates correctly the enhanced viscous losses in a phononic crystal in a simple case of isotropic lattice and non-interacting scatterers. Square-root scaling of the attenuation coefficient with frequency was measured for a periodic array of narrow slits in air [11]. The exact solution obtained in Ref. [10] and Eq. (1) confirm that dissipative losses within the viscous boundary layer significantly exceed the losses in the bulk of fluid and, therefore, the latter can be neglected. Here we develop an analytical approach, for exact calculations of the attenuation coefficient in a two-dimensional (2D) phononic crystal in the low-frequency limit. The exact results show that due to multiple scattering and particular shape of the cross section of the cylinders the dissipative losses get further enhancement. In a periodic structure the decay coefficient may exceed by one-two orders of magnitude the enhancement predicted by Eq. (1) and obtained in Ref. [10] for a single scatterer.

Dissipation of acoustic energy around a hard scatterer. Exact analytical results for γ_{ph} can be obtained in the low-frequency limit when the field of pressures and velocities produced by sound can be calculated explicitly. In the long-wavelength limit a phononic crystal behaves, in many cases, like a homogeneous medium with effective parameters. The effective parameters for different types of phononic crystals have been calculated in a series of recent publications [12–25]. Deformation of photonic and phononic crystal spectra and, in particular, the band-gap width under the influence of weak dissipation was studied in Refs. [26–30]. The dissipation was introduced phenomenologically by adding a frequency-dependent imaginary part to the dielectric or elastic coefficients.

In phononic crystals of solid-fluid constituents the dissipation of sound of frequencies less than 1 MHz occurs mainly in the viscous fluid. Viscous losses depend on the distribution of velocities in the fluid, which is very sensitive to the shape and mutual orientation of the scatterers. The velocities $v_i(\mathbf{r})$ generated in the fluid by a propagating sound wave are calculated from the Navier-Stokes equation. Then, the rate of dissipation of acoustic energy is obtained by integration of velocity gradients $(\partial v_i/\partial x_k)^2$ over the whole volume of occupied by viscous fluid [1]. In this microscopic approach the dissipative losses in the bulk and near the solid-fluid interfaces are correctly accounted for. Homogenization theory for phononic crystals of circular cylinders with low filling fraction in a viscous fluid was developed in Ref. [7]. It was shown that

in the lowest approximation the effective mass density and bulk modulus are independent of viscosity. However, viscosity strongly reduces the scattering cross section of a homogenized cluster of solid cylinders.

Here the decay coefficient γ_{ph} for a 2D phononic crystal is calculated in the low-frequency limit $\omega, k \rightarrow 0$. In this limit the dispersion of sound is linear, $\omega = c_{\text{eff}}k$. The effective speed of sound $c_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{k}})$ is obtained by calculating small (over $ka_0 \ll 1$) corrections originating due to weak modulation of the plane wave solution by periodic scatterers [13]. It is represented by infinite sum over the reciprocal lattice vectors \mathbf{G} . In general case, c_{eff} depends on the direction of propagation $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$.

Propagating sound waves generate vibrations of pressure $p(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ and velocity $\mathbf{v}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$. Within the boundary layer δ , velocity in a viscous fluid decays exponentially from its value in the bulk to zero at the interface of a motionless hard scatterer. The acoustic power (per unit length of a cylinder) dissipated around a hard scatterer is given by the following contour integral [1]:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\rho\omega\eta} \oint_{l_0} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 dl. \quad (2)$$

Integration runs over contour l_0 , which is the circumference of the scatterer. This formula is applied for calculation of dissipated power within a unit cell of 2D phononic crystal provided that viscous losses in the bulk, associated with viscosity coefficient ξ , are neglected. It is valid if the interface can be considered as flat within the lengths $\sim \delta$, i.e., $\delta \ll L_0$, where L_0 is the length of the contour l_0 that separates fluid from solid. This inequality, together with the condition of homogenization, $ka_0 \ll 1$, defines the frequency interval where the proposed theory is valid,

$$\frac{\eta}{\rho L_0^2} \ll \omega \ll \frac{c_{\text{eff}}}{a_0}. \quad (3)$$

For solid rods with $L_0 \geq 1$ mm in water environment ($\eta = 0.01$ g/cm s) this inequality is satisfied starting from frequency ~ 1 Hz. Since $\dot{Q} \propto \sqrt{\eta}$, and keeping in mind the lowest approximation over viscosity η , the integrand $\mathbf{v}^2(\mathbf{r})$ can be calculated for ideal (inviscid) fluid. The energy losses due to temperature oscillations are omitted in Eq. (2) since for liquids like water they are negligible.

The decay coefficient for a wave propagating in a homogeneous dissipative medium is given by the ratio

$$\gamma_{\text{ph}} = \frac{\dot{Q}}{2c_{\text{eff}}E_c}. \quad (4)$$

For the case of a homogenized phononic crystal E_c is the acoustic energy within the unit cell

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{A_c} \rho(\mathbf{r})|\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 da \approx \frac{\rho}{2} \int_{A_f} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 da. \quad (5)$$

The first integral in Eq. (5) is taken over the unit cell $A_c = A_s + A_f$, containing the areas $A_s = fA_c$ and $A_f = (1-f)A_c$ occupied by solid and fluid, respectively. In the second integral the contribution of solid is neglected since Eq. (2) is already written in the approximation of hard scatterer. In what follows, we assume that the conditions of high acoustic

contrast are satisfied [31],

$$\lambda_s \gg \lambda, \quad \rho_s \gg \rho. \quad (6)$$

Here λ (λ_s) and ρ (ρ_s) are the elastic modulus and density of the fluid (solid cylinder).

Pressure and velocity distributions in the low-frequency limit. Pressure $p(\mathbf{r})$ [and velocity $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla p(\mathbf{r})/i\omega\rho(\mathbf{r})$] in a periodic system is represented by a Bloch wave

$$p(\mathbf{r}) = p_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G} \neq 0} p_k(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}. \quad (7)$$

In the limit $\omega, k \rightarrow 0$ the first term is a homogenized plane wave of amplitude p_0 and the sum over \mathbf{G} is a linear over ω (and k) correction due to weak modulation by a periodic set of scatterers. The set of linear equations for the Fourier components $p_k(\mathbf{G})$ follows from the wave equation for pressure in an inhomogeneous elastic medium [32]. In zero approximation over viscosity the set is written as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{G}'} v(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}') p_k(\mathbf{G}') \\ = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') p_k(\mathbf{G}'). \end{aligned} \quad (8)$$

Here $v(\mathbf{G})$ and $\beta(\mathbf{G})$ are the Fourier coefficients of the periodic function $1/\rho(\mathbf{r})$ and $1/\lambda(\mathbf{r})$. In the limit $\omega, k \rightarrow 0$ one obtains from Eq. (8) the following result for $p_k(\mathbf{G})$ [13]:

$$p_k(\mathbf{G}) = -p_0 \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{G}') v(\mathbf{G}') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}'). \quad (9)$$

Here $I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = [\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' v(\mathbf{G} - \mathbf{G}')]^{-1}$ implies inversion of the matrix which has the following elements:

$$\begin{aligned} (\rho_s^{-1} - \rho^{-1}) \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' F(\mathbf{G} - \mathbf{G}'), & \quad \mathbf{G} \neq \mathbf{G}', \\ \left(\frac{f}{\rho_s} + \frac{1-f}{\rho} \right) G^2, & \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}'. \end{aligned} \quad (10)$$

Substitution of Eq. (9) into Eq. (7) gives the distribution of pressure $p(\mathbf{r})$. Then the distribution of velocity $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla p(\mathbf{r})/i\omega\rho(\mathbf{r})$ can be easily calculated

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \left[\frac{p_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}}}{c_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{k}})} + \frac{1}{\omega} \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{G} p_k(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \right]. \quad (11)$$

Here $c_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{k}}) = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega/k)$ is the speed of low-frequency sound calculated in Ref. [13]

$$\begin{aligned} c_{\text{eff}}^2(\hat{\mathbf{k}}) \\ = \frac{1}{\bar{\beta}} \left[\bar{v} - \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}' \neq 0} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}') v(\mathbf{G}) v(-\mathbf{G}') I(\mathbf{G}', \mathbf{G}) \right], \\ \bar{v} = \frac{f}{\rho_s} + \frac{1-f}{\rho}, \quad \bar{\beta} = \frac{f}{\lambda_s} + \frac{1-f}{\lambda}. \end{aligned} \quad (12)$$

Note that while this result is obtained in the low-frequency limit, the periodicity of the structure is strongly manifested through the sums over the reciprocal-lattice vectors \mathbf{G} . Application of Eq. (12) to a medium without periodicity (a set of disordered scatterers or porous medium) is not justified and may lead to essential error.

Distributions of pressure and velocity given by Eqs. (7) and (11) calculated in the low-frequency limit are principally different. Pressure, being a continuous function at the fluid-solid interface, is reduced to a plane wave with wavelength $2\pi/k \gg a_0$ weakly modulated by a function having the period of the lattice, Eqs. (7) and (9). Unlike this, the velocity (11) does not homogenize. Both terms in Eq. (11) exhibit periodicity of the lattice. Since the velocity distribution is calculated for inviscid fluid its tangential component does not match the velocity of vibrating solid inclusion. The discontinuity of the tangential component of $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ does not allow homogenization of velocity as a vector. At the same time, exactly this discontinuous component which does not vanish at the fluid-solid boundary gives the contribution to the the integral (2). The continuous normal component becomes negligible at the boundary, provided the condition of high acoustic contrast (6) is satisfied. Note, that in a viscous fluid, the vector of velocity homogenizes due to a no-slip boundary condition.

Homogenization of pressure occurs for any elastic material of the cylinders with density ρ_s except $\rho_s = \infty$. Sound waves do not penetrate in a material with infinite density. Therefore, $p(\mathbf{r}) = 0$ inside or on the surface of hard scatterers. At the same time for any point in the fluid pressure remains constant, $p(\mathbf{r}) \approx p_0$, if $k \rightarrow 0$. Thus, pressure suffers a discontinuous jump at each interface. Since the discontinuous jumps have the periodicity of the lattice, the Fourier coefficients $p_k(\mathbf{G})$ do not vanish in the limit $k \rightarrow 0$. According to Eq. (9) $p_k(\mathbf{G}) \sim k$. For this Fourier coefficients to remain finite at $k \rightarrow 0$ the matrix $I(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$ must be singular in the limit $\rho_s \rightarrow \infty$ [33]. To avoid singularity in numerical inversion of the matrix $[\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' v(\mathbf{G} - \mathbf{G}')]^{-1}$ the density ρ_s must significantly exceed ρ but remain finite. For any strong but finite acoustic contrast, the pressure is a continuous function allowing homogenization. However, the acoustic energy accumulated inside the solid cylinders can be neglected due to inequality (6).

Once the distribution of velocity is known from Eqs. (11) and (9), the dissipated power Eq. (2) and acoustic energy within the unit cell Eq. (5) can be calculated. Then the decay coefficient is obtained from Eq. (4). Simple but cumbersome calculations lead to the following result:

$$\gamma_{\text{ph}}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{L_0}{2A_c c_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{k}})} \sqrt{\frac{\omega\eta}{2\rho}} \frac{M(\hat{\mathbf{k}})}{N(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (13)$$

Here the quantities $M(\hat{\mathbf{k}})$ and $N(\hat{\mathbf{k}})$ are complicated functions of the form factors $F(\mathbf{G})$ and $L(\mathbf{G})$,

$$\begin{aligned} M(\hat{\mathbf{k}}) = 1 + \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} L^*(\mathbf{G})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}') F(\mathbf{G}') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \\ + \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_4} L^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3)(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}_2)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}_4) \\ \times F(\mathbf{G}_2) F(\mathbf{G}_4) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} N(\hat{\mathbf{k}}) = 1 - f - \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}' F^*(\mathbf{G}) F(\mathbf{G}') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \\ - \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_4} F^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3)(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}_2)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}_4) \\ \times F(\mathbf{G}_2) F(\mathbf{G}_4) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4). \end{aligned} \quad (15)$$

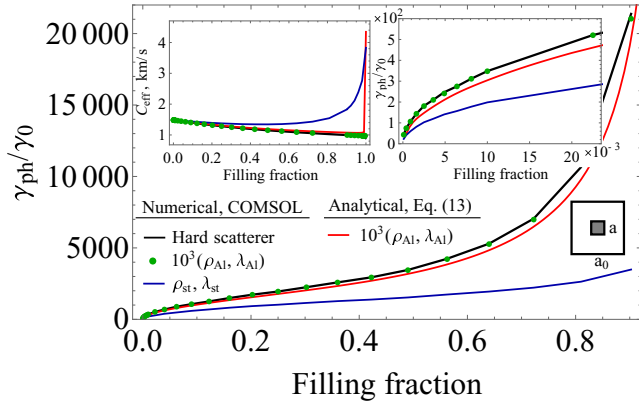


FIG. 1. Normalized decay coefficient of sound propagating in isotropic square lattice with square cross section of the cylinders in viscous water background as a function of filling fraction $f = (a/a_0)^2$, $a_0 = 5.5$ mm. Left inset: Speed of sound (in m/s) given by Eq. (12). Right inset: Blowup of the region of low f , where $\gamma_{\text{ph}} \sim \sqrt{f}$. The decay coefficient calculated from Eq. (13) with 2028 plane waves is shown by red curve. The parameters of the scatterers are selected to be 10^3 of those of aluminum: $\rho_s = 10^3 \times 2.7$ g/cm³, $\lambda_s = 10^3 \times 51$ GPa, and $c_s = \sqrt{\lambda_s/\rho_s} = 4346$ m/s. Numerical results obtained by COMSOL for the same elastic parameters are shown by green dots. Black line shows the results obtained by COMSOL for hard scatterers, i.e., applying the condition of zero velocity, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, for the cylinders. Blue curve is the decay coefficient of stainless steel calculated by COMSOL.

The linear form factor $L(\mathbf{G})$ is defined as the integral over the circumference of the solid scatterer,

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L_0} \oint_{l_0} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} dl. \quad (16)$$

The exact result (13) confirms the estimate (1) up to the dimensionless factor $M(\hat{\mathbf{k}})/N(\hat{\mathbf{k}})$. This factor takes into account the microstructure of the phononic crystal and the details of the formation of the boundary layer. It turns out that depending on geometry of the unit cell this numerical factor can be as big as ~ 10 – 10^3 . While the scaling of the decay coefficient (1) with ω and η is valid for a nonperiodic set of cylinders, the exact result (13) is applicable only for a periodic structure.

Decay coefficient for isotropic and anisotropic lattices. We apply the obtained results for phononic crystal with square lattice. If the scatterers have the same or higher symmetry, then this structure is isotropic in the long-wavelength limit. If, however, the scatterers are of lower symmetry, then the structure exhibits anisotropy. Two lattices with square and rectangular cross sections of the scatterers will be considered in this section.

The decay coefficient given by Eq. (13) is plotted in Fig. 1 versus filling fraction for a square lattice with a square cross section of the scatterers at frequency $\omega/2\pi = 50$ kHz, which is well below the fundamental band gap. The results obtained from Eq. (13) are compared to the decay coefficient numerically calculated by COMSOL. The decay coefficient γ_{ph} is obtained as imaginary part of the numerically calculated $k = k(\omega)$ for the lowest transmission band, assuming that ω is real. For this isotropic lattice γ_{ph} is independent of $\hat{\mathbf{k}}$.

Black line is obtained by COMSOL for the structure of cylinders in viscous water which do not vibrate under a passing sound wave (hard scatterers). The limit of hard scatterers is well-approximated by green dots obtained by COMSOL for an elastic material with $\rho_s = 10^3 \rho_{\text{Al}}$ and $\lambda_s = 10^3 \lambda_{\text{Al}}$. This hypothetical material possesses practically infinite acoustic impedance, $Z = 10^3 Z_{\text{Al}}$, i.e., it behaves like a hard scatterer. At the same time, speed of longitudinal sound in it is the same as for aluminum, $c_s = \sqrt{\lambda_s/\rho_s} = 4346$ m/s. Therefore, the effective speed of sound in the phononic crystal must approach 4346 m/s in the limit $f \rightarrow 1$. As seen in the left insert the effective speed of sound gradually decreases with f but near $f = 1$ there is a sharp turn toward the value of 4346 m/s (red curve). This sharp turn becomes a singularity in the limiting case of hard scatterers (black curve). The speed of sound and the decay coefficient calculated from Eq. (13) for the same material parameters (red curve) are close to the numerical result obtained by COMSOL. Right insert shows the region of low filling fractions. At $f \ll 1$, the decay coefficient grows fast. The square-root dependence, $\gamma_{\text{ph}} \sim \sqrt{f}$ predicted by Eq. (1) is reproduced. Since the numerical and analytical results obtained for phononic crystal of hard scatterers are in excellent agreement we may conclude that the approximations made in derivation of the decay coefficient (13) are justified.

If the condition of high acoustic contrast (6) is weakened, then the decay coefficient becomes smaller due to partial penetration of acoustic energy inside scatterers. Also near vibrating solid surface the gradients of velocity within the viscous boundary layer are reduced that leads to lower viscous dissipation. Blue curve in Fig. 1 represents COMSOL result obtained for stainless steel cylinders. For this structure the decay coefficient turns out to be essentially less than for hard scatterers. The ratio of impedances $Z_{\text{steel}}/Z_{\text{water}} \approx 30$ is not sufficiently large to justify hard scatterers approximation. The difference between the results obtained for hard scatterers (black curve in Fig. 1) and stainless steel scatterers (blue curve) strongly increases for $f > 0.8$. The spacings between the cylinders become narrow and in the case of hard scatterers sound propagates through narrow fluid channels. Strongly enhanced viscosity of *air* in narrow slits formed by aluminum plates was recently observed in Ref. [6]. Aluminum objects in air behave like hard scatterers since $Z_{\text{Al}}/Z_{\text{air}} \sim 10^4$. Therefore, the observed enhancement of thermoviscous dissipation of sound is of the same nature as fast grows of the decay coefficient shown in Fig. 1. This effect was explored in design of phononic black hole [34].

The proposed approach becomes invalid if the viscous boundary layers of two neighboring scatterers overlap. This occurs near $f = 1$. In water the thickness $\delta \approx 3$ micron at frequency 50 kHz. For the lattice in Fig. 1 with period $a_0 = 5.5$ mm the viscous layers overlap for $f > 0.98$. Within the region of fillings corresponding to practical applications of phononic crystals, $0.1 < f < 0.8$, the decay length of sound is reduced by 10^3 – 10^4 times as compared to that in free water.

It is known that phononic crystals with anisotropic unit cell behave like metafluids with anisotropic dynamic mass [18–22,35,36]. Viscosity, being a dynamical property also turns out to be anisotropic. Using Eq. (13) the parameters of a structure with desired anisotropy of viscous losses can be calculated. A metamaterial with anisotropic viscosity is

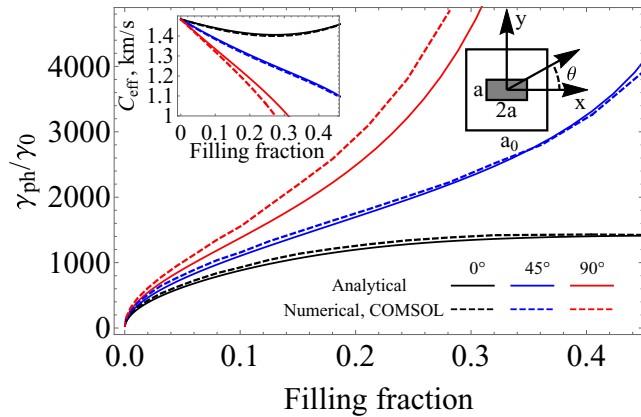


FIG. 2. The same as in Fig. 1 for a square lattice of anisotropic hard scatterers with rectangular cross section. The parameters of the scatterers are $10^3\rho_s$ and $10^3\lambda_s$. COMSOL results are in good agreement with the proposed theory for $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 45^\circ$. A noticeable difference for the direction $\theta = 90^\circ$ is explained by much higher dissipation.

necessary for engineering of a recently proposed hydrodynamic cloak [37]. Anisotropy of viscous losses was experimentally demonstrated in Refs. [36,38].

Figure 2 shows the decay coefficient calculated for phononic crystal with square unit cell and anisotropic scatterers. Each scatterer has a rectangular cross section with sides in the ratio 1:2, as shown in the insert. The decay coefficient is calculated using formula (13) (solid curves) at $\omega/2\pi = 50$ kHz and confirmed by numerical COMSOL simulations (dashed curves) for three directions of propagation. The results can be easily rescaled for other frequencies since in the region of homogenization $\gamma_{ph} \sim \sqrt{\omega}$.

Higher losses are obtained for sound wave propagating along the shorter side of the rectangle ($\theta = 90^\circ$). This result sounds counterintuitive since the longer viscous boundary layer is formed for sound propagating along the longer side ($\theta = 0^\circ$). However, the length of this layer is not the only factor. Local dissipation is defined by velocity gradients which strongly enhanced near sharp corners. The number of corners the wave meets per unit of length is larger for $\theta = 90^\circ$ than for $\theta = 0^\circ$. Another important factor is the effective speed of sound c_{eff} that appears in the denominator of Eq. (13). Left insert to Fig. 2 shows much lower speed of sound for $\theta = 90^\circ$. Slower sound is in line with previously reported [21,35] higher inertia along the direction $\theta = 90^\circ$. Note that for 1D layered system the factor of long viscous layers dominates and the factor of multiple corners along the sound path is absent. This leads to higher dissipation of sound propagating along the layers [36].

Dissipation always slows down propagation of sound. This can be seen in the insert to Fig. 2. For the directions of 0° and 45° the dissipation is low, therefore the difference in the speed of sound calculated from Eq. (12) for inviscid fluid and using COMSOL for viscous water is relatively small. However, dissipation is essentially increased for the direction of 90° that leads to noticeable reduction of the effective speed of sound. It can be seen that two red curves in the insert linearly diverge with filling fraction, i.e., the correction to the dispersion law

caused by dissipation is proportional to f . It is well known that *pure imaginary* perturbation to Hamiltonian leads to quadratic correction in the dispersion law (or to quadratic shift of energy levels in quantum system, while the broadening is linear). Since according to Eq. (1) the relative dissipative perturbation $\Delta E/E \sim \sqrt{f}$, the corresponding quadratic correction to the dispersion law grows linearly with f .

Calculated decay coefficient for the arrays of hard scatterers in Figs. 1 and 2 represents the maximum possible for a given lattice (and fluid viscosity) level of sound absorption. For the same structures of real solid scatterer the decay coefficient is lower due to vibration of the scatterers.

Viscous losses in free water grow quadratically with frequency, $\gamma_0 \sim \omega^2$. In phononic crystals, the losses grow as $\gamma_{ph} \sim \sqrt{\omega}$. At frequency $\omega^* \sim (c^2/a)^{2/3}(f\rho/\eta)^{1/3}$ viscous losses in the bulk and in the boundary layers become comparable. For a phononic crystal with $a_0 = 5.5$ mm and $f = 0.5$ embedded in water this frequency is about 1 MHz. Of course, at such high frequency the phononic crystal cannot be considered as a homogeneous medium, therefore the formula for ω^* is only a rough estimate.

Any inhomogeneities at the circumference of the scatterers, like bumps, indents, or angles produce strong gradients in distribution of fluid velocities that increase viscous losses. High losses strongly limit observation of resonances leading to negative effective mass and/or elastic modulus. Recently, the role of viscothermal losses in periodic elastic structures has been experimentally studied in Refs. [5,6,11,39]. It was demonstrated that losses do not allow observation of some effects predicted in the approximation of inviscid medium. In particular, negative refraction predicted for 2D periodic structure in the lossless limit [40] and resonant transmission through an array of narrow slits [6] are suppressed by thermoviscous damping. On the other hand, viscous losses bring new properties to acoustic metamaterials which can be useful if appropriately tailored and explored.

Conclusions. In conclusion, we have developed a microscopic theory of sound decay due to viscous losses in a phononic crystal of rigid cylinders embedded in viscous fluid. Analytic result is derived for the decay coefficient of sound propagating in the low-frequency limit when phononic crystal behaves like a homogeneous fluid. This homogeneous fluid exhibits anisotropic viscous losses if the unit cell is asymmetric. The level of anisotropy and decay coefficient grow fast with filling fraction. Formation of viscous boundary layers around solid cylinders leads to enhancement of viscous losses by two to four orders of magnitude as compared to free water. Analytical results are obtained for arbitrary 2D Bravais lattice with rigid cylinders. Comparison with numerical COMSOL calculations demonstrates good agreement for phononic crystals with high acoustic contrast between the constituents. Decay coefficient is reduced for lower acoustic contrast. Continuously varying anisotropy of viscous losses represents a new property of phononic crystal as a viscous metamaterial. This property will find new applications, for example in engineering of dissipative hydrodynamic cloak and acoustic black hole.

Acknowledgments. This work is supported by an EFRI grant from the National Science Foundation (Grant No.

1741677) and by CONACyT (Mexico) through Grant No. A1-S-23120. A.A.K. is thankful for hospitality at the Instituto

de Física Universidad Autónoma de Puebla where part of this work has been accomplished.

-
- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed. (Elsevier, Oxford, 1984).
- [2] B. P. Konstantinov, To the problem of sound absorption at reflection from a solid boundary, *Zh. Tekh. Fiz.* **9**, 226 (1939).
- [3] F. F. Legusha, The Konstantinov effect and sound absorption in inhomogeneous media, *Sov. Phys. Uspek.* **27**, 887 (1984).
- [4] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin, *Acoustics of Layered Media I*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1998).
- [5] Xue Jiang, Yong Li, and Likun Zhang, Thermoviscous effects on sound transmission through a metasurface of hybrid resonances, *J. Acoust. Soc. Am.* **141**, EL363 (2017).
- [6] G. P. Ward, R. K. Lovelock, A. R. J. Murray, A. P. Hibbins, J. R. Sambles, and J. D. Smith, Boundary-Layer Effects on Acoustic Transmission through Narrow Slit Cavities, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 044302 (2015).
- [7] E. Reyes-Ayona, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa, Homogenization theory for periodic distributions of elastic cylinders embedded in a viscous fluid, *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, 2896 (2012).
- [8] K. C. Nunan and J. B. Keller, Effective viscosity of a periodic suspension, *J. Fluid Mech.* **142**, 269 (1984).
- [9] For 3D phononic crystal $\gamma_{\text{ph}} \sim f^{2/3}$ and for a layered system $\gamma_{\text{ph}} \sim f^0$. For a D -dimensional arrangement of scatterers $\gamma_{\text{ph}} \sim f^{(D-1)/D}$.
- [10] W. H. Lin and A. C. Raptis, Acoustic scattering by elastic solid cylinders and spheres in viscous fluids, *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 736 (1983).
- [11] M. Molerón, M. Serra-Garcia, and C. Daraio, Visco-thermal effects in acoustic metamaterials: from total transmission to total reflection and high absorption, *New J. Phys.* **18**, 033003 (2016).
- [12] M. Kafesaki, R. S. Penciu, and E. N. Economou, Air Bubbles in Water: A Strongly Multiple Scattering Medium for Acoustic Waves, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6050 (2000).
- [13] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. N. Gumen, Speed of Sound in Periodic Elastic Composites, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 264302 (2003).
- [14] Z. Hou, F. Wu, X. Fu, and Y. Liu, Effective elastic parameters of the two-dimensional phononic crystal, *Phys. Rev. E* **71**, 037604 (2005).
- [15] Qing Ni and Jianchun Cheng, Anisotropy of effective velocity for elastic wave propagation in two-dimensional phononic crystals at low frequencies, *Phys. Rev. B* **72**, 014305 (2005).
- [16] J. Mei, Z. Liu, W. Wen, and P. Sheng, Effective Mass Density of Fluid-Solid Composites, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 024301 (2006).
- [17] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa, Effective parameters of clusters of cylinders embedded in a nonviscous fluid or gas, *Phys. Rev. B* **74**, 224305 (2006).
- [18] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa, Anisotropic mass density by two-dimensional acoustic metamaterials, *New J. Phys.* **10**, 023004 (2008).
- [19] A. N. Norris, Acoustic metafluids, *J. Acoust. Soc. Am.* **125**, 839 (2009).
- [20] R. V. Craster, J. Kaplunov, and A. V. Pichugin, High-frequency homogenization for periodic media, *Proc. R. Soc. A* **466**, 2341 (2010).
- [21] L. N. Gumen, J. Arriaga, and A. A. Krokhin, Metafluid with anisotropic dynamic mass, *Low Temp. Phys.* **37**, 975 (2011); Y. Zubov, B. Djafari-Rouhani, and A. Krokhin, Dynamical effective parameters of elastic superlattice with strong acoustic contrast between the constituents, *ibid.* **44**, 1280 (2018).
- [22] A. N. Norris, A. L. Shuvalov, and A. A. Kutsenko, Analytical formulation of three-dimensional dynamic homogenization for periodic elastic composites, *Proc. Roy. Soc. A* **468**, 1629 (2012).
- [23] J. Flores-Méndez and F. Pérez-Rodríguez, Metasolid with anisotropic mass density, *Europhys. Lett.* **103**, 54001 (2013).
- [24] D. Torrent, Y. Pennec, and B. Djafari-Rouhani, Effective medium theory for elastic metamaterials in thin elastic plates, *Phys. Rev. B* **90**, 104110 (2014).
- [25] A. Konovalenko, E. Gutiérrez-Reyes, A. L. González, J. Flores-Méndez, and F. Pérez-Rodríguez, Nonlocal metasolid response of homogenized phononic crystals, *J. Appl. Phys.* **121**, 155102 (2017).
- [26] A. A. Krokhin and P. Halevi, Influence of weak dissipation on the photonic band structure of periodic composites, *Phys. Rev. B* **53**, 1205 (1996).
- [27] E. Psarobas, Viscoelastic response of sonic band-gap materials, *Phys. Rev. B* **64**, 012303 (2001).
- [28] M. I. Hussein, Theory of damped Bloch waves in elastic media, *Phys. Rev. B* **80**, 212301 (2009).
- [29] R. P. Moiseyenko and V. Laude, Material loss influence on the complex band structure and group velocity in phononic crystals, *Phys. Rev. B* **83**, 064301 (2011).
- [30] M. I. Hussein and M. J. Frazier, Damped phononic crystals and acoustic metamaterials, in *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*, Springer Series in Solid-State Sciences 173, edited by P. A. Deymier (Springer-Verlag, Berlin, 2013).
- [31] The results for a set of periodic cylinders of finite elasticity will be published elsewhere.
- [32] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2022 (1993).
- [33] Singularity of the inverse matrix implies that the direct matrix $[\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}' \nu (\mathbf{G} - \mathbf{G}')]$ is also singular, i.e., its determinant vanishes when $k \rightarrow 0$.
- [34] A. Climente, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa, Omnidirectional broadband acoustic absorber based on metamaterials, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 144103 (2012).
- [35] L. Zigoneanu, B. I. Popa, A. F. Starr, and S. A. Cummer, Design and measurements of a broadband 2D acoustic metamaterial with anisotropic mass density, *J. Appl. Phys.* **109**, 054906 (2011).
- [36] M. D. Guild, V. M. García-Chocano, W. Kan, and J. Sánchez-Dehesa, Acoustic metamaterial absorbers based on multilayered sonic crystals, *J. Appl. Phys.* **117**, 114902 (2015).

- [37] J. Park, Jae Ryoung Youn, and Young Seok Song, Hydrodynamic Metamaterial Cloak for Drag-Free Flow, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 074502 (2019).
- [38] E. Walker, A. Neogi, A. Bozhko, Yu. Zubov, J. Arriaga, H. Heo, J. Ju, and A. A. Krokhn, Nonreciprocal Linear Transmission of Sound in a Viscous Environment with Broken P Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 204501 (2018).
- [39] V. Cutanda Henríquez, V. M. García-Chocano, and J. Sánchez-Dehesa, Viscothermal losses in double-negative acoustic metamaterials, *Phys. Rev. Appl.* **8**, 014029 (2017).
- [40] R. Graciá-Salgado, V. García-Chocano, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa, Negative mass density and density-nearzero quasi-two-dimensional metamaterial: Design and applications, *Phys. Rev. B* **88**, 224305 (2013).

Apéndice A

Código para cálculo de velocidad efectiva y coeficiente de decaimiento del sonido en metamaterial viscoso 2D (sección cuadrada)

```
!***** Viscous 2D METAMATERIAL (SQUARE CYLINDER SECTION) *****
```

```
module parameters
integer,parameter :: dp=kind(1.d0)
integer,parameter :: dpc=kind((1.d0,1.d0))
end module parameters
```

```
module interfaces
interface
```

```
subroutine reciprocal_vectors(gx,gy,NN)
use parameters
implicit none
```

```
integer,intent(out) :: NN
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
```

```
end subroutine reciprocal_vectors
```

```
subroutine FACTORES(NN,ff,gx,gy,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)
use parameters
implicit none
```

```
integer,intent(in) :: NN
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
real(dp),intent(in) :: ff
real(dp),pointer :: F_G(:),L_G(:),F_GMGP(:,:),F_GPGP(:,:),L_GPGP(:,:)
```

```
end subroutine FACTORES
```

```
end interface
end module interfaces
```

```
module files
```

```
! Set the unit numbers for the files we want to access
```

```
integer,parameter ::
infile=5,outfile=6,recvec=7,veleff=8,gamk=9,gamk0=10,gamk45=11,gamk90=12
```

```
end module files
```

```
module constants
```

```
use parameters
implicit none
integer :: N
real(dp) ::
pi,a0,a,b,x_ab,unit_cell,fx,rho_a,lambda_a,rho_b,lambda_b,eta_b,xi_b
```

```
end module constants
```

```
!*****
!***** 2D Phononic_Crystal program *****
!*****
```

```
program phononic_crystals
use interfaces
use parameters
```

```

use constants
use files

use nag_bessel_fun, ONLY : nag_bessel_j0,nag_bessel_j1,nag_bessel_j
USE nag_mat_inv, ONLY : nag_key_sym,nag_sym_mat_inv

implicit none

! Define necessary variables

real(dp),pointer :: F_GMGP(:,,:),F_GPGP(:,,:),L_GPGP(:,,:),F_G(:,),L_G(:,)
real(dp),allocatable :: IM(:,,:),IM_inv(:,,:),MSG1G3(:,,:)
real(dp),allocatable :: R_G(:,)
real(dp),pointer :: gx(:,),gy(:,)
real(dp) :: M_k,N_k,Gamma_k
real(dp) :: Suma1L,Suma1F,Suma2L,Suma2F,SumaJ
real(dp) :: ff,nu_bar,nu_ab,gamma_bar,L_0
real(dp) :: gxi,gyi,gxj,gyj,theta,n_x,n_y,C_eff,Gamma_factor,omega
real(dp) :: C_eff2,C_w,Gamma_w

real(dp) :: gdotgp,frequency
integer :: NN,i,j,k,l

character(1) :: uplo

! Open the necessary files

open(unit=infile,file='infile.dat',status='old',action='read')
open(unit=outfile,file='out.dat',status='replace',action='write')
open(unit=veleff,file='C_eff.dat',status='replace',action='write')
open(unit=gamk,file='Gamma_k.dat',status='replace',action='write')
open(unit=gamk0,file='Gamma_0.dat',status='replace',action='write')
open(unit=gamk45,file='Gamma_45.dat',status='replace',action='write')
open(unit=gamk90,file='Gamma_90.dat',status='replace',action='write')

! Set the parameters

call setparam()

! Generate the reciprocal vectors.

call reciprocal_vectors(gx,gy,NN)

allocate (F_GMGP(NN,NN),F_GPGP(NN,NN),L_GPGP(NN,NN),F_G(NN),L_G(NN))
allocate (IM(NN,NN),IM_inv(NN,NN),MSG1G3(NN,NN))
allocate (R_G(NN))

write(outfile,'(A1,A45)')'#','**write parameters used for
calculation**'
write(outfile,'(A1,A26,I6)')'#','Number of plane waves=',NN

frequency = 50.d0

loop_filling: do l=0,50

ff= dfloat(l)/50.d0
a=dsqrt(ff)*a0
b=x_ab*a

L_0 = 2.d0*(a+b)

```

```

!ff = a*b/unit_cell

nu_bar = ff/rho_a + (1.d0-ff)/rho_b
gamma_bar = ff/lambd_a + (1.d0 -ff)/lambd_b

nu_ab = 1.d0/rho_a - 1.d0/rho_b

write(outfile, '(A1,A12,E12.5)')'#', 'ff=', ff
write(outfile, '(A1,A12,E12.4,2X,A12,E12.4)')'#', 'nu_bar=', nu_bar, 'nu_ab='
, nu_ab
write(outfile, '(A1,A12,E12.4)')'#', 'gamma_bar=', gamma_bar
write(outfile,*)
write(outfile, '(A1,A12,E12.4,A12,E12.4)') '#', 'a=', a, 'b=', b
write(outfile, '(A1,A12,F9.4)')'#', 'ff=', ff
write(outfile, '(A1,A12,E12.4)')'#', 'L_0=', L_0
write(outfile,*)

! Construye F(G-G'), y L(G)

call FACTORES(NN,ff,gx,gy,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)

!***** Construct matrix I

IM(:,:)=0.d0
IM_inv(:,:)=0.d0

do i=1,NN
  gxi=gx(i)
  gyi=gy(i)

!Solo la diagonal superior
do j=i,NN
  gxj=gx(j)
  gyj=gy(j)

  gdotgp = gxi*gxj + gyi*gyj

  if (i==j) then
    IM(i,j) = nu_bar*gdotgp
  else
    IM(i,j) = nu_ab*gdotgp*F_GMGP(i,j)
  endif

enddo
enddo

IM_inv(:,:)=IM(:,:)

uplo='U'
call nag_sym_mat_inv(nag_key_sym,uplo,IM_inv)

do i=1,NN
  do j=i+1,NN

    IM(j,i)=IM(i,j)
    IM_inv(j,i)=IM_inv(i,j)

  enddo
enddo

```

```

        omega = (2.d0*pi*frequency)*(1.0E+03)
        C_w = 1498.d0
        Gamma_w = ((xi_b +
4.d0*eta_b/3.d0)/(2.d0*rho_b*C_w*C_w*C_w))*omega*omega

loop_k: do k=1,1

        theta = (pi/180.d0)*(5.d0*dfloat(k-1))
        n_x = dcos(theta)
        n_y = dsin(theta)

        Suma1F = 0.d0
        Suma1L = 0.d0
        do i=1,NN
            gxi=gx(i)
            gyi=gy(i)

            SumaJ=0.d0
            do j=1,NN
                gxj=gx(j)
                gyj=gy(j)

                SumaJ = SumaJ + (gxj*n_x + gyj*n_y)*F_G(j)*IM_inv(j,i)
            enddo

            R_G(i) = SumaJ
            Suma1F = Suma1F + (gxi*n_x + gyi*n_y)*F_G(i)*SumaJ
            Suma1L = Suma1L + (gxi*n_x + gyi*n_y)*L_G(i)*SumaJ
        enddo

! *****
!          cambiar si son complejos
! Calcula C_eff

        !C_eff2 = (lambda_b/rho_b)*( 1.d0 - Suma1F/((1.d0-ff)*rho_b) )
        C_eff2 = (nu_bar - nu_ab*nu_ab*Suma1F)/gamma_bar

write(veleff, '(F9.2,2X,E16.8)')ff,dsqrt(C_eff2)

! Calcula Suma2L y Suma2F

        Suma2L = 0.d0
        Suma2F = 0.d0
        do i=1,NN
            gxi=gx(i)
            gyi=gy(i)

            do j=1,NN
                gxj=gx(j)
                gyj=gy(j)

                Suma2L = Suma2L + (gxi*gxi + gyi*gyj)*L_GPGP(i,j)*R_G(i)*R_G(j)
                Suma2F = Suma2F + (gxi*gxi + gyi*gyj)*F_GPGP(i,j)*R_G(i)*R_G(j)
            enddo
        enddo

```

```

M_k = 1.d0 + 2.d0*Suma1L/rho_b + Suma2L/(rho_b*rho_b)
N_k = 1.d0 - ff - 2.d0*Suma1F/rho_b - Suma2F/(rho_b*rho_b)

Gamma_factor =
(L_0/(2.d0*unit_cell*dsqrt(C_eff2)))*dsqrt(eta_b*omega/(2.d0*rho_b))

Gamma_k = Gamma_factor*M_k/N_k

```

```

if (k==1) then
write(gamk0,'(E12.4,E16.8)') ff,Gamma_k/Gamma_w
write(200,'(E12.4,2X,E16.8)')ff,dsqrt(C_eff2)
else
if (k==10) then
write(gamk45,'(E12.4,E16.8)') ff,Gamma_k/Gamma_w
write(300,'(E12.4,2X,E16.8)')ff,dsqrt(C_eff2)
else
if (k==19) then
write(gamk90,'(E12.4,E16.8)') ff,Gamma_k/Gamma_w
write(400,'(E12.4,2X,E16.8)')ff,dsqrt(C_eff2)
endif
endif
endif
endif

```

```

enddo loop_k

```

```

enddo loop_filling

```

```

end program phononic_crystals

```

```

! -----
! -----
! -----
! Subroutine setparam
! Set the key parameters from a config file
subroutine setparam()
use interfaces
use parameters
use files
use constants
implicit none

! Read the necessary parameters

! Read N, this integer generates the number of plane waves used.
pi=dacos(-1.0d0)

read(infile,*) N
read(infile,*) a0
read(infile,*) a
read(infile,*) x_ab
read(infile,*) rho_a
read(infile,*) lambda_a
read(infile,*) rho_b
read(infile,*) lambda_b
read(infile,*) eta_b

```

```

read(infile,*) xi_b
unit_cell=a0*a0
b=x_ab*a
fx=2.d0*pi/a0
write(outfile,'(A1)')'#'
write(outfile,'(A1,A12,I4)') '#','N=',N
write(outfile,'(A1,A12,E12.4)') '#','lat_cte=',a0
write(outfile,'(A1,A12,E12.4)') '#','unit_cell=',unit_cell
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,A12,E12.4)') '#','a=',a,'b=',b
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','rho_a=',rho_a, &
&      'rho_b=',rho_b
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','lambda_a=',lambda_a, &
&      'lambda_b=',lambda_b
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','eta_b=',eta_b, &
&      'xi_b=',xi_b

return
end subroutine setparam

```

```

!-----
! Subroutine Reciprocal_Vectors
! Calculate the reciprocal vectors
!-----

```

```

subroutine reciprocal_vectors(gx,gy,NN)

use parameters
use constants
use files
implicit none

real(dp) :: gmax,absg,ggx,gyy
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
integer,intent(out) :: NN
integer :: i,k,l

open(unit=recvec,file='rec_vecs.dat',status='replace',action='write')

! **** Calculate the Reciprocal vectors for a Square lattice ****
! gmax, is the greatest reciprocal vector (with a factor 2pi)

      gmax=fx*dfloat(N)*dsqrt(2.d0)
      write(recvec,'(A1,A12,E16.6)') '#','Gmax=',gmax

! **** Generates the number NN (=Nmax) ****

      NN=0
      do k=-2*N,2*N
      do l=-2*N,2*N
      if ((k==0).and.(l==0)) then
      else
      ggx=fx*dfloat(k)
      ggy=fx*dfloat(l)
      absg=dsqrt( ggx*ggx+ggy*ggy )
      if (absg<=gmax) then
      NN=NN+1
      endif

```

```

endif
enddo
enddo

! **** Allocate array for G-vectors ****
allocate (gx(1:NN),gy(1:NN))
write(recvec,'(A1,A30,I5)')'#','Number of Reciprocal Vectors=',NN

i=0
do k=-2*N,2*N
do l=-2*N,2*N
if ((k==0).and.(l==0)) then
else
ggx=fx*dfloat(k)
ggy=fx*dfloat(l)

absg=dsqrt( ggx*ggx+ggy*ggy )

if (absg<=gmax) then

i=i+1

gx(i)=ggx
gy(i)=ggy
write(recvec,'(2F16.8,5x,i4)')gx(i),gy(i),i

endif

endif
enddo
enddo

close(recvec)
end subroutine reciprocal_vectors

```

```

subroutine FACTORES(NN,ff,gx,gy,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)
use interfaces
use parameters
use constants
use files
implicit none

integer,intent(in) :: NN
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
real(dp),intent(in) :: ff
real(dp),pointer :: F_G(:),L_G(:),F_GMGP(:,:),F_GPGP(:,:),L_GPGP(:,:)
real(dp) :: gxi,gyi,gxj,gyj,gximgxj,gyimgyj
real(dp) :: gxipgxj,gyipgyj,L_0
integer :: i,j

L_0 = 2.d0*(a+b)
write(500,*) a,b,ff

main_loop: do i=1,NN
!Calcula F(G) y L(G)
gx_i=gx(i)
gy_i=gy(i)

if (gxi==0.d0) then

F_G(i) = (2.d0*a/gyi)*dsin(gyi*b/2.d0)/unit_cell

```

```

        L_G(i) = (2.d0*a*dcos(gyi*b/2.d0) +
4.d0*dsin(gyi*b/2.d0)/gyi)/L_0
    else
        if (gyi==0.d0) then
            F_G(i) = (2.d0*b/gxi)*dsin(gxi*a/2.d0)/unit_cell
            L_G(i) = (4.d0*dsin(gxi*a/2.d0)/gxi +
2.d0*b*dcos(gxi*a/2.d0))/L_0
        else
            F_G(i) =
(4.d0/(gxi*gyi))*dsin(gxi*a/2.d0)*dsin(gyi*b/2.d0)/unit_cell
            L_G(i) = (4.d0*dsin(gxi*a/2.d0)*dcos(gyi*b/2.d0)/gxi +
4.d0*dcos(gxi*a/2.d0)*dsin(gyi*b/2.d0)/gyi)/L_0
        endif
    endif
endif

second_loop: do j=1,NN
!Calcula F(G-G')
    gxj=gx(j)
    gyj=gy(j)
    if (i==j) then
        F_GMGP(i,j)=1.d0
    else
        gximgxj=gxi-gxj
        gyimgyj=gyi-gyj
        if (gxi==gxj) then
            F_GMGP(i,j) =
(2.d0*a/gyimgyj)*dsin(gyimgyj*b/2.d0)/unit_cell
        else
            if (gyi==gyj) then
                F_GMGP(i,j) =
(2.d0*b/gximgxj)*dsin(gximgxj*a/2.d0)/unit_cell
            else
                F_GMGP(i,j) =
(4.d0/(gximgxj*gyimgyj))*dsin(gximgxj*a/2.d0)*dsin(gyimgyj*b/2.d0)/unit_c
ell
            endif
        endif
    endif
endif

!Construye L(G+G') y F(G+G')
    if ((gxi==-gxj).and.(gyi==-gyj)) then
        F_GPGP(i,j) = ff - 1.d0
        L_GPGP(i,j) = 1.d0
    endif
endif

```

```

else
  gxipgxj=gxi+gxj
  gyipgyj=gyi+gyj
    if (gxipgxj==0.d0) then
      F_GPGP(i,j) =
(2.d0*a/gyipgyj)*dsin(gyipgyj*b/2.d0)/unit_cell
      L_GPGP(i,j) = (2.d0*a*dcos(gyipgyj*b/2.d0) +
4.d0*dsin(gyipgyj*b/2.d0)/gyipgyj)/L_0
    else
      if (gyipgyj==0.d0) then
        F_GPGP(i,j) =
(2.d0*b/gxipgxj)*dsin(gxipgxj*a/2.d0)/unit_cell
        L_GPGP(i,j) = ( 4.d0*dsin(gxipgxj*a/2.d0)/gxipgxj +
2.d0*b*dcos(gxipgxj*a/2.d0) )/L_0
      else
        F_GPGP(i,j) =
(4.d0/(gxipgxj*gyipgyj))*dsin(gxipgxj*a/2.d0)*dsin(gyipgyj*b/2.d0)/unit_c
ell
        L_GPGP(i,j) =
(4.d0*dsin(gxipgxj*a/2.d0)*dcos(gyipgyj*b/2.d0)/gxipgxj + &
&
4.d0*dcos(gxipgxj*a/2.d0)*dsin(gyipgyj*b/2.d0)/gyipgyj)/L_0
      endif
    endif
  endif
enddo second_loop
enddo main_loop
return
end subroutine FACTORES

```

Apéndice B

Código para cálculo de velocidad efectiva y coeficiente de decaimiento del sonido en metamaterial viscoso 2D (sección cilindro cortado)

```
!***** Viscous 2D METAMATERIAL (CUT CYLINDER SECTION) *****  
!*****
```

```
module parameters  
integer,parameter :: dp=kind(1.d0)  
integer,parameter :: dpc=kind((1.d0,1.d0))  
end module parameters
```

```
module interfaces  
interface
```

```
subroutine reciprocal_vectors(gx,gy,NN)  
use parameters  
implicit none
```

```
integer,intent(out) :: NN  
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
```

```
end subroutine reciprocal_vectors
```

```
subroutine FACTORES(NN,ff,gx,gy,Besseln_gr,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)  
use parameters  
implicit none
```

```
integer,intent(in) :: NN  
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)  
real(dp),intent(in) :: ff  
complex(dpc),pointer :: F_G(:),L_G(:),F_GMGP(:,:),F_GPGP(:,:),L_GPGP(:,:)  
complex(dpc),pointer :: Besseln_gr(:)
```

```
end subroutine FACTORES
```

```
subroutine Serie(iserie,theta_G,Besseln_gr,Series,Series1)  
use parameters  
implicit none
```

```
complex(dpc),intent(out) :: Series,Series1  
real(dp),intent(in) :: theta_G  
integer,intent(in) :: iserie  
complex(dpc),pointer :: Besseln_gr(:)
```

```
end subroutine Serie
```

```
subroutine mult(a,b,c,NN)  
use parameters  
implicit none  
integer,intent(in) :: NN  
complex(dpc),pointer :: a(:,:),b(:,:),c(:,:)  
end subroutine mult
```

```
end interface  
end module interfaces
```

```
module files
```

```
! Set the unit numbers for the files we want to access  
integer,parameter ::  
infile=5,outfile=6,recvec=7,ceff0=8,ceff45=9,ceff90=12,gamm0=13,gamm45=14  
,gamm90=17
```

```
end module files
```

```
module constants
```

```
use parameters
```

```
implicit none
```

```
integer :: N,N_series,N_iseries
```

```
real(dp) ::
```

```
pi,r0,a0,unit_cell,fx,rho_a,lambda_a,rho_b,lambda_b,eta_b,xi_b,alpha_angl  
e
```

```
complex(dpc) :: u0,u1,ui
```

```
end module constants
```

```
!*****  
!***** 2D Phononic_Crystal program *****  
!*****
```

```
program phononic_crystals
```

```
use interfaces
```

```
use parameters
```

```
use constants
```

```
use files
```

```
use nag_bessel_fun, ONLY : nag_bessel_j0,nag_bessel_j1,nag_bessel_j
```

```
USE nag_mat_inv, ONLY : nag_key_herm, nag_sym_mat_inv
```

```
implicit none
```

```
! Define necessary variables
```

```
complex(dpc),pointer :: F_GMGP(:,,:),F_GPGP(:,,:),L_GPGP(:,,:),F_G(:,),L_G(:,)
```

```
complex(dpc),pointer :: Besseln_gr(:,)
```

```
complex(dpc),pointer :: MSG1G3(:,)
```

```
complex(dpc),pointer :: IM(:,,:),IM_inv(:,,:),R_G(:,)
```

```
real(dp),pointer :: gx(:,),gy(:,)
```

```
complex(dpc) ::
```

```
M_k,N_k,Gamma_k,Suma1L,Suma1F,Suma2L,Suma2F,SumaJ,SumaJC,SumaJL,Suma2LL,S
```

```
uma2FF,SumaJF,SumaVel
```

```
real(dp) ::
```

```
ff,eta_bar,xi_bar,nu_bar,rho_bar,eta_ab,xi_ab,nu_ab,rho_ab,gamma_bar,L_0
```

```
real(dp) ::
```

```
gxi,gyi,gxj,gyj,theta,n_x,n_y,C_eff2,Gamma_factor,omega,xf,Gamma_0
```

```
real(dp) :: C_w,Gamma_w,frequency
```

```
real(dp) :: gdotgp
```

```
integer :: NN,i,j,k,iserie,l,ll
```

```
character(1) :: uplo
```

```
! Open the necessary files
```

```
open(unit=infile,file='infile.dat',status='old',action='read')
```

```
open(unit=outfile,file='out.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=ceff0,file='Ceff0.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=ceff45,file='Ceff45.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=ceff90,file='Ceff90.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=gamm0,file='Gamma0.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=gamm45,file='Gamma45.dat',status='replace',action='write')
```

```
open(unit=gamm90,file='Gamma90.dat',status='replace',action='write')
```

```

! Set the parameters
call setparam()

frequency = 50.d0
!Gamma_0 = ( 4.d0*eta_b/3.d0 + xi_b )*( dsqrt(0.4d0*pi)*(0.4d0*pi)
)/(6.75d0*rho_b)

! Generate the reciprocal vectors.
call reciprocal_vectors(gx,gy,NN)

allocate (F_GMGP(NN,NN),F_GPGP(NN,NN),L_GPGP(NN,NN),F_G(NN),L_G(NN))
allocate (IM(NN,NN),IM_inv(NN,NN),MSG1G3(NN,NN))
allocate (R_G(NN))

write(outfile,'(A1,A45)')'#','**write parameters used for
calculation**'
write(outfile,'(A1,A26,I6)')'#','Number of plane waves=',NN

loop_filling: do l=1,30
ff = 0.2*dfloat(l)/30.d0
r0 = dsqrt( ff*unit_cell/(pi-alpha_angle) )

eta_bar = (1.d0-ff)*eta_b
xi_bar = (1.d0-ff)*xi_b
nu_bar = ff/rho_a + (1.d0-ff)/rho_b
rho_bar = ff*rho_a + (1.d0-ff)*rho_b
gamma_bar = ff/lambda_a + (1.d0-ff)/lambda_b

eta_ab = -eta_b
xi_ab = -xi_b
nu_ab = 1.d0/rho_a - 1.d0/rho_b
rho_ab = rho_a - rho_b

write(outfile,'(A1,A12,F9.3)')'#','ff=',ff
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,2X,A12,E12.4)')'#','eta_bar=',eta_bar,'eta_a
b=',eta_ab
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,2X,A12,E12.4)')'#','nu_bar=',nu_bar,'nu_ab='
,nu_ab
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,2X,A12,E12.4)')'#','xi_bar=',xi_bar,'xi_ab='
,xi_ab
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,2X,A12,E12.4)')'#','rho_bar=',rho_bar,'rho_a
b=',rho_ab

! Construye F(G-G'), y L(G)
L_0 = 2.d0*r0*( pi-alpha_angle) + 1.d0 )

call FACTORES(NN,ff,gx,gy,Besseln_gr,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)

do i=1,NN
do j=i,NN
F_GMGP(j,i)=dconjg(F_GMGP(i,j))
enddo
enddo

```

```

!***** Construct matrix Q
do i=1,NN
do j=1,NN
IM(i,j)=u0
IM_inv(i,j)=u0
enddo
enddo

do i=1,NN
gxi=gx(i)
gyi=gy(i)

!Solo la diagonal superior
do j=i,NN
gxj=gx(j)
gyj=gy(j)

gdotgp = gxi*gxj + gyi*gyj

if (i==j) then

IM(i,j) = nu_bar*gdotgp
IM_inv(i,j) = IM(i,j)

else

IM(i,j) = nu_ab*gdotgp*F_GMGP(i,j)
IM_inv(i,j) = IM(i,j)

endif

enddo
enddo

uplo='U'
call nag_sym_mat_inv(nag_key_herm,uplo,IM_inv)

do i=1,NN
do j=i+1,NN

IM(j,i)=dconjg(IM(i,j))
IM_inv(j,i)=dconjg(IM_inv(i,j))

enddo
enddo

omega = (2.d0*pi*frequency)*(1.0E+03)
C_w = 1498.d0
Gamma_w = ((xi_b +
4.d0*eta_b/3.d0)/(2.d0*rho_b*C_w*C_w*C_w))*omega*omega

loop_k: do k=1,19

theta = (pi/180.d0)*(5.d0*dfloat(k-1))
n_x = dcos(theta)
n_y = dsin(theta)

Suma1F = u0
Suma1L = u0

```

```

SumaVel = u0
do i=1,NN
  gxi=gx(i)
  gyi=gy(i)

  SumaJ=u0
  SumaJC=u0
  SumaJL = u0
  SumaJF = u0
  do j=1,NN
    gxj=gx(j)
    gyj=gy(j)

```

!Tener cuidado cuando F_(G) y L_(G) son complejos, debe aparecer el conjugado

```

  SumaJC = SumaJC + (gxj*n_x +
gyj*n_y)*dconjg(F_G(j))*IM_inv(j,i)

  SumaJF = SumaJF + (gxj*n_x + gyj*n_y)*F_G(j)*IM_inv(j,i)
  SumaJL = SumaJL + (gxj*n_x + gyj*n_y)*F_G(j)*IM_inv(j,i)
  SumaJ = SumaJ + (gxj*n_x + gyj*n_y)*F_G(j)*IM_inv(j,i)
enddo

  R_G(i) = SumaJ
  Suma1F = Suma1F + (gxi*n_x + gyi*n_y)*dconjg(F_G(i))*SumaJF
  Suma1L = Suma1L + (gxi*n_x + gyi*n_y)*L_G(i)*SumaJL
  SumaVel = SumaVel + (gxi*n_x + gyi*n_y)*(F_G(i))*SumaJC
enddo

```

! *****

```

  Suma2L = u0
  Suma2F = u0
  do i=1,NN
    gxi=gx(i)
    gyi=gy(i)

    do j=1,NN
      gxj=gx(j)
      gyj=gy(j)

      Suma2L = Suma2L + (gxi*gxj +
gyi*gyj)*L_GPGP(i,j)*R_G(i)*R_G(j)
      Suma2F = Suma2F + (gxi*gxj +
gyi*gyj)*dconjg(F_GPGP(i,j))*R_G(i)*R_G(j)
    enddo
  enddo

  M_k = 1.d0 + 2.d0*Suma1L/rho_b + Suma2L/(rho_b*rho_b)
  N_k = 1.d0 - ff - 2.d0*Suma1F/rho_b - Suma2F/(rho_b*rho_b)

  C_eff2 = dreal(( nu_bar - nu_ab*nu_ab*(SumaVel) )/gamma_bar)

  Gamma_factor = (
L_0/(2.d0*unit_cell*dsqrt(C_eff2)))*dsqrt(eta_b*omega/(2.d0*rho_b))

  Gamma_k = Gamma_factor*M_k/N_k

  if (k==1) then
    write(gamm0,'(E14.5,E16.8)') ff,dreal(Gamma_k)/Gamma_w

```

```

write(0, '(E14.5,E16.8,E16.8)') ff, (Gamma_k)/Gamma_w
write(ceff0, '(E14.5,2X,E16.8)') ff, dsqrt(C_eff2)
else
  if (k==10) then
    write(gamm45, '(E14.5,E16.8)') ff, drear(Gamma_k)/Gamma_w
    write(45, '(E14.5,E16.8,E16.8)') ff, (Gamma_k)/Gamma_w
    write(ceff45, '(E14.5,2X,E16.8)') ff, dsqrt(C_eff2)
  else
    if (k==19) then
      write(gamm90, '(E14.5,E16.8)') ff, drear(Gamma_k)/Gamma_w
      write(90, '(E14.5,E16.8,E16.8)') ff, (Gamma_k)/Gamma_w
      write(ceff90, '(E14.5,2X,E16.8)') ff, dsqrt(C_eff2)
    endif
  endif
endif
endif

```

```

        enddo loop_k

```

```

enddo loop_filling

```

```

end program phononic_crystals

```

```

! -----
! -----
! -----

```

```

! Subroutine setparam
! Set the key parameters from a config file
subroutine setparam()
use interfaces
use parameters
use files
use constants
implicit none

```

```

! Read the necessary parameters

```

```

! Read N, this integer generates the number of plane waves used.

```

```

pi=dacos(-1.0d0)

```

```

read(infile,*) N
read(infile,*) a0
read(infile,*) r0
read(infile,*) rho_a
read(infile,*) lambda_a
read(infile,*) rho_b
read(infile,*) lambda_b
read(infile,*) eta_b
read(infile,*) xi_b
read(infile,*) alpha_angle
read(infile,*) N_iseries

```

```

u0=(0.d0,0.d0)
u1=(1.d0,0.d0)
ui=(0.d0,1.d0)

```

```

unit_cell=a0*a0

```

```

fx=2.d0*pi/a0

```

```

alpha_angle=(pi/180.d0)*alpha_angle
write(outfile,'(A1)')'#'

write(outfile,'(A1,A12,I4)') '#','N=',N
write(outfile,'(A1,A12,E12.4)') '#','lat_cte=',a0
write(outfile,'(A1,A12,E12.4)') '#','unit_cell=',unit_cell
write(outfile,'(A1,A12,E12.4)') '#','r0=',r0
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','rho_a=',rho_a, &
&      'rho_b=',rho_b
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','lambda_a=',lambda_a, &
&      'lambda_b=',lambda_b
write(outfile,'(A1,A12,E12.4,3X,A12,E12.4)') '#','eta_b=',eta_b, &
&      'xi_b=',xi_b

return
end subroutine setparam

```

```

!-----
! Subroutine Reciprocal_vectors
! Calculate the reciprocal vectors
!-----

```

```

subroutine reciprocal_vectors(gx,gy,NN)

use parameters
use constants
use files
implicit none

real(dp) :: gmax,absg,ggx,ggg
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
integer,intent(out) :: NN
integer :: i,k,l

open(unit=recvec,file='rec_vecs.dat',status='replace',action='write')

! **** Calculate the Reciprocal vectors for a Square lattice ****
! gmax, is the greatest reciprocal vector (with a factor 2pi)

      gmax=fx*dfloat(N)*dsqrt(2.d0)
      write(recvec,'(A1,A12,E16.6)') '#','Gmax=',gmax

! **** Generates the number NN (=Nmax) ****

      NN=0
      do k=-2*N,2*N
      do l=-2*N,2*N
      if ((k==0).and.(l==0)) then
      else
      ggx=fx*dfloat(k)
      ggy=fx*dfloat(l)
      absg=dsqrt( ggx*ggx+ggy*ggy )
      if (absg<=gmax) then
      NN=NN+1
      endif
      endif
      enddo
      enddo

```

```

! **** Allocate array for G-vectors ****
allocate (gx(1:NN),gy(1:NN))
write(recvec,'(A1,A30,I5)')'#','Number of Reciprocal Vectors=',NN

  i=0
  do k=-2*N,2*N
  do l=-2*N,2*N
  if ((k==0).and.(l==0)) then
  else
  ggx=fx*dfloat(k)
  ggy=fx*dfloat(l)

  absg=dsqrt( ggx*ggx+ggy*ggy )

  if (absg<=gmax) then

  i=i+1

  gx(i)=ggx
  gy(i)=ggy
  write(recvec,'(2F16.8,5x,i4)')gx(i),gy(i),i

  endif

  endif
  enddo
  enddo

close(recvec)
end subroutine reciprocal_vectors

```

```

subroutine FACTORES(NN,ff,gx,gy,Besseln_gr,F_G,L_G,F_GMGP,F_GPGP,L_GPGP)
use interfaces
use parameters
use constants
use nag_bessel_fun, ONLY : nag_bessel_j0,nag_bessel_j1,nag_bessel_j
implicit none

integer,intent(in) :: NN
real(dp),pointer :: gx(:),gy(:)
real(dp),intent(in) :: ff
complex(dpc),pointer :: F_G(:),L_G(:),F_GMGP(:,,:),F_GPGP(:,,:),L_GPGP(:,,:)
complex(dpc),pointer :: Besseln_gr(:)
complex(dpc) :: Lg1,Fg1,absgrz,Series,Series1
real(dp) ::
gxi,gyi,gxj,gyj,absg,absgr0,Bessel1_gr,Bessel0_gr,Fg0,Lg0,gximgxj,gyimgyj
real(dp) ::
absgximgxj,absgyimgyj,gxipgxj,gyipgyj,absgpgp,absgpgpr0,absgxipgxj,absgyi
pgyj
real(dp) ::
cos_theta,sin_theta,sin_alphamtheta,sin_alphaptheta,cot_alphamtheta,cot_a
lphaptheta
real(dp) :: Theta_G,nu,L_0
integer :: i,j,iserie

nu=0.d0
L_0 = 2.d0*r0*( (pi-alpha_angle) + 1.d0 )

  main_loop: do i=1,NN

!Calcula F(G) y L(G)
          gxi=gx(i)

```

```

gyi=gy(i)

absg=dsqrt( gxi*gxi + gyi*gyi )
absgr0=absg*r0
Bessel1_gr=nag_bessel_j1(absgr0)
Bessel0_gr=nag_bessel_j0(absgr0)

Fg0 = 2.d0*ff*Bessel1_gr/absgr0
Lg0 = 2.d0*r0*(pi-alpha_angle)*Bessel0_gr

absgximgxj=dsqrt(gxi*gxi)
absgyimgyj=dsqrt(gyi*gyi)
cos_theta=gxi/absg
sin_theta=gyi/absg

sin_alphamtheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta -
dcos(alpha_angle)*sin_theta
sin_alphaptheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta +
dcos(alpha_angle)*sin_theta
cot_alphamtheta =
(dcos(alpha_angle)*cos_theta+dsin(alpha_angle)*sin_theta
)/sin_alphamtheta
cot_alphaptheta = (dcos(alpha_angle)*cos_theta-
dsin(alpha_angle)*sin_theta )/sin_alphaptheta

theta_G=datan(absgyimgyj/absgximgxj)

if ((gxi<0.d0).and.(gyi>0.d0)) then
theta_G= pi - theta_G
else
if ((gxi<0.d0).and.(gyi<0.d0)) then
theta_G= theta_G + pi
else
if ((gxi<0.d0).and.(gyi==0.d0)) then
theta_G=pi
else
if ((gxi>0.d0).and.(gyi<0.d0)) then
theta_G=2.d0*pi-theta_G
else
if ((gxi==0.d0).and.(gyi<0.d0)) then
theta_G=3.d0*pi/2.d0
else
if ((gxi==0.d0).and.(gyi>0.d0)) then
theta_G=pi/2.d0
endif
endif
endif
endif
endif
endif

Fg1 = cot_alphamtheta*( u1-cdexp(-ui*absgr0*sin_alphamtheta)
) + &
      & cot_alphaptheta*( u1-cdexp(ui*absgr0*sin_alphaptheta)
)

if ( theta_G==alpha_angle ) then
Lg1 = r0 + (ui/(absg*dsin(2.d0*alpha_angle)))*( cdexp(-
ui*absgr0*dsin(2.d0*alpha_angle)) - u1 )
else
if ( theta_G==-alpha_angle ) then
Lg1 = r0 + (ui/(absg*dsin(2.d0*alpha_angle)))*( u1-
cdexp(ui*absgr0*dsin(2.d0*alpha_angle)) )
else

```

```

        Lg1 = (ui/absgr)*( ( cdexp(-ui*absgr0*sin_alphaptheta) - u1
)/sin_alphaptheta + &
        &
        ( u1 - cdexp(ui*absgr0*sin_alphamtheta)
)/sin_alphamtheta )

        endif
        endif

        absgrz=u1*absgr0
        N_series = jidint(absgr0) + N_iseries
        allocate (Besseln_gr(N_series+2))
        Besseln_gr=nag_bessel_j(absgrz,nu,N_series+2,scale=.TRUE.)
        iserie=0
        call Serie(iserie,theta_G,Besseln_gr,Series,Series1)

        F_G(i)= u1*Fg0 - (1.d0/(unit_cell*absgr*absgr))*( Fg1 +
absgr0*Series )
        deallocate(Besseln_gr)
        L_G(i)= ( u1*Lg0 + Lg1 - 2.d0*r0*Series1 )/L_0

second_loop: do j=1,NN
!Calcula F(G-G')
        gxj=gx(j)
        gyj=gy(j)

        if (i==j) then

                F_GMGP(i,j)=u1

        else

                gximgxj=gxi-gxj
                gyimgyj=gyi-gyj
                absgr=dsqrt( gximgxj*gximgxj + gyimgyj*gyimgyj )

                absgr0=absgr*r0
                Bessel1_gr=nag_bessel_j1(absgr0)

                Fg0=2.d0*ff*Bessel1_gr/absgr0

                absgrximgxj=dsqrt(gximgxj*gximgxj)
                absgrgyimgyj=dsqrt(gyimgyj*gyimgyj)

                cos_theta=gximgxj/absgr
                sin_theta=gyimgyj/absgr

                sin_alphamtheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta -
dcos(alpha_angle)*sin_theta
                sin_alphaptheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta +
dcos(alpha_angle)*sin_theta
                cot_alphamtheta = (
dcos(alpha_angle)*cos_theta+dsin(alpha_angle)*sin_theta )/sin_alphamtheta
                cot_alphaptheta = ( dcos(alpha_angle)*cos_theta-
dsin(alpha_angle)*sin_theta )/sin_alphaptheta

                theta_G=datan(absgrgyimgyj/absgrximgxj)

                if ((gximgxj<0.d0).and.(gyimgyj>0.d0)) then
                        theta_G= pi - theta_G
                else
                        if ((gximgxj<0.d0).and.(gyimgyj<0.d0)) then
                                theta_G= theta_G + pi
                        else
                                if ((gximgxj<0.d0).and.(gyimgyj==0.d0)) then

```

```

theta_G=pi
else
if ((gximgxj>0.d0).and.(gyimgyj<0.d0)) then
theta_G=2.d0*pi-theta_G
else
if ((gximgxj==0.d0).and.(gyimgyj<0.d0)) then
theta_G=3.d0*pi/2.d0
else
if ((gximgxj==0.d0).and.(gyimgyj>0.d0)) then
theta_G=pi/2.d0
endif
endif
endif
endif
endif
endif

+ &
Fg1= cot_alphamtheta*( u1-cdexp(-ui*absgr0*sin_alphamtheta) )
& cot_alphaptheta*( u1-cdexp(ui*absgr0*sin_alphaptheta) )

absgrz=u1*absgr0
N_series = jidint(absgr0) + N_iseries
allocate (Besseln_gr(N_series+2))
Besseln_gr=nag_bessel_j(absgrz,nu,N_series+2,scale=.TRUE.)

iserie=1
call Serie(iserie,theta_G,Besseln_gr,Series,Series1)

absgr0*Series F_GMP(i,j)= u1*Fg0 -(1.d0/(unit_cell*absg*absg))*( Fg1 +
)

deallocate(Besseln_gr)
endif

!Construye L(G+G') y F(G+G')
if ((gxi==gxj).and.(gyi==gyj)) then

F_GPGP(i,j) = ff - 1.d0
L_GPGP(i,j) = 2.d0*r0*( (pi-alpha_angle) + 1.d0 )
else

gxipgxj=gxi+gxj
gyipgyj=gyi+gyj
absgpgp=dsqrt( gxipgxj*gxipgxj + gyipgyj*gyipgyj )

absgpgpr0=absgpgp*r0
Bessel0_gr=nag_bessel_j0(absgpgpr0)
Bessel1_gr=nag_bessel_j1(absgpgpr0)

Fg0=2.d0*ff*Bessel1_gr/absgpgpr0

Lg0= 2.d0*r0*(pi-alpha_angle)*Bessel0_gr

absgxipgxj=dsqrt(gxipgxj*gxipgxj)
absgyipgyj=dsqrt(gyipgyj*gyipgyj)

cos_theta=gxipgxj/absgpgp
sin_theta=gyipgyj/absgpgp

sin_alphamtheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta -
dcos(alpha_angle)*sin_theta

```

```

sin_alphaptheta = dsin(alpha_angle)*cos_theta +
dcos(alpha_angle)*sin_theta
cot_alphamtheta = (
dcos(alpha_angle)*cos_theta+dsin(alpha_angle)*sin_theta )/sin_alphamtheta
cot_alphaptheta = ( dcos(alpha_angle)*cos_theta-
dsin(alpha_angle)*sin_theta )/sin_alphaptheta

theta_G=datan(absgyipgyj/absgxipgxj)

if ((gxipgxj<0.d0).and.(gyipgyj>0.d0)) then
theta_G= pi - theta_G
else
if ((gxipgxj<0.d0).and.(gyipgyj<0.d0)) then
theta_G= theta_G + pi
else
if ((gxipgxj<0.d0).and.(gyipgyj==0.d0)) then
theta_G=pi
else
if ((gxipgxj>0.d0).and.(gyipgyj<0.d0)) then
theta_G=2.d0*pi-theta_G
else
if ((gxipgxj==0.d0).and.(gyipgyj<0.d0)) then
theta_G=3.d0*pi/2.d0
else
if ((gxipgxj==0.d0).and.(gyipgyj>0.d0)) then
theta_G=pi/2.d0
endif
endif
endif
endif
endif
endif

Fg1= cot_alphamtheta*( u1-cdexp(-
ui*absgpgpr0*sin_alphamtheta) ) + &
& cot_alphaptheta*( u1-
cdexp(ui*absgpgpr0*sin_alphaptheta) )

if ( theta_G==alpha_angle ) then
Lg1 = r0 + (ui/(absgpgp*dsin(2.d0*alpha_angle)))*( cdexp(-
ui*absgpgpr0*dsin(2.d0*alpha_angle)) - u1 )
else
if ( theta_G==-alpha_angle ) then
Lg1 = r0 + (ui/(absgpgp*dsin(2.d0*alpha_angle)))*( u1-
cdexp(ui*absgpgpr0*dsin(2.d0*alpha_angle)) )
else

Lg1 = (ui/absgpgp)*( ( cdexp(-ui*absgpgpr0*sin_alphaptheta)
- u1 )/sin_alphaptheta + &
& ( u1 -
cdexp(ui*absgpgpr0*sin_alphamtheta) )/sin_alphamtheta )

endif
endif

absgrz=u1*absgpgpr0
N_series = jidint(absgr0) + N_iseries
allocate (Besseln_gr(N_series+2))
Besseln_gr=nag_bessel_j(absgrz,nu,N_series+2,scale=.TRUE.)

iserie=2
call Serie(iserie,theta_G,Besseln_gr,Series,Series1)

```

```

        F_GPGP(i,j) = u1*Fg0 -(1.d0/(unit_cell*absgppg*absgppg))*(
Fg1 + absgppgpr0*Series )
        L_GPGP(i,j) = ( u1*Lg0 + Lg1 - 2.d0*r0*Series1 )/L_0

        deallocate(Besseln_gr)
    endif

    enddo second_loop

    enddo main_loop

return
end subroutine FACTORES

```

```

subroutine Serie(iserie,theta_G,Besseln_gr,Series,Series1)
use parameters
use constants
implicit none

complex(dpc),intent(out) :: Series,Series1
real(dp),intent(in) :: theta_G
integer,intent(in) :: iserie
complex(dpc),pointer :: Besseln_gr(:)

real(dp) :: m_alpha,m_theta
integer :: m
    Series=u0
    Series1=u0

    do m=1,N_series

        m_alpha=dfloat(m)*alpha_angle
        m_theta=dfloat(m)*theta_G

        if (iserie==0) then

            Series1 = Series1 + Besseln_gr(m+1)*(dsin(m_alpha)/dfloat(m))*(
cdexp(-ui*m_theta)+((-1.d0)**(m))*cdexp(ui*m_theta) )
            Series = Series + (dsin(m_alpha)/dfloat(m))*(
cdexp(ui*m_theta)+((-1.d0)**(m))*cdexp(-ui*m_theta))* &
& ( Besseln_gr(m+2)-Besseln_gr(m) )
        else
            if (iserie==1) then

                Series = Series + (dsin(m_alpha)/dfloat(m))*(
cdexp(ui*m_theta)+((-1.d0)**(m))*cdexp(-ui*m_theta) )* &
& ( Besseln_gr(m+2)-Besseln_gr(m) )

            else

                Series = Series + (dsin(m_alpha)/dfloat(m))*(
cdexp(ui*m_theta)+((-1.d0)**(m))*cdexp(-ui*m_theta) )* &
& ( Besseln_gr(m+2)-Besseln_gr(m) )
                Series1 = Series1 + Besseln_gr(m+1)*(dsin(m_alpha)/dfloat(m))*(
cdexp(-ui*m_theta)+((-1.d0)**(m))*cdexp(ui*m_theta) )

            endif
        endif

    enddo

return
end subroutine Serie

```

```
subroutine mult(a,b,c,NN)
use parameters
implicit none

complex(dpc),pointer :: a(:,:),b(:,:),c(:,:)
complex(dpc) :: aux,u0
integer,intent(in) :: NN
integer :: i,j,k

u0=(0.d0,0.d0)

do i=1,NN
do j=1,NN
aux=u0
do k=1,NN
aux=aux+a(i,k)*b(k,j)
enddo
c(i,j)=aux
enddo
enddo

return

end subroutine mult
```



BUAP

MEMORANDUM

Para:	Dr. José Sánchez-Dehesa. Dr. Felipe Pérez Rodríguez. Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera. Dra. Zorayda Lazcano Ortíz. Dr. J. Jesús Arriaga Rodríguez.	Presidente. Secretario. Vocal. Vocal. Asesor.
De:	Dra. Lilia Meza Montes, Coordinadora del área de Ciencia de Materiales.	
Asunto:	Se cita al examen de grado de Doctorado en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de Materiales) del M.C. Martín Alfonso Ibarias Alfaro.	
Fecha:	22 de junio, 2020.	
C.c.p.	Dr. Arkadii Krokhin, Asesor Externo.	

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el **EXAMEN DE GRADO DE DOCTORADO EN CIENCIAS (EN LA ESPECIALIDAD DE CIENCIA DE MATERIALES)** del **M.C. MARTÍN ALFONSO IBARIAS ALFARO**, con su tesis titulada: *“Cristal Fonónico como un Metamaterial Viscoso”*, que presentará el próximo día **Lunes 29 de junio de 2020 a las 10:00 horas (hora de Mexico)**, a través de la plataforma electrónica a cargo de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP debido a la emergencia sanitaria por el virus SARS CoV-2.

Dra. Lilia Meza Montes
Coordinadora